

सरल आवर्त गति

दोलनी गति जिसमें प्रत्यानयन बल विस्थापन के समानुपाती परन्तु दिशा विपरीत है।

प्रत्यानयन बल

$$F = -kx$$

प्रत्यानयन युग्म

$$\tau = -C\theta$$

गति का समीकरण

रेखीय स. आ. ग.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \text{ जहाँ } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

कोणीय स. आ. ग.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0, \text{ जहाँ } \omega^2 = \frac{C}{I}$$

स. आ. ग. में विस्थापन

$$x = a \sin (\omega t + \phi)$$

जहाँ a = आयाम, ω = कोणीय आवृत्ति $= 2\pi n = \frac{2\pi}{T}$

$(\omega t + \phi)$ = किसी समय t कला. ϕ = प्रा. कला कोण

स. आ. ग. में वेग

$$v = \frac{dx}{dt} = a\omega \cos (\omega t + \phi)$$

या

$$v = \omega (a^2 - x^2)^{1/2}$$

$$v_{\max} = a\omega, \quad \text{जब } x = 0$$

तथा

$$v_{\min} = 0, \quad \text{जब } x = a$$

स. आ. ग. में त्वरण

$$f = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 a \sin (\omega t + \phi)$$

या

$$f = -\omega^2 x$$

$$f_{\max} = \omega^2 a, \quad \text{उच्चतम स्थिति पर}$$

तथा

$$f_{\min} = 0, \quad \text{जब } x = 0$$

आवर्तकाल एवं आवृत्ति

रेखीय S.H.M.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

और आवृत्ति

$$n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

कोणीय S.H.M.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}},$$

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{I}}$$

स. आ. ग. में गतिज ऊर्जा

$$KE = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \cos^2 (\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} ka^2 \cos^2 (\omega t + \phi)$$

या

$$KE = \frac{1}{2} m\omega^2 (a^2 - x^2)$$

$$= \frac{1}{2} k (a^2 - x^2)$$

$$(KE)_{\max} = \frac{1}{2} ka^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \quad \text{जब } x = 0.$$

$$(KE)_{\min} = 0. \quad \text{जब } x = \pm a.$$

$$\text{विस्थापन के सापेक्ष औसत गतिज ऊर्जा} = \frac{1}{3} ka^2$$

$$\text{समय के सापेक्ष औसत गतिज ऊर्जा} = \frac{1}{4} ka^2.$$

स. आ. ग. में स्थितिज ऊर्जा

$$PE = U(x) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$= \frac{1}{2} ka^2 \sin^2 (\omega t + \phi)$$

$$(PE)_{\max} = \frac{1}{2} ka^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2$$

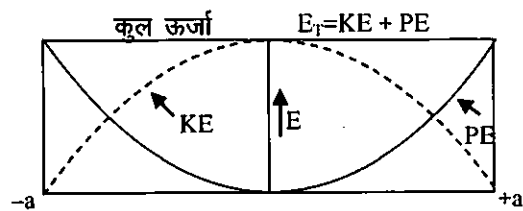
$$= 2\pi^2 mn^2 a^2, \text{ जब } x = \pm a.$$

$$(PE)_{\min} = 0, \quad \text{जब } x = 0.$$

$$\text{विस्थापन के सापेक्ष औसत स्थितिज ऊर्जा} = \frac{1}{6} ka^2$$

$$\text{समय के सापेक्ष औसत स्थितिज ऊर्जा} = \frac{1}{4} ka^2.$$

स. आ. ग. में कुल ऊर्जा



कुल ऊर्जा $E = KE + PE = \frac{1}{2} ka^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2$

स्प्रिंग से जुड़े द्रव्यमान का आवर्तकाल

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad k \rightarrow \text{बल नियतांक}$$

स्प्रिंग नियतांक k

$$k \propto \frac{1}{\ell}$$

यदि स्प्रिंग को दो भागों ℓ_1 तथा ℓ_2 में काट दिया जाये तो

$$k_1 = \frac{\ell}{\ell_1} k = \frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_1} k, \quad k_2 = \frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_2} k$$

यदि स्प्रिंग को समान भागों में काटा जाये तो प्रत्येक नये भाग का स्प्रिंग नियतांक $k' = nk$

स्प्रिंगों का समान्तर संयोजन

प्रभावी बल नियतांक

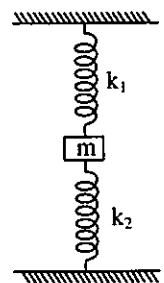
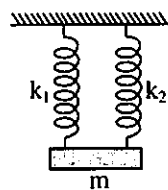
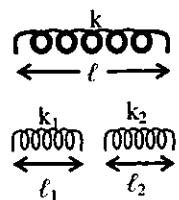
$$k' = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k'}}$$

n एक समान स्प्रिंग के लिए $k' = nk$

$$T' = \frac{T}{\sqrt{n}}$$

T $\rightarrow$ केवल एक स्प्रिंग के कारण आवर्तकाल



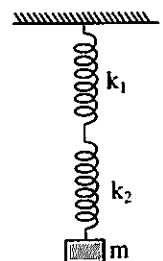
श्रेणी क्रम में संयोजन

प्रभावी बल नियतांक k' हो, तो

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

एक समान स्प्रिंगों के लिये $\frac{1}{k'} = \frac{n}{k}$

$$\text{एवं} \quad T' = T \sqrt{n}$$



दो स्प्रिंगों के लिये $\frac{1}{k'} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ या $k' = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$$

स्प्रिंग के दोनों सिरों से बन्धे दो द्रव्यमान

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

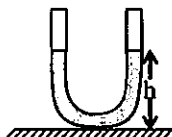


जहाँ

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \text{समानित द्रव्यमान}$$

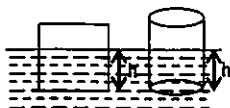
U-ट्यूब में द्रव का दोलन

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} \quad h \text{ द्रव स्तम्भ की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई है।}$$



तैरती वस्तु का दोलन

बैलनाकार वस्तु $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{adg}}$



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$$

आयताकार वस्तु $T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$

$d \rightarrow$ द्रव का घनत्व

$a \rightarrow$ अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल

$m \rightarrow$ वस्तु का द्रव्यमान

$h \rightarrow$ द्रव के अन्दर डूबी हुई बेलन या ब्लॉक की लम्बाई

सरल लोलक आवर्तकाल

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (\ell < R)$$

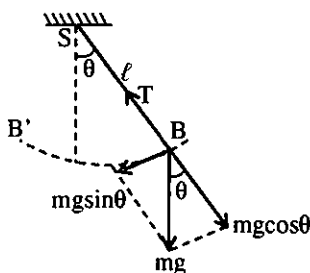
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g \left(1 + \frac{R}{\ell}\right)}}$$

जहाँ ℓ, R की कोटि का है।

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

जब $\ell \rightarrow \infty, T = 84.4 \text{ meter}$

सरल लोलक की गति स. आ. ग. तब ही होगी जबकि कोण θ_0 अल्प होगा।



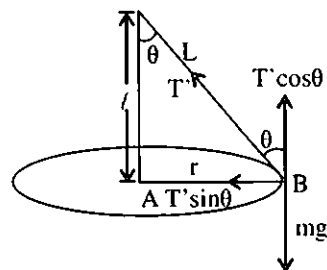
सेकण्ड सरल लोलक

$$T = 2 \text{ सेकण्ड} ; \quad \ell = 96 \text{ cm.}$$

शंकुल सरल लोलक

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g \tan \theta}}$$

$$= 2\pi \left[\frac{\sqrt{L^2 - r^2}}{g} \right]^{1/2} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$



निर्देश तल में आवर्तकाल, जबकि निर्देश तल स्वयं क्षैतिज में 'a' त्वरण से गतिमान हो

$$T = 2\pi \left[\frac{\ell}{\sqrt{g^2 + a^2}} \right]^{1/2}$$

सरल लोलक की लिफ्ट में गति

जब लिफ्ट a त्वरण से ऊपर जा रही हो,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g + a}}$$

जब लिफ्ट a त्वरण से नीचे जा रही हो,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g - a}}$$

लिफ्ट स्वतन्त्रता पूर्वक गिर रही है। (a = g),

$$T = \infty$$

लिफ्ट एक समान वेग से गतिमान हो। (a = 0),

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

ρ घनत्व के पिण्ड के सरल लोलक की d घनत्व के द्रव में स. आ. ग.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g \left(1 - \frac{d}{\rho} \right)}}$$

एक तार जिसका यंग का प्रत्यास्थता गुणांक Y है से लटकी एक वस्तु को ऊर्ध्वाधर स. आ. ग.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mL}{YA}}$$

A → तार के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल

m → वस्तु का द्रव्यमान

L → तार की लम्बाई

Y → यंग का प्रत्यास्थता गुणांक

अवतल काँच में स्थित एक छोटी गेंद की स. आ. ग.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

