12 घूर्णन गति

कोणीय विस्थापन

$$\theta = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}} = \frac{s}{r} \text{ (रेडियन में)}$$

कोणीय वेग

औसत कोणीय वेग

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \text{ rad/s}$$

तात्क्षणिक वेग

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \text{ rad/s}$$

$$\omega = 2\pi n = \left(\frac{2\pi}{T}\right)$$

कोणीय त्वरण

औसत कोणीय त्वरण

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \text{ rad/s}^2$$

तात्क्षणिक कोणीय त्वरण

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \text{ rad/s}^2$$

रेखीय वेग एवं कोणीय वेग में सम्बन्ध

$$v = \omega r = 2\pi n r = \frac{2\pi r}{T} \qquad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

रेखीय त्वरण एवं कोणीय त्वरण में सम्बन्ध

$$a = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

स्पर्श रेखीय त्वरण

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

त्रिज्य त्वरण

$$\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

परिणामी त्वरण

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$$

घूर्णन गति की समीकरणें

$$\omega_2 = \omega_1 + \alpha t$$

$$\theta = \omega_1 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 + 2\alpha\theta$$

$$\theta_{n^{th}} = \omega_1 + \frac{\alpha}{2}(2n-1)$$

जड़त्व आघूर्ण

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + ... = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

एक वस्तु के लिये जिसमें द्रव्यमान समान रूप से वितरित हो।

$$I = \int r^2 dm$$

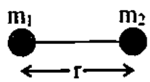
जड़त्व आघूर्ण की प्रमेय

(a) लम्बवत् अक्षो का प्रमेय $I_z = I_x + I_y$ यह केवल चपटी(समतल) वस्तु के लिये ही मान्य है।

(b) समान्तर अक्षों का प्रमेय – $I = I_G + Md^2 = MK^2 + Md^2$

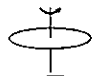
द्विपरमाण्विक अणु का जड़त्व आघूर्ण

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 = \left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right) r^2 = \mu r^2$$

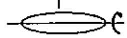


कुछ वस्तुओं के जड़त्व आघूर्ण

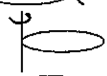
वलय : $I = MR^2$(अक्ष)



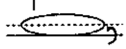
$I = MR^2/2$ (व्यास)



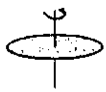
$I = 2\,MR^2$ (परिधि के स्पर्श रेखीय तथा अक्ष के समान्तर)



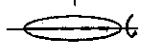
$I = (3/2)MR^2$ (परिधि के स्पर्श रेखीय तथा व्यास के समान्तर)



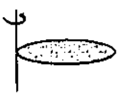
चकती: $I = \frac{1}{2}MR^2$ (अक्ष)



$I = \frac{1}{4}MR^2$ (व्यास)



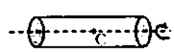
$I = \frac{3}{2}MR^2$ (अक्ष के समान्तर एवं परिधी से पारित)



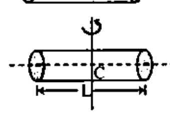
$I = \frac{5}{4}MR^2$ (व्यास के समान्तर एवं परिधी से पारित)

बेलन :

अक्ष के सापेक्ष $\quad I = \frac{1}{2}MR^2$



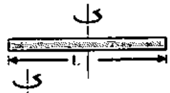
लम्बाई के लम्बवत् तथा C.M. से पारित



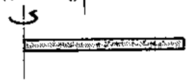
$$I = \frac{ML^2}{12} + \frac{MR^2}{4}$$

पतली छड :

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$ (लम्बाई के लम्बवत् तथा केन्द्र से पारित)

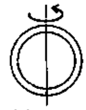


$$I = \frac{1}{3} ML^2$$ (एक सिरे से पारित)

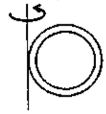


खोखला गोला :

$$I_{\text{व्यासत्}} = \frac{2}{3} MR^2$$

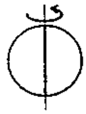


$$I_{\text{स्पर्श रेखीय}} = \frac{5}{3} MR^2$$

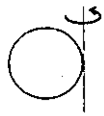


ठोस गोला :

$$I_{\text{व्यासत्}} = \frac{2}{5} MR^2$$

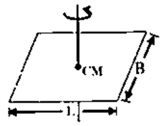


$$I_{\text{स्पर्श रेखीय}} = \frac{7}{5} MR^2$$



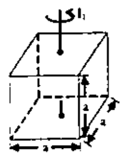
आयताकार प्लेट

$$I_c = \frac{M(L^2 + B^2)}{12}$$



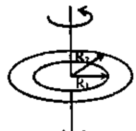
घन :

$$I = \frac{1}{6} Ma^2$$



खोखली चकती :

$$I = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$$

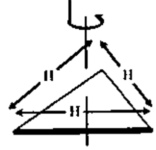


लम्बकोणीय वृत्तीय शंकु :

$$I = \frac{3}{10} MR^2$$

त्रिभुजाकार परत :

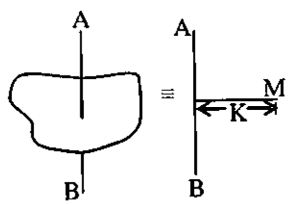
$$I = \frac{1}{6} MH^2$$ (आधार अक्ष के सापेक्ष)



घूर्णन त्रिज्या

$$I = MK^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

$$K = \left(\frac{I}{M}\right)^{1/2} = \left[\frac{\sum m_i r_i^2}{M}\right]^{1/2}$$



बल आघूर्ण

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad ; \quad |\vec{\tau}| = rF\sin\theta$$

बल आघूर्ण द्वारा किया गया कार्य $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta$

तार को मोड़ने में किया गया कार्य $W = \int_{0}^{\theta} (c\theta)d\theta = \frac{1}{2}c\theta^2$

कोणीय संवेग

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$|\vec{L}| = rp\sin\theta$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad \text{और} \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

बाह्य बल आघूर्ण की अनुपस्थिति में, $\vec{\tau} = 0$,

ताकि $L = I\omega$ = नियतांक यही कोणीय संवेग संरक्षण का नियम है।

कोणीय आवेग

$$\Delta L = \int_0^t \tau dt$$

घूर्णन गतिज ऊर्जा

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{L^2}{2I}$$

या $$\frac{L^2}{2I} = \frac{\vec{L}.\vec{L}}{2I}$$

घूर्णन शक्ति $$P_{rot} = \vec{\tau} \,.\, \vec{\omega}$$

$$E_{total} = E_{trans} + E_{rot} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$E_{total} = \frac{1}{2}Mv^2\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)$$

नत तल पर गति

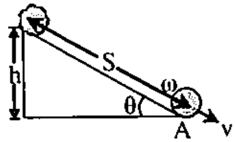
(A) **केवल स्थानान्तरीय गति के लिये** (बिना घूर्णन के)

$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$, वेग $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gs\sin\theta}$

त्वरण $f = g\sin\theta$, समय $t = \left(\frac{2s}{g\sin\theta}\right)^{1/2}$

(B) **लोटनी गति के लिये** (स्थानान्तरीय + घूर्णन)

$$\frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)=mgh$$

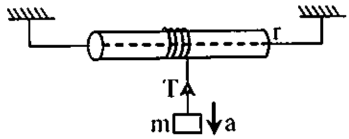


$$\text{वेग } v=\left[\frac{2gs\sin\theta}{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}\right]^{1/2}=\left[\frac{2gh}{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}\right]^{1/2}$$

$$\text{त्वरण } f=\frac{g\sin\theta}{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}$$

$$\text{समय } \quad t=\sqrt{\frac{2s}{f}}=\left[\frac{2s\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)^{1/2}}{g\sin\theta}\right]^{1/2}$$

किसी बेलन पर लिपटी रस्सी से जुड़ी वस्तु की गति



वस्तु का रेखीय त्वरण $\quad a=\frac{g}{\left(1+\frac{I}{mr^2}\right)}$

रस्सी में तनाव $\quad T=\frac{mg}{\left(1+\frac{mr^2}{I}\right)}$

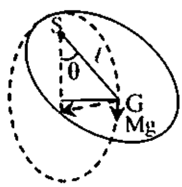
बेलन का कोणीय त्वरण

$$\alpha=\frac{a}{r}=\frac{g}{r\left(1+\frac{I}{mr^2}\right)}$$

कम्पाउण्ड (पिण्ड) लोलक

आवर्तकाल

$$T=2\pi\left[\frac{\frac{K^2}{\ell}+\ell}{g}\right]^{1/2}=2\pi\sqrt{\frac{I}{Mg\ell}}$$



$$T = 2\pi\left[\frac{L}{g}\right]^{1/2}$$

$$I = M(K^2 + \ell^2)$$

$K \rightarrow$ द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष घूर्णन त्रिज्या

तुल्य सरल लोलक की लम्बाई

$$L = \left(\frac{K^2}{\ell} + \ell\right)$$

$$T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{2K}{g}}$$

द्रव्यमान केन्द्र

द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = 0$

द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति सदिश

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n r_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

द्रव्यमान केन्द्र का वेग

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\vec{P}}{M}$$

दो कणों के निकाय के लिए द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति

$$\vec{X}_{cm} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_1 + m_2},$$

$$\vec{y}_{cm} = \frac{m_1\vec{y}_1 + m_2\vec{y}_2}{m_1 + m_2},$$

$$\vec{z}_{cm} = \frac{m_1\vec{z}_1 + m_2\vec{z}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2},$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}{m_1 + m_2}$$