Chapter
3

सम्मिश्र संख्यायें

सम्मिश्र संख्यायें वास्तविक तथा अधिकल्पित संख्याओं का संयोजन है।

सम्मिश्र संख्याओं की मूल अवधारणा
(Basic concepts of Complex number)

(1) **ifjHkk"kk %** $x+iy$ के रूप की संख्या, जहाँ $x, y \in R$ तथा $i=\sqrt{-1}$ हो, सम्मिश्र संख्या कहलाती है। $\sqrt{-1}$ को 'i' से प्रदर्शित करते हैं, जिसे 'आयोटा' कहते हैं। अतः $i=\sqrt{-1}$.

एक सम्मिश्र संख्या को सामान्यतः z से प्रदर्शित करते हैं, तथा सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय को C से प्रदर्शित करते हैं।

अर्थात् $\quad C=\{x+iy : x \in R, y \in R, i=\sqrt{-1}\}$

उदाहरणार्थ : $5+3i, -1+i, 0+4i, 4+0i$ आदि सम्मिश्र संख्यायें हैं।

(i) आयलर प्रथम गणितज्ञ थे जिन्होंने प्रतीक i (आयोटा) को -1 के वर्गमूल के लिए प्रयुक्त किया। इस प्रतीक (symbol) को अधिकल्पित इकाई भी कहते हैं।

(ii) किसी धनात्मक वास्तविक संख्या a के लिए,

$\sqrt{-a}=\sqrt{-1\times a}=\sqrt{-1}\sqrt{a}=i\sqrt{a}$

(iii) गुणधर्म $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ तभी सत्य है जब a और b में कम से कम एक अऋणात्मक हो। यदि a तथा b दोनों ऋणात्मक हों, तब $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

(2) ***आयोटा (I) की पूर्णांक घातें:*** यदि $i=\sqrt{-1}$, तो $i^2=-1$, $i^3=-i$ तथा $i^4=1$. $i^n\,(n>4)$, के मान ज्ञात करने के लिए सबसे पहले n को 4 से विभाजित करते हैं। माना q भागफल तथा r शेषफल है, तब $n=4q+r$, जहाँ $0\le r\le 3$ अर्थात् $n=4q+r$ जबकि $0\le r\le 3$

$$i^n=i^{4q+r}=(i^4)^q.(i)^r=(1)^q.(i)^r=i^r$$

अतः, यदि $n>4$, तब $i^n=i^r$, जहाँ r शेषफल है।

सामान्यतः $i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i$, जहाँ n कोई पूर्णांक है।

सम्मिश्र संख्या के वास्तविक तथा काल्पनिक भाग
(Real and Imaginary parts of a complex number)

यदि x और y दो वास्तविक संख्यायें हों, तो $z=x+iy$ के रूप की संख्या को सम्मिश्र संख्या कहते हैं। यहाँ x को z का वास्तविक भाग तथा y को z का काल्पनिक (अधिकल्पित) भाग कहते हैं। z के वास्तविक भाग को $\text{Re}(z)$ तथा काल्पनिक (अधिकल्पित) भाग को $\text{Im}(z)$ से प्रदर्शित करते हैं।

यदि $z=3-4i$, तो $\text{Re}(z)=3$ तथा $\text{Im}(z)=-4$.

यदि सम्मिश्र संख्या z का काल्पनिक भाग शून्य हो अर्थात् $\text{Im}(z)=0$, तब संख्या पूर्णतः वास्तविक तथा यदि वास्तविक भाग शून्य हो अर्थात् $\text{Re}(z)=0$, तब पूर्णतः काल्पनिक (अधिकल्पित) कहलाती है।

सम्मिश्र संख्याओं पर बीजगणितीय संक्रियायें
(Algebraic operations with complex numbers)

माना दो सम्मिश्र संख्यायें $z_1=a+ib$ तथा $z_2=c+id$ हैं, तब

योगफल : $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$

अन्तर (व्यवकलन) : $(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$

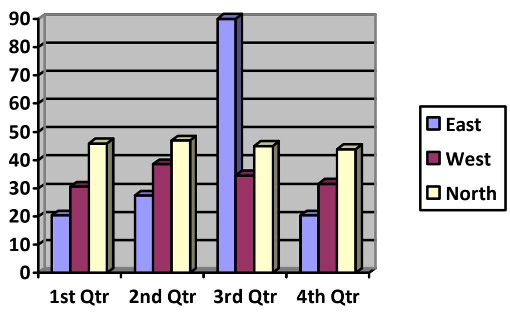
गुणन : $(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$

विभाजन : $\dfrac{a+ib}{c+id}$ (जबकि c तथा d में से कम से कम एक अशून्य हो)

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)}{(c+id)}.\frac{(c-id)}{(c-id)} \qquad \text{(परिमेयीकरण करने पर)}$$

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(ac+bd)}{c^2+d^2}+\frac{i(bc-ad)}{c^2+d^2}.$$

बीजगणितीय संक्रियाओं के गुणधर्म



: माना z_1, z_2 तथा z_3 कोई तीन सम्मिश्र संख्यायें हैं, तब उनकी बीजगणितीय संक्रियायें निम्न नियमों का पालन करती हैं

(i) सम्मिश्र संख्याओं का योगफल, क्रम विनिमेय तथा साहचर्य नियमों का पालन करता है।

अर्थात् $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ तथा $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

(ii) सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल, क्रमविनिमेय तथा साहचर्य नियमों का पालन करता है।

अर्थात् $z_1 z_2 = z_2 z_1$ तथा $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.

(iii) सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल, वितरण नियम का पालन करता है।

अर्थात् $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ तथा $(z_2 + z_3) z_1 = z_2 z_1 + z_3 z_1$.

दो सम्मिश्र संख्याओं की समानता (Equality of two complex numbers)

दो सम्मिश्र संख्यायें $z_1 = x_1 + iy_1$ तथा $z_2 = x_2 + iy_2$ समान कहलाती हैं, यदि और केवल यदि उनके वास्तविक भाग तथा काल्पनिक भाग पृथक्-पृथक् समान हों।

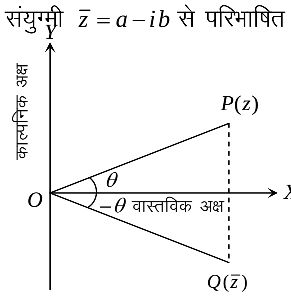
अर्थात् $z_1 = z_2 \Rightarrow x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ व $y_1 = y_2$.

सम्मिश्र संख्या क्रम का गुणधर्म नहीं रखती है अर्थात् $(a + ib) <$ अथवा $> (c + id)$ परिभाषित नहीं है।

उदाहरणार्थ : $9 + 6i > 3 + 2i$ का कोई अर्थ नहीं है।

सम्मिश्र संख्या का संयुग्मी (Conjugate of a complex number)

(1) ***संयुग्मी सम्मिश्र संख्या :*** यदि एक सम्मिश्र संख्या $z = a + ib, (a, b) \in R$, तो इसका संयुग्मी $\bar{z} = a - ib$ से परिभाषित होता है।



अतः $\text{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ तथा $\text{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$. ज्यामितीय रूप में, z का संयुग्मी, वास्तविक अक्ष के सापेक्ष z का बिन्दु प्रतिबिम्ब होता है।

(2) ***संयुग्मी के गुणधर्म*** : यदि z, z_1 तथा z_2 सम्मिश्र संख्यायें हों, तो हम निम्न परिणाम प्राप्त करते हैं :

(i) $\overline{(\bar{z})} = z$

(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

(iii) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

(iv) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \, \bar{z}_2$,

व्यापक रूप में, $\overline{z_1 . z_2 . z_3 ..... z_n} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2 . \bar{z}_3 ..... \bar{z}_n$

(v) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$

(vi) $(\bar{z})^n = \overline{(z^n)}$

(vii) $z + \bar{z} = 2\,\text{Re}(z) = 2\,\text{Re}(\bar{z}) =$ पूर्णतः वास्तविक

(viii) $z - \bar{z} = 2i\,\text{Im}(z) =$ पूर्णतः काल्पनिक

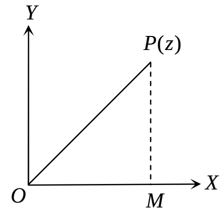
(ix) $z\,\bar{z} = |z|^2 =$ पूर्णतः वास्तविक

(x) $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\,\text{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 2\,\text{Re}(\bar{z}_1 z_2)$

(3) ***सम्मिश्र संख्या का प्रतिलोम*** : अशून्य सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ का प्रतिलोम $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z . \bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

सम्मिश्र संख्या का मापांक (Modulus of a complex number)

सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ का मापांक धनात्मक वास्तविक संख्या $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ a, b वास्तविक संख्यायें हैं। ज्यामितीय रूप में, $|z|$ को बिन्दु P की मूलबिन्दु से दूरी द्वारा निरूपित किया जाता है।



अर्थात् $|z| = OP$.

यदि $|z| = 1$, तो सम्मिश्र संख्या को इकाई मापांक **सम्मिश्र संख्या** कहते हैं। स्पष्टतः z, इकाई त्रिज्या वाले वृत्त पर स्थित है, जिसका केन्द्र $(0, 0)$ है।

मापांक के गुणधर्म

(i) $|z| \geq 0 \Rightarrow |z| = 0$,यदि और केवल यदि $z = 0$ तथा $|z| > 0$, यदि और केवल यदि $z \neq 0$

(ii) $-|z| \leq \text{Re}\,(z) \leq |z|$ तथा $-|z| \leq \text{Im}(z) \leq |z|$

(iii) $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}| = |zi|$

(iv) $z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$

(v) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$

व्यापक रूप में, $|z_1 z_2 z_3 ...... z_n| = |z_1|\,|z_2|\,|z_3| .... |z_n|$

(vi) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $(z_2 \neq 0)$

(vii) $|z^n| = |z|^n, n \in N$

(viii) $|z_1 \pm z_2|^2 = (z_1 \pm z_2)(\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2)$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$

अथवा $|z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\,\text{Re}(z_1 \bar{z}_2)$

(ix) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2}$ पूर्णतः काल्पनिक है

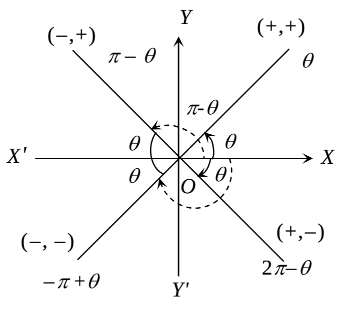
अथवा $\text{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = 0$

(x) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left\{|z_1|^2 + |z_2|^2\right\}$

(समांतर चतुर्भुज का नियम)

सम्मिश्र संख्या का कोणांक (Argument of a complex number)

माना $z = a + ib$ एक सम्मिश्र संख्या है। यदि इस सम्मिश्र संख्या को ज्यामितीय रूप में बिन्दु P द्वारा प्रदर्शित किया जाए, तो रेखा OP द्वारा वास्तविक अक्ष के साथ बनाया गया कोण z का कोणांक कहलाता है तथा

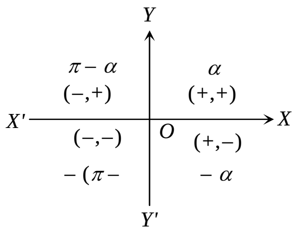


$arg\,(z) = \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right),$

$\theta = \angle POM,$

सम्मिश्र संख्या का कोणांक अद्वितीय नहीं होता है। चूँकि यदि कोणांक का मान θ है, तो $2n\pi + \theta$, जहाँ $n \in I$, भी कोणांक होगा।

(1) ***arg (z) का मुख्य मान*** (Principal value of arg (z)) : कोणांक का `मुख्य मान कहलाता है। z के कोणांक का मुख्य मान $\alpha, \alpha - \theta, -\alpha + \theta$ तथा $-\theta$ होगा, जो z के क्रमशः 1st , 2nd , 3rd तथा 4th चतुर्थांश में स्थित होने पर निर्भर करता है, जहाँ $\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right|$ (न्यून कोण)



;2 ***कोणांक के गुणधर्म***

(i) $arg\,(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2) + 2k\pi,\ (k = 0$ या 1 या $-1)$

व्यापक रूप में, s $arg(z_1 z_2 z_3 .... z_n) = arg(z_1) + arg(z_2)$ $+ arg(z_3) + ... + arg(z_n) + 2k\pi$, $(k = 0$ या 1 या $-1)$

(ii) $arg(z_1 \bar{z}_2) = arg(z_1) - arg(z_2)$

(iii) $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg\,z_1 - arg\,z_2 + 2k\pi, (k = 0$ या 1 या $-1)$

(iv) $arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2arg\,z + 2k\pi, (k = 0$ या 1 या $-1)$

(v) $arg(z^n) = n\,arg\,z + 2k\pi, (k = 0$ या 1 या $-1)$

(vi) यदि $arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \theta$, तो $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 2k\pi - \theta$, जहाँ $k \in I$

(vii) $arg\,\bar{z} = -arg\,z = arg\frac{1}{z}$

(viii) $arg(z - \bar{z}) = \pm\pi/2$

(ix) $arg(-z) = arg(z) \pm \pi$

(x) $arg(z) - arg(\bar{z}) = \pm\pi$ (यदि z शुद्ध काल्पनिक संख्या है)

(xi) $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2|z_1||z_2|\cos(\theta_1 - \theta_2),$ जहाँ $\theta_1 = arg(z_1)$ तथा $\theta_2 = arg(z_2)$

(xii) $arg(\bar{z})$ का व्यापक मान $2n\pi - arg(z)$ होता है।

सारणी : 3.1 सम्मिश्र संख्याओं के कोणांक के मान

सम्मिश्र संख्या	कोणांक का मान
शुद्ध धनात्मक वास्तविक संख्या	0
शुद्ध ऋणात्मक वास्तविक संख्या	π
शुद्ध धनात्मक काल्पनिक संख्या	$\pi/2$
शुद्ध ऋणात्मक वास्तविक संख्या	$3\pi/2$ या $-\pi/2$
$-(z)$	$\lvert\theta \pm \pi\rvert$, यदि θ क्रमशः धनात्मक तथा ऋणात्मक हो
(iz)	$\left\{\frac{\pi}{2} + arg\,(z)\right\}$
−(iz)	$\left\{arg\,(z) - \frac{\pi}{2}\right\}$
(z^n)	$n.\,arg\,(z)$
$(z_1.z_2)$	$arg\,(z_1) + arg\,(z_2)$
$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$	$arg\,(z_1) - arg\,(z_2)$

सम्मिश्र संख्या का वर्गमूल (Square root of a complex number)

यदि $z = a + ib$ एक सम्मिश्र संख्या है,

तो $\sqrt{a+ib} = \pm\left[\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right]$, $b > 0$ के लिए

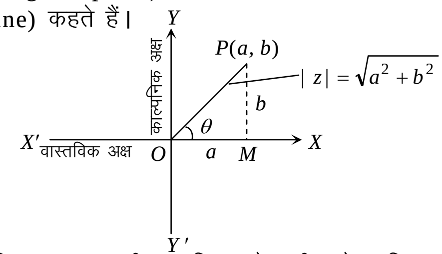
$= \pm\left[\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} - i\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right]$, $b < 0$ के लिए

$a - ib$ का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए उपरोक्त परिणामों में i के स्थान पर $-i$ रखते हैं।

सम्मिश्र संख्या का निरूपण
(Various representations of a complex number)

एक सम्मिश्र संख्या निम्न रूपों में निरूपित होती है

(1) **ज्यामितीय निरूपण (कार्तीय निरूपण)** : दो समकोणीय अक्षों XOX' तथा YOY', जिन्हें क्रमशः वास्तविक तथा अधिकल्पित (काल्पनिक) अक्ष कहते हैं, के सापेक्ष, किसी सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ को एक बिन्दु P, जिसके निर्देशांक (a, b) हैं, से निरूपित किया जाता है। एक सम्मिश्र संख्या z को बिन्दु रूप में जिस तल में निरूपित किया जाता है उस तल में स्थित सभी बिन्दु, सम्मिश्र संख्या से प्रदर्शित होते हैं। इस तल को **आर्गण्ड तल** (Argand plane) या **सम्मिश्र तल** अथवा **गॉसियन तल** (Gaussian plane) कहते हैं।



किसी सम्मिश्र संख्या की मूलबिन्दु से दूरी को सम्मिश्र संख्या का मापांक कहते हैं तथा इसे $|z|$ अर्थात् $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ से निरूपित करते हैं।

किसी सम्मिश्र संख्या z द्वारा वास्तविक अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बनाये गये कोण को z का कोणांक कहते हैं, अर्थात्

$amp\ (z) = arg\,(z) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

(2) **त्रिकोणमितीय (ध्रुवीय) निरूपण** : त्रिभुज OPM में, माना $OP = r$, तो $a = r\cos\theta$ तथा $b = r\sin\theta$, अतः z को $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ से निरूपित किया जा सकता है, जहाँ $r = |z|$ तथा $\theta = arg(z)$ का मुख्य मान

$arg(z)$ के व्यापक मान के लिए, $z = r[\cos(2n\pi + \theta) + i\sin(2n\pi + \theta)]$

कभी-कभी $(\cos\theta + i\sin\theta)$ को संक्षेप में $cis\theta$ भी लिखते हैं।

(3) **सदिश निरूपण** : यदि $P\ (a, b)$ आर्गण्ड तल में सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ के सापेक्ष एक बिन्दु है, तो $\overrightarrow{OP} = a\hat{i} + b\hat{j}$,

$\therefore |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

तथा $arg\,z$ = सदिश $\overrightarrow{OP}$ की दिशा $= \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

(4) **आयलर (चरघातांकी) निरूपण** : हम जानते हैं, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, अतः z को $z = re^{i\theta}$ से निरूपित किया जा सकता है, जहाँ $|z| = r$ तथा $\theta = arg\,(z)$

सम्मिश्र संख्या का लघुगणक (Logarithm of a complex number)

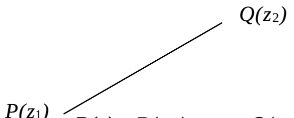
$$\log(x+iy) = \log_e(re^{i\theta}) = \log_e r + \log_e e^{i\theta} = \log_e r + i\theta$$

$$= \log_e \sqrt{(x^2+y^2)} + i\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \log_e(z) = \log_e|z| + i\,amp\,(z)$$

निर्देशांक ज्यामिति में सम्मिश्र संख्याओं का उपयोग (Use of complex numbers in co-ordinate geometry)

(1) **दो बिन्दुओं के बीच की दूरी :** दो बिन्दुओं $P(z_1)$ तथा $Q(z_2)$ के मध्य की दूरी, $PQ = |z_2 - z_1| = |affix\ of\ Q - affix\ of\ P|$

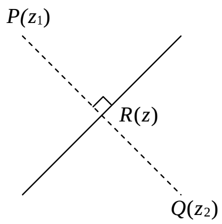


(2) **विभाजन सूत्र** : माना $R(z)$, $P(z_1)$ तथा $Q(z_2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को $m_1 : m_2 (m_1, m_2 > 0)$ के अनुपात में विभाजित करता है।

(i) यदि $R(z)$ रेखाखण्ड PQ को $m_1 : m_2$ के अनुपात में अंतः विभाजित करता है, तो $z = \dfrac{m_1 z_2 + m_2 z_1}{m_1 + m_2}$

(ii) यदि $R(z)$ रेखाखण्ड PQ को $m_1 : m_2$ के अनुपात में बाह्यतः विभाजित करता है, तो $z = \dfrac{m_1 z_2 - m_2 z_1}{m_1 - m_2}$

(3) **लम्ब समद्विभाजक का समीकरण** : यदि $P(z_1)$ तथा $Q(z_2)$ दो स्थिर बिन्दु हों तथा $R(z)$ एक चर बिन्दु इस प्रकार है कि इसकी $P(z_1)$ तथा $Q(z_2)$ से दूरी सदैव समान हो,



अर्थात् $PR = QR$

अथवा $|z - z_1| = |z - z_2|$

हल करने पर,

$z(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + \bar{z}(z_1 - z_2) = |z_1|^2 - |z_2|^2$

अतः z, z_1 तथा z_2 के लंब समद्विभाजक पर स्थित है।

(4) **सरल रेखा का समीकरण**

(i) **प्राचल समीकरण** : बिन्दुओं z_1 तथा z_2 को मिलाने वाली रेखा का समीकरण $z = tz_1 + (1-t)z_2$, जबकि $t \in R$

(ii) **अप्राचल समीकरण :** बिन्दुओं z_1 तथा z_2 को मिलाने वाली रेखा का समीकरण $\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow z(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) - \bar{z}(z_1 - z_2) + z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 = 0$$

(iii) (a) तीन बिन्दु z_1, z_2, z_3 समरेखीय होंगे, यदि $\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(b) यदि तीन बिन्दु $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ संरेख हों, तो

AB की प्रवणता = BC की प्रवणता = AC की प्रवणता

$$\Rightarrow \frac{z_1 - z_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} = \frac{z_2 - z_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3} = \frac{z_1 - z_3}{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}.$$

(iv) **सरल रेखा का व्यापक समीकरण :** सरल रेखा का व्यापक समीकरण $\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$, जहाँ a एक सम्मिश्र संख्या तथा b वास्तविक संख्या है।

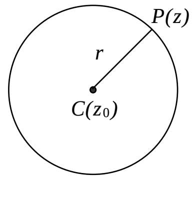
(v) **रेखा की प्रवणता (ढाल) :** रेखा $\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$ की सम्मिश्र प्रवणता $-\dfrac{a}{\bar{a}} = -\dfrac{\bar{z} \text{ का गुणांक}}{z \text{ का गुणांक}}$ तथा रेखा $\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$ की वास्तविक प्रवणता $-\dfrac{\text{Re}(a)}{\text{Im}(a)} = -i\dfrac{(a+\bar{a})}{(a-\bar{a})}$ होगी।

(vi) **लंब की लंबाई :** बिन्दु z_1 से रेखा $\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$ पर डाले गए लंब की लंबाई $\dfrac{|\bar{a}z_1 + a\bar{z}_1 + b|}{|a| + |\bar{a}|}$ अथवा $\dfrac{|\bar{a}z_1 + a\bar{z}_1 + b|}{2|a|}$ होती है।

(5) **वृत्त का समीकरण** : (i) उस वृत्त का समीकरण, जिसका केन्द्र बिन्दु z_0 पर है तथा त्रिज्या r है, $|z - z_o| = r$ होगा।

(ii) यदि वृत्त का केन्द्र मूलबिन्दु तथा त्रिज्या r हो, तो इसका समीकरण $|z| = r$ होगा।

(iii) $|z - z_0| < r$, वृत्त $|z - z_0| = r$ के अंदर का भाग प्रदर्शित करता है तथा $|z - z_0| > r$, वृत्त $|z - z_0| = r$ के बाहर के भाग को निरूपित करता है, इसी प्रकार, $|z - z_0| > r$ वृत्त के बाहर स्थित सभी बिन्दुओं का समुच्चय है तथा $|z - z_0| \ge r$ वृत्त के बाहर तथा वृत्त $|z - z_0| = r$ पर स्थित सभी बिन्दुओं का समुच्चय है।



(iv) **वृत्त का व्यापक समीकरण :** वृत्त का व्यापक समीकरण $z\bar{z} + a\bar{z} + \bar{a}z + b = 0$ होता है, जहाँ a एक सम्मिश्र संख्या है तथा $b \in R$.

$\therefore$ वृत्त के केन्द्र तथा त्रिज्या क्रमशः $-a$ तथा $\sqrt{|a|^2 - b}$ होते हैं।

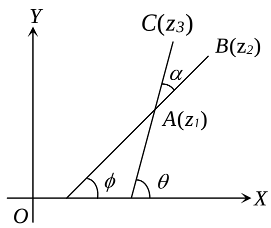
(v) **वृत्त का व्यास रूप में समीकरण :** यदि व्यास के सिरे $A(z_1)$ तथा $B(z_2)$ हों, तथा $P(z)$ वृत्त पर कोई अन्य बिन्दु हो, तो $(z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_2) + (z - z_2)(\bar{z} - \bar{z}_1) = 0$,

जो कि वृत्त का व्यास रूप में अभीष्ट समीकरण है।

घूर्णन प्रमेय (Rotation theorem)

घूर्णन प्रमेय अर्थात् दो प्रतिच्छेदी रेखाओं के मध्य का कोण, इसे **कोनी** (Coni) विधि भी कहते हैं।

माना z_1, z_2 तथा z_3 क्रमशः तीन बिन्दु A, B तथा C को आर्गन्ड तल में निरूपित करते हों, तो $\overrightarrow{AC} = z_3 - z_1$ तथा $\overrightarrow{AB} = z_2 - z_1$ तथा माना $arg\,\overrightarrow{AC} = arg\,(z_3 - z_1) = \theta$ तथा $\overrightarrow{AB} = arg\,(z_2 - z_1) = \phi$



माना $\angle CAB = \alpha$,

$\because \angle CAB = \alpha = \theta - \phi$

$= arg\,\overrightarrow{AC} - arg\,\overrightarrow{AB} = arg\,(z_3 - z_1) - arg\,(z_2 - z_1)$

$= arg\left(\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)$

अथवा AC तथा AB के मध्य का कोण

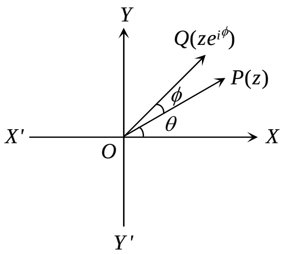
$= arg\left(\dfrac{\text{affix of } C - \text{affix of } A}{\text{affix of } B - \text{affix of } A}\right)$

(1 **आर्गन्ड तल में घूर्णन संकेत के रूप में सम्मिश्र संख्या :** माना $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ .....(i)

$r.e^{i\theta}$ एक सम्मिश्र संख्या है, जो आर्गन्ड तल में बिन्दु P को निरूपित करती है।

तब, $OP = |z| = r$ तथा $\angle POX = \theta$

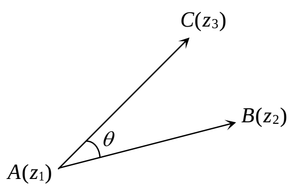
सम्मिश्र संख्या $z_1 = ze^{i\phi}$ को लेने पर अथवा $z_1 = re^{i\theta}.e^{i\phi} = re^{i(\theta+\phi)}$ {समीकरण (i) से}



स्पष्टतः, सम्मिश्र संख्या z_1 आर्गन्ड तल में बिन्दु Q को निरूपित करती है, जब $OQ = r$ तथा $\angle QOX = \theta + \phi$.

स्पष्टतः, z तथा $e^{i\phi}$ के गुणनफल से सदिश $\overrightarrow{OP}$, ϕ कोण से वामावर्त दिशा में घूम जाता है। इसी प्रकार z का $e^{-i\phi}$ से गुणनफल से प्राप्त सदिश $\overrightarrow{OP}$ दक्षिणावर्त दिशा में घूम जाता है।

(i) यदि z_1, z_2 तथा z_3 बिन्दु A, B, C के निर्देशांक इस प्रकार से हैं कि $AC = AB$ तथा $\angle CAB = \theta$, इसलिए $\overrightarrow{AB} = z_2 - z_1$, $\overrightarrow{AC} = z_3 - z_1$.



तब $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ को θ कोण से वामावर्त दिशा में घुमाने से प्राप्त होता है, इसलिए $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}e^{i\theta}$

अथवा $(z_3 - z_1) = (z_2 - z_1)e^{i\theta}$ अथवा $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = e^{i\theta}$

(ii) यदि $AC \neq AB$ तब $\dfrac{(z_3 - z_1)}{(z_2 - z_1)} = \dfrac{CA}{BA}.e^{i\theta}$

(2) यदि चार बिन्दु z_1, z_2, z_3 व z_4 चक्रीय क्रम में हैं, तो

$\dfrac{(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_4 - z_2)(z_1 - z_3)}$ = वास्तविक या $arg\left(\dfrac{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)}{(z_1 - z_3)(z_4 - z_2)}\right) = \pm\pi, 0$

त्रिभुज की असमिकायें (Triangle's inequalities)

किसी त्रिभुज में, दो भुजाओं का योग, तीसरी भुजा से अधिक तथा दो भुजाओं का अंतर, तीसरी भुजा से कम होता है। इस मूल सिद्धांत के उपयोग से सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय के लिए निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं।

(1) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(2) $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(3) $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

(4) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

आर्गण्ड समतल में मानक बिन्दुपथ (Standard loci in the argand plane)

(1) यदि आर्गण्ड समतल में एक चर बिन्दु z इस प्रकार हो, कि $arg\ (z) = \theta$, तो z का बिन्दु पथ, (मूल बिन्दु के अतिरिक्त) मूलबिन्दु से होकर गुजरने वाली तथा x-अक्ष से θ कोण से झुकी हुई सरल रेखा होती है।

(2) यदि z एक चर बिन्दु है तथा z_1 एक स्थिर बिन्दु, आर्गण्ड तल में इस प्रकार है कि $(z - z_1) = \theta$, तो z का बिन्दुपथ, z_1 से प्रदर्शित बिन्दु से गुजरने वाली तथा x-अक्ष पर θ कोण पर झुकी हुई सरल रेखा होती है। यह ध्यान रखें कि बिन्दु z_1 बिन्दुपथ से बाहर होता है।

(3) यदि आर्गण्ड तल में z एक चर बिन्दु तथा z_1, z_2 दो स्थिर बिन्दु हों, तो

(i) $|z - z_1| = |z - z_2|$ $\Rightarrow z$ का बिन्दुपथ, z_1 तथा z_2 को मिलाने वाले रेखाखण्ड का लम्ब समद्विभाजक होता है।

(ii) $|z - z_1| + |z - z_2|$ = नियतांक $(\neq |z_1 - z_2|)$ $\Rightarrow z$ का बिन्दुपथ, एक दीर्घवृत्त होता है।

(iii) $|z - z_1| + |z - z_2| = |z_1 - z_2|$

$\Rightarrow z$ का बिन्दुपथ, z_1 तथा z_2 को मिलाने वाला रेखाखण्ड होगा।

(iv) $|z - z_1| - |z - z_2| = |z_1 - z_2|$ $\Rightarrow z$ का बिन्दुपथ, z_1 तथा z_2 को मिलाने वाली सरल रेखा होगी, परन्तु z, z_1 तथा z_2 के मध्य स्थित नहीं होगा।

(v) $|z - z_1| - |z - z_2| =$ स्थिरांक $(\neq |z_1 - z_2|)$ $\Rightarrow z$ का बिन्दुपथ एक अतिपरवलय होगा।

(vi) $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \Rightarrow z$ का बिन्दुपथ एक वृत्त होगा। जहाँ z_1 तथा z_2 वृत्त के व्यास के सिरे होंगे।

(vii) $|z - z_1| = k|z - z_2|$ $k \neq 1 \Rightarrow z$ का बिन्दुपथ वृत्त होता है।

(viii) $arg\left(\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \alpha$ (स्थिर) $\Rightarrow z$ का बिन्दुपथ, वृत्तखण्ड होता है।

(ix) $arg\left(\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \pm\pi/2 \Rightarrow z$ का बिन्दुपथ एक वृत्त होगा, जिसके व्यास के शीर्ष z_1 तथा z_2 हैं।

(x) $arg\left(\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right) = 0$ अथवा $\pi \Rightarrow z$ का बिन्दुपथ, z_1 तथा z_2 से गुजरने वाली सरल रेखा होती है।

डी मोयवर प्रमेय (De Moivre's theorem)

(1) यदि n कोई पूर्णांक हो, तो

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

(2) यदि $z = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$(\cos\theta_3 + i\sin\theta_3)$ ...... $(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$

तब $z = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + ... + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + ... + \theta_n)$,

जहाँ $\theta_1, \theta_2, \theta_3 ..... \theta_n \in R$.

(3) यदि $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ तथा n एक धनात्मक पूर्णांक हो, तो

$z^{1/n} = r^{1/n}\left[\cos\left(\dfrac{2k\pi + \theta}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{2k\pi + \theta}{n}\right)\right]$,

जहाँ $k = 0, 1, 2, 3, ...(n-1)$.

महत्वपूर्ण परिणाम : यदि $n \in Q$, तो

(i) $(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos n\theta - i\sin n\theta$

(ii) $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta$

(iii) $(\cos\theta - i\sin\theta)^{-n} = \cos n\theta + i\sin n\theta$

(iv) $(\sin\theta + i\cos\theta)^n = \cos n\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin n\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

यदि n एक परिमेय संख्या नहीं है या सम्मिश्र संख्या $\cos\theta + i\sin\theta$ के रूप में नहीं है, तो यह प्रमेय वैद्य नहीं है।

'C + iS' विधि द्वारा श्रेणी का योगफल
(Summation of series 'C + is' method)

यह एक सामान्य विधि है तथा निम्न रूप की श्रेणी का योगफल ज्ञात करने के लिए प्रयुक्त की जाती है।

$a_0\sin\alpha + a_1\sin(\alpha+\beta) + a_2\sin(\alpha+2\beta) + ...$

या $a_0\cos\alpha + a_1\cos(\alpha+\beta) + a_2\cos(\alpha+2\beta) + ...$

यदि $S = a_0\sin\alpha + a_1\sin(\alpha+\beta) + a_2\sin(\alpha+2\beta) + ...$

तथा $C = a_0\cos\alpha + a_1\cos(\alpha+\beta) + a_2\cos(\alpha+2\beta) + ...$

$\therefore$ $C + iS = a_0[\cos\alpha + i\sin\alpha] + a_1[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)] + ...$

$= a_0 e^{i\alpha} + a_1 e^{i(\alpha+\beta)} + a_2 e^{i(\alpha+2\beta)} + ...$

अन्तिम श्रेणी का योगफल निम्नलिखित श्रेणियों में किसी एक का उपयोग करके ज्ञात की जा सकती है।

(1) **sine, cosine, sinh या cosh श्रेणियाँ**

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ......\infty = \sin x$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ......\infty = \cos x$$

$$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...\infty = \sinh x$$

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...\infty = \cosh x$$

(2) ग्रेगरीज श्रेणियाँ

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ......\infty = \tan^{-1} x$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...\infty = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

सम्मिश्र संख्या के मूल (Roots of a complex number)

(1) **सम्मिश्र संख्या के n मूल** ($z^{1/n}$) **:** माना $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ एक सम्मिश्र संख्या है। सम्मिश्र संख्या के मूल ज्ञात करने के लिए, सर्वप्रथम इसे कोणांक के व्यापक मान के साथ ध्रुवीय रूप में परिवर्तित करते हैं तथा डि-माइवर प्रमेय का प्रयोग करते हैं। डि-माइवर प्रमेय के द्वारा किसी सम्मिश्र संख्या के n वें मूल के n विभिन्न मान ज्ञात होते हैं, अतः $z^{1/n} = r^{1/n}\left[\cos\frac{2k\pi+\theta}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right]$

जहाँ $k = 0, 1, 2, ..., (n-1)$.

$z^{1/n}$ के मूलों के गुणधर्म

(i) $z^{1/n}$ के सभी मूल गुणोत्तर श्रेणी में होते हैं, जिसका सार्वानुपात $e^{2\pi i/n}$ है।

(ii) $z^{1/n}$ के सभी मूलों का योगफल शून्य होता है।

(iii) $z^{1/n}$ के सभी मूलों का गुणनफल $(-1)^{n-1}z$ होता है।

(iv) $z^{1/n}$ के सभी मूलों के मापांक समान होते हैं तथा प्रत्येक का मान $r^{1/n}$ अथवा $|z|^{1/n}$ के बराबर होता है।

(v) $z^{1/n}$ के सभी मूलों के कोणांक समान्तर श्रेणी में होते हैं, जिसका सार्वान्तर $\frac{2\pi}{n}$ है।

(vi) $z^{1/n}$ के सभी मूल उस वृत्त की परिधि पर स्थित होते हैं, जिसका केन्द्र मूलबिन्दु तथा त्रिज्या $|z|^{1/n}$ है। ये मूल वृत्त को n समान भागों में विभाजित भी करते हैं तथा n भुजाओं का एक सम बहुभुज बनाते हैं।

(2) **इकाई के n वें मूल :** इकाई के n वें मूल निम्न समीकरण का हल समुच्चय होंगे

$x^n = 1 = \cos 0 + i\sin 0 = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi$

$x = [\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi]^{1/n}$

$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, जहाँ $k = 0, 1, 2, ..., (n-1)$.

इकाई के n मूलों के गुणधर्म

(i) माना $\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = e^{i(2\pi/n)}$, इकाई के n मूलों को श्रेणी $1, \alpha, \alpha^2, ... \alpha^{n-1}$ के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। स्पष्टतः यह एक गुणोत्तर श्रेणी है, जिसका सार्वान्तर α, अर्थात् $e^{i(2\pi/n)}$ है।

(ii) इकाई के सभी n मूलों का योग शून्य होता है, अर्थात्

$1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{n-1} = 0.$

(iii) इकाई के सभी n मूलों का गुणनफल $(-1)^{n-1}$ होता है।

(iv) इकाई के n मूलों की p वीं घातों का योगफल

$$1 + \alpha^p + \alpha^{2p} + ... + \alpha^{(n-1)p} = \begin{cases} 0, \text{जब } p, n \text{ का गुणज नहीं है} \\ n, \text{जब } n, p \text{ का गुणज है} \end{cases}$$

(v) यदि इकाई के n मूलों को सम्मिश्र तल में निरूपित किया जाए, तो यह इकाई वृत्त जिसका केन्द्र मूलबिन्दु है, के अंतर्गत स्थित n भुजाओं वाले समबहुभुज के शीर्षों को प्रदर्शित करते हैं।

(3) **इकाई के घनमूल :** इकाई के घनमूल, समीकरण $x^3 - 1 = 0$ $\Rightarrow x = (1)^{1/3}$ का हल समुच्चय होंगे।

$\Rightarrow x = (\cos 0 + i\sin 0)^{1/3} \Rightarrow x = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$,

जहाँ $k = 0, 1, 2$.

इस प्रकार, इकाई के घनमूल

$1, \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}, \; \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$ अथवा $1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$ हैं।

वैकल्पिक विधि : $x = (1)^{1/3} \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$

$$x = 1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

यदि एक सम्मिश्र मूल ω हो, तो दूसरा मूल ω^2 होगा तथा इसका विलोम भी सत्य है।

इकाई के घनमूलों के गुणधर्म

(i) $1 + \omega + \omega^2 = 0$

(ii) $\omega^3 = 1$

(iii) $1 + \omega^n + \omega^{2n} = \begin{cases} 0, \text{यदि } n, 3 \text{ का गुणज नहीं है} \\ 3, \text{यदि } n, 3 \text{ का गुणज है} \end{cases}$

(iv) यदि इकाई के घन मूलों को सम्मिश्र तल में निरूपित किया जाए, तो मूल, इकाई त्रिज्या के वृत्त जिसका केन्द्र मूलबिन्दु है, के अंतर्गत स्थित समबाहु त्रिभुज के शीर्षों को प्रदर्शित करते हैं, जिसका एक शीर्ष धनात्मक वास्तविक अक्ष पर होता है।

(v) एक सम्मिश्र संख्या $a + ib$, जिसके लिए $|a:b| = 1:\sqrt{3}$ अथवा $\sqrt{3}:1$ हो, को सदैव i, ω, ω^2 में व्यक्त कर सकते हैं।

(vi) -1 के घनमूल $-1, -\omega, -\omega^2$ होते हैं।

(4) **इकाई के चतुर्थ मूल :** इकाई के चार, चतुर्थ मूल समीकरण $x^4 - 1 = 0$ के हल समुच्चय से प्राप्त होते हैं।

$x^4 - 1 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1, \pm i$

इकाई के चतुर्थ मूल एक वर्ग के शीर्ष होते हैं, जो कि निर्देशाक्षों पर स्थित होते हैं।

Tips & Tricks

✍ एक सम्मिश्र संख्या को वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्म के रूप में भी परिभाषित कर सकते हैं तथा इसे (a, b) से प्रदर्शित करते हैं। सम्मिश्र संख्या को परिभाषित करने के लिए दो वास्तविक संख्याओं का विशेष क्रम में होना आवश्यक है।

✍ $0 = 0 + 0i$ योगफल के लिए तत्समक अवयव है।

✍ $1 = 1 + i0$ गुणनफल के लिए तत्समक अवयव है।

✍ सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ का योज्य प्रतिलोम $-z$ होता है, (अर्थात् $-a - ib$).

✍ प्रत्येक अशून्य सम्मिश्र संख्या z के लिए, गुणन प्रतिलोम $1/z$ होता है।

✍ $|z| \geq |\text{Re}(z)| \geq \text{Re}(z)$ तथा $|z| \geq |\text{Im}(z)| \geq \text{Im}(z)$.

✍ $\frac{z}{\bar{z}}$ सदैव एक इकाई मापांक सम्मिश्र संख्या होती है, यदि $z \neq 0$

✍ $|\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|$

✍ $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

अतः $|z_1 + z_2|$ का संभावित महत्तम मान होगा $|z_1| + |z_2|$ तथा $|z_1 + z_2|$ का संभावित न्यूनतम मान $||z_1| - |z_2||$ होगा।

✍ यदि $\left|z + \frac{1}{z}\right| = a$, तो $|z|$ के महत्तम तथा न्यूनतम मान क्रमशः $\frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$ तथा $\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$ होंगे।

✍ $|z_1 + \sqrt{z_1^2 - z_2^2}| + |z_2 - \sqrt{z_1^2 - z_2^2}| = |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$

✍ यदि $z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$ तथा $\arg z_1 = \arg z_2$.

✍ $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow$ arg $(z_1) =$ arg (z_2) अर्थात् z_1 तथा z_2 समान्तर हैं।

✍ $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow$ arg $(z_1) -$ arg $(z_2) = 2n\pi$, जहाँ n पूर्णांक है।

✍ $|z_1 - z_2| = ||z_1| - |z_2|| \Leftrightarrow arg(z_1) - arg(z_2) = 2n\pi$, जहाँ n पूर्णांक है।

✍ $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow arg\ (z_1) - \arg\ (z_2) = \pi/2$.

✍ यदि $|z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1$ तो

(i) $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| - |z_2|)^2 + (arg\ (z_1) - \arg\ (z_2))^2$.

(ii) $|z_1 + z_2|^2 \geq (|z_1| + |z_2|)^2 - (arg\ (z_1) - arg\ (z_2))^2$.

✍ $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|\cos(\theta_1 - \theta_2)$.

✍ $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|\cos(\theta_1 - \theta_2)$.

✍ यदि $|z_1| = |z_2|$ तथा $amp\ (z_1) + amp\ (z_2) = 0$, तो z_1 और z_2 एक दूसरे की संयुग्मी सम्मिश्र संख्याएँ हैं।

✍ i का गुणनफल : चूँकि $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ तथा

$$i = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right), \text{ तो } iz = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right]$$

अतः z को i से गुणा करने पर, z धनात्मक दिशा में समकोण से घूम जाता है। एक सदिश में -1 से गुणा करने पर वह दो समकोण से घूम जाता है। एक सदिश को $(\cos\theta + i\sin\theta)$ से गुणा करने पर वह धनात्मक दिशा में θ कोण से घूम जाता है।

✍ यदि z_1 व z_2 दो सम्मिश्र संख्यायें इस प्रकार हैं कि $|z_1 z_2| = r_1 r_2$; $arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$ तथा $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2}$, $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2$ तथा जहाँ $|z_1| = r_1, |z_2| = r_2, arg(z_1) = \theta_1$ तथा $arg(z_2) = \theta_2$.

✍ त्रिभुज का क्षेत्रफल, जिसके शीर्ष z, iz तथा $z + iz$ हैं, $\frac{1}{2}|z|^2$ होता है।

✍ त्रिभुज का क्षेत्रफल, जिसके शीर्ष z, wz तथा $z + wz$ हों, $\frac{\sqrt{3}}{4}|z^2|$ होता है।

✍ यदि z_1, z_2, z_3 एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हों तथा z_o परिकेन्द्र हो, तो $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + = 3z_0^2$.

✍ यदि $z_1, z_2, z_3 ..... z_n$ किसी n भुजाओं के समबहुभुज के शीर्ष हों तथा z_0 उसका केन्द्रक हो, तो $z_1^2 + z_2^2 + ... + z_n^2 = nz_0^2$.

✍ यदि z_1, z_2, z_3 एक त्रिभुज के शीर्ष हों, तो त्रिभुज समबाहु होगा, यदि और केवल यदि $(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 0$

अथवा, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$

अथवा, $\frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{1}{z_2 - z_3} + \frac{1}{z_3 - z_1} = 0$.

✍ यदि z_1, z_2, z_3 किसी समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं, जो कि z_2 पर समकोणीय है, तो $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 2z_2(z_1 + z_3)$.

✍ यदि z_1, z_2, z_3 किसी समकोण समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हों, तो $(z_1 - z_2)^2 = 2(z_1 - z_3)(z_3 - z_2)$.

✍ यदि ΔABC के शीर्ष A, B, C क्रमशः z_1, z_2, z_3 द्वारा निरूपित होते है, तब इस त्रिभुज का लम्बकेन्द्र $\frac{a(\sec A)z_1 + b(\sec B)z_2 + c(\sec C)z_3}{a\sec A + b\sec B + c\sec C}$ होगा।

✍ समीकरण $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = k$ (जहाँ k एक वास्तविक संख्या है) एक वृत्त को निरूपित करता है जिसका केन्द्र $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ तथा त्रिज्या $\frac{1}{2}\sqrt{2k - |z_1 - z_2|^2}$ हैं, जहाँ $k \geq \frac{1}{2}|z_1 - z_2|^2$.

✍ $(\overline{iz}) = -i\bar{z}$, $\text{Re}(iz) = -\text{Im}(z), \text{Im}(iz) = \text{Re}(z)$.

✍ यदि z_1 व z_2 सम्मिश्र संख्यायें इस प्रकार हैं कि $z_1 + z_2$ एक वास्तविक संख्या है, तो यह आवश्यक नहीं है कि z_1 व z_2 एक दूसरे की संयुग्मी हैं।

✍ यदि z_1 व z_2 सम्मिश्र संख्यायें इस प्रकार हैं कि $z_1 z_2$ एक वास्तविक संख्या है, तो यह आवश्यक नहीं है कि z_1 व z_2 एक दूसरे की संयुग्मी हैं।

✍ चूँकि $|z|^2 = [\text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z)]^2$, इसलिए $\text{Re}(z) \leq |z|, \text{Im}(z) \leq |z|$.

✍ किसी $a, b \in R$ के लिए

(i) $\sqrt{a+ib}+\sqrt{a-ib}=\sqrt{2\{\sqrt{a^2+b^2}+a\}}$

(ii) $\sqrt{a+ib}-\sqrt{a-ib}=i\sqrt{2\{\sqrt{a^2+b^2}-a\}}$

✍ $|z|+|z_2|+......+|z_n|=|z_1+z_2+.....+z_n|$ केवल तभी सम्भव है जब $z_1, z_2, ...z_n$ के कोणांक बराबर हों।

✍ दो सम्मिश्र संख्याओं का योगफल एवं गुणनफल एक साथ वास्तविक होगा यदि एवं केवल यदि वे एक-दूसरे के संयुग्मी हैं।

✍ यदि ω तथा ω^2 इकाई के सम्मिश्र घनमूल हैं, तब

(i) $(a\omega+b\omega^2)(a\omega^2+b\omega)=a^2+b^2-ab$

(ii) $(a+b)(a\omega+b\omega^2)(a\omega^2+b^2\omega)=a^3+b^3$

(iii) $(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

(iv) $(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)=a^3+b^3+c^3-3abc$

✍ यदि तीन बिन्दु z_1, z_2, z_3 सम्बन्ध $az_1+bz_2+cz_3=0$ के द्वारा सम्बन्धित हों, जहाँ $a+b+c=0$, तो तीनों बिन्दु समरेखीय होंगे।

✍ यदि z एक सम्मिश्र संख्या है, तब e^z आवर्ती है।

✍ यदि तीन सम्मिश्र संख्यायें समान्तर श्रेणी में हैं, तब वे सम्मिश्र तल में एक सरल रेखा पर स्थित होती हैं।

Ordinary Thinking

Objective Questions

आयोटा की पूर्णांक घातें, सम्मिश्र संख्याओं की बीजगणितीय संक्रियायें तथा समानता

1. $\sqrt{-2}\sqrt{-3} =$ [Roorkee 1978]
(a) $\sqrt{6}$ (b) $-\sqrt{6}$
(c) $i\sqrt{6}$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. यदि n एक धनात्मक पूर्णांक हो, तो निम्न में कौन सा सम्बन्ध असत्य है
(a) $i^{4n} = 1$ (b) $i^{4n-1} = i$
(c) $i^{4n+1} = i$ (d) $i^{-4n} = 1$

3. यदि n एक धनात्मक पूर्णांक हो, तो $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n+1} =$
(a) 1 (b) - 1
(c) i (d) $-i$

4. यदि $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$ हो, तो m का न्यूनतम पूर्णांक मान है
[IIT 1982; MNR 1984; UPSEAT 2001; MP PET 2002]
(a) 2 (b) 4
(c) 8 (d) इनमें से कोई नहीं

5. यदि $(1-i)^n = 2^n$ हो, तो n बराबर है [RPET 1990]
(a) 1 (b) 0
(c) -1 (d) इनमें से कोई नहीं

6. $(1+i)^5 \times (1-i)^5$ का मान होगा [Karnataka CET 1992]
(a) - 8 (b) $8i$
(c) 8 (d) 32

7. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 =$
(a) $2i$ (b) $-2i$
(c) -2 (d) 2

8. $\frac{i^{592}+i^{590}+i^{588}+i^{586}+i^{584}}{i^{582}+i^{580}+i^{578}+i^{576}+i^{574}} - 1$ का मान है
(a) -1 (b) - 2
(c) -3 (d) - 4

9. $1 + i^2 + i^4 + i^6 + ... + i^{2n} =$ [EAMCET 1980]
(a) धनात्मक (b) ऋणात्मक
(c) शून्य (d) निर्धारित नहीं किया जा सकता

10. $i^2 + i^4 + i^6 + ...$ $(2n+1)$ पदों तक =
[EAMCET 1980; Kerala (Engg.) 2005]
(a) i (b) $-i$
(c) 1 (d) -1

11. यदि $i = \sqrt{-1}$, तो $1 + i^2 + i^3 - i^6 + i^8$ का मान है [RPET 1995]
(a) $2-i$ (b) 1
(c) 3 (d) -1

12. यदि $i^2 = -1$, तो $\sum_{n=1}^{200} i^n$ का मान है [MP PET 1996]
(a) 50 (b) - 50
(c) 0 (d) 100

13. योगफल $\sum_{n=1}^{13}(i^n + i^{n+1})$, जहाँ $i = \sqrt{-1}$ है, का मान है[IIT 1998]
(a) i (b) $i-1$
(c) $-i$ (d) 0

14. n (न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक) का वह मान, जो $\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^n$ को एक वास्तविक संख्या में बदल दे, होगा [Roorkee 1998]
(a) 2 (b) 3
(c) 4 (d) 5

15. $i^{1+3+5+...+(2n+1)}$ का मान है [AMU 1999]
(a) i यदि n सम है, - i यदि n विषम है
(b) 1 यदि n सम है, - 1 यदि n विषम है
(c) 1 यदि n विषम है, - 1 यदि n सम है
(d) i यदि n सम है, - 1 यदि n विषम है

16. यदि $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$, तो x का मान होगा [RPET 2001]
(a) $\cos\theta + i\sin\theta$ (b) $\cos\theta - i\sin\theta$
(c) $\cos\theta \pm i\sin\theta$ (d) $\sin\theta \pm i\cos\theta$

17. $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3}, (n \in N)$ का मान है [RPET 2001]
(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

18. $(1+i)^8 + (1-i)^8$ का मान है [RPET 2001; KCET 2001]
(a) 16 (b) - 16
(c) 32 (d) - 32

19. $(1+i)^{10}$, जबकि $i^2 = -1$, का मान है
(a) 32 i (b) 64 + i
(c) 24 i - 32 (d) इनमें से कोई नहीं

20. $(1+i)^6 + (1-i)^6$ का मान होगा [RPET 2002]
(a) 0 (b) 2^7
(c) 2^6 (d) इनमें से कोई नहीं

21. यदि $i^2 = -1$, तो $i + i^2 + i^3 + ...$ के 1000 पदों तक का योगफल होगा [Kerala (Engg.) 2002]
(a) 1 (b) - 1
(c) i (d) 0

22. यदि $x = 3 + i$ हो, तो $x^3 - 3x^2 - 8x + 15 =$ [UPSEAT 2003]
(a) 6 (b) 10
(c) - 18 (d) - 15

23. $(1+i)^{2n} = (1-i)^{2n}$ के लिये न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक n का मान है
[Karnataka CET 2004]
(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

24. समीकरण $\frac{(1+i)x-2i}{3+i}+\frac{(2-3i)y+i}{3-i}=i$ को सन्तुष्ट करने वाले x, y के मान हैं [IIT 1980; MNR 1987]
(a) $x=-1, y=3$ (b) $x=3, y=-1$
(c) $x=0, y=1$ (d) $x=1, y=0$

25. यदि z_1 तथा z_2 दो सम्मिश्र संख्यायें हों, तो $\text{Re}(z_1z_2)=$
(a) $\text{Re}(z_1).\text{Re}(z_2)$ (b) $\text{Re}(z_1).\text{Im}(z_2)$
(c) $\text{Im}(z_1).\text{Re}(z_2)$ (d) इनमें से कोई नहीं

26. $\left(\frac{1}{1-2i}+\frac{3}{1+i}\right)\left(\frac{3+4i}{2-4i}\right)=$ [Roorkee 1979; RPET 1999; Pb. CET 2003]
(a) $\frac{1}{2}+\frac{9}{2}i$ (b) $\frac{1}{2}-\frac{9}{2}i$
(c) $\frac{1}{4}-\frac{9}{4}i$ (d) $\frac{1}{4}+\frac{9}{4}i$

27. $1-i$ का योज्य प्रतिलोम है
(a) $0+0i$ (b) $-1-i$
(c) $-1+i$ (d) इनमें से कोई नहीं

28. $\text{Re}\frac{(1+i)^2}{3-i}=$
(a) $-1/5$ (b) $1/5$
(c) $1/10$ (d) $-1/10$

29. यदि $(1-i)x+(1+i)y=1-3i$, तो $(x,y)=$
(a) $(2,-1)$ (b) $(-2,1)$
(c) $(-2,-1)$ (d) $(2, 1)$

30. $\frac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}$ वास्तविक होगा, यदि $\theta=$ [IIT 1976; EAMCET 2002]
(a) $2n\pi$ (b) $n\pi+\frac{\pi}{2}$
(c) $n\pi$ (d) इनमें से कोई नहीं
[जहाँ n एक पूर्णांक है]

31. $\frac{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}=$
(a) $-\frac{3}{2}i$ (b) $\frac{3}{2}i$
(c) $-\frac{3}{2}$ (d) $\frac{3}{2}$

32. यदि z तथा z' दो ऐसी सम्मिश्र संख्यायें हों कि $z.z'=z$, तो $z'=$
(a) $0+i0$ (b) $1+0i$
(c) $0+i$ (d) $1+i$

33. यदि $a^2+b^2=1$, तो $\frac{1+b+ia}{1+b-ia}=$
(a) 1 (b) 2
(c) $b+ia$ (d) $a+ib$

34. $\frac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}$ पूर्णतः अधिकल्पित होगा, यदि $\theta=$ [IIT 1976; Pb. CET 2003]
(a) $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ (b) $n\pi+\frac{\pi}{3}$
(c) $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं
[जहाँ n एक पूर्णांक है]

35. $(1-\cos\theta+2i\sin\theta)^{-1}$ का वास्तविक भाग है [IIT 1978, 86]
(a) $\frac{1}{3+5\cos\theta}$ (b) $\frac{1}{5-3\cos\theta}$
(c) $\frac{1}{3-5\cos\theta}$ (d) $\frac{1}{5+3\cos\theta}$

36. यदि $(x+iy)^{1/3}=a+ib$, तब $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ का मान है [IIT 1982; Karnataka CET 2000]
(a) $4(a^2+b^2)$ (b) $4(a^2-b^2)$
(c) $4(b^2-a^2)$ (d) इनमें से कोई नहीं

37. $\left\{\frac{2i}{1+i}\right\}^2=$ [MNR 1984; BIT Ranchi 1992]
(a) 1 (b) $2i$
(c) $1-i$ (d) $1-2i$

38. समीकरण $(x+iy)(2-3i)=4+i$ को संतुष्ट करने के लिए x, y के मान होंगे [Roorkee 1978]
(a) $x=\frac{5}{13}, y=\frac{8}{13}$ (b) $x=\frac{8}{13}, y=\frac{5}{13}$
(c) $x=\frac{5}{13}, y=\frac{14}{13}$ (d) इनमें से कोई नहीं

39. $(x^4+2xi)-(3x^2+yi)=(3-5i)+(1+2yi)$ को संतुष्ट करने के लिए x, y के वास्तविक मान हैं [Roorkee 1984]
(a) $x=2, y=3$ (b)
(c) दोनों (a) व (b) (d) इनमें से कोई नहीं

40. $\frac{(1+i)^2}{(2-i)}$ का काल्पनिक भाग है
(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{3}{5}$
(c) $\frac{4}{5}$ (d) इनमें से कोई नहीं

41. यदि $z\neq0$ एक सम्मिश्र संख्या हो, तो
(a) $\text{Re}(z)=0\Rightarrow\text{Im}(z^2)=0$ (b) $\text{Re}(z^2)=0\Rightarrow\text{Im}(z^2)=0$
(c) $\text{Re}(z)=0\Rightarrow\text{Re}(z^2)=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

42. यदि $\frac{5(-8+6i)}{(1+i)^2}=a+ib$, तो $(a,b)=$ [RPET 1986]
(a) $(15, 20)$ (b) $(20, 15)$
(c) $(-15, 20)$ (d) इनमें से कोई नहीं

43. सत्य कथन है [Roorkee 1989]
(a) $1-i<1+i$ (b) $2i+1>-2i+1$
(c) $2i>1$ (d) इनमें से कोई नहीं

44. $\frac{1-2i}{2+i}+\frac{4-i}{3+2i}=$ [RPET 1987]
(a) $\frac{24}{13}+\frac{10}{13}i$ (b) $\frac{24}{13}-\frac{10}{13}i$

(c) $\frac{10}{13}+\frac{24}{13}i$ (d) $\frac{10}{13}-\frac{24}{13}i$

45. $a+ib>c+id$ को केवल तब ही परिभाषित किया जा सकता है जब
(a) $b=0, c=0$ (b) $b=0, d=0$
(c) $a=0, c=0$ (d) $a=0, d=0$

46. यदि $x+iy=\frac{3}{2+\cos\theta+i\sin\theta}$, तो x^2+y^2 बराबर है
(a) $3x-4$ (b) $4x-3$
(c) $4x+3$ (d) इनमें से कोई नहीं

47. यदि $\frac{(p+i)^2}{2p-i}=\mu+i\lambda$, तो $\mu^2+\lambda^2$ का मान है
(a) $\frac{(p^2+1)^2}{4p^2-1}$ (b) $\frac{(p^2-1)^2}{4p^2-1}$
(c) $\frac{(p^2-1)^2}{4p^2+1}$ (d) $\frac{(p^2+1)^2}{4p^2+1}$

48. यदि $z=3-4i$, तो $z^4-3z^3+3z^2+99z-95$ का मान होगा
(a) 5 (b) 6
(c) - 5 (d) - 4

49. यदि $z_1=1-i$ व $z_2=-2+4i$, तो $\text{Im}\left(\frac{z_1z_2}{z_1}\right)=$
(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

50. यदि $\frac{3x+2iy}{5i-2}=\frac{15}{8x+3iy}$, तो
(a) $x=1, y=-3$
(b) $x=-1, y=3$
(c) $x=1, y=3$
(d) $x=-1, y=-3$ या $x=1, y=3$

51. यदि $\sum_{k=0}^{100} i^k=x+iy$ हो, तो x और y के मान होंगे
(a) $x=-1, y=0$ (b) $x=1, y=1$
(c) $x=1, y=0$ (d) $x=0, y=1$

52. यदि $z(1+a)=b+ic$ व $a^2+b^2+c^2=1$, तो $\frac{1+iz}{1-iz}=$
(a) $\frac{a+ib}{1+c}$ (b) $\frac{b-ic}{1+a}$
(c) $\frac{a+ic}{1+b}$ (d) इनमें से कोई नहीं

53. यदि z_1, z_2 दो सम्मिश्र संख्याएँ इस प्रकार हैं कि z_1+z_2 तथा z_1z_2 दोनों वास्तविक हैं, तब [RPET 1996]
(a) $z_1=-z_2$ (b) $z_1=\bar{z}_2$
(c) $z_1=-\bar{z}_2$ (d) $z_1=z_2$

54. यदि $(x+iy)(p+iq)=(x^2+y^2)i$, तब
(a) $p=x, q=y$ (b) $p=x^2, q=y^2$
(c) $x=q, y=p$ (d) इनमें से कोई नहीं

55. $\frac{(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)}{(\cot u+i)(1+i\tan v)}$ का $A+iB$ रूप है [Roorkee 1980]
(a) $\sin u\cos v[\cos(x+y-u-v)+i\sin(x+y-u-v)]$
(b) $\sin u\cos v[\cos(x+y+u+v)+i\sin(x+y+u+v)]$
(c) $\sin u\cos v[\cos(x+y+u+v)-i\sin(x+y+u+v)]$
(d) इनमें से कोई नहीं

56. यदि $x, y\in R$ एवं $(x+iy)(3+2i)=1+i$, तो (x, y) है
(a) $\left(1, \frac{1}{5}\right)$ (b)
(c) $\left(\frac{5}{13}, \frac{1}{13}\right)$ (d)

57. यदि $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100}=a+ib$, तो [MP PET 1998]
(a) $a=2, b=-1$ (b) $a=1, b=0$
(c) $a=0, b=1$ (d) $a=-1, b=2$

58. यदि $z_1=(4,5)$ और $z_2=(-3,2)$ तो z_1/z_2 का मान होगा [RPET 1996]
(a) $\left(\frac{-23}{12}, \frac{-2}{13}\right)$ (b) $\left(\frac{2}{13}, \frac{-23}{13}\right)$
(c) $\left(\frac{-2}{13}, \frac{-23}{13}\right)$ (d)

59. यदि $z=1+i$, तो z^2 का गुणन प्रतिलोम है (जबकि $i=\sqrt{-1}$) [Karnataka CET 1999]
(a) 2 i (b) 1 - i
(c) - $i/2$ (d) $i/2$

60. यदि $\begin{vmatrix} 6i & -3i & 1 \\ 4 & 3i & -1 \\ 20 & 3 & i \end{vmatrix}=x+iy$, तो (x, y) = [MP PET 2000]
(a) (3, 1) (b) (1, 3)
(c) (0, 3) (d) (0, 0)

61. यदि $a=\cos\theta+i\sin\theta$ तब $\frac{1+a}{1-a}=$
(a) $\cot\theta$ (b) $\cot\frac{\theta}{2}$
(c) $i\cot\frac{\theta}{2}$ (d) $i\tan\frac{\theta}{2}$

62. x व y के वास्तविक मानों के लिए समीकरण $3-2yi=9^x-7i$ का हल होगा, जबकि $i^2=-1$ [AMU 2000]
(a) $x=0.5$, $y=3.5$ (b) $x=5$, $y=3$
(c) $x=\frac{1}{2}$, $y=7$ (d) $x=0, y=\frac{3+7i}{2i}$

63. सम्मिश्र संख्या $\frac{1+2i}{1-i}$ सम्मिश्र तल पर निम्न में से किस चतुर्थांश में स्थित है [MP PET 2001]
(a) प्रथम (b) द्वितीय
(c) तृतीय (d) चतुर्थ

64. $\frac{1}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$ का वास्तविक भाग है [Karnataka CET 2001, 05]
(a) 1/4 (b) 1/2

(c) $\tan \theta/2$ (d) $\frac{1}{(1-\cos\theta)}$

65. कथन $(a+ib)<(c+id)$ निम्न में से किसके लिए सत्य है [RPET 2002]

(a) $a^2+b^2=0$ (b) $b^2+c^2=0$
(c) $a^2+c^2=0$ (d) $b^2+d^2=0$

66. यदि एक संख्या का गुणन प्रतिलोम स्वयं वही संख्या हो, तो इसका प्रारम्भिक मान होगा [RPET 2003]

(a) i (b) - 1
(c) 2 (d) - i

67. यदि $z=x+iy, z^{1/3}=a-ib$ तथा $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=k(a^2-b^2)$, तब k का मान है [DCE 2005]

(a) 2 (b) 4
(c) 6 (d) 1

सम्मिश्र संख्याओं का संयुग्मी, मापांक तथा कोणांक

1. सम्मिश्र संख्याएँ $\sin x+i\cos 2x$ तथा $\cos x-i\sin 2x$ के किस मान के लिये एक दूसरे की संयुग्मी हैं [IIT 1988]

(a) $x=n\pi$
(b) $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$
(c) $x=0$
(d) x के किसी भी मान के लिए नहीं

2. यदि z एक सम्मिश्र संख्या हो, तो $(\overline{z^{-1}})(\overline{z})=$

(a) 1 (b) -1
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

3. यदि z एक ऐसी सम्मिश्र संख्या हो कि $z^2=(\overline{z})^2$, तो

(a) z पूर्णतः वास्तविक है
(b) z पूर्णतः अधिकल्पित है
(c) z या तो पूर्णतः वास्तविक है या पूर्णतः अधिकल्पित है
(d) इनमें से कोई नहीं

4. यदि z एक सम्मिश्र संख्या हो, तो $z.\overline{z}=0$ यदि और केवल यदि

(a) $z=0$ (b) $\text{Re}(z)=0$
(c) $\text{Im}(z)=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

5. यदि $(a+ib)(c+id)(e+if)(g+ih)=A+iB$ हो, तब $(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2)$ का मान है [MNR 1989]

(a) A^2+B^2 (b) A^2-B^2
(c) A^2 (d) B^2

6. समीकरण $z^2+\overline{z}=0$ के हलों की संख्या है

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

7. सम्मिश्र संख्या z के लिए $z+\overline{z}$ व $z\,\overline{z}$ में [RPET 1987]

(a) एक वास्तविक संख्या है
(b) एक काल्पनिक संख्या है
(c) दोनों वास्तविक संख्यायें हैं
(d) दोनों काल्पनिक संख्यायें हैं

8. यदि $3+ix^2y$ व x^2+y+4i परस्पर संयुग्मी हों, तो x व y के मान होंगे

(a) $(-2,-1)$ या $(2,-1)$ (b) $(-1,2)$ या $(-2,-1)$
(c) $(1,2)$ या $(-1,-2)$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. सम्मिश्र संख्या $\frac{2+5i}{4-3i}$ का संयुग्मी है

(a) $\frac{7-26i}{25}$ (b) $\frac{-7-26i}{25}$
(c) $\frac{-7+26i}{25}$ (d) $\frac{7+26i}{25}$

10. $(z+a)(\overline{z}+a)$ तुल्य है (जहाँ a वास्तविक है)

(a) $|z-a|$ (b) z^2+a^2
(c) $|z+a|^2$ (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

11. यदि $\frac{z-i}{z+i}(z\neq -i)$ एक पूर्णतः अधिकल्पित संख्या है, तब $z.\overline{z}$ बराबर है

(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

12. यदि $\frac{c+i}{c-i}=a+ib$, जहाँ a,b,c वास्तविक हैं, तो $a^2+b^2=$ [MP PET 1996]

(a) 1 (b) -1
(c) c^2 (d) $-c^2$

13. यदि $(x+iy)(1-2i)$ का संयुग्मी $1+i$ हो, तो [MP PET 1996]

(a) $x=\frac{1}{5}$ (b) $y=\frac{3}{5}$
(c) $x+iy=\frac{1-i}{1-2i}$ (d) $x-iy=\frac{1-i}{1+2i}$

14. सम्मिश्र संख्या $\frac{(2+i)^2}{3+i}$ का संयुग्मी $a+ib$ के रूप में निम्न है [Karnataka CET 2001; Pb. CET 2001]

(a) $\frac{13}{2}+i\left(\frac{15}{2}\right)$ (b) $\frac{13}{10}+i\left(\frac{-15}{2}\right)$
(c) $\frac{13}{10}+i\left(\frac{-9}{10}\right)$ (d) $\frac{13}{10}+i\left(\frac{9}{10}\right)$

15. यदि $z=3+5i$, तब $z^3+\overline{z}+198=$ [EAMCET 2002]

(a) $-3-5i$ (b) $-3+5i$
(c) $3+5i$ (d) $3-5i$

16. सम्मिश्र संख्या $\frac{2-3i}{4-i}$ का संयुग्मी है [MP PET 2003]

(a) $\frac{3i}{4}$ (b) $\frac{11+10i}{17}$
(c) $\frac{11-10i}{17}$ (d) $\frac{2+3i}{4i}$

17. $1+i$ का संयुग्मी है [RPET 2003]

(a) i (b) 1
(c) $1-i$ (d) $1+i$

18. सर्वसमिका $|z-4|<|z-2|$ निम्न में किस क्षेत्र को निरूपित करती है [IIT 1982; RPET 1995; AIEEE 2002]

(a) $\text{Re}(z)>0$ (b) $\text{Re}(z)<0$
(c) $\text{Re}(z)>2$ (d) इनमें से कोई नहीं

19. यदि $\frac{2z_1}{3z_2}$ पूर्णतया अधिकल्पित संख्या हो, तब $\left|\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right|$ का मान है [MP PET 1993]
(a) 3/2 (b) 1
(c) 2/3 (d) 4/9

20. यदि z_1 तथा z_2 कोई दो सम्मिश्र संख्यायें हों, तब $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 =$ [MP PET 1993; RPET 1997]
(a) $2|z_1|^2|z_2|^2$ (b) $2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$
(c) $|z_1|^2 + |z_2|^2$ (d) $2|z_1||z_2|$

21. यदि z एक ऐसी सम्मिश्र संख्या है कि $\frac{z-1}{z+1}$ पूर्णतः अधिकल्पित हो, तो [MP PET 1998, 2002]
(a) $|z| = 0$ (b) $|z| = 1$
(c) $|z| > 1$ (d) $|z| < 1$

22. यदि z एक सम्मिश्र संख्या हो, तो निम्न में से कौन सा सम्बन्ध सत्य नहीं है [MP PET 1987]
(a) $|z^2| = |z|^2$ (b) $|z^2| = |\bar{z}|^2$
(c) $z = \bar{z}$ (d) $\bar{z}^2 = \overline{z^2}$

23. $|z|$ का उच्चिष्ठ मान, जहाँ $\left|z + \frac{2}{z}\right| = 2$ है, होगा
(a) $\sqrt{3} - 1$ (b) $\sqrt{3} + 1$
(c) $\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

24. यदि z_1, z_2 दो सम्मिश्र संख्याएँ इस प्रकार हों कि $\left|\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right| = 1$, तब $\frac{z_1}{z_2}$ ऐसी संख्या है जो कि होगी
(a) धन वास्तविक (b) ऋण वास्तविक
(c) शून्य अथवा पूर्णतया अधिकल्पित (d) इनमें से कोई नहीं

25. समीकरण $|z| - z = 1 + 2i$ का हल है [MP PET 1993]
(a) $2 - \frac{3}{2}i$ (b) $\frac{3}{2} + 2i$
(c) $\frac{3}{2} - 2i$ (d) $-2 + \frac{3}{2}i$

26. यदि z_1 व z_2 दो सम्मिश्र संख्यायें इस प्रकार हों कि $z_1 \ne z_2$ एवं $|z_1| = |z_2|$. यदि z_1 में धनात्मक वास्तविक भाग है एवं z_2 में ऋणात्मक काल्पनिक भाग है, तो $\frac{(z_1 + z_2)}{(z_1 - z_2)}$ हो सकता है [IIT 1986]
(a) विशुद्ध काल्पनिक (b) वास्तविक व धनात्मक
(c) वास्तविक व ऋणात्मक (d) इनमें से कोई नहीं

27. यदि दो सम्मिश्र संख्याओं के मापांक इकाई से कम हैं, तो इन सम्मिश्र संख्याओं के योग का मापांक होगा
(a) इकाई से कम (b) इकाई से अधिक
(c) इकाई के बराबर (d) कोई भी

28. इकाई मापांकों की दो सम्मिश्र संख्याओं का गुणन होगा
(a) इकाई मापांक (b) इकाई मापांक से कम
(c) इकाई मापांक से अधिक (d) इनमें से कोई नहीं

29. माना कि z एक सम्मिश्र संख्या है, तो समीकरण $z^4 + z + 2 = 0$ निम्न प्रकार का मूल नहीं रख सकता
(a) $|z| < 1$ (b) $|z| = 1$
(c) $|z| > 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

30. यदि $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = 1$, तो $|z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n| =$
(a) 1 (b) $|z_1| + |z_2| + ... + |z_n|$
(c) $\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + ... + \frac{1}{z_n}\right|$ (d) इनमें से कोई नहीं

31. किसी भी सम्मिश्र संख्या z के लिए $\bar{z} = \left(\frac{1}{z}\right)$ यदि और केवल यदि [RPET 1985]
(a) z एक विशुद्ध वास्तविक संख्या है
(b) $|z| = 1$
(c) z एक विशुद्ध काल्पनिक संख्या है
(d) $z = 1$

32. यदि z_1 तथा z_2 दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं तब $|z_1 - z_2|$ [MP PET 1994]
(a) $\ge |z_1| - |z_2|$ (b) $\le |z_1| - |z_2|$
(c) $\ge |z_1| + |z_2|$ (d) $\le |z_2| - |z_1|$

33. z का वह मान जिसके लिए $|z + i| = |z - i|$ है, है [Bihar CEE 1994]
(a) कोई भी वास्तविक संख्या (b) कोई भी सम्मिश्र संख्या
(c) कोई भी प्राकृत संख्या (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

34. यदि $z = x + iy$ तो $|z - 5|$ का मान है [RPET 1995]
(a) $\sqrt{(x-5)^2 + y^2}$ (b) $x^2 + \sqrt{(y-5)^2}$
(c) $\sqrt{(x-y)^2 + 5^2}$ (d) $\sqrt{x^2 + (y-5)^2}$

35. $\left|(1+i)\frac{(2+i)}{(3+i)}\right| =$ [MP PET 1995, 99]
(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$
(c) 1 (d) -1

36. यदि z_1 तथा z_2 दो सम्मिश्र संख्याएँ इस प्रकार हैं कि $\left|\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right| = 1$ तथा $iz_1 = kz_2$, जहाँ $k \in R$, तब $z_1 - z_2$ तथा $z_1 + z_2$ के मध्य कोण है
(a) $\tan^{-1}\left(\frac{2k}{k^2+1}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{2k}{1-k^2}\right)$
(c) $-2\tan^{-1}k$ (d) $2\tan^{-1}k$

37. यदि z अधिकतम मापांक की एक सम्मिश्र संख्या इस प्रकार है कि $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 1$ एवं z, x अक्ष पर नहीं है, तो
(a) $\text{Im}(z) = 0$ (b) $\text{Re}(z) = 0$
(c) $amp(z) = \pi$ (d) इनमें से कोई नहीं

38. यदि z_1 व z_2 कोई भी सम्मिश्र संख्याएँ हैं, तब $|z_1 + \sqrt{z_1^2 - z_2^2}| + |z_1 - \sqrt{z_1^2 - z_2^2}|$ बराबर है
(a) $|z_1|$ (b) $|z_2|$
(c) $|z_1 + z_2|$ (d) $|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$

39. $\left|\frac{1}{2}(z_1 + z_2) + \sqrt{z_1 z_2}\right| + \left|\frac{1}{2}(z_1 + z_2) - \sqrt{z_1 z_2}\right| =$

(a) $|z_1+z_2|$ (b) $|z_1-z_2|$
(c) $|z_1|+|z_2|$ (d) $|z_1|-|z_2|$

40. $\left(\frac{3+2i}{3-2i}\right)$ का मापांक होगा [RPET 1996]
(a) 1 (b) 1/2
(c) 2 (d) $\sqrt{2}$

41. यदि $|z|=1, (z \neq -1)$ तथा $z=x+iy$, तब $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=$ [RPET 1997]
(a) पूर्णतः वास्तविक (b) पूर्णतः अधिकल्पित
(c) शून्य (d) अपरिभाषित

42. $|2z-1|+|3z-2|$ का न्यूनतम मान होगा [RPET 1997]
(a) 0 (b) 1/2
(c) 1/3 (d) 2/3

43. यदि $|z|=1$ तथा $\omega=\frac{z-1}{z+1}$ (जहाँ $z\neq -1$), तब $\text{Re}(\omega)$ का मान होगा [IIT Screening 2003]
(a) 0 (b) $-\frac{1}{|z+1|^2}$
(c) $\left|\frac{z}{z+1}\right|.\frac{1}{|z+1|^2}$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{|z+1|^2}$

44. समीकरण $\left(\frac{3-4ix}{3+4ix}\right)=\alpha-i\beta$ (α,β वास्तविक) को संतुष्ट करने वाला x का एक वास्तविक मान होगा, यदि [Orissa JEE 2003]
(a) $\alpha^2-\beta^2=-1$ (b) $\alpha^2-\beta^2=1$
(c) $\alpha^2+\beta^2=1$ (d) $\alpha^2-\beta^2=2$

45. z_1 एक सम्मिश्र संख्या है जिसके लिये $|z_1|=1$ तथा z_2 कोई अन्य सम्मिश्र संख्या है, तब $\left|\frac{z_1-z_2}{1-z_1\bar{z}_2}\right|=$
(a) 0 (b) 1
(c) - 1 (d) 2

46. यदि z_1 तथा z_2 दो अशून्य सम्मिश्र संख्याएँ ऐसी हों कि $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ हो, तब कोणांक $(z_1)-$ कोणांक (z_2) का मान है [IIT 1979, 1987; EAMCET 1986; RPET 1997; MP PET 2001; AIEEE 2005]
(a) $-\pi$ (b) $-\frac{\pi}{2}$
(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) 0

47. $arg(5-\sqrt{3}i)=$
(a) $\tan^{-1}\frac{5}{\sqrt{3}}$ (b) $\tan^{-1}\left(-\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$
(c) $\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{5}$ (d) $\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$

48. $\frac{1+i}{1-i}$ के कोणांक तथा मापांक क्रमशः हैं [RPET 1984; MP PET 1987; Karnataka CET 2001]
(a) $\frac{-\pi}{2}$ तथा 1 (b) $\frac{\pi}{2}$ तथा $\sqrt{2}$
(c) 0 तथा $\sqrt{2}$ (d) $\frac{\pi}{2}$ तथा 1

49. यदि $\bar{z}$ सम्मिश्र संख्या z का संयुग्मी हो, तो निम्न में से कौन सा सम्बन्ध असत्य है [MP PET 1987]
(a) $|z|=|\bar{z}|$ (b) $z.\bar{z}=|\bar{z}|^2$
(c) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ (d) $arg\, z=arg\,\bar{z}$

50. यदि $|z|=4$ और $arg\ z=\frac{5\pi}{6}$, तो $z=$ [MP PET 1987]
(a) $2\sqrt{3}-2i$ (b) $2\sqrt{3}+2i$
(c) $-2\sqrt{3}+2i$ (d) $-\sqrt{3}+i$

51. यदि $z=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$, तब कोणांक $(z)=$ [Roorkee 1990; UPSEAT 2004]
(a) 60^o (b) 120^o
(c) 240^o (d) 300^o

52. यदि कोणांक $(z)=\theta$, तो कोणांक $(\bar{z})=$ [MP PET 1995]
(a) θ (b) $-\theta$
(c) $\pi-\theta$ (d) $\theta-\pi$

53. सम्मिश्र संख्या $z=\sin\alpha+i(1-\cos\alpha)$ का कोणांक हैं
(a) $2\sin\frac{\alpha}{2}$ (b) $\frac{\alpha}{2}$
(c) α (d) इनमें से कोई नहीं

54. $\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+1}$ का कोणांक है [Karnataka CET 1992; Pb CET 2001]
(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $-\frac{\pi}{3}$
(c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $-\frac{\pi}{6}$

[Orissa JEE 2004]

55. सम्मिश्र संख्या $-1+i\sqrt{3}$ का कोणांक है [MP PET 1994]
(a) -60^o (b) 60^o
(c) 120^o (d) -120^o

56. $arg\left(\frac{3+i}{2-i}+\frac{3-i}{2+i}\right)=$
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $-\frac{\pi}{2}$
(c) 0 (d) $\frac{\pi}{4}$

57. यदि $z_1.z_2........z_n=z$, हो, तब $arg\,z_1+arg\,z_2+....+arg z_n$ और $arg\,z$ का अन्तर होगा
(a) π का गुणज (b) $\frac{\pi}{2}$ का गुणज
(c) π से बड़ा (d) π से कम

58. यदि z एक पूर्णतः अधिकल्पित संख्या इस प्रकार हो, कि $\text{Im}(z)>0$, तब $arg(z)=$
(a) π (b) $\frac{\pi}{2}$
(c) 0 (d) $-\frac{\pi}{2}$

59. यदि z पूर्णतः अधिकल्पित संख्या इस प्रकार हो कि $\text{Im}(z) < 0$, तब $arg(z) =$

(a) π (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) 0 (d) $-\frac{\pi}{2}$

60. यदि z पूर्णतः वास्तविक संख्या इस प्रकार हो कि $\text{Re}(z) < 0$, तब $arg(z) =$

(a) π (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) 0 (d) $-\frac{\pi}{2}$

61. यदि z एक सम्मिश्र संख्या है, तब सदिश z तथा $-iz$ के मध्य कोण होगा

(a) π (b) 0

(c) $-\frac{\pi}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

62. कोई भी दो सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2 के लिये $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ तब

(a) $\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0$ (b) $\text{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0$

(c) $\text{Re}(z_1 z_2) = 0$ (d) $\text{Im}(z_1 z_2) = 0$

63. यदि सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के लिये $arg(z_1 / z_2) = 0$, तब $|z_1 - z_2| =$

(a) $|z_1| + |z_2|$ (b) $|z_1| - |z_2|$

(c) $||z_1| - |z_2||$ (d) 0

64. यदि $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, तब z_1 तथा z_2 के कोणांकों में अन्तर है

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) 0

65. यदि $|z_1| = |z_2|$ तथा $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \pi$, तब $z_1 + z_2$ बराबर है

(a) 0 (b) पूर्णतः अधिकल्पित

(c) पूर्णतः वास्तविक (d) इनमें से कोई नहीं

66. यदि $0 < amp\ (z) < \pi$, तब $amp(z) - amp(-z) =$

(a) 0 (b) $2\, amp\ (z)$

(c) π (d) $-\pi$

67. यदि $z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$, तब $amp\, z =$

(a) $\frac{\alpha}{2}$ (b) $-\frac{\alpha}{2}$

(c) $\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$ (d) $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$

68. यदि $z_1, z_2 \in C$, तो कोणांक $\left(\frac{z_1}{\bar{z}_2}\right) =$

(a) कोणांक $(z_1 \bar{z}_2)$ (b) कोणांक $(\bar{z}_1 z_2)$

(c) कोणांक $\left(\frac{z_2}{\bar{z}_1}\right)$ (d) कोणांक $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

69. सम्मिश्र संख्या $\frac{13 - 5i}{4 - 9i}$ का कोणांक है [MP PET 1997]

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{5}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

70. यदि $|z_1| = |z_2|$ तथा कोणांक $z_1 +$ कोणांक $z_2 = 0$, तो [MP PET 1999]

(a) $z_1 = z_2$ (b) $\bar{z}_1 = z_2$

(c) $z_1 + z_2 = 0$ (d) $\bar{z}_1 = \bar{z}_2$

71. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ संभव है यदि [MP PET 1999; Pb. CET 2002]

(a) $z_2 = \bar{z}_1$ (b) $z_2 = \frac{1}{z_1}$

(c) $arg(z_1) = arg\ (z_2)$ (d) $|z_1| = |z_2|$

72. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ का कोणांक होगा [RPET 1996]

(a) $-\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

73. सम्मिश्र संख्याओं z_1 और z_2 के लिये सत्य कथन है [Roorkee 1998]

(a) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ (b) $arg\ (z_1 z_2) = (arg\, z_1)(arg\, z_2)$

(c) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ (d) $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

[EAMCET 1985]

74. सम्मिश्र संख्या $\frac{1+\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}+i}$ का कोणांक है [DCE 1999; Karnataka CET 2005]

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $-\frac{\pi}{6}$

(c) $\frac{\pi}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

75. 0 का कोणांक है [RPET 2000]

(a) 0 (b) $\pi / 2$

(c) π (d) इनमें से कोई नहीं

76. यदि $arg\, z < 0$ तब $arg(-z) - arg(z)$ का मान होगा [IIT Screening 2000]

(a) π (b) $-\pi$

(c) $-\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

77. $\frac{1+\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}-i}$ का कोणांक है [RPET 2001]

(a) 0 (b) $\pi / 6$

(c) $\pi / 3$ (d) $\pi / 2$

78. यदि $z = \frac{-2}{1+\sqrt{3}\,i}$, तो $arg(z)$ का मान होगा [Orissa JEE 2002]

(a) π (b) $\pi / 3$

(c) $2\pi / 3$ (d) $\pi / 4$

79. यदि $z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$, तब

(a) $|z|=1,\ arg\,z=\frac{\pi}{4}$ (b) $|z|=1, arg\,z=\frac{\pi}{6}$

(c) $|z|=\frac{\sqrt{3}}{2}, arg\,z=\frac{5\pi}{24}$ (d) $|z|=\frac{\sqrt{3}}{2}, arg\ z=\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$

80. $\sin\frac{\pi}{5}+i\left(1-\cos\frac{\pi}{5}\right)$ का कोणांक होगा

[Karnataka CET 2003]

(a) $\pi/5$ (b) $2\pi/5$
(c) $\pi/10$ (d) $\pi/15$

81. $-1-i\sqrt{3}$ का कोणांक है [RPET 2003]

(a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{3}$

(c) $-\frac{\pi}{3}$ (d) $-\frac{2\pi}{3}$

82. यदि z व ω दो अशून्य सम्मिश्र संख्याएँ इस प्रकार हों, कि $|z\omega|=1$ तथा $arg(z)-arg(\omega)=\frac{\pi}{2}$ हो, तब $\bar{z}\omega$ का मान है

[AIEEE 2003]

(a) 1 (b) - 1
(c) i (d) - i

83. यदि z तथा किसी दूसरी सम्मिश्र संख्या के कोणांक का योग π हो, तब दूसरी सम्मिश्र संख्या को लिखा जा सकता है

[Orissa JEE 2004]

(a) $\bar{z}$ (b) $-\bar{z}$
(c) z (d) $-z$

84. $\frac{1+2i}{1-(1-i)^2}$ का कोणांक और मापांक है

[Karnataka CET 2005]

(a) $\sqrt{2}$ और $\frac{\pi}{6}$ (b) 1 और 0

(c) 1 और $\frac{\pi}{3}$ (d) 1 और $\frac{\pi}{4}$

85. यदि $z_1=1+2i$ और $z_2=3+5i$, तब $\text{Re}\left(\frac{\bar{z}_2 z_1}{z_2}\right)=$

[J & K 2005]

(a) $\frac{-31}{17}$ (b) $\frac{17}{22}$

(c) $\frac{-17}{31}$ (d) $\frac{22}{17}$

86. यदि $(3+i)z=(3-i)\bar{z}$, तब सम्मिश्र संख्या z है [AMU 2005]

(a) $x(3-i), x\in R$ (b) $\frac{x}{3+i}, x\in R$

(c) $x(3+i), x\in R$ (d) $x(-3+i), x\in R$

87. यदि $(\sqrt{8}+i)^{50}=3^{49}(a+ib)$, तब a^2+b^2 =

[Kerala (Engg.) 2005]

(a) 3 (b) 8

(c) 9 (d) $\sqrt{8}$

(e) 4

सम्मिश्र संख्याओं का वर्गमूल, निरूपण और लघुगणक

[AMU 2002]

1. यदि $x+iy=\sqrt{\frac{a+ib}{c+id}}$, तो $(x^2+y^2)^2=$

[IIT 1979; RPET 1997; Karnataka CET 1999]

(a) $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$ (b) $\frac{a+b}{c+d}$

(c) $\frac{c^2+d^2}{a^2+b^2}$ (d) $\left(\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}\right)^2$

2. $\sqrt{-8-6i}=$ [Roorkee 1979; RPET 1992]

(a) $1\pm 3i$ (b) $\pm(1-3i)$

(c) $\pm(1+3i)$ (d) $\pm(3-i)$

3. यदि $(-7-24i)^{1/2}=x-iy$, तो $x^2+y^2=$ [RPET 1989]

(a) 15 (b) 25

(c) - 25 (d) इनमें से कोई नहीं

4. यदि $\sqrt{x+iy}=\pm(a+ib)$, तब $\sqrt{-x-iy}$ बराबर है

(a) $\pm(b+ia)$ (b) $\pm(a-ib)$

(c) $\pm(b-ia)$ (d) इनमें से कोई नहीं

5. सम्मिश्र संख्या 3 - $4i$ का वर्गमूल है [RPET 1999]

(a) $\pm(2+i)$ (b) $\pm(2-i)$

(c) $\pm(1-2i)$ (d) $\pm(1+2i)$

6. यदि $\sqrt{a+ib}=x+iy$, तो $\sqrt{a-ib}$ का सम्भावित मान होगा

[Kerala (Engg.) 2002]

(a) x^2+y^2 (b) $\sqrt{x^2+y^2}$

(c) $x+iy$ (d) $x-iy$

7. समीकरण $|1-i|^x=2^x$ के अशून्य पूर्णांक हलों की संख्या होगी

(a) अनन्त (b) 1

(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

8. $\frac{1+7i}{(2-i)^2}=$ [Roorkee 1981]

(a) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ (b) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(c) $\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि $z=re^{i\theta}$, तो $|e^{iz}|$ बराबर है [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $e^{r\sin\theta}$ (b) $e^{-r\sin\theta}$

(c) $e^{-r\cos\theta}$ (d) $e^{r\cos\theta}$

10. $\frac{1-i}{1+i}$ बराबर है [RPET 1984]

(a) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ (b) $\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}$

(c) $\sin\frac{\pi}{2}+i\cos\frac{\pi}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

11. यदि $-1+\sqrt{-3}=re^{i\theta}$, तो θ बराबर है

[RPET 1989; MP PET 1999]

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $-\frac{\pi}{3}$

(c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $-\frac{2\pi}{3}$

12. यदि $y = \cos\theta + i\sin\theta$, तो $y + \frac{1}{y}$ का मान होगा [RPET 1995]

(a) $2\cos\theta$ (b) $2\sin\theta$

(c) $2\text{cosec}\,\theta$ (d) $2\tan\theta$

13. $(-i)^{1/3}$ का मान है [Roorkee 1995]

(a) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ (b) $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

(c) $\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$

14. यदि $(1+i\sqrt{3})^9 = a+ib$, तो b का मान है [RPET 1995]

(a) 1 (b) 256

(c) 0 (d) 9^3

15. $e^{e^{i\theta}}$ का वास्तविक भाग है [RPET 1995]

(a) $e^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta)]$ (b) $e^{\cos\theta}[\cos(\cos\theta)]$

(c) $e^{\sin\theta}[\sin(\cos\theta)]$ (d) $e^{\sin\theta}[\sin(\sin\theta)]$

16. $e^{e^{-i\theta}}$ का कोणांक होगा [RPET 1997]

(a) $\sin\theta$ (b) $-\sin\theta$

(c) $e^{\cos\theta}$ (d) $e^{\sin\theta}$

17. यदि $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$, तो $(\bar{z})^{100}$ स्थित होगा [AMU 1999]

(a) प्रथम चतुर्थांश में (b) द्वितीय चतुर्थांश में

(c) तृतीय चतुर्थांश में (d) चतुर्थ चतुर्थांश में

18. यदि $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ हो, तो $x =$ [RPET 2002]

(a) $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ (b) $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

(c) $\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}$ (d) $\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

19. $(-1+i\sqrt{3})^{20}$ का मान है [RPET 2003]

(a) $2^{20}(-1+i\sqrt{3})^{20}$ (b) $2^{20}(1-i\sqrt{3})^{20}$

(c) $2^{20}(-1-i\sqrt{3})^{20}$ (d) इनमें से कोई नहीं

20. $\tan^{-1}\left(\frac{5i}{3}\right)$ का अधिकल्पित भाग होगा [RPET 1997]

(a) 0 (b) ∞

(c) $\log 2$ (d) $\log 4$

21. सम्मिश्र संख्या $(1-i)^{-i}$ का वास्तविक भाग है [RPET 1999]

(a) $e^{-\pi/4}\cos\left(\frac{1}{2}\log 2\right)$ (b) $-e^{-\pi/4}\sin\left(\frac{1}{2}\log 2\right)$

(c) $e^{\pi/4}\cos\left(\frac{1}{2}\log 2\right)$ (d) $e^{-\pi/4}\sin\left(\frac{1}{2}\log 2\right)$

22. $i\log\left(\frac{x-i}{x+i}\right)$ का मान है [RPET 2000]

(a) $\pi + 2\tan^{-1}x$ (b) $\pi - 2\tan^{-1}x$

(c) $-\pi + 2\tan^{-1}x$ (d) $-\pi - 2\tan^{-1}x$

23. यदि $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, तब त्रिभुज ΔABC में $e^{iA}.e^{iB}.e^{iC}$ का मान है [AMU 2005]

(a) $-i$ (b) 1

(c) -1 (d) इनमें से कोई नहीं

24. यदि $z = \frac{7-i}{3-4i}$, तब $z^{14} =$ [Kerala (Engg.) 2005]

(a) 2^7 (b) $2^7 i$

(c) $2^{14} i$ (d) $-2^7 i$

(e) -2^{14}

सम्मिश्र संख्याओं की ज्यामिति

1. बिन्दुओं $-1-i$ तथा $2+3i$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड की लम्बाई है

(a) - 5 (b) 15

(c) 5 (d) 25

2. सम्मिश्र समतल में, बिन्दु z_1, z_2, z_3 तथा z_4 एक समान्तर चतुर्भुज के क्रम से शीर्ष होंगे, यदि और केवल यदि [IIT 1981, 1983; UPSEAT 2004]

(a) $z_1 + z_4 = z_2 + z_3$ (b) $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$

(c) $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ (d) इनमें से कोई नहीं

3. समीकरण $z\bar{z} + a\bar{z} + \bar{a}z + b = 0, b \in R$ एक वृत्त निरूपित करेगा यदि

(a) $|a|^2 = b$

(b) $|a|^2 > b$

(c) $|a|^2 < b$

(d) इनमें से कोई नहीं

4. माना कि सम्मिश्र संख्याएँ z_1, z_2 तथा z_3 किसी समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं तथा z_0 त्रिभुज के परिवृत्त का केन्द्र है तब $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 =$

(a) z_0^2 (b) $-z_0^2$

(c) $3z_0^2$ (d) $-3z_0^2$

5. समीकरण $\bar{b}z + b\bar{z} = c$, जहाँ b एक अशून्य सम्मिश्र नियतांक एवं c वास्तविक है, प्रदर्शित करता है

(a) एक वृत्त (b) एक सरल रेखा

(c) एक परवलय (d) इनमें से कोई नहीं

6. यदि तीन सम्मिश्र संख्यायें समान्तर श्रेणी में हैं, तो वे [IIT 1985; DCE 2001; Pb. CET 2003]

(a) सम्मिश्र तल में वृत्त पर स्थित हैं

(b) सम्मिश्र तल में सरल रेखा पर स्थित हैं

(c) सम्मिश्र तल में परवलय पर स्थित हैं

(d) इनमें से कोई नहीं

7. यदि a व b वास्तविक संख्यायें 0 व 1 के बीच इस प्रकार हों कि बिन्दु $z_1 = a+i, z_2 = 1+bi$ व $z_3 = 0$ एक समबाहु त्रिभुज को बनाती हों, तो [IIT 1989]

(a) $a = b = 2+\sqrt{3}$ (b) $a = b = 2-\sqrt{3}$

(c) $a = 2-\sqrt{3}, b = 2+\sqrt{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

8. यदि $|z| = 2$, तो सम्मिश्र संख्या $-1+5z$ द्वारा प्रदर्शित बिन्दु स्थित होंगे
(a) वृत्त पर (b) सरल रेखा पर
(c) परवलय पर (d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि एक चतुर्भुज के शीर्ष क्रमशः $A = 1+2i$, $B = -3+i$, $C = -2-3i$ व $D = 2-2i$ हैं, तो चतुर्भुज है
(a) समान्तर चतुर्भुज (b) आयत
(c) वर्ग (d) समचतुर्भुज

10. आर्गन्ड समतल में, सदिश $z = 4-3i$ को दक्षिणावर्त दिशा में 180^o से घुमाया जाता है तथा इसकी लम्बाई तीन गुनी की जाती है, तो नए सदिश द्वारा प्रदर्शित सम्मिश्र संख्या है [DCE 2005]
(a) $12+9i$ (b) $12-9i$
(c) $-12-9i$ (d) $-12+9i$

11. यदि सम्मिश्र संख्या ω, $\left|\omega + \frac{1}{\omega}\right| = 2$ को संतुष्ट करता है, तो ω की मूलबिन्दु से अधिकतम दूरी है
(a) $2+\sqrt{3}$ (b) $1+\sqrt{2}$
(c) $1+\sqrt{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

12. सदिश $z = 3-4i$ को 180^o के कोण से वामावर्त (Anticlockwise) दिशा में घुमाकर एवं 2.5 गुना करने पर नया प्राप्त सदिश है
(a) $\frac{15}{2} - 10i$ (b) $\frac{-15}{2} + 10i$
(c) $\frac{-15}{2} - 10i$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. POQ मूलबिन्दु से जाने वाली एक सरल रेखा है। P तथा Q क्रमशः सम्मिश्र संख्याओं $a+ib$ तथा $c+id$ को प्रदर्शित करते हैं तथा $OP = OQ$ तब
(a) $|a+ib| = |c+id|$ (b) $a+c = b+d$
(c) $arg(a+ib) = arg(c+id)$ (d) इनमें से कोई नहीं

14. माना a एक सम्मिश्र संख्या इस प्रकार है कि $|a| < 1$ तथा $z_1, z_2, ...$ एक बहुभुज के शीर्ष इस प्रकार हैं कि $z_k = 1 + a + a^2 + ... + a^{k-1}$, तब बहुभुज के शीर्ष निम्न वृत्त के अन्दर स्थित हैं
(a) $|z - a| = a$ (b) $\left|z - \frac{1}{1-a}\right| = |1-a|$
(c) $\left|z - \frac{1}{1-a}\right| = \frac{1}{|1-a|}$ (d) $|z-(1-a)| = |1-a|$

15. n भुजाओं वाले एक समबहुभुज का केन्द्र $z = 0$ पर स्थित है तथा इसका एक शीर्ष z_1 ज्ञात है। यदि z_1 का निकटवर्ती शीर्ष z_2 है, तब $z_2 =$
(a) $z_1\left(\cos\frac{2\pi}{n} \pm i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$ (b) $z_1\left(\cos\frac{\pi}{n} \pm i\sin\frac{\pi}{n}\right)$
(c) $z_1\left(\cos\frac{\pi}{2n} \pm i\sin\frac{\pi}{2n}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

16. समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष B तथा D, $1-2i$ तथा $4+2i$ हैं। यदि विकर्ण समकोण पर हों तथा $AC = 2BD$, तब A को प्रदर्शित करने वाली सम्मिश्र संख्या है
(a) $\frac{5}{2}$ (b) $3i - \frac{3}{2}$
(c) $3i-4$ (d) $3i+4$

17. यदि z_1, z_2, z_3, z_4 आर्गन्ड समतल में चार बिन्दुओं के निर्देशांक हैं तथा z एक बिन्दु का निर्देशांक इस प्रकार है कि $|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3| = |z - z_4|$, तब z_1, z_2, z_3, z_4 हैं
(a) चक्रीय (एक ही वृत्त पर)
(b) समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष
(c) समचतुर्भुज के शीर्ष
(d) एक सरल रेखा में

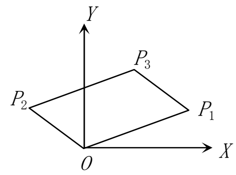
18. $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है। इसके विकर्ण AC तथा BD बिन्दु M पर एक दूसरे को काटते हैं तथा $BD = 2AC$ को संतुष्ट करते हैं। यदि बिन्दु D तथा M क्रमशः सम्मिश्र संख्याओं $(1+i)$ तथा $(2-i)$ को प्रदर्शित करते हैं, तब A सम्मिश्र संख्या को प्रदर्शित करता है
(a) $3 - \frac{1}{2}i$ या $1 - \frac{3}{2}i$ (b) $\frac{3}{2} - i$ या $\frac{1}{2} - 3i$
(c) $\frac{1}{2} - i$ या $1 - \frac{1}{2}i$ (d) इनमें से कोई नहीं

19. सम्मिश्र संख्याएँ z_1, z_2, z_3 एक त्रिभुज के शीर्ष हैं, तब त्रिभुज को समान्तर चतुर्भुज बनाने वाली सम्मिश्र संख्या z है
(a) $z_1 + z_2 - z_3$ (b) $z_1 - z_2 + z_3$
(c) $z_2 + z_3 - z_1$ (d) उपरोक्त सभी

20. समीकरण $z\bar{z} + (2-3i)z + (2+3i)\bar{z} + 4 = 0$ एक वृत्त निरूपित करता है जिसकी त्रिज्या है [Kurukshetra CEE 1996]
(a) 2 (b) 3
(c) 4 (d) 6

21. एक आयत सम्मिश्र समतल में निर्मित है जिसकी भुजायें अक्षों के समान्तर हैं और केन्द्र मूल बिन्दु पर स्थित है। यदि आयत का एक शीर्ष बिन्दु $a + ib\sqrt{3}$ पर हो, तो आयत का क्षेत्रफल होगा
(a) $ab\sqrt{3}$ (b) $2ab\sqrt{3}$
(c) $3ab\sqrt{3}$ (d) $4ab\sqrt{3}$

22. यदि बिन्दु P_1 और P_2 दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 और z_2 को निरूपित करें, तो बिन्दु P_3 निम्न संख्या को निरूपित करेगा



(a) $z_1 + z_2$ (b) $z_1 - z_2$
(c) $z_1 \times z_2$ (d) $z_1 \div z_2$

23. यदि $|z-2| / |z-3| = 2$ एक वृत्त का समीकरण निरूपित करे, तो वृत्त की त्रिज्या होगी [Kurukshetra CEE 1998]
(a) 1 (b) 1/3
(c) 3/4 (d) 2/3

24. यदि सम्मिश्र संख्यायें z_1, z_2 व z_3 एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC जिसका कोण C समकोण है, के शीर्षो A, B व C को क्रमशः प्रदर्शित करें, तो सही कथन है [RPET 1999]
(a) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 z_3$
(b) $(z_3 - z_1)^2 = z_3 - z_2$
(c) $(z_1 - z_2)^2 = (z_1 - z_3)(z_3 - z_2)$

(d) $(z_1 - z_2)^2 = 2(z_1 - z_3)(z_3 - z_2)$

25. यदि किसी समषट्फलक का केन्द्र मूल बिन्दु है, एवं आर्गण्ड समतल पर इसका एक शीर्ष 1 + 2i के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है, तब इसका परिमाप है [RPET 1999]

(a) $2\sqrt{5}$ (b) $6\sqrt{2}$

(c) $4\sqrt{5}$ (d) $6\sqrt{5}$

26. आर्गण्ड समतल में, यदि O, P तथा Q क्रमशः मूल बिन्दु तथा सम्मिश्र संख्याओं z व $z + iz$ को प्रदर्शित करें, तो कोण $\angle OPQ$ का मान होगा [MP PET 2000]

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

27. एक वृत्त जिसकी त्रिज्या r तथा केन्द्र z_0 है तब वृत्त का समीकरण है

(a) $z\bar{z} - z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0 + z_0\bar{z}_0 = r^2$

(b) $z\bar{z} + z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0 + z_0\bar{z}_0 = r^2$

(c) $z\bar{z} - z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0 - z_0\bar{z}_0 = r^2$

(d) इनमें से कोई नहीं

28. यदि किसी वृत्त $|z| = \frac{1}{2}$ के अन्तर्गत एक समबाहु त्रिभुज बनाया गया है जिसके शीर्ष क्रमशः. z_1, z_2 एवं z_3 हैं। यदि z_1, z_2 एवं z_3 क्रमशः वामावर्त दिशा में हैं तथा $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,i}{2}$ हैं, तब z_2 का मान है [Orissa JEE 2002]

(a) $1 + \sqrt{3}\,i$ (b) $1 - \sqrt{3}\,i$

(c) 1 (d) - 1

29. यदि z_1 एवं z_2 सम्मिश्र संख्याएँ समीकरण $|z_1| = 12$ एवं $|z_2 - 3 - 4i| = 5$ को संतुष्ट करती हैं, तो $|z_1 - z_2|$ का निम्नतम मान है [IIT Screening 2002]

(a) 0 (b) 2

(c) 7 (d) 17

30. यदि बिन्दु P, Q, R, S क्रमशः सम्मिश्र संख्याओं $4 + i$, $1 + 6i$, $-4 + 3i$, $-1 - 2i$ को प्रदर्शित करते हों, तो $PQRS$ होगा [Orissa JEE 2003]

(a) एक आयत (b) एक वर्ग

(c) एक सम चतुर्भुज (d) एक समान्तर चतुर्भुज

31. यदि z_1, z_2, z_3 तीन बिन्दु आर्गण्ड तल में संरेख हैं, तब $\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix} =$ [Orissa JEE 2004]

(a) 0 (b) - 1

(c) 1 (d) 2

32. यदि सम्मिश्र संख्या z आर्गन्ड तल में हैं, तब समीकरण $|z - 2| + |z + 2| = 8$ प्रदर्शित करता है [Orissa JEE 2004]

(a) परवलय (b) दीर्घवृत्त

(c) अतिपरवलय (d) वृत्त

33. सम्मिश्र समतल में बिन्दु $1 + 3i, 5 + i$, $3 + 2i$ हैं [MP PET 1987]

(a) एक समकोणीय त्रिभुज के शीर्ष

(b) समरेखीय

(c) एक अधिक कोण त्रिभुज के शीर्ष

(d) एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष

34. यदि z_1 तथा z_2 दो सम्मिश्र संख्यायें हों, तो $|z_1 + z_2|$ [RPET 1985; MP PET 1987, 2004; Kerala (Engg.) 2002]

(a) $\le |z_1| + |z_2|$ (b) $\le |z_1| - |z_2|$

(c) $< |z_1| + |z_2|$ (d) $> |z_1| + |z_2|$

35. यदि $z = x + iy$, तो बिन्दुओं z, iz तथा $z + iz$ से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल है [MP PET 1997; IIT 1986; AMU 2000; UPSEAT 2002]

(a) $2|z|^2$ (b) $\frac{1}{2}|z|^2$

(c) $|z|^2$ (d) $\frac{3}{2}|z|^2$

36. यदि A, B, C को क्रमशः $3 + 4i$, $5 - 2i$, $-1 + 16i$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता हो, तो A, B, C हैं [RPET 2000]

(a) समरेखीय (b) समबाहु त्रिभुज के शीर्ष

(c) समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष (d) समकोण त्रिभुज के शीर्ष

37. यदि $z_1, z_2 \in C$, तो [MP PET 1995]

(a) $|z_1 + z_2| \ge |z_1| + |z_2|$ (b) $|z_1 - z_2| \ge |z_1| + |z_2|$

(c) $|z_1 - z_2| \le \big||z_1| - |z_2|\big|$ (d) $|z_1 + z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$

38. यदि z_1, z_2, z_3 क्रमशः एक त्रिभुज ABC जिसका केन्द्रक G है, के शीर्षो A, B तथा C के निर्देशांक इस प्रकार हैं कि $z = 0$, AG का मध्य बिन्दु है, तब

(a) $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ (b) $z_1 + 4z_2 + z_3 = 0$

(c) $z_1 + z_2 + 4z_3 = 0$ (d) $4z_1 + z_2 + z_3 = 0$

39. यदि z_1 तथा z_2 दो सम्मिश्र संख्याएँ इस प्रकार हैं कि $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = 1$, तब

(a) z_1, z_2 समरेखीय हैं

(b) z_1, z_2 तथा मूल बिन्दु एक समकोण त्रिभुज बनाते हैं

(c) z_1, z_2 तथा मूल बिन्दु एक समबाहु त्रिभुज बनाते हैं

(d) इनमें से कोई नहीं

40. यदि सम्मिश्र तल पर स्थित बिन्दुओं $z, z + iz$ तथा iz से निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल 18 इकाई हो, तो $|z|$ का मान होगा [MP PET 2001]

(a) 6 (b) 9

(c) $3\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{3}$

41. यदि $z_1 = 1 + i, z_2 = -2 + 3i$ तथा $z_3 = ai/3$, जबकि $i^2 = -1$, समरेखीय हों, तो a का मान होगा [AMU 2001]

(a) - 1 (b) 3

(c) 4 (d) 5

42. निम्न में से कौन सा कथन सही है

(a) $|x - y| = |x| - |y|$ (b) $|x + y| \le |x| - |y|$

(c) $|x - y| \ge |x| - |y|$ (d) $|x + y| \ge |x| - |y|$

43. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल जिसके शीर्ष सम्मिश्र संख्याओं 0, z, $ze^{i\alpha}$, से निरूपित हों, (जबकि $0 < \alpha < \pi$) होगा [AMU 2002]

(a) $\frac{1}{2}|z|^2 \cos\alpha$ (b) $\frac{1}{2}|z|^2 \sin\alpha$

(c) $\frac{1}{2}|z|^2 \sin\alpha\cos\alpha$ (d) $\frac{1}{2}|z|^2$

44. यदि $z_1 = 1+2i, z_2 = 2+3i, z_3 = 3+4i,$ तब शीर्ष z_1, z_2, z_3 प्रदर्शित करते हैं [Orissa JEE 2004]
(a) समबाहु त्रिभुज (b) समद्विबाहु त्रिभुज
(c) समकोण त्रिभुज (d) इनमें से कोई नहीं

45. समीकरण $\left|\frac{z-5i}{z+5i}\right| = 1$ को सन्तुष्ट करने वाली सम्मिश्र संख्या $z = x+iy$ स्थित है [IIT 1982]
(a) वास्तविक अक्ष पर
(b) रेखा $y = 5$ पर
(c) मूल बिन्दु से जाने वाले एक वृत्त पर
(d) इनमें से कोई नहीं

46. यदि $\frac{z+i}{z+2}$ पूर्णतः अधिकल्पित हो, तो आर्गेण्ड आरेख पर बिन्दु z का बिन्दुपथ है
(a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ त्रिज्या का एक वृत्त (b) $\frac{5}{4}$ त्रिज्या का एक वृत्त
(c) एक सरल रेखा (d) एक परवलय

47. यदि $|z+1| = \sqrt{2}|z-1|$, तो आर्गेण्ड आरेख पर बिन्दु z का बिन्दु पथ है
(a) एक सरल रेखा (b) एक वृत्त
(c) एक परवलय (d) इनमें से कोई नहीं

48. $\left|\frac{z-a}{z+a}\right| = 1$, $[R(a) \neq 0]$ के लिए क्षेत्र है
(a) x – अक्ष (b) y – अक्ष
(c) सरल रेखा $x = a$ (d) इनमें से कोई नहीं

49. $|z-1| + |z+1| \le 4$ द्वारा परिभाषित आर्गण्ड क्षेत्र होगा
(a) दीर्घवृत्त का भीतरी भाग
(b) वृत्त का बाहरी भाग
(c) दीर्घवृत्त का भीतरी भाग व सीमा
(d) इनमें से कोई नहीं

50. उस बिन्दु z का बिन्दुपथ जो प्रतिबन्ध $arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{3}$ को संतुष्ट करता है, है
(a) एक सरल रेखा (b) एक वृत्त
(c) एक परवलय (d) इनमें से कोई नहीं

51. यदि $\frac{2z+1}{iz+1}$ का काल्पनिक भाग -2 हो, तो सम्मिश्र तल में z को प्रदर्शित करने वाले बिन्दु का बिन्दुपथ है [DCE 2001]
(a) एक वृत्त (b) एक सरल रेखा
(c) एक परवलय (d) इनमें से कोई नहीं

52. यदि $z = (\lambda+3) + i\sqrt{5-\lambda^2}$, तो z का बिन्दुपथ है,
(a) वृत्त (b) एक सरल रेखा
(c) परवलय (d) इनमें से कोई नहीं

53. एक बिन्दु z आर्गण्ड चित्र पर इस प्रकार घूमता है कि $|z-3i| = 2$, तो इसका बिन्दुपथ होगा [RPET 1992; MP PET 2002]
(a) y – अक्ष (b) एक सरल रेखा
(c) एक वृत्त (d) इनमें से कोई नहीं

54. यदि $z = x+iy$ व $|z-zi| = 1$, तो [RPET 1988, 91]
(a) z , x –अक्ष पर है (b) z , y –अक्ष पर है
(c) z वृत्त पर है (d) इनमें से कोई नहीं

55. यदि $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1$, तो z का बिन्दुपथ है [Roorkee 1990]
(a) एक वृत्त (b) एक दीर्घवृत्त
(c) एक सरल रेखा (d) एक परवलय

56. $R(z^2) = 1$ के द्वारा प्रदर्शित होता है
(a) परवलय $x^2 + y^2 = 1$ (b) अतिपरवलय $x^2 - y^2 = 1$
(c) परवलय या वृत्त (d) उपरोक्त सभी

57. $|z-1| = |z+i|$ द्वारा प्रदर्शित बिन्दुपथ है [EAMCET 1991]
(a) त्रिज्या 1 का वृत्त
(b) एक दीर्घवृत्त जिसकी नाभियाँ $(1, 0)$ व $(0, -1)$ हैं
(c) मूल बिन्दु से जाने वाली सरल रेखा
(d) $(1, 0)$, तथा $(0,1)$ को जोड़ने वाली रेखा को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त

58. यदि $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{|z|^2 - |z| + 1}{2+|z|}\right) < 2$, तब z का बिन्दुपथ है
(a) $|z| = 5$ (b) $|z| < 5$
(c) $|z| > 5$ (d) इनमें से कोई नहीं

59. यदि कोणांक $(z-a) = \frac{\pi}{4}$, जहाँ $a \in R$, तब $z \in C$ का बिन्दुपथ है एक [MP PET 1997]
(a) अतिपरवलय (b) परवलय
(c) दीर्घवृत्त (d) सरल रेखा

60. यदि $z = x+iy$ तथा $|z-2+i| = |z-3-i|$ हो, तो z का बिन्दुपथ है
(a) $2x+4y-5=0$ (b) $2x-4y-5=0$
(c) $x+2y=0$ (d) $x-2y+5=0$

61. बिन्दु z का बिन्दुपथ, जो कि समीकरण $|iz-1| + |z-i| = 2$ को संतुष्ट करता है, होगा [Roorkee 1999]
(a) एक सरल रेखा (b) एक वृत्त
(c) एक दीर्घवृत्त (d) एक रेखायुग्म

62. यदि $z = x+iy$ एक सम्मिश्र संख्या है जो कि $\left|z+\frac{i}{2}\right|^2 = \left|z-\frac{i}{2}\right|^2$, को संतुष्ट करती है, तब z का बिन्दुपथ है [EAMCET 2002]
(a) $2y = x$ (b) $y = x$
(c) y-अक्ष (d) x-अक्ष

63. उस बिन्दु का बिन्दुपथ, जो $arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = k$, को संतुष्ट करता है, (जहाँ k अशून्य है) होगा [Orissa JEE 2002]

(a) एक वृत्त जिसका केन्द्र y-अक्ष पर हो

(b) एक वृत्त जिसका केन्द्र x- अक्ष पर हो

(c) x- अक्ष के समान्तर एक सरल रेखा

(d) एक सरल रेखा जो कि x-अक्ष के साथ 60^o का कोण बनाती है

64. यदि सम्मिश्र संख्या $z-2-3i$ का कोणांक $\pi/4$ हो, तो सम्मिश्र संख्या $z = x+iy$ का बिन्दुपथ होगा [EAMCET 2003]

(a) $x+y-1=0$ (b) $x-y-1=0$

(c) $x+y+1=0$ (d) $x-y+1=0$

65. यदि $|z^2-1| = |z|^2+1$, तब z स्थित है [AIEEE 2004]

(a) दीर्घवृत्त पर (b) अधिकल्पित अक्ष पर

(c) वृत्त पर (d) वास्तविक अक्ष पर

66. यदि $z = x+iy$ और $\omega = \frac{1-iz}{z-i}$, तब सम्मिश्र तल में $|\omega| = 1$ प्रदर्शित करता है [RPET 1985, 97; IIT 1983; DCE 2000, 01; UPSEAT 2003; MP PET 2004]

(a) z अधिकल्पित अक्ष पर स्थित है

(b) z वास्तविक अक्ष पर स्थित है

(c) z एक इकाई वृत्त पर स्थित है

(d) इनमें से कोई नहीं

67. समीकरण $|z-5i| + |z+5i| = 12$, जबकि $z = x+iy$, प्रदर्शित करता है [AMU 1999]

(a) एक वृत्त (b) एक दीर्घवृत्त

(c) एक परवलय (d) कोई वास्तविक वक्र नहीं

68. यदि $z = x+iy$ तथा $arg\left(\frac{z-2}{z+2}\right) = \frac{\pi}{6}$, तब बिन्दु z का बिन्दुपथ होगा [RPET 2002]

(a) एक सरल रेखा (b) एक वृत्त

(c) एक परवलय (d) एक दीर्घवृत्त

69. यदि $w = \frac{z}{z-\frac{1}{3}i}$ और $|w| = 1$, तब z स्थित है [AIEEE 2005]

(a) सरल रेखा पर (b) परवलय पर

(c) दीर्घवृत्त पर (d) वृत्त पर

70. यदि $|8+z| + |z-8| = 16$ जहाँ z एक सम्मिश्र संख्या है, तब बिन्दु z स्थित है [J & K 2005]

(a) वृत्त पर (b) दीर्घवृत्त पर

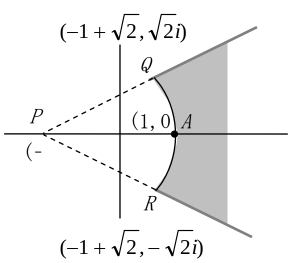
(c) सरल रेखा पर (d) इनमें से कोई नहीं

71. PQ व PR दो अनंत किरणें हैं, QAR एक चाप है परिसीमा के अतिरिक्त वह बिन्दु जो छायांकित क्षेत्र में स्थित हैं निम्न प्रतिबंध को संतुष्ट करता है [IIT Screening 2005]

(a) $|z-1| > 2; |\arg(z-1)| < \frac{\pi}{4}$

(b) $|z-1| > 2; |\arg(z-1)| < \frac{\pi}{2}$

(c) $|z+1| > 2; |\arg(z+1)| < \frac{\pi}{4}$



(d) $|z+1| > 2; |\arg(z+1)| < \frac{\pi}{2}$

72. निम्नलिखित समीकरणों में कौन सा त्रिभुज प्रदर्शित कर सकता है [Orissa JEE 2005]

(a) $|z-1| = |z-2|$ (b) $|z-1| = |z-2| = |z-i|$

(c) $|z-1| - |z-2| = 2a$ (d) $|z-1|^2 + |z-2|^2 = 4$

73. समीकरण $|z-1| = |z-2| = |z-i|$ के लिए हलों की संख्या है [Orissa JEE 2005]

(a) एक हल (b) तीन हल

(c) दो हल (d) कोई हल नहीं

74. यदि $|z-2-3i| + |z+2-6i| = 4$, जहाँ $i = \sqrt{-1}$, तब $P(z)$ का बिन्दु पथ है [DCE 2005]

(a) दीर्घवृत्त

(b) ϕ

(c) बिन्दु $2+3i$ और $-2+6i$ को मिलाने वाली रेखा

(d) इनमें से कोई नहीं

75. यदि $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ को मूल बिन्दु के परितः विपरीत दिशा में $45°$ घुमाया जाए, तो नई स्थिति में निर्देशांक होंगे [Kerala (Engg.) 2005]

(a) (2, 0) (b) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

(c) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ (d) $(\sqrt{2}, 0)$

(e) (4, 0)

डी मोयवर प्रमेय तथा इकाई के मूल

1. $\sqrt{i} =$

(a) $\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$ (b) $\pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

(c) $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. यदि $x_r = \cos\left(\frac{\pi}{2^r}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2^r}\right)$, तो $x_1 . x_2 ...... \infty$ का मान है [RPET 1990, 2000; BIT Mesra 1996; Karnataka CET 2000]

(a) -3 (b) -2

(c) -1 (d) 0

3. $\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^4}{(\sin\theta + i\cos\theta)^5} =$ [MNR 1985; UPSEAT 2000]

(a) $\cos\theta - i\sin\theta$ (b) $\cos 9\theta - i\sin 9\theta$

(c) $\sin\theta - i\cos\theta$ (d) $\sin 9\theta - i\cos 9\theta$

4. यदि $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^5 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$, तो [MP PET 1997]

(a) $\text{Re}(z) = 0$ (b) $\text{Im}(z) = 0$

(c) $\text{Re}(z) > 0, \text{Im}(z) > 0$ (d) $\text{Re}(z) > 0, \text{Im}(z) < 0$

5. $(2-2i)^{1/3}$ के मूल होंगे

(a) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right), \sqrt{2}\left(-\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}\right), -1-i$

(b) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right), \sqrt{2}\left(-\sin\frac{\pi}{12} - i\cos\frac{\pi}{12}\right), 1+i$

(c) $1+\sqrt{2}i, -1-i, -2-2i$

(d) इनमें से कोई नहीं

6. $\dfrac{4(\cos 75^o + i\sin 75^o)}{0.4(\cos 30^o + i\sin 30^o)}$ का मान होगा

(a) $\dfrac{\sqrt{2}}{10}(1+i)$ (b) $\dfrac{\sqrt{2}}{10}(1-i)$

(c) $\dfrac{10}{\sqrt{2}}(1-i)$ (d) $\dfrac{10}{\sqrt{2}}(1+i)$

7. $(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^{-5}$ $(\cos 3\theta - i\sin 3\theta)^6$ $(\sin\theta - i\cos\theta)^3$ का $A+iB$ रूप है [MNR 1991]

(a) $(\cos 25\theta + i\sin 25\theta)$

(b) $i(\cos 25\theta + i\sin 25\theta)$

(c) $i(\cos 25\theta - i\sin 25\theta)$

(d) $(\cos 25\theta - i\sin 25\theta)$

8. यदि $a = \sqrt{2i}$ तब निम्न में से सही है [Roorkee 1989]

(a) $a = 1+i$ (b) $a = 1-i$

(c) $a = -(\sqrt{2})i$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)........$ $(\cos n\theta + i\sin n\theta) = 1$, तब θ का मान है

[Karnataka CET 1992; Kurukshetra CEE 2002]

(a) $4m\pi$ (b) $\dfrac{2m\pi}{n(n+1)}$

(c) $\dfrac{4m\pi}{n(n+1)}$ (d) $\dfrac{m\pi}{n(n+1)}$

10. $\left(\dfrac{1+\cos\phi + i\sin\phi}{1+\cos\phi - i\sin\phi}\right)^n =$

(a) $\cos n\phi - i\sin n\phi$ (b) $\cos n\phi + i\sin n\phi$

(c) $\sin n\phi + i\cos n\phi$ (d) $\sin n\phi - i\cos n\phi$

11. यदि $\left(\dfrac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{i+\sin\theta + i\cos\theta}\right)^4 = \cos n\theta + i\sin n\theta$, तब n बराबर है

[EAMCET 1986]

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

12. व्यंजक $\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\left(\cos\dfrac{\pi}{2^2} + i\sin\dfrac{\pi}{2^2}\right)........\infty$ का मान होगा [Kurukshetra CEE 1998]

(a) -1 (b) 1

(c) 0 (d) 2

13. $\left(\dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\sin\theta + i\cos\theta}\right)^4 =$ [RPET 1996]

(a) $\sin 8\theta - i\cos 8\theta$ (b) $\cos 8\theta - i\sin 8\theta$

(c) $\sin 8\theta + i\cos 8\theta$ (d) $\cos 8\theta + i\sin 8\theta$

14. यदि $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0 = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$, तो $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$ का मान होगा [RPET 1999]

(a) 2/3 (b) 3/2

(c) 1/2 (d) 1

15. यदि $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0 = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ तब $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma$ का मान होगा [RPET 2000]

(a) $2\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ (b) $\cos 2(\alpha+\beta+\gamma)$

(c) 0 (d) 1

16. $(-\sqrt{3}+i)^{53}$, जबकि $i^2 = -1$, का मान होगा [AMU 2000]

(a) $2^{53}(\sqrt{3}+2i)$ (b) $2^{52}(\sqrt{3}-i)$

(c) $2^{53}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$ (d) $2^{53}(\sqrt{3}-i)$

17. $\left[\dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{10} + i\sin\dfrac{\pi}{10}}{1-\cos\dfrac{\pi}{10} - i\sin\dfrac{\pi}{10}}\right]^{10} =$

[Karnataka CET 2001]

(a) 0 (b) - 1

(c) 1 (d) 2

18. यदि हम $\dfrac{(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^{-5}}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^{-2}(\cos 3\theta - i\sin 3\theta)^{-9}}$ को $x+iy$ के रूप में निरूपित करें, तब हमें प्राप्त होता है [Karnataka CET 2001]

(a) $\cos 49\theta - i\sin 49\theta$ (b) $\cos 23\theta - i\sin 23\theta$

(c) $\cos 49\theta + i\sin 49\theta$ (d) $\cos 21\theta + i\sin 21\theta$

19. $(\sin\theta + i\cos\theta)^n$ का मान है [RPET 2001]

(a) $\cos n\theta + i\sin n\theta$

(b) $\sin n\theta + i\cos n\theta$

(c) $\cos n\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin n\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

(d) इनमें से कोई नहीं

20. $\dfrac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)}{(\cos\gamma + i\sin\gamma)(\cos\delta + i\sin\delta)} =$ [RPET 2001]

(a) $\cos(\alpha+\beta-\gamma-\delta) - i\sin(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$

(b) $\cos(\alpha+\beta-\gamma-\delta) + i\sin(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$

(c) $\sin(\alpha+\beta-\gamma-\delta) - i\cos(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$

(d) $\sin(\alpha+\beta-\gamma-\delta) + i\cos(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$

21. $\left[\dfrac{1+\cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)}{1+\cos(\pi/8) - i\sin(\pi/8)}\right]^8$ का मान है [RPET 2001]

(a) - 1 (b) 0

(c) 1 (d) 2

22. यदि $x_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{4^n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4^n}\right)$ है, तब $x_1.x_2.x_3....\infty =$

[EAMCET 2002]

(a) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ (b) $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

(c) $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ (d) $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

23. $\dfrac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^4}{(\sin\beta + i\cos\beta)^5} =$ [RPET 2002]

(a) $\cos(4\alpha+5\beta) + i\sin(4\alpha+5\beta)$

(b) $\cos(4\alpha+5\beta)-i\sin(4\alpha+5\beta)$

(c) $\sin(4\alpha+5\beta)-i\cos(4\alpha+5\beta)$

(d) इनमें से कोई नहीं

24. $i^{1/3}$ का मान है [UPSEAT 2002]

(a) $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$

(c) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

25. यदि $z=(1+i\sqrt{3})^{100}$, तो $\frac{\text{Re}(z)}{\text{Im}(z)}$ का मान होगा [AMU 2002]

(a) 2^{100} (b) 2^{50}

(c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{3}$

26. $\left(\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}\right)^n=$ [Kerala (Engg.) 2002]

(a) $\cos\left(\frac{n\pi}{2}-n\theta\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{2}-n\theta\right)$

(b) $\cos\left(\frac{n\pi}{2}+n\theta\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{2}+n\theta\right)$

(c) $\sin\left(\frac{n\pi}{2}-n\theta\right)+i\cos\left(\frac{n\pi}{2}-n\theta\right)$

(d) $\cos n\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)+i\sin n\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)$

27. यदि n एक धनात्मक पूर्णांक हो, तो $(1+i)^n+(1-i)^n$ का मान होगा [Orissa JEE 2003]

(a) $(\sqrt{2})^{n-2}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ (b) $(\sqrt{2})^{n-2}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

(c) $(\sqrt{2})^{n+2}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ (d) $(\sqrt{2})^{n+2}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

28. यदि $\frac{1}{x}+x=2\cos\theta,$ तब $x^n+\frac{1}{x^n}$ का मान होगा [UPSEAT 2001]

(a) $2\cos n\theta$ (b) $2\sin n\theta$

(c) $\cos n\theta$ (d) $\sin n\theta$

29. यदि $iz^4+1=0$, तब z मान ग्रहण कर सकता है [UPSEAT 2004]

(a) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (b) $\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$

(c) $\frac{1}{4i}$ (d) i

30. दो संख्यायें जिनमें से प्रत्येक दूसरे का वर्ग हो, हैं [MP PET 1987]

(a) ω,ω^3 (b) $-i,\ i$

(c) $-1,1$ (d) $\omega,\ \omega^2$

31. यदि ω इकाई का एक घनमूल हो, तो $(1+\omega-\omega^2)\ (1-\omega+\omega^2)$ = [MNR 1990; MP PET 1993, 2002]

(a) 1 (b) 0

(c) 2 (d) 4

32. $(27)^{1/3}$ =

(a) 3 (b) $3,\ 3i,3i^2$

(c) $3,3\omega,3\omega^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

33. यदि धनात्मक पूर्णांक n, 3 का अपवर्त्य न हो, तो $1+\omega^n+\omega^{2n}$ = [MP PET 2004]

(a) 3 (b) 1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

34. इकाई के सम्मिश्र घनमूलों में से प्रत्येक का वर्ग होगा

(a) इकाई का वास्तविक मूल

(b) इकाई का दूसरा सम्मिश्र घनमूल

(c) दोनों सम्मिश्र मूलों का योग

(d) इनमें से कोई नहीं

35. यदि ω इकाई का एक घनमूल हो, तो $(1+\omega)^3-(1+\omega^2)^3=$

(a) 0 (b) ω

(c) ω^2 (d) इनमें से कोई नहीं

36. यदि α तथा β इकाई के सम्मिश्र मूल हों, तो $\alpha^4+\beta^4+\frac{1}{\alpha\beta}=$ [IIT 1977]

(a) 3 (b) 0

(c) 1 (d) 2

37. यदि ω इकाई का एक सम्मिश्र मूल हो, तो $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)=$

(a) 0 (b) 1

(c) - 1 (d) 9

38. यदि ω इकाई का एक घनमूल हो, तो $(1-\omega+\omega^2)^5+(1+\omega-\omega^2)^5=$ [IIT 1965; MP PET 1997; RPET 1997]

(a) 16 (b) 32

(c) 48 (d) - 32

39. यदि $x=a,y=b\omega,z=c\omega^2$, जहाँ ω इकाई का एक सम्मिश्र घनमूल है, तो $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=$ [AMU 1983]

(a) 3 (b) 1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

40. यदि ω इकाई का एक सम्मिश्र मूल हो, तो $(x-y)(x\omega-y)(x\omega^2-y)=$

(a) x^2+y^2

(b) x^2-y^2

(c) x^3-y^3

(d) x^3+y^3

41. यदि ω इकाई का एक सम्मिश्र घनमूल हो, तो $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)\ldots\ 2n$ गुणनखण्डों तक = [AMU 2000]

(a) 0 (b) 1

(c) -1 (d) इनमें से कोई नहीं

42. $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{3/4}$ के सभी मूलों का गुणनफल है [MNR 1984; EAMCET 1985]

(a) -1 (b) 1
(c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

43. यदि ω इकाई का एक घनमूल हो, तो निम्नलिखित समीकरण $\begin{vmatrix} x+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & x+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & x+\omega \end{vmatrix}=0$ का एक मूल है [MNR 1990; MP PET 1999]

(a) $x=1$ (b) $x=\omega$
(c) $x=\omega^2$ (d) $x=0$

44. यदि $x=a+b, y=a\alpha+b\beta$ व $z=a\beta+b\alpha$, जहाँ α व β इकाई के सम्मिश्र मूल हैं, तो xyz बराबर है [IIT 1978; Roorkee 1989; RPET 1997]

(a) a^2+b^2 (b) a^3+b^3
(c) a^3b^3 (d) a^3-b^3

45. यदि $x=a+b, y=a\omega+b\omega^2, z=a\omega^2+b\omega$, तो $x^3+y^3+z^3=$ [Roorkee 1977; IIT 1970]

(a) a^3+b^3 (b) $3(a^3+b^3)$
(c) $3(a^2+b^2)$ (d) इनमें से कोई नहीं

46. $\frac{a+b\omega+c\omega^2}{b+c\omega+a\omega^2}+\frac{a+b\omega+c\omega^2}{c+a\omega+b\omega^2}$ का मान होगा [BIT Ranchi 1989; Orissa JEE 2003]

(a) 1 (b) - 1
(c) 2 (d) - 2

47. जब इकाई के घनमूलों को आर्गण्ड समतल पर प्रदर्शित किया जाता है, तो यह निर्मित करता है [IIT 1988; Pb. CET 2004]

(a) समबाहु त्रिभुज (b) समद्विबाहु त्रिभुज
(c) समकोण त्रिभुज (d) इनमें से कोई नहीं

48. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1000}=$

(a) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (b) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
(c) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (d) इनमें से कोई नहीं

49. यदि α,β,γ, $p(p<0)$ के घनमूल हों, तो किन्ही भी x, y, z के लिए $\frac{x\alpha+y\beta+z\gamma}{x\beta+y\gamma+z\alpha}$ बराबर होगा [IIT 1989]

(a) $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ (b) $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$
(c) $\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$ (d) इनमें से कोई नहीं

50. यदि $z=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$, तो z^{69} का मान होगा [RPET 2002]

(a) $-i$ (b) i
(c) 1 (d) -1

51. $x^4-1=0$ के मूल हैं [MP PET 1986]

(a) $1, 1, i, -i$ (b) $1, -1, i, -i$
(c) $1, -1, \omega, \omega^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

52. यदि ω इकाई का एक सम्मिश्र मूल हो, तो n के धनात्मक पूर्णांक मान के लिए $\omega.\omega^2.\omega^3........\omega^n$ का गुणनफल होगा [Roorkee 1991]

(a) $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ (b) $-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$
(c) 1 (d) (b) एवं (c) दोनों

53. इकाई के घनमूलों में से एक है [MP PET 1994, 2003]

(a) $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$
(c) $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$

54. यदि $\omega(\neq 1)$ इकाई का एक घनमूल है व $(1+\omega)^7=A+B\omega$, तो A व B क्रमशः हैं [IIT 1995]

(a) 0, 1 (b) 1, 0
(c) 1, 1 (d) $-1, 1$

55. यदि $\omega(\neq 1)$ इकाई का एक घनमूल है, तब $\begin{vmatrix} 1 & 1+i+\omega^2 & \omega^2 \\ 1-i & -1 & \omega^2-1 \\ -i & -i+\omega-1 & -1 \end{vmatrix}=$ [IIT 1995]

(a) 0 (b) 1
(c) ω (d) i

56. इकाई के n वें मूल हैं [Orissa JEE 2004]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

57. यदि $1, \omega, \omega^2$ इकाई के तीन घनमूल हैं, तो $(3+\omega^2+\omega^4)^6=$ [MP PET 1995]

(a) 64 (b) 729
(c) 2 (d) 0

58. $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)........ 2n$ पदों तक है [EAMCET 1988]

(a) 2^n (b) 2^{2n}
(c) 0 (d) 1

59. यदि $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \omega & 2\omega^2 \\ 2 & 2\omega^2 & 4\omega^3 \\ 3 & 3\omega^3 & 6\omega^4 \end{vmatrix}$ जहाँ ω इकाई का घनमूल है तब

(a) $\Delta=0$ (b) $\Delta=1$
(c) $\Delta=2$ (d) $\Delta=3$

60. यदि n इकाई से बड़ा धनात्मक पूर्णांक है तथा z समीकरण $z^n=(z+1)^n$ को संतुष्ट करने वाली सम्मिश्र संख्या है, तब

(a) $\text{Re}(z)<0$ (b) $\text{Re}(z)>0$
(c) $\text{Re}(z)=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

61. यदि ω इकाई का इकाई के अतिरिक्त n वाँ मूल है , तब $1+\omega+\omega^2+...+\omega^{n-1}$ का मान है

(a) 0 (b) 1
(c) -1 (d) इनमें से कोई नहीं

62. यदि $z_1, z_2, z_3......z_n$ इकाई के n वें मूल हैं, तब $k = 1, 2,....., n$ के लिए

(a) $|z_k| = k|z_{k+1}|$ (b) $|z_{k+1}| = k|z_k|$

(c) $|z_{k+1}| = |z_k| + |z_{k+1}|$ (d) $|z_k| = |z_{k+1}|$

63. यदि $1, \omega, \omega^2$ इकाई के घनमूल हैं तथा $a + b + c = 0$ तब $(a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega)^3 =$ [West Bengal JEE 1992]

(a) $27\,abc$ (b) 0

(c) $3\,abc$ (d) इनमें से कोई नहीं

64. समीकरण $x^{12} - 1 = 0$, $x^4 + x^2 + 1 = 0$ के उभयनिष्ठ मूल हैं [EAMCET 1989]

(a) $\pm\omega$ (b) $\pm\omega^2$

(c) $\pm\omega, \pm\omega^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

65. यदि $z_1, z_2 z_3, z_4$ समीकरण $z^4 = 1$ के मूल हैं, तब $\sum_{i=1}^{4} z_i^3$ का मान है [Kurukshetra CEE 1996]

(a) 0 (b) 1

(c) i (d) $1 + i$

66. यदि α इकाई का एक काल्पनिक घनमूल है, तो $n \in N$ के लिए $\alpha^{3n+1} + \alpha^{3n+3} + \alpha^{3n+5}$ का मान है [MP PET 1996; Pb. CET 2000]

(a) -1 (b) 0

(c) 1 (d) 3

67. $\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{20} + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^{20} =$

(a) $20\sqrt{3}i$ (b) 1

(c) $\frac{1}{2^{19}}$ (d) -1

68. यदि α तथा β इकाई के अधिकल्पित घनमूल हैं, तो $\alpha^4 + \beta^{28} + \frac{1}{\alpha\beta}$ का मान है [MP PET 1998]

(a) 1 (b) -1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

69. यदि ω इकाई का घनमूल है, तो $(3 + 5\omega + 3\omega^2)^2 + (3 + 3\omega + 5\omega^2)^2 =$ [MP PET 1999]

(a) 4 (b) 0

(c) - 4 (d) इनमें से कोई नहीं

70. यदि ω इकाई का एक अधिकल्पित मूल हो, तो $\sin\left[(\omega^{10} + \omega^{23})\pi - \frac{\pi}{4}\right]$ का मान होगा [IIT 1994]

(a) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

71. $\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^6 + \left(\frac{i - \sqrt{3}}{2}\right)^6 =$ [RPET 1997]

(a) -2 (b) 0

(c) 2 (d) 1

72. यदि ω इकाई का एक काल्पनिक घनमूल है, तो , $(1 + \omega - \omega^2)^7$ का मान होगा [IIT 1998; MP PET 2000]

(a) 128ω (b) -128ω

(c) $128\omega^2$ (d) $-128\omega^2$

73. $\frac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}} + \frac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}} =$ [AMU 2000]

(a) - 64 (b) - 32

(c) - 16 (d) $\frac{1}{16}$

74. यदि समीकरण $z^3 = 1$ का एक सम्मिश्र मूल ω है, तब $\omega + \omega^{\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{9}{32} + \frac{27}{128} + ...\right)}$ का मान होगा [Roorkee 2000; AMU 2005]

(a) - 1 (b) 0

(c) 9 (d) i

75. यदि ω इकाई का एक घनमूल है, तब $(3 + \omega + 3\omega^2)^4$ का मान है

(a) 0 (b) 16

(c) $16\,\omega$ (d) $16\,\omega^2$

76. यदि ω एवं ω^2 इकाई के घनमूल हैं, तब $(1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega)^6$ का मान है [DCE 2001]

(a) $128\,\omega$ (b) $-128\,\omega^2$

(c) $-128\,\omega$ (d) $128\,\omega^2$

77. यदि $1, \omega, \omega^2$ इकाई के घनमूल हों, तो उनका गुणनफल होगा [Karnataka CET 1999, 2001]

(a) 0 (b) ω

(c) - 1 (d) 1

78. यदि $z = \frac{\sqrt{3} + i}{-2}$ हो, तो z^{69} का मान होगा [RPET 2001]

(a) 1 (b) - 1

(c) i (d) - i

79. माना $\omega_n = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, जबकि $i^2 = -1$, तो $(x + y\omega_3 + z\omega_3^{\,2})\ (x + y\omega_3^{\,2} + z\omega_3)$ का मान होगा [AMU 2001]

(a) 0

(b) $x^2 + y^2 + z^2$

(c) $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy$

(d) $x^2 + y^2 + z^2 + yz + zx + xy$

80. यदि $z + z^{-1} = 1$, तो $z^{100} + z^{-100}$ का मान होगा [UPSEAT 2001]

(a) i (b) - i

(c) 1 (d) - 1

81. यदि $\frac{1 + \sqrt{3}\,i}{2}$ समीकरण $x^4 - x^3 + x - 1 = 0$ का एक मूल हो, तो इसके अन्य वास्तविक मूल होंगे [EAMCET 2002]

(a) 1, 1 (b) - 1, - 1

(c) 1, - 1 (d) 1, 2

82. यदि $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}\right)^n$ एक पूर्णांक है, तब n का मान होगा [UPSEAT 2002]

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

83. $(1+2\omega+\omega^2)^{3n}-(1+\omega+2\omega^2)^{3n}$ का मान होगा [UPSEAT 2002]

(a) 0 (b) 1

(c) ω (d) ω^2

84. यदि ω इकाई का एक अवास्तविक घनमूल हो, तो $(a+b)$ $(a+b\omega)$ $(a+b\omega^2)$ का मान होगा [Kerala (Engg.) 2002]

(a) a^3+b^3 (b) a^3-b^3

(c) a^2+b^2 (d) a^2-b^2

85. $\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ का एक चतुर्थ मूल होगा [Karnataka CET 2003]

(a) $cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (b) $cis\left(\frac{\pi}{12}\right)$

(c) $cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$ (d) $cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$

86. $(8)^{1/3}$ का मान है [RPET 2003]

(a) $-1+i\sqrt{3}$ (b) $-1-i\sqrt{3}$

(c) 2 (d) उपरोक्त सभी

87. यदि ω इकाई का एक सम्मिश्र घनमूल हो, तो $225+(3\omega+8\omega^2)^2+(3\omega^2+8\omega)^2=$ [EAMCET 2003]

(a) 72 (b) 192

(c) 200 (d) 248

88. यदि $1,\omega,\omega^2$ इकाई के घनमूल हों, तो

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & \omega^n & \omega^{2n}\\ \omega^n & \omega^{2n} & 1\\ \omega^{2n} & 1 & \omega^n\end{vmatrix}$$ का मान है [AIEEE 2003]

(a) 0 (b) 1

(c) ω (d) ω^2

89. यदि $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, तब $(3+\omega+3\omega^2)^4=$ [Karnataka CET 2004; Pb. CET 2000]

(a) 16 (b) -16

(c) 16ω (d) $16\omega^2$

90. यदि $1,\omega,\omega^2$ इकाई के घनमूल हों, तो $(1-2\omega+\omega^2)^6=$ [Pb. CET 2001]

(a) 729 (b) 246

(c) 243 (d) 81

91. यदि ω इकाई का सम्मिश्र घनमूल हो, तब $\omega^{99}+\omega^{100}+\omega^{101}$ का मान होगा [Pb. CET 2004]

(a) 1 (b) - 1

(c) 3 (d) 0

92. $\sin^{-1}(e^{i\theta})$ का वास्तविक भाग होगा [RPET 1997]

(a) $\cos^{-1}(\sqrt{\sin\theta})$ (b) $\sinh^{-1}(\sqrt{\sin\theta})$

(c) $\sin^{-1}(\sqrt{\sin\theta})$ (d) $\sin^{-1}(\sqrt{\cos\theta})$

93. $\sinh ix$ = [EAMCET 2002]

(a) $i\sin(ix)$ (b) $i\sin x$

(c) $-i\sin x$ (d) $\sin(ix)$

94. यदि $\cos(u+iv)=\alpha+i\beta$ है, तब $\alpha^2+\beta^2+1$ का मान होगा [RPET 1999]

(a) $\cos^2 u+\sinh^2 v$ (b) $\sin^2 u+\cosh^2 v$

(c) $\cos^2 u+\cosh^2 v$ (d) $\sin^2 u+\sinh^2 v$

95. $\sec h(i\pi)$ का मान है [RPET 1999]

(a) - 1 (b) i

(c) 0 (d) 1

96. $\cosh(\alpha+i\beta)-\cosh(\alpha-i\beta)$ का मान है [RPET 2000]

(a) $2\sinh\alpha\sinh\beta$ (b) $2\cosh\alpha\cosh\beta$

(c) $2i\sinh\alpha\sin\beta$ (d) $2\cosh\alpha\cos\beta$

97. $\cosh(\alpha+i\beta)$ का काल्पनिक भाग है [RPET 2000]

(a) $\cosh\alpha\cos\beta$ (b) $\sinh\alpha\sin\beta$

(c) $\cos\alpha\cosh\beta$ (d) $\cos\alpha\cos\beta$

98. निम्न में से कौन सा कथन सही है [RPET 2001]

(a) $\sin(ix)=i\sinh x$ (b) $\cos(ix)=i\cosh x$

(c) $\sin(ix)=-i\sinh x$ (d) $\tan(ix)=-i\tanh x$

99. $\cos(x+iy)$ का मान है [RPET 2001]

(a) $\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$

(b) $\cos x\cosh y+i\sin x\sinh y$

(c) $\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$

(d) इनमें से कोई नहीं

100. यदि $\tan(u+iv)=i$ है, तब v का मान है [RPET 2001]

(a) 0 (b) ∞

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

101. यदि $\tan^{-1}(\alpha+i\beta)=x+iy$, हो, तो $x=$ [RPET 2002]

(a) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2}\right)$

(b) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2+\beta^2}\right)$

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2}\right)$

(d) इनमें से कोई नहीं

102. यदि ω इकाई का घनमूल है जो कि 1 के बराबर नही है तो $|a+b\omega+c\omega^2|$ का न्यूनतम मान होगा (जहाँ a, b, c पूर्णांक हैं लेकिन आपस में बराबर नहीं हैं)

(a) 0 (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) 1 (d) 2

103. यदि 1, ω,ω^2 इकाई के घनमूल हों, तो $\omega^2(1+\omega)^3-(1+\omega^2)\omega=$ [Orissa JEE 2005]

(a) 1 (b) -1

(c) i (d) 0

104. माना $x=\alpha+\beta, y=\alpha\omega+\beta\omega^2, z=\alpha\omega^2+\beta\omega, \omega$ इकाई का अधिकल्पित घनमूल है, तब xyz का गुणनफल है [Orissa JEE 2005]

(a) $\alpha^2+\beta^2$

(b) $\alpha^2-\beta^2$

(c) $\alpha^3+\beta^3$

(d) $\alpha^3-\beta^3$

Critical Thinking

Objective Questions

1. समीकरण $a^2-2a\sin x+1=0$ को सन्तुष्ट करने वाले a के मानों की संख्या है

(a) शून्य (b) एक

(c) दो (d) अनन्त

2. धनात्मक पूर्णांकों n_1, n_2 के लिये व्यंजक $(1+i)^{n_1}+(1+i^3)^{n_1}+(1+i^5)^{n_2}+(1+i^7)^{n_2}$ जहाँ $i=\sqrt{-1}$ है, का मान एक वास्तविक संख्या है, यदि और केवल यदि [IIT 1996]

(a) $n_1=n_2+1$ (b) $n_1=n_2-1$

(c) $n_1=n_2$ (d) $n_1>0, n_2>0$

3. दिया गया है, $z^2+(p+iq)z+r+is=0$, जहाँ p,q,r,s वास्तविक व अशून्य हैं, का एक वास्तविक मूल होगा, तो

(a) $pqr=r^2+p^2s$ (b) $prs=q^2+r^2p$

(c) $qrs=p^2+s^2q$ (d) $pqs=s^2+q^2r$

4. यदि $x=-5+2\sqrt{-4}$, तो $x^4+9x^3+35x^2-x+4$ का मान होगा [IIT 1972]

(a) 160 (b) –160

(c) 60 (d) –60

5. यदि $\sqrt{3}+i=(a+ib)(c+id)$, तब $\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{d}{c}\right)$ का मान है

(a) $\frac{\pi}{3}+2n\pi, n\in I$ (b) $n\pi+\frac{\pi}{6}, n\in I$

(c) $n\pi-\frac{\pi}{3}, n\in I$ (d) $2n\pi-\frac{\pi}{3}, n\in I$

6. यदि $a=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $b=\cos\beta+i\sin\beta$, $c=\cos\gamma+i\sin\gamma$ तथा $\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}=1$, तब $\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)+\cos(\alpha-\beta)$ का मान होगा [RPET 2001]

(a) 3/2 (b) - 3/2

(c) 0 (d) 1

7. यदि $(1+i)(1+2i)(1+3i).....(1+ni)=a+ib$, तब $2.5.10....(1+n^2)=$ [Karnataka CET 2002; Kerala (Engg.) 2002]

(a) a^2-b^2 (b) a^2+b^2

(c) $\sqrt{a^2+b^2}$ (d) $\sqrt{a^2-b^2}$

8. यदि z एक सम्मिश्र संख्या हो, तो $|z|+|z-1|$ का न्यूनतम मान है

(a) 1 (b) 0

(c) 1/2 (d) इनमें से कोई नहीं

9. किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2 तथा वास्तविक संख्याओं a तथा b के लिये $|(az_1 - bz_2)|^2 + |(bz_1 + az_2)|^2 =$ [IIT 1988]

(a) $(a^2+b^2)(|z_1|+|z_2|)$ (b) $(a^2+b^2)(|z_1|^2+|z_2|^2)$

(c) $(a^2+b^2)(|z_1|^2-|z_2|^2)$ (d) इनमें से कोई नहीं

10. असमिका $\log_{1/3}|z+1| > \log_{1/3}|z-1|$ को संतुष्ट करने वाले z का बिन्दुपथ होगा

(a) $R(z) < 0$ (b) $R(z) > 0$

(c) $I(z) < 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

11. यदि $z_1 = a + ib$ व $z_2 = c + id$ सम्मिश्र संख्यायें इस प्रकार हैं कि $|z_1| = |z_2| = 1$ व $R(z_1\overline{z_2}) = 0$, तो सम्मिश्र संख्याओं का युग्म $w_1 = a + ic$ व $w_2 = b + id$ संतुष्ट करता है [IIT 1985]

(a) $|w_1| = 1$ (b) $|w_2| = 1$

(c) $R(w_1\overline{w_2}) = 0$, (d) उपरोक्त सभी

12. माना z व w दो सम्मिश्र संख्यायें इस प्रकार हैं कि $|z| \le 1$, $|w| \le 1$ तथा $|z + iw| = |z - i\overline{w}| = 2$, तब z का मान है [IIT 1995]

(a) 1 या i (b) i या $-i$

(c) 1 या –1 (d) i या –1

13. समीकरण $\left|z + \frac{1}{z}\right| = a$ को संतुष्ट करने वाले बिन्दु z की मूलबिन्दु से अधिकतम दूरी है

(a) $\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+1}+a)$

(b) $\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+2}+a)$

(c) $\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4}+a)$

(d) इनमें से कोई नहीं

14. समीकरण $\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}, \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$ को संतुष्ट करने वाली सम्मिश्र संख्या है [Roorkee 1993]

(a) 6 (b) $6 \pm 8i$

(c) $6+8i, 6+17i$ (d) इनमें से कोई नहीं

15. यदि z_1, z_2 एवं z_3 तीन सम्मिश्र संख्याऐं इस प्रकार हैं कि $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = 1$, तब $|z_1 + z_2 + z_3|$ का मान है [MP PET 2004; IIT Screening 2000]

(a) एक के बराबर (b) एक से कम

(c) तीन से अधिक (d) तीन के बराबर

16. यदि $z_1 = 10 + 6i, z_2 = 4 + 6i$ व z एक सम्मिश्र संख्या इस प्रकार है कि $amp\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \frac{\pi}{4}$, तो $|z - 7 - 9i|$ का मान है [IIT 1990]

(a) $\sqrt{2}$

(b) $2\sqrt{2}$

(c) $3\sqrt{2}$

(d) $2\sqrt{3}$

17. यदि z_1, z_2, z_3 तीन अशून्य सम्मिश्र संख्यायें इस प्रकार हैं कि $z_2 \ne z_1, a = |z_1|, b = |z_2|, c = |z_3|$ माना कि $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0$ तब $arg\left(\frac{z_3}{z_2}\right) =$

(a) $arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right)^2$ (b) $arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right)$

(c) $arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)^2$ (d) $arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)$

18. माना z व w दो अशून्य सम्मिश्र संख्यायें इस प्रकार हैं कि $|z| = |w|$ व $arg\, z + arg\, w = \pi$, तो z बराबर है [IIT 1995; AIEEE 2002]

(a) w (b) $-w$

(c) $\overline{w}$ (d) $-\overline{w}$

19. यदि $|z - 25i| \le 15$, तब $|\max.amp(z) - \min.amp(z)| =$

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (b) $\pi - 2\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

(c) $\frac{\pi}{2} + \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (d) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

20. यदि z_1, z_2 तथा z_3, z_4 संयुग्मी सम्मिश्र संख्याओं के दो युग्म हैं, तब $arg\left(\frac{z_1}{z_4}\right) + arg\left(\frac{z_2}{z_3}\right)$ बराबर है

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{3\pi}{2}$ (d) π

21. माना z, w सम्मिश्र संख्यायें हैं जबकि $\overline{z} + i\overline{w} = 0$ और $arg\, zw = \pi$, तब $arg\, z$ बराबर है [AIEEE 2004]

(a) $\frac{5\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

22. यदि $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_nx^n$ हो, तब $C_0 - C_2 + C_4 - C_6 + ...$ का मान है

(a) 2^n (b) $2^n \cos\frac{n\pi}{2}$

(c) $2^n \sin\frac{n\pi}{2}$ (d) $2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}$

23. यदि $x = \cos\theta + i\sin\theta$ व $y = \cos\phi + i\sin\phi$, तो $x^m y^n + x^{-m}y^{-n}$ बराबर है

(a) $\cos(m\theta + n\phi)$

(b) $\cos(m\theta - n\phi)$

(c) $2\cos(m\theta + n\phi)$

(d) $2\cos(m\theta - n\phi)$

24. $\sum_{r=1}^{8}\left(\sin\frac{2r\pi}{9}+i\cos\frac{2r\pi}{9}\right)$ का मान है

(a) -1 (b) 1

(c) i (d) $-i$

25. यदि a, b, c व u, v, w सम्मिश्र संख्यायें क्रमशः दो त्रिभुजों के शीर्ष इस प्रकार हों कि $c=(1-r)a+rb$ व $w=(1-r)u+rv$, जहाँ r एक सम्मिश्र संख्या है, तो दोनों त्रिभुज

(a) समान क्षेत्रफल के हैं (b) समरूप हैं

(c) सर्वांगसम हैं (d) इनमें से कोई नहीं

26. माना कि z_1, z_2, z_3 उस समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं जो वृत्त $|z|=2$ के अन्तर्गत बनाया गया है। यदि $z_1=1+i\sqrt{3}$, तो z_3 व z_2 के मान क्रमशः होंगे [IIT 1994]

(a) $-2, 1-i\sqrt{3}$ (b) $2, 1+i\sqrt{3}$

(c) $1+i\sqrt{3}, -2$ (d) इनमें से कोई नहीं

27. यदि सम्मिश्र संख्याएँ z_1, z_2 तथा मूल बिन्दु एक समबाहु त्रिभुज बनाते हैं तब $z_1^2+z_2^2=$ [IIT 1983]

(a) $z_1 z_2$ (b) $z_1\overline{z_2}$

(c) $z_2\overline{z_1}$ (d) $|z_1|^2=|z_2|^2$

28. यदि सम्मिश्र संख्या $z=x+iy$ का कम से कम एक मान $|z+\sqrt{2}|=a^2-3a+2$ तथा असमिका $|z+i\sqrt{2}|<a^2$ को संतुष्ट करता है, तब

(a) $a>2$ (b) $a=2$

(c) $a<2$ (d) इनमें से कोई नहीं

29. यदि z, iz एवं $z+iz$ किसी त्रिभुज के शीर्ष हैं, जिसका क्षेत्रफल 2 इकाई है, तब $|z|$ का मान है [RPET 2000]

(a) -2 (b) 2

(c) 4 (d) 8

30. यदि $z^2+z|z|+|z|^2=0$, तब z का बिन्दुपथ है

(a) एक वृत्त (b) एक सरल रेखा

(c) एक सरल रेखा युग्म (d) इनमें से कोई नहीं

31. यदि $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$ तब $\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma$ बराबर है [Karnataka CET 2000]

(a) 0 (b) $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

(c) $3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ (d) $3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

32. यदि $z_r=\cos\frac{r\alpha}{n^2}+i\sin\frac{r\alpha}{n^2}$, जबकि r = 1, 2, 3,....,n, तो $\lim_{n\to\infty} z_1z_2z_3...z_n$ का मान होगा [UPSEAT 2001]

(a) $\cos\alpha+i\sin\alpha$ (b) $\cos(\alpha/2)-i\sin(\alpha/2)$

(c) $e^{i\alpha/2}$ (d) $\sqrt[3]{e^{i\alpha}}$

33. यदि इकाई के घनमूल $1, \omega, \omega^2$, हों, तो समीकरण $(x-1)^3+8=0$ के मूल हैं

[IIT 1979; MNR 1986; DCE 2000; AIEEE 2005]

(a) $-1, 1+2\omega, 1+2\omega^2$ (b) $-1, 1-2\omega, 1-2\omega^2$

(c) $-1, -1, -1$ (d) इनमें से कोई नहीं

34. यदि $1, \omega, \omega^2, \omega^3 ...., \omega^{n-1}$ इकाई के n, n वें मूल हैं, तो $(1-\omega)(1-\omega^2).....(1-\omega^{n-1})$ का मान है

[MNR 1992; IIT 1984; DCE 2001; MP PET 2004]

(a) 0 (b) 1

(c) n (d) n^2

35. व्यंजक $1.(2-\omega)(2-\omega^2)+2.(3-\omega)(3-\omega^2)+.......$

$.... +(n-1).(n-\omega)(n-\omega^2)$,

जहाँ ω इकाई का एक काल्पनिक घनमूल है, का मान है [IIT 1996]

(a) $\frac{1}{2}(n-1)n(n^2+3n+4)$ (b) $\frac{1}{4}(n-1)n(n^2+3n+4)$

(c) $\frac{1}{2}(n+1)n(n^2+3n+4)$ (d) $\frac{1}{4}(n+1)n(n^2+3n+4)$

36. यदि $i=\sqrt{-1}$ हो, तब $4+5\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{334}+3\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{365}$ बराबर है [IIT 1999]

(a) $1-i\sqrt{3}$ (b) $-1+i\sqrt{3}$

(c) $i\sqrt{3}$ (d) $-i\sqrt{3}$

37. यदि $a=\cos(2\pi/7)+i\sin(2\pi/7)$, तब वह वर्ग समीकरण जिसके मूल $\alpha=a+a^2+a^4$ तथा $\beta=a^3+a^5+a^6$ हैं, होगा [RPET 2000]

(a) $x^2-x+2=0$

(b) $x^2+x-2=0$

(c) $x^2-x-2=0$

(d) $x^2+x+2=0$

38. यदि z_1 व z_2 इकाई के nवें मूल हैं जो कि उस रेखाखण्ड के अत्यशीर्ष हैं जो कि मूलबिन्दु पर समकोण अंतरित करता है, तब n निश्चित रूप से होगा [IIT Screening 2001; Karnataka 2002]

(a) $4k+1$ (b) $4k+2$

(c) $4k+3$ (d) $4k$

39. यदि ω इकाई का अधिकल्पित घनमूल हो, तो

$2(\omega+1)(\omega^2+1)+3(2\omega+1)(2\omega^2+1)+.....$

$+(n+1)(n\omega+1)(n\omega^2+1)$ का मान होगा [Orissa JEE 2002]

(a) $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+n$ (b) $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(c) $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-n$ (d) इनमें से कोई नहीं

40. यदि $(1+\omega^2)^m=(1+\omega^4)^m$, जहाँ ω इकाई का अधिकल्पित घनमूल हो तब m का न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक मान है। [IIT Screening 2004]

(a) 6 (b) 5

(c) 4 (d) 3

Answers

आयोटा की पूर्णांक घातें, सम्मिश्र संख्याओं की बीजगणितीय संक्रियायें तथा समानता

1	b	2	b	3	c	4	b	5	b
6	d	7	c	8	b	9	d	10	d
11	a	12	c	13	b	14	a	15	c
16	c	17	a	18	c	19	a	20	a
21	d	22	d	23	b	24	b	25	d
26	d	27	c	28	a	29	a	30	c
31	a	32	b	33	c	34	c	35	d
36	b	37	b	38	c	39	c	40	c
41	a	42	a	43	d	44	d	45	b
46	b	47	d	48	a	49	d	50	d
51	c	52	a	53	b	54	c	55	a
56	c	57	b	58	c	59	c	60	d
61	c	62	a	63	b	64	b	65	d
66	b	67	b						

सम्मिश्र संख्याओं का संयुग्मी, मापांक तथा कोणांक

1	d	2	a	3	c	4	a	5	a
6	d	7	c	8	a	9	b	10	c
11	b	12	a	13	c	14	c	15	c
16	b	17	c	18	d	19	b	20	b
21	b	22	c	23	b	24	c	25	c
26	a	27	d	28	a	29	a	30	c
31	b	32	a	33	a	34	a	35	c
36	c	37	b	38	d	39	c	40	a
41	b	42	c	43	a	44	c	45	b
46	d	47	d	48	d	49	d	50	c
51	c	52	b	53	b	54	a	55	c
56	c	57	a	58	b	59	d	60	a
61	c	62	a	63	c	64	c	65	a
66	c	67	d	68	c	69	b	70	b
71	c	72	a	73	a,d	74	a	75	d
76	a	77	d	78	c	79	b	80	c
81	d	82	d	83	b	84	b	85	d
86	a	87	c						

सम्मिश्र संख्याओं का वर्गमूल, निरूपण और लघुगणक

1	a	2	b	3	b	4	c	5	a
6	d	7	d	8	a	9	b	10	b
11	c	12	a	13	c,d	14	c	15	a
16	b	17	c	18	d	19	d	20	c
21	a	22	b	23	c	24	d		

सम्मिश्र संख्याओं की ज्यामिति

1	c	2	b	3	b	4	c	5	b
6	b	7	b	8	a	9	c	10	d
11	b	12	b	13	a,b	14	c	15	a
16	b	17	a	18	a	19	d	20	b
21	d	22	a	23	d	24	d	25	d
26	c	27	a	28	d	29	b	30	b
31	a	32	b	33	b	34	a	35	b
36	a	37	d	38	d	39	c	40	a
41	d	42	c	43	b	44	d	45	a
46	a	47	b	48	b	49	c	50	b
51	b	52	a	53	c	54	c	55	c
56	b	57	c	58	b	59	d	60	a
61	a	62	d	63	a	64	d	65	b
66	b	67	a	68	b	69	a	70	b
71	c	72	b	73	a	74	b	75	a

डी मोयवर प्रमेय तथा इकाई के मूल

1	c	2	c	3	d	4	b	5	a
6	d	7	c	8	a	9	c	10	b
11	d	12	a	13	d	14	b	15	c
16	c	17	b	18	a	19	c	20	b
21	a	22	a	23	c	24	a	25	c
26	a	27	c	28	a	29	b	30	d
31	d	32	c	33	c	34	b	35	a
36	b	37	d	38	b	39	c	40	c
41	b	42	b	43	d	44	b	45	b
46	b	47	a	48	c	49	a	50	a
51	b	52	d	53	a	54	c	55	a
56	b	57	a	58	b	59	a	60	a
61	a	62	d	63	a	64	c	65	a
66	b	67	d	68	c	69	c	70	c
71	a	72	d	73	a	74	a	75	c
76	c	77	d	78	c	79	c	80	d
81	c	82	c	83	a	84	a	85	b
86	d	87	d	88	a	89	c	90	a
91	d	92	a	93	b	94	c	95	a
96	c	97	b	98	a	99	c	100	b
101	a	102	c	103	d	104	c		

Critical Thinking Questions

1	c	2	d	3	d	4	b	5	b
6	d	7	b	8	a	9	b	10	a
11	d	12	c	13	c	14	c	15	a
16	c	17	c	18	d	19	b	20	a
21	c	22	d	23	c	24	d	25	b
26	a	27	a	28	a	29	b	30	c
31	c	32	c	33	b	34	c	35	b
36	c	37	d	38	d	39	a	40	d

Answers and Solutions

आयोटा की पूर्णांक घातें, सम्मिश्र संख्याओं की बीजगणितीय संक्रियायें तथा समानता

1. (b) $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=i\sqrt{2}\,i\sqrt{3}=i^2\sqrt{6}=-\sqrt{6}$

2. (b) हम जानते हैं कि $i^2=-1 \Rightarrow (i^2)^2=(-1)^2=1 \Rightarrow i^{4n}=1^n$

और इसलिए $i^{4n-1}=-i$

3. (c) $\because \frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=i$

इसलिए $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n+1}=i^{4n+1}=ii^{4n}=i \quad (\because i^{4n}=1)$

4. (b) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{(1+i)^2}{2}=\frac{2i}{2}=i$

$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m=i^m=1$ (दिया है)

अतः m का न्यूनतम मान $=4 \; \{\because i^4=1\}$

5. (b) यदि $(1-i)^n=2^n$ ...... (i)

हम जानते हैं कि यदि दो सम्मिश्र संख्याऐं बराबर हैं, तो उनके मापांक भी बराबर होंगे

$|(1-i)^n|=|2^n| \Rightarrow |1-i|^n=|2|^n$, $\quad (\because 2^n>0)$

$\Rightarrow \left[\sqrt{1^2+(-1)^2}\right]^n=2^n \Rightarrow (\sqrt{2})^n=2^n$

$\Rightarrow 2^{n/2}=2^n \Rightarrow \frac{n}{2}=n \Rightarrow n=0$

ट्रिक : परीक्षण द्वारा $(1-i)^0=2^0 \Rightarrow 1=1$

6. (d) $(1+i)^5(1-i)^5=(1-i^2)^5=2^5=32$.

7. (c) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2=\frac{2i}{-2i}+\left(\frac{-2i}{2i}\right)=-2$

8. (b) $\frac{i^{584}(i^8+i^6+i^4+i^2+1)}{i^{574}(i^8+i^6+i^4+i^2+1)}-1=\frac{i^{584}}{i^{574}}-1$

$=i^{10}-1=-1-1=-2$

9. (d) $S=1+i^2+i^4+.....+i^{2n}=1-1+1-1+......+(-1)^n$

स्पष्टतः यह n पर निर्भर है, अतः मान ज्ञात नही कर सकते जब तक कि n ज्ञात न हो।

10. (d) दिया गया व्यंजक $-1+1-1+1+.....$ $(2n+1)$ पदों तक है स्पष्टतः पदों की संख्या विषम है अतः व्यंजक का मान -1 है।

11. (a) $1+i^2+i^3-i^6+i^8=1-1-i+1+1=2-i$.

12. (c) $\sum_{n=1}^{200} i^n=i+i^2+i^3+....+i^{200}=\frac{i(1-i^{200})}{1-i}$ (चूँकि गु.श्रे.)

$=\frac{i(1-1)}{1-i}=0$.

13. (b) $\sum_{n=1}^{13}(i^n+i^{n+1})=(i+i^2+i^3+....+i^{13})+(i^2+i^3+....+i^{14})$

$=\frac{i(1-i^{13})}{1-i}+\frac{i^2(1-i^{13})}{1-i}=i\left(\frac{1-i}{1-i}\right)+\frac{i^2(1-i)}{(1-i)}$

$=i+i^2=i-1$.

14. (a) $\left(\frac{i-1}{i+1}\times\frac{i-1}{i-1}\right)^n=\left(\frac{-2i}{-2}\right)^n=i^n$

अतः वास्तविक संख्या में बदलने के लिए n का न्यूनतम मान 2 होगा।

15. (c) माना $z=i^{[1+3+5+....+(2n+1)]}$

स्पष्टतः एक समान्तर श्रेणी है जिसका सार्वअंतर 2 है

$\because T_n=2n-1$ और $T_{n+1}=2n+1$

अतः स.श्रे. में पदों की संख्या $=n+1$

अब $S_{n+1}=\frac{n+1}{2}[2.1+(n+1-1)2]$

$\Rightarrow S_{n+1}=\frac{n+1}{2}[2+2n]=(n+1)^2 \Rightarrow i^{(n+1)^2}$

$n=1,2,3,4,5,.....$ रखने पर,

$n=1, z=i^4=1$, $\quad n=2, z=i^6=-1$,

$n=3, z=i^8=1$, $\quad n=4, z=i^{10}=-1$,

$n=5,\ z=i^{12}=1,........$

16. (c) $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta \Rightarrow x^2-2x\cos\theta+1=0$

$\Rightarrow x=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{4\cos^2\theta-4}}{2} \Rightarrow x=\cos\theta\pm i\sin\theta$.

17. (a) $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=i^n[1+i+i^2+i^3]=i^n[1+i-1-i]=0$.

18. (c) $\because (1+i)^2=1+i^2+2i=2i$ तथा $(1-i)^2=1+i^2-2i=-2i$

$\Rightarrow (1+i)^8+(1-i)^8=(2i)^4+(-2i)^4=2^4(i^4+i^4)$

$=2^5=32$.

19. (a) $(1+i)^{10}=[(1+i)^2]^5=(2i)^5=32\,i$.

20. (a) $(1+i)^6+(1-i)^6=[(1+i)^2]^3+[(1-i)^2]^3$

$=(2i)^3+(-2i)^3=(8-8)i^3=0$.

21. (d) $i+i^2+i^3+.......$ 1000 पदों तक

$=\frac{i(1-i^{1000})}{1-i}=\frac{i(1-(i^4)^{250})}{1-i}=\frac{i(1-1)}{1-i}=0$.

22. (d) $x=3+i \Rightarrow x-3=i$

$\Rightarrow \quad x^2-6x+10=0 \quad \Rightarrow \quad x^3-3x^2-8x+15$

$=x(x^2-6x+10)+3(x^2-6x+10)-15$

$= x(0)+3(0)-15 = -15$.

23. (b) हम जानते हैं कि $(1+i)^{2n} = (1-i)^{2n}$

$\Rightarrow \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n} = 1 \Rightarrow (i)^{2n} = 1 \Rightarrow (i)^{2n} = (-1)^2$

$\Rightarrow (i)^{2n} = (i^2)^2 \Rightarrow (i)^{2n} = (i)^4$

$\Rightarrow 2n = 4 \Rightarrow n = 2$.

24. (b) $\frac{(1+i)x-2i}{3+i} + \frac{(2-3i)y+i}{3-i} = i$

$\Rightarrow (4+2i)x + (9-7i)y - 3i - 3 = 10i$

वास्तविक भाग एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर $2x-7y=13$ और $4x+9y=3$. अतः $x=3$ और $y=-1$.

ट्रिक : समीकरण ज्ञात करने के पश्चात् उन्हें हल करने की आवश्यकता नहीं है बल्कि विकल्पों में दिये गये x और y के मान रखने पर उपयुक्त विकल्प प्राप्त हो जाता है।

25. (d) यदि z_1 और z_2 दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं, तो

$\text{Re }(z_1z_2) = \text{Re}(z_1)\text{Re}(z_2) - \text{Im}(z_1)\text{Im}(z_2)$

26. (d) $\left(\frac{1}{1-2i}+\frac{3}{1+i}\right)\left(\frac{3+4i}{2-4i}\right)$

$= \left[\frac{1+2i}{1^2+2^2}+\frac{3-3i}{1^2+1^2}\right]\left[\frac{6-16+12i+8i}{2^2+4^2}\right]$

$= \left(\frac{2+4i+15-15i}{10}\right)\left(\frac{-1+2i}{2}\right)$

$= \frac{(17-11i)(-1+2i)}{20} = \frac{5+45i}{20} = \frac{1}{4}+\frac{9}{4}i$.

27. (c) यदि $z = x+iy$, $1-i$ का योगात्मक प्रतिलोम है, तब

$(x+iy)+(1-i) = 0 \Rightarrow x+1=0, \quad y-1=0$

$\Rightarrow x=-1, \quad y=1$

$\therefore$ $1-i$ का योगात्मक प्रतिलोम $z=-1+i$ है।

ट्रिक : $\because (1-i)+(-1+i)=0$.

28. (a) $\text{Re}\left[\frac{(1+i)^2}{3-i}\right] = \text{Re}\left[\left(\frac{2i}{3-i}\right)\left(\frac{3+i}{3+i}\right)\right]$

$\text{Re}\left[\frac{(1+i)^2}{3-i}\right] = \text{Re}\left[\left(\frac{2i}{3-i}\right)\left(\frac{3+i}{3+i}\right)\right]$

$= \text{Re}\left[\frac{6i-2}{9+1}\right] = \text{Re}\left[-\frac{2}{10}+\frac{6}{10}i\right] = -\frac{1}{5}$.

29. (a) $(1-i)x+(1+i)y = 1-3i \Rightarrow (x+y)+i(-x+y) = 1-3i$

वास्तविक व काल्पनिक भागों की तुलना करने पर $x+y=1$ और $-x+y=-3$; $\therefore x=2, y=-1$.

अभीष्ट बिन्दु $(2,-1)$ है।

30. (c) $\frac{(3+2i\sin\theta)(1+2i\sin\theta)}{(1-2i\sin\theta)(1+2i\sin\theta)} =$

$\left(\frac{3-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta}\right) + i\left(\frac{8\sin\theta}{1+4\sin^2\theta}\right)$

$\because$ यह वास्तविक है अतः $\text{Im }(z)=0$

$\Rightarrow \frac{8\sin\theta}{1+4\sin^2\theta} = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0, \therefore \theta = n\pi$

जहाँ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$

ट्रिक : (a) के लिये यदि $n=0, \theta=0$ तब दी गयी संख्या पूर्ण वास्तविक है लेकिन (c) भी इसको संतुष्ट करता है अतः (a) व (c) में, (c) θ का अधिकतम व्यापक मान है।

31. (a) $\frac{(\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i})(\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i})}{(\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i})(\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i})}$

$= \frac{5+12i+5-12i+2\sqrt{5+12i}\sqrt{5-12i}}{5+12i-5+12i}$

$= \frac{10+2\times(\pm 13)}{24i} = -\frac{3}{2}i$ या $\frac{2i}{3}$.

32. (b) प्रतिबन्ध के अनुसार, z' गुणात्मक तत्समक हैं।

अतः $z' = 1+0i$.

33. (c) दिया है $a^2+b^2=1$, इसलिए

$\frac{1+b+ia}{1+b-ia} = \frac{(1+b+ia)(1+b+ia)}{(1+b-ia)(1+b+ia)}$

$= \frac{(1+b)^2-a^2+2ia(1+b)}{1+b^2+2b+a^2} = \frac{(1-a^2)+2b+b^2+2ia(1+b)}{2(1+b)}$

$= \frac{2b^2+2b+2ia(1+b)}{2(1+b)} = b+ia$

ट्रिक : $a=0, b=1$ रखने पर, $\frac{1+b+ia}{1+b-ia} = \frac{1+1+0}{1+1-0} = 1$

परन्तु विकल्प (a) व (c) 1 देते है।

अतः पुनः $a=1, b=0$ रखने पर , $\frac{1+b+ia}{1+b-ia} = \frac{1+i}{1-i} = i$

जो केवल (c) देता है।

34. (c) $\frac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}$ पूर्ण काल्पनिक होगा यदि इसका वास्तविक भाग शून्य हो अर्थात् $\frac{3-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta} = 0$

$\Rightarrow 3-4\sin^2\theta = 0$ (केवल तभी जब θ वास्तविक है)

$\Rightarrow \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

35. (d) $\{(1-\cos\theta)+i.2\sin\theta\}^{-1} = \left\{2\sin^2\frac{\theta}{2}+i.4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right\}^{-1}$

$= \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-1}\left\{\sin\frac{\theta}{2}+i.2\cos\frac{\theta}{2}\right\}^{-1}$

$= \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-1}\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}+i.2\cos\frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin\frac{\theta}{2}-i.2\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}-i.2\cos\frac{\theta}{2}}$

$= \frac{\sin\frac{\theta}{2}-i.2\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}+4\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}$.

यह वास्तविक भाग है।

$$= \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\left(1+3\cos^2\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{2\left(1+3\cos^2\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{5+3\cos\theta}$$

36. (b) $(x+iy)^{1/3} = a+ib \Rightarrow (x+iy) = (a+ib)^3$

$= a^3 + 3a^2.ib + 3a.(ib)^2 + (ib)^3$

$= a^3 - 3ab^2 + i(3a^2b - b^3)$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$\frac{x}{a} = a^2 - 3b^2$ तथा $\frac{y}{b} = 3a^2 - b^2$

$\therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 4(a^2 - b^2)$

37. (b) $\left[\frac{2i}{1+i}\right]^2 = \left[\left(\frac{2i}{1+i}\right)\left(\frac{1-i}{1-i}\right)\right]^2 = (i+1)^2 = i^2 + 1 + 2i = 2i$.

38. (c) समीकरण

$(x+iy)(2-3i) = 4+i$

$\Rightarrow (2x+3y) + i(-3x+2y) = 4+i$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$2x + 3y = 4$ ...... (i)

$-3x + 2y = 1$ ...... (ii)

(i) व (ii) से, $x = \frac{5}{13}, y = \frac{14}{13}$

वैकल्पिक : $x + iy = \frac{4+i}{2-3i} = \frac{(4+i)(2+3i)}{13} = \frac{5}{13} + \frac{14}{13}i$

.

39. (c) दिया गया समीकरण

$(x^4 + 2xi) - (3x^2 + yi) = (3-5i) + (1+2yi)$

$\Rightarrow (x^4 - 3x^2) + i(2x - 3y) = 4 - 5i$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$x^4 - 3x^2 = 4$ ...... (i)

तथा $2x - 3y = -5$ ..... (ii)

(i) व (ii) से, $x = \pm 2$ तथा $y = 3, \frac{1}{3}$

ट्रिक : $x = 2, y = 3$ व $x = -2,\ y = \frac{1}{3}$ रखने पर हम देखते हैं कि ये दोनों दिये गये समीकरण को संतुष्ट करते हैं

40. (c) हम जानते हैं कि $\frac{(1+i)^2}{2-i} = \frac{(2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = -\frac{2}{5} + i\frac{4}{5}$.

अतः Im $(z) = \frac{4}{5}$.

41. (a) यदि $z \neq 0$. माना $z = x+iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$

Re(z)= 0 $\Rightarrow x = 0$. इसलिए $\text{Im}(z^2) = 2xy = 0$

अतः $\text{Re}(z) = 0 \Rightarrow \text{Im}(z^2) = 0$.

42. (a) $\frac{5(-8+6i)}{(1+i)^2} = a+ib \Rightarrow \frac{-40+30i}{2i} = 15 + 20i = a+ib$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर $a = 15$ तथा $b = 20$.

43. (d) दो सम्मिश्र संख्याओं की तुलना तभी की जा सकती है जब उनके काल्पनिक व वास्तविक भाग बराबर हों, दूसरे शब्दों में, काल्पनिक संख्याओं में >, < का कोई अर्थ नहीं होता है।

44. (d)

$\frac{1-2i}{2+i} + \frac{4-i}{3+2i} = \frac{(1-2i)(3+2i)+(4-i)(2+i)}{(2+i)(3+2i)}$

$= \frac{50-120i}{65} = \frac{10}{13} - \frac{24}{13}i$.

45. (b) $a+ib > c+id$, यह तभी परिभाषित होगा जब काल्पनिक भाग शून्य होगा।

इसलिए $ib = id = 0 \Rightarrow b = d = 0 \quad (\because i \neq 0)$

46. (b) यदि $x + iy = \frac{3}{2+\cos\theta + i\sin\theta}$

$= \frac{3(2+\cos\theta - i\sin\theta)}{(2+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \frac{6+3\cos\theta - 3i\sin\theta}{4+\cos^2\theta + 4\cos\theta + \sin^2\theta}$

$= \left[\frac{6+3\cos\theta}{5+4\cos\theta}\right] + i\left[\frac{-3\sin\theta}{5+4\cos\theta}\right]$

$\Rightarrow x = \frac{3(2+\cos\theta)}{5+4\cos\theta}, y = \frac{-3\sin\theta}{5+4\cos\theta}$

$\therefore x^2 + y^2 = \frac{9}{(5+4\cos\theta)^2}$

$[4+\cos^2\theta + 4\cos\theta + \sin^2\theta]$

$= \frac{9}{5+4\cos\theta} = 4\left[\frac{6+3\cos\theta}{5+4\cos\theta}\right] - 3 = 4x - 3$

ट्रिक : $x + iy = \frac{3(2+\cos\theta - i\sin\theta)}{(2+\cos\theta + i\sin\theta)(2+\cos\theta - i\sin\theta)}$

माना $y = 0$, तब $\sin\theta = 0$ अर्थात् $\theta = 0$.

$x = 1$ रखने पर, $x^2 + y^2 = 1^2 + 0 = 1$.

एवं विकल्प (b) में रखने पर,4(1) - 3=1 देता है

47. (d) $\mu + i\lambda = \frac{(p+i)^2}{2p-i} = \frac{(p^2 - 1 + 2pi)(2p+i)}{(2p-i)(2p+i)}$

$= \frac{2p(p^2-2) + i(5p^2-1)}{4p^2+1}$

$\therefore \mu^2 + \lambda^2 = \frac{4p^2(p^2-2)^2 + (5p^2-1)^2}{(4p^2+1)^2}$

$= \frac{4p^6 + 6p^2 + 9p^4 + 1}{(4p^2+1)^2}$

$= \frac{p^4(4p^2+1) + 2p^2(4p^2+1) + (4p^2+1)}{(4p^2+1)^2}$

$= \frac{p^4 + 2p^2 + 1}{4p^2+1} = \frac{(p^2+1)^2}{4p^2+1}$.

48. (a) दिया है $z = 3 - 4i \Rightarrow z^2 = -7 - 24i$,

$z^4 = -117 - 44i$ तथा $z^4 = -527 + 336i$

$\therefore z^4 - 3z^3 + 3z^2 + 99z - 95 = 5$

वैकल्पिक : $z = 3 - 4i \Rightarrow (z-3)^2 = -16$

$\Rightarrow z^2 - 6z + 25 = 0$

$z^4 - 3z^3 + 3z^2 + 99z - 95$

$= (z^2 + 3z - 4)(z^2 - 6z + 25) + 5 = (z^2 + 3z - 4)(0) + 5 = 5$

49. (d) यदि $z_1 = 1-i$ एवं $z_2 = -2+4i$

तब $\frac{z_1z_2}{z_1} = \frac{(1-i)(-2+4i)}{1-i} = -2+4i \Rightarrow \text{Im}\left(\frac{z_1z_2}{z_1}\right) = 4$.

50. (d) दिया है $\frac{3x+2iy}{5i-2} = \frac{15}{8x+3iy}$

$\Rightarrow 24x^2 + 9ixy - 6y^2 + 16ixy = 75i - 30$

$\Rightarrow 24x^2 - 6y^2 + 25ixy = 75i - 30$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$24x^2 - 6y^2 = -30$ या $4x^2 - y^2 = -5$ तथा $xy = 3$

हल करने पर $x = \pm 1, y = \pm 3$

51. (c) $\sum_{k=0}^{100} i^k = x+iy \Rightarrow 1+i+i^2+......+i^{100} = x+iy$

दी गयी श्रेणी गुणोत्तर श्रेणी है

$\Rightarrow \frac{1.(1-i^{101})}{1-i} = x+iy \Rightarrow \frac{1-i}{1-i} = x+iy$

$\Rightarrow 1+0i = x+iy$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर अभीष्ट परिणाम प्राप्त हो जाता है।

52. (a) $\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1+i(b+ic)/(1+a)}{1-i(b+ic)/(1+a)} = \frac{1+a-c+ib}{1+a+c-ib}$

$= \frac{(1+a-c+ib)(1+a+c+ib)}{(1+a+c)^2+b^2}$

$= \frac{1+2a+a^2-b^2-c^2+2ib+2iab)}{1+a^2+c^2+b^2+2ac+2(a+c)}$

$= \frac{a^2+b^2+c^2+2a+a^2-b^2-c^2+2ib(1+a)}{1+1+2ac+2(a+c)}$

$= \frac{2a(a+1)+2ib(1+a)}{2(1+a)(1+c)} = \frac{a+ib}{1+c}$.

53. (b) माना $z_1 = a+ib, z_2 = c+id$, तब z_1+z_2 वास्तविक है

$\Rightarrow (a+c)+i(b+d)$ वास्तविक है

$\Rightarrow b+d = 0 \quad \Rightarrow d = -b$ .....(i)

z_1z_2 वास्तविक है $\Rightarrow (ad-bd)+i(ac+bc)$ वास्तविक है

$\Rightarrow ad+bc = 0 \Rightarrow a(-b)+bc = 0 \Rightarrow a = c$

$\therefore z_1 = a+ib = c-id = \overline{z}_2$ ($\because a = c$ एवं $b = -d$)

54. (c) $(x+iy)(p+iq) = (x^2+y^2)i$

$\Rightarrow (xp-yq)+i(xq+yp) = (x^2+y^2)i$

$\Rightarrow xp-yq = 0, xq+yp = x^2+y^2$

$\Rightarrow \frac{x}{q} = \frac{y}{p}$ एवं $xq+yp = x^2+y^2$

माना $\frac{x}{q} = \frac{y}{p} = \lambda$. तब $x = \lambda q, y = \lambda p$

$\therefore xq+yp = x^2+y^2 \Rightarrow \lambda = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = 1$

$\therefore x = q, y = p$.

55. (a) L. H. S. $= \frac{(\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)}{(\cos u + i\sin u)(\cos v + i\sin v)} \sin u\cos v$

$= \sin u\cos v[\cos(x+y-u-v) + i\sin(x+y-u-v)]$

56. (c) $x+iy = \left(\frac{1+i}{3+2i}\right)\frac{(3-2i)}{(3-2i)} = \frac{5+i}{13}$

अतः $x = \frac{5}{13}, y = \frac{1}{13}$.

57. (b) दिया है $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100} = a+ib$; $\left[\left(\frac{1-i}{1+i}\right)\times\left(\frac{1-i}{1-i}\right)\right] = a+ib$

$\Rightarrow a+ib = \left[\frac{(1-i)^2}{2}\right]^{100} = \left[\frac{-2i}{2}\right]^{100} = (-i)^{100}$

$\Rightarrow a+ib = [(i)^4]^{25} = 1+0i$, अतः $a = 1, b = 0$.

58. (c) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+5i}{-3+2i}\times\frac{-3-2i}{-3-2i} = \frac{-12-8i-15i+10}{9-(2i)^2}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2}{13} - i\left(\frac{23}{13}\right) = \left(\frac{-2}{13}, \frac{-23}{13}\right)$

59. (c) दिया हैं $z = 1+i$ एवं $i = \sqrt{-1}$. दोनों पक्षों में वर्ग करने पर $z^2 = (1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1$ या $z^2 = 2i$.

चूँकि यह गुणन तत्समक है अतः इसका गुणन प्रतिलोम $z^{-2} = \frac{1}{2i}\times\frac{i}{i} = \frac{i}{2i^2} = -\frac{i}{2}$.

60. (d) $\begin{vmatrix} 6i & -3i & 1 \\ 4 & 3i & -1 \\ 20 & 3 & i \end{vmatrix} = x+iy$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 6i+4 & 0 & 0 \\ 4 & 3i & -1 \\ 20 & 3 & i \end{vmatrix} = x+iy \quad [R_1 \to R_1 + R_2]$

$\Rightarrow (6i+4)(3i^2+3) = x+iy$

$\Rightarrow (6i+4)(-3+3) = x+iy$

$\Rightarrow x+iy = 0 = 0+i.0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$.

61. (c) $a = \cos\theta + i\sin\theta$.

$\therefore \frac{1+a}{1-a} = \frac{(1+\cos\theta)+i\sin\theta}{(1-\cos\theta)-i\sin\theta}$.

हर का परिमेयीकरण करने पर,

$\frac{1+a}{1-a} = \frac{(1+\cos\theta)+i\sin\theta}{(1-\cos\theta)-i\sin\theta}\times\frac{(1-\cos\theta)+i\sin\theta}{(1-\cos\theta)+i\sin\theta}$

$= \frac{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)+(1+\cos\theta)i\sin\theta+(1-\cos\theta)i\sin\theta+i^2\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2-(i\sin\theta)^2}$

$= \frac{1-\cos^2\theta+i\sin\theta+i\sin\theta\cos\theta+i\sin\theta-i\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta-2\cos\theta+\sin^2\theta}$

$= \frac{1-(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+2i\sin\theta}{1+(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-2\cos\theta} = \frac{2i\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}$

$= \frac{i.2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = i\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = i\cot\frac{\theta}{2}$.

62. (a) $3-2yi = 9^x - 7i$

दोनों पक्षों के वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$9^x = 3 \Rightarrow 3^{2x} = 3^1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = 0.5$

$2y = 7 \Rightarrow y = 3.5$.

63. (b)

$z = \frac{1+2i}{1-i} \Rightarrow z = \frac{1+2i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{-1}{2} + i\frac{3}{2}$

यह सम्मिश्र संख्या द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है।

64. (b)

$\frac{1}{1-\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{(1-\cos\theta)+i\sin\theta} \times \frac{(1-\cos\theta)-i\sin\theta}{(1-\cos\theta)-i\sin\theta}$

$= \frac{(1-\cos\theta)-i\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta} = \frac{(1-\cos\theta)-i\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}$

$= \frac{(1-\cos\theta)}{2(1-\cos\theta)} - i\frac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}$.

अतः इसका वास्तविक भाग = $\frac{1-\cos\theta}{2(1-\cos\theta)} = \frac{1}{2}$.

65. (d) $a+ib < c+id$, केवल तभी परिभाषित है यदि और केवल यदि अधिकल्पित भाग शून्य हो, अर्थात् $b = d = 0$.

अतः $b^2 + d^2 = 0$.

66. (b) हम जानते हैं कि $x+iy$ का गुणन प्रतिलोम $\frac{1}{x+iy}$ है।

प्रश्नानुसार $x+iy = \frac{1}{x+iy}$ अतः केवल विकल्प (b) इसे संतुष्ट करता है।

67. (b) $(x+iy)^{1/3} = a - ib$

$x+iy = (a-ib)^3 = (a^3 - 3ab^2) + i(b^3 - 3a^2b)$

$\Rightarrow x = a^3 - 3ab^2, y = b^3 - 3a^2b$

$\Rightarrow \frac{x}{a} = a^2 - 3b^2, \frac{y}{b} = b^2 - 3a^2$

$\therefore \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = a^2 - 3b^2 - b^2 + 3a^2$

$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 4(a^2 - b^2) = k(a^2 - b^2)$

$\therefore k = 4$.

सम्मिश्र संख्याओं का संयुग्मी, मापांक तथा कोणांक

1. (d) $\sin x + i\cos 2x$ एवं $\cos x - i\sin 2x$ एक दूसरे के संयुग्मी होंगे यदि $\sin x = \cos x$ एवं $\cos 2x = \sin 2x$

या $\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, ...$ ......(i)

तथा $\tan 2x = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, ...$

या $x = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, ...$ ..... (ii)

परन्तु (i) व (ii) को एक साथ संतुष्ट करने वाला x का कोई भी मान नहीं है। अतः x के किसी भी मान के लिए दी गयी संख्यायें परस्पर संयुग्मी नहीं हैं।

2. (a) माना $z = x+iy, \bar{z} = x - iy$ एवं $z^{-1} = \frac{1}{x+iy}$

$\Rightarrow \overline{(z^{-1})} = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$; $\therefore \overline{(z^{-1})}\bar{z} = \frac{x+iy}{x^2+y^2}(x-iy) = 1$

3. (c) माना $z = x+iy$, तब इसका संयुग्मी $\bar{z} = x - iy$

दिया है $z^2 = (\bar{z})^2$

$\Rightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = x^2 - y^2 - 2ixy \Rightarrow 4ixy = 0$

यदि $x \ne 0$ तब $y = 0$ एवं यदि $y \ne 0$ तब $x = 0$

4. (a) माना $z = x+iy, \bar{z} = x - iy$

$\therefore z\bar{z} = 0 \Rightarrow (x+iy)(x-iy) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$

यह तभी सम्भव है जब x व y दोनों एक साथ 0 हों अर्थात् $z = 0 + 0i = 0$

5. (a) $(a+ib)(c+id)(e+if)(g+ih) = A + iB$ .... (i)

$\Rightarrow (a-ib)(c-id)(e-if)(g-ih) = A - iB$ ...... (ii)

(i) व (ii) का गुणा करने पर

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2) = A^2 + B^2$

6. (d) माना $z = x+iy$, ताकि $\bar{z} = x - iy$, अतः

$z^2 + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow (x^2 - y^2 + x) + i(2xy - y) = 0$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$x^2 - y^2 + x = 0$ ..... (i)

एवं $2xy - y = 0 \Rightarrow y = 0$ या $x = \frac{1}{2}$

यदि $y = 0$, तब (i) $x^2 + x = 0 \Rightarrow x = 0$ या $x = -1$

यदि $x = \frac{1}{2}$, तब $x^2 - y^2 + x = 0$

$\Rightarrow y^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

अतः कुल 4 हल हैं।

7. (c) यहाँ $z + \bar{z} = (x+iy) + (x-iy) = 2x$ (वास्तविक)

तथा $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$ (वास्तविक)

8. (a) प्रतिबंधानुसार, $3 - ix^2y = x^2 + y + 4i$

$\Rightarrow x^2 + y = 3$ और $x^2y = -4 \Rightarrow x = \pm 2, y = -1$

$\Rightarrow (x, y) = (2, -1)$ या $(-2, -1)$

9. (b) $\frac{2+5i}{4-3i} = \frac{(2+5i)(4+3i)}{25} = \frac{-7+26i}{25}$.

अतः सम्मिश्र संख्या का संयुग्मी = $\frac{-7-26i}{25}$.

10. (c) $\because$ हम जानते हैं कि यदि a वास्तविक है तब, $a = \bar{a}$

$\therefore (z+a)(\bar{z}+a) = (z+a)(\bar{z}+\bar{a}) = (z+a)\overline{(z+a)}$ $= |z+a|^2$

11. (b) यहाँ $\frac{z-i}{z+i}=\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}\cdot\frac{x-i(y+1)}{x-i(y+1)}$

$$=\frac{(x^2+y^2-1)+i(-2x)}{x^2+(y+1)^2}$$

$\because \frac{z-i}{z+i}$ पूर्णतः अधिकल्पित है अतः

$x^2+y^2-1=0 \Rightarrow x^2+y^2=1 \Rightarrow z\bar{z}=1$.

12. (a) $\frac{c+i}{c-i}=a+ib$ ..... (i)

$\therefore \frac{c-i}{c+i}=a-ib$ ..... (ii)

(i) व (ii) का गुणा करने पर,

$\frac{c^2+1}{c^2+1}=a^2+b^2 \Rightarrow a^2+b^2=1$.

13. (c) दिया है $\overline{(x+iy)(1-2i)}=1+i$

$\Rightarrow x-iy=\frac{1+i}{1+2i} \Rightarrow x+iy=\frac{1-i}{1-2i}$.

14. (c) $z=\frac{(2+i)^2}{3+i}=\frac{3+4i}{3+i}\times\frac{3-i}{3-i}=\frac{13}{10}+i\frac{9}{10}$

संयुग्मी $=\frac{13}{10}-i\frac{9}{10}$.

15. (c) $z=3+5i$, $\bar{z}=3-5i$

$\Rightarrow z^3=(3+5i)^3=3^3+(5i)^3+3.3.5i(3+5i)$

$=-198+10i$

अतः $z^3+\bar{z}+198=10i-198+3-5i+198=3+5i$.

16. (b) $\frac{2-3i}{4-i}=\frac{(2-3i)(4+i)}{(4+i)(4-i)}=\frac{8+3-12i+2i}{16+1}=\frac{11-10i}{17}$

$\Rightarrow$ संयुग्मी $=\frac{11+10i}{17}$.

17. (c) माना $z=1+i \Rightarrow \bar{z}=1-i$

18. (d) दी गयी असमिका $|z-4|<|z-2|$

$\Rightarrow |z-4|^2<|z-2|^2 \Rightarrow (x-4)^2+y^2<(x-2)^2+y^2$

$\Rightarrow 4x>12 \Rightarrow \text{Re}(z)>3$.

19. (b) माना $\frac{2z_1}{3z_2}=iy$ या $\frac{z_1}{z_2}=\frac{3}{2}iy$, तब

$$\left|\frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}\right|=\left|\frac{\frac{z_1}{z_2}-1}{\frac{z_1}{z_2}+1}\right|=\left|\frac{\frac{3}{2}iy-1}{\frac{3}{2}iy+1}\right|=\left|\frac{1-\frac{3}{2}iy}{1+\frac{3}{2}iy}\right|=1$$

$\{\because |z|=|\bar{z}|\}$

20. (b) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2$

$=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

$=2(x_1^2)+2(y_1^2)+2(x_2^2)+2(y_2^2)=2|z_1|^2+2|z_2|^2$

21. (b) माना $\frac{z-1}{z+1}=iy$ जहाँ $y\in R$

$\Rightarrow z=\frac{1+iy}{1-iy}=\frac{1+iy}{1-iy}\times\frac{1+iy}{1+iy}=\frac{(1-y^2)+2iy}{1+y^2}$

$\therefore |z|=\frac{1}{1+y^2}\sqrt{(1-y^2)^2+4y^2}=\frac{1+y^2}{1+y^2}=1$.

22. (c) L. H. S. = $|z^2|=|(x+iy)^2|$

$=|x^2-y^2+2ixy|=\sqrt{(x^2-y^2)^2+(2xy)^2}$

$=\sqrt{(x^2+y^2)^2}$

.....(i)

R. H. S. $=|z|^2=|x+iy|^2=\sqrt{(x^2+y^2)^2}=x^2+y^2$

.....(ii)

अतः $|z^2|=|z|^2$

(b) सत्य (c) असत्य ($\because z\neq\bar{z}$).

23. (b) $\left|z+\frac{2}{z}\right|=2 \Rightarrow |z|-\frac{2}{|z|}\leq 2 \Rightarrow |z|^2-2|z|-2\leq 0$

$|z|\leq\frac{2\pm\sqrt{4+8}}{2}\leq 1\pm\sqrt{3}$

अतः $|z|$ का अधिकतम मान $1+\sqrt{3}$ है।

24. (c) दिया है $\left|\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right|=1 \Rightarrow \frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}=\cos\theta+i\sin\theta$ (माना)

$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2}=\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{-1+\cos\theta+i\sin\theta}=-i\cot\frac{\theta}{2}$

जो कि शून्य होगा यदि $\theta=n\pi (n\in I)$, अन्यथा यह शुद्ध काल्पनिक है।

25. (c) $|z|-z=1+2i$

माना $z=x+iy$, इसलिए $|x+iy|-(x+iy)=1+2i$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$\sqrt{x^2+y^2}-x=1$ तथा $y=-2 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

अतः सम्मिश्र संख्या $z=\frac{3}{2}-2i$.

ट्रिक : $\because \left|\frac{3}{2}-2i\right|-\left(\frac{3}{2}-2i\right)$

$=\sqrt{\frac{9}{4}+4}-\frac{3}{2}+2i=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}+2i=1+2i$

26. (a) माना $z_1=a+ib=(a,b)$ एवं $z_2=c-id=(c,-d)$

जहाँ $a>0$ एवं $d>0$ ...... (i)

तब $|z_1|=|z_2| \Rightarrow a^2+b^2=c^2+d^2$

अब $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}=\frac{(a+ib)+(c-id)}{(a+ib)-(c-id)}$

$$=\frac{[(a+c)+i(b-d)][(a-c)-i(b+d)]}{[(a-c)+i(b+d)][(a-c)-i(b+d)]}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)-(c^2+d^2)-2(ad+bc)i}{a^2+c^2-2ac+b^2+d^2+2bd}$$

$\frac{-(ad+bc)i}{a^2+b^2-ac+bd}$ [(i) का प्रयोग करने पर]

$\therefore \frac{(z_1+z_2)}{(z_1-z_2)}$ शुद्ध काल्पनिक है

जबकि यदि $ad+bc=0$, तब $\frac{(z_1+z_2)}{(z_1-z_2)}$ शून्य हो जायेगी।

समीकरण के प्रतिबन्धानुसार $ad+bc=0$

ट्रिक : माना दो सम्मिश्र संख्याये दोनों स्थितियों को संतुष्ट करती है अर्थात् $z_1 \ne z_2$ और $|z_1|=|z_2|$

माना $z_1=2+i, z_2=1-2i$, $\therefore \frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}=\frac{3-i}{1+3i}=-i$

27. (d) यह शून्य से बड़ा, बराबर या छोटा हो सकता है

28. (a) यदि $|z_1|=1$ एवं $|z_2|=1$, तब $|z_1z_2|=|z_1||z_2|=1.1=1$

29. (a) माना एक सम्मिश्र संख्या z का अस्तित्व है जो समीकरण को निम्न प्रकार संतुष्ट करती हैं $|z|<1$

तब $z^4+z+2=0 \Rightarrow -2=z^4+z \Rightarrow |-2|=|z^4+z|$

$\Rightarrow 2\le|z^4|+|z| \Rightarrow 2<2$, क्योंकि $|z|<1$

लेकिन $2<2$ असम्भव है। अतः दिये गये समीकरण का मूल $|z|<1$ को संतुष्ट नहीं कर सकता।

30. (c) यहाँ $|z_k|=1, k=1, 2, ... n$

$\Rightarrow |z_k|^2=1 \Rightarrow z_k\bar{z}_k=1 \Rightarrow \bar{z}_k=\frac{1}{z_k}$

इसलिए $|z_1+z_2+....+z_n|=|\overline{z_1+z_2+....+z_n}|$

$=|\bar{z}_1+\bar{z}_2+.....+\bar{z}_n|=\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+....+\frac{1}{z_n}\right|$

वैकल्पिक : माना $z_k=\cos\theta_k+i\sin\theta_k$, $k=1, 2, ...n$

ताकि $|z_k|=\sqrt{\cos^2\theta_k+\sin^2\theta_k}=1$

तब $\frac{1}{z_k}=(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)^{-1}=(\cos\theta_k-i\sin\theta_k)$

अब $z_1+z_2+.....+z_n$

$=(\cos\theta_1+.....+\cos\theta_n)-i(\sin\theta_1+.....+\sin\theta_n)$

और $\left(\frac{1}{z_1}\right)+\left(\frac{1}{z_2}\right)+.....+\left(\frac{1}{z_n}\right)$

$=(\cos\theta_1+.....+\cos\theta_n)-i(\sin\theta_1+.....+\sin\theta_n)$

अतः $|z_1+z_2+.....+z_n|=\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+.....+\frac{1}{z_n}\right|$

$\because$ प्रत्येक पक्ष $\sqrt{(\cos\theta_1+.....+\cos\theta_n)^2+(\sin\theta_1+....+\sin\theta_n)^2}$ के बराबर है।

31. (b) दिया गया है $\bar{z}=\frac{1}{z} \Rightarrow z\bar{z}=1 \Rightarrow |z|^2=1 \Rightarrow |z|=1$

32. (a) यह आधारभूत संकल्पना हैं।

33. (a) माना $z=x+iy$ ...... (i)

दिया है $|z+i|=|z-i|$

या $|x+iy+i|=|x+iy-i|$

या $|x+i(y+1)|=|x+i(y-1)|$

या $\sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$

या $x^2+(y+1)^2=x^2+(y-1)^2$

या $y^2+2y+1=y^2-2y+1$ या $4y=0$ या $y=0$

अतः (i) से $z=x$ जहाँ x कोई वास्तविक संख्या है।

34. (a) $z=x+iy$, तब $|z-5|=|x+iy-5|=|x-5+iy|$

$=\sqrt{(x-5)^2+y^2}$.

35. (c) $\left|(1+i)\frac{(2+i)}{(3+i)}\right|=|1+i|\left|\frac{2+i}{3+i}\right|=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=1$

36. (c) $\left|\frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}\right|=1 \Rightarrow \frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}=\cos\alpha+i\sin\alpha$

$\Rightarrow \frac{2z_1}{-2z_2}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha+1}{\cos\alpha-1+i\sin\alpha}$

(योगान्तरानुपात से)

$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2}=i\cot\frac{\alpha}{2} \Rightarrow iz_1=-\left(\cot\frac{\alpha}{2}\right)z_2$

लेकिन $iz_1=kz_2 \Rightarrow k=-\cot\frac{\alpha}{2}$

अब $k=-\cot\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \cot\frac{\alpha}{2}=-k \Rightarrow \tan\alpha=\frac{+2k}{k^2-1}$

$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{-2k}{1-k^2} \Rightarrow \alpha=\tan^{-1}\left(\frac{-2k}{1-k^2}\right)=-2\tan^{-1}k$

अब $\frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}=\cos\alpha+i\sin\alpha$

$(\because |z|=|\bar{z}|)$

$\Rightarrow z_1-z_2$ एवं z_1+z_2 के बीच का कोण α है

37. (b) माना $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

तब $\left|z+\frac{1}{z}\right|=1 \Rightarrow \left|z+\frac{1}{z}\right|^2=1$

$\Rightarrow \left|r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)\right|^2=1$.

$\Rightarrow \left(r+\frac{1}{r}\right)^2\cos^2\theta+\left(r-\frac{1}{r}\right)^2\sin^2\theta=1$

$\Rightarrow r^2+\frac{1}{r^2}+2\cos 2\theta=1$

$\because |z|=r$ उच्चिष्ठ है इसलिए $\frac{dr}{d\theta}=0$

समीकरण (i) को θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$2r\frac{dr}{d\theta}-\frac{2}{r^3}\frac{dr}{d\theta}-4\sin 2\theta=0$

$\frac{dr}{d\theta}=0$ का मान रखने पर $\sin 2\theta=0 \Rightarrow \theta=0$ या $\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow z$ पूर्णतः वास्तविक या पूर्णतः काल्पनिक है।

38. (d) **ट्रिक** : $z_1=1+0i$ तथा $z_2=0+i$ रखकर निरीक्षण करें।

39. (c) R. H. S $=\frac{1}{2}|(\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2})^2|+\frac{1}{2}|(\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2})^2|$

$=\frac{1}{2}|\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}|^2+\frac{1}{2}|\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}|^2$ $\{\because |z^2|=|z|^2\}$

$=\frac{1}{2}2[|\sqrt{z_1}|^2+|\sqrt{z_2}|^2]=|z_1|+|z_2|$

40. (a) $\left(\frac{3+2i}{3-2i}\right)=\left(\frac{3+2i}{3-2i}\right)\left(\frac{3+2i}{3+2i}\right)=\frac{9-4+12i}{13}=\frac{5}{13}+i\left(\frac{12}{13}\right)$

मापांक $=\sqrt{\left(\frac{5}{13}\right)^2+\left(\frac{12}{13}\right)^2}=1$.

41. (b) $z=x+iy \Rightarrow |z|^2=x^2+y^2=1$ ..... (i)

अब, $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy}\times\frac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy}$

$=\frac{(x^2+y^2-1)+2iy}{(x+1)^2+y^2}=\frac{2iy}{(x+1)^2+y^2}$ [समीकरण (i) से]

अतः $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ पूर्णतः काल्पनिक है।

42. (c) दिया गया व्यंजक $|2z-1|+|3z-2|$, $|2z-1|$ का न्यूनतम मान 0, $z=\frac{1}{2}$ पर होगा। तब दिया व्यंजक $=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $|3z-2|$ का न्यूनतम मान 0, $z=\frac{2}{3}$ पर होगा। तब दिया व्यंजक $=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$

अतः व्यंजक का न्यूनतम मान $\frac{1}{3}$ है।

43. (a) $|z|=1 \Rightarrow |x+iy|=1 \Rightarrow x^2+y^2=1$

$\omega=\frac{z-1}{z+1}=\frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy}\times\frac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy}$

$=\frac{(x^2+y^2-1)}{(x+1)^2+y^2}+\frac{2iy}{(x+1)^2+y^2}=\frac{2iy}{(x+1)^2+y^2}$

$(\because x^2+y^2=1)$

$\therefore$ $\text{Re}(\omega)=0$.

44. (c) $\alpha-i\beta=\frac{3-4xi}{3+4xi}$. दोनों पक्षों का मापांक लेकर वर्ग करने पर $\alpha^2+\beta^2=1$.

45. (b) हम जानते हैं कि $|z_1|=1$ एवं z_2 कोई सम्मिश्र संख्या है

$\Rightarrow\left|\frac{z_1-z_2}{1-z_1\bar{z}_2}\right|=\frac{|z_1-z_2|}{\left|1-\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}\right|}$; $\because z_1\bar{z}_1=|z_1|^2$

$=\frac{|z_1-z_2|}{|\bar{z}_1-\bar{z}_2|}|\bar{z}_1|$; दिया है $\because |\bar{z}_1|=1$

$=\frac{|z_1-z_2|}{|\overline{z_1-z_2}|}=\frac{|z_1-z_2|}{|z_1-z_2|}=1$.

46. (d) माना $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$\therefore |z_1+z_2|=[(r_1\cos\theta_1+r_2\cos\theta_2)^2$

$+(r_2\sin\theta_1+r_2\sin\theta_2)^2]^{1/2}$

$=[r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)]^{1/2}=[(r_1+r_2)^2]^{1/2}$

$(\because |z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|)$

इसलिए $\cos(\theta_1-\theta_2)=1 \Rightarrow \theta_1-\theta_2=0 \Rightarrow \theta_1=\theta_2$

इस प्रकार $arg(z_1)-arg(z_2)=0$.

ट्रिक : $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2| \Rightarrow z_1, z_2$ एक ही रेखा पर स्थित हैं।

$\therefore arg\, z_1=arg\, z_2 \Rightarrow arg\, z_1-arg\, z_2=0$.

47. (d) माना $z=5-\sqrt{3}\,i$

$\Rightarrow$ $r(\cos\theta+i\sin\theta)=5-\sqrt{3}\,i$

$\Rightarrow$ $r\cos\theta=5$ तथा $r\sin\theta=-\sqrt{3}$

$\therefore$ $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{5} \Rightarrow \theta=\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$

48. (d) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{(1+i)^2}{2}$

अब $1+i=r(\cos\theta+i\sin\theta) \Rightarrow r\cos\theta=1, r\sin\theta=1$

$\Rightarrow$ $r=\sqrt{2}, \theta=\pi/4$

$\therefore$ $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}(1+i)^2=\frac{1}{2}.2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^2$

डी मोयवर प्रमेय से, $\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

अतः कोणांक $\frac{\pi}{2}$ एवं मापांक 1 है

ट्रिक : $arg\left(\frac{1+i}{1-i}\right)=arg(1+i)-arg(1-i)$

$=45^o-(-45^o)=90^o$

$\left|\frac{1+i}{1-i}\right|=\frac{|1+i|}{|1-i|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$.

49. (d) माना $z=x+iy, \bar{z}=x-iy$

$\because arg(z)=\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$

$arg(\bar{z})=\theta=\tan^{-1}\left(\frac{-y}{x}\right)$

इस प्रकार $arg(z)\neq arg(\bar{z})$.

50. (c) $|z|=4$ एवं $arg\, z=\frac{5\pi}{6}=150^o$

माना $z=x+iy$, तब $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}=4$

एवं $\theta=\frac{5\pi}{6}=150^o$

$\therefore$ $x=r\cos\theta=4\cos 150^o=-2\sqrt{3}$.

एवं $y=r\sin\theta=4\sin 150^o=4\frac{1}{2}=2$

$\therefore$ $z=x+iy=-2\sqrt{3}+2i$

ट्रिक : चूँकि $arg\, z=\frac{5\pi}{6}=150^o$, यहाँ सम्मिश्र संख्या द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है। अतः (a) और (b) नहीं है एवं $|z|=4$ जो कि केवल (c) संतुष्ट करता है

51. (c) यदि $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(1-i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}$

$= \frac{1-3-2i\sqrt{3}}{1+3} = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

तब $arg(z) = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} = 60^o$.

$\because$ सम्मिश्र संख्या तृतीय चतुर्थांश में स्थित है, अतः

$arg(z) = 180^o + 60^o = 240^o$

वैकल्पिक : $arg\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right) = arg(1-i\sqrt{3}) - arg(1+i\sqrt{3})$

$= -60^o - 60^o = -120^o$ या 240^o.

52. (b) यह आधारभूत संकल्पना है

53. (b) $z = \sin\alpha + i(1-\cos\alpha)$

$\Rightarrow amp(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$

$= \tan^{-1}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}$.

54. (a) माना $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ $\therefore amp(z)$ या $arg(z)$

$= \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}/(1+\sqrt{3})}{1/(1+\sqrt{3})}\right] = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

55. (c) $arg(-1+i\sqrt{3}) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = 120^o$

क्योंकि यह द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है

56. (c) $arg\left(\frac{3+i}{2-i} + \frac{3-i}{2+i}\right) = arg\left(\frac{6+5i+i^2+6-5i+i^2}{5}\right)$

$= arg\left(\frac{10}{5}\right) = 0$.

57. (a) हम जानते हैं कि θ का मुख्य कोणांक $-\pi$ व π के बीच होता है

58. (b) यदि $z = 0 + ib$, जहाँ $b > 0$, तब z धनात्मक y-अक्ष पर होगा इसलिए $arg(z) = \frac{\pi}{2}$.

59. (d) यदि $z = 0 + ib$ जहाँ $b < 0$ तब z, $y-$अक्ष की ऋणात्मक दिशा पर एक बिन्दु द्वारा प्रदर्शित होगा। अतः $arg(z) = -\frac{\pi}{2}$.

60. (a) माना $z = a + i0$, जहाँ $a < 0$. तब z, x-अक्ष के ऋणात्मक भाग से प्रदर्शित होगा। अतः $arg(z) = \pi$

61. (c) चूँकि एक सम्मिश्र संख्या का $-i$ से गुणन इसे ऋणात्मक (दक्षिणावर्त्त) दिशा में 90° घुमा देता है।

62. (a) हम जानते हैं कि $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$

$\Rightarrow$

$|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|\cos(\theta_1 - \theta_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2$

जहाँ $\theta_1 = arg(z_1), \theta_2 = arg(z_2)$

$\Rightarrow \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0 \Rightarrow \theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

नोट : हमें ज्ञात है कि $\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0 \Rightarrow \text{Re}(z_1\overline{z_2}) = 0$

$\Rightarrow z_1\overline{z_2}$ पूर्णतः काल्पनिक हैं।

63. (c) हम जानते हैं कि $|z_1 - z_2|^2$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|\cos(\theta_1 - \theta_2)$

जहाँ $\theta_1 = arg(z_1)$ एवं $\theta_2 = arg(z_2)$

$\because arg\, z_1 - arg\, z_2 = 0$

$\therefore |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| = (|z_1| - |z_2|)^2$

$\Rightarrow |z_1 - z_2| = ||z_1| - |z_2||$

64. (c) दिये गये सम्बन्धों का वर्ग करने पर

$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

अब $amp\ z_1 - amp\ z_2 = \tan^{-1}\frac{y_1}{x_1} - \tan^{-1}\frac{y_2}{x_2}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2}}{1 + \frac{y_1y_2}{x_1x_2}} = \tan^{-1}\frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_1x_2 + y_1y_2} = \tan^{-1}\infty = \frac{\pi}{2}$.

65. (a) $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \pi$

$\Rightarrow arg(z_1) - arg(z_2) = \pi \Rightarrow arg(z_1) = arg(z_2) + \pi$

माना $arg(z_2) = \theta$, तब $arg(z_1) = \pi + \theta$

$\therefore z_1 = |z_1|[\cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)]$

$= |z_1|(-\cos\theta - i\sin\theta)$

एवं $z_2 = |z_2|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z_1|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$(\because |z_1| = |z_2|)$

अतः $z_1 + z_2 = 0$.

66. (c) $amp(z) - amp(-z) = \tan^{-1}\frac{y}{x} - \left(\tan^{-1}\frac{y}{x} - \pi\right) = \pi$

67. (d) $amp(z) = \tan^{-1}\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

$= \tan^{-1}\left(\cot\frac{\alpha}{2}\right) = \tan^{-1}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right\} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$.

68. (c) $arg\left(\frac{z_1}{\overline{z}_2}\right) = arg\, z_1 - arg(\overline{z}_2) = arg\, z_1 + arg\, z_2 = arg(z_1.z_2)$

विकल्प (c) से यही परिणाम प्राप्त होता है।

69. (b) $arg\left(\frac{13-5i}{4-9i}\right) = arg(13-5i) - arg(4-9i)$

$= -\tan^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) + \tan^{-1}\frac{9}{4} = \frac{\pi}{4}$

70. (b) माना $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ तब $|z_1| = |z_2| \Rightarrow |z_2| = r_1$

और $arg(z_1)+arg(z_2)=0 \Rightarrow arg(z_2)=-arg(z_1)=-\theta_1$

$z_2=r_1[\cos(-\theta_1)-i\sin(-\theta_1)]=r_1(\cos\theta_1-i\sin\theta_1)$

$=\bar{z}_1=z_2$.

71. (c) $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$

$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|$

$\Rightarrow |z_1|^2+|z_2|^2+2\text{Re}|z_1\bar{z}_2|$

$=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|$

$\Rightarrow 2\text{Re}|z_1\bar{z}_2|=2|z_1||z_2|$

$\Rightarrow 2|z_1||\bar{z}_2|\cos(\theta_1-\theta_2)=2|z_1||z_2|$

$\Rightarrow \cos(\theta_1-\theta_2)=1$ या $\theta_1-\theta_2=0$

$\therefore arg(z_1)=arg(z_2)$

72. (a) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)=\frac{1-i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{(1-i)^2}{2}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\text{Im}(z)<0$, अतः कोणांक $=-\pi/2$.

73. (a, d) यह सम्मिश्र संख्याओं के मापांकों के गुणधर्म हैं।

74. (a) $amp\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}+i}\right)=amp(1+\sqrt{3}\,i)-amp(\sqrt{3}+i)$

$=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$.

75. (d) 0 का कोणांक परिभाषित नहीं है।

76. (a) $\because arg\ z<0$ अर्थात् ऋणात्मक, $\therefore arg\ z=-\theta$ जहाँ θ धनात्मक है

$arg\ (-z)=-[+\pi-(-\theta)]$

$=-\pi-\theta=2\pi+(-\pi-\theta)=\pi+arg(z)$

$\Rightarrow arg(-z)-arg(z)=\pi.$

77. (d) $z=\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}=\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}\times\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}$

$=\frac{\sqrt{3}+i+3i-\sqrt{3}}{3+1}=\frac{4i}{4}=i$

$amp(z)=\pi/2 \quad [\because \tan\theta=b/a]$

78. (c) $z=\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}=\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}\times\frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{1+3}$

$\Rightarrow z=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow arg(z)=\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

79. (b) $z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

$\therefore |z|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$

और

$arg(z)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\Rightarrow arg(z)=\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$.

80. (c) $\sin\frac{\pi}{5}+i\left(1-\cos\frac{\pi}{5}\right)=2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}+i2\sin^2\frac{\pi}{10}$

$=2\sin\frac{\pi}{10}\left(\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}\right)$

कोणांक के लिए $\tan\theta=\frac{\sin\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}}=\tan\frac{\pi}{10} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{10}$.

81. (d) माना $z=-1-i\sqrt{3}$

तब $\alpha=\tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right|=\tan^{-1}\left|-\frac{\sqrt{3}}{1}\right|=\frac{\pi}{3}$

स्पष्टतः z तृतीय चतुर्थांश में स्थित है

अतः कोणाक $\theta=-(\pi-\alpha)=-(\pi-\pi/3)=\frac{-2\pi}{3}$.

82. (d) $|z||\omega|=1$ ......(i)

एवं $arg\left(\frac{z}{\omega}\right)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{z}{\omega}=i \Rightarrow \left|\frac{z}{\omega}\right|=1$ .....(ii)

समी. (i) व (ii) से

$|z|=|\omega|=1$ एवं $\frac{z}{\omega}+\frac{\bar{z}}{\bar{\omega}}=0;\ z\bar{\omega}+\bar{z}\omega=0$

$\bar{z}\omega=-z\bar{\omega}=\frac{-z}{\omega}\bar{\omega}\,\omega$; $\bar{z}\omega=-i|\omega|^2=-i.$.

83. (b) हम जानते हैं कि $z=x+iy$ तथा दूसरी सम्मिश्र संख्या z_2 है दिया है, $arg\ (z)+z_2=\pi$

$z_2=\pi-arg(z)$; $\quad z_2=\pi+\left[-\tan^{-1}\frac{y}{x}\right]$

$z_2=\pi+[arg\ (\bar{z})]$

जो कि द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है अर्थात $-\bar{z}$.

84. (b) $\frac{1+2i}{1-(1-i)^2}=\frac{1+2i}{1-(1-1-2i)}=\frac{1+2i}{1+2i}=1+0i$

मापांक =1

कोणांक $\theta=\tan^{-1}\frac{0}{1}=0$.

85. (d) दिया है $z_1=1+2i$, $z_2=3+5i$ एवं $\bar{z}_2=3-5i$

$\frac{\bar{z}_2z_1}{z_2}=\frac{(3-5i)(1+2i)}{(3+5i)}=\frac{13+i}{3+5i}$

$=\frac{13+i}{3+5i}\times\frac{3-5i}{3-5i}=\frac{44-62i}{34}$

तब $\text{Re}\left(\frac{\bar{z}_2z_1}{z_2}\right)=\frac{44}{34}=\frac{22}{17}$.

86. (a) दिया है $(3+i)z=(3-i)\bar{z}$

माना $z=x(3-i)$, $x\in R$

L. H. S. $=(3+i)z=(3+i)x(3-i)$

$=x(3+i)(3-i)=x[(3)^2+1^2]=10x$

R. H. S. $=(3-i)\bar{z}=(3-i)x(3+i)=x[3^2+1^2]=10x$

अतः L. H. S. = R. H. S.

$\because z=x(3-i)$ समीकरण को संतुष्ट करता है तब $z=x(3-i)$, जहाँ x एक वास्तविक संख्या है।

87. (c) $(\sqrt{8}+i)^{50}=3^{49}(a+ib)$

दोनों पक्षों का मापांक लेकर वर्ग करने पर,

$(8+1)^{50} = 3^{98}(a^2+b^2)$

$9^{50} = 3^{98}(a^2+b^2)$

$3^{100} = 3^{98}(a^2+b^2) \Rightarrow (a^2+b^2) = 9$.

सम्मिश्र संख्याओं का वर्गमूल, निरूपण तथा लघुगणक

1. (a) $x+iy = \sqrt{\frac{a+ib}{c+id}} \Rightarrow x-iy = \sqrt{\frac{a-ib}{c-id}}$

$x^2+y^2 = (x+iy)(x-iy) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$

$\Rightarrow (x^2+y^2)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

2. (b) दिया है $\sqrt{-8-6i} = x+iy$

$\Rightarrow -8-6i = (x+iy)^2$

$\therefore x^2-y^2 = -8$ ..... (i) एवं $2xy = -6$ ..... (ii)

अब $x^2+y^2 = \sqrt{64+36} = \pm 10$ ..... (iii)

(i) एवं (iii) से $x = \pm 1$ एवं $y = \pm 3$

अतः $z = \pm(1-3i)$

ट्रिक : $\because \{\pm(1-3i)\}^2 = -8-6i$

3. (b) $\sqrt{-7-24i} = x-iy$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, $-7-24i = x^2-y^2-i(2xy)$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$x^2-y^2 = -7$ एवं $2xy = 24$

$\therefore x^2+y^2 = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25$

4. (c) $\sqrt{x+iy} = \pm(a+bi)$

$\Rightarrow x+iy = a^2-b^2+2iab \Rightarrow x = a^2-b^2,\ y = 2ab$

$\therefore \sqrt{-x-iy} = \sqrt{-(a^2-b^2)-2iab} = \sqrt{b^2-a^2-2iab}$

$= \sqrt{(b-ia)^2} = \pm(b-ia)$.

5. (a) माना $\sqrt{3-4i} = x+iy \Rightarrow 3-4i = x^2-y^2+2ixy$

$\Rightarrow x^2-y^2 = 3,\quad 2xy = -4$ ...... (i)

$\Rightarrow (x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2+4x^2y^2 = (3)^2+(-4)^2 = 25$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 5$ ..... (ii)

समीकरण (i) व (ii) से, $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$,

$y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$. अतः $(3-4i)$ का वर्गमूल $\pm(2-i)$ है।

6. (d) $\sqrt{a+ib} = x+yi \Rightarrow \left(\sqrt{a+ib}\right)^2 = (x+yi)^2$

$\Rightarrow a = x^2-y^2, b = 2xy$ एवं अतः

$\sqrt{a-ib} = \sqrt{x^2-y^2-2xyi} = \sqrt{(x-yi)^2} = x-iy$

नोट : इस प्रश्न में यह दिया होना चाहिए कि $a, b, x, y \in R$.

7. (d) $\because 1-i = \sqrt{2}\left\{\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right\}, |1-i| = \sqrt{2}$

$\therefore |1-i|^x = 2^x \Rightarrow (\sqrt{2})^x = 2^x \Rightarrow 2^{x/2} = 2^x$

$\Rightarrow \frac{x}{2} = x \Rightarrow x = 0$

अतः अशून्य पूर्णांक हलों की संख्या शून्य है

8. (a) $\frac{1+7i}{(2-i)^2} = \frac{(1+7i)}{(3-4i)}\frac{(3+4i)}{(3+4i)} = \frac{-25+25i}{25} = -1+i$

माना $z = x+iy = -1+i$

$\therefore r\cos\theta = -1$ एवं $r\sin\theta = 1 \quad \therefore \theta = \frac{3\pi}{4}$ और $r = \sqrt{2}$

तब $\frac{1+7i}{(2-i)^2} = \sqrt{2}\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right]$

वैकल्पिक : $\left|\frac{1+7i}{(2-i)^2}\right| = \left|\frac{1+7i}{3-4i}\right| = \sqrt{2}$

एवं $arg\left(\frac{1+7i}{3-4i}\right) = \tan^{-1}7 - \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right)$

$= \tan^{-1}7 + \tan^{-1}\frac{4}{3} = \frac{3\pi}{4}$

$\therefore \frac{1+7i}{(2-i)^2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

9. (b) यदि $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\Rightarrow iz = ir(\cos\theta + i\sin\theta) = -r\sin\theta + ir\cos\theta$

या $e^{iz} = e^{(-r\sin\theta + ir\cos\theta)} = e^{-\sin\theta}e^{ri\cos\theta}$

या $|e^{iz}| = |e^{-r\sin\theta}||e^{ri\cos\theta}| = e^{-r\sin\theta}|e^{ir\cos\theta}|$

$= e^{-r\sin\theta}[\{\cos^2(r\cos\theta) + \sin^2(r\cos\theta)\}]^{1/2} = e^{-r\sin\theta}$

10. (b) $\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+(i)^2-2i}{1+1} = -i$

जो निम्न प्रकार लिखा जा सकता है, $\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}$

11. (c) यहाँ $-1+\sqrt{-3} = re^{i\theta} \Rightarrow -1+i\sqrt{3} = re^{i\theta}$

$= r\cos\theta + ir\sin\theta$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$r\cos\theta = -1$ एवं $r\sin\theta = \sqrt{3}$

अतः $\tan\theta = -\sqrt{3} \Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{2\pi}{3}$. अतः $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

12. (a) $y = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$, तब $\frac{1}{y} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

$\therefore y + \frac{1}{y} = 2\cos\theta$.

13. (c, d) $\because \frac{-\sqrt{3}-i}{2} = -\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow \left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right)^3 = -\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3 = -i$

एवं $\frac{\sqrt{3}-i}{2} = \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}$

एवं $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^3 = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = -i$.

14. (c) $1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right] = 2e^{i\pi/3}$

$\therefore\ (1+i\sqrt{3})^9 = (2e^{i\pi/3})^9 = 2^9.e^{i(3\pi)}$

$= 2^9(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = -2^9$

$\therefore\ a+ib = (1+i\sqrt{3})^9 = -2^9$; $\therefore\ b = 0$.

15. (a) $e^{e^{i\theta}=e^{\cos\theta+i\sin\theta}=e^{\cos\theta}[e^{i\sin\theta}]} = e^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta)+i\sin(\sin\theta)]$

$\therefore\ e^{e^{i\theta}}$ का वास्तविक भाग $e^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta)]$ है।

16. (b) माना $z = e^{e^{-i\theta}} = e^{\cos\theta - i\sin\theta} = e^{\cos\theta}e^{-i\sin\theta}$

$z = e^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta) - i\sin(\sin\theta)]$

$z = e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta) - ie^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)$

$amp(z) = \tan^{-1}\left[-\frac{e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)}{e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)}\right]$

$= \tan^{-1}[\tan(-\sin\theta)] = -\sin\theta$.

17. (c) $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} \Rightarrow z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\times\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}$

$\Rightarrow\ z = \frac{\sqrt{3}+3i-i+\sqrt{3}}{3+1} = \frac{2(\sqrt{3}+i)}{4}$

$\Rightarrow\ z = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]$

अब $\bar{z} = \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow\ (\bar{z})^{100} = \left[\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right]^{100}$

$\Rightarrow\ (\bar{z})^{100} = \cos\frac{50\pi}{3} - i\sin\frac{50\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}$

अतः $(\bar{z})^{100}$ तृतीय चतुर्थांश में स्थित है।

18. (d) $x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3-4}}{2}$

$\Rightarrow\ x = \frac{\sqrt{3}\pm i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2}$

$\Rightarrow x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ [धनात्मक चिन्ह लेने पर]

19. (d) माना $z = -1+i\sqrt{3}$, $r = \sqrt{1+3} = 2$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$\therefore (z)^{20} = \left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{20}$

$= 2^{20}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{20} = 2^{20}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{20}$.

20. (c) $\tan^{-1}\left(\frac{5i}{3}\right) = i\tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{i}{2}\log\left(\frac{\frac{5}{3}+1}{\frac{5}{3}-1}\right)$

$\text{Im}\left(\tan^{-1}\left(\frac{5i}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\log 4 = \frac{1}{2}.2\log 2 = \log 2$.

21. (a) माना $z = (1-i)^{-i}$, दोनों पक्षों का log लेने पर,

$\Rightarrow \log z = -i\log(1-i) = -i\log\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= -i\log\left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)$

$= -i\left[\frac{1}{2}\log 2 + \log e^{-i\pi/4}\right]$

$= -i\left[\frac{1}{2}\log 2 - \frac{i\pi}{4}\right] = -\frac{i}{2}\log 2 - \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow\ z = e^{-\pi/4}\ e^{-i/2\log 2}$ (केवल वास्तविक भाग लेने पर)

$\Rightarrow \text{Re}(z) = e^{-\pi/4}\cos\left(\frac{1}{2}\log 2\right)$.

22. (b) माना $z = i\log\left(\frac{x-i}{x+i}\right) \Rightarrow \frac{z}{i} = \log\left(\frac{x-i}{x+i}\right)$

$\Rightarrow \frac{z}{i} = \log\left[\frac{x-i}{x+i}\times\frac{x-i}{x-i}\right] = \log\left[\frac{x^2-1-2ix}{x^2+1}\right]$

$\Rightarrow \frac{z}{i} = \log\left[\frac{x^2-1}{x^2+1} - i\frac{2x}{x^2+1}\right]$ ...... (i)

$\because \log(a+ib) = \log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$

$= \log\sqrt{a^2+b^2} + i\tan^{-1}(b/a)$

अतः $\frac{z}{i} = \log\sqrt{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2 + \left(\frac{-2x}{x^2+1}\right)^2} + i\tan^{-1}\left(\frac{-2x}{x^2-1}\right)$

[समी. (i) से]

$\frac{z}{i} = \log\frac{\sqrt{x^4+1-2x^2+4x^2}}{(x^2+1)^2} + i\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

$= \log 1 + i(2\tan^{-1}x) = 0 + i(2\tan^{-1}x)$

$\therefore z = i^2\,2\tan^{-1}x = -2\tan^{-1}x = \pi - 2\tan^{-1}x$.

23. (c) $e^{iA}.e^{iB}.e^{iC} = e^{iA+iB+iC} = e^{i(A+B+C)} = e^{i\pi}$

$[\therefore A+B+C = \pi]$

$= \cos\pi + i\sin\pi = (-1) + i(0) = -1$.

24. (d) $z = \frac{7-i}{3-4i} \times \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{21+25i+4}{16+9} = \frac{25(1+i)}{25} = (1+i)$

$z^{14} = (1+i)^{14} = [(1+i)^2]^7 = (2i)^7 = 2^7 i^7 = -2^7 i$.

सम्मिश्र संख्याओं की ज्यामिति

1. (c) $\because$ सम्मिश्र तल के निर्देशांक (2, 3) व $(-1,-1)$ हैं, अतः अभीष्ट दूरी 5 है।

ट्रिक : हम जानते हैं कि z_1 व z_2 के बीच की दूरी $|z_1 - z_2|$ है, अतः अभीष्ट लम्बाई $|2+3i+1+i| = 5$ है।

2. (b) समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं अर्थात्

$\frac{z_1+z_3}{2} = \frac{z_2+z_4}{2} \Rightarrow z_1+z_3 = z_2+z_4$

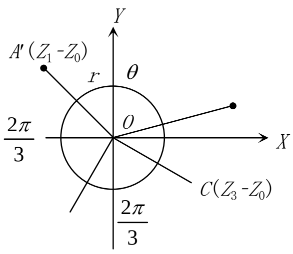
3. (b) $z\bar{z} + a\bar{z} + \bar{a}z = -b$ के दोनों तरफ $a\bar{a}$ जोड़ने पर,

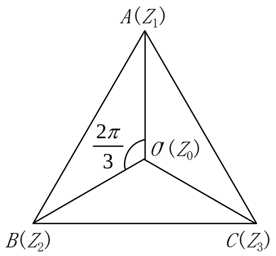
$(z+a)(\bar{z}+\bar{a}) = a\bar{a} - b$

$\Rightarrow |z+a|^2 = |a|^2 - b, \{\because z\bar{z} = |z|^2\}$

यह समीकरण एक वृत्त निरूपित करेगा जिसका केन्द्र $z = -a$ है यदि $|a|^2 - b > 0$ अर्थात् $|a|^2 > b$ चूँकि $|a|^2 = b$ केवल बिन्दु वृत्त निरूपित करता है।

4. (c) माना r समबाहु त्रिभुज की परित्रिज्या एवं ω इकाई का सम्मिश्र घनमूल है।





माना ABC, जो कि एक समबाहु त्रिभुज है, के शीर्ष $A(z_1)$, $B(z_2)$ व $C(z_3)$ हैं। इसका परिकेन्द्र $O'(z_0)$ है सदिश $O'A, O'B, O'C$ क्रमशः OA', OB', OC' के बराबर व समान्तर हैं

तब सदिश $\overrightarrow{OA'} = z_1 - z_0 = re^{i\theta}$

$\overrightarrow{OB'} = z_2 - z_0 = re^{\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)} = r\omega e^{i\theta}$

$\overrightarrow{OC'} = z_3 - z_0 = re^{i\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)} = r\omega^2 e^{i\theta}$

$\therefore z_1 = z_0 + re^{i\theta}, z_2 = z_0 + r\omega e^{i\theta}, z_3 = z_0 + r\omega^2 e^{i\theta}$

वर्ग करके जोड़ने पर,,

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 3z_0^2 + 2(1+\omega+\omega^2) z_0 r e^{i\theta}$

$+ (1+\omega^2+\omega^4) r^2 e^{i2\theta}$

$= 3z_0^2$, $\because 1+\omega+\omega^2 = 0 = 1+\omega^2+\omega^4$

नोट : विद्यार्थी इस प्रश्न को सूत्र की तरह याद रखें।

5. (b) समीकरण $\bar{b}z + b\bar{z} = c$

$z = x+iy, b = b_1 + ib_2$ रखने पर,

जहाँ x, y, b_1, b_2 वास्तविक हैं, तब समीकरण

$(b_1 - ib_2)(x+iy) + (b_1+ib_2)(x-iy) = c$ हो जायेगा

या $2b_1 x + 2b_2 y = c$

जो कि सरल रेखा का समीकरण है।

नोट : यह आधारभूत संकल्पना है।

6. (b) माना z_1, z_2, z_3 तीन संख्यायें समान्तर श्रेणी में हैं, तो

$2z_2 = z_1 + z_3$.

अतः z_1 व z_3 को मिलाने वाली रेखा का मध्य बिन्दु z_2 है, अतः बिन्दु z_1, z_2, z_3 एक रेखा में हैं।

7. (b) $\because$ त्रिभुज, जिसके शीर्ष $z_1 = a+i, z_2 = 1+bi$ एवं $z_3 = 0$ हैं, समबाहु हैं अतः

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$

$\Rightarrow (a+i)^2 + (1+ib)^2 + 0 = (a+i)(1+ib) + 0 + 0$

$\Rightarrow a^2 - b^2 + 2i(a+b) = a - b + i(1+ab)$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$a^2 - b^2 = a - b$ ......(i) एवं $2(a+b) = 1+ab$ .....(ii)

(i) से $(a-b)[(a+b)-1] = 0$

$\Rightarrow$ या तो $a = b$ या $a+b = 1$

$a = b$ लेने पर, (ii) से

$4a = 1 + a^2$ or $a^2 - 4a + 1 = 0$

$\therefore a = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

$\because 0 < a < 1$ एवं $0 < b < 1$, अतः $a = b = 2 - \sqrt{3}$

$a + b = 1$ या $b = 1 - a$, लेने पर, (ii) से

$2 = 1 + a(1-a)$ या $a^2 - a + 1 = 0$, जिससे a का काल्पनिक मान प्राप्त होता है। अतः $a = b = 2 - \sqrt{3}$, a व b के अभीष्ट मान हैं।

8. (a) माना $\omega = -1 + 5z$, तब $\omega + 1 = 5z$

$\Rightarrow |\omega + 1| = 5|z| = 5 \times 2 = 10$ $(\because |z| = 2)$

इस प्रकार ω वृत्त पर स्थित है।

9. (c) दिये गये चतुर्भुज के शीर्ष

$A(1+2i), B(-3+i), C(-2-3i)$ और $D(2-2i)$ हैं।

अब, $AB = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}, BC = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$CD = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}, DA = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$AC = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}, BD = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

अतः यह एक वर्ग है।

10. (d) $|z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

माना यदि z को 180^o कोण से घड़ी की दिशा में घुमाने पर नया सदिश z_1 प्राप्त होता है, तो

$z_1 = e^{-i\pi} z = (\cos\pi - i\sin\pi)$, अर्थात् $z = -4 + 3i$

z_1 की दिशा में इकाई सदिश $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ है

इसलिये अभीष्ट सदिश

$= 3|z|\left(-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right) = 15\left(-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right) = -12 + 9i$

11. (b) $\because$ मूलबिन्दु से किसी सम्मिश्र संख्या ω की अधिकतम दूरी $|\omega|$ है। इसलिए

$|\omega| = \left|\omega + \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega}\right| \le \left|\omega + \frac{1}{\omega}\right| + \left|\frac{1}{\omega}\right| = 2 + \frac{1}{|\omega|}$

$\Rightarrow |\omega|^2 - 2|\omega| - 1 \le 0 \Rightarrow |\omega| \le \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

अतः $|\omega|$ का अधिकतम मान $1 + \sqrt{2}$ है।

12. (b) $3 - 4i$ अर्थात् $(3, -4)$ सम्मिश्र तल के चतुर्थ चतुर्थांश में है 180^o से वामावर्त्त घुमाने के बाद यह द्वितीय चतुर्थांश में होगा। इसलिये संख्या $-3 + 4i$ होगी। अब इसे 2.5 गुना खींचने पर अर्थात करने पर अभीष्ट सम्मिश्र संख्या $\frac{-15}{2} + 10i$ होगी।

13. (a, b) यह दिया है कि $OP = OQ$

$\therefore |\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OQ}|$

$\Rightarrow |a + ib| = |c + id|$

साथ ही $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OQ}, \ \therefore \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = 0$

$\Rightarrow (a+c) + i(b+d) = 0 \Rightarrow a + c = 0 = b + d$

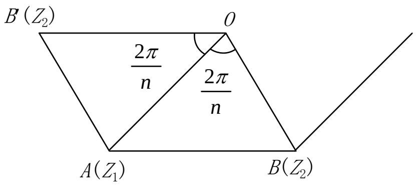
14. (c) $z_k = 1 + a + a^2 + ... + a^{k-1} = \frac{1 - a^k}{1 - a}$

$\Rightarrow z_k - \frac{1}{1-a} = \frac{-a^k}{1-a}$

$\Rightarrow \left|z_k - \frac{1}{1-a}\right| = \frac{|a^k|}{|1-a|} = \frac{|a|^k}{|1-a|} < \frac{1}{|1-a|}$

$\Rightarrow z_k, \ \left|z - \frac{1}{1-a}\right| = \frac{1}{|1-a|}$ में स्थित है।

15. (a) माना A शीर्ष का निर्देशांक z_1 है। यहाँ z_2 की दो सम्भावनाएँ हैं अर्थात् z_1 को $\frac{2\pi}{n}$ कोण से या तो दक्षिणावर्त दिशा में या वामावर्त दिशा में घुमाकर z_2 को प्राप्त किया जा सकता है।



$\therefore \frac{z_2}{z_1} = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| e^{\pm\frac{i2\pi}{n}} \Rightarrow z_2 = z_1 e^{\pm\frac{i2\pi}{n}}$, $(\because |z_2| = |z_1|)$

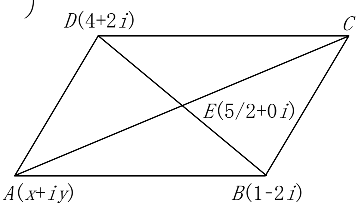
$\Rightarrow z_2 = z_1\left(\cos\frac{2\pi}{n} \pm i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$

16. (b) $|\overrightarrow{BD}| = |(4+2i)-(1-2i)| = \sqrt{9+16} = 5$

माना A के निर्देशांक $z = x + iy$ है।

BD के मध्यबिन्दु का निर्देशांक $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ है।

$\because$ समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करते हैं। अतः विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ हैं।



$|\overrightarrow{AE}| = 5 \quad \left(\because BD = \frac{1}{2}AC = AE\right)$

जो कि विकल्प (b) को सन्तुष्ट करता है।

17. (a) $\because |z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3| = |z - z_4|$

इसलिये z के निर्देशांक वाला बिन्दु z_1, z_2, z_3, z_4 निर्देशांक वाले बिन्दुओं से समान दूरी पर है। अतः z या तो वृत्त के केन्द्र के निर्देशांक है या एक वर्ग या आयत के विकर्णों का प्रतिच्छेद बिन्दु है। अतः z_1, z_2, z_3, z_4 या तो चक्रीय (एक ही वृत्त पर) है या वर्ग के शीर्ष हैं अतः z_1, z_2, z_3, z_4 चक्रीय (एक ही वृत्त पर) हैं।

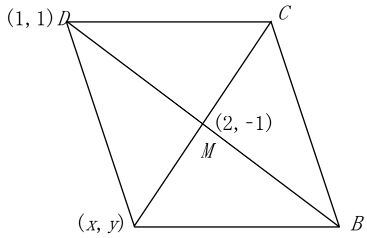
18. (a) $BD = 2AC \Rightarrow 2DM = 2(2AM)$

या $DM = 2AM$ या $DM^2 = 4AM^2$

या $5 = 4[(x-2)^2 + (y+1)^2]$ ..... (i)

पुनः DM की प्रवणता -2 एवं AM की प्रवणता $\frac{y+1}{x-2}$ है।

AM, DM के लम्बवत् है। अतः

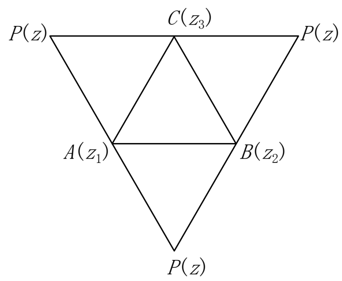


$\therefore -2\left(\frac{y+1}{x-2}\right) = -1 \Rightarrow x - 2 = 2(y+1)$ ..... (ii)

अतः (i) तथा (ii) से,

$\therefore y = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ तथा $x = 3, 1$

19. (d) माना बिन्दु A, B, C तीन संख्याओं z_1, z_2, z_3 को प्रदर्शित करते हैं तथा P बिन्दु z द्वारा प्रदर्शित होता है।



अब चार बिन्दु A, B, C, P निम्न तीन प्रकार से समान्तर चतुर्भुज बनाते हैं।

(i) A, B, P, C (ii) B, C, P, A एवं (iii) C, A, P, B

स्थिति (i) में, A, B, P, C द्वारा चतुर्भुज बनाने का प्रतिबन्ध है। $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CP}$ अर्थात $z_2 - z_1 = z - z_3$

या $z = z_2 + z_3 - z_1$

इसी प्रकार (ii) तथा (iii) स्थिति में आवश्यक बिन्दु है $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AP}$

या $z_3 - z_2 = z - z_1$ अर्थात् $z = z_3 + z_1 - z_2$

एवं $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BP}$ या $z_1 - z_3 = z - z_2$ अर्थात् $z = z_1 + z_2 - z_3$

20. (b) माना $z = x + iy$, अतः दिया गया समीकरण

$(x+iy)(x-iy) + (2-3i)(x+iy) + (2+3i)(x-iy) + 4 = 0$

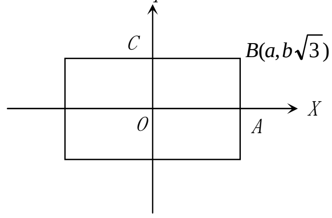
$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 3y - 3ix + 2iy + 2x$

$- 2iy + 3ix + 3y + 4 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0$

अतः दिया गया समीकरण वृत्त प्रदर्शित करता है जिसकी त्रिज्या $= \sqrt{2^2 + 3^2 - 4} = \sqrt{4 + 9 - 4} = \sqrt{9} = 3$.

21. (d) अभीष्ट आयत का क्षेत्रफल = $4 \times OABC$ का क्षेत्रफल



.

$= 4 \times a \times b\sqrt{3} = 4ab\sqrt{3}$.

22. (a) यदि $OP_1P_2P_3$ एक समान्तर चतुर्भुज है, तो P_1P_2 तथा OP_3 के मध्य बिन्दु समान होंगे।

P_1P_2 का मध्यबिन्दु $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ है।

अतः P_3 के निर्देशांक (x_1+x_2, y_1+y_2) हैं।

अतः बिन्दु P_3 सम्मिश्र संख्याओं z_1 व z_2 के योग को प्रदर्शित करता है।

$\overrightarrow{OP}_3 = \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2 = z_1 + z_2$

23. (d) दिया है $\frac{|z-2|}{|z-3|} = 2$

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2} = 2\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4[(x-3)^2+y^2]$

$\Rightarrow x^2+y^2+4-4x = 4x^2+4y^2+36-24x$

$\Rightarrow 3x^2+3y^2-20x+32 = 0$

या $x^2+y^2-\frac{20}{3}x+\frac{32}{3} = 0$ ..... (i)

हम जानते हैं कि वृत्त का मानक समीकरण

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ..... (ii)

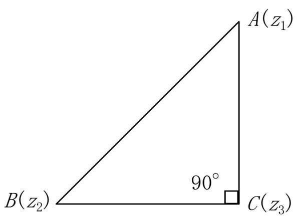
(i) की (ii) से तुलना करने पर

$\Rightarrow 2g = -\frac{20}{3} \Rightarrow g = -\frac{10}{3}, f = 0, c = \frac{32}{3}$

अतः त्रिज्या $= \sqrt{g^2+f^2-c} = \sqrt{\frac{100}{9}-\frac{32}{3}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

24. (d) $BC = AC$ एवं $\angle C = \pi/2$

C के सापेक्ष वामावर्त्त घूर्णन लेने पर, $CB = CA\, e^{i\pi/2}$



$\Rightarrow (z_2-z_3) = (z_1-z_3)e^{i\pi/2} = i(z_1-z_3)$

$\Rightarrow (z_2-z_3)^2 = -(z_1-z_3)^2$

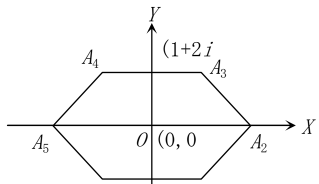
$\Rightarrow z_2^2+z_3^2-2z_2z_3 = -z_1^2-z_3^2+2z_1z_3$

$\Rightarrow z_1^2+z_2^2-2z_1z_2 = 2z_1z_3+2z_2z_3-2z_3^2-2z_1z_2$

$\Rightarrow (z_1-z_2)^2 = 2[(z_1z_3-z_3^2)-(z_1z_2-z_2z_3)]$

$\Rightarrow (z_1-z_2)^2 = 2(z_1-z_3)(z_3-z_2)$.

25. (d) माना मूलबिन्दु O के सापेक्ष समषट्फलक के शीर्ष क्रमशः $z_0, z_1, ..., z_5$ है एवं $|z_0| = \sqrt{5}$.



$\Rightarrow A_0A_1 = |z_1 - z_0| = |z_0e^{i\theta} - z_o|$

$= |z_0||\cos\theta + i\sin\theta - 1|$

$= \sqrt{5}\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}$

$= \sqrt{5}\sqrt{2(1-\cos\theta)} = \sqrt{5}\ 2\sin(\theta/2)$

$\Rightarrow A_0A_1 = \sqrt{5}\,.\,2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{5}\quad \left(\because \theta = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}\right)$ .... (i)

इसी प्रकार $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_0 = \sqrt{5}$. अतः

$= A_oA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_0 = 6\sqrt{5}$.

26. (c) यह एक आधारभूत संकल्पना है।

27. (a) वृत्त का समीकरण $|z-z_0|^2 = r^2$

$\Rightarrow (z-z_0)(\overline{z-z_0}) = r^2 \Rightarrow (z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0) = r^2$

$z\bar{z} - z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0 + z_0\bar{z}_0 = r^2$.

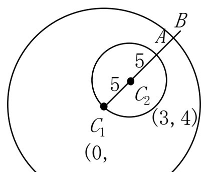
28. (d) $z_2 = z_1e^{2i\pi/3} = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$= \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{3}{4}-\frac{1}{4} = -1$.

29. (b) दो वृत्त जिनके केन्द्र तथा त्रिज्याएें $C_1(0,0), r_1 = 12$, $C_2(3,4), r_2 = 5$ हैं तथा दूसरा वृत्त, C_1 के केन्द्र मूलबिन्दु से होकर जाता है।

$C_1C_2 = 5 < r_1 - r_2 = 7$

अतः वृत्त C_2, वृत्त C_1 में निहित है



अतः इनके बीच की न्यूनतम दूरी

$AB = C_1B - C_1A = r_1 - 2r_2 = 12 - 10 = 2.$

30. (b) $|PQ| = |QR| = |RS| = |SP|$ तथा $\angle PQR = 90^o$.

31. (a) यह आधारभूत संकल्पना है।

32. (b) $|z-2|+|z+2| = 8$

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2} = 8$

$\Rightarrow x^2+y^2+4-4x = 64+x^2+y^2+4+4x$

$-16\sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$\Rightarrow -8x-64 = -16\sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$\Rightarrow (x+8) = 2\sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$\Rightarrow x^2+64+16x = 4[x^2+y^2+4+4x]$

$\Rightarrow 3x^2+4y^2-48 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12} = 1$,

जो कि एक दीर्घवृत्त है।

33. (b) माना $z_1 = 1+3i, z_2 = 5+i$ एवं $z_3 = 3+2i$

तब त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 5 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=0$$

अतः z_1, z_2 एवं z_3 समरेखीय हैं।

34. (a) $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

35. (b) माना $z=x+iy$;

$z+iz=(x-y)+i(x+y)$ एवं $iz=-y+ix$

यदि A, $z, z+iz$ व iz से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल हो, तो

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x & y & 1\\ x-y & x+y & 1\\ -y & x & 1\end{vmatrix}$$

रूपान्तरणों $R_2 \to R_2 - R_1 - R_3$ का प्रयोग करने पर

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x & y & 1\\ 0 & 0 & -1\\ -y & x & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(x^2+y^2)=\frac{1}{2}|z|^2$$

36. (a) दिये गये बिन्दु $A(3+4i), B(5-2i)$ एवं $C(-1+16i)$ हैं

त्रिभुज का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}3 & 4 & 1\\ 5 & -2 & 1\\ -1 & 16 & 1\end{vmatrix}=0$

अतः बिन्दु समरेखीय है।

37. (d) यह आधारभूत संकल्पना है।

38. (d) G के निर्देशांक $\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$ हैं। $z=0$, AG का मध्यबिन्दु है। इसलिये AG के मध्यबिन्दु के निर्देशांक (0, 0) होंगे।

$$\Rightarrow \frac{\frac{z_1+z_2+z_3}{3}+z_1}{1+1}=0 \Rightarrow 4z_1+z_2+z_3=0$$

39. (c) $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=1 \Rightarrow z_1^2+z_2^2=z_1z_2$

$\Rightarrow$ $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3$, जहाँ $z_3=0$

$\Rightarrow$ z_1, z_2 तथा मूलबिन्दु $(\because z_3=0)$ एक समबाहु त्रिभुज बनाते हैं।

40. (a) त्रिभुज का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}|z|^2=18 \Rightarrow |z|=6$.

41. (d) $z_1=1+i \Rightarrow z_1=(1,1)$

$z_2=-2+3i \Rightarrow z_2=(-2,3)$

$z_3=\frac{ai}{3} \Rightarrow z_3=(0, a/3)$

$\because z_1, z_2$ एवं z_3 समरेखीय हैं।

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 3 & 1\\ 0 & a/3 & 1\end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow -\frac{a}{3}(1+2)+1(3+2)=0$$

$\Rightarrow$ $-a+5=0 \Rightarrow a=5$.

42. (c) यह मापांक के गुणधर्म पर आधारित है।

43. (b) शीर्ष $0=0+i0$, $z=x+iy$

एवं $ze^{i\alpha}=(x+iy)(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

$=(x\cos\alpha-y\sin\alpha)+i(y\cos\alpha+x\sin\alpha)$

$\therefore$ क्षेत्रफल

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ x & y & 1\\ (x\cos\alpha-y\sin\alpha) & (y\cos\alpha+x\sin\alpha) & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}[xy\cos\alpha+x^2\sin\alpha-xy\cos\alpha+y^2\sin\alpha]$$

$=\frac{1}{2}\sin\alpha(x^2+y^2)=\frac{1}{2}|z|^2\sin\alpha$ $[\because |z|=\sqrt{x^2+y^2}]$.

44. (d) $z_1=1+2i, z_2=2+3i, z_3=3+4i$

$|z_1-z_2|=|-1-i|=\sqrt{2}$

एवं $|z_2-z_3|=-1-i=\sqrt{2}$.

एवं $|z_1-z_3|=|-2-2i|=2\sqrt{2}$.

अतः शीर्ष समरेखीय हैं।

45. (a) $\left|\frac{z-5i}{z+5i}\right|=1 \Rightarrow \left|\frac{x+i(y-5)}{x+i(y+5)}\right|=1$

$\Rightarrow |x+i(y-5)|=|x+i(y+5)|$, $\left(\because \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\right)$

$\Rightarrow$ $x^2+25-10y+y^2=y^2+x^2+25+10y$

$\Rightarrow$ $20y=0 \Rightarrow y=0$.

46. (a) दिया है $\text{Im}\left(\frac{z+i}{z+2}\right)$

माना $z=x+iy \Rightarrow \frac{x+iy+i}{x+iy+2}=\frac{x+i(y+1)}{(x+2)+iy}$

$=\frac{[x+i(y+1)][(x+2)-iy]}{[(x+2)+iy][(x+2)-iy]}$

$=\left[\frac{x^2+2x+y^2+y}{(x+2)^2+y^2}\right]+i\left[\frac{(y+1)(x+2)-xy}{(x+2)^2+y^2}\right]$

यदि यह एक पूर्ण काल्पनिक है, तो वास्तविक भाग शून्य होना चाहिए

$\Rightarrow$ $\frac{x^2+y^2+2x+y}{(x+2)^2+y^2}=0 \Rightarrow x^2+y^2+2x+y=0$

जो कि एक वृत्त है एवं जिसकी त्रिज्या

$\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{1+\frac{1}{4}-0}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

अतः आर्गंड चित्र एक $\frac{\sqrt{5}}{2}$ त्रिज्या का वृत्त है।

47. (b) $|z+1|=\sqrt{2}|z-1|$

$z=x+iy \Rightarrow |x+iy+1|=\sqrt{2}|x+iy-1|$ रखने पर,

$\Rightarrow |(x+1)+iy|=\sqrt{2}|(x-1)+iy|$

$\Rightarrow$ $(x+1)^2+y^2=2[(x-1)^2+y^2]$

$\Rightarrow$ $x^2+y^2-6x+1=0$.

जो कि एक वृत्त का समीकरण है।

48. (b) हमें ज्ञात है कि $\left|\frac{z-a}{z+\bar{a}}\right|=1$

$\Rightarrow |z-a| = |z+\bar{a}| \Rightarrow |z-a|^2 = |z+\bar{a}|^2$

$\Rightarrow (z-a)\overline{(z-a)} = (z+\bar{a})\overline{(z+\bar{a})}$

$\Rightarrow (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = (z+\bar{a})(\bar{z}+a)$

$\Rightarrow z\bar{z} - z\bar{a} - a\bar{z} + a\bar{a} = z\bar{z} + za + \bar{a}\bar{z} + \bar{a}a$

$\Rightarrow za + z\bar{a} + \bar{a}\bar{z} + a\bar{z} = 0 \Rightarrow (a+\bar{a})(z+\bar{z}) = 0$

$\Rightarrow z + \bar{z} = 0 \ (\because a + \bar{a} = 2\,\text{Re}(a) \neq 0)$

$\Rightarrow 2\,\text{Re}(z) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

जो कि y-अक्ष का समीकरण है।

49. (c) हम जानते हैं कि $|z-1| + |z+1| \le 4$

$\Rightarrow |z-1|^2 + |z+1|^2 + 2|z-1||z+1| \le 16$

$\Rightarrow (z-1)(\bar{z}-1) + (z+1)(\bar{z}+1) + 2|(z-1)(z+1)| \le 16$

$\Rightarrow 2|z|^2 + 2 + 2|z^2-1| \le 16 \Rightarrow |z|^2 + |z^2-1| \le 7$

$\Rightarrow |x+iy|^2 + |(x+iy)^2 - 1| \le 7 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} \le 1$ (दीर्घवृत्त)

अतः बिन्दु z या तो दीर्घवृत्त पर या दीर्घवृत्त के अंदर है।

50. (b) यहाँ $\frac{z-1}{z+1} = \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{(x^2+y^2-1)+2iy}{(x+1)^2+y^2}$

इसलिए $arg\frac{z-1}{z+1} = \tan^{-1}\frac{2y}{x^2+y^2-1}$

अतः $\tan^{-1}\frac{2y}{x^2+y^2-1} = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \frac{2y}{x^2+y^2-1} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow x^2+y^2-1 = \frac{2}{\sqrt{3}}y \Rightarrow x^2+y^2-\frac{2}{\sqrt{3}}y - 1 = 0$

जो कि एक वृत्त है।

51. (b) यहाँ $\frac{2z+1}{iz+1} = \frac{2(x+iy)+1}{i(x+iy)+1} = \frac{(2x+1)+2iy}{(1-y)+ix}$

$= \frac{[(2x+1)(1-y)+2xy] + i[2y(1-y) - x(2x+1)]}{(1-y)^2+x^2}$

लेकिन दिया है कि $\frac{(2z+1)}{(iz+1)}$ का काल्पनिक भाग - 2 है।

$\Rightarrow x + 2y - 2 = 0$. जो कि एक सरल रेखा है।

52. (a) माना $z = x+iy$. तब $x = \lambda + 3$ एवं $y = \sqrt{5-\lambda^2}$

$\Rightarrow (x-3)^2 = \lambda^2$ ...... (i)

एवं $y^2 = 5 - \lambda^2$ ...... (ii)

(i) व (ii) से $(x-3)^2 = 5 - y^2 \Rightarrow (x-3)^2 + y^2 = 5$.

स्पष्टतः यह एक वृत्त है।

53. (c) $|z-3i| = 2$, माना $z = x+iy \Rightarrow |x+i(y-3)| = 2$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, $[x^2 + (y-3)^2] = 4$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$

54. (c) यहाँ $|z - zi| = 1 \Rightarrow |x+iy - i(x+iy)| = 1$

$\Rightarrow |(x+y) + i(y-x)| = 1 \Rightarrow \sqrt{(x+y)^2 + (y-x)^2} = 1$

$\Rightarrow 2(x^2+y^2) = 1$. अतः z वृत्त पर स्थित है।

55. (c) $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1 \Rightarrow |z-1| = |z-i|$

$\Rightarrow |(x-1)+iy| = |x+i(y-1)|$

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$

$\Rightarrow 2x = 2y$ और $x - y = 0$

जो कि सरल रेखा का समीकरण है।

56. (b) $z = (x+iy) \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$\Rightarrow \text{Re}(z^2) = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1$, जो कि अतिपरवलय का समीकरण है।

57. (c) $|z-1| = |z+i| \Rightarrow |x-1+iy|^2 = |x+i(y+1)|^2$

$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y+1)^2$

$\Rightarrow x + y = 0$ अर्थात् यह मूल बिन्दु से जाने वाली सरल रेखा है।

58. (b) $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{|z|^2 - |z| + 1}{2+|z|}\right) < 2$

$\Rightarrow \frac{|z|^2-|z|+1}{2+|z|} < (\sqrt{3})^2 \Rightarrow |z|^2 - 4|z| - 5 < 0$

$\Rightarrow -1 < |z| < 5 \Rightarrow |z| < 5$ क्योंकि $|z| > 0$

$\therefore z$ का बिन्दुपथ $|z| < 5$ है।

59. (d) $arg\{(x-a)+iy\} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{y}{x-a}\right) = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{y}{x-a} = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow x - a = y$

60. (a) $|z-2+i| = |z-3-i|$

$\Rightarrow |(x-2)+i(y+1)| = |(x-3)+i(y-1)|$

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$

$\Rightarrow x^2 + 4 - 4x + y^2 + 1 + 2y = x^2 + 9 - 6x + y^2 + 1 - 2y$

$\Rightarrow 2x + 4y - 5 = 0$.

61. (a) $|iz-1| + |z-i| = 2$

$\Rightarrow |i(x+iy) - 1| + |x+iy-i| = 2$

$\Rightarrow |-(y+1) + ix| + |x+i(y-1)| = 2$

$\Rightarrow \sqrt{(-(y+1))^2 + x^2} + \sqrt{x^2+(y-1)^2} = 2$

$\Rightarrow \sqrt{(y+1)^2+x^2} = 2 - \sqrt{x^2+(y-1)^2}$

$\Rightarrow y^2 + 1 + 2y + x^2 = 4 + x^2 + y^2 + 1 - 2y - 4\sqrt{x^2+(y-1)^2}$

$\Rightarrow 4y = 4 - 4\sqrt{x^2+(y-1)^2} \Rightarrow y = 1 - \sqrt{x^2+(y-1)^2}$

$\Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = (1-y)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 1 - 2y = 1 + y^2 - 2y \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

अर्थात् सरल रेखा का समीकरण है।

62. (d) $\left|z + \frac{i}{2}\right|^2 = \left|z - \frac{i}{2}\right|^2 \Rightarrow \left|x + iy + \frac{i}{2}\right|^2 = \left|x + iy - \frac{i}{2}\right|^2$

$\Rightarrow \left|x + i\left(y + \frac{1}{2}\right)\right|^2 = \left|x + i\left(y - \frac{1}{2}\right)\right|^2$

$\Rightarrow x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow 2y=0$ अर्थात् x-अक्ष.

63. (a) $arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=k \Rightarrow arg\left(\frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy}\right)=k$

$\Rightarrow arg[(x-1)+iy]-arg[(x+1)+iy]=k$

$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{y}{x-1}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{y}{x+1}\right)=k$

$\Rightarrow \tan^{-1}\left[\frac{\frac{y}{(x-1)}-\frac{y}{(x+1)}}{1+\frac{y^2}{x^2-1}}\right]=k$

$\Rightarrow \tan k=\frac{y(x+1)-y(x-1)}{x^2+y^2-1}=\frac{2y}{x^2+y^2-1}$

$\Rightarrow \frac{2y}{\tan k}=x^2+y^2-1 \Rightarrow x^2+y^2-\frac{2y}{\tan k}-1=0$

यह एक वृत्त का समीकरण है जिसका केन्द्र $(-g,-f)=(0,\cot k)$ y-अक्ष पर है।

64. (d) $z-2-3i=x+iy-2-3i=(x-2)+i(y-3)$

$\tan^{-1}\left(\frac{y-3}{x-2}\right)=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{y-3}{x-2}=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$\Rightarrow x-y+1=0.$

65. (b) $|z^2-1|=|z|^2+1$

$\Rightarrow |(x+iy)^2-1|=|x+iy|^2+1$

$\Rightarrow |(x^2-y^2-1)+2xyi|=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+1$

$\Rightarrow \sqrt{(x^2-y^2-1)^2+(2xy)^2}=x^2+y^2+1$

$\Rightarrow x^4+y^4+1-2x^2y^2+2y^2-2x^2+4x^2y^2$

$=x^4+y^4+1+2x^2y^2+2y^2+2x^2$

$\Rightarrow 2x^2y^2=2x^2y^2+4x^2 \Rightarrow x=0$

तब $z=x+iy=0+iy=iy$

अतः z काल्पनिक अक्ष पर स्थित है।

66. (b) $w=\frac{1-iz}{z-i}$, तो $|w|=1$

$\Rightarrow \left|\frac{1-iz}{z-i}\right|=1 \Rightarrow |1-iz|=|z-i|$

$\Rightarrow |1-i(x+iy)|=|x+iy-i|$

$\Rightarrow |(1+y)-ix|=|x+i(y-1)|$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+1+y^2+2y}=\sqrt{x^2+y^2+1-2y} \Rightarrow y=0$

अतः $z=x+iy=x$. इसलिए z वास्तविक अक्ष पर स्थित है।

67. (a) $\frac{|z-5i|}{|z+5i|}=12 \Rightarrow \frac{x^2+(y-5)^2}{x^2+(y+5)^2}=12$

$\Rightarrow x^2+y^2+25-10y=12[x^2+y^2+25+10y]$

$\Rightarrow 11x^2+11y^2+130y+275=0.$

जो कि एक वृत्त का समीकरण प्रदर्शित करता है।

68. (b) $arg\left(\frac{z-2}{z+2}\right)=\frac{\pi}{6}$ में $z=x+iy$ रखने पर

$arg\left(\frac{(x-2)+iy}{(x+2)+iy}\right)=\frac{\pi}{6}$

$arg((x-2)+iy)-arg((x+2)+iy)=\frac{\pi}{6}$

$\tan^{-1}\frac{y}{x-2}-\tan^{-1}\frac{y}{x+2}=\frac{\pi}{6}.$

$\tan^{-1}\left(\frac{\frac{y}{x-2}-\frac{y}{x+2}}{1+\frac{y^2}{x^2-4}}\right)=\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \frac{xy+2y-xy+2y}{x^2+y^2-4}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$=x^2+y^2-4\sqrt{3y}-4=0$

जो कि एक वृत्त का समीकरण है।

69. (a) $\left|\frac{z}{z-\frac{i}{3}}\right|=1 \Rightarrow |z|=\left|z-\frac{i}{3}\right|$

स्पष्टतः, z का बिन्दुपथ बिन्दुओं $0+i0$ तथा $0+\frac{i}{3}$ को मिलाने वाली रेखा का लम्ब समद्विभाजक है।

70. (b) दिया है $|8+z|+|z-8|=16$.

स्पष्टतः z का बिन्दुपथ दीर्घवृत्त है।

71. (c) PQ किरण का समीकरण $\arg(z+1)=\frac{\pi}{4}$

PR किरण का समीकरण $\arg(z+1)=-\frac{\pi}{4}$

छायांकित क्षेत्र $\frac{-\pi}{4}<\arg(z+1)<\frac{\pi}{4}$ है

$|\arg(z+1)|<\frac{\pi}{4}$; $|PQ|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$

$|PA|=2$; $|PR|=2$

अतः QAR उस वृत्त का चाप है जिसकी त्रिज्या 2 इकाई तथा केन्द्र बिन्दु $P(-0,1)$ पर है। छायांकित क्षेत्र में सभी बिन्दु इस वृत्त $|z+1|=2$ के बाहर हैं।

72. (b) $|z-1|=|z-2|=|z-i|$

(i) $|z-1|=|z-i|$

$y=x$, मूलबिन्दु से होकर जाने वाली सरल रेखा प्रदर्शित करती है।

(ii) $|z-1|=|z-2| \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

जो कि सरल रेखा है

(iii) $|z-2|=|z-i| \Rightarrow 4x-2y=3$

जो कि सरल रेखा है

$|z-1|=|z-2|=|z-i|$ त्रिभुज प्रदर्शित कर सकता है।

73. (a) $|z-1|=|z-2|$ से

$\Rightarrow |x+iy-1|=|x+iy-2|$

$\Rightarrow\ (x-1)^2+y^2=(x-2)^2+y^2 \Rightarrow\ x=\frac{3}{2}$

इसी प्रकार $|z-1|=|z-i|$; $x=y$ से

अतः $x=\frac{3}{2}, y=\frac{3}{2}$

इसलिए समीकरण का केवल एक हल है।

74. (b) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$

जब $|z_1-z_2|\le 2a$, तब यह दीर्घवृत्त है।

$z_1=2+3i$ एवं $z_2=-2+6i$

$z_1-z_2=(2+3i)-(-2+6i)=4-3i$

$|z_1-z_2|=|4-3i|$

$=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

लेकिन $5<4$ असत्य है क्योंकि त्रिभुज की किसी दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से कम नहीं होता है।

$\therefore$ $P(z)$ किसी भी बिन्दु का बिन्दुपथ प्रदर्शित नहीं करता है।

75. (d) $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

अब $z=ze^{i\alpha}$

$\alpha=\frac{\pi}{4}$

$\therefore z_1=(\sqrt{2}-i\sqrt{2}).\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\quad \theta=180^\circ$

$z_1=(2,0)$

डी मोयवर प्रमेय तथा इकाई के मूल

1. (c) $\sqrt{i}=(i)^{1/2}=\left[\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right]^{1/2}$

$=\left[\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right]^{1/2}$ (जहाँ $n\in I$)

$=\left[\cos\frac{1}{2}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\frac{1}{2}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

(डी मोयवर प्रमेय से)

$=[\cos\frac{4n\pi+\pi}{4}+i\sin\frac{4n\pi+\pi}{4}]$

$n=0$, 1 रखने पर

$\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

एवं $\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}=-\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$

अतः $\sqrt{i}=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

ट्रिक : विकल्पों का वर्ग करने पर यहाँ (c) i का वर्गमूल है क्योंकि $\left(\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$ का वर्ग करने पर i प्राप्त होता है।

2. (c) $x_1, x_2, x_3.....$ अनन्त तक

$\infty=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2^2}+i\sin\frac{\pi}{2^2}\right)\cdots$. अनन्त तक

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2^2}+.....\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2^2}+.....\right)$

$=\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)=\cos\pi+i\sin\pi=-1$.

3. (d) $\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^4}{(\sin\theta+i\cos\theta)^5}=\frac{(\cos+i\sin\theta)^4}{i^5\left(\frac{1}{i}\sin\theta+\cos\theta\right)^5}$

$=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^4}{i(\cos\theta-i\sin\theta)^5}=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^4}{i(\cos\theta+i\sin\theta)^{-5}}$ (गुणधर्म द्वारा)

$=\frac{1}{i}(\cos\theta+i\sin\theta)^9=\sin 9\theta-i\cos 9\theta$.

4. (b) दिया है $z=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)^5$

$=\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^5+\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^5$

$=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{6}-i\sin\frac{5\pi}{6}$.

अतः Im (z) = 0.

5. (a) डी मोयवर प्रमेय का उपयोग करने पर,

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ एवं $n=0$ 1, 2 रखने पर, अभीष्ट मूल प्राप्त होते हैं।

6. (d) $\frac{4(\cos 75^o+i\sin 75^o)}{0.4(\cos 30^o+i\sin 30^o)}$

$=10(\cos 75^o+i\sin 75^o)(\cos 30^o-i\sin 30^o)$

$=10(\cos 45^o+i\sin 45^o)=\frac{10}{\sqrt{2}}(1+i)$

7. (c)

$\sin\theta-i\cos\theta=-i^2\sin\theta-i\cos\theta=-i(\cos\theta+i\sin\theta)$

दिया गया व्यंजक है।

$(-i)^3[\cos(-10\theta-18\theta+3\theta)+i\sin(-25\theta)]$

$=i(\cos 25\theta-i\sin 25\theta)$.

8. (a) $a=\sqrt{2i}=\sqrt{2}\,i^{1/2}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=1+i$

ट्रिक : विकल्पों द्वारा जाँच करें।

9. (c) $(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$

$......(\cos n\theta+i\sin n\theta)=1$

$\Rightarrow$

$\cos(\theta+2\theta+3\theta+...+n\theta)+i\sin(\theta+2\theta+.+n\theta)=1$

$\Rightarrow\ \cos\left(\frac{n(n+1)}{2}\theta\right)+i\sin\left(\frac{n(n+1)}{2}\theta\right)=1$

$\cos\left(\frac{n(n+1)}{2}\theta\right)=1$ व $\sin\left(\frac{n(n+1)}{2}\theta\right)=0$

$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}\theta = 2m\pi \Rightarrow \theta = \frac{4m\pi}{n(n+1)}$, जहाँ $m \in I$.

10. (b) L. H. S. $=\left[\frac{2\cos^2(\phi/2)+2i\sin(\phi/2)\cos(\phi/2)}{2\cos^2(\phi/2)-2i\sin(\phi/2)\cos(\phi/2)}\right]^n$

$=\left[\frac{\cos(\phi/2)+i\sin(\phi/2)}{\cos(\phi/2)-i\sin(\phi/2)}\right]^n = \left[\frac{e^{i(\phi/2)}}{e^{-i(\phi/2)}}\right]^n = (e^{i\phi})^n$

$=\cos n\phi + i\sin n\phi$.

11. (d) $D^r = i(1+\cos\theta)+\sin\theta = 2i\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$\therefore$ L. H. S $=\left[\frac{\cos(\theta/2)+i\sin(\theta/2)}{i\cos(\theta/2)+\sin(\theta/2)}\right]^4$

=

$\frac{1}{i^4}(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$.

12. (a) $\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2^2}+i\sin\frac{\pi}{2^2}\right).....\infty$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2^2}+.....\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2^2}+....\right)$

$=\cos\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+.....\right)+i\sin\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+.....\right)$

$=\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)+i\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=\cos\pi + i\sin\pi = -1$

13. (d) $\left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\sin\theta+i\cos\theta}\right)^4 = \frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^4}{i^4(\cos\theta-i\sin\theta)^4} = \frac{\cos 4\theta+i\sin 4\theta}{\cos 4\theta - i\sin 4\theta}$

$=\frac{(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)}{(\cos 4\theta-i\sin 4\theta)(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)}$

$\frac{(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)^2}{\cos^2 4\theta+\sin^2 4\theta}=\cos 8\theta + i\sin 8\theta$

14. (b) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$ ......(i)

$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$ ......(ii)

माना $a=\cos\alpha+i\sin\alpha,\ b=\cos\beta+i\sin\beta$

$c=\cos\gamma+i\sin\gamma$

$\Rightarrow a+b+c=0$ [(i)व (ii)] से .....(iii)

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

$=[\cos\alpha+i\sin\alpha]^{-1}+[\cos\beta+i\sin\beta]^{-1}+[\cos\gamma+i\sin\gamma]^{-1}$

$=\cos\alpha-i\sin\alpha+\cos\beta-i\sin\beta+\cos\gamma-i\sin\gamma$

$\Rightarrow ab+bc+ca=0$ ....(iv) [(i) व (ii) से]

समीकरण (iii) के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=0$

या $a^2+b^2+c^2=0$ [(iv) द्वारा]

$\therefore[\cos\alpha+i\sin\alpha]^2+[\cos\beta+i\sin\beta]^2+[\cos\gamma+i\sin\gamma]^2=0$

$\Rightarrow(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma)$
$+i(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)=0$

वास्तविक एवं काल्पनिक भाग की तुलना करने पर,

$\Rightarrow \cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=0$ .....(v)

एवं $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=0$ .....(vi)

$\Rightarrow 1-2\sin^2\alpha+1-2\sin^2\beta+1-2\sin^2\gamma=0$

[समीकरण (v) से]

$\therefore \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\frac{3}{2}$.

15. (c) उपरोक्त प्रश्न का हल देखें।

16. (c) $(-\sqrt{3}+i)^{53} = 2^{53}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{53}$

$= 2^{53}(\cos 150^o + i\sin 150^o)^{53}$

$=2^{53}[\cos(150^o\times 53)+i\sin(150^o\times 53)]$

$=2^{53}[\cos(22\pi+30^o)+i\sin(22\pi+30^o)]$

$=2^{53}[\cos 30^o+i\sin 30^o]=2^{53}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right]$.

17. (b) माना $\cos\frac{\pi}{10}-i\sin\frac{\pi}{10}=z$ और $\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{z}$

अतः $\left(\frac{1-z}{1-\frac{1}{z}}\right)^{10}=\left\{\frac{-(z-1)z}{(z-1)}\right\}^{10}=(-z)^{10}$

$=z^{10}=\left(\cos\frac{\pi}{10}-i\sin\frac{\pi}{10}\right)^{10}=\cos\pi - i\sin\pi = -1$.

18. (a) $\frac{(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)^{-5}}{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^{-2}(\cos 3\theta-i\sin 3\theta)^{-9}}$

$=\frac{[(\cos\theta+i\sin\theta)^{-2}]^4[(\cos\theta+i\sin\theta)^4]^{-5}}{[(\cos\theta+i\sin\theta)^3]^{-2}[(\cos\theta+i\sin\theta)^{-3}]^{-9}}$

$=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{-8}(\cos\theta+i\sin\theta)^{-20}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{-6}(\cos\theta+i\sin\theta)^{27}}$

$=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-8-20+6-27}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-49}$

$=\cos 49\theta - i\sin 49\theta.$

19. (c) $(\sin\theta+i\cos\theta)^n=\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]^n$

$= \cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$.

20. (b) $\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)}{(\cos\gamma+i\sin\gamma)(\cos\delta+i\sin\delta)}$

$=\cos(\alpha+\beta-\gamma-\delta)+i\sin(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$

[डी मोयवर प्रमेय से]

21. (a) $\left[\frac{1+\cos(\pi/8)+i\sin(\pi/8)}{1+\cos(\pi/8)-i\sin(\pi/8)}\right]^8$

$=\left[\frac{2\cos^2(\pi/16)+2i\sin(\pi/16)\cos(\pi/16)}{2\cos^2(\pi/16)-2i\sin(\pi/16)\cos(\pi/16)}\right]^8$

$=\frac{[\cos(\pi/16)+i\sin(\pi/16)]^8}{[\cos(\pi/16)-i\sin(\pi/16)]^8}$

$=\left[\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right]^8\left[\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right]^8$

$=[\cos(\pi/16)+i\sin(\pi/16)]^{16}$

$=\cos 16\left(\frac{\pi}{16}\right)+i\sin 16\left(\frac{\pi}{16}\right) = \cos\pi=-1$.

22. (a) $x_1.x_2.x_3......\infty$

$=\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$\left[\cos\left(\frac{\pi}{4^2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4^2}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{\pi}{4^3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4^3}\right)\right].....\infty$

$=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4^2}+\frac{\pi}{4^3}+....\infty\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4^2}+\frac{\pi}{4^3}+.....\infty\right)$

$=\cos\left(\frac{\pi/4}{1-1/4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi/4}{1-1/4}\right)$

$=\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$.

23. (c) $\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^4}{(\sin\beta+i\cos\beta)^5} = \frac{\cos 4\alpha+i\sin 4\alpha}{i^5(\cos\beta-i\sin\beta)^5}$

$=-i(\cos 4\alpha+i\sin 4\alpha)(\cos\beta-i\sin\beta)^{-5}$

$=-i[\cos 4\alpha+i\sin 4\alpha]\,[\cos 5\beta+i\sin 5\beta]$

$=-i[\cos(4\alpha+5\beta)+i\sin(4\alpha+5\beta)]$

$=\sin(4\alpha+5\beta)-i\cos(4\alpha+5\beta)$.

24. (a)

$i^{1/3}=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{1/3}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$.

25. (c) माना $z=(1+i\sqrt{3})$

$r=\sqrt{3+1}=2$ एवं $r\cos\theta=1,\ r\sin\theta=\sqrt{3}$

$\tan\theta=\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$.

$z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow z^{100}=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{100}$

$=2^{100}\left(\cos\frac{100\pi}{3}+i\sin\frac{100\pi}{3}\right)$

$=2^{100}\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2^{100}\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore \frac{\text{Re}(z)}{\text{Im}(z)}=\frac{-1/2}{-\sqrt{3}/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

26. (a) $\left(\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}\right)^n=\left(\frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}\right)^n$

(जहाँ $\alpha=\frac{\pi}{2}-\theta$)

$=\left(\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^n=\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-i\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^n$

$=\left(\frac{cis\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{cis\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^n=\left\{cis\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right\}^n=cis(n\alpha)$

$=cis\, n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=cis\left(\frac{n\pi}{2}-n\theta\right)$

$=\cos\left(\frac{n\pi}{2}-n\theta\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{2}-n\theta\right)$.

27. (c) $(1+i)^n+(1-i)^n$

$=(2)^{n/2}\left\{\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right\}$

$=2^{\frac{n}{2}}.2\cos\frac{n\pi}{4}=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}=(\sqrt{2})^{n+2}\cos\frac{n\pi}{4}$.

28. (a) $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$

$\Rightarrow x^2-2x\cos\theta+1=0 \quad \Rightarrow x=\cos\theta\pm i\sin\theta$

$\Rightarrow x^n=\cos n\theta\pm i\sin n\theta \quad \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{\cos\theta\pm i\sin\theta}$

$\Rightarrow \frac{1}{x}=\cos\theta\mp i\sin\theta \quad \Rightarrow \frac{1}{x^n}=\cos n\theta\mp i\sin n\theta$

अतः $x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\theta$.

29. (b) $iz^4=-1$

$z^4=\frac{-1}{i}\Rightarrow z^4=i\Rightarrow z=(i)^{1/4}$

$z=(0+i)^{1/4}$

$z=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{1/4}$

$z=\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$ (डी मोयवर प्रमेय के प्रयोग से)

30. (d) $\because (\omega)^2=\omega^2$ एवं $(\omega^2)^2=\omega^4=\omega\omega^3=\omega$

31. (d) यदि ω इकाई का एक सम्मिश्र घनमूल हो, तो $\omega^3=1$ एवं $1+\omega+\omega^2=0$, इसलिए $(1+\omega-\omega^2)(1-\omega+\omega^2)$

$=(-2\omega^2)(-2\omega)=4$

32. (c) माना $x=27^{1/3}$ $=x^3-27=0$

$\Rightarrow (x-3)(x^2+3x+9)=0$

$x=3, x=3\left(\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)$. अतः मूल $3, 3\omega, 3\omega^2$ हैं

ट्रिक : चूँकि हम जानते हैं कि $(27)^{1/3}$ के तीन मूल होते हैं। अतः विकल्प (a) नहीं हो सकता है। यहाँ (c) संतुष्ट करेगा।

33. (c) माना $n = 3k+1$

$\omega^n + \omega^{2n} = \omega^{3k+1} + \omega^{2(3k+1)} = \omega^{3k}\omega + \omega^{6k}\omega^2$

$= (\omega^3)^k.\omega + (\omega^3)^{2k}.\ \omega^2 = \omega + \omega^2 = -1$

अतः $1 + \omega^n + \omega^{2n} = 1 - 1 = 0$

34. (b) इकाई के सम्मिश्र मूल एक दूसरे के वर्ग होते हैं।

35. (a) $(1+\omega)^3 - (1+\omega^2)^3 = (-\omega^2)^3 - (-\omega)^3$

$= -\omega^6 + \omega^3 = -\omega^3\omega^3 + \omega^3 = -1 + 1 = 0$

36. (b) इकाई के सम्मिश्र घनमूल $1, \omega, \omega^2$ हैं।

माना $\alpha = \omega,\ \beta = \omega^2$; तब $\alpha^4 + \beta^4 + \alpha^{-1}\beta^{-1}$

$= \omega^4 + (\omega^2)^4 + (\omega^{-1})\,(\omega^2)^{-1} = \omega + \omega^2 + 1 = 0$.

37. (d) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)$

$= (1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2) = (1-\omega)^2(1-\omega^2)^2$

$= (-3\omega)(-3\omega^2) = 9\omega^3 = 9$.

38. (b) $(1-\omega+\omega^2)^5 + (1+\omega-\omega^2)^5$

$= (-2\omega)^5 + (-2\omega^2)^5 = -32\omega^3\omega^2 - 32(\omega^3)^3\omega$

$= -32(\omega^2+\omega) = -32(-1) = 32$

39. (c) दिया है $x = a, y = b\omega, z = c\omega^2$

तब $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{a}{a} + \frac{b\omega}{b} + \frac{c\omega^2}{c} = 1 + \omega + \omega^2 = 0$

40. (c) $(x-y)(x\omega - y)(x\omega^2 - y)$

$= (x^2\omega - xy - xy\omega + y^2)(x\omega^2 - y)$

$= x^3 - x^2y(1+\omega+\omega^2) + xy^2(1+\omega+\omega^2) - y^3$

$= x^3 - y^3 \qquad (\because 1+\omega+\omega^2 = 0)$

41. (b) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)......$ $2n$ गुणनखण्डों तक

$= (-\omega^2)(-\omega)(1+\omega)(1+\omega^2).....$ $2n$ गुणनखण्डों तक

$= 1.1.1.....$ n गुणनखण्डों तक $= 1$

42. (b) दिया है $\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]^{3/4} = [\cos\pi + i\sin\pi]^{1/4}$.

$\because$ व्यंजक के केवल 4 विभिन्न मूल हैं अतः $n = 0, 1, 2, 3$

रखने पर, $\cos\left[\frac{2n\pi+\pi}{4}\right] + i\sin\left[\frac{2n\pi+\pi}{4}\right]$ एवं इनका

गुणा करने पर $= \left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right]$

$\left[\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right]\left[\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right]$

$= \left[\frac{1}{\sqrt2} + i\frac{1}{\sqrt2}\right]\left[-\frac{1}{\sqrt2} + i\frac{1}{\sqrt2}\right]\left[-\frac{1}{\sqrt2} + i\frac{-1}{\sqrt2}\right]\left[\frac{1}{\sqrt2} - i\frac{1}{\sqrt2}\right]$

$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = (-1)(-1) = 1$.

43. (d) दिया है $\begin{vmatrix} x+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & x+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = 0$

रूपान्तरण $R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ का प्रयोग करने पर,

$x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega & x+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x+\omega^2)(x+\omega) - 1 + \omega^2 - \omega(x+\omega) + \omega$

$- \omega^2(x+\omega^2) = 0$

$\Rightarrow\ x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

ट्रिक : $x = 0$ रखने पर, $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0$

44. (b) यदि $x = a+b, y = a\alpha + b\beta$ एवं $z = \alpha\beta + b\alpha$

तब $xyz = (a+b)(a\omega + b\omega^2)(a\omega^2 + b\omega)$, जहाँ $\alpha = \omega$ एवं

$\beta = \omega^2 \quad = (a+b)(a^2 + ab\omega^2 + ab\omega + b^2)$

$= (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

ट्रिक : $a = b = 2$ रखने पर

तब $x = 4, y = 2(\omega + \omega^2) = -2$ एवं $z = 2(\omega^2 + \omega) = -2$

$\therefore\ xyz = 4(-2)(-2) = 16$ एवं (b) अर्थात् $a^3 + b^3 = 16$.

45. (b) हम जानते हैं कि

$x^3 + y^3 + z^3 = (a+b)^3 + (a\omega + b\omega^2)^3 + (a\omega^2 + b\omega)^3$

$= 3a^3 + 3b^3 + 3(a^2b + ab^2)(1 + \omega^2\omega^2 + \omega\omega^4)$

$= 3a^3 + 3b^3 + 3(a^2b + ab^2)(1 + \omega + \omega^2) \ = 3(a^3 + b^3)$

ट्रिक : उपरोक्त प्रश्न की तरह

$x^3 + y^3 + z^3 = (4)^3 + (-2)^3 + (-2)^3 = 48$ एवं (b)

अर्थात् $3(a^3 + b^3) = 48$

46. (b) क्रमशः I व II व्यंजकों के अंश व हर को क्रमशः ω व ω^2 से गुणा करने पर,

$= \frac{a + b\omega + c\omega^2}{b + c\omega + a\omega^2} + \frac{a + b\omega + c\omega^2}{c + a\omega + b\omega^2}$

$= \frac{\omega(a + b\omega + c\omega^2)}{(b\omega + c\omega^2 + a)} + \frac{\omega^2(a + b\omega + c\omega^2)}{(c\omega^2 + a + a\omega)} = \omega + \omega^2 = -1$

47. (a) इकाई के घनमूल $1, \omega, \omega^2$ हैं। हम जानते हैं कि यदि z_1, z_2, z_3 आर्गन्ड तल में समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हों, तो

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$

यदि $z_1 = 1, z_2 = \omega, z_3 = \omega^2$ लें तो

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1 + \omega^2 + \omega^4 = 0$

एवं $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 1.\omega + \omega.\omega^2 + \omega^2.1$

$= \omega + \omega^3 + \omega^2 = 1 + \omega + \omega^2 = 0$

इस प्रकार $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$

अतः त्रिभुज समबाहु है।

नोट : विद्यार्थी इस प्रश्न को तथ्य की तरह याद रखें।

48. (c) यहाँ $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt3$ दो में से एक इकाई का काल्पनिक मूल है, यदि हम उसे ω से प्रदर्शित करें।

तब $\omega^{1000} = \omega^{999}\omega = (\omega^3)^{333}\omega = \omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt3}{2}i$.

49. (a) $\because p<0$. माना $p=-q$, जहाँ q धनात्मक है।

इसलिए $p^{1/3}=-q^{1/3}(1)^{1/3}$.

अतः $\alpha=-q^{1/3}$, $\beta=-q^{1/3}\omega$ एवं $\gamma=-q^{1/3}\omega^2$

दिया गया व्यंजक

$$\frac{x+y\omega+z\omega^2}{x\omega+y\omega^2+z}=\frac{1}{\omega}.\frac{z\omega+y\omega^2+z}{x\omega+y\omega^2+z}=\frac{1}{\omega}=\omega^2.$$

50. (a) दिया है $z=\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$\Rightarrow iz=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\omega$

अब $z^{69}=z^{4(17)}z=(iz)^{4(17)}z=(\omega)^{68}z$, $(\because i^{4n}=1)$

$=\frac{\omega^{69}}{i}=\frac{(\omega^3)^{23}}{i}=\frac{1}{i}=-i$

वैकल्पिक : $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow z^{69}=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{69}=\cos\frac{69\pi}{6}+i\sin\frac{69\pi}{6}$

$=\cos\left(11\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(11\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0+i(-1)=-i$.

51. (b) दिया गया समीकरण, $x^4-1=0$

$\Rightarrow (x^2-1)(x^2+1)=0$

$\Rightarrow x^2=1$ एवं $x^2=-1 \Rightarrow x=\pm1,\pm i$

52. (d) गुणनफल निम्नप्रकार से दिया जाता है

$\omega.\omega^2.\omega^3.....\omega^n=\omega^{1+2+3+......+n}=\omega^{n(n+1)/2}$

$n=1,2,3,.....,$ रखने पर,

$\omega^{1(1+1)/2}=\omega,\omega^{2(2+1)/2}=\omega^3=1,.....\omega^{4(5)/2}=\omega^{10}=\omega$

अतः यह केवल ω व 1 मान ही देगा।

53. (a) यह स्पष्ट है क्योंकि इकाई के घनमूल

$1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

54. (c) $(1+\omega)^7=A+B\omega \Rightarrow(-\omega^2)^7=A+B\omega$

$\Rightarrow \omega^{14}=-A-B\omega$

$\Rightarrow \omega^2.\omega^{12}=-A-B\omega\Rightarrow A+B\omega+\omega^2=0$

$\Rightarrow A=1,B=1$ $(\because 1+\omega+\omega^2=0)$

55. (a) $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1+i+\omega^2 & \omega^2\\ 1-i & -1 & \omega^2-1\\ -i & -i+\omega-1 & -1\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}1 & i-\omega & \omega^2\\ 1-i & -1 & \omega^2-1\\ -i & -i+\omega-1 & -1\end{vmatrix}$ ($R_2\to R_2-R_1$ से)

$=0$ ($\because$ दो पंक्तियाँ सर्वसम हैं)

56. (b) $x^n=1=(\cos 0+i\sin 0^o)=\cos 2r\pi+i\sin 2r\pi=e^{i2r\pi}$

$\Rightarrow x=e^{i(2r\pi/n)},r=0,1,2\,\cdots\cdots.$

स्पष्टतः मूल $1,e^{2\pi i/n},e^{4\pi i/n}$ हैं जो कि स्पष्टतः गुणोत्तर श्रेणी में है जिसका सार्वानुपात $e^{2\pi i/n}$ है।

57. (a) $(3+\omega^2+\omega^4)^6=(3+\omega^2+\omega)^6=(3-1)^6=64$

58. (b) $\omega^4=\omega,\omega^8=\omega^2$ इत्यादि। तीसरा, पांचवा, सातवां प्रत्येक गुणनखण्ड प्रथम के बराबर है तथा चौथा, छठवाँ, आठवाँ प्रत्येक गुणनखण्ड द्वितीय के बराबर है।

L. H. S $=(-2\omega)(-2\omega^2)(-2\omega)(-2\omega^2).....$ $2n$ तक

$=(2^2\omega^3)(2^2\omega^3)......$ n गुणनखण्ड़ों तक

$=(2^2)^n=2^{2n}$

59. (a) $\Delta=\begin{vmatrix}1 & \omega & 2\omega^2\\ 2 & 2\omega^2 & 4\omega^3\\ 3 & 3\omega^3 & 6\omega^4\end{vmatrix}=2\omega\begin{vmatrix}1 & \omega & \omega\\ 2 & 2\omega^2 & 2\omega^2\\ 3 & 3\omega^3 & 3\omega^3\end{vmatrix}=0$

60. (a) $z^n=(1+z)^n \Rightarrow\left(\frac{z}{z+1}\right)^n=1$

$\Rightarrow \frac{z}{z+1}=1^{1/n}\Rightarrow \frac{z}{z+1}$ इकाई का n वाँ मूल है

$\Rightarrow \left|\frac{z}{z+1}\right|=1\Rightarrow\frac{|z|}{|z+1|}=1\Rightarrow |z|=|z+1|$

$\Rightarrow x+\frac{1}{2}=0\Rightarrow x=\frac{-1}{2}\Rightarrow \text{Re}(z)<0$.

61. (a) $1+\omega+\omega^2+.....+\omega^{n-1}=\left(\frac{\omega^n-1}{\omega-1}\right)=0$, $(\because \omega^n=1)$

62. (d) इकाई के n वें मूल निम्न द्वारा दिये जाते हैं

$z_k=e^{\frac{i2\pi(k-1)}{n}}$, $(k=1,2....,n)$

$\therefore |z_k|=\left|e^{\frac{i2\pi(k-1)}{n}}\right|=1$ सभी $k=1,2,.....,n$ के लिए

$\Rightarrow |z_k|=|z_{k+1}|$ सभी $k=1,2.....,n$ के लिए।

63. (a) **ट्रिक :** $a=1,b=1,c=-2$ रखने पर,

$\because a+b+c=0$

$\therefore (1+\omega-2\omega^2)^3+(1+\omega^2-2\omega)^3$

$=(-3\omega^2)^3+(-3\omega)^3=-27-27=-54$

साथ ही विकल्प (a) यही मान देता है। $27\times1\times1(-2)=-54$

64. (c)

$x^{12}-1=(x^6+1)(x^6-1)=(x^6+1)(x^2-1)(x^4+x^2+1)$

उभयनिष्ठ मूल $x^4+x^2+1=0$ द्वारा प्राप्त होता है।

$\therefore x^2=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=\omega,\omega^2$ या ω^4,ω^2 $(\because \omega^3=1)$

या $x=\pm\omega^2,\pm\omega$

65. (a) $z_1=1,z_2=i,z_3=-1,z_4=-i$

$\therefore 1^3+(i)^3+(-1)^3+(-i)^3=0$.

66. (b) $\because \alpha$ इकाई का काल्पनिक घनमूल है, माना यह ω है तब $(\omega)^{3n+1}+(\omega)^{3n+3}+\omega^{3n+5}$

$=\omega+1+\omega^5$, $\{\because \omega^{3n}=1$ एवं $\omega^3=1\}$

$=\omega+1+\omega^2=0$

67. (d) $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\omega$ एवं $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\omega^2$

$\therefore\ (\omega)^{20}+(\omega^2)^{20}=\omega^{18}.\omega^2+\omega^{39}.\omega=\omega^2+\omega=-1$

68. (c) $\because \alpha$ तथा β इकाई के सम्मिश्र मूल हैं, हम $\alpha=\omega, \beta=\omega^2$ मान सकते हैं।

अतः $\alpha^4+\beta^{28}+\frac{1}{\alpha\beta}=\omega^4+(\omega^2)^{28}+\frac{1}{\omega.\omega^2}$

$=\omega+\omega^{56}+1=\omega+\omega^2+1=0$

69. (c) $(3+5\omega+3\omega^2)^2+(3+3\omega+5\omega^2)^2$

$=(3+3\omega+3\omega^2+2\omega)^2+(3+3\omega+3\omega^2+2\omega^2)^2$

$(1+\omega+\omega^2=0, \omega^3=1)$

$=(2\omega)^2+(2\omega^2)^2=4\omega^2+4\omega^4=4(-1)=-4$.

70. (c) दिया है $\sin\left[(\omega^{10}+\omega^{23})\pi-\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left[(\omega+\omega^2)\pi-\frac{\pi}{4}\right]$

$=\sin\left(-\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

71. (a)

$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6+\left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right)^6=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2i}\right)^6+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2i}\right)^6$

$=\frac{1}{i^6}[(\omega)^6+(\omega^2)^6]=-[(\omega^3)^2+(\omega^3)^4]$

$\left(\because\ \omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$

$=-(1+1)=-2$.

72. (d) $(1+\omega-w^2)^7=(1+\omega+\omega^2-2\omega^2)^7=(-2\omega^2)^7$

$=-128\,\omega^{14}=-128\,\omega^{12}\omega^2=-128\,\omega^2$

73. (a) $2^{15}\left[\frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{15}}{(1-i)^{20}}+\frac{\left(\frac{-1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{15}}{(1+i)^{20}}\right]$

$=\ 2^{15}\left[\frac{\omega^{15}}{(1-i)^{20}}+\frac{\omega^{30}}{(1+i)^{20}}\right]=2^{15}\left[\frac{1}{(1-i)^{20}}+\frac{1}{(1+i)^{20}}\right]$

$=\ 2^{15}\left[\frac{(1+i)^{20}+(1-i)^{20}}{(1-i^2)^{20}}\right]=\frac{2^{15}}{2^{20}}[(1+i)^{20}+(1-i)^{20}]$

$=\ \frac{1}{2^5}[(i-i^2)^{20}+(1-i)^{20}]\ =\ \frac{1}{2^5}(i^{20}+1)(1-i)^{20}$

$=\frac{2}{2^5}(1-i)^{20}\ =\ \frac{1}{2^4}(1-i)^{20}=\ \frac{1}{2^4}[(1-i)^2]^{10}$

$=\frac{1}{2^4}[1+i^2-2i]^{10}=\frac{1}{2^4}(-2i)^{10}$

$=\ \frac{(-2)^{10}\,i^{10}}{2^4}=-2^6=-64$.

74. (a) $\omega+\omega^{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{9}{32}+\frac{27}{128}+.....\right)}\ \Rightarrow\ \omega+\omega^{\left(\frac{1/2}{1-3/4}\right)}$

$\Rightarrow\ \omega+\omega^2=-1\qquad[\because 1+\omega+\omega^2=0]$

75. (c) $(3+\omega+3\omega^2)^4=(-3\omega+\omega)^4\quad[\because \omega+\omega^2=-1]$

$=\ (-2\omega)^4=16\omega^4=16\omega$.

76. (c) $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega)^6=(-2\omega)(-2\omega^2)^6=-128\,\omega.$

77. (d) $1.\omega.\omega^2=\omega^3=1.$

78. (c) $z=\frac{\sqrt{3}+i}{-2}\ \Rightarrow\ iz=-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=-\omega$

$\Rightarrow\qquad z=\frac{-\omega}{i}=i\omega\ \Rightarrow\ z^{69}=i^{69}.\omega^{69}=i$

$(\because \omega^{3n}=i^{4n}=1)$

79. (c) $\omega_n=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

$\Rightarrow \omega_3=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}=\omega$

एवं $\omega_3^2=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$

$=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}=\omega^2.$

$\therefore\ (x+y\omega_3+z\omega_3^2)(x+y\omega_3^2+z\omega_3)$

$=(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)$

$=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$.

80. (d) $z+z^{-1}=1\Rightarrow z^2-z+1=0\Rightarrow z=-\omega$ या $-\omega^2$

$z=-\omega$ के लिये, $z^{100}+z^{-100}=(-\omega)^{100}+(-\omega)^{-100}$

$=$

$\omega+\frac{1}{\omega}=\omega+\omega^2=-1$

$z=-\omega^2$ के लिये, $z^{100}+z^{-100}=(-\omega^2)^{100}+(-\omega^2)^{-100}$

$=\omega^{200}+\frac{1}{\omega^{200}}=\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\omega^2+\omega=-1.$

81. (c) $x^4-x^3+x-1=0\ \Rightarrow\ x^3(x-1)+1(x-1)=0$

$x-1=0$ या $x^3+1=0\ \Rightarrow x=1,-1,\frac{1+\sqrt{3}i}{2},\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

अतः इसके वास्तविक मूल 1 एवं - 1 हैं।

82. (c) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)=\frac{-2+i2\sqrt{3}}{4}$

$=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\omega$

$\therefore \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^n = \omega^n = \omega^3 = 1 \Rightarrow n = 3$.

83. (a) $[(1+\omega+\omega^2)+\omega]^{3n} - [(1+\omega+\omega^2)+\omega^2]^{3n}$

$= \omega^{3n} - (\omega^2)^{3n} = (\omega^3)^n - (\omega^3)^{2n} = 1^n - 1^{2n} = 0$.

84. (a) $(a+b)(a+b\omega)(a+b\omega^2)$

$= (a+b)(a^2 + ab(\omega+\omega^2) + b^2\omega^3)$

$= (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

85. (b) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

अब $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/4} = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{1/4}$

$= \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = cis\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

86. (d) $(8)^{1/3} = x \Rightarrow x^3 - 8 = 0$

$\Rightarrow (x-2)(x^2+2x+4) = 0$.

$\Rightarrow x = 2, 2\omega, 2\omega^2$ या $x = 2, -1+i\sqrt{3}, -1-i\sqrt{3}$.

87. (d) $225 + (3\omega + 8\omega^2)^2 + (3\omega^2 + 8\omega)^2$

$= 225 + (5\omega^2 - 3)^2 + (5\omega - 3)^2 = 225 + 18 - 5(\omega + \omega^2)$

$= 225 + 18 - 5(-1) = 225 + 18 + 5 = 248$.

88. (a) $\Delta = (\omega^{3n} - 1) + \omega^n(\omega^{2n} - \omega^{2n}) + \omega^{2n}(\omega^n - \omega^{4n})$

$\Delta = (1-1) + 0 + \omega^{2n}[\omega^n - (\omega^3)^n\omega^n]$

$\Delta = 0 + 0 + 0 = 0$.

89. (c) $(3 + \omega + 3\omega^2)^4 = [(3 + 3\omega^2 + \omega)^4]$

$= [3(1+\omega^2) + \omega]^4 = [3(-\omega) + \omega]^4$

$= [-2\omega]^4 = 16\omega^4 = 16\omega$.

90. (a) $(1 - 2\omega + \omega^2)^6 = (1 + \omega^2 - 2\omega)^6$

$= (-\omega - 2\omega)^6 = (-3\omega)^6$

$= (-3)^6(\omega^3)^2$ $[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0, \omega^3 = 1]$

$= 729$.

91. (d) $\omega^{99} + \omega^{100} + \omega^{101}$

$= \omega^{99}[1 + \omega + \omega^2]$ $[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0, \omega^3 = 1]$

$= 0$.

92. (a) $\sin^{-1}(e^{i\theta}) = x + iy$

$\Rightarrow \sin(x+iy) = e^{i\theta}$

$\Rightarrow \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y = \cos\theta + i\sin\theta$

तुलना करने पर, $\cosh y = \frac{\cos\theta}{\sin x}$;

$\sinh y = \frac{\sin\theta}{\cos x}$,

$\therefore \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$

$\Rightarrow \frac{1 - \sin^2\theta}{1 - \cos^2 x} - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2 x} = 1$

$\Rightarrow \cos^2 x - \sin^2\theta\cos^2 x - \sin^2\theta + \cos^2 x\sin^2\theta$

$= \cos^2 x - \cos^4 x$

$\Rightarrow \cos^4 x = \sin^2\theta \Rightarrow x = \cos^{-1}\sqrt{\sin\theta}$.

93. (b) $\sinh ix = i\sin x$.

94. (c) $\cos(u + iv) = \alpha + i\beta$

$\Rightarrow \cos u\cos(iv) - \sin u\sin(iv) = \alpha + i\beta$

$\Rightarrow \alpha = \cos u\cosh v$ and $\beta = -\sin u\sinh v$

$(\because \cos(ix) = \cosh x, \sin(ix) = i\sinh x)$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + 1 = \cos^2 u\cosh^2 v + \sin^2 u\sin h^2 v + 1$

$= \cos^2 u\cosh^2 v + \sin^2 u\sinh^2 v + \cos^2 u + \sin^2 u$

$= \cos^2 u \cos h^2 v + \sin^2 u(1 + \sin h^2 v) + \cos^2 u$

$= \cos^2 u\cos h^2 v + \sin^2 u\cos h^2 v + \cos^2 u$

$[\because \cosh^2 v - \sinh^2 v = 1]$

$= \cosh^2 v(\cos^2 u + \sin^2 u) + \cos^2 u$

$= \cos^2 u + \cosh^2 v$ $[\because \cos^2 u + \sin^2 u = 1]$.

95. (a) $\mathrm{sech}(i\pi) = \sec(i^2\pi) = \sec(-\pi) = \sec\pi = -1$.

96. (c) $\cosh(\alpha + i\beta) - \cosh(\alpha - i\beta)$

$= \cosh\alpha\cosh(i\beta) + \sinh\alpha\sinh(i\beta)$

$-\cosh\alpha\cosh(i\beta) + \sinh\alpha\sinh(i\beta)$

$= 2\sinh\alpha\ \sinh i\beta = 2i\sinh\alpha\sin\beta$.

97. (b) $\cosh(\alpha + i\beta) = \cosh\alpha\cosh(i\beta) + \sinh\alpha\ \sinh(i\beta)$

अधिकल्पित भाग $= \sinh\alpha\ \sin\beta$.

98. (a) यह स्पष्ट है।

99. (c) यह स्पष्ट है।

100. (b) $\tan(u + iv) = i$

$\Rightarrow \frac{\tan u + \tan(iv)}{1 - \tan u\tan(iv)} = i$

$\Rightarrow \tan u + i\tan hv = i[1 - i\tan u\tan hv]$

$[\because \tan ix = i\tan hx]$

$\Rightarrow \tan u(1 - \tan hv) = i(1 - \tan hv)$

$\Rightarrow (\tan u - i)(1 - \tanh v) = 0$

$\Rightarrow 1 - \tan hv = 0 \Rightarrow \tan hv = 1$

$\Rightarrow \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} = 1 \Rightarrow e^v - e^{-v} = e^v + e^{-v}$

$\Rightarrow 2e^{-v} = 0 \Rightarrow e^{-v} = e^{-\infty} \Rightarrow v = \infty$.

101. (a) $\tan^{-1}(\alpha + i\beta) = x + iy$

$\Rightarrow \alpha + i\beta = \tan(x + iy)$ .....(i)

संयुग्मी लेने पर,

$\Rightarrow (\alpha - i\beta) = \tan(x - iy)$ .....(ii)

$\Rightarrow \tan 2x = \tan[(x + iy) + (x - iy)]$

$\therefore \tan 2x = \frac{(\alpha + i\beta) + (\alpha - i\beta)}{1 - (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta)} = \frac{2\alpha}{1 - (\alpha^2 + \beta^2)}$

$\therefore x = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{2\alpha}{1 - \alpha^2 - \beta^2}\right)$.

102. (c) माना $y = |a + b\omega + c\omega^2|$

y के निम्नतम होने के लिए y^2 को निम्नतम होना चाहिये।

$y^2 = |a + b\omega + c\omega^2|^2$

$y^2 = (a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega + c\omega^2)$

$= \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$

चूँकि a, b और c का मान एक ही समय समान नहीं हो सकता। अतः y^2 निम्नतम मान प्रदर्शित करता है जब कोई दो मान बराबर हों और तीसरा 1 से अलग हो।

$\Rightarrow y$ का न्यूनतम मान $= 1$ ($\because a, b, c$ पूर्णांक है)

103. (d) $\omega^2(1 + \omega)^3 - (1 + \omega^2)\omega = \omega^2(-\omega^2)^3 - \omega(-\omega)$

$= -\omega^2 + \omega^2 = 0$.

104. (c) $x = \alpha + \beta, y = \alpha\omega + \beta\omega^2, z = \alpha\omega^2 + \beta\omega$

$\therefore xyz = (\alpha + \beta)(\alpha\omega + \beta\omega^2)(\alpha\omega^2 + \beta\omega)$

$= (\alpha + \beta)[\alpha^2 + \alpha\beta(\omega + \omega^2) + \beta^2]$

$= (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$.

Critical Thinking Questions

1. (c) दिया गया समीकरण $a^2-2a\sin x+1=0$ है।

$\therefore$ $a=\frac{2\sin x\pm\sqrt{4\sin^2 x-4}}{2}$

$=\sin x\pm\sqrt{-(1-\sin^2 x)}$

$a=\sin x\pm i\cos x$

यदि $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow a=1,\ x=270^o\Rightarrow a=-1$.

2. (d) $i^3=-i, i^5=i$ एवं $i^7=-i$, प्रयोग करने पर हम दिये गये व्यंजक को निम्न प्रकार लिख सकते हैं $(1+i)^{n_1}+(1-i)^{n_1}+(1+i)^{n_2}+(1-i)^{n_2}$

$=2[{}^{n_1}C_0+{}^{n_1}C_2i^2+{}^{n_1}C_4i^4+.....]$

$+2[{}^{n_2}C_0+{}^{n_2}C_2i^2+{}^{n_2}C_4i^4+.....]$

$=2[{}^{n_1}C_0-{}^{n_1}C_2+{}^{n_1}C_4+....]$

$+2[{}^{n_2}C_0-{}^{n_2}C_2+{}^{n_2}C_4+....]$

n_1 व n_2 के सभी मानों के लिये यह वास्तविक संख्या है।

3. (d) दिया है $z^2+(p+iq)z+r+is=0$ ...... (i)

माना $z=\alpha$ (जहाँ α वास्तविक है) होंगे (i), के मूल

$\alpha^2+(p+iq)\alpha+r+is=0$

या $\alpha^2+p\alpha+r+i(q\alpha+s)=0$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$\alpha^2+p\alpha+r=0$ एवं $q\alpha+s=0$

α का विलोपन करने पर $\left(\frac{-s}{q}\right)^2+p\left(\frac{-s}{q}\right)+r=0$

या $s^2-pqs+q^2r=0$ या $pqs=s^2+q^2r$

4. (b) $x+5=4i\Rightarrow x^2+10x+25=-16$

अब $x^4+9x^3+35x^2-x+4$

$=(x^2+10x+41)(x^2-x+4)-160=-160$

5. (b) $\sqrt{3}+i=(a+ib)(c+id)$

$\therefore ac-bd=\sqrt{3}$ एवं $ad+bc=1$

अब $\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{d}{c}\right)$

$=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{b}{a}+\frac{d}{c}}{1-\frac{b}{a}.\frac{d}{c}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{bc+ad}{ac-bd}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$=n\pi+\frac{\pi}{6}, n\in I$

6. (d) $\frac{b}{c}=\frac{\cos\beta+i\sin\beta}{\cos\gamma+i\sin\gamma}\times\frac{\cos\gamma-i\sin\gamma}{\cos\gamma-i\sin\gamma}$

$\Rightarrow\frac{b}{c}=\cos(\beta-\gamma)+i\sin(\beta-\gamma)$ ...... (i)

इसी प्रकार $\frac{c}{a}=\cos(\gamma-\alpha)+i\sin(\gamma-\alpha)$ ...... (ii)

एवं $\frac{a}{b}=\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)$ ..... (iii)

(i) + (ii) + (iii) से,

$\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)+\cos(\alpha-\beta)$

$+i[\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)]=1$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)+\cos(\alpha-\beta)=1$.

7. (b) हमें ज्ञात है $(1+i)(1+2i)(1+3i).....(1+ni)=a+ib$ ..... (i)

$\Rightarrow$ $(1-i)(1-2i)(1-3i).....(1-ni)=a-ib$ ..... (ii)

(i) एवं (ii) को गुणा करने पर $2.5.....(1+n^2)=a^2+b^2$

8. (a) $|-z|=|z|$ व $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

अब $|z|+|z-1|=|z|+|1-z|\ge|z+(1-z)|=|1|=1$

अतः $|z|+|z-1|$ का न्यूनतम मान 1 है।

9. (b) $|(az_1-bz_2)|^2+|(bz_1+az_2)|^2$

$=a^2|z_1|^2+b^2|z_2|^2-2\,\text{Re}(ab)|z_1\bar{z}_2|+b^2|z_1|^2+$

$a^2|z_2|^2+2\,\text{Re}(ab)|\bar{z}_1z_2|$

$=(a^2+b^2)(|z_1|^2+|z_2|^2)$

10. (a) हम जानते हैं कि $\log_a m>\log_a n\Rightarrow m>n$ या $m<n$, जब $a>1$ या $0<a<1$. अतः $z=x+iy$ के लिए

$\log_{(1/3)}|z+1|>\log_{(1/3)}|z-1|\Rightarrow|z+1|<|z-1|$

$\left\{\because 0<\frac{1}{3}<1\right\}$

$\Rightarrow|x+iy+1|<|x+iy-1|$

$\Rightarrow (x+1)^2+y^2<(x-1)^2+y^2$

$\Rightarrow 4x<0\Rightarrow x<0\Rightarrow \text{Re}(z)<0$

11. (d) $\because |z_1|=|z_2|=1$,

$z_1=\cos\theta_1+i\sin\theta_1, z_2=\cos\theta_2+i\sin\theta_2$

जहाँ $\theta_1=arg(z_1)$ व $\theta_2=arg(z_2)$

तथा $z_1=a+ib$ and $z_2=c+id$.

अतः $a=\cos\theta_1$, $b=\sin\theta_1, c=\cos\theta_2$ तथा $d=\sin\theta_2$

$R(z_1\bar{z}_2)=0$

$\Rightarrow R[(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)]=0$

$\Rightarrow R[(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]=0$

$\Rightarrow \cos(\theta_1-\theta_2)=0 \Rightarrow \theta_1-\theta_2=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_1=\theta_2+\frac{\pi}{2}$

अब $w_1=a+ic=\cos\theta_1+i\cos\theta_2=\cos\theta_1+i\sin\theta_1$

$\Rightarrow |w_1|=1$

इसी प्रकार, $|w_2|=1$

अब $w_1\bar{w}_2=(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)$
$=\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2) \Rightarrow$
$|w_1\bar{w}_2|=1$

अन्ततः $R(\bar{w}_1w_2)=R(w_2\bar{w}_1)$
$=R[(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_1-i\sin\theta_1)]$
$=R[\cos(\theta_2-\theta_1)+i\sin(\theta_2-\theta_1)]$
$=\cos(\theta_2-\theta_1)=\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)=0$

12. (c) माना $z=a+ib, |z|\le 1 \Rightarrow a^2+b^2\le 1$

एवं $w=c+id, |w|\le 1 \Rightarrow c^2+d^2\le 1$

$|z+iw|=|a+ib+i(c+id)|=2$

$\Rightarrow (a-d)^2+(b+c)^2=4$ ...... (i)

$|z-i\bar{w}|=|a+ib-i(c-id)|$

$\Rightarrow (a-d)^2+(b-c)^2=4$ ...... (ii)

(i) व (ii) से $bc=0$

$\Rightarrow$ या तो $b=0$ या $c=0$

यदि $b=0$, तो $a^2\le 1$. तब a के सम्भव मान केवल 1 या -1 होंगे।

13. (c) माना $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

तब $\left|z+\frac{1}{z}\right|=a \Rightarrow \left|z+\frac{1}{z}\right|^2=a^2$

$\Rightarrow r^2+\frac{1}{r^2}+2\cos 2\theta=a^2$ ...... (i)

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$2r\frac{dr}{d\theta}-\frac{2}{r^3}\frac{dr}{d\theta}-4\sin 2\theta=0$

$\frac{dr}{d\theta}=0$ रखने पर, $\theta=0,\frac{\pi}{2}$

$\theta=\frac{\pi}{2}$ के लिये r उचिष्ठ है इसलिये समी. (i) से

$r^2+\frac{1}{r^2}-2=a^2 \Rightarrow r-\frac{1}{r}=a \Rightarrow r=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$

14. (c) $\left|\frac{z-12}{z-8i}\right|=\frac{5}{3}$ एवं $\left|\frac{z-4}{z-8}\right|=1$

माना $z=x+iy$, तब

$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right|=\frac{5}{3} \Rightarrow 3|z-12|=5|z-8i|$

$\Rightarrow 3|(x-12)+iy|=5|x+(y-8)i|$

$\Rightarrow 9(x-12)^2+9y^2=25x^2+25(y-8)^2$ .... (i)

एवं $\left|\frac{z-4}{z-8}\right|=1 \Rightarrow |z-4|=|z-8|$

$\Rightarrow |x-4+iy|=|x-8+iy|$

$\Rightarrow (x-4)^2+y^2=(x-8)^2+y^2 \Rightarrow x=6$

समीकरण (i) में $x=6$ रखने पर $y^2-25y+136=0$

$\therefore y=17,8$

अतः $z=6+17i$ या $z=6+8i$

ट्रिक : विकल्पों द्वारा जाँच करें।

15. (a) $1=\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|=\left|\frac{z_1\bar{z}_1}{z_1}+\frac{z_2\bar{z}_2}{z_2}+\frac{z_3\bar{z}_3}{z_3}\right|$

$(\because |z_1|^2=1=z_1\bar{z}_1, \text{etc})$

$=|\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3|=|\overline{z_1+z_2+z_3}|=|z_1+z_2+z_3|$

$(\because |\bar{z}_1|=|z_1|)$

16. (c) दी गयी संख्यायें

$z_1=10+6i, z_2=4+6i$ एवं $z=x+iy$ हैं

$\therefore amp\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)=\frac{\pi}{4} \Rightarrow amp\left[\frac{(x-10)+i(y-6)}{(x-4)+i(y-6)}\right]=\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{(x-4)(y-6)-(y-6)(x-10)}{(x-4)(x-10)+(y-6)^2}=1$

$\Rightarrow 12y-y^2-72+6y=x^2-14x+40$ ..... (i)

अब $|z-7-9i|=|(x-7)+i(y-9)|$

$\Rightarrow \sqrt{(x-7)^2+(y-9)^2}$ .... (ii)

(i) से, $(x^2-14x+49)+(y^2-18y+81)=18$

$\Rightarrow (x-7)^2+(y-9)^2=18$

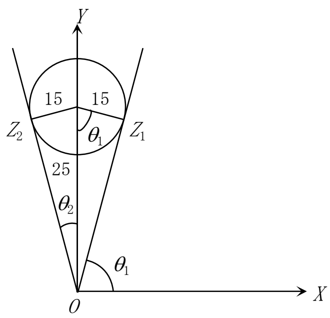
या $[(x-7)^2+(y-9)^2]^{1/2}=[18]^{1/2}=3\sqrt{2}$

$\therefore |(x-7)+i(y-9)|=3\sqrt{2}$ या $|z-7-9i|=3\sqrt{2}$.

17. (c) पहले $a=b=c$, निकालें तब यह निम्न $arg\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)^2$ के बराबर होगा।

18. (d) **ट्रिक** : विकल्पों का निरीक्षण करे। (d) दोनों प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है।

19. (b) अधिकतम $amp(z)=amp(z_2)$, न्यूनतम $amp(z)=amp(z_1)$



अब $amp(z_1) = \theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{15}{25}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

$amp(z_2) = \frac{\pi}{2} + \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\frac{15}{25}\right) = \frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

$\therefore$ |अधिकतम $amp(z) -$ न्यूनतम $amp(z)$|

$= \left|\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\frac{3}{5} - \cos^{-1}\frac{3}{5}\right|$

$= \left|\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\frac{3}{5} - \cos^{-1}\frac{3}{5}\right| = \pi - 2\cos^{-1}\frac{3}{5}$

20. (a) $z_2 = \bar{z}_1$ एवं $z_4 = \bar{z}_3$

इसलिए $z_1 z_2 = |z_1|^2$ एवं $z_3 z_4 = |z_3|^2$

अब $arg\left(\frac{z_1}{z_4}\right) + arg\left(\frac{z_2}{z_3}\right) = arg\left(\frac{z_1 z_2}{z_4 z_3}\right)$

$= arg\left(\frac{|z_1|^2}{|z_3|^2}\right) = arg\left(\left|\frac{z_1}{z_3}\right|^2\right) = 0$

($\because$ धनात्मक वास्तविक संख्या का कोणांक शून्य होता है)

21. (c) दिया है $arg \; zw = \pi$ ..... (i)

$\bar{z} + i\bar{\omega} = 0 \Rightarrow \bar{z} = -i\bar{\omega} \Rightarrow z = i\omega \Rightarrow \omega = -iz$

(i) से $arg(-iz^2) = \pi$

$arg(-i) + 2arg(z) = \pi$; $\frac{-\pi}{2} + 2\, arg(z) = \pi$

$2\, arg(z) = \frac{3\pi}{2}$; $arg(z) = \frac{3\pi}{4}$

22. (d) $\because (1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + ... + C_n x^n$

दोनों पक्षों में $x = i$ रखने पर,

$(1+i)^n = (C_0 - C_2 + C_4 - .....) + i(C_1 - C_3 + C_5 - .....)$

..... (i)

तथा $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow (1+i)^n = 2^{n/2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n$ [मानक रूप में]

$= 2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

.... (ii)

(i) एवं (ii) के वास्तविक भागों की तुलना करने पर,

$C_0 - C_2 + C_4 - C_6 + ... = 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}$

23. (c) $x = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}, y = \cos\phi + i\sin\phi = e^{i\phi}$

$\therefore \; x^m y^n + x^{-m} y^{-n} = e^{im\theta} e^{in\phi} + e^{-im\theta} e^{-in\phi}$

$= e^{i(m\theta + n\phi)} + e^{-i(m\theta + n\phi)} = \cos(m\theta + n\phi) + i\sin(m\theta + n\phi)$

$+ \cos(m\theta + n\phi) - i\sin(m\theta + n\phi)$

$= 2\cos(m\theta + n\phi)$

24. (d)

$\sum_{r=1}^{8}\left(\sin\frac{2r\pi}{9} + i\cos\frac{2r\pi}{9}\right) = \sum_{r=1}^{8} i\left(\cos\frac{2r\pi}{9} - i\sin\frac{2r\pi}{9}\right)$

$= i\sum_{r=1}^{8} e^{-i\frac{2r\pi}{9}} = i\sum_{r=1}^{8}\alpha^r$, जहाँ $\alpha = e^{-(2\pi i/9)}$

$= i\alpha\frac{(1-\alpha^8)}{(1-\alpha)} = i\frac{(\alpha - \alpha^9)}{1-\alpha} = i\left(\frac{\alpha - 1}{1-\alpha}\right) = -i$

($\because \alpha^9 = e^{-i2\pi} = \cos 2\pi - i\sin 2\pi = 1$)

25. (b) माना a, b, c तथा u, v, w क्रमशः ΔABC व DEF के शीर्ष निरूपित करते हैं।

$b - a = r_1 e^{i\theta_1}$

$c - a = r_2 e^{i\theta_2}$

$v - u = \rho_1 e^{i\phi_1}, w - u = \rho_2 e^{i\phi_2}$ एवं $r = \lambda e^{i\alpha}$

ये मान दिये गये सम्बन्ध में रखने पर,

$c - a = r(b-a)$ व $w - u = (v-u)r$,

$r_2 e^{i\theta_2} = \lambda e^{i\alpha} r_1 e^{i\theta_1} = \lambda r_1 e^{i(\alpha + \theta_1)}$

.... (i)

एवं $\rho_2 e^{i\phi_2} = \rho_1 e^{i\phi_1}\lambda e^{i\alpha} = (\lambda\rho_1)e^{i(\phi_1 + \alpha)}$

.... (ii)

(i) के दोनों तरफ के मापांक व कोणांकों की तुलना करने पर $r_2 = \lambda r_1, \theta_2 = \alpha + \theta_1$

अर्थात् $AC = \lambda AB$ एवं $\angle CAB = \theta_2 - \theta_1 = \alpha$

इसी प्रकार (ii) से $DF = \lambda DE$ एवं $\angle FDE = \phi_2 - \phi_1 = \alpha$

$\therefore \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$ एवं $\angle CAB = \angle FDE$

अतः त्रिभुज ABC एवं DEF समरूप हैं।

26. (a) इनमें से एक संख्या

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ की संयुग्मी होनी चाहिये अर्थात्

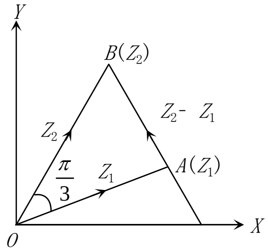
$z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

या $z_3 = z_1 e^{i2\pi/3}$ एवं $z_2 = z_1 e^{-i2\pi/3}$

$z_3 = (1 + i\sqrt{3})\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\frac{2\pi}{3}\right] = -2$

वैकल्पिक : स्पष्टतः $|z| = 2$ एक वृत्त है जिसका केन्द्र (0,0), त्रिज्या 2 है। अतः $OA = OB = OC$ और यह (a) द्वारा संतुष्ट होता है क्योंकि किसी भी त्रिभुज के दो शीर्ष समान नहीं हो सकते हैं।

27. (a) माना OA, OB समबाहु त्रिभुज OAB की भुजायें हैं एवं OA, OB सम्मिश्र संख्याओं क्रमशः z_1, z_2 को निरूपित करते हैं।



समबाहु त्रिभुज ΔOAB से, $\overrightarrow{AB} = z_2 - z_1$

$\therefore \quad arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2}\right) = arg(z_2 - z_1) - arg\, z_2 = \pi/3$

एवं $arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = arg(z_2) - arg(z_1) = \frac{\pi}{3}$

तथा $\left|\frac{z_2 - z_1}{z_2}\right| = 1 = \left|\frac{z_2}{z_1}\right|$, $\because$ त्रिभुज समबाहु है।

अतः सदिश $\frac{z_2 - z_1}{z_2}$ एवं $\frac{z_2}{z_1}$ के मापांक व कोणांक बराबर हैं अतः सदिश बराबर हैं अर्थात् $\frac{z_2 - z_1}{z_2} = \frac{z_2}{z_1}$

$\Rightarrow z_1 z_2 - z_1^2 = z_2^2 \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$

नोट : विद्यार्थी इस प्रश्न को सूत्र की तरह याद रखें।

28. (a) यदि $z = x + iy$ एक सम्मिश्र संख्या है जो दिये गये प्रतिबन्धों को संतुष्ट करती है तो

$a^2 - 3a + 2 = |z + \sqrt{2}| = |z + i\sqrt{2} + \sqrt{2} - i\sqrt{2}|$

$\le |z + i\sqrt{2}| + \sqrt{2}|1 - i| \quad < a^2 + 2$

$\Rightarrow \; -3a < 0 \Rightarrow a > 0 \qquad \ldots\ldots (i)$

$\because \; |z + \sqrt{2}| = a^2 - 3a + 2$ एक वृत्त को प्रदर्शित करता है जिसका केन्द्र $A(-\sqrt{2}, 0)$ तथा त्रिज्या $\sqrt{a^2 - 3a + 2}$ है तथा $|z + \sqrt{2}i| < a^2$ आंतरिक भाग को प्रदर्शित करता है जिसका केन्द्र $B(0, -\sqrt{2})$ तथा त्रिज्या a है। इसलिये यह दिया गया प्रतिबन्ध तथा असमिका को संतुष्ट करने वाली एक सम्मिश्र संख्या होगी यदि AB दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के योगफल या अन्तर से कम हो अर्थात् यदि

$\sqrt{(-\sqrt{2} - 0)^2 + (0 + \sqrt{2})^2} < \sqrt{a^2 - 3a + 2} \pm a$

$\Rightarrow \; 2 \pm a < \sqrt{a^2 - 3a + 2} \;\Rightarrow\; 4 + a^2 \pm 4a < a^2 - 3a + 2$

$\Rightarrow -a < -2$ या $7a < -2 \Rightarrow \; a > 2$ या $a < -\frac{7}{2}$

लेकिन (i) से, $a > 0$ इसलिए $a > 2$.

29. (b) त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|z|^2$

$\because \frac{1}{2}|z|^2 = 2 \;\Rightarrow\; |z|^2 = 4 \;\Rightarrow\; |z| = 2$.

30. (c) $z^2 + z|z| + |z|^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{z}{|z|}\right)^2 + \frac{z}{|z|} + 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{z}{|z|} = \omega, \omega^2 \;\Rightarrow z = \omega|z|$ या $z = \omega^2|z|$

$\Rightarrow x + iy = |z|\left(\frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$ या $x + iy = |z|\left(\frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}|z|,\; y = |z|\frac{\sqrt{3}}{2}$ या $x = -\frac{|z|}{2}, y = -\frac{|z|\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \; y + \sqrt{3}x = 0$ या $y - \sqrt{3}x = 0 \;\Rightarrow\; y^2 - 3x^2 = 0$.

31. (c) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$

तथा $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0$

माना $a = \cos\alpha + i\sin\alpha; b = \cos\beta + i\sin\beta$ और $c = \cos\gamma + i\sin\gamma$. अतः

$a + b + c = (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) + i(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$

$= 0 + i0 = 0$

यदि $a + b + c = 0$, तब $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ या

$(\cos\alpha + i\sin a)^3 + (\cos\beta + i\sin\beta)^3 + (\cos\gamma + i\sin\gamma)^3$

$= 3(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\gamma + i\sin\gamma)$

$\Rightarrow (\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha) + (\cos 3\beta + i\sin 3\beta) + (\cos 3\gamma + i\sin 3\gamma)$

$= 3[\cos(\alpha + \beta + \gamma) + i\sin(\alpha + \beta + \gamma)]$

या $\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 3\cos(\alpha + \beta + \gamma)$.

32. (c) $z_r = \cos\frac{r\alpha}{n^2} + i\sin\frac{r\alpha}{n^2}$

$z_1 = \cos\frac{\alpha}{n^2} + i\sin\frac{\alpha}{n^2}$; $z_2 = \cos\frac{2\alpha}{n^2} + i\sin\frac{2\alpha}{n^2}$; . . . .

$\Rightarrow \; z_n = \cos\frac{n\alpha}{n^2} + i\sin\frac{n\alpha}{n^2} \;\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(z_1 z_2 z_3 \ldots\ldots\ldots z_n)$

$= \lim_{n\to\infty}\left[\cos\left\{\frac{\alpha}{n^2}(1 + 2 + 3 + \ldots + n)\right\} + i\sin\left\{\frac{\alpha}{n^2}(1 + 2 + 3 + \ldots + n)\right\}\right]$

$= \lim_{n\to\infty}\left[\cos\frac{\alpha n(n+1)}{2n^2} + i\sin\frac{\alpha n(n+1)}{2n^2}\right]$

$= \cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2} = e^{\frac{i\alpha}{2}}$.

33. (b) $(x - 1)^3 = -8 \Rightarrow x - 1 = (-8)^{1/3}$

$\Rightarrow \; x - 1 = -2, -2\omega, -2\omega^2 \;\Rightarrow\; x = -1, 1 - 2\omega, 1 - 2\omega^2$

ट्रिक : निरीक्षण से पता चलता है कि विकल्प (b) समीकरण को संतुष्ट करता है। अर्थात्

$(-1-1)^3 + 8 = 0, (1 - 2\omega - 1)^3 + 8 = 0 \; (1 - 2\omega^2 - 1)^3 + 8 = 0$.

34. (c) $\because \; 1, \omega, \omega^2, \omega^3, \ldots.. \omega^{n-1}$ इकाई के n वें मूल हैं। अतः

$= (x-1)(x-\omega)(x-\omega^2).....(x-\omega^{n-1}) = x^n - 1$

या $(x-\omega)(x-\omega^2).....(x-\omega^{n-1}) = \frac{x^n-1}{x-1}$

$= x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1$

$x = 1$ दोनों पक्षों में रखने पर,

$(1-\omega)(1-\omega^2).....(1-\omega^{n-1}) = n$

35. (b) दिये गये व्यंजक में r वां पद

$= r[(r+1)-\omega][(r+1)-\omega^2]$

$= r[(r+1)^2 - (\omega+\omega^2)(r+1) + \omega^3]$

$= r[(r+1)^2 - (-1)(r+1) + 1]$

$= r[(r^2+3r+3] = r^3 + 3r^2 + 3r$

अतः $= \sum_{r=1}^{(n-1)} (r^3 + 3r^2 + 3r)$

$= \frac{1}{4}(n-1)^2 n^2 + 3.\frac{1}{6}(n-1)(n)(2n-1) + 3.\frac{1}{2}(n-1)n$

$= \frac{1}{4}(n-1)n(n^2+3n+4)$

36. (c) दिया गया समीकरण

$4 + 5\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{334} + 3\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{365}$

$= 4 + 5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{334} + 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{365}$

$= 4 + 5\left[\cos\frac{668}{3}\pi + i\sin\frac{668}{3}\pi\right]$

$3\left[\cos\frac{730}{3}\pi + i\sin\frac{730}{3}\pi\right]$

$= 4 + 5\left[\cos\left(222\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(222\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$+ 3\left[\cos\left(243\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(243\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= 4 + 5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) + 3\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 4 + 5\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 4 - 4 + 2i\frac{\sqrt{3}}{2} = i\sqrt{3}$.

37. (d) $a = \cos(2\pi/7) + i\sin(2\pi/7)$

$a^7 = [\cos(2\pi/7) + i\sin(2\pi/7)]^7$

$= \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

$S = \alpha + \beta = (a + a^2 + a^4) + (a^3 + a^5 + a^6)$

$S = a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 = \frac{a(1-a^6)}{1-a}$

$S = \frac{a-a^7}{1-a} = \frac{a-1}{1-a} = -1$ ..... (ii)

$P = \alpha\beta = (a + a^2 + a^4)(a^3 + a^5 + a^6)$

$= a^4 + a^6 + a^7 + a^5 + a^7 + a^8 + a^7 + a^9 + a^{10}$

$= a^4 + a^6 + 1 + a^5 + 1 + a + 1 + a^2 + a^3$ (समी. (i) से]

$= 3 + (a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6) = 3 + S$

$= 3 - 1 = 2$ [(ii) से]

अभीष्ट समीकरण $x^2 - Sx + P = 0$ है।

$\Rightarrow x^2 + x + 2 = 0$.

38. (d) $1^{1/n} = \cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n}$

माना $z_1 = \cos\frac{2r_1\pi}{n} + i\sin\frac{2r_1\pi}{n}$

एवं $z_2 = \cos\frac{2r_2\pi}{n} + i\sin\frac{2r_2\pi}{n}$.

तब $\angle Z_1OZ_2 = amp\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = amp\,(z_1) - amp\,(z_2)$

$= \frac{2(r_1-r_2)\pi}{n} = \frac{\pi}{2}$ (दिया है)

$\therefore n = 4(r_1 - r_2) = 4 \times$ पूर्णांक, अतः n, $4k$ के रूप में है।

39. (a) $2(\omega+1)(\omega^2+1) + 3(2\omega+1)(2\omega^2+1) + ...$

$+ (n+1)(n\omega+1)(n\omega^2+1)$

$= \sum_{r=1}^{n} (r+1)(r\omega+1)(r\omega^2+1)$

$= \sum_{r=1}^{n} (r+1)(r^2\omega^3 + r\omega + r\omega^2 + 1)$

$= \sum_{r=1}^{n} (r+1)(r^2 - r + 1) = \sum_{r=1}^{n} (r^3 - r^2 + r + r^2 - r + 1)$

$= \sum_{r=1}^{n} (r^3) + \sum_{r=1}^{n} (1) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + n$.

40. (d) $(1+\omega^2)^m = (1+\omega^4)^m$ $(\because \omega^3 = 1)$

$(1+\omega^2)^m = (1+\omega)^m$

$(-\omega)^m = (-\omega^2)^m$

$\Rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega^2}\right)^m = 1 \Rightarrow (\omega^2)^m = 1 = (\omega)^{2m} = (\omega^3)$

$\Rightarrow m = \frac{3}{2}$

अतः m का न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक मान 3 है।

सम्मिश्र संख्यायें

SET Self Evaluation Test - 3

1. यदि $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^x = 1$, तब [RPET 2003; AIEEE 2003]

(a) $x = 4n$, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है
(b) $x = 2n$, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है
(c) $x = 4n+1$, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है
(d) $x = 2n+1$, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है

2. यदि $z = x - iy$ एवं $z^{\frac{1}{3}} = p + iq$, तब $\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right)/(p^2+q^2) =$ [AIEEE 2004]

(a) – 2 (b) – 1
(c) 2 (d) 1

3. यदि α व β भिन्न सम्मिश्र संख्याएँ इस प्रकार हैं कि $|\beta| = 1$, तब $\left|\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha\beta}\right| =$ [IIT Screening 1992; Pb. CET 2000]

(a) 0 (b) 1/2
(c) 1 (d) 2

4. यदि सम्मिश्र संख्याएँ z_1, z_2 एवं z_3 समीकरण $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ को सन्तुष्ट करती हैं तो यह उस त्रिभुज के शीर्ष हैं [IIT Screening 2001; DCE 2005]

(a) जिसका क्षेत्रफल = 0
(b) जो समकोण समद्विबाहु त्रिभुज है
(c) जो समबाहु त्रिभुज है
(d) जो अधिककोण समद्विबाहु त्रिभुज है

5. माना z_1 और z_2 समीकरण $z^2 + az + b = 0$, जहाँ z एक सम्मिश्र संख्या है, के मूल हैं यदि मूल बिन्दु, z_1 व z_2 एक समबाहु त्रिभुज निर्मित करें, तब [AIEEE 2003]

(a) $a^2 = b$ (b) $a^2 = 2b$
(c) $a^2 = 3b$ (d) $a^2 = 4b$

6. एक सम्मिश्र संख्या z इस प्रकार है कि $arg\left(\frac{z-2}{z+2}\right) = \frac{\pi}{3}$ वह बिन्दु जो कि इस सम्मिश्र संख्या को प्रदर्शित करता है, स्थित होगा [MP PET 2001]

(a) दीर्घवृत्त पर (b) परवलय पर
(c) वृत्त पर (d) सरल रेखा पर

7. $\sum_{k=1}^{6}\left(\sin\frac{2\pi k}{7} - i\cos\frac{2\pi k}{7}\right)$ का मान है [IIT 1987; DCE 2000; Karnataka CET 2002; Orissa JEE 2005]

(a) -1 (b) 0
(c) $-i$ (d) i

8. यदि $x_n = \cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right)$, तब $x_1.x_2.x_3....x_\infty$ का मान है [RPET 2002; Kurukshetra CEE 2002]

(a) 1 (b) – 1
(c) i (d) $-i$

9. समीकरणों $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$ व $z^{1985} + z^{100} + 1 = 0$ के उभयनिष्ठ मूल हैं

(a) ω, ω^2 (b) ω, ω^3
(c) ω^2, ω^3 (d) इनमें से कोई नहीं

10. यदि $1, \omega, \omega^2$ इकाई के घनमूल हैं, तब समीकरण $(x-2)^3 + 27 = 0$ के मूल होंगे [Kurukshetra CEE 1998; Pb. CET 2003]

(a) $-1, -1, -1$ (b) $-1, -\omega, -\omega^2$
(c) $-1, 2+3\omega, 2+3\omega^2$ (d) $-1, 2-3\omega, 2-3\omega^2$

11. माना $\frac{1-ix}{1+ix} = a - ib$ एवं $a^2 + b^2 = 1$, जहाँ a व b वास्तविक हैं तब $x =$

(a) $\frac{2a}{(1+a)^2+b^2}$ (b) $\frac{2b}{(1+a)^2+b^2}$
(c) $\frac{2a}{(1+b)^2+a^2}$ (d) $\frac{2b}{(1+b)^2+a^2}$

12. यदि $|z+4| \le 3$ हो, तब $|z+1|$ के महत्तम एवं न्यूनतम मान होंगे [RPET 2002]

(a) 6, – 6 (b) 6, 0
(c) 7, 2 (d) 0, – 1

13. यदि $|a_k| < 1, \lambda_k \ge 0$ के लिए $k = 1, 2, ...n$ एवं $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$, तब $|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n|$ का मान है

(a) 1 (b) 1 से बड़ा
(c) 0 (d) 1 से छोटा

14. माना z_1 व z_2 दो सम्मिश्र संख्यायें हैं जिनके मुख्य कोणांक α व β इस प्रकार हैं कि $\alpha + \beta > \pi$, तो $(z_1 z_2)$ का मुख्य कोणांक होगा [Roorkee 1989]

(a) $\alpha + \beta + \pi$ (b) $\alpha + \beta - \pi$
(c) $\alpha + \beta - 2\pi$ (d) $\alpha + \beta$

15. यदि एक सम्मिश्र संख्या z, $|z - 5i| \le 1$ को संतुष्ट करती है एवं $amp\ z$ न्यूनतम है तब z बराबर है

(a) $\frac{2\sqrt{6}}{5} + \frac{24i}{5}$ (b) $\frac{24}{5} + \frac{2\sqrt{6}i}{5}$
(c) $\frac{2\sqrt{6}}{5} - \frac{24i}{5}$ (d) इनमें से कोई नहीं

16. यदि सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ इस प्रकार ली जाती है कि भिन्न $\frac{z-1}{z+1}$ का कोणांक सदैव $\frac{\pi}{4}$ हो, तो

[UPSEAT 1999; MP PET 2004]

(a) $x^2 + y^2 + 2y = 1$ (b) $x^2 + y^2 - 2y = 0$

(c) $x^2 + y^2 + 2y = -1$ (d) $x^2 + y^2 - 2y = 1$

17. यदि $z = i \log(2 - \sqrt{3})$, तब $\cos z =$

[RPET 2001; Karnataka CET 2002]

(a) i (b) $2i$

(c) 1 (d) 2

18. यदि सम्मिश्र संख्यायें z_1, z_2, z_3 समबाहु त्रिभुज के शीर्षों को इस प्रकार निरूपित करती हैं कि $|z_1| = |z_2| = |z_3|$, तब $z_1 + z_2 + z_3$ बराबर है [IIT 1984]

(a) 0 (b) 1

(c) -1 (d) इनमें से कोई नहीं

19. $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2^2} + i\sin\frac{\theta}{2^2})....$

के अनन्त पदों तक के गुणनफल का मान है [RPET 1999]

(a) $\cos 2\theta - i\sin 2\theta$

(b) $\cos 2\theta + i\sin 2\theta$

(c) $\sin 2\theta - i\cos 2\theta$

(d) $\sin 2\theta + i\cos 2\theta$

20. यदि $\alpha \neq 1$ कोई भी इकाई का nवां मूल हो, तो $S = 1 + 3\alpha + 5\alpha^2$ ..... n पदों तक, का मान है

(a) $\frac{2n}{1-\alpha}$

(b) $-\frac{2n}{1-\alpha}$

(c) $\frac{n}{1-\alpha}$

(d) $-\frac{n}{1-\alpha}$

Answers and Solutions

(SET - 3)

1. (a) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^x = 1 \Rightarrow \left[\frac{(1+i)^2}{1-i^2}\right]^x = 1$

$\Rightarrow \left(\frac{1+i^2+2i}{1+1}\right)^x = 1 \Rightarrow i^x = 1$

$\therefore x = 4n, n \in I^+$.

2. (a) $z = x - iy,\ z^{1/3} = p + iq$

$z = (p+iq)^3 = p^3 - iq^3 + 3p^2qi - 3pq^2$

$z = (p^3 - 3pq^2) + i(3p^2q - q^3)$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$x = p^3 - 3pq^2,\ y = -(3p^2q - q^3)$

$x = p(p^2 - 3q^2)$, $y = q(q^2 - 3p^2)$

$\frac{x}{p} = p^2 - 3q^2$ .....(i) $\frac{y}{q} = q^2 - 3p^2$ ......(ii)

(i) व (ii) को जोड़ने पर,

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = p^2 + q^2 - 3(q^2 + p^2) = -2p^2 - 2q^2$

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = -2(p^2 + q^2)$. अतः $\frac{\frac{x}{p} + \frac{y}{q}}{p^2 + q^2} = -2$.

3. (c) $\left|\frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta}\right| = \left|\frac{\beta - \alpha}{\beta\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta}\right| = \left|\frac{\beta - \alpha}{\beta(\bar{\beta} - \bar{\alpha})}\right|$

$= \frac{1}{|\beta|}\left|\frac{\beta - \alpha}{\overline{(\beta - \alpha)}}\right| = \frac{1}{|\beta|} = 1$ $\{\because |z| = |\bar{z}|\}$

4. (c) $\left|\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right| = \left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$

अतः $|z_1 - z_3| = |z_2 - z_3|$

$amp\left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}/2}{1/2}\right) = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

या $amp\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) = \frac{\pi}{3}$ या $\angle z_2 z_3 z_1 = 60^o$

$\therefore$ त्रिभुज की दो भुजाएँ बराबर हैं तथा उनके मध्य कोण 60^o है, अतः त्रिभुज समबाहु है।

5. (c) माना z_1, z_2 समीकरण $z^2 + az + b = 0$ के मूल हैं तब

$z_1 + z_2 = -a, z_1 z_2 = b$

$\because z_1, z_2$ व $z_3 = 0$ एक समबाहु त्रिभुज बनाते हैं

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$

$\Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$ $(\because z_3 = 0)$

$\Rightarrow (z_1 + z_2)^2 = 3z_1 z_2 \Rightarrow (-a)^2 = 3b \Rightarrow a^2 = 3b$.

6. (c) $arg\left(\frac{z-2}{z+2}\right) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \tan^{-1}\left[\frac{(x-2)+iy}{(x+2)+iy}\right] = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \tan(\pi/3)[\sqrt{(x+2)^2 + y^2}]$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 3[x+2]^2 + y^2]$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4 - 4x = 3x^2 + 3y^2 + 12x + 12$

$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 16x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 8x + 4 = 0$

जो कि वृत्त का समीकरण है

7. (d) माना $z = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$, तब डी मोयवर प्रमेय से

$z^k = \cos\frac{2\pi k}{7} + i\sin\frac{2\pi k}{7}$

दिया गया योग $S = \sum_{k=1}^{6}\left(\sin\frac{2\pi k}{7} - i\cos\frac{2\pi k}{7}\right)$

$= \sum_{k=1}^{6}\left[(-i)\left(\cos\frac{2\pi k}{7} + i\sin\frac{2\pi k}{7}\right)\right]$

$= (-i)\sum_{k=1}^{6}\left(\cos\frac{2\pi k}{7} + i\sin\frac{2\pi k}{7}\right) = (-i)\sum_{k=1}^{6} z^k$

यह एक गुणोत्तर श्रेणी है जिसका प्रथम पद z, पदों की संख्या 6 एवं सार्वअनुपात $z = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7} \neq 1$ हैं।

अतः गुणोत्तर श्रेणी के योग से,

$S = (-i)\frac{z(1 - z^6)}{1 - z} = (-i)\frac{z - z^7}{1 - z} = (-i)\frac{z - 1}{1 - z} = i$

$[\because z^7 = \left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right)^7 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

8. (c) $x_1 . x_2 . x_3 .... x_\infty$

$= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3^2} + i\sin\frac{\pi}{3^2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3^3} + i\sin\frac{\pi}{3^3}\right)....$

$= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3^2} + \frac{\pi}{3^3} + ...\infty\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3^2} + \frac{\pi}{3^3} + ...\infty\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi/3}{1 - \frac{1}{3}}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/3}{1 - \frac{1}{3}}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i.$

9. (a) प्रथम समीकरण को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$(z+1)(z^2 + z + 1) = 0$ जिसके मूल $-1, \omega$ व ω^2 हैं।

अब माना $f(z) = z^{1985} + z^{100} + 1$

$f(-1) = (-1)^{1985} + (-1)^{100} + 1 \neq 0$

अतः -1 समीकरण $f(z) = 0$ का मूल नहीं हैं

पुनः $f(\omega) = \omega^{1985} + \omega^{100} + 1$

$= (\omega^3)^{661}\omega^2 + (\omega^3)^{33}\omega + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0$

अतः ω समीकरण $f(z) = 0$ का मूल है।

इसी प्रकार हम दिखा सकते हैं $f(\omega^2) = 0$

अतः ω व ω^2 उभयनिष्ठ मूल हैं।

ट्रिक : स्पष्टतः ω व ω^2 दोनों समीकरणों को संतुष्ट करते हैं। लेकिन ω^3 समीकरणों को संतुष्ट नहीं करता है।

10. (d) जहाँ $1^{1/3} = 1, \omega, \omega^2$

$\therefore$ समीकरण $(x-2)^3 + 27 = 0$ के लिये

$\Rightarrow (x-2)^3 = -27 = -3^3$

$\Rightarrow x - 2 = -3(1)^{1/3} = -3(1, \omega, \omega^2) = -3, -3\omega, 3\omega^2$

$\Rightarrow x = -1, 2 - 3\omega, 2 - 3\omega^2$.

11. (b) $\dfrac{1-ix}{1+ix} = a - ib \Rightarrow \dfrac{(1-ix)(1-ix)}{(1+ix)(1-ix)} = a - ib$

$\Rightarrow \dfrac{1-x^2-2ix}{1+x^2} = a - ib \Rightarrow \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = a$ एवं $\dfrac{2x}{1+x^2} = b$

हम x को निम्न प्रकार लिख सकते हैं

$$x = \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{2}{1+x^2}} = \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1-x^2}{1+x^2} + 1}$$

$$= \frac{b}{1+a} = \frac{2b}{1+1+2a} = \frac{2b}{1+(a^2+b^2)+2a} = \frac{2b}{(1+a)^2+b^2}$$

ट्रिक : $\dfrac{1-ix}{1+ix} = \dfrac{1-x^2-2ix}{1+x^2} = a - ib$

माना $a = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ एवं $b = \pm 1$.

विकल्प (b), ± 1 देता है।

12. (b) $|z+4| \le 3 \Rightarrow -3 \le z + 4 \le +3$

$\Rightarrow -6 \le z + 1 \le 0 \Rightarrow 0 \le -(z+1) \le 6$

$\Rightarrow 0 \le |z+1| \le 6$,

अतः $|z+1|$ के महत्तम एवं न्यूनतम मान क्रमशः 6 व 0 हैं।

13. (d) $|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n|$

$\le |\lambda_1 a_1| + |\lambda_2 a_2| + ... + |\lambda_n a_n|$

$= |\lambda_1|\,|a_1| + ... + |\lambda_n|\,|a_n|$

$= \lambda_1 |a_1| + ... + \lambda_n |a_n|$ [$\because$ प्रत्येक $\lambda_k \ge 0$ के लिए]

$< \lambda_1 + ... + \lambda_n$

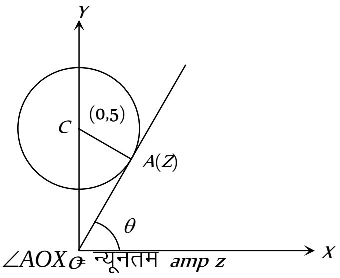
[$\because |a_k| < 1$ और अतः $\lambda_k |a_k| < \lambda_k$ के लिये

अतः $|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n| < 1$.

इस प्रकार $|\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n| < 1$.

14. (c) हम जानते हैं कि किसी सम्मिश्र संख्या का मुख्य कोणांक $-\pi$ व π के बीच होता है। परन्तु $\alpha + \beta > \pi$, अतः $arg(z_1 z_2) = arg\, z_1 + arg\, z_2 = \alpha + \beta$, का मुख्य कोणांक $\alpha + \beta - 2\pi$ है।

15. (a) $OC = 5, CA = 1$



$\theta = \angle AOX =$ न्यूनतम $amp\ z$

$\therefore \angle AOC = 90^o - \theta$

$\Rightarrow \sin(90^o - \theta) = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{5}$

$\therefore z = OA\cos\theta + iOA\sin\theta$

$\Rightarrow z = \sqrt{5^2-1}\left(\dfrac{1}{5}\right) + i\sqrt{5^2-1}\sqrt{1-\dfrac{1}{5^2}}$

$= \dfrac{2\sqrt{6}}{5}(1 + i2\sqrt{6})$.

16. (d) $\dfrac{z-1}{z+1} = \dfrac{(x+iy)-1}{(x+iy)+1} = \dfrac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy}$

$= \dfrac{\{(x-1)+iy\}\{(x+1)-iy\}}{\{(x+1)+iy\}\{(x+1)-iy\}}$

$= \dfrac{\{(x^2-1)+y^2\} + i\{y(x+1) - y(x-1)\}}{(x+1)^2 + y^2}$

$= \left\{\dfrac{(x^2-1)+y^2}{(x+1)^2+y^2}\right\} + i\left\{\dfrac{2y}{(x+1)^2+y^2}\right\}$

$\therefore amp\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = \tan^{-1}\left\{\dfrac{2y}{(x+1)^2+y^2} \div \dfrac{(x^2-1)+y^2}{(x+1)^2+y^2}\right\}$

$\Rightarrow \dfrac{\pi}{4} = \tan^{-1}\left\{\dfrac{2y}{x^2+y^2-1}\right\} \Rightarrow \tan\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2y}{x^2+y^2-1}$

$\Rightarrow 1 = \dfrac{2y}{x^2+y^2-1} \Rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 2y$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2y = 1$.

17. (d) दिया गया है सम्मिश्र फलन $z = i\log(2-\sqrt{3})$.

$e^{iz} = e^{i^2\log(2-\sqrt{3})} = e^{-\log(2-\sqrt{3})} = e^{\log(2-\sqrt{3})^{-1}}$

या $e^{iz} = (2+\sqrt{3})$. इसीप्रकार $e^{-iz} = (2-\sqrt{3})$.

हम जानते हैं कि

$\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \dfrac{(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})}{2} = 2.$

18. (a) माना सम्मिश्र संख्यायें z_1, z_2, z_3 समबाहु त्रिभुज ABC के क्रमशः शीर्षों A, B, C को निरूपित करते हैं। यदि O मूलबिन्दु है $\overrightarrow{OA} = z_1, \overrightarrow{OB} = z_2, \overrightarrow{OC} = z_3$

अतः $|z_1| = |z_2| = |z_3| \Rightarrow OA = OB = OC$ अर्थात् O, ΔABC का परिकेन्द्र है। अतः $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

नोट : विद्यार्थी इस प्रश्न को सूत्र की तरह याद रखें।

19. (b) $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\dfrac{\theta}{2} + i\sin\dfrac{\theta}{2})(\cos\dfrac{\theta}{2^2} + i\sin\dfrac{\theta}{2^2}) .... \infty$

$= \cos\left(\theta + \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\theta}{2^2} + ...\right) + i\sin\left(\theta + \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\theta}{2^2} + ...\right)$

$= \cos\left(\dfrac{\theta}{1-(1/2)}\right) + i\sin\left(\dfrac{\theta}{1-(1/2)}\right) = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$.

20. (b) $S = 1 + 3\alpha + 5\alpha^2 + ... + (2n-1)\alpha^{n-1}$ .....(i)

$\Rightarrow \alpha S = \alpha + 3\alpha^2 + 5\alpha^3 + ... + (2n-1)\alpha^n$ .....(ii)

समीकरण (ii) को (i) में से घटाने पर,

$(1-\alpha)S = 1 + 2\alpha + 2\alpha^2 + ... + 2\alpha^{n-1} - (2n-1)\alpha^n$

$= 2(1 + \alpha + \alpha^2 ..... + \alpha^{n-1}) - 1 - (2n-1)\alpha^n$

$= \dfrac{2(1-\alpha^n)}{1-\alpha} - 2n = -2n\ (\because \alpha^n = 1) \Rightarrow S = \dfrac{-2n}{(1-\alpha)}$.

* * *