Chapter-4
AP GP & HP

एक श्रेणी वह अनुक्रम है, जिसके पद किसी विशेष रूप में हों अर्थात् जिसके पद किसी निश्चित नियम के अन्तर्गत व्यवस्थित हों।

उदाहरणार्थ : 1, 3, 5, 7, 9,........ एक श्रेणी है, जिसके पद $T_n = 2n - 1$ के अन्तर्गत व्यवस्थित किये गए हैं, जहाँ T_n श्रेणी (Progression) के n वें पद को व्यक्त करता है।

श्रेणी के मुख्यतः तीन प्रकार हैं : समान्तर श्रेणी, गुणोत्तर श्रेणी तथा हरात्मक श्रेणी।

किन्तु यहाँ श्रेणी के अध्ययन को पाँच भागों में बाँटा गया है

- समान्तर श्रेणी
- गुणोत्तर श्रेणी
- समान्तरीय -गुणोत्तर श्रेणी
- हरात्मक श्रेणी
- विविध श्रेणियाँ

समान्तर श्रेणी

परिभाषा (Definition)

संख्याओं का एक अनुक्रम $< t_n >$ समान्तर श्रेणी कहलाता है, जब अन्तर $t_n - t_{n-1}$ एक अचर राशि हो, $\forall n \in N$. यह अचर, समान्तर श्रेणी का सार्वान्तर कहलाता है, जिसे सामान्यतः d से व्यक्त करते हैं।

यदि 'a' प्रथम पद तथा 'd' सार्वान्तर हो, तो समान्तर श्रेणी को निम्नांकित रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$a, a+d, a+2d, a+3d, ...$

उदाहरणार्थ : 2, 7, 12, 17, 22, ... एक समान्तर श्रेणी है, जिसका प्रथम पद 2 तथा सार्वान्तर 5 हैं।

एक अनुक्रम समान्तर श्रेणी है या नहीं, इसे ज्ञात करने की कार्य-विधि निम्नलिखित है,

Step I: a_n (अनुक्रम का n वाँ पद) ज्ञात करें।

Step II: a_n में n की जगह $n-1$ रखकर a_{n-1} ज्ञात करें।

Step III: $a_n - a_{n-1}$ का मान ज्ञात करें।

यदि $a_n - a_{n-1}$, n पर निर्भर नहीं करता है, तो अनुक्रम एक समान्तर श्रेणी होगा, अन्यथा नहीं। समान्तर श्रेणी एक रेखीय फलन है, जिसका प्रान्त (domain) प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है।

$\therefore$ $t_n = A_n + B$, समांतर श्रेणी का n वाँ पद प्रदर्शित करता है, जिसका सार्वान्तर A है।

समांतर श्रेणी का व्यापक पद (General term of an A.P.)

(1) माना किसी समान्तर श्रेणी का प्रथम पद 'a' व सार्वान्तर 'd' हैं, तो इसका n वाँ पद $a+(n-1)d$ होगा अर्थात् $T_n = a+(n-1)d$.

(2) **समान्तर श्रेणी का, अन्त से *n* वाँ पद :** माना n पदों वाली समान्तर श्रेणी का प्रथम पद 'a' व सार्वान्तर 'd' हो, तो श्रेणी का अन्त से p वाँ पद, प्रारम्भ से $(n-p+1)$ वाँ पद होगा अर्थात्,

अन्त से p वाँ पद $= T_{(n-p+1)} = a+(n-p)d$.

समांतर श्रेणी के लिए पदों का चयन
Selection of terms in an A.P.)

जब योगफल दिया गया हो, तो निम्न प्रकार से पदों का चयन करते हैं :

सारणी 4 : 1

पदों की संख्या	चयनित पद
3	$a-d, a, a+d$
4	$a-3d, a-d, a+d, a+3d$
5	$a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$

सामान्यतः, किसी समान्तर श्रेणी में यदि $(2r+1)$ पद (अर्थात् पदों की संख्या-विषम) लेना हो, तो निम्नांकित पदों का चयन करते हैं :

$a-rd, a-(r-1)d, ..., a-d, a, a+d, ..., a+(r-1)d, a+rd$

तथा $a-(2r-1)d, a-(2r-3)d, ..., a-d, a+d, ..., a+(2r-1)d$, यदि $2r$ पद लेना हो।

यदि योगफल नहीं दिया गया है, तो निम्न प्रकार से पदों का चयन करते हैं :

सारणी 4 : 2

पदों की संख्या	चयनित पद
3	$a, a+d, a+2d$
4	$a, a+d, a+2d, a+3d$
5	$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d$

समान्तर श्रेणी के *n* पदों का योगफल

(Sum of n terms of an A.P.)

श्रेणी $a+(a+d)+(a+2d)+.......+\{a+(n-1)d\}$ के n पदों का योगफल $S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ और $S_n=\frac{n}{2}(a+l)$, जहाँ l = अंतिम पद = $a+(n-1)d$.

समांतर माध्य (Arithmetic mean)

यदि a, A, b समान्तर श्रेणी में हों, तो A को a व b का समान्तर माध्य कहते हैं।

(1) यदि $a, A_1, A_2, A_3, ..., A_n, b$ समान्तर श्रेणी में हों, तो a और b के बीच n समान्तर माध्य $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ होंगे।

(2) **समान्तर माध्य का समावेश**

(i) **a व b के बीच एक समान्तर माध्य** : यदि a और b दो वास्तविक संख्याएँ हैं, तो a और b के बीच समान्तर माध्य $=\frac{a+b}{2}$

(ii) **a व b के बीच n समान्तर माध्य** . यदि $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$; a एवं b के बीच n समान्तर माध्य हैं, तो

$$A_1=a+d=a+\frac{b-a}{n+1},\ A_2=a+2d=a+2\frac{b-a}{n+1},$$

$$A_3=a+3d=a+3\frac{b-a}{n+1}, ..., A_n=a+nd=a+n\frac{b-a}{n+1}.$$

समांतर श्रेणी के गुणधर्म (Properties of A.P.)

(1) यदि $a_1, a_2, a_3.....$ समान्तर श्रेणी में हैं, जिसका सार्वान्तर d है, तो एक अशून्य स्थिर संख्या $k \in R$ के लिए,

(i) $a_1 \pm k, a_2 \pm k, a_3 \pm k,.....$ समान्तर श्रेणी में होंगे, जिसका सार्वान्तर d होगा।

(ii) $ka_1, ka_2, ka_3....$ समान्तर श्रेणी में होंगे, जिसका सार्वान्तर = kd होगा।

(iii) $\frac{a_1}{k}, \frac{a_2}{k}, \frac{a_3}{k}...$ समान्तर श्रेणी में होंगे, जिसका सार्वान्तर = d/k होगा।

(2) किसी समान्तर श्रेणी में, प्रारम्भ तथा अन्त से समदूरस्थ पदों का योगफल एक नियतांक होता है, जो कि प्रथम तथा अन्तिम पदों के योगफल के बराबर होता है, अर्थात् $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=....$

(3) यदि किसी समान्तर श्रेणी में पदों की संख्या विषम है, तो पदों का योगफल, मध्य पद तथा पदों की संख्या के गुणनफल के बराबर होता है।

(4) यदि किसी समान्तर श्रेणी में पदों की संख्या सम है, तो मध्य के दो पदों का समान्तर माध्य, प्रथम तथा अन्तिम पद के समान्तर माध्य के बराबर होता है।

(5) यदि किसी समान्तर श्रेणी में पदों की सख्या विषम है, तो इसका मध्य पद, प्रथम तथा अन्तिम पद के समान्तर माध्य के बराबर होता है।

(6) यदि $a_1, a_2, ...a_n$ तथा $b_1, b_2, ...b_n$ दो समान्तर श्रेणियाँ हैं, तो $a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, ...a_n \pm b_n$ भी समान्तर श्रेणी में होंगे, जिसका सार्वान्तर $d_1 \pm d_2$ होगा, जहाँ d_1 एवं d_2 दी गई समान्तर श्रेणियों के सार्वान्तर हैं।

(7) तीन संख्याएँ a, b, c समान्तर श्रेणी में होंगी, यदि और केवल यदि $2b=a+c$.

(8) यदि T_n, T_{n+1} तथा T_{n+2} किसी समान्तर श्रेणी के तीन क्रमागत पद हैं, तो $2T_{n+1}=T_n+T_{n+2}$

(9) यदि किसी समान्तर श्रेणी से समान अन्तराल पर स्थित पद चुने जाएँ, तो वे समान्तर श्रेणी में होंगे।

गुणोत्तर श्रेणी

परिभाषा (Definition)

एक श्रेणी गुणोत्तर श्रेणी होगी, यदि इसके प्रत्येक पद तथा इससे पूर्ववर्ती पद का अनुपात सदैव नियत हो। यह नियत अनुपात सार्वानुपात कहलाता है, जिसे साधारणतः r से व्यक्त करते हैं।

उदाहरणार्थ : अनुक्रम 4, 12, 36, 108, ... एक गुणोत्तर श्रेणी है, क्योंकि $\frac{12}{4}=\frac{36}{12}=\frac{108}{36}=.....=3$, जो कि नियतांक है।

स्पष्ट रूप से, इस गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद 4 तथा सार्वानुपात 3 है।

अनुक्रम $\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{9}{8}, ...$ एक गुणोत्तर श्रेणी है, जिसका प्रथम पद $\frac{1}{3}$ तथा सार्वानुपात $\left(-\frac{1}{2}\right)\Big/\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{3}{2}$ है।

गुणोत्तर श्रेणी का व्यापक पद (General term of a G.P.)

(1) हम जानते हैं, कि अनुक्रम $a, ar, ar^2, ar^3, ...ar^{n-1}$ एक गुणोत्तर श्रेणी है।

यहाँ प्रथम पद 'a' तथा सार्वानुपात 'r' है।

गुणोत्तर श्रेणी का व्यापक पद या n वाँ पद $T_n=ar^{n-1}$ होगा, जहाँ $r=\frac{T_2}{T_1}=\frac{T_3}{T_2}=......$

(2) **किसी गुणोत्तर श्रेणी का अन्त से p वाँ पद** : यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी में 'n' पद हैं, तो अन्त से p वाँ पद = प्रारम्भ से $(n-p+1)$ वाँ पद $=ar^{n-p}$

तथा उस गुणोत्तर श्रेणी का अन्त से p वाँ पद, जिसका अन्तिम पद l तथा सार्वानुपात r है, $l\left(\frac{1}{r}\right)^{p-1}$ होगा।

गुणोत्तर श्रेणी में पदों का चयन (Selection of terms in a G.P.)

(1) यदि पदों का गुणनफल दिया गया हो, तो निम्नांकित विधि द्वारा पदों का चयन करते हैं

सारणी 4 : 3

पदों की संख्या	चयनित पद
3	$\frac{a}{r}, a, ar$
4	$\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$
5	$\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$

(2) यदि गुणनफल नहीं दिया गया है, तो निम्नांकित विधि के द्वारा पदों का चयन करते हैं

सारणी 4 : 4

पदों की संख्या	चयनित पद
3	a, ar, ar^2
4	a, ar, ar^2, ar^3
5	a, ar, ar^2, ar^3, ar^4

गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम '*n*' पदों का योगफल
(Sum of first 'n' terms of a G.P.)

यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद a, सार्वानुपात r हो, तो श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $S_n = \frac{a-lr}{1-r}$, जब $|r|<1$

$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$, $S_n = \frac{lr-a}{r-1}$, जब $|r|>1$

$S_n = na$, जब $r=1$

गुणोत्तर श्रेणी के अनन्त पदों का योगफल

(Sum of infinite terms of a G.P.)

(1) जब $|r|<1$, (या $-1<r<1$); $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

(2) यदि $r \ge 1$, तो S_∞ का अस्तित्व नहीं होगा।

गुणोत्तर माध्य (Geometric mean)

यदि a, G, b गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तो G को a एवं b का गुणोत्तर माध्य कहते हैं।

(1) यदि $a, G_1, G_2, G_3, ... G_n, b$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तो $G_1, G_2, G_3, ... G_n$; a एवं b के बीच n गुणोत्तर माध्य कहलाते हैं।

(2) **गुणोत्तर माध्य स्थापित करना : (i) a एवं b के बीच एक गुणोत्तर माध्य:** यदि a तथा b दो वास्तविक संख्याएँ हैं, तो a एवं b के बीच एक गुणोत्तर माध्य $=\sqrt{ab}$.

(ii) **a एवं b के बीच n गुणोत्तर माध्य :** यदि $G_1, G_2, G_3, ..., G_n$; a एवं b के बीच n गुणोत्तर माध्य हैं, तो

$$G_1 = ar = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad G_2 = ar^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}},$$

$$G_3 = ar^3 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}, ..., G_n = ar^n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

गुणोत्तर श्रेणी के गुणधर्म (Properties of G.P.)

(1) यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के सभी पदों को किसी अशून्य नियतांक से गुणा किया जाए या भाग दिया जाए, तब परिणामी अनुक्रम भी एक गुणोत्तर श्रेणी होता है, जिसका सार्वानुपात वही होगा।

(2) किसी गुणोत्तर श्रेणी के पदों का व्युत्क्रम एक गुणोत्तर श्रेणी बनाता है, जिसका सार्वानुपात दी गई गुणोत्तर श्रेणी के सार्वानुपात का व्युत्क्रम होता है।

(3) यदि किसी सीमित गुणोत्तर श्रेणी (जिसका सार्वानुपात r है) के प्रत्येक पद का समान घात (k) लिया जाए, तो प्राप्त अनुक्रम भी गुणोत्तर श्रेणी में होगा, जिसका सार्वानुपात r^k होगा।

(4) किसी सीमित गुणोत्तर श्रेणी में, प्रारम्भ तथा अन्त से समान अन्तराल पर स्थित पदों का गुणनफल सदैव समान होता है और यह प्रथम तथा अन्तिम पद के गुणनफल के बराबर होता है।

अर्थात्, यदि $a_1, a_2, a_3, ... a_n$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तो $a_1 a_n = a_2 a_{n-1} = a_3 a_{n-2} = a_4 a_{n-3} = ... = a_r . a_{n-r+1}$

(5) यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी में से समान अन्तराल पर स्थित पदों का चयन किया जाए, तो इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम गुणोत्तर श्रेणी में होगा।

(6) यदि $a_1, a_2, a_3, ..., a_n ......$ एक अशून्य अऋणात्मक पदों की गुणोत्तर श्रेणी है, तो $\log a_1, \log a_2, \log a_3, ... \log a_n, ...$ एक समान्तर श्रेणी होगी तथा इसका विलोम भी सत्य है।

(7) तीन अशून्य संख्याएँ a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में होंगी, यदि और केवल यदि, $b^2 = ac$.

(8) यदि n पदों की किसी गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद a तथा अन्तिम पद l है, तो सभी पदों का गुणनफल $(al)^{n/2}$ होगा।

(9) यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी, जिसका सार्वानुपात r है, में n राशियाँ हैं, तथा S_m प्रथम m पदों के योगफल को व्यक्त करता है, तो प्रत्येक दो-दो पदों को एक साथ लेकर प्राप्त गुणनफलों का योगफल $\frac{r}{r+1} S_n S_{n-1}$ होगा।

(10) यदि $a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, ..., a^{x_n}$ गुणोत्तर श्रेणी में हों, तो $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ समांतर श्रेणी में होंगे।

हरात्मक माध्य

परिभाषा (Definition)

एक श्रेणी हरात्मक श्रेणी (H.P.) कहलाती है, यदि इसके पदों के व्युत्क्रम समान्तर श्रेणी में हों।

मानक रूप : $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{a+2d} + ...$

उदाहरणार्थ : अनुक्रम $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, ...$ एक हरात्मक श्रेणी है, क्योंकि अनुक्रम 1, 3, 5, 7, 9, ...एक समान्तर श्रेणी है।

हरात्मक श्रेणी का व्यापक पद (General term of an H.P.)

यदि हरात्मक श्रेणी $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, ...$ है, तो संगत समान्तर श्रेणी $a, a+d, a+2d, ...$ होगी।

समान्तर श्रेणी का n वाँ पद $= a+(n-1)d$

$\therefore$ हरात्मक श्रेणी का n वाँ पद $= \frac{1}{a+(n-1)d}$

हरात्मक श्रेणी के प्रश्नों के हल के लिए, संगत समान्तर श्रेणी बनाना चाहिए।

$\therefore$ **व्यापक पद :** $T_n = \frac{1}{a+(n-1)d}$ या हरात्मक श्रेणी का व्यापक पद $= \frac{1}{\text{समान्तर श्रेणी का व्यापक पद}}$

हरात्मक माध्य (Harmonic mean)

यदि तीन या अधिक संख्याएँ हरात्मक श्रेणी में हैं, तो प्रथम तथा अन्तिम पदों के बीच की संख्याएँ उनके बीच हरात्मक माध्य कहलाती हैं।

उदाहरणार्थ : $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$ हरात्मक श्रेणी में हैं। अतः 1 तथा $\frac{1}{9}$ के मध्य $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ तीन हरात्मक माध्य हैं।

यदि a, H, b हरात्मक श्रेणी में हैं, तो H को a तथा b के बीच हरात्मक माध्य कहते हैं।

हरात्मक माध्य स्थापित करना

(i) a व b के बीच एक हरात्मक माध्य $= \frac{2ab}{a+b}$

(ii) n अशून्य संख्याओं $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ का हरात्मक माध्य H है, तो

$$\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}{n}$$

(iii) माना a व b दी गई दो संख्याएँ हैं। यदि a व b के मध्य n संख्याएँ $H_1, H_2, ... H_n$ इस प्रकार ली जायें कि अनुक्रम $a, H_1, H_2, H_3 ...... H_n, b$ हरात्मक श्रेणी में हों, तो $H_1, H_2, ..., H_n$; a व b के मध्य n हरात्मक माध्य कहलाते हैं।

अब, $a, H_1, H_2, ... H_n, b$ हरात्मक श्रेणी में हैं

$\Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{H_1}, \frac{1}{H_2}, ... \frac{1}{H_n}, \frac{1}{b}$ समान्तर श्रेणी में होंगे।

माना इस समान्तर श्रेणी का सार्वान्तर D है, तो

$\frac{1}{b} = (n+2)$ वाँ पद $= T_{n+2}$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + (n+1)D \Rightarrow D = \frac{a-b}{(n+1)ab}$$

अतः दी गई दो संख्याओं a और b के बीच n हरात्मक माध्य स्थापित किये जाएँ, तो संगत समान्तर श्रेणी का सार्वान्तर $D = \frac{a-b}{(n+1)ab}$ होगा तथा

$\frac{1}{H_1} = \frac{1}{a} + D$, $\frac{1}{H_2} = \frac{1}{a} + 2D$,....., $\frac{1}{H_n} = \frac{1}{a} + nD$,जहाँ $D = \frac{a-b}{(n+1)ab}$.

हरात्मक श्रेणी के गुणधर्म (Properties of H.P.)

(1) हरात्मक श्रेणी का कोई पद शून्य नहीं हो सकता है।

(2) यदि a और b के बीच हरात्मक माध्य H है, तो

(i) $\frac{1}{H-a} + \frac{1}{H-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

(ii) $(H-2a)(H-2b) = H^2$

(iii) $\frac{H+a}{H-a} + \frac{H+b}{H-b} = 2$

समान्तरीय . गुणोत्तर श्रेणी

परिभाषा (Definition)

समान्तर तथा गुणोत्तर श्रेणी के संयोजन को समान्तरीय गुणोत्तर श्रेणी कहते हैं।

समान्तरीयदृगुणोत्तर श्रेणी का *n* वाँ पद (n^{th} term of A.G.P.)

यदि $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ एक समान्तर श्रेणी है तथा $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ एक गुणोत्तर श्रेणी है, तो अनुक्रम $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3,$ ......, $a_nb_n, ...$ एक समान्तरीय-गुणोत्तर अनुक्रम कहलाता है।

अतः समान्तरीय-गुणोत्तर अनुक्रम का व्यापक रूप

$a, (a+d)r, (a+2d)r^2, (a+3d)r^3, ...$ होगा।

सममिति से हम पाते हैं, कि इस अनुक्रम का n वाँ पद $[a+(n-1)d]r^{n-1}$ होगा।

यदि $a, (a+d)r, (a+2d)r^2, (a+3d)r^3, ...$ एक समान्तरीय-गुणोत्तर अनुक्रम है, तो $a + (a+d)r + (a+2d)r^2 + (a+3d)r^3 + ...$ एक समान्तरीय-गुणोत्तर श्रेणी होगी।

समान्तरीय – गुणोत्तर श्रेणी का योगफल (Sum of A.G.P.)

(1) **n पदों का योगफल** : किसी समान्तरीय-गुणोत्तर अनुक्रम $a, (a+d)r, (a+2d)r^2$, $(a+3d)r^3, ...$ के n पदों का योगफल निम्न सूत्र द्वारा दिया जाता है,

$$S_n = \begin{cases} \frac{a}{1-r} + dr\frac{(1-r^{n-1})}{(1-r)^2} - \frac{\{a+(n-1)d\}r^n}{1-r}, \text{ जब } r \neq 1 \\ \frac{n}{2}[2a+(n-1)d], \text{ जब } r = 1 \end{cases}$$

(2) **अनन्त अनुक्रम का योगफल** : माना $|r| < 1$, तो $r^n, r^{n-1} \to 0$, जबकि $n \to \infty$ और यह सत्यापित किया जा सकता है कि $n.r^n \to 0$, जब $n \to \infty$, अतः $S_n \to \frac{a}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2}$, जब $n \to \infty$

दूसरे शब्दों में, जब $|r| < 1$ तो समान्तरीय-गुणोत्तर श्रेणी के अनन्त पदों का योगफल $S_\infty = \frac{a}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2}$, $S_\infty = \frac{a}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2}$.

योगफल ज्ञात करने की विधि (Method for finding sum)

यह विधि n पदों तथा अनन्त पदों के योगफल, दोनों के लिए प्रयुक्त होती है।

माना श्रेणी का योगफल S है, तब इसे सार्वानुपात से गुणा कर घटाएँ। इस तरह हमें एक गुणोत्तर श्रेणी प्राप्त होती है, जिसका योगफल आसानी से निकाला जा सकता है।

अन्तर विधि (Method of difference)

यदि किसी श्रेणी के क्रमागत पदों का अन्तर समान्तर श्रेणी या गुणोत्तर श्रेणी में हो, तो श्रेणी का n वाँ पद निम्नलिखित विधि से निकाला जा सकता है:

Step I: n वें पद को T_n से तथा श्रेणी के n पदों के योगफल को S_n से व्यक्त करें।

Step II: दी गई श्रेणी को पुनः इस प्रकार लिखें कि प्रत्येक पद दाहिनी ओर एक स्थान आगे हो।

Step III: दूसरी श्रेणी को पहली श्रेणी से घटाकर T_n का मान ज्ञात करें।

Step IV: T_n से S_n, योगफल की उपयुक्त विधि से निकाला जा सकता है।

उदाहरणार्थ : श्रेणी 1 + 3 + 6 + 10 + 15 +........n पदों तक, का योगफल ज्ञात करने के लिए क्रमागत पदों का अन्तर 3 – 1, 6 – 3, 10 – 6, 15 – 10.....अर्थात् 2, 3, 4, 5..... जो कि समान्तर श्रेणी में है। यह अन्तर गुणोत्तर श्रेणी में भी हो सकता है।

अब $S = 1 + 3 + 6 + 10 + ... + T_{n-1} + T_n$

$S = \quad 1 + 3 + 6 + 10 + ... + T_{n-1} + T_n$

घटाने पर, $0 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + (T_n - T_{n-1}) - T_n$

$\Rightarrow T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ...$ n पदों तक

$\Rightarrow T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$, $\therefore S_n = \Sigma T_n = \frac{1}{2}[\Sigma n^2 + \Sigma n]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

विविध श्रेणियाँ

विशेष श्रेणियाँ (Special series)

(1) प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योगफल

$$= 1 + 2 + 3 + ... + n = \sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(2) प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योगफल

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(3) प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों का योगफल

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = \sum_{r=1}^{n} r^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

दो संख्याओं के बीच समान्तर, गुणोत्तर तथा हरात्मक माध्यों के गुणधर्म (Properties of Arithmetic, Geometric, Harmonic means between two given numbers)

माना दो संख्याओं a और b के समान्तर, गुणोत्तर तथा हरात्मक माध्य क्रमशः A, G और H हैं, अतः $A = \frac{a+b}{2}, G = \sqrt{ab}$ तथा $H = \frac{2ab}{a+b}$

तब $A = \frac{a+b}{2}, G = \sqrt{ab}$ तथा $H = \frac{2ab}{a+b}$.

इन तीनों माध्यों के निम्नलिखित गुण हैं :

(1) $A \geq G \geq H$

$A = \frac{a+b}{2}, G = \sqrt{ab}$ तथा $H = \frac{2ab}{a+b}$

$\therefore A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$

$\Rightarrow A \geq G$ .....(i)

$G - H = \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} = \sqrt{ab}\left(\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a+b}\right) = \frac{\sqrt{ab}}{a+b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$

$\Rightarrow G \geq H$ .....(ii)

(i) तथा (ii) से, $A \geq G \geq H$

ध्यान दें कि बराबर का चिन्ह तभी सत्यापित है, जब $a = b$.

(2) A, G, H एक गुणोत्तर श्रेणी बनाते हैं, अर्थात् $G^2 = AH$

$AH = \frac{a+b}{2} \times \frac{2ab}{a+b} = ab = (\sqrt{ab})^2 = G^2$. अतः $G^2 = AH$.

(3) वह समीकरण जिसके मूल a व b हैं, $x^2 - 2Ax + G^2 = 0$ होगा।

$\therefore x^2 - (a+b)x + ab = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2Ax + G^2 = 0$, $\left[\because A = \frac{a+b}{2} \text{ तथा } G = \sqrt{ab}\right]$

मूलों a व b के मान $A \pm \sqrt{A^2 - G^2}$ द्वारा दिये जाते हैं।

(4) यदि A, G, H दी गई तीन संख्याओं a, b तथा c के समान्तर, गुणोत्तर तथा हरात्मक माध्य हैं, तो वह समीकरण जिसके मूल a, b तथा c हैं, $x^3 - 3Ax^2 + \frac{3G^3}{H}x - G^3 = 0$ होगा।

$A = \frac{a+b+c}{3}, G = (abc)^{1/3}$ तथा $\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}$

$\Rightarrow a+b+c = 3A, abc = G^3$ तथा $\frac{3G^3}{H} = ab + bc + ca$

वह समीकरण, जिसके मूल a, b, c हैं,

$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = 0$ होगा

$\Rightarrow x^3 - 3Ax^2 + \frac{3G^3}{H}x - G^3 = 0$.

समान्तर, गुणोत्तर तथा हरात्मक श्रेणियों में सम्बन्ध (Relation between A.P., G.P. and H.P.)

(1) यदि A, G, H ; a और b के बीच समान्तर, गुणोत्तर तथा हरात्मक माध्य हैं, तो $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} = \begin{cases} A, \text{ जब } n = 0 \\ G, \text{ जब } n = -1/2 \\ H, \text{ जब } n = -1 \end{cases}$

(2) यदि a और b के बीच दो समान्तर माध्य A_1, A_2, दो गुणोत्तर माध्य G_1, G_2 तथा दो हरात्मक माध्य H_1, H_2 हों, तो $\frac{G_1G_2}{H_1H_2} = \frac{A_1+A_2}{H_1+H_2}$

(3) **समान्तर, गुणोत्तर तथा हरात्मक श्रेणी की पहचान :** यदि a, b, c किसी अनुक्रम के तीन क्रमागत पद हैं तथा यदि $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a}$, तब a, b, c समान्तर श्रेणी में होंगे। यदि $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}$, तब a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में होंगे।

यदि $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$, तब a, b, c हरात्मक श्रेणी में होंगे।

(4) यदि किसी समान्तर/गुणोत्तर/हरात्मक श्रेणी में पदों की संख्या विषम है, तो प्रथम तथा अन्तिम पद का समान्तर/गुणोत्तर/हरात्मक माध्य, श्रेणी का मध्य पद होगा।

(5) यदि किसी समान्तर/गुणोत्तर/हरात्मक श्रेणी में पदों की संख्या सम है, तो प्रथम तथा अन्तिम पद का समान्तर/गुणोत्तर/हरात्मक माध्य, बीच के दो पदों के क्रमशः समान्तर/गुणोत्तर/हरात्मक माध्य के बराबर होगा।

(6) यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के p वें, q वें तथा r वें पद गुणोत्तर श्रेणी में हों, तो p, q, r समान्तर श्रेणी में होंगे।

(7) यदि a, b, c समान्तर श्रेणी तथा गुणोत्तर श्रेणी में हों, तो $a = b = c$.

(8) यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं, तो x^a, x^b, x^c गुणोत्तर श्रेणी में होंगे, (जबकि $x \neq \pm 1$).

Tips & Tricks

- यदि किसी समान्तर श्रेणी के पद T_k तथा T_p दिए हुए हों, तो T_n ज्ञात करने के लिए सूत्र है, $\frac{T_n - T_k}{n-k} = \frac{T_p - T_k}{p-k}$.
- यदि किसी समान्तर श्रेणी के लिए, $pT_p = qT_q$, तो $T_{p+q} = 0$.
- यदि किसी समान्तर श्रेणी का p वाँ पद q तथा q वाँ पद p है, तो $T_{p+q} = 0$ तथा $T_n = p + q - n$.
- यदि किसी समान्तर श्रेणी का p वाँ पद $\frac{1}{q}$ तथा q वाँ पद $\frac{1}{p}$ है, तो इसका pq वाँ पद 1 होगा।
- किसी समान्तर श्रेणी का सार्वान्तर $d = S_2 - 2S_1$ द्वारा ज्ञात किया जाता है, जबकि S_2 प्रथम दो पदों का योगफल व S_1 प्रथम पद का योगफल या प्रथम पद है।
- यदि n पदों का योगफल S_n दिया हुआ हो, तो व्यापक पद $T_n = S_n - S_{n-1}$, जहाँ S_{n-1} समान्तर श्रेणी के $(n-1)$ पदों का योग है।
- एक समान्तर श्रेणी के n पदों का योगफल, $An^2 + Bn$ (n में द्विघात व्यंजक) के रूप में होता है, तो उसका सार्वान्तर n^2 के गुणांक का दो गुना अर्थात् $2A$ होता है।
- **महत्वपूर्ण परिणाम**
  - प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं का योगफल
    $= 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = \sum_{r=1}^{n}(2r-1) = n^2$.
  - प्रथम n सम प्राकृत संख्याओं का योगफल
    $= 2 + 4 + 6 + ... + 2n = \sum_{r=1}^{n} 2r = n(n+1)$.
- • किसी समान्तर श्रेणी में, यदि p पदों का योगफल q तथा q पदों का योगफल p हो, तो $(p+q)$ पदों का योगफल $\{-(p+q)\}$ होगा।

  • यदि किसी समान्तर श्रेणी के p पदों का योगफल, q पदों के योगफल के बराबर हो, तो $(p+q)$ पदों का योगफल शून्य होगा।

• यदि किसी समान्तर श्रेणी का p वाँ पद $\frac{1}{q}$ तथा q वाँ पद $\frac{1}{p}$ है, तो pq पदों का योगफल $S_{pq} = \frac{1}{2}(pq+1)$ होगा।

✍ a और b के बीच n समान्तर माध्यों का योगफल, a और b के मध्य एक समान्तर माध्य के n गुना के बराबर होता है, अर्थात्

$$A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n = n\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

✍ यदि A_1 तथा A_2, a एवं b के बीच दो समान्तर माध्य हों, तो $A_1 = \frac{1}{3}(2a+b), A_2 = \frac{1}{3}(a+2b)$.

✍ दो संख्याओं के मध्य, $\frac{m \text{ समान्तर माध्यों का योगफल}}{n \text{ समान्तर माध्यों का योगफल}} = \frac{m}{n}$.

✍ यदि किसी श्रेणी में पदों की संख्या विषम है, तो केवल एक मध्य पद होगा, जो $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ पद होगा।

✍ यदि किसी श्रेणी में पदों की संख्या सम है, तो दो मध्य पद होंगे, जो कि $\left(\frac{n}{2}\right)$ वाँ तथा $\left\{\left(\frac{n}{2}\right)+1\right\}$ वाँ पद होंगे।

✍ यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के पद T_n व T_k के मान दिये गये हों, तो T_p को सूत्र $\left(\frac{T_n}{T_k}\right)^{\frac{1}{n-k}} = \left(\frac{T_p}{T_k}\right)^{\frac{1}{p-k}}$ के द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

✍ यदि a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तो

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{b+c}{b-c} \text{ या } \frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b} \text{ या } \frac{a+b}{b+c} = \frac{a}{b}.$$

✍ माना किसी गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद धनात्मक है तथा यदि $r > 1$, तब यह एक वर्धमान गुणोत्तर श्रेणी होगी, किन्तु यदि r धनात्मक है तथा 1 से कम है, अर्थात् $0 < r < 1$, तो यह एक ह्रासमान गुणोत्तर श्रेणी होगी।

✍ माना, किसी गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद ऋणात्मक है तथा यदि $r > 1$ हो, तब यह एक ह्रासमान गुणोत्तर श्रेणी होगी, किन्तु यदि $0 < r < 1$, तो यह एक वर्धमान गुणोत्तर श्रेणी होगी।

✍ यदि $a, b, c, d,...$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तो वे सतत् समानुपात में होंगे, अर्थात् , $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = ... = \frac{1}{r}$.

✍ a एवं b के बीच n गुणोत्तर माध्यों का गुणनफल, उनके बीच एक गुणोत्तर माध्य के n वीं घात के बराबर होता है

अर्थात, $G_1 G_2 G_3 ...... G_n = (\sqrt{ab})^n$.

✍ $a_1 a_2 a_3 ...... a_n$ का गुणोत्तर माध्य $= (a_1 a_2 a_3 ..... a_n)^{1/n}$

✍ यदि दो संख्याओं a एवं b के बीच दो गुणोत्तर माध्य G_1 तथा G_2 हैं, तो $G_1 = (a^2 b)^{1/3}, G_2 = (ab^2)^{1/3}$.

✍ a एवं $\frac{1}{a}$ के बीच n गुणोत्तर माध्यों का गुणनफल 1 होता है।

✍ यदि a एवं b के बीच n गुणोत्तर माध्य स्थापित किए गए हैं, तो $r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$.

✍ यदि a और b के बीच दो हरात्मक माध्य H_1 तथा H_2 हों, तो $H_1 = \frac{3ab}{a+2b}$ तथा $H_2 = \frac{3ab}{2a+b}$.

Ordinary Thinking

Objective Questions

समान्तर श्रेणी

1. अनुक्रम $\frac{5}{\sqrt{7}}, \frac{6}{\sqrt{7}}, \sqrt{7}$, ... है

(a) हरात्मक श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) समान्तर श्रेणी में (d) उपरोक्त सभी

2. श्रेणी $\left(3-\frac{1}{n}\right)+\left(3-\frac{2}{n}\right)+\left(3-\frac{3}{n}\right)+....$ का pवाँ पद होगा

(a) $\left(3+\frac{p}{n}\right)$ (b) $\left(3-\frac{p}{n}\right)$
(c) $\left(3+\frac{n}{p}\right)$ (d) $\left(3-\frac{n}{p}\right)$

3. श्रेणी $2\sqrt{2}+\sqrt{2}+0+.....$ का 8वाँ पद होगा

(a) $-5\sqrt{2}$ (b) $5\sqrt{2}$
(c) $10\sqrt{2}$ (d) $-10\sqrt{2}$

4. यदि किसी समांतर श्रेणी का 9वाँ पद शून्य हो, तो उसके 29वें तथा 19वें पदों का अनुपात है

(a) 1 : 2 (b) 2 : 1
(c) 1 : 3 (d) 3 : 1

5. निम्न में से कौन सी श्रेणी समान्तर श्रेणी है

(a) $f(n) = an+b; n \in N$ (b) $f(n) = kr^n; n \in N$
(c) $f(n) = (an+b)kr^n; n \in N$ (d) $f(n) = \frac{1}{a\left(n+\frac{b}{n}\right)}; n \in N$

6. श्रेणी $(-8+18i), (-6+15i), (-4+12i)$,...... का कौन सा पद शुद्ध अधिकल्पित संख्या है

(a) 5 वाँ (b) 7वाँ
(c) 8 वाँ (d) 6 वाँ

7. किसी समान्तर श्रेणी का n वाँ पद $(2n-1)$ है, तो उस श्रेणी के n पदों का योग होगा

(a) n^2-1 (b) $(2n-1)^2$
(c) n^2 (d) n^2+1

8. श्रेणी $(1\times3)+(3\times5)+(5\times7)+(7\times9)+.......$ का nवाँ पद होगा

(a) $n(2n+1)$
(b) $2n(2n-1)$
(c) $(2n+1)(2n-1)$
(d) $4n^2+1$

9. श्रेणी $101+99+97+.....+47$ में पदों की संख्या है
(a) 25 (b) 28
(c) 30 (d) 20

10. यदि समान्तर श्रेणी का p वाँ पद q और q वाँ पद p है, तो r वाँ पद होगा [RPET 1999]
(a) $p+q+r$ (b) $p+q-r$
(c) $p+r-q$ (d) $p-q-r$

11. यदि $\tan n\theta=\tan m\theta$ हो, तो θ के विभिन्न मान होंगे [Karnataka CET 1998]
(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

12. श्रेणी $3.8+6.11+9.14+12.17+.....$ का nवाँ पद होगा
(a) $3n(3n+5)$ (b) $3n(n+5)$
(c) $n(3n+5)$ (d) $n(n+5)$

13. 1 से 100 तक के 2 या 5 से विभाज्य पूर्णांकों का योग है [IIT 1984]
(a) 3000 (b) 3050
(c) 4050 (d) इनमें से कोई नहीं

14. यदि श्रेणियों $63+65+67+69+.........$ तथा $3+10+17+24+......$ के m वें पद बराबर हों, तो $m=$ [Kerala (Engg.) 2002]
(a) 11 (b) 12
(c) 13 (d) 15

15. श्रेणी $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}+.........$ के 24 पदों का योगफल है
(a) 300 (b) $300\sqrt{2}$
(c) $200\sqrt{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

16. यदि $2x, x+8, 3x+1$ समान्तर श्रेणी में हैं, तो x का मान होगा [MP PET 1984]
(a) 3 (b) 7
(c) 5 (d) -2

17. यदि किसी समान्तर श्रेणी के n पदों का योगफल $nA+n^2B$, जहाँ A, B नियतांक हैं, है। तो इनका सार्वअन्तर होगा [MNR 1977]
(a) $A-B$ (b) $A+B$
(c) $2A$ (d) $2B$

18. यदि किसी समान्तर श्रेणी का 9वाँ पद 35 एवं 19वाँ पद 75 है, तो इसका 20वाँ पद होगा [RPET 1989]
(a) 78 (b) 79
(c) 80 (d) 81

19. श्रेणी $27+9+5\frac{2}{5}+3\frac{6}{7}+........$ का 9वाँ पद है [MP PET 1983]
(a) $1\frac{10}{17}$ (b) $\frac{10}{17}$
(c) $\frac{16}{27}$ (d) $\frac{17}{27}$

20. यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में हों, तो $\frac{(a-c)^2}{(b^2-ac)}=$ [Roorkee 1975]
(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

21. यदि $\log_3 2, \log_3(2^x-5)$ व $\log_3\left(2^x-\frac{7}{2}\right)$ समान्तर श्रेणी में हों, तो x के मान होंगे [IIT 1990]
(a) $1, \frac{1}{2}$ (b) $1, \frac{1}{3}$
(c) $1, 3/2$ (d) इनमें से कोई नहीं

22. यदि किसी समान्तर अनुक्रम के pवें, qवें व rवें पद क्रमशः a, b, c हों, तो $[a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)]$ का मान होगा [MP PET 1985]
(a) 1 (b) -1
(c) 0 (d) 1/2

23. यदि दो समान्तर श्रेणियाँ के nवें पद क्रमशः $3n+8$ व $7n+15$ हों, तो उनके 12वें पदों का अनुपात होगा [MP PET 1986]
(a) 4/9 (b) 7/16
(c) 3/7 (d) 8/15

24. यदि $a_1=a_2=2, a_n=a_{n-1}-1\ (n>2)$, तब a_5 है
(a) 1 (b) -1
(c) 0 (d) -2

25. यदि संख्याएँ a, b, c, d, e एक समान्तर श्रेणी बनाती हैं, तब $a-4b+6c-4d+e$ का मान है
(a) 1 (b) 2
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

26. एक समान्तर श्रेणी का छठवां पद 2 के बराबर है, तब गुणनफल $a_1a_4a_5$ को न्यूनतम बनाने वाला समान्तर श्रेणी का सार्वअन्तर है
(a) $x=\frac{8}{5}$ (b) $x=\frac{5}{4}$
(c) $x=\frac{2}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

27. यदि किसी समान्तर श्रेणी के p वें पद का p गुना, q वें पद के q गुना के बराबर है, तब $(p+q)$ वाँ पद है [MP PET 1997; Karnataka CET 2002]
(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

28. दो समान्तर श्रेणियों के n पदों के योग का अनुपात $2n+3:6n+5$ है, तो इनके 13 वें पदों का अनुपात होगा [MP PET 2004]
(a) 53 : 155 (b) 27 : 77
(c) 29 : 83 (d) 31 : 89

29. यदि a समान्तर श्रेणी के m वें पद को प्रदर्शित करता हो, तब a का मान होगा
(a) $\frac{2}{a_{m+k}+a_{m-k}}$ (b) $\frac{a_{m+k}-a_{m-k}}{2}$
(c) $\frac{a_{m+k}+a_{m-k}}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

30. माना $r=1, 2, 3,....$ के लिये एक समान्तर श्रेणी का r वाँ पद T_r है। यदि किन्हीं धनात्मक पूर्णांकों m, n के लिये $T_m=\frac{1}{n}$ और $T_n=\frac{1}{m}$ हों, तो T_{mn} का मान होगा [IIT 1998]
(a) $\frac{1}{mn}$ (b) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$
(c) 1 (d) 0

31. यदि $1, \log_9(3^{1-x}+2), \log_3(4.3^x-1)$ समान्तर श्रेणी में हों, तो x का मान होगा [AIEEE 2002]
(a) $\log_3 4$ (b) $1-\log_3 4$
(c) $1-\log_4 3$ (d) $\log_4 3$

32. यदि a, b, c, d, e समान्तर श्रेणी में हों, तो $a+b+4c-4d+e$ का मान a के पदों में होगा (यदि संभव हो तो) [RPET 2002]

(a) $4a$ (b) $2a$
(c) 3 (d) इनमें से कोई नहीं

33. दो समान्तर श्रेणियों के n पदों के योग का अनुपात $(7n+1):(4n+27)$ है, तो इनके 11वें पदों का अनुपात होगा [AMU 1996]

(a) $2:3$ (b) $3:4$
(c) $4:3$ (d) $5:6$

34. श्रेणी $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+........$ के 9 पदों का योगफल है [MNR 1985]

(a) $-\frac{5}{6}$ (b) $-\frac{1}{2}$
(c) 1 (d) $-\frac{3}{2}$

35. किसी बहुभुज के अन्तः कोण समान्तर श्रेणी में हैं। यदि सबसे छोटा कोण 120^o और सार्वअन्तर 5 है, तो भुजाओं की संख्या होगी [IIT 1980]

(a) 8 (b) 10
(c) 9 (d) 6

36. यदि किसी समान्तर श्रेणी का p वाँ पद $\frac{1}{q}$ और q वाँ पद $\frac{1}{p}$ है, तो इसके pq पदों का योग होगा

(a) $\frac{pq-1}{2}$ (b) $\frac{1-pq}{2}$
(c) $\frac{pq+1}{2}$ (d) $-\frac{pq+1}{2}$

37. प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग होता है [MP PET 1984; RPET 1995]

(a) $n(n-1)$ (b) $\frac{n(n-1)}{2}$
(c) $n(n+1)$ (d) $\frac{n(n+1)}{2}$

38. यदि एक समान्तर श्रेणी का प्रथम पद 2 तथा सार्वअन्तर 4 हो, तो उसके 40 पदों का योग होगा [MNR 1978; MP PET 2002]

(a) 3200 (b) 1600
(c) 200 (d) 2800

39. यदि n विषम या सम हो,तो श्रेणी $1-2+3-4+5-6+......$ के n पदों का योग होगा

(a) $-\frac{n}{2}$ (b) $\frac{n-1}{2}$
(c) $\frac{n+1}{2}$ (d) $\frac{2n+1}{2}$

40. यदि समान्तर श्रेणी का प्रथम पद, दूसरा पद और अन्तिम पद क्रमशः $a, b, 2a$ हैं, तो योग होगा

(a) $\frac{ab}{b-a}$ (b) $\frac{ab}{2(b-a)}$
(c) $\frac{3ab}{2(b-a)}$ (d) $\frac{3ab}{4(b-a)}$

41. प्रथम n सम संख्याओं का योग, प्रथम n विषम संख्याओं के योग का होगा

(a) $\frac{1}{n}$ गुना (b) $(n+1)$ गुना
(c) $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ गुना (d) $(n-1)$ गुना

42. यदि $a_1, a_2, a_3.......a_n$ स.श्रे. में हों,(जहाँ i के सभी मानों के लिये $a_i > 0$), तब $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+........+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$ का मान होगा [IIT 1982]

(a) $\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$ (b) $\frac{n+1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$
(c) $\frac{n-1}{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}}$ (d) $\frac{n+1}{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}}$

43. यदि $a_1, a_2,........ ..., a_n$ एक समांतर श्रेणी में हैं, जिसका सार्वान्तर d है, तब श्रेणी $\sin d(\text{cosec } a_1.\text{cosec } a_2 + \text{cosec } a_2.\text{cosec } a_3 + ...$ $+\text{cosec } a_{n-1}\text{cosec } a_n)$ का योग होगा [RPET 2000]

(a) $\sec a_1 - \sec a_n$ (b) $\cot a_1 - \cot a_n$
(c) $\tan a_1 - \tan a_n$ (d) $\text{cosec } a_1 - \text{cosec } a_n$

44. यदि श्रेणी $2+5+8+11.........$ .. का योग 60100 हो, तो पदों की संख्या होगी [MNR 1991; DCE 2001]

(a) 100 (b) 200
(c) 150 (d) 250

45. 1 व 100 के बीच 3 के गुणज वाली प्राकृत संख्याओं का योग है [MP PET 1984]

(a) 1680 (b) 1683
(c) 1681 (d) 1682

46. $1+3+5+7+.........$ n पदों तक का योग है [MP PET 1984]

(a) $(n+1)^2$ (b) $(2n)^2$
(c) n^2 (d) $(n-1)^2$

47. यदि श्रेणी $54+51+48+..........$ ... का योग 513 हो, तो पदों की संख्या है [Roorkee 1970]

(a) 18 (b) 20
(c) 17 (d) इनमें से कोई नहीं

48. यदि किसी समान्तर श्रेणी के n पदों का योग $2n^2+5n$ हो, तो n वाँ पद होगा [RPET 1992]

(a) $4n+3$ (b) $4n+5$
(c) $4n+6$ (d) $4n+7$

49. किसी समान्तर श्रेणी का n वाँ पद $3n-1$ है, तो इसके प्रथम पाँच पदों का योगफल होगा [MP PET 1983]

(a) 14 (b) 35
(c) 80 (d) 40

50. यदि किसी समान्तर श्रेणी का प्रथम पद 10 व अन्तिम पद 50 है तथा सभी पदों का योग 300 हो, तो पदों की संख्या है [RPET 1987]

(a) 5 (b) 8
(c) 10 (d) 15

51. श्रेणी $20+19\frac{1}{3}+18\frac{2}{3}+.........$ का अधिकतम योगफल है

(a) 310 (b) 300
(c) 320 (d) इनमें से कोई नहीं

52. 100 व 1000 के बीच 9 से विभाजित संख्याओं का योग है [MP PET 1982]

(a) 55350 (b) 57228
(c) 97015 (d) 62140

53. एक समान्तर श्रेणी के m व n पदों के योगों का अनुपात $m^2 : n^2$ है, तो m वें व n वें पदों का अनुपात होगा [Roorkee 1963; MP PET 1995; Pb. CET 2001]

(a) $\frac{m-1}{n-1}$ (b) $\frac{n-1}{m-1}$

(c) $\frac{2m-1}{2n-1}$ (d) $\frac{2n-1}{2m-1}$

54. $\sum_{r=1}^{n} \log\left(\frac{a^r}{b^{r-1}}\right)$ का मान है

(a) $\frac{n}{2}\log\left(\frac{a^n}{b^n}\right)$ (b) $\frac{n}{2}\log\left(\frac{a^{n+1}}{b^n}\right)$

(c) $\frac{n}{2}\log\left(\frac{a^{n+1}}{b^{n-1}}\right)$ (d) $\frac{n}{2}\log\left(\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}\right)$

55. समीकरण $(x+1)+(x+4)+(x+7)+......... +(x+28)=155$ के लिए x का मान है

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

56. उन सभी दो अंकों की संख्याओं का योगफल, जिन्हें 4 से विभाजित करने पर शेषफल 1 मिलता हो, है

(a) 1190 (b) 1197

(c) 1210 (d) इनमें से कोई नहीं

57. यदि S_n समान्तर श्रेणी के n पदों का योगफल दर्शाता हो, तो $(S_{2n}-S_n)$ का मान है

(a) $2S_n$ (b) S_{3n}

(c) $\frac{1}{3}S_{3n}$ (d) $\frac{1}{2}S_n$

58. $\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\sqrt[4]{3}} x+\log_{\sqrt[6]{3}} x+.....+\log_{\sqrt[16]{3}} x=36$ का हल है

(a) $x=3$ (b) $x=4\sqrt{3}$

(c) $x=9$ (d) $x=\sqrt{3}$

59. यदि S_k किसी समान्तर श्रेणी के k पदों का योगफल है जिसके प्रथम पद एवं सार्वअन्तर क्रमशः 'a'व 'd' हैं, तो $\frac{S_{kn}}{S_n}$, n से स्वतंत्र होगा यदि

(a) $2a-d=0$ (b) $a-d=0$

(c) $a-2d=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

60. अनुक्रम, जिसका nवाँ पद $\left(\frac{n}{x}\right)+y$ हो, तो श्रेणी के r पदों का योगफल होगा [UPSEAT 1999]

(a) $\left\{\frac{r(r+1)}{2x}\right\}+ry$ (b) $\left\{\frac{r(r-1)}{2x}\right\}$

(c) $\left\{\frac{r(r-1)}{2x}\right\}-ry$ (d) $\left\{\frac{r(r+1)}{2y}\right\}-rx$

61. 1 व 100 के बीच के उन सभी पूर्णांकों का योगफल जो कि 3 व 5 से विभाजित न हों [MP PET 2000]

(a) 2489 (b) 4735

(c) 2317 (d) 2632

62. किसी समान्तर श्रेणी के प्रथम तथा तृतीय पदों का योग 12 है, तथा प्रथम व द्वितीय पदों का गुणनफल 24 है, तब श्रेणी का प्रथम पद होगा [MP PET 2003]

(a) 1 (b) 8

(c) 4 (d) 6

63. श्रेणी $2, 5, 8...$ के प्रथम $2n$ पदों का योग, श्रेणी $57, 59, 61...$ के प्रथम n पदों के योग के बराबर हो तो n का मान होगा [IIT Screening 2001]

(a) 10 (b) 12

(c) 11 (d) 13

64. 250 से 1000 तक की संख्यायें जो 3 से विभाजित हों, का योग होगा

(a) 135657 (b) 136557

(c) 161575 (d) 156375

65. किसी समान्तर श्रेणी का 7वाँ पद 40 है, तो श्रेणी के प्रथम 13 पदों का योग होगा [Karnataka CET 2003]

(a) 53 (b) 520

(c) 1040 (d) 2080

66. यदि $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ समांतर श्रेणी में हों, तो $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+.....+\frac{1}{a_na_{n+1}}$ का मान होगा [AMU 2002]

(a) $\frac{n-1}{a_1a_{n+1}}$ (b) $\frac{1}{a_1a_{n+1}}$

(c) $\frac{n+1}{a_1a_{n+1}}$ (d) $\frac{n}{a_1a_{n+1}}$

67. यदि किसी श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल $5n^2+2n$ हो, तो उसका द्वितीय पद है [MP PET 1996]

(a) 7 (b) 17

(c) 24 (d) 42

68. माना श्रेणी $a_1, a_2, a_3, ...a_{2n}$ एक समान्तर श्रेणी है, तब $a_1^2-a_2^2+a_3^3-.........+a_{2n-1}^2-a_{2n}^2=$

(a) $\frac{n}{2n-1}(a_1^2-a_{2n}^2)$ (b) $\frac{2n}{n-1}(a_{2n}^2-a_1^2)$

(c) $\frac{n}{n+1}(a_1^2+a_{2n}^2)$ (d) इनमें से कोई नहीं

69. यदि समान्तर श्रेणी के n पदों का योग $3n^2+5n$ व $T_m=164$ हो, तो $m=$ [RPET 1991, 95; DCE 1999]

(a) 26 (b) 27

(c) 28 (d) इनमें से कोई नहीं

70. यदि $S_n=nP+\frac{1}{2}n(n-1)Q$, जहाँ S_n समान्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योग दर्शाता है, तब सार्वअन्तर है [WB JEE 1994]

(a) $P+Q$ (b) $2P+3Q$

(c) $2Q$ (d) Q

71. माना S_n एक समान्तर श्रेणी के n पदों का योग दर्शाता है। यदि $S_{2n}=3S_n$, तो अनुपात $\frac{S_{3n}}{S_n}=$ [MNR 1993; UPSEAT 2001]

(a) 4 (b) 6

(c) 8 (d) 10

72. क्रमागत पूर्णांकों (Consecutive integers) की समान्तर श्रेणी का प्रथम पद p^2+1 है। इस श्रेणी के $(2p+1)$ पदों का योग है

(a) $(p+1)^2$ (b) $(p+1)^3$

(c) $(2p+1)(p+1)^2$ (d) $p^3+(p+1)^3$

73. एक समान्तर श्रेणी के प्रथम चार पदों का योग 56 है। अन्तिम चार पदों का योग 112 है। यदि इसका प्रथम पद 11 हो, तो पदों की संख्या है

(a) 10 (b) 11

(c) 12 (d) इनमें से कोई नहीं

74. समांतर श्रेणी 3,7,11,15...के कितने पदों का योग 406 होगा [Kerala (Engg.) 2002]

(a) 5 (b) 10

(c) 12 (d) 14

75. एक समांतर श्रेणी में 15 पद हैं। इसका पहला पद 5 है तथा योग 390 है। मध्य पद है [MP PET 1994]

(a) 23 (b) 26

(c) 29 (d) 32

76. यदि किसी समान्तर श्रेणी के 10 पदों का योगफल इसके 5 पदों के योगफल से 4 गुना है, तो प्रथम पद व सार्वअन्तर का अनुपात है [RPET 1986]

(a) 1 : 2 (b) 2 : 1

(c) 2 : 3 (d) 3 : 2

77. समान्तर श्रेणी के तीन क्रमागत पद इस प्रकार हैं कि उनका योग 18 तथा उनके वर्गों का योग 158 है तब इस श्रेणी का महत्तम पद होगा [UPSEAT 2004]

(a) 10 (b) 11

(c) 12 (d) इनमें से कोई नहीं

78. यदि $\frac{3+5+7+\text{.......... } n \text{ पदों तक}}{5+8+11+\text{......... 10 पदों तक}}=7$, तो n का मान है [MNR 1983; Pb. CET 2000]

(a) 35 (b) 36

(c) 37 (d) 40

79. यदि $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{24}$ के मध्य दो समान्तर माध्य पद A_1 व A_2 हों, तब A_1 व A_2 का मान होगा

(a) $\frac{7}{72},\frac{5}{36}$ (b) $\frac{17}{72},\frac{5}{36}$

(c) $\frac{7}{36},\frac{5}{72}$ (d) $\frac{5}{72},\frac{17}{72}$

80. यदि a और b के बीच का समान्तर माध्य $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ है, तो n का मान होगा [MP PET 1995]

(a) 1 (b) −1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

81. एक राशि, दूसरी राशि की व्युत्क्रम है। यदि दोनों राशियों का समान्तर माध्य $\frac{13}{12}$ है, तो राशियाँ होंगी

(a) $\frac{1}{4},\frac{4}{1}$ (b) $\frac{3}{4},\frac{4}{3}$

(c) $\frac{2}{5},\frac{5}{2}$ (d) $\frac{3}{2},\frac{2}{3}$

82. यदि A, दो संख्याओं का समान्तर माध्य हो और S, उन दो संख्याओं के बीच n समान्तर माध्यों का योग हो, तो

(a) $S=nA$ (b) $A=nS$

(c) $A=S$ (d) इनमें से कोई नहीं

83. प्रथम n प्राकृत संख्याओं का समान्तर माध्य होगा [RPET 1986]

(a) $\frac{n-1}{2}$ (b) $\frac{n+1}{2}$

(c) $\frac{n}{2}$ (d) n

84. a व b के बीच में n समान्तर माध्यों का योग है [RPET 1986]

(a) $\frac{n(a+b)}{2}$ (b) $n(a+b)$

(c) $\frac{(n+1)(a+b)}{2}$ (d) $(n+1)(a+b)$

85. 2 तथा 38 के बीच n समांतर माध्यों को रखने पर परिणामी श्रेणी का योगफल 200 है, तब n का मान है [MP PET 2001]

(a) 10 (b) 8

(c) 9 (d) इनमें से कोई नहीं

86. श्रेणी $a, a+nd, a+2nd$ का माध्य होगा [DCE 2002]

(a) $a+(n-1)d$ (b) $a+nd$

(c) $a+(n+1)d$ (d) इनमें से कोई नहीं

87. यदि $f(x+y, x-y)=xy$, तब $f(x,y)$ और $f(y,x)$ का समांतर माध्य होगा [AMU 2002, 05]

(a) x (b) y

(c) 0 (d) 1

88. यदि $\log 2, \log(2^n-1)$ तथा $\log(2^n+3)$ समान्तर श्रेणी में हों, तो $n=$ [MP PET 1998; Karnataka CET 2000; Pb. CET 2001]

(a) 5/2 (b) $\log_2 5$

(c) $\log_3 5$ (d) 3/2

89. यदि 4 पदों वाली एक समान्तर श्रेणी के प्रथम व अन्तिम पदों का योग 8 एवं शेष दो बीच वाली संख्याओं का गुणनफल 15 हो, तो श्रेणी की सबसे बड़ी संख्या होगी [Roorkee 1965]

(a) 5 (b) 7

(c) 9 (d) 11

90. यदि किसी समकोण त्रिभुज की भुजायें समान्तर श्रेणी में हों, तो भुजायें समानुपाती होंगी [Roorkee 1974]

(a) 1, 2, 3 (b) 2, 3, 4

(c) 3, 4, 5 (d) 4, 5, 6

91. तीन संख्यायें समान्तर श्रेणी में हैं जिनका योगफल 33 है एवं गुणनफल 792 है, तो इनमें से सबसे छोटी संख्या है [RPET 1988]

(a) 4 (b) 8

(c) 11 (d) 14

92. यदि a, b, c, d, e, f समान्तर श्रेणी में हों, तो $e-c$ का मान होगा [Pb. CET 1989, 91]

(a) $2(c-a)$ (b) $2(f-d)$

(c) $2(d-c)$ (d) $d-c$

93. यदि किसी समान्तर अनुक्रम की तीन संख्याओं का योग 15 एवं उनके वर्गों का योग 83 हो, तो संख्यायें हैं [MP PET 1985]

(a) 4, 5, 6 (b) 3, 5, 7

(c) 1, 5, 9 (d) 2, 5, 8

94. 3 व 23 के बीच चार समान्तर माध्य पद है [MP PET 1985]

(a) 5, 9, 11, 13 (b) 7, 11, 15, 19

(c) 5, 11, 15, 22 (d) 7, 15, 19, 21

95. यदि किसी समान्तर श्रेणी के तीन क्रमागत पदों का योग 51 है तथा प्रथम व तृतीय पद का गुणनफल 273 है, तो संख्यायें हैं [MP PET 1986]

(a) 21, 17, 13 (b) 20, 16, 12

(c) 22, 18, 14 (d) 24, 20, 16

96. यदि $\frac{1}{p+q},\frac{1}{r+p},\frac{1}{q+r}$ समान्तर श्रेणी में हैं, तो [RPET 1995]

(a) p, q, r समान्तर श्रेणी में होंगे

(b) p^2, q^2, r^2 समान्तर श्रेणी में होंगे

(c) $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}$ समान्तर श्रेणी में होंगे

(d) इनमें से कोई नहीं

97. यदि $1, \log_y x, \log_z y, -15 \log_x z$ समान्तर श्रेणी में हों, तब

(a) $z^3 = x$ (b) $x = y^{-1}$

(c) $z^{-3} = y$ (d) $x = y^{-1} = z^3$

(e) उपरोक्त सभी

98. एक पूर्णांक तथा इसके घन का अन्तर विभाजित है [MP PET 1999]

(a) 4 से (b) 6 से

(c) 9 से (d) इनमें से कोई नहीं

99. यदि a, b, c समांतर श्रेणी में हों, तो $(a+2b-c)$ $(2b+c-a)$ $(c+a-b)$ = [Pb. CET 1999]

(a) $\frac{1}{2}abc$ (b) abc

(c) $2\,abc$ (d) $4\,abc$

100. चार संख्यायें समान्तर श्रेणी में हैं। यदि प्रथम तथा अंतिम पदों का योग 8 है तथा दोनों मध्य पदों का गुणनफल 15 है, तो श्रेणी की न्यूनतम संख्या होगी [MP PET 2001]

(a) 4 (b) 3

(c) 2 (d) 1

101. यदि किसी समान्तर श्रेणी के 11वें पद का दुगना, उसके 21वें पद के 7 गुने के बराबर हो, तो 25 वाँ पद होगा [J & K 2005]

(a) 24 (b) 120

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

102. यदि x, y, z समान्तर श्रेणी में हों तथा $\tan^{-1} x, \tan^{-1} y$, $\tan^{-1} z$ भी समान्तर श्रेणी में हों, तब [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $x = y = z$ (b) $x = y = -z$

(c) $x = 1; y = 2; z = 3$ (d) $x = 2; y = 4; z = 6$

(e) $x = 2y = 3z$

गुणोत्तर श्रेणी

1. यदि a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हों, तो

(a) $a(b^2 + a^2) = c(b^2 + c^2)$ (b) $a(b^2 + c^2) = c(a^2 + b^2)$

(c) $a^2(b+c) = c^2(a+b)$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. अनुक्रम $\sqrt{2}, \sqrt{10}, 5\sqrt{2}, ...$ का 7 वाँ पद है

(a) $125\sqrt{10}$ (b) $25\sqrt{2}$

(c) 125 (d) $125\sqrt{2}$

3. यदि गुणोत्तर श्रेणी का चौथा, सातवाँ और दसवाँ पद क्रमशः *a*, *b* और *c* हों, तो a, b, c में सम्बन्ध होगा [MNR 1995; Karnataka CET 1999]

(a) $b = \frac{a+c}{2}$ (b) $a^2 = bc$

(c) $b^2 = ac$ (d) $c^2 = ab$

4. यदि गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद 5 और सार्वअनुपात –5 है, तो श्रेणी का कौनसा पद 3125 है

(a) 6 वाँ पद (b) 5 वाँ पद

(c) 7 वाँ पद (d) 8 वाँ पद

5. 2, 14, 62 में क्या जोड़ें, कि वे गुणोत्तर श्रेणी में हो जायें

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

6. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का $(p+q)$ वाँ पद m है और $(p-q)$ वाँ पद n है, तो श्रेणी का *p*वाँ पद होगा [RPET 1997; MP PET 1985, 99]

(a) m/n (b) $\sqrt{mn}$

(c) mn (d) 0

7. किसी गुणोत्तर श्रेणी के पद धनात्मक हैं। यदि प्रत्येक पद उसके बाद आने वाले दो पदों के योग के बराबर है, तो सार्वनिष्पत्ति होगी

(a) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (b) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(c) 1 (d) $2\sqrt{5}$

8. यदि $x, 2x+2, 3x+3$ गुणोत्तर श्रेणी में हों, तो चौथा पद है [MNR 1981]

(a) 27 (b) -27

(c) 13.5 (d) -13.5

9. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम 3 पदों का योग तथा प्रथम 6 पदों के योग का अनुपात 125 : 152 हो, तो सार्वनिष्पत्ति है

(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{5}{3}$

(c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{2}$

10. यदि x, y, z गुणोत्तर श्रेणी में हों व $a^x = b^y = c^z$, तो [IIT 1966, 68]

(a) $\log_a c = \log_b a$ (b) $\log_b a = \log_c b$

(c) $\log_c b = \log_a c$ (d) इनमें से कोई नहीं

11. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का *p*वाँ, *q*वाँ व *r*वाँ पद क्रमशः a, b, c हो, तो $a^{q-r}.\, b^{r-p}.\, c^{p-q}$ = [Roorkee 1955, 63, 73; Pb. CET 1991, 95]

(a) 0 (b) 1

(c) abc (d) pqr

12. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का तीसरा पद 4 हो, तो इसके प्रथम 5 पदों का गुणनफल होगा [IIT 1982; RPET 1991]

(a) 4^3 (b) 4^4

(c) 4^5 (d) इनमें से कोई नहीं

13. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का 5वाँ पद $\frac{1}{3}$ हो एवं 9वाँ पद $\frac{16}{243}$ हो, तो चौथा पद होगा [MP PET 1982]

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{2}{5}$

14. श्रेणी $2 \times 4 + 4 \times 6 + 6 \times 8 + ...$ का 20वाँ पद होगा [Pb. CET 1988]

(a) 1600 (b) 1680

(c) 420 (d) 840

15. यदि a, b, c गुणोत्तर श्रेणी के *p*वें, *q*वें तथा *r*वें पद हैं, तब $\left(\frac{c}{b}\right)^p \left(\frac{b}{a}\right)^r \left(\frac{a}{c}\right)^q$ का मान है

(a) 1 (b) $a^p b^q c^r$

(c) $a^q b^r c^p$ (d) $a^r b^p c^q$

16. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद a, अन्तिम पद l तथा सार्वअनुपात r हो, तो इस श्रेणी के पदों की संख्या है

(a) $\frac{\log l - \log a}{\log r}$ (b) $1 - \frac{\log l - \log a}{\log r}$

(c) $\frac{\log a - \log l}{\log r}$ (d) $1 + \frac{\log l - \log a}{\log r}$

17. यदि $\log_x a, a^{x/2}$ व $\log_b x$ गुणोत्तर श्रेणी में हों, तब $x =$

(a) $-\log_a(\log_b a)$ (b) $-\log_a(\log_a b)$

(c) $\log_a(\log_e a) - \log_a(\log_e b)$ (d) $\log_a(\log_e b) - \log_a(\log_e a)$

18. यदि त्रिघातीय समीकरण $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ के मूल गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तब

(a) $c^3 a = b^3 d$ (b) $ca^3 = bd^3$

(c) $a^3 b = c^3 d$ (d) $ab^3 = cd^3$

19. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का दसवां पद 9 तथा चौथा पद 4 हो, तो उसका सातवां पद है [MP PET 1996]

(a) 6 (b) 36

(c) $\frac{4}{9}$ (d) $\frac{9}{4}$

20. किसी गुणोत्तर श्रेणी का 6वाँ पद 32 तथा 8वाँ पद 128 है, तो श्रेणी का सार्वानुपात होगा [Pb. CET 1999]

(a) – 1 (b) 2

(c) 4 (d) – 4

21. गुणोत्तर श्रेणी $5, -\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{8}, ...$ का nवाँ पद $\frac{5}{1024}$ हो, तो n का मान होगा [Kerala (Engg.) 2002]

(a) 11 (b) 10

(c) 9 (d) 4

22. एक गुणोत्तर श्रेणी का तीसरा पद, पहले पद का वर्ग है। यदि दूसरा पद 8 है, तब छँठा पद है [MP PET 1997]

(a) 120 (b) 124

(c) 128 (d) 132

23. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का 5वां पद 2 हो, तो श्रेणी के प्रथम 9 पदों का गुणनफल होगा [Pb. CET 1990, 94; AIEEE 2002]

(a) 256 (b) 512

(c) 1024 (d) इनमें से कोई नहीं

24. यदि अनन्त पदों वाली किसी गुणोत्तर श्रेणी का योगफल 9 तथा प्रथम दो पदों का योगफल 5 हो, तो सार्वनिष्पति होगी

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{3}{2}$

(c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{2}{3}$

25. श्रेणी $3 + 4\frac{1}{2} + 6\frac{3}{4} + ...$ के पाँच पदों का योग होगा

(a) $39\frac{9}{16}$ (b) $18\frac{3}{16}$

(c) $39\frac{7}{16}$ (d) $13\frac{9}{16}$

26. श्रेणी $.9 + .09 + .009 ....$ के 100 पदों का योग होगा

(a) $1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$ (b) $1 + \left(\frac{1}{10}\right)^{106}$

(c) $1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{106}$ (d) $1 + \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$

27. $0.\dot{2}3\dot{4}$ का मान होगा [MNR 1986; UPSEAT 2000]

(a) $\frac{232}{990}$ (b) $\frac{232}{9990}$

(c) $\frac{0.232}{990}$ (d) $\frac{232}{9909}$

28. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के तीन पदों का योग 19 एवं गुणनफल 216 हो, तो श्रेणी का सार्व-अनुपात होगा [Roorkee 1972]

(a) $-\frac{3}{2}$ (b) $\frac{3}{2}$

(c) 2 (d) 3

29. श्रेणी $6 + 66 + 666 + ...$ के n पदों का योग है [IIT 1974]

(a) $(10^{n-1} - 9n + 10)/81$ (b) $2(10^{n+1} - 9n - 10)/27$

(c) $2(10^n - 9n - 10)/27$ (d) इनमें से कोई नहीं

30. यदि किसी धनात्मक गुणोत्तर श्रेणी का प्रत्येक पद अपने पूर्व के दो पदों के योग के बराबर है, तो श्रेणी का सार्व-अनुपात होगा [RPET 1986]

(a) 1 (b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(c) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

31. किसी गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम दो पदों का योग 1 है तथा इस श्रेणी का प्रत्येक पद अपने पूर्व के पद का दुगना है, तो इसका प्रथम पद होगा [RPET 1988]

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$

32. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योग 255, n वाँ पद 128 एवं सार्व-अनुपात 2 है, तो प्रथम पद होगा [RPET 1990]

(a) 1 (b) 3

(c) 7 (d) इनमें से कोई नहीं

33. श्रेणी $1 + (1 + x) + (1 + x + x^2) + ...$ का n पदों का योग होगा [IIT 1962]

(a) $\frac{1 - x^n}{1 - x}$ (b) $\frac{x(1 - x^n)}{1 - x}$

(c) $\frac{n(1 - x) - x(1 - x^n)}{(1 - x)^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

34. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम 6 पदों का योग, प्रथम 3 पदों के योग का 9 गुना हो, तो श्रेणी का सार्वअनुपात होगा [RPET 1985]

(a) -2 (b) 2

(c) 1 (d) 1/2

35. संख्या $111 ....1$ (91बार) है

(a) एक सम संख्या (b) एक अभाज्य संख्या

(c) अभाज्य नहीं (d) इनमें से कोई नहीं

36. एक अनुक्रम $< a_n >$ के लिये $a_1 = 2$ तथा $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$, तब $\sum_{r=1}^{20} a_r$ है

(a) $\frac{20}{2}[4 + 19 \times 3]$ (b) $3\left(1 - \frac{1}{3^{20}}\right)$

(c) $2(1 - 3^{20})$ (d) इनमें से कोई नहीं

37. समीकरण $1+a+a^2+a^3+.......+a^x = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)$ के लिए x का मान है
(a) 3 (b) 5
(c) 7 (d) इनमें से कोई नहीं

38. यदि गुणोत्तर श्रेणी $\{a_n\}$ में, $a_1 = 3, a_n = 96$ व $S_n = 189$, तब n का मान है
(a) 5 (b) 6
(c) 7 (d) 8

39. किसी गुणोत्तर श्रेणी के कुछ पदों का योग 728 है। यदि सार्वानुपात 3 तथा अंतिम पद 486 हो, तो श्रेणी का प्रथम पद होगा [UPSEAT 1999]
(a) 2 (b) 1
(c) 3 (d) 4

40. यदि n धनात्मक संख्याओं का गुणनफल इकाई हो तो उनका योग होगा [MP PET 2000]
(a) एक धनात्मक पूर्णांक (b) $n+\frac{1}{n}$ के बराबर
(c) n से विभाज्य (d) कभी भी n से कम नहीं

41. गुणोत्तर श्रेणी के तीन क्रमागत पदों का योग 38 तथा उनका गुणनफल 1728 है, तब श्रेणी का महत्तम पद होगा [UPSEAT 2004]
(a) 18 (b) 16
(c) 14 (d) इनमें से कोई नहीं

42. अनुक्रम $3+33+333+....$ के n पदों का योग होगा [RPET 2000]
(a) $\frac{1}{27}(10^{n+1}+9n-28)$ (b) $\frac{1}{27}(10^{n+1}-9n-10)$
(c) $\frac{1}{27}(10^{n+1}+10n-9)$ (d) इनमें से कोई नहीं

43. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद 7, अंतिम पद 448 तथा पदों का योग 889 हो, तो श्रेणी का सार्वानुपात होगा [MP PET 2003]
(a) 5 (b) 4
(c) 3 (d) 2

44. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के पदों का योग 364, सार्वानुपात 3 तथा अंतिम पद 243 है, तो श्रेणी में पदों की संख्या होगी [MP PET 2003]
(a) 6 (b) 5
(c) 4 (d) 10

45. दो राशियों a और b के बीच n गुणोत्तर माध्य स्थापित किये जाएँ, तो n वाँ गुणोत्तर माध्य होगा
(a) $a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}}$ (b) $a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n-1}{n}}$
(c) $a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$ (d) $a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$

46. यदि a तथा b के मध्य गुणोत्तर माध्य $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ है, तब n का मान होगा
(a) 1 (b) $-\frac{1}{2}$
(c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

47. यदि x और y के बीच गुणोत्तर माध्य G है, तो $\frac{1}{G^2-x^2}+\frac{1}{G^2-y^2}$ का मान है
(a) G^2 (b) $\frac{1}{G^2}$
(c) $\frac{2}{G^2}$ (d) $3G^2$

48. 2 और 32 के बीच 3 गुणोत्तर माध्य हैं, तो तीसरे गुणोत्तर माध्य का मान होगा
(a) 8 (b) 4
(c) 16 (d) 12

49. यदि 486 तथा $\frac{2}{3}$ के मध्य पांच गुणोत्तर माध्य रखे जायें, तो चतुर्थ गुणोत्तर माध्य होगा [RPET 1999]
(a) 4 (b) 6
(c) 12 (d) -6

50. समीकरण $x^2-18x+9=0$ के मूलों का गुणोत्तर माध्य होगा [RPET 1997]
(a) 3 (b) 4
(c) 2 (d) 1

51. संख्याओं $3, 3^2, 3^3, ..., 3^n$ का गुणोत्तर माध्य होगा [DCE 2002]
(a) $3^{\frac{2}{n}}$ (b) $3^{\frac{n+1}{2}}$
(c) $3^{\frac{n}{2}}$ (d) $3^{\frac{n-1}{2}}$

52. 4 और $\frac{1}{4}$ के बीच तीन गुणोत्तर माध्यों का गुणनफल होगा
(a) 4 (b) 2
(c) -1 (d) 1

53. संख्याओं 1 व 64 के मध्य दो गुणोत्तर माध्य क्रमशः होंगे [Kerala (Engg.) 2002]
(a) 1 और 64 (b) 4 और 16
(c) 2 और 16 (d) 8 और 16

54. यदि a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हों, तो [RPET 1995]
(a) a^2, b^2, c^2 गुणोत्तर श्रेणी में होंगे
(b) $a^2(b+c), c^2(a+b), b^2(a+c)$ गुणोत्तर श्रेणी में होंगे
(c) $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ गुणोत्तर श्रेणी में होंगे
(d) इनमें से कोई नहीं

55. यदि x, G_1, G_2, y किसी गुणोत्तर श्रेणी के क्रमागत पद हैं, तो $G_1 G_2$ का मान होगा
(a) $\frac{y}{x}$ (b) $\frac{x}{y}$
(c) xy (d) $\sqrt{xy}$

56. किसी गुणोत्तर श्रेणी की 3 संख्याओं का योग 38 तथा गुणनफल 1728 है तब मध्य संख्या है [MP PET 1994]
(a) 12 (b) 8
(c) 18 (d) 6

57. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के तीन क्रमागत पदों का गुणनफल 216 एवं दो-दो को लेकर उनके गुणनफलों का योग 156 है, तो संख्यायें होंगी [MNR 1978]
(a) 1, 3, 9 (b) 2, 6, 18
(c) 3, 9, 27 (d) 2, 4, 8

58. एक अनन्त गुणोत्तर श्रेणी का योग $\frac{4}{3}$ तथा प्रथम पद $\frac{3}{4}$ है तब सार्व-अनुपात है [MP PET 1994]
(a) $\frac{7}{16}$ (b) $\frac{9}{16}$
(c) $\frac{1}{9}$ (d) $\frac{7}{9}$

59. यदि $3+3\alpha+3\alpha^2+.........\infty=\frac{45}{8}$, तो α का मान होगा [Pb. CET 1989]

(a) $\frac{15}{23}$ (b) $\frac{7}{15}$

(c) $\frac{7}{8}$ (d) $\frac{15}{7}$

60. उस अनन्त गुणोत्तर श्रेणी का, जिसका सार्वअनुपात r हो, योग ज्ञात किया जा सकता है [AMU 1982]

(a) r के सभी मानों के लिए

(b) r के केवल धनात्मक मानों के लिए

(c) केवल $0<r<1$ के लिए

(d) केवल $-1<r<1, (r\neq 0)$ के लिये

61. यदि $A=1+r^z+r^{2z}+r^{3z}+.......\infty$, तो r का मान होगा

(a) $A(1-A)^z$ (b) $\left(\frac{A-1}{A}\right)^{1/z}$

(c) $\left(\frac{1}{A}-1\right)^{1/z}$ (d) $A(1-A)^{1/z}$

62. यदि $x=1+a+a^2+....\infty, (a<1)$

$y=1+b+b^2.......\infty, (b<1)$

तब $1+ab+a^2b^2+.........\infty$ का मान होगा [MNR 1980; MP PET 1985]

(a) $\frac{xy}{x+y-1}$ (b) $\frac{xy}{x+y+1}$

(c) $\frac{xy}{x-y-1}$ (d) $\frac{xy}{x-y+1}$

63. एक गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद, जिसका दूसरा पद 2 तथा अनन्त पदों का योग 8 है, होगा [MNR 1979; RPET 1992, 95]

(a) 6 (b) 3

(c) 4 (d) 1

64. $0.4\dot{2}\dot{3}=$ [Roorkee 1961; IIT 1973]

(a) $\frac{419}{990}$ (b) $\frac{419}{999}$

(c) $\frac{417}{990}$ (d) $\frac{417}{999}$

65. यदि $y=x-x^2+x^3-x^4+......\infty$, तो x का मान होगा [MNR 1975; RPET 1988; MP PET 2002]

(a) $y+\frac{1}{y}$ (b) $\frac{y}{1+y}$

(c) $y-\frac{1}{y}$ (d) $\frac{y}{1-y}$

66. यदि $x=\sum_{n=0}^{\infty}a^n, y=\sum_{n=0}^{\infty}b^n, z=\sum_{n=0}^{\infty}(ab)^n$,जहाँ $a, b<1$,तब

(a) $xyz=x+y+z$ (b) $xz+yz=xy+z$

(c) $xy+yz=xz+y$ (d) $xy+xz=yz+x$

67. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के अनन्त पदों का योग x है एवं पदों का वर्ग करने पर योग y हो जाता है, तो श्रेणी का सार्व-अनुपात होगा [RPET 1988]

(a) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (b) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

(c) $\frac{x^2-y}{x^2+y}$ (d) $\frac{x^2+y}{x^2-y}$

68. यदि किसी अनन्त गुणोत्तर श्रेणी के पदों का योग व इसके पदों के वर्गों का योग 3 हो, तो प्रथम श्रेणी का सार्व-अनुपात है [Roorkee 1972]

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{2}$

69. यदि गुणोत्तर श्रेणी के अनन्त पदों का योग S है जिसका प्रथम पद a है, तब प्रथम n पदों का योगफल है [UPSEAT 2002]

(a) $S\left(1-\frac{a}{S}\right)^n$ (b) $S\left[1-\left(1-\frac{a}{S}\right)^n\right]$

(c) $a\left[1-\left(1-\frac{a}{S}\right)^n\right]$ (d) इनमें से कोई नहीं

70. 0.14189189189.... को निम्न परिमेय संख्या के रूप में निरूपित कर सकते हैं [AMU 2000]

(a) $\frac{7}{3700}$ (b) $\frac{7}{50}$

(c) $\frac{525}{111}$ (d) $\frac{21}{148}$

71. श्रेणी $5.05+1.212+0.29088+...\infty$ का योग होगा [AMU 2000]

(a) 6.93378 (b) 6.87342

(c) 6.74384 (d) 6.64474

72. किसी अनंत गुणोत्तर श्रेणी का योग 3 है तथा श्रेणी के पदों के वर्गों का योग भी 3 है, तो श्रेणी होगी [UPSEAT 1999]

(a) $\frac{3}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{8},\frac{3}{16},.....$ (b) $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},.....$

(c) $\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},.....$ (d) $1,-\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},-\frac{1}{3^3},.....$

73. एक अनंत गुणोत्तर श्रेणी, जिसका प्रथम पद a तथा सार्वानुपात r है, का योग 4 तथा द्वितीय पद 3/4 है, तब [IIT Screening 2000; DCE 2001]

(a) $a=\frac{7}{4}, r=\frac{3}{7}$ (b) $a=\frac{3}{2}, r=\frac{1}{2}$

(c) $a=2, r=\frac{3}{8}$ (d) $a=3, r=\frac{1}{4}$

74. यदि $a=0.2, b=\sqrt{5}, x=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+.........\infty$, तब $a^{\log_b x}$ का मान है

(a) 1 (b) 2

(c) $\frac{1}{2}$ (d) 4

75. $4^{1/3}.4^{1/9}.4^{1/27}..........\infty$ का मान होगा [RPET 2003]

(a) 2 (b) 3

(c) 4 (d) 9

76. यदि $y=x+x^2+x^3+.......\infty$, तब $x=$ [DCE 1999]

(a) $\frac{y}{1+y}$ (b) $\frac{1-y}{y}$

(c) $\frac{y}{1-y}$ (d) इनमें से कोई नहीं

77. एक अनंत गुणोत्तर श्रेणी के पदों का योग 3 है तथा पदों के वर्गों का योग भी 3 है, तब श्रेणी का प्रथम पद व सार्वानुपात क्रमशः होंगे [RPET 1999]

(a) 3/2, 1/2 (b) 1, 1/2
(c) 3/2, 2 (d) इनमें से कोई नहीं

78. अनंत गुणोत्तर श्रेणी $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2-\sqrt{2}}, \frac{1}{2}$..... के पदों का योग होगा [Kerala (Engg.) 2002]

(a) $\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^2$ (b) $(\sqrt{2}+1)^2$
(c) $5\sqrt{2}$ (d) $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$

79. अनंत गुणोत्तर श्रेणी के पदों का योग 20 तथा पदों के वर्गों का योग 100 हो, तो श्रेणी का सार्वानुपात होगा [AIEEE 2002]

(a) 5 (b) 3/5
(c) 8/5 (d) 1/5

80. यदि किसी अनंत गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद, शेष पदों के योग के दो गुने के बराबर हो, तो श्रेणी का सार्वानुपात होगा [RPET 2002]

(a) 1 (b) 2
(c) 1/3 (d) – 1/3

81. श्रेणी $1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}+....\infty$ का योग एक नियत संख्या है, तब [UPSEAT 2002]

(a) $x > 2$ (b) $x > -2$
(c) $x > \frac{1}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

82. $0.5737373 ...... =$ [Karnataka CET 2004]

(a) $\frac{284}{497}$ (b) $\frac{284}{495}$
(c) $\frac{568}{990}$ (d) $\frac{567}{990}$

83. $\overline{0.037}$ का मान, जहाँ $\overline{.037}$ संख्या 0.037037037........को निरूपित करता है, है [MP PET 2004]

(a) $\frac{37}{1000}$ (b) $\frac{1}{27}$
(c) $\frac{1}{37}$ (d) $\frac{37}{999}$

84. यदि 3, 9, 21 प्रत्येक में x जोड़ने पर परिणामी संख्याएँ गुणोत्तर श्रेणी में हो जाती हैं, तो x का मान होगा [MP PET 1986]

(a) 3 (b) $\frac{1}{2}$
(c) 2 (d) $\frac{1}{3}$

85. यदि गुणोत्तर श्रेणी के अनंत पदों का योगफल s तथा प्रथम पद a है, तो सार्वअनुपात r होगा [J & K 2005]

(a) $\frac{a-s}{s}$ (b) $\frac{s-a}{s}$
(c) $\frac{a}{1-s}$ (d) $\frac{s-a}{a}$

86. श्रेणी $9-3+1-\frac{1}{3}+.....\infty$ का अनन्त पदों तक योगफल है [Karnataka CET 2005]

(a) 9 (b) 9/2
(c) 27/4 (d) 15/2

87. यदि $a^2+ab^2+16c^2=2(3ab+6bc+4ac)$,जहाँ a, b, c अशून्य संख्यायें हैं, तब a, b, c होंगे [AMU 2005]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

88. श्रेणी $(32)(32)^{1/6}(32)^{1/36}$ ...... अनन्त पदों तक का गुणनफल है [Kerala (Engg.) 2005]

(a) 16 (b) 32
(c) 64 (d) 0
(e) 62

हरात्मक श्रेणी

1. यदि किसी हरात्मक श्रेणी का mवाँ पद n है और nवाँ पद m है, तो श्रेणी का rवाँ पद होगा

(a) $\frac{r}{mn}$ (b) $\frac{mn}{r+1}$
(c) $\frac{mn}{r}$ (d) $\frac{mn}{r-1}$

2. 13, 15, 19 में क्या जोड़ें, कि योग से प्राप्त पद हरात्मक श्रेणी के क्रमागत पद हों

(a) 7 (b) 6
(c) –6 (d) –7

3. हरात्मक श्रेणी $2, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}$,......... .... का 5 वाँ पद होगा [MP PET 1984]

(a) $5\frac{1}{5}$ (b) $3\frac{1}{5}$
(c) 1/10 (d) 10

4. यदि a_1, a_2, a_3,......... ......, a_n हरात्मक श्रेणी में हों, तो $a_1a_2+a_2a_3+$ .... $+a_{n-1}a_n$ का मान होगा [IIT 1975]

(a) a_1a_n (b) na_1a_n
(c) $(n-1)a_1a_n$ (d) इनमें से कोई नहीं

5. यदि x, y, z हरात्मक श्रेणी में हों, तो व्यंजक $\log(x+z)+\log(x-2y+z)$ का मान होगा [RPET 1985, 2000]

(a) $\log(x-z)$ (b) $2\log(x-z)$
(c) $3\log(x-z)$ (d) $4\log(x-z)$

6. यदि किसी हरात्मक श्रेणी का 5वाँ पद $\frac{1}{45}$ व 11वाँ पद $\frac{1}{69}$ है, तो इसका 16 वाँ पद होगा [RPET 1987, 97]

(a) $\frac{1}{89}$ (b) $\frac{1}{85}$
(c) $\frac{1}{80}$ (d) $\frac{1}{79}$

7. एक हरात्मक श्रेणी का पहला पद 1/7 तथा दूसरा पद 1/9 है, तो 12 वाँ पद है [MP PET 1994]

(a) $\frac{1}{19}$ (b) $\frac{1}{29}$
(c) $\frac{1}{17}$ (d) $\frac{1}{27}$

8. यदि a, b, c भिन्न-भिन्न धनात्मक वास्तविक संख्यायें हैं, जो कि हरात्मक श्रेणी में हैं, तो $\frac{3a+2b}{2a-b}+\frac{3c+2b}{2c-b}$ है

(a) 10 से बड़ा या बराबर
(b) 10 से कम या बराबर
(c) 10 के बराबर
(d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि a, b, c, d हरात्मक श्रेणी में हैं, तब $ab+bc+cd=$

(a) $3ad$ (b) $(a+b)(c+d)$
(c) $3ac$ (d) इनमें से कोई नहीं

10. यदि किसी हरात्मक श्रेणी का सातवां पद 8 तथा आठवां पद 7 हो, तो उसका 15वां पद है [MP PET 1996]

(a) 16 (b) 14
(c) $\frac{27}{14}$ (d) $\frac{56}{15}$

11. यदि हरात्मक श्रेणी का 7 वाँ पद $\frac{1}{10}$ और 12वाँ पद $\frac{1}{25}$ है, तब 20वाँ पद है [MP PET 1997]

(a) $\frac{1}{37}$ (b) $\frac{1}{41}$
(c) $\frac{1}{45}$ (d) $\frac{1}{49}$

12. किसी हरात्मक श्रेणी का 6वां पद $\frac{1}{61}$ तथा 10 वाँ पद $\frac{1}{105}$ हो, तो श्रेणी का प्रथम पद होगा [Karnataka CET 2001]

(a) $\frac{1}{28}$ (b) $\frac{1}{39}$
(c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{17}$

13. यदि किसी हरात्मक श्रेणी का pवाँ पद q तथा qवाँ p हो, तो श्रेणी का pqवाँ पद होगा [Karnataka CET 2002]

(a) 0 (b) 1
(c) pq (d) $pq(p+q)$

14. किसी हरात्मक श्रेणी का चतुर्थ पद $\frac{3}{5}$ तथा 8वाँ पद $\frac{1}{3}$ है, तो श्रेणी का 6वाँ पद होगा [MP PET 2003]

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{3}{7}$
(c) $\frac{1}{7}$ (d) $\frac{3}{5}$

15. यदि H, p तथा q के बीच हरात्मक मध्यमान हो, तो $\frac{H}{p}+\frac{H}{q}$ का मान है [MNR 1990; UPSEAT 2000, 01]

(a) 2 (b) $\frac{pq}{p+q}$
(c) $\frac{p+q}{pq}$ (d) इनमें से कोई नहीं

16. यदि a और b का हरात्मक माध्य H है, तो $\frac{1}{H-a}+\frac{1}{H-b}$ का मान होगा

(a) $a+b$ (b) ab
(c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (d) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$

17. समीकरण $x^2-10x+11=0$ के मूलों का हरात्मक माध्य है [MP PET 1995]

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{5}{21}$
(c) $\frac{21}{20}$ (d) $\frac{11}{5}$

18. $\frac{a}{1-ab}$ तथा $\frac{a}{1+ab}$ का हरात्मक माध्य है [MP PET 1996; Pb. CET 2001]

(a) $\frac{a}{\sqrt{1-a^2b^2}}$ (b) $\frac{a}{1-a^2b^2}$
(c) a (d) $\frac{1}{1-a^2b^2}$

19. 3 और $\frac{6}{13}$ के बीच छठवां हरात्मक माध्य होगा [RPET 1996]

(a) $\frac{63}{120}$ (b) $\frac{63}{12}$
(c) $\frac{126}{105}$ (d) $\frac{120}{63}$

20. यदि a और b के बीच हरात्मक माध्य $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ है, तो n का मान होगा [Assam PET 1986]

(a) 1 (b) -1
(c) 0 (d) 2

21. यदि a और b के बीच हरात्मक माध्य H है, तो $\frac{H+a}{H-a}+\frac{H+b}{H-b}$ का मान होगा [AMU 1998]

(a) 4 (b) 2
(c) 1 (d) $(a+b)$

22. यदि a, b, c हरात्मक श्रेणी में हैं, तो

(a) $a^2+c^2>b^2$
(b) $a^2+b^2>2c^2$
(c) $a^2+c^2>2b^2$
(d) $a^2+b^2>c^2$

23. यदि a, b, c, d हरात्मक श्रेणी में हों, तो [RPET 1991]

(a) $a+d>b+c$ (b) $ad>bc$
(c) दोनों (a) व (b) (d) इनमें से कोई नहीं

समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य में सम्बन्ध

1. यदि दो भिन्न धनात्मक वास्तविक संख्याओं के समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य क्रमशः A, G और H हैं, तो उनमें सम्बन्ध होगा [MP PET 1984; Roorkee 1995]
(a) $A > G > H$ (b) $A > G < H$
(c) $H > G > A$ (d) $G > A > H$

2. यदि दो धनात्मक वास्तविक संख्याओं के बीच का समान्तर माध्य A, गुणोत्तर माध्य G और हरात्मक माध्य H है, तो [AMU 1979, 1982; MP PET 1993]
(a) $A^2 = GH$ (b) $H^2 = AG$
(c) $G = AH$ (d) $G^2 = AH$

3. यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं और b, c, d हरात्मक श्रेणी में हैं, तो
(a) $ab = cd$ (b) $ad = bc$
(c) $ac = bd$ (d) $abcd = 1$

4. यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में हों, तो $\frac{a}{bc}, \frac{1}{c}, \frac{2}{b}$ होंगे [MNR 1982; MP PET 2002]
(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

5. यदि $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$ के मूल बराबर हों, तो a, b, c हैं [RPET 1997]
(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

6. यदि $\log_a x, \log_b x, \log_c x$ हरात्मक श्रेणी में हों, तो a, b, c होंगे
(a) समान्तर श्रेणी में (b) हरात्मक श्रेणी में
(c) गुणोत्तर श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

7. यदि तीन संख्यायें गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तो उनके लघुगुणक (Logarithms) होंगे [BIT 1992]
(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

8. यदि किसी समान्तर श्रेणी के pवें, qवें, rवें और sवें पद गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तो $(p-q), (q-r), (r-s)$ होंगे [MP PET 1993]
(a) गुणोत्तर श्रेणी में (b) समान्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि दो संख्याओं a और b के बीच समान्तर माध्य A तथा गुणोत्तर माध्य G हो, तो $A - G$ का मान होगा
(a) $\frac{a-b}{a}$ (b) $\frac{a+b}{2}$
(c) $\left[\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{2}}\right]^2$ (d) $\frac{2ab}{a+b}$

10. यदि $\frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{a-b}$ समान्तर श्रेणी के क्रमागत पद हों, तो $(b-c)^2, (c-a)^2, (a-b)^2$ होंगे
(a) गुणोत्तर श्रेणी में (b) समान्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

11. यदि $a^{1/x} = b^{1/y} = c^{1/z}$ और a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तो x, y और z होंगे [IIT 1969; UPSEAT 2001]
(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

12. यदि दो संख्याओं के बीच का समान्तर माध्य A और गुणोत्तर माध्य G है, तो संख्याएँ होंगी
(a) $A \pm (A^2 - G^2)$ (b) $\sqrt{A} \pm \sqrt{A^2 - G^2}$
(c) $A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}$ (d) $\frac{A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}}{2}$

13. यदि $\frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ हो, तो a, b, c हैं [MNR 1984; MP PET 1997; UPSEAT 2000]
(a) समान्तर श्रेणी में
(b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में
(d) हरात्मक श्रेणी एवं गुणोत्तर श्रेणी दोनों में

14. यदि a और b कोई दो भिन्न धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं, तो निम्न में से कौन सा कथन सत्य है [MP PET 1982; MP PET 2002]
(a) $2\sqrt{ab} > (a+b)$ (b) $2\sqrt{ab} < (a+b)$
(c) $2\sqrt{ab} = (a+b)$ (d) इनमें से कोई नहीं

15. यदि b^2, a^2, c^2 समान्तर श्रेणी में हैं, तो $a+b, b+c, c+a$ होंगे [AMU 1974]
(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

16. यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में भी हों और गुणोत्तर श्रेणी में भी, तो [MNR 1981]
(a) $a = b \ne c$ (b) $a \ne b = c$
(c) $a \ne b \ne c$ (d) $a = b = c$

17. यदि a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हों एवं a व b तथा b व c के बीच समान्तर माध्य क्रमशः x व y हैं, तो $\frac{a}{x} + \frac{c}{y} =$ [Roorkee 1969]
(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 1/2

18. यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में व a, b, d गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तो $a, a-b, d-c$ होंगे [Ranchi BIT 1968]
(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

19. यदि a^2, b^2, c^2 समान्तर श्रेणी में हों, तो $(b+c)^{-1}, (c+a)^{-1}$ व $(a+b)^{-1}$ होंगे [Roorkee 1968; RPET 1996]
(a) हरात्मक श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) समान्तर श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

20. यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं, तो $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ होंगे [MP PET 1985; Roorkee 1975; DCE 2002]
(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

21. यदि $x, 1, z$ समान्तर श्रेणी में व $x, 2, z$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तो $x, 4, z$ होंगे [IIT 1965]
(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

22. यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में हों, जहाँ $|a|, |b|, |c| < 1$, तथा
$x = 1 + a + a^2 + ...\infty$
$y = 1 + b + b^2 + ...\infty$
$z = 1 + c + c^2........\infty$
हों, तब x, y, z होंगे [Karnataka CET 1995; AIEEE 2005]
(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

23. यदि तीन असमान अशून्य धनात्मक वास्तविक संख्यायें a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हों तथा $b-c, c-a, a-b$ हरात्मक श्रेणी में हों, तब $a+b+c$ का मान स्वतंत्र होगा

(a) a से (b) b से
(c) c से (d) इनमें से कोई नहीं

24. यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में, b, c, d गुणोत्तर श्रेणी में तथा c, d, e हरात्मक श्रेणी में हैं, तो a, c, e होंगे [AMU 1988, 2001; MP PET 1993]

(a) कोई विशेष क्रम में नहीं (b) समान्तर श्रेणी में
(c) गुणोत्तर श्रेणी में (d) हरात्मक श्रेणी में

25. यदि a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में, $a-b, c-a, b-c$ हरात्मक श्रेणी में हों, तब $a+4b+c$ =

(a) 0 (b) 1
(c) -1 (d) इनमें से कोई नहीं

26. यदि $a^x = b^y = c^z = d^u$ तथा a, b, c, d गुणोत्तर श्रेणी में हों, तब x, y, z, u होंगे [ISM Dhanbad 1972; Roorkee 1984; RPET 2001]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

27. यदि दो संख्याओं a व b के बीच दो समान्तर माध्य A_1, A_2 व दो गुणोत्तर माध्य G_1, G_2 हैं, तो $\frac{A_1+A_2}{G_1.G_2}$ = [Roorkee 1983; DCE 1998]

(a) $\frac{a+b}{ab}$ (b) $\frac{a+b}{2ab}$
(c) $\frac{2ab}{a+b}$ (d) $\frac{ab}{a+b}$

28. यदि किसी श्रेणी के समान्तर माध्य व हरात्मक माध्य क्रमशः 27 व 12 हैं, तो इसका गुणोत्तर माध्य होगा [RPET 1987]

(a) 9 (b) 18
(c) 24 (d) 36

29. यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में हों, तब $3^a, 3^b, 3^c$ होंगे [Pb. CET 1990]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

30. यदि किसी समान्तर श्रेणी में $(m+1)$ वाँ, $(n+1)$ वाँ तथा $(r+1)$ वाँ पद गुणोत्तर श्रेणी में हों तथा संख्यायें m, n, r हरात्मक श्रेणी में हों, तब समान्तर श्रेणी के सार्वान्तर तथा प्रथम पद का अनुपात होगा [MNR 1989; Roorkee 1994]

(a) $-\frac{2}{n}$ (b) $\frac{2}{n}$
(c) $-\frac{n}{2}$ (d) $\frac{n}{2}$

31. यदि गुणोत्तर माध्य = 18 और समान्तर माध्य = 27, तो हरात्मक माध्य होगा [RPET 1996]

(a) $\frac{1}{18}$ (b) $\frac{1}{12}$
(c) 12 (d) $9\sqrt{6}$

32. संख्याओं a व b का समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य का दुगना है, तो $a:b$ होगा [Roorkee 1953]

(a) $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ (b) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$
(c) $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}$

33. यदि $9, x, y, z, a$ समान्तर श्रेणी में हों, तो $x+y+z=15$ जबकि, यदि $9, x, y, z, a$ हरात्मक श्रेणी में हों, तो $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{3}$, तो a का मान होगा [IIT 1978]

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 9

34. यदि 2 व 3 के बीच 9 समान्तर माध्य व हरात्मक माध्य रखे जायें तथा हरात्मक माध्य H, समान्तर माध्य A के सगंत है, तो $A+\frac{6}{H}$ = [ISM Dhanbad 1987]

(a) 1 (b) 3
(c) 5 (d) 6

35. यदि गुणोत्तर श्रेणी व हरात्मक श्रेणी के pवें, qवें, rवें पद क्रमशः a, b, c हों, तो $a(b-c)\log a + b(c-a)\log b + c(a-b)\log c$ का मान होगा [1976]

(a) -1 (b) 0
(c) 1 (d) अस्तित्व नहीं है

36. यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में एवं a^2, b^2, c^2 हरात्मक श्रेणी में हों, तो [MNR 1986, 1988; IIT 1977, 2003]

(a) $a=b=c$ (b) $2b=3a+c$
(c) $b^2=\sqrt{(ac/8)}$ (d) इनमें से कोई नहीं

37. चार संख्याओं में से प्रथम 3 गुणोत्तर श्रेणी में तथा अन्तिम तीन समान्तर श्रेणी में हैं, जिसका सार्वअन्तर 6 है। यदि पहली व अन्तिम संख्या समान है, तो पहली संख्या होगी [IIT 1974]

(a) 2 (b) 4
(c) 6 (d) 8

38. श्रेणी $(\sqrt{2}+1), 1, (\sqrt{2}-1)$ है [AMU 1983]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

39. यदि दो राशियों के हरात्मक माध्य व गुणोत्तर माध्य का अनुपात $12:13$ है, तो संख्याओं का अनुपात है [RPET 1990]

(a) $1:2$ (b) $2:3$
(c) $3:4$ (d) इनमें से कोई नहीं

40. यदि $\frac{b+a}{b-a}=\frac{b+c}{b-c}$, तो a, b, c होंगे

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

41. यदि दो राशियों का अनुपात $9:1$ है, तो दोनों राशियों के बीच गुणोत्तर और हरात्मक माध्य का अनुपात होगा

(a) $1:9$ (b) $5:3$
(c) $3:5$ (d) $2:5$

42. यदि a, b, c हरात्मक श्रेणी में हों, तो $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ होंगे [Roorkee 1980]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

43. यदि $\frac{x+y}{2}, y, \frac{y+z}{2}$ हरात्मक श्रेणी में हों, तो x, y, z होंगे [RPET 1989; MP PET 2003]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

44. यदि समान्तर श्रेणी, गुणोत्तर श्रेणी, हरात्मक श्रेणी के प्रथम तथा $(2n-1)$ वाँ पद बराबर हो तथा इनके n वें पद क्रमशः a, b तथा c हों, तब [IIT 1985, 88]

(a) $a \ge b \ge c$ (b) $a + c = b$

(c) $ac - b^2 = 0$ (d) दोनों (a) तथा (c) सत्य हैं

45. एक समान्तर श्रेणी, गुणोत्तर श्रेणी तथा हरात्मक श्रेणी समान प्रथम तथा अन्तिम पद रखते हैं। तीनों श्रेणियों में पदों की संख्या विषम है, तब तीनों श्रेणियों के मध्य पद होंगे

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में

(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

46. यदि a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हैं तथा $a + x, b + x, c + x$ हरात्मक श्रेणी में हैं, तब x का मान है, (a, b, c भिन्न संख्याएँ हैं)

(a) c (b) b

(c) a (d) इनमें से कोई नहीं

47. यदि $\frac{a+b}{1-ab}, b, \frac{b+c}{1-bc}$ समान्तर श्रेणी में हैं, तब $a, \frac{1}{b}, c$ होंगे

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में

(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

48. यदि समान्तर श्रेणी के सभी पदों का वर्ग किया जाए, तो नई श्रेणी होगी

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में

(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

49. यदि $y - x$ तथा $y - z$ के बीच का हरात्मक माध्य $2(y - a)$ है, तब $x - a, y - a, z - a$ हैं

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में

(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

50. यदि दो धनात्मक वास्तविक संख्याओं a व b के बीच समान्तर माध्य व हरात्मक माध्य का अनुपात $m : n$ है, तो $a : b$ है

(a) $\frac{\sqrt{m-n}+\sqrt{n}}{\sqrt{m-n}-\sqrt{n}}$ (b) $\frac{\sqrt{n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{n}-\sqrt{m-n}}$

(c) $\frac{\sqrt{m}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m}-\sqrt{m-n}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

51. यदि $\log_x y, \log_z x, \log_y z$ गुणोत्तर श्रेणी में हों तथा $xyz = 64$ व x^3, y^3, z^3 समान्तर श्रेणी में हों, तब

(a) $x = y = z$ (b) $x = 4$

(c) x, y, z गुणोत्तर श्रेणी में हैं (d) उपरोक्त सभी

52. यदि तीन असमान संख्यायें p, q, r हरात्मक श्रेणी में हों व इनके वर्ग समान्तर श्रेणी में हों, तब अनुपात $p : q : r$ है

(a) $1-\sqrt{3} : 2 : 1+\sqrt{3}$ (b) $1 : \sqrt{2} : -\sqrt{3}$

(c) $1 : -\sqrt{2} : \sqrt{3}$ (d) $1 \mp \sqrt{3} : -2 : 1 \pm \sqrt{3}$

53. दो संख्याओं का गुणोत्तर माध्य 6 तथा समांतर माध्य 6.5 है, तब सँख्यायें हैं [MP PET 1994]

(a) (3, 12) (b) (4, 9)

(c) (2, 18) (d) (7, 6)

54. यदि $\frac{a+bx}{a-bx} = \frac{b+cx}{b-cx} = \frac{c+dx}{c-dx} (x \ne 0)$, तब a, b, c, d हैं [RPET 1986]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में

(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

55. यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में व $a, c - b, b - a$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं, $(a \ne b \ne c)$ तो $a : b : c$ है

(a) $1 : 3 : 5$ (b) $1 : 2 : 4$

(c) $1 : 2 : 3$ (d) इनमें से कोई नहीं

56. यदि a, b, c हरात्मक श्रेणी में हों, तो किसी $n \in N$ के लिये सत्य कथन है [RPET 1995]

(a) $a^n + c^n < 2b^n$ (b) $a^n + c^n > 2b^n$

(c) $a^n + c^n = 2b^n$ (d) इनमें से कोई नहीं

57. यदि किन्हीं दो पदों का समान्तर माध्य = 9 तथा हरात्मक माध्य = 36 हो, तो गुणोत्तर माध्य होगा [RPET 1995]

(a) 18 (b) 12

(c) 16 (d) इनमें से कोई नहीं

58. यदि $x^a = x^{b/2} z^{b/2} = z^c$, तब a, b, c हैं

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में

(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

59. किसी गुणोत्तर श्रेणी के तीन पदों का गुणनफल 512 है। यदि प्रथम संख्या में 8 व द्वितीय में 6 जोड़ने पर संख्यायें समान्तर श्रेणी में हो जाती हैं, तो संख्यायें हैं [Roorkee 1964]

(a) 2, 4, 8

(b) 4, 8, 16

(c) 3, 6, 12

(d) इनमें से कोई नहीं

60. यदि a व b के बीच हरात्मक माध्य व गुणोत्तर माध्य का अनुपात $4 : 5$ है, तो दोनों संख्याओं का अनुपात है [IIT 1992; MP PET 2000]

(a) $1 : 2$ (b) $2 : 1$

(c) $4 : 1$ (d) $1 : 4$

61. यदि a व b के मध्य समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य व हरात्मक माध्य बराबर हों, तो [RPET 2003]

(a) $a = b$ (b) $ab = 1$

(c) $a > b$ (d) $a < b$

62. यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में हों, तब $10^{ax+10}, 10^{bx+10}, 10^{cx+10}$ होंगे [Pb. CET 1989]

(a) समान्तर श्रेणी में

(b) गुणोत्तर श्रेणी में जबकि $x > 0$

(c) गुणोत्तर श्रेणी में x के सभी मानों के लिए

(d) गुणोत्तर श्रेणी में जबकि $x < 0$

63. यदि a, b, c, d द्विपद विस्तार के क्रमागत चार गुणांक हैं, तब $\frac{a+b}{a}, \frac{b+c}{b}, \frac{c+d}{c}$ होंगे

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में

(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

64. $\log_3 2, \log_6 2, \log_{12} 2$ होंगे [RPET 1993, 2001]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में

(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

65. तीन शून्येत्तर वास्तविक संख्याएँ एक समान्तर श्रेणी बनाती हैं तथा इन संख्याओं के वर्ग उसी क्रम में लेने पर गुणोत्तर श्रेणी बनाते हैं, तब गुणोत्तर श्रेणी के सभी सम्भव सार्व-अनुपातों की संख्या है

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) इनमें से कोई नहीं

66. यदि $a^x = b^y = c^z$ और a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तब x, y, z होंगे [Pb. CET 1993; DCE 1999; AMU 1999]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में

(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

67. यदि दो संख्याओं के मध्य दो गुणोत्तर माध्य G_1 व G_2 तथा समान्तर माध्य A रखे जावें, तब $\frac{G_1^2}{G_2}+\frac{G_2^2}{G_1}$ का मान होगा [DCE 1999]

(a) $\frac{A}{2}$ (b) A

(c) $2A$ (d) इनमें से कोई नहीं

68. यदि $\log(x+z)+\log(x+z-2y)=2\log(x-z)$, तब x,y,z होंगे [RPET 1999]

(a) हरात्मक श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में

(c) समान्तर श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

69. यदि $\frac{a}{b+c},\frac{b}{c+a},\frac{c}{a+b}$ हरात्मक श्रेणी में हों, तो a,b,c होंगे [RPET 1999]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में

(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

70. यदि a,b,c समान्तर श्रेणी में हों तो $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}},\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ होंगे [Roorkee 1999; Kerala (Engg.) 2005]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में

(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

71. किसी समान्तर श्रेणी की तीन क्रमागत घटती संख्याओं का योग 27 है। यदि इन संख्याओं में क्रमशः $-1,-1,3$ को जोड़ा जाये, तो एक गुणोत्तर श्रेणी निर्मित होती है, तब संख्यायें होंगी [AMU 1999]

(a) 5, 9, 13 (b) 15, 9, 3

(c) 13, 9, 5 (d) 17, 9, 1

72. यदि p,q,r एक गुणोत्तर श्रेणी में हैं तथा a,b,c एक अन्य गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तब cp,bq,ar होंगे [Roorkee 1998]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) हरात्मक श्रेणी में

(c) गुणोत्तर श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

73. अनुक्रम $\frac{1}{16},a,b,\frac{1}{6}$ के प्रथम तीन पद गुणोत्तर श्रेणी में तथा अन्तिम तीन पद हरात्मक श्रेणी में हों, तो a व b के मान होंगे [UPSEAT 1999]

(a) $a=-\frac{1}{4},b=1$ (b) $a=\frac{1}{12},b=\frac{1}{9}$

(c) (a) और (b) दोनों सत्य हैं (d) इनमें से कोई नहीं

74. दिया है $a+d>b+c$ जहाँ a,b,c,d वास्तविक संख्यायें हैं, तब [Kurukshetra CEE 1998]

(a) a,b,c,d समान्तर श्रेणी में होंगे

(b) $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c},\frac{1}{d}$ समान्तर श्रेणी में होंगे

(c) $(a+b),(b+c),(c+d),(a+d)$ समान्तर श्रेणी में होंगे

(d) $\frac{1}{a+b},\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+d},\frac{1}{a+d}$ समान्तर श्रेणी में होंगे

75. यदि $A_1,A_2;G_1,G_2$ और H_1,H_2 दो संख्याओं के मध्य क्रमशः समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य प्रदर्शित करें, तो $\frac{G_1G_2}{H_1H_2}\times\frac{H_1+H_2}{A_1+A_2}$ का मान होगा [RPET 1997]

(a) 1 (b) 0

(c) 2 (d) 3

76. किसी समान्तर श्रेणी का सार्वान्तर, जिसका प्रथम पद इकाई तथा दूसरा, दसवां व चौतीसवां पद गुणोत्तर श्रेणी में हैं, होगा [AMU 2000]

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{9}$

77. माना धनात्मक संख्यायें a,b,c,d समान्तर श्रेणी में हैं, तब abc, abd, acd, bcd होंगे [IIT Screening 2001]

(a) समान्तर, गुणोत्तर, हरात्मक श्रेणी में से किसी में नहीं

(b) समान्तर श्रेणी में

(c) गुणोत्तर श्रेणी में

(d) हरात्मक श्रेणी में

78. यदि $ax^2+bx+c=0$ के मूलों का योग उनके व्युत्क्रम के वर्गों के योग के बराबर हो, तो $\frac{c}{a},\frac{a}{b},\frac{b}{c}$ होंगे [RPET 2000]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में

(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

79. यदि a,b,c समान्तर श्रेणी में हों, तो $2^{ax+1},2^{bx+1},2^{cx+1},x\neq 0$ होंगे [DCE 2000; Pb. CET 2000]

(a) समान्तर श्रेणी में

(b) गुणोत्तर श्रेणी केवल जब $x>0$

(c) गुणोत्तर श्रेणी यदि $x<0$

(d) गुणोत्तर श्रेणी सभी $x\neq 0$ के लिये

80. यदि $b+c,\ c+a,\ a+b$ हरात्मक श्रेणी में हों, तो $\frac{a}{b+c},\frac{b}{c+a},\frac{c}{a+b}$ होंगे [RPET 2000]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में

(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

81. यदि $\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}$ हरात्मक श्रेणी में हों, तो [UPSEAT 2002]

(a) a^2b,c^2a,b^2c समान्तर श्रेणी में होंगे

(b) a^2b,b^2c,c^2a हरात्मक श्रेणी में होंगे

(c) a^2b,b^2c,c^2a गुणोत्तर श्रेणी में होंगे

(d) इनमें से कोई नहीं

82. यदि A, समीकरण $x^2-2ax+b=0$ के मूलों का समांतर माध्य तथा G, समीकरण $x^2-2bx+a^2=0$ के मूलों का गुणोत्तर माध्य है, तब [UPSEAT 2001]

(a) $A>G$ (b) $A\neq G$

(c) $A=G$ (d) इनमें से कोई नहीं

83. यदि A व G क्रमशः समान्तर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य हों तथा $x^2-2Ax+G^2=0$, तब [UPSEAT 2001]

(a) $A=G$ (b) $A>G$

(c) $A<G$ (d) $A=-G$

84. यदि ln $(a+c)$, ln $(c-a)$, ln $(a-2b+c)$ समान्तर श्रेणी में हों, तो [IIT Screening 1994]

(a) a,b,c समान्तर श्रेणी में होंगे

(b) a^2,b^2,c^2 समान्तर श्रेणी में होंगे

(c) a,b,c गुणोत्तर श्रेणी में होंगे

(d) a,b,c हरात्मक श्रेणी में होंगे

85. यदि किसी त्रिभुज के लम्ब (Altitudes) समान्तर श्रेणी में हों, तो त्रिभुज की भुजायें होंगी [EAMCET 2002]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) हरात्मक श्रेणी में
(c) गुणोत्तर श्रेणी में (d) समांतरीय गुणोत्तर श्रेणी में

86. यदि a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हों, तो $\log_a x, \log_b x, \log_c x$ होंगे [RPET 2002]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

87. तीन असमान संख्यायें a, b, c इस प्रकार हैं कि a, b, c समान्तर श्रेणी में तथा $b-a, c-b, a$ गुणोत्तर श्रेणी में हों, तो $a:b:c$ है [UPSEAT 2001]

(a) 1 : 2 : 3 (b) 2: 3 : 1
(c) 1 : 3 : 2 (d) 3 : 2 : 1

88. यदि $(y-x), 2(y-a)$ तथा $(y-z)$ हरात्मक श्रेणी में हों, तो $x-a$, $y-a$, $z-a$ होंगे [RPET 2001]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

89. यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में तथा a^2, b^2, c^2 हरात्मक श्रेणी में हों, तो [UPSEAT 2001]

(a) $a \ne b \ne c$
(b) $a^2 = b^2 = \frac{c^2}{2}$
(c) a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में होंगे
(d) $\frac{-a}{2}, b, c$ गुणोत्तर श्रेणी में होंगे

90. यदि $a_1, a_2, ..., a_n$ धनात्मक वास्तविक संख्यायें हैं जिनका गुणनफल एक नियत संख्या c है, तब $a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + 2a_n$ का न्यूनतम मान होगा [IIT Screening 2002]

(a) $n(2c)^{1/n}$ (b) $(n+1)c^{1/n}$
(c) $2nc^{1/n}$ (d) $(n+1)(2c)^{1/n}$

91. यदि दो धनात्मक संख्याओं का समान्तर माध्य A, गुणोत्तर माध्य G तथा हरात्मक माध्य H है, तब H का मान होगा [MP PET 2004]

(a) $\frac{G^2}{A}$ (b) $\frac{G}{A^2}$
(c) $\frac{A^2}{G}$ (d) $\frac{A}{G^2}$

92. दो संख्याओं का हरात्मक माध्य $14\frac{2}{5}$ और गुणोत्तर माध्य 24 है तो महत्तम संख्या होगी [UPSEAT 2004]

(a) 72 (b) 54
(c) 36 (d) इनमें से कोई नहीं

93. जब $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{c-d} = 0$ और $b \ne a \ne c$, तब a, b, c होंगे [MP PET 2004]

(a) हरात्मक श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) समान्तर श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

94. यदि a^2, b^2, c^2 समान्तर श्रेणी में हैं, तो $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ होंगे

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

95. यदि p, q, r गुणोत्तर श्रेणी में हों और $\tan^{-1} p$, $\tan^{-1} q, \tan^{-1} r$ समान्तर श्रेणी में हों, तब p, q, r निम्न सम्बन्ध को संतुष्ट करेगा [DCE 2005]

(a) $p = q = r$ (b) $p \ne q \ne r$
(c) $p + q = r$ (d) इनमें से कोई नहीं

96. यदि x और y के समान्तर माध्य और गुणोत्तर माध्य का अनुपात $p:q$ हो, तब $x:y$ का मान होगा [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $p - \sqrt{p^2+q^2} : p + \sqrt{p^2+q^2}$
(b) $p + \sqrt{p^2-q^2} : p - \sqrt{p^2-q^2}$
(c) $p:q$
(d) $p + \sqrt{p^2+q^2} : p - \sqrt{p^2+q^2}$
(e) $q + \sqrt{p^2-q^2} : q - \sqrt{p^2-q^2}$

समान्तरीय गुणोत्तर श्रेणी, अन्तर विधि

1. यदि $|x| < 1$, तो श्रेणी $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...\infty$ का योग होगा

(a) $\frac{1}{1-x}$ (b) $\frac{1}{1+x}$
(c) $\frac{1}{(1+x)^2}$ (d) $\frac{1}{(1-x)^2}$

2. $1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + ...\infty =$ [DCE 1999]

(a) 3 (b) 6
(c) 9 (d) 12

3. श्रेणी $1 + \frac{4}{5} + \frac{7}{5^2} + \frac{10}{5^3} + ...$ के अनन्त पदों का योग होगा [MP PET 1981; RPET 1997; Roorkee 1992; DCE 1996, 2000]

(a) 3/16 (b) 35/8
(c) 35/4 (d) 35/16

4. श्रेणी $1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + ...\infty$ का योग होगा

(a) $\frac{1}{(1-x)^2}$ (b) $\frac{1}{1-x}$
(c) $\frac{1}{(1+x)^2}$ (d) $\frac{1}{(1-x)^3}$

5. $1 + 3 + 7 + 15 + 31 + ...$ n पदों तक = [IIT 1963]

(a) $2^{n+1} - n$ (b) $2^{n+1} - n - 2$
(c) $2^n - n - 2$ (d) इनमें से कोई नहीं

6. $2 + 4 + 7 + 11 + 16 + ...$ n पदों तक = [Roorkee 1977]

(a) $\frac{1}{6}(n^2 + 3n + 8)$ (b) $\frac{n}{6}(n^2 + 3n + 8)$
(c) $\frac{1}{6}(n^2 - 3n + 8)$ (d) $\frac{n}{6}(n^2 - 3n + 8)$

7. अनुक्रम $12 + 16 + 24 + 40 + ...$ के n पदों का योग होगा [UPSEAT 1999]

(a) $2(2^n - 1) + 8n$ (b) $2(2^n - 1) + 6n$
(c) $3(2^n - 1) + 8n$ (d) $4(2^n - 1) + 8n$

8. यदि a, b, c हरात्मक श्रेणी में हों, तो निम्न में से कौन सा सत्य है [MNR 1985]

(a) $\frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{1}{b}$ (b) $\frac{ac}{a+c} = b$
(c) $\frac{b+a}{b-a} + \frac{b+c}{b-c} = 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. श्रेणी $1+\frac{1.3}{6}+\frac{1.3.5}{6.8}+....\infty$ का योग होगा [UPSEAT 2001]
(a) 1 (b) 0
(c) ∞ (d) 4

10. श्रेणी $2+4+7+11+.......$ का nवाँ पद होगा [Roorkee 1977]
(a) $\frac{n^2+n+1}{2}$ (b) n^2+n+2
(c) $\frac{n^2+n+2}{2}$ (d) $\frac{n^2+2n+2}{2}$

11. श्रेणी $1+2x+3x^2+4x^3+.........$ का n पदों तक योग है [EAMCET 1998]
(a) $\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$ (b) $\frac{1-x^n}{1-x}$
(c) x^{n+1} (d) इनमें से कोई नहीं

12. श्रेणी $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{15}{16}+.........$ के प्रथम n पदों का योग है [IIT 1988; MP PET 1996; RPET 1996, 2000; Pb. CET 1994; DCE 1995, 96]
(a) 2^n-n-1 (b) $1-2^{-n}$
(c) $n+2^{-n}-1$ (d) 2^n-1

13. $1+\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{4}{5^3}+..........$ के n पदों का योग है [MP PET 1982]
(a) $\frac{25}{16}-\frac{4n+5}{16\times 5^{n-1}}$ (b) $\frac{3}{4}-\frac{2n+5}{16\times 5^{n+1}}$
(c) $\frac{3}{7}-\frac{3n+5}{16\times 5^{n-1}}$ (d) $\frac{1}{2}-\frac{5n+1}{3\times 5^{n+2}}$

14. $2^{1/4}.4^{1/8}.8^{1/16}.16^{1/32}..........=$ [MNR 1984; MP PET 1998; AIEEE 2002]
(a) 1 (b) 2
(c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{5}{2}$

15. $i-2-3i+4+.........$ 100 पदों तक का योगफल है, (जहाँ $i=\sqrt{-1}$)
(a) $50(1-i)$ (b) $25i$
(c) $25(1+i)$ (d) $100(1-i)$

16. श्रेणी $2+7+14+23+34+.....$ का 99वाँ पद है [Pb. CET 2003]
(a) 9998 (b) 9999
(c) 10000 (d) 100000

17. यदि प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को उपसमुच्चयों में इस प्रकार विभाजित किया जाता है, कि $S_1=\{1\}, S_2=\{2, 3\}, S_3=\{4, 5, 6\}$ ...., तब S_{50} में पदों का योगफल है
(a) 62525 (b) 25625
(c) 62500 (d) इनमें से कोई नहीं

n वें पदों की विशेष श्रेणियाँ, *n* पदों का योग और अनन्त पदों का योग

1. श्रेणी $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+......$ के $(n+1)$ पदों का योग होगा [RPET 1999]
(a) $\frac{n}{n+1}$ (b) $\frac{2n}{n+1}$
(c) $\frac{2}{n(n+1)}$ (d) $\frac{2(n+1)}{n+2}$

2. श्रेणी $1+(1+3)+(1+3+5)+.......$ के $(n-1)$ पदों का योग होगा [RPET 1999]
(a) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (b) $\frac{n^2(n+1)}{4}$
(c) $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ (d) n^2

3. श्रेणी $1^2+2.2^2+3^2+2.4^2+5^2+2.6^2+..........$ के n पदों का योगफल, जब n सम है, $\frac{n(n+1)^2}{2}$ है। जब n विषम हो, तब योगफल होगा [IIT 1988]
(a) $\frac{n(n+1)^2}{2}$ (b) $\frac{1}{2}n^2(n+1)$
(c) $n(n+1)^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. श्रेणी $2^2+4^2+6^2+..........$ के n पदों का योग है [MP PET 1994]
(a) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$ (b) $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$
(c) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (d) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{9}$

5. श्रेणी $1+(1+2)+(1+2+3)+..........$ का n पदों तक योगफल है [MP PET 1986]
(a) n^2-2n+6 (b) $\frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$
(c) n^2+2n+6 (d) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

6. श्रेणी, जिसका n वाँ पद $n(n+1)$ है, के n पदों का योग है
(a) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (b) $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{12}$
(c) $n^2(n+2)$ (d) $n(n+1)(n+2)$

7. श्रेणी $1(1!)+2(2!)+3(3!)+....+n(n!)$ का योग होगा [AMU 1999; DCE 2005]
(a) $3(n!)+n-3$ (b) $(n+1)!-(n-1)!$
(c) $(n+1)!-1$ (d) $2(n!)-2n-1$

8. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+........+.......\frac{1}{n.(n+1)}=$ [AMU 1995; RPET 1996; UPSEAT 1999, 2001]
(a) $\frac{1}{n(n+1)}$ (b) $\frac{n}{n+1}$
(c) $\frac{2n}{n+1}$ (d) $\frac{2}{n(n+1)}$

9. श्रेणी $3.6+4.7+5.8+........$ का $(n-2)$ पदों तक का योग है [EAMCET 1980]
(a) n^3+n^2+n+2
(b) $\frac{1}{6}(2n^3+12n^2+10n-84)$
(c) n^3+n^2+n
(d) इनमें से कोई नहीं

10. यदि $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, तो $\sum_{i=1}^{n}(3i-2) =$

(a) $\frac{n(3n-1)}{2}$ (b) $\frac{n(3n+1)}{2}$

(c) $n(3n+2)$ (d) $\frac{n(3n+1)}{4}$

11. श्रेणी $1^2.2+2^2.3+3^2.4+........$ के n पदों का योग है

(a) $\frac{n^3(n+1)^3(2n+1)}{24}$

(b) $\frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{12}$

(c) $\frac{n(n+1)}{6}[n(n+1)+(2n+1)]$

(d) $\frac{n(n+1)}{12}[6n(n+1)+2(2n+1)]$

12. श्रेणी $1.2.3+2.3.4+3.4.5+.......$ के n पदों का योग होगा [Kurukshetra CEE 1998]

(a) $n(n+1)(n+2)$ (b) $(n+1)(n+2)(n+3)$

(c) $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$ (d) $\frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$

13. श्रेणी $1^3+2^3+3^3+4^3+.....+15^3$ का योग होगा [MP PET 2003]

(a) 22000 (b) 10,000

(c) 14,400 (d) 15,000

14. यदि प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग उनके योग से 330 अधिक है, तो $n =$ [Karnataka CET 1998]

(a) 8 (b) 10

(c) 15 (d) 20

15. श्रेणी $\cot^{-1}3+\cot^{-1}7+\cot^{-1}13+\cot^{-1}21+..........$ ... के प्रथम n पदों का योग होगा

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{n}{n+2}\right)$ (b) $\cot^{-1}\left(\frac{n+2}{n}\right)$

(c) $\tan^{-1}(n+1)-\tan^{-1}1$ (d) उपरोक्त सभी

16. यदि प्राकृत संख्यायें इस प्रकार लिखी जाती हैं

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
. . . .
. . . .
. . . .

तब nवीं पंक्ति की संख्याओं का योग होगा

(a) $\frac{n}{2}(n^2-1)$ (b) $\frac{n}{2}(n^2+1)$

(c) $\frac{2}{n}(n^2+1)$ (d) $\frac{2}{n}(n^2-1)$

17. श्रेणी $\frac{1}{1}+\frac{1+2}{2}+\frac{1+2+3}{3}+.......$ का nवाँ पद होगा [AMU 1982]

(a) $\frac{n+1}{2}$ (b) $\frac{n-1}{2}$

(c) $\frac{n^2+1}{2}$ (d) $\frac{n^2-1}{2}$

18. प्रथम n प्राकृत संख्याओं में दो को एक साथ लेने पर प्राप्त गुणनफलों का योग होगा

(a) $\frac{1}{24}n(n-1)(n+1)(3n+2)$ (b) $\frac{n^2}{48}(n-1)(n-2)$

(c) $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+5)$ (d) इनमें से कोई नहीं

19. श्रेणी $1.3^2+2.5^2+3.7^2+..........$ के 20 पदों तक का योग है [IIT 1973]

(a) 188090 (b) 189080

(c) 199080 (d) इनमें से कोई नहीं

20. $\frac{1^3+2^3+3^3+4^3+........12^3}{1^2+2^2+3^2+4^2+.........12^2} =$ [MP PET 1998]

(a) $\frac{234}{25}$ (b) $\frac{243}{35}$

(c) $\frac{263}{27}$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. श्रेणी $\frac{3}{1^2}+\frac{5}{1^2+2^2}+\frac{7}{1^2+2^2+3^2}+...$ के n पदों का योग होगा [Pb. CET 1999; RPET 2001]

(a) $\frac{2n}{n+1}$ (b) $\frac{4n}{n+1}$

(c) $\frac{6n}{n+1}$ (d) $\frac{9n}{n+1}$

22. श्रेणी $1.3.5+.2.5.8+3.7.11+.........$ के 'n' पदों तक का योग है [Dhanbad Engg. 1972]

(a) $\frac{n(n+1)(9n^2+23n+13)}{6}$ (b) $\frac{n(n-1)(9n^2+23n+12)}{6}$

(c) $\frac{(n+1)(9n^2+23n+13)}{6}$ (d) $\frac{n(9n^2+23n+13)}{6}$

23. श्रेणी $\frac{2}{3}+\frac{8}{9}+\frac{26}{27}+\frac{80}{81}+.....$ के n पदों तक का योग होगा [Karnataka CET 2001]

(a) $n-\frac{1}{2}(3^n-1)$ (b) $n+\frac{1}{2}(3^n-1)$

(c) $n+\frac{1}{2}(1-3^{-n})$ (d) $n+\frac{1}{2}(3^{-n}-1)$

24. $\sum_{m=1}^{n} m^2 =$ [RPET 1995]

(a) $\frac{m(m+1)}{2}$ (b) $\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$

(c) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (d) $\frac{n(n+1)}{2}$

25. श्रेणी $1.2+2.3+3.4+4.5+.........$ के n पदों का योग होगा [MNR 1980]

(a) n^3 (b) $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(c) $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ (d) $\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)$

26. श्रेणी $11^3 + 12^3 + ... + 20^3$ [Pb. CET 1997; RPET 2002]

(a) 5 से विभाज्य है

(b) एक विषम पूर्णांक है, जो 5 से विभाज्य है

(c) एक सम पूर्णांक है, जो 5 से अविभाज्य है

(d) एक विषम पूर्णांक है, जो 5 से अविभाज्य है

27. अनन्त श्रेणी $1.3^2 + 2.5^2 + 3.7^2 + ... \infty$ के n पदों का योग होगा [AMU 1982]

(a) $\frac{n}{6}(n+1)(6n^2+14n+7)$

(b) $\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)(3n+1)$

(c) $4n^3+4n^2+n$

(d) इनमें से कोई नहीं

28. यदि किसी श्रेणी का n वाँ पद $3+n(n-1)$ है, तो श्रेणी के n पदों का योग होगा

(a) $\frac{n^2+n}{3}$ (b) $\frac{n^3+8n}{3}$

(c) $\frac{n^2+8n}{5}$ (d) $\frac{n^2-8n}{3}$

29. श्रेणी $(2n-1)+2(2n-3)+3(2n-5)+.....$ के n पदों का योग होगा [AMU 2001]

(a) $(n+1)(n+2)(n+3)/6$ (b) $n(n+1)(n+2)/6$

(c) $n(n+1)(2n+3)$ (d) $n(n+1)(2n+1)/6$

30. (1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9),..........समूह में 11वें समूह का प्रथम पद है

(a) 89 (b) 97

(c) 101 (d) 123

31. $11^2+12^2+13^2+.......20^2 =$ [MP PET 1995]

(a) 2481 (b) 2483

(c) 2485 (d) 2487

32. श्रेणी $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+..........$ के अनन्त पदों का योग होगा [MNR 1982]

(a) ∞ (b) 1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

33. $\frac{\frac{1}{2}.\frac{2}{2}}{1^3}+\frac{\frac{2}{2}.\frac{3}{2}}{1^3+2^3}+\frac{\frac{3}{2}.\frac{4}{2}}{1^3+2^3+3^3}+.....n$ पदों तक = [EAMCET 2000]

(a) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$ (b) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^3$

(c) $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{n+1}\right)$

34. यदि $1+\frac{1+2}{2}+\frac{1+2+3}{3}+.....$ n पदों तक का योग S हो, तो S का मान होगा [Kerala (Engg.) 2002]

(a) $\frac{n(n+3)}{4}$ (b) $\frac{n(n+2)}{4}$

(c) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (d) n^2

35. श्रेणी $\frac{2}{1!}+\frac{7}{2!}+\frac{15}{3!}+\frac{26}{4!}+.....$ का nवाँ पद है

(a) $\frac{n(3n-1)}{2(n)!}$ (b) $\frac{n(3n+1)}{2(n)!}$

(c) $\frac{n}{2}\frac{3n}{(n)!}$ (d) इनमें से कोई नहीं

36. यदि $t_n = \frac{1}{4}(n+2)(n+3)$, n = 1, 2, 3,...... के लिए, तब $\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+....+\frac{1}{t_{2003}} =$ [EAMCET 2003]

(a) $\frac{4006}{3006}$ (b) $\frac{4003}{3007}$

(c) $\frac{4006}{3008}$ (d) $\frac{4006}{3009}$

37. यदि $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+.....+\infty=\frac{\pi^4}{90}$, तब $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+.....\infty$ का मान होगा [AMU 2005]

(a) $\frac{\pi^4}{96}$ (b) $\frac{\pi^4}{45}$

(c) $\frac{89}{90}\pi^4$ (d) इनमें से कोई नहीं

38. $\frac{1}{(1+a)(2+a)}+\frac{1}{(2+a)(3+a)}+\frac{1}{(3+a)(4+a)}+.....+\infty$ का मान है, (जहाँ a एक नियतांक है) [AMU 2005]

(a) $\frac{1}{1+a}$ (b) $\frac{2}{1+a}$

(c) ∞ (d) इनमें से कोई नहीं

Critical Thinking

Objective Questions

1. यदि किसी चतुर्भुज के कोण समान्तर श्रेणी में हैं और उनका सार्वअन्तर 10^o हो, तो चतुर्भुज के कोण होंगे

(a) $65^o, 85^o, 95^o, 105^o$

(b) $75^o, 85^o, 95^o, 105^o$

(c) $65^o, 75^o, 85^o, 95^o$

(d) $65^o, 95^o, 105^o, 115^o$

2. यदि एक समान्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योग उसके प्रथम m पदों के योग के बराबर हो $(m \neq n)$, तो उसके $(m+n)$ पदों का योग होगा [MP PET 1984]

(a) 0 (b) n

(c) m (d) $m+n$

3. p, q, r समान्तर श्रेणी में एवं धनात्मक हैं तो वर्ग समीकरण $px^2 + qx + r = 0$ के मूल वास्तविक होंगे, यदि [IIT 1995]

(a) $\left|\frac{r}{p} - 7\right| \ge 4\sqrt{3}$

(b) $\left|\frac{p}{r} - 7\right| < 4\sqrt{3}$

(c) सभी p व $r \in R$ के लिए

(d) सभी p व r के लिए नहीं

4. तीन समान्तर श्रेणियों के n पदों के योगफल S_1, S_2, S_3 हैं जिनके प्रथम पद 1 और सार्वअन्तर क्रमशः 1, 2, 3 हैं, तो सत्य सम्बन्ध होगा

(a) $S_1 + S_3 = S_2$ (b) $S_1 + S_3 = 2S_2$

(c) $S_1 + S_2 = 2S_3$ (d) $S_1 + S_2 = S_3$

5. x के किस मान के लिए

$\log_a x + \log_{\sqrt{a}} x + \log_{3\sqrt{a}} x + ... + \log_{a\sqrt{a}} x = \frac{a+1}{2}$ होगा

(a) $x = a$ (b) $x = a^a$

(c) $x = a^{-1/a}$ (d) $x = a^{1/a}$

6. जयराम एक मकान को 15000 रूपये मूल्य पर खरीदता है तथा 5000 रूपये एक बार में जमा करता है। शेष रूपयों को 1000 रूपये वार्षिक किस्त पर 10% ब्याज के साथ चुकाता है, तब वह कितना पैसा चुकायेगा [UPSEAT 1999]

(a) 21555 रूपये (b) 20475रूपये

(c) 20500 रूपये (d) 20700 रूपये

7. $S_1, S_2, ...$ इस प्रकार के वर्ग (squares) हैं कि $n \ge 1$ के प्रत्येक मान के लिए वर्ग S_n की एक भुजा की लम्बाई, वर्ग S_{n+1} के विकर्ण की लम्बाई के बराबर है। यदि S_1 की एक भुजा की लम्बाई 10 सेमी है, तो n के निम्नलिखित कौन कौन से मानों के लिए वर्ग S_n का क्षेत्रफल 1 वर्ग सेमी से कम होगा [IIT 1999]

(a) 7 (b) 8

(c) 9 (d) 10

8. यदि m समान्तर श्रेणियों के n पदों के योग क्रमशः $S_1, S_2, S_3, ... S_m$ हैं और इनके प्रथम पद $1, 2, 3, ..., m$ और सार्वअन्तर क्रमशः $1, 3, 5, ... 2m-1$ हों, तो $S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_m$ का मान है

(a) $\frac{1}{2}mn(mn+1)$ (b) $mn(m+1)$

(c) $\frac{1}{4}mn(mn-1)$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि $a_1, a_2, a_3, ... a_{24}$ समान्तर श्रेणी में हैं तथा $a_1 + a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} + a_{24} = 225$, तो $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{23} + a_{24} =$

[MP PET 1999; AMU 1997]

(a) 909 (b) 75

(c) 750 (d) 900

10. यदि समीकरण $x^3 - 12x^2 + 39x - 28 = 0$ के मूल समान्तर श्रेणी में हों, तो श्रेणी का सार्वान्तर होगा

[UPSEAT 1994, 99, 2001; RPET 2001]

(a) ± 1 (b) ± 2

(c) ± 3 (4) ± 4

11. यदि गुणोत्तर श्रेणी $a_1, a_2, a_3, ...$ का प्रथम पद इकाई इस प्रकार है कि $4a_2 + 5a_3$ न्यूनतम है, तब गुणोत्तर श्रेणी का सार्व-अनुपात है

(a) $-\frac{2}{5}$ (b) $-\frac{3}{5}$

(c) $\frac{2}{5}$ (d) इनमें से कोई नहीं

12. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योग S एवं गुणनफल P है तथा उनके व्युत्क्रमों का योग R है, तो P^2 का मान है

[IIT 1966; Roorkee 1981]

(a) $\frac{R}{S}$ (b) $\frac{S}{R}$

(c) $\left(\frac{R}{S}\right)^n$ (d) $\left(\frac{S}{R}\right)^n$

13. माना $n(>1)$ एक धनात्मक पूर्णांक है, तो वह सबसे बड़ा पूर्णांक m जिसके लिए $(n^m + 1), (1 + n + n^2 + ... + n^{127})$ को विभाजित करता है, होगा [IIT 1995]

(a) 32 (b) 63

(c) 64 (d) 127

14. एक गुणोत्तर श्रेणी में पदों की संख्या सम है। यदि सभी पदों का योगफल विषम स्थान वाले पदों के योगफल का 5 गुना है, तब सार्व-अनुपात होगा

(a) 2 (b) 3

(c) 4 (d) 5

15. यदि $x, y \in N$ के सभी मानों के लिये $f(x+y) = f(x)f(y)$ को सन्तुष्ट करने वाला एक फलन $f(x)$ इस प्रकार है कि $f(1) = 3$ तथा $\sum_{x=1}^{n} f(x) = 120$, तब n का मान है [IIT 1992]

(a) 4 (b) 5

(c) 6 (d) इनमें से कोई नहीं

16. यदि दो संख्याएँ a और b के बीच n गुणोत्तर माध्य $G_1, G_2, ... G_n$ तथा एक माध्य G हो, तो सत्य सम्बन्ध है

(a) $G_1.G_2........ G_n = G$ (b) $G_1.G_2........ G_n = G^{1/n}$

(c) $G_1.G_2........ G_n = G^n$ (d) $G_1.G_2........ G_n = G^{2/n}$

17. α, β समीकरण $x^2 - 3x + a = 0$ के मूल हैं और γ, δ समीकरण $x^2 - 12x + b = 0$ के मूल हैं। यदि $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ एक वर्धमान गुणोत्तर श्रेणी बनाते हों, तो $(a, b) =$ [DCE 2000]

(a) (3, 12) (b) (12, 3)

(c) (2, 32) (d) (4, 16)

18. $2.\dot{3}\dot{5}\dot{7} =$ [IIT 1983; RPET 1995]

(a) $\frac{2355}{1001}$ (b) $\frac{2370}{997}$

(c) $\frac{2355}{999}$ (d) इनमें से कोई नहीं

19. $1+\cos\alpha+\cos^2\alpha+.......\infty = 2-\sqrt{2}$, तब α $(0<\alpha<\pi)$ का मान होगा [Roorkee 2000; AMU 2005]

(a) $\frac{\pi}{8}$ (b) $\frac{\pi}{6}$

(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{3\pi}{4}$

20. अनन्त गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद x और उसका योग 5 है, तब [IIT Screening 2004]

(a) $0 \le x \le 10$ (b) $0 < x < 10$

(c) $-10 < x < 0$ (d) $x > 10$

21. यदि a, b, c हरात्मक श्रेणी में हैं, तो $\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$ का मान है [MP PET 1998; Pb. CET 2000]

(a) $\frac{2}{bc}+\frac{1}{b^2}$ (b) $\frac{3}{c^2}+\frac{2}{ca}$

(c) $\frac{3}{b^2}-\frac{2}{ab}$ (d) इनमें से कोई नहीं

22. यदि समीकरण $(1-ab)x^2-(a^2+b^2)x-(1+ab)=0$ का मूल m हो तथा a व b के बीच m हरात्मक माध्य रखे जायें, तब अन्तिम हरात्मक माध्य व प्रथम हरात्मक माध्य का अन्तर है

(a) $b-a$ (b) $ab(b-a)$

(c) $a(b-a)$ (d) $ab(a-b)$

23. एक छात्र घर से विद्यालय की ओर x किमी/घण्टा की रफ्तार से जाता है तथा y किमी/घण्टा की रफ्तार से वापस आता है, तब औसत वेग निम्न द्वारा प्रदर्शित होगा [DCE 2002]

(a) समान्तर माध्य (b) गुणोत्तर माध्य

(c) हरात्मक माध्य (d) इनमें से कोई नहीं

24. यदि a, b, c, d हरात्मक श्रेणी में हैं, तो

(a) $a^2+c^2 > b^2+d^2$

(b) $a^2+d^2 > b^2+c^2$

(c) $ac+bd > b^2+c^2$

(d) $ac+bd > b^2+d^2$

25. यदि a, b, c धनात्मक पूर्णांक हों, तो $(a+b)(b+c)(c+a)$ है [DCE 2000]

(a) $< 8abc$ (b) $> 8abc$

(c) $= 8abc$ (d) इनमें से कोई नहीं

26. किसी गुणोत्तर श्रेणी में तीन संख्याओं का योग 14 है। यदि प्रथम दो संख्याओं में 1 जोड़ दिया जाए एवं तीसरी में से 1 घटा दिया जाए तो श्रेणी समान्तर श्रेणी बन जाती है, तो सबसे बड़ी संख्या होगी

(a) 8 (b) 4

(c) 24 (d) 16

27. यदि a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हों तथा $\log a-\log 2b$, $\log 2b-\log 3c$ एवं $\log 3c-\log a$ समान्तर श्रेणी में हों, तब a, b, c एक ऐसे त्रिभुज की भुजायें होंगी, जो कि

(a) न्यूनकोणीय है (b) अधिककोणीय है

(c) समकोणीय है (d) समबाहु है

28. यदि $A_1, A_2; G_1, G_2$ तथा H_1, H_2 दो संख्याओं के मध्य क्रमशः समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य हों, तब $\frac{G_1G_2}{H_1H_2}$ का मान होगा [Roorkee 1983; AMU 2000]

(a) $\frac{A_1+A_2}{H_1+H_2}$ (b) $\frac{A_1-A_2}{H_1+H_2}$

(c) $\frac{A_1+A_2}{H_1-H_2}$ (d) $\frac{A_1-A_2}{H_1-H_2}$

29. दो संख्याओं का हरात्मक माध्य 4 है। यदि समान्तर माध्य व गुणोत्तर माध्य सम्बन्ध $2A+G^2=27$ को संतुष्ट करते हैं, तो संख्यायें हैं, (जहाँ A= समान्तर माध्य, G= गुणोत्तर माध्य) [MNR 1987; UPSEAT 1999, 2000]

(a) 6, 3 (b) 5, 4

(c) 5, – 2.5 (d) –3, 1

30. यदि दो संख्याओं का समान्तर माध्य उनके गुणोत्तर माध्य से 2 अधिक है एवं संख्याओं का अनुपात $4:1$ है, तो संख्यायें हैं [RPET 1988]

(a) 4, 1 (b) 12, 3

(c) 16, 4 (d) इनमें से कोई नहीं

31. यदि किसी द्विघात समीकरण के मूलों का समान्तर माध्य व गुणोत्तर माध्य क्रमशः 8 व 5 हों, तो द्विघात समीकरण होगा [Pb. CET 1990]

(a) $x^2-16x-25=0$

(b) $x^2-8x+5=0$

(c) $x^2-16x+25=0$

(d) $x^2+16x-25=0$

32. दो संख्याओं के बीच समान्तर माध्य, हरात्मक माध्य व गुणोत्तर माध्य $\frac{144}{15}$, 15 व 12 हैं लेकिन यह क्रम आवश्यक नहीं है, तब हरात्मक माध्य, गुणोत्तर माध्य व समान्तर माध्य क्रमशः होंगे

(a) $15, 12, \frac{144}{15}$ (b) $\frac{144}{15}, 12, 15$

(c) $12, 15, \frac{144}{15}$ (d) $\frac{144}{15}, 15, 12$

33. यदि b और c का समान्तर माध्य a है तथा G_1, G_2 उनके बीच दो गुणोत्तर माध्य हैं, तब $G_1^3 + G_2^3 =$

(a) G_1G_2a (b) $2G_1G_2a$

(c) $3G_1G_2a$ (d) इनमें से कोई नहीं

34. तीन संख्यायें गुणोत्तर श्रेणी में हैं। यदि तीसरे पद में से 64 घटाया जाये तो ये तीन संख्यायें समान्तर श्रेणी में होंगी। यदि इस समान्तर श्रेणी के दूसरे पद में से 8 घटाया जाये तो पुनः ये संख्यायें गुणोत्तर श्रेणी में प्राप्त होती हैं। संख्यायें होंगी

(a) 4, 20, 36 (b) 4, 12, 36

(c) 4, 20, 100 (d) इनमें से कोई नहीं

35. यदि $x > 1, y > 1, z > 1$ गुणोत्तर श्रेणी में (G.P) हों, तो $\frac{1}{1+\ln x}, \frac{1}{1+\ln y}, \frac{1}{1+\ln z}$ होंगे

[IIT 1998; UPSEAT 2001]

(a) समान्तर श्रेणी में

(b) हरात्मक श्रेणी में

(c) गुणोत्तर श्रेणी में

(d) इनमें से कोई नहीं

36. संख्याओं x व y के मध्य a, g, h क्रमशः समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य हैं, तब निम्न कथन सत्य होगा

[Karnataka CET 2001]

(a) a व g के मध्य h हरात्मक माध्य होगा

(b) a, g, h के मध्य कोई संबंध नहीं होगा

(c) a व h के मध्य g गुणोत्तर माध्य होगा

(d) g व h के मध्य a समांतर माध्य होगा

37. $2^{\sin\theta} + 2^{\cos\theta}$ निम्न में किस संख्या से बड़ा है [AMU 2000]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\sqrt{2}$

(c) $2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ (d) $2^{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

38. यदि a, b, c, d धनात्मक वास्तविक संख्यायें इस प्रकार हैं कि $a+b+c+d = 2$, तब $M = (a+b)(c+d)$ निम्न संबंध को संतुष्ट करता है [IIT Screening 2000]

(a) $0 < M \le 1$ (b) $1 \le M \le 2$

(c) $2 \le M \le 3$ (d) $3 \le M \le 4$

39. माना a, b, c समान्तर श्रेणी में तथा a^2, b^2, c^2 गुणोत्तर श्रेणी में हैं। यदि $a < b < c$ तथा $a+b+c = \frac{3}{2}$, तब a का मान होगा

[IIT Screening 2002]

(a) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

(c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

40. श्रेणी $\left(1 + \frac{4}{5} + \frac{7}{5^2} + \frac{10}{5^3} + ...\right)$ का nवाँ पद होगा

(a) $\frac{3n+1}{5^{n-1}}$ (b) $\frac{3n-1}{5^n}$

(c) $\frac{3n-2}{5^{n-1}}$ (d) $\frac{3n+2}{5^{n-1}}$

41. श्रेणी $\frac{1}{1+1^2+1^4} + \frac{2}{1+2^2+2^4} + \frac{3}{1+3^2+3^4} + ...$ n पदों तक का योगफल है

(a) $\frac{n(n^2+1)}{n^2+n+1}$ (b) $\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$

(c) $\frac{n(n^2-1)}{2(n^2+n+1)}$ (d) इनमें से कोई नहीं

42. किसी विषम पूर्णांक $n \ge 1$ के लिये,

$n^3 - (n-1)^3 + ... + (-1)^{n-1}1^3 =$ [IIT 1996]

(a) $\frac{1}{2}(n-1)^2(2n-1)$

(b) $\frac{1}{4}(n-1)^2(2n-1)$

(c) $\frac{1}{2}(n+1)^2(2n-1)$

(d) $\frac{1}{4}(n+1)^2(2n-1)$

43. अनुक्रम $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + ...$ के n पदों का योग होगा [UPSEAT 2002]

(a) $\sqrt{2n+1}$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2n+1}$

(c) $\sqrt{2n+1} - 1$ (d) $\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1} - 1)$

44. श्रेणी $\frac{1^3}{1} + \frac{1^3+2^3}{1+3} + \frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5} + ...$ का n वाँ पद होगा

[Pb. CET 2000]

(a) n^2+2n+1 (b) $\frac{n^2+2n+1}{8}$

(c) $\frac{n^2+2n+1}{4}$ (d) $\frac{n^2-2n+1}{4}$

45. अनुक्रम

$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2}}$

का योग होगा

(a) $\frac{(2n+1)}{\sqrt{n}}$ (b) $\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

(c) $\frac{(n+\sqrt{n^2-1})}{2\sqrt{n}}$ (d) $n-1$

Answers

समान्तर श्रेणी

1	c	2	b	3	a	4	b	5	a
6	a	7	c	8	c	9	b	10	b
11	a	12	a	13	b	14	c	15	b
16	c	17	d	18	b	19	a	20	d
21	d	22	c	23	a	24	b	25	c
26	c	27	a	28	a	29	c	30	c
31	b	32	d	33	c	34	d	35	c
36	c	37	d	38	a	39	a, c	40	c
41	c	42	a	43	b	44	b	45	b
46	c	47	a	48	a	49	d	50	c
51	a	52	a	53	c	54	c	55	a
56	c	57	c	58	d	59	a	60	a
61	d	62	c	63	c	64	d	65	b
66	d	67	b	68	a	69	b	70	d
71	b	72	d	73	b	74	d	75	b
76	a	77	b	78	a	79	b	80	c
81	d	82	a	83	b	84	a	85	b
86	b	87	c	88	b	89	b	90	c
91	a	92	c	93	b	94	b	95	a
96	b	97	e	98	b	99	d	101	d
101	c	102	a						

गुणोत्तर श्रेणी

1	b	2	d	3	c	4	b	5	b
6	b	7	a	8	d	9	a	10	b
11	b	12	c	13	b	14	b	15	a
16	d	17	c	18	a	19	a	20	b
21	a	22	c	23	b	24	d	25	a
26	a	27	a	28	b	29	b	30	d
31	b	32	a	33	c	34	b	35	c
36	b	37	c	38	b	39	a	40	d
41	a	42	b	43	d	44	a	45	c
46	b	47	b	48	c	49	b	50	a
51	b	52	d	53	b	54	a	55	c
56	a	57	b	58	a	59	b	60	d
61	b	62	a	63	c	64	a	65	d
66	b	67	c	68	b	69	b	70	d
71	d	72	a	73	d	74	d	75	a
76	a	77	a	78	a	79	b	80	c
81	a	82	c	83	d	84	a	85	b
86	c	87	b	88	c				

हरात्मक श्रेणी

1	c	2	d	3	d	4	c	5	b
6	a	7	b	8	d	9	a	10	d
11	d	12	c	13	b	14	b	15	a
16	c	17	d	18	c	19	a	20	b
21	b	22	c	23	c				

समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य में सम्बन्ध

1	a	2	d	3	b	4	d	5	c
6	c	7	a	8	a	9	c	10	b
11	a	12	c	13	c	14	b	15	c
16	d	17	c	18	b	19	c	20	a
21	c	22	c	23	d	24	c	25	a
26	c	27	a	28	b	29	b	30	a
31	c	32	b	33	a	34	c	35	b
36	a	37	d	38	b	39	d	40	d
41	b	42	c	43	b	44	d	45	b
46	b	47	c	48	d	49	b	50	c
51	d	52	d	53	b	54	b	55	c
56	b	57	a	58	c	59	b	60	c,d
61	a	62	c	63	c	64	c	65	c
66	c	67	c	68	a	69	c	70	a
71	d	72	c	73	c	74	b	75	a
76	b	77	d	78	a	79	d	80	a
81	a	82	c	83	b	84	d	85	b
86	c	87	a	88	b	89	d	90	a
91	a	92	a	93	a	94	a	95	a
96	b								

समान्तरीय गुणोत्तर श्रेणी, अन्तर विधि

1	d	2	d	3	d	4	d	5	b
6	b	7	d	8	d	9	d	10	c
11	a	12	c	13	a	14	b	15	a
16	a	17	a						

n वें पदों की विशेष श्रेणियाँ, *n* पदों का योग और अनन्त पदों का योग

1	d	2	c	3	b	4	b	5	d
6	a	7	c	8	b	9	b	10	a
11	b	12	c	13	c	14	b	15	d
16	b	17	a	18	a	19	a	20	a
21	c	22	a	23	d	24	c	25	b
26	b	27	a	28	b	29	d	30	c
31	c	32	b	33	c	34	a	35	b
36	d	37	a	38	a				

Critical Thinking Questions

1	b	2	a	3	a	4	b	5	d
6	c	7	b,c,d	8	a	9	d	10	c
11	a	12	d	13	c	14	c	15	a
16	c	17	c	18	c	19	d	20	b
21	c	22	b	23	c	24	c	25	b
26	a	27	b	28	a	29	a	30	c
31	c	32	b	33	b	34	c	35	b
36	c	37	d	38	a	39	d	40	c
41	b	42	d	43	d	44	c	45	d

Answers and Solutions

समान्तर श्रेणी

1. (c) सार्व-अन्तर $d = \frac{6}{\sqrt{7}} - \frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \sqrt{7} - \frac{6}{\sqrt{7}}$.
अतः दी गई श्रेणी समान्तर श्रेणी है।

2. (b) दी गई श्रेणी
$\left(3 - \frac{1}{n}\right) + \left(3 - \frac{2}{n}\right) + \left(3 - \frac{3}{n}\right) + ...$ (समान्तर श्रेणी में)
अतः सार्वान्तर
$d = \left(3 - \frac{2}{n}\right) - \left(3 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n}$ एवं प्रथम पद $a = \left(3 - \frac{1}{n}\right)$
$\therefore$ श्रेणी का p वाँ पद $= a + (p-1)d$
$= \left(3 - \frac{1}{n}\right) + (p-1)\left(-\frac{1}{n}\right) = 3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{p}{n} = \left(3 - \frac{p}{n}\right)$.
ट्रिक : इस प्रश्न को निरीक्षण से हल कर सकते हैं, अर्थात पहला पद $= -\frac{1}{n}$, दूसरा पद $= -\frac{2}{n}$, तीसरा पद $= -\frac{3}{n}$.
इसलिये, p वाँ पद $= -\frac{p}{n}$ होगा। अतः अभीष्ट परिणाम प्राप्त होता है, ($\because$ 3 अचर है)।

3. (a) स्पष्टतः, दी गयी श्रेणी $2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 0 + ...$ एक समान्तर श्रेणी है। यहाँ $a = 2\sqrt{2}, d = -\sqrt{2}$
अतः श्रेणी का 8 वाँ पद $= 2\sqrt{2} + (8-1)(-\sqrt{2}) = -5\sqrt{2}$.

4. (b) दिया गया है, 9 वाँ पद $= a + (9-1)d = 0 \Rightarrow a + 8d = 0$
अब 29 वें तथा 19 वें पदों का अनुपात
$= \frac{a + 28d}{a + 18d} = \frac{(a+8d) + 20d}{(a+8d) + 10d} = \frac{20d}{10d} = \frac{2}{1}$.

5. (a) अनुक्रम $f(n) = an + b; n \in N$ एक समान्तर श्रेणी है।
$n = 1, 2, 3, 4, ...$ रखने पर,
अनुक्रम $(a+b), (2a+b), (3a+b), ...$ प्राप्त होता है जो कि एक समान्तर श्रेणी है तथा जिसका प्रथम पद $(A) = (a+b)$ एवं सार्वअन्तर $d = a$ है।
वैकल्पिक: जैसा कि हम पढ़ चुके हैं कि एक समान्तर श्रेणी का n वाँ पद $an + b, \forall n \in N$ के रूप का होता है।

6. (a) दिया गया अनुक्रम
$(-8 + 18i), (-6 + 15i), (-4 + 12i), (-2 + 9i), (0 + 6i), ...$ है।
स्पष्टतः, 5वाँ पद पूर्णतः काल्पनिक है।

7. (c) दिया है, $T_n = 2n - 1$
प्रथम पद $a = 2.1 - 1 = 1$
द्वितीय पद $b = 2 . 2 - 1 = 3$
तृतीय पद $c = 2 . 3 - 1 = 5$
अतः अनुक्रम $1, 3, 5, ... 2n - 1$ है।
अब, प्रथम n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$
$= \frac{n}{2}[1 + 2n - 1] = \frac{n}{2} . 2n = n^2$.
वैकल्पिक : अतः $T_n = 2n - 1$
$\Rightarrow S_n = \Sigma T_n = 2\Sigma n - \Sigma 1 = n(n+1) - n = n^2$.

8. (c) दी गयी श्रेणी
$(1 \times 3) + (3 \times 5) + (5 \times 7) + (7 \times 9) + ... + (2n-1)(2n+1)$ है
अतः n वाँ पद $= (2n+1)(2n-1)$, (निरीक्षण द्वारा).

9. (b) दी गयी श्रेणी $101 + 99 + 97 + ... + 47$ है
अतः प्रथम पद $a = 101$, सार्वअन्तर $d = -2$ एवं अंतिम पद $l = 47$
हम जानते हैं, कि श्रेणी का अंतिम पद
$T_l = a + (n-1)d \Rightarrow 47 = 101 + (n-1)(-2)$
$\Rightarrow -54 = (n-1)(-2) \Rightarrow n = 28$.

10. (b) दिया है , $T_p = a + (p-1)d = q$ ......(i)
एवं $T_q = a + (q-1)d = p$ ..... (ii)
(i) और (ii) से, $d = -\frac{(p-q)}{(p-q)} = -1$
d का मान (i) में रखने पर, $a = p + q - 1$
अब, समान्तर श्रेणी का r वाँ पद
$= T_r = a + (r-1)d = (p + q - 1) + (r-1)(-1) = p + q - r$
नोट : इस प्रश्न को विद्यार्थी सूत्र की तरह याद रखें।

11. (a) $\tan n\theta = \tan m\theta \Rightarrow n\theta = N\pi + (m\theta)$
$\Rightarrow \theta = \frac{N\pi}{n-m}$, $N = 1, 2, 3.........$ रखने पर,
$\frac{\pi}{n-m}, \frac{2\pi}{n-m}, \frac{3\pi}{n-m}.........$ जो कि स्पष्टतः समान्तर श्रेणी में हैं, जिसका सार्वअन्तर $d = \frac{\pi}{n-m}$ है।

12. (a) दी गयी श्रेणी है, $3.8 + 6.11 + 9.14 + 12.17 + ...$
प्रथम श्रेणी 3, 6, 9, 12 जिसका n वाँ पद $3n$ है। द्वितीय श्रेणी 8, 11, 14, 17 का n वाँ पद $= t_n = [8 + (n-1)3] = (3n + 5)$
अतः अभीष्ट श्रेणी का n वाँ पद $= 3n(3n + 5)$.

13. (b) 1 से 100 तक की 2 या 5 से विभाजित संख्याओं का योग = (2से विभाजित संख्याओं का योग) + (5 से विभाजित संख्याओं का योग) – (2 व 5 से विभाजित संख्याओं का योग)
$= (2 + 4 + 6 + ... + 100) + (5 + 10 + 15....... + 100)$
$-(10 + 20 + 30 + ... + 100)$
$= \frac{50}{2}\{2 \times 2 + (50-1)2\} + \frac{20}{2}\{2 \times 5 + (20-1)5\}$
$-\frac{10}{2}\{10 \times 2 + (10-1)10\}$
$= 2550 + 1050 - 550 = 3050$.

14. (c) दी गयी श्रेणियाँ $63 + 65 + 67 + 69 + ...$ .....(i)
एवं $3 + 10 + 17 + 24 + ...$ हैं ..... (ii)
अब (i) से, m वाँ पद $= (2m + 61)$ तथा
(ii) से, m वाँ पद $= (7m - 4)$
प्रश्नानुसार,
$\Rightarrow 7m - 4 = 2m + 61 \Rightarrow 5m = 65 \Rightarrow m = 13$.

15. (b) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}+......$

$=1\sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+4\sqrt{2}+........$

$=\sqrt{2}[1+2+3+4+..........$ 24 पदों तक]

$=\sqrt{2}\times\frac{24\times 25}{2}=300\sqrt{2}$.

16. (c) $2x,\ x+8,\ 3x+1$ समान्तर श्रेणी में हैं

अतः $(x+8)=\frac{(2x)+(3x+1)}{2}=\frac{5x+1}{2}$

$\Rightarrow\ 2x+16=5x+1\ \Rightarrow\ 3x=15\ \Rightarrow\ x=5$.

17. (d) दिया है, $S_n=nA+n^2B$

$n=1,2,3,..........\ ...$, रखने पर,

$S_1=A+B, S_2=2A+4B,\ S_3=3A+9B$

....

....

अतः $T_1=S_1=A+B, T_2=S_2-S_1=A+3B$,

$T_3=S_3-S_2=A+5B$,

....

....

अतः श्रेणी $(A+B),(A+3B),(A+5B),........$ होगी,

जहाँ $a=A+B$ एवं सार्वअन्तर $d=2B$.

18. (b) $T_9=a+8d=35$ और $T_{19}=a+18d=75$

इन समीकरणों को हल करने पर, $d=4$ और $a=3$

अतः समान्तर श्रेणी का 20 वाँ पद

$=a+19d=3+19\times 4=79$.

19. (a) दी गयी श्रेणी है, $27+9+5\,.\frac{2}{5}+3\,.\frac{6}{7}+......$

$=27+\frac{27}{3}+\frac{27}{5}+\frac{27}{7}+.....+\frac{27}{2n-1}+......$

अतः दी गयी श्रेणी का nवाँ पद $T_n=\frac{27}{2n-1}$

$\therefore\ T_9=\frac{27}{2\times 9-1}=\frac{27}{17}=1\frac{10}{17}$.

20. (d) यदि a,b,c समान्तर श्रेणी में हैं, तब $2b=a+c$

इसलिये, $\frac{(a-c)^2}{(b^2-ac)}=\frac{(a-c)^2}{\left\{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2-ac\right\}}$

$=\frac{(a-c)^2 4}{[a^2+c^2+2ac-4ac]}=\frac{4(a-c)^2}{(a-c)^2}=4$.

ट्रिक : $a=1,b=2,c=3$ रखने पर, अभीष्ट मान $\frac{4}{1}=4$.

21. (d) $\log_3 2, \log_3(2^x-5)$ एवं $\log_3\left(2^x-\frac{7}{2}\right)$ समान्तर श्रेणी में हैं, अतः $2\log_3(2^x-5)=\log_3(2)\left(2^x-\frac{7}{2}\right)$

$\Rightarrow\ (2^x-5)^2=2^{x+1}-7$

$\Rightarrow\ 2^{2x}-12\,.\,2^x-32=0\ \Rightarrow\ x=2,3$

परन्तु $x=2$ संतुष्ट नहीं करता अतः $x=3$ होगा।

22. (c) माना समान्तर श्रेणी के प्रथम पद एवं सार्वअन्तर क्रमशः A व D हैं।

अब pवाँ पद $=A+(p-1)D=a$ .....(i)

q वाँ पद $=A+(q-1)D=b$ ......(ii)

एवं r वाँ पद $=A+(r-1)D=c$ .....(iii)

अतः $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)$

$=a\left\{\frac{b-c}{D}\right\}+b\left\{\frac{c-a}{D}\right\}+c\left\{\frac{a-b}{D}\right\}$

$=\frac{1}{D}(ab-ac+bc-ab+ca-bc)=0$.

23. (a) अभीष्ट अनुपात $=\frac{44}{99}=\frac{4}{9}$.

24. (b) स्पष्टतः, $a_3=a_2-1=2-1=1$

$a_4=a_3-1=1-1=0$

$a_5=a_4-1=0-1=-1$.

25. (c) यदि समान्तर श्रेणी का सार्वअन्तर D है, तब

$a-4b+6c-4d+e=$

$a-4(a+D)+6(a+2D)-4(a+3D)+(a+4D)=0$.

26. (c) यदि समान्तर श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर x है, तब

$a+5x=2\ \Rightarrow\ a=2-5x$

माना $P=a_1a_4a_5=a(a+3x)(a+4x)$

$=(2-5x)(2-2x)(2-x)=2(-5x^3+17x^2-16x+4)$

अब $\frac{dP}{dx}=0\ \Rightarrow\ x=\frac{8}{5},\frac{2}{3}$.

स्पष्टतः, $x=\frac{2}{3}$ के लिये $\frac{d^2P}{dx^2}>0$

अतः $x=\frac{2}{3}$ के लिए P न्यूनतम है।

27. (a) $p\{a+(p-1)d\}=q\{a+(q-1)d\}$

$\Rightarrow\ a(p-q)+(p^2-q^2)d+(q-p)d=0$

$\Rightarrow\ (p-q)\{a+(p+q-1)d\}=0$

$\Rightarrow\ a+(p+q-1)d=0\ \Rightarrow\ T_{p+q}=0$, $\{\because p\neq q\}$.

28. (a) $\frac{S_{n_1}}{S_{n_2}}=\frac{2n+3}{6n+5}$

$\Rightarrow\ \frac{\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2+(n-1)d_2]}=\frac{2n+3}{6n+5}$

$\Rightarrow\ \frac{2\left[a_1+\left(\frac{n-1}{2}\right)d_1\right]}{2\left[a_2+\left(\frac{n-1}{2}\right)d_2\right]}=\frac{2n+3}{6n+5}$

$\Rightarrow\ \frac{a_1+\left(\frac{n-1}{2}\right)d_1}{a_2+\left(\frac{n-1}{2}\right)d_2}=\frac{2n+3}{6n+5}$

$n = 25$ रखने पर, $\frac{a_1 + 12d_1}{a_2 + 12d_2} = \frac{2(25)+3}{6(25)+3} \Rightarrow \frac{T_{13_1}}{T_{13_2}} = \frac{53}{155}$.

29. (c) $a_{m+k} = A + (m+k-1)D$ .....(i)

एवं $a_{m-k} = A + (m-k-1)D$ ......(ii)

समी (i) और (ii) को हल करने पर,

$\frac{a_{m+k} + a_{m-k}}{2} = A + (m-1)D = a_m$.

30. (c) $T_m = a + (m-1)d = \frac{1}{n}$

एवं $T_n = a + (n-1)d = \frac{1}{m}$

हल करने पर, $a = \frac{1}{mn}$ एवं $d = \frac{1}{mn}$

$\therefore T_{mn} = a + (mn-1)d = \frac{1}{mn} + (mn-1)\frac{1}{mn} = 1$.

31. (b) दी गई संख्यायें समान्तर श्रेणी में हैं

$\therefore 2\log_9(3^{1-x} + 2) = \log_3(4.3^x - 1) + 1$

$\Rightarrow 2\log_{3^2}(3^{1-x} + 2) = \log_3(4.3^x - 1) + \log_3 3$

$\Rightarrow \frac{2}{2}\log_3(3^{1-x} + 2) = \log_3[3(4.3^x - 1)]$

$\Rightarrow 3^{1-x} + 2 = 3(4.3^x - 1)$

$\Rightarrow \frac{3}{y} + 2 = 12y - 3$, जहाँ $y = 3^x$

$\Rightarrow 12y^2 - 5y - 3 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{-1}{3}$ या $\frac{3}{4} \Rightarrow 3^x = \frac{-1}{3}$ या $3^x = \frac{3}{4}$

$\therefore x = \log_3(3/4) \Rightarrow x = 1 - \log_3 4$.

32. (d) $a + b + 4c - 4d + e$ का मान a के पदों में ज्ञात करना संभव नहीं है।

33. (c) माना S_n व S'_n क्रमशः दो समान्तर श्रेणी के n पदों के योग हैं एवं T_{11} व T'_{11} क्रमशः इनके 11वें पद हैं, तो

$$\frac{S_n}{S'_n} = \frac{\frac{n}{2}[2a + (n-1)d]}{\frac{n}{2}[2a' + (n-1)d']} = \frac{7n+1}{4n+27}$$

$$\Rightarrow \frac{a + \frac{(n-1)}{2}d}{a' + \frac{(n-1)}{2}d'} = \frac{7n+1}{4n+27}$$

अतः $n = 21$ रखने पर,

$\frac{a + 10d}{a' + 10d'} = \frac{T_{11}}{T'_{11}} = \frac{148}{111} = \frac{4}{3}$.

नोट : यदि दो समान्तर श्रेणी के n पदों के योगों का अनुपात n के पदों में दिया हों एवं उनके pवें पदों का अनुपात ज्ञात करना हो, तो $n = 2p - 1$ रखते हैं। यहाँ हमने $n = 11 \times 2 - 1 = 21$ रखा है।

34. (d) दी गयी श्रेणी है, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + ...$

जहाँ $a = \frac{1}{2}$, सार्वअन्तर $d = -\frac{1}{6}$ और $n = 9$.

$\Rightarrow S_9 = \frac{9}{2}\left[2 \times \frac{1}{2} + (9-1)\left(-\frac{1}{6}\right)\right] = -\frac{3}{2}$.

35. (c) माना बहुभुज की भुजाओं की संख्या n है।

अतः इसके अन्तः कोणों का योग $= (2n-4)\frac{\pi}{2} = (n-2)\pi$

चूँकि कोण समान्तर श्रेणी में हैं तथा $a = 120^o, d = 5$,

इसलिए $\frac{n}{2}[2 \times 120 + (n-1)5] = (n-2)180$

$\Rightarrow n^2 - 25n + 144 = 0 \Rightarrow (n-9)(n-16) = 0 \Rightarrow n = 9, 16$

परन्तु $n = 16$ से $T_{16} = a + 15d = 120^o + 15.5^o = 195^o$, जो कि असम्भव है क्योंकि कोई भी अन्तःकोण 180^o से अधिक नहीं होता है। अतः $n = 9$.

36. (c) चूँकि $T_p = a + (p-1)d = \frac{1}{q}$ .....(i)

एवं $T_q = a + (q-1)d = \frac{1}{p}$ .....(ii)

(i) व (ii) से, $a = \frac{1}{pq}$ एवं $d = \frac{1}{pq}$

$S = \frac{pq}{2}\left[\frac{2}{pq} + (pq-1)\frac{1}{pq}\right]$

$= \frac{pq}{2} \cdot \frac{2}{pq}\left[1 + \frac{1}{2}(pq-1)\right] = \left[\frac{2 + pq - 1}{2}\right] = \frac{pq+1}{2}$.

नोट : विद्यार्थी इस प्रश्न को सूत्र की तरह याद रखें।

37. (d) हम जानते हैं कि प्राकृत संख्यायें $1, 2, 3, 4, ... n$ समान्तर श्रेणी में हैं।

अतः योगफल $= \frac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1)1] = \frac{n}{2}(n+1)$.

38. (a) प्रथम पद $a = 2$ एवं सार्वअन्तर $d = 4$ एवं $n = 40$.

तब $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$= 20[4 + 39 \times 4] = 20[4 + 156] = 160 \times 20 = 3200$.

39. (a, c) दी गई श्रेणी $S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6.........$

स्थिति I : यदि n विषम है, अर्थात् $2m + 1$ (माना)

इस स्थिति में धनात्मक पदों की संख्या

$= \frac{1}{2}(n+1) = \frac{1}{2}(2m + 1 + 1) = (m+1)$

एवं ऋणात्मक पदों की संख्या $= (2m+1) - (m+1) = m$

अतः योग $= [1 + 3 + 5 + ... (m+1)$ पदों तक$]$

$-[2 + 4 + 6....... m$पदों तक$]$

$=\frac{1}{2}(m+1)[2+(m+1-1)2]-\frac{m}{2}[4+(m-1)2]$

$=(m+1)(m+1-m)=m+1=\frac{1}{2}(n+1)$.

स्थिति II: यदि n सम है, तो

योगफल $=\left(1+3+5......\frac{n}{2}\text{पदों तक}\right)-\left(2+4+6....\frac{n}{2}\text{पदों तक}\right)$

$=\frac{1}{2}.\frac{n}{2}\left[2+\left(\frac{n}{2}-1\right)2\right]-\frac{1}{2}.\frac{n}{2}\left[4+\left(\frac{n}{2}-1\right)2\right]$

$=\frac{1}{4}n[n-(n+2)]=-\frac{n}{2}$.

ट्रिक : $n=3,4$ रखने पर,

$S_1=2, S_3=-2$, जो कि विकल्प (a) एवं (c) से प्राप्त होता है।

40. (c) प्रथम पद $A=a$ ......(i)

द्वितीय पद $A+d=b$ ......(ii)

एवं अन्तिम पद $l=2a$ ......(iii)

(i), (ii) व (iii) से, $d=(b-a)$ तथा $n=\frac{b}{b-a}$

अतः $S=\frac{n}{2}[a+l]=\frac{b}{2(b-a)}[a+2a]=\frac{3ab}{2(b-a)}$.

ट्रिक : माना $a=2, b=3$, तब योग$=9$ जो कि विकल्प (c) द्वारा दिया जाता है।

41. (c) माना $S_{\text{सम}}=2+4+6+8+........\infty$ .....(i)

एवं $S_{\text{विषम}}=1+3+5+7+9+.......\infty$ .....(ii)

योग $S_{\text{सम}}=\frac{n}{2}[4+(n-1)2]=\frac{n}{2}[2n+2]=\frac{n}{2}2(n+1)$

एवं $S_{\text{विषम}}=\frac{n}{2}[2+(n-1)2]=\frac{n}{2}(2n)$

अब $\frac{S_{\text{सम}}}{S_{\text{विषम}}}=\frac{n(n+1)}{n^2}$ या $S_{\text{सम}}:S_{\text{विषम}}=(n+1):n$.

42. (a) दिये अनुसार $a_2-a_1=a_3-a_2=.......=a_n-a_{n-1}=d$, जहाँ d समान्तर श्रेणी का सार्वअन्तर है एवं

$a_n=a_1+(n-1)d$

अतः प्रत्येक पद का परिमेयीकरण करने पर,

$\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_2}}+....+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}}$

$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2}+.....+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}$

$=\frac{1}{d}\left\{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}+......+\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}\right\}$

$=\frac{1}{d}\left\{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}\right\}=\frac{1}{d}\left(\frac{a_n-a_1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}\right)$

$=\frac{1}{d}\left\{\frac{(n-1)d}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}\right\}=\frac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}$.

43. (b) दिये अनुसार, $d=a_2-a_1=a_3-a_2=....=a_n-a_{n-1}$

$\therefore \sin d\{\text{cosec }a_1\text{cosec }a_2+.....+\text{cosec }a_{n-1}\text{cosec }a_n\}$

$=\frac{\sin(a_2-a_1)}{\sin a_1.\sin a_2}+......+\frac{\sin(a_n-a_{n-1})}{\sin a_{n-1}\sin a_n}$

$=(\cot a_1-\cot a_2)+(\cot a_2-\cot a_3)+....$

$+(\cot a_{n-1}-\cot a_n)$

$=\cot a_1-\cot a_n$.

44. (b) दी गयी श्रेणी है, $2+5+8+11+.......$

तथा $a=2, d=3$. माना पदों की संख्या n है, तब

समान्तर श्रेणी के n पदों का योग $=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

$\Rightarrow 60100=\frac{n}{2}\{2\times2+(n-1)3\}\Rightarrow 120200=n(3n+1)$

$\Rightarrow 3n^2+n-120200=0\Rightarrow(n-200)(3n+601)=0$

अतः $n=200$.

45. (b) श्रेणी 3, 6, 9, 12, ... 99

जहाँ $n=\frac{99}{3}=33, a=3, d=3$

अतः $S=\frac{33}{2}\{2\times3+(33-1)3\}$

$=\frac{33}{2}\times102=33\times51=1683$.

46. (c) $1+3+5+7+..........$ n पदों तक

$\Rightarrow S_n=\frac{n}{2}\{2\times1+(n-1)2\}=n^2$.

47. (a) प्रश्नानुसार, $513=\frac{n}{2}\{2\times54+(n-1)(-3)\}$

$\Rightarrow 1026=n(111-3n)\Rightarrow 3n^2-111n+1026=0$

$\Rightarrow(3n-57)(n-18)=0$

अतः $n=18$.

48. (a) दिया है, $S_n=2n^2+5n$

$n=1, 2, 3, ...$, रखने पर, $S_1=2\times1+5\times1=7$

$S_2=2\times4+10=8+10=18, S_3=18+15=33$

अतः $T_1=S_1=a=7, T_2=S_2-S_1=18-7=11$,

$T_3=S_3-S_2=33-18=15$

अतः श्रेणी $7, 11, 15, ...$ है।

अब, n वाँ पद $=a+(n-1)d=7+(n-1)4=4n+3$.

वैकल्पिक : जैसा कि हमें ज्ञात है, $T_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2n^2+5n)-\{2(n-1)^2+5(n-1)\}$

$=2n^2+5n-2n^2+4n-2-5n+5=4n+3$.

49. (d) यहाँ $T_n=3n-1, n=1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर, प्रथम पाँच पद $2, 5, 8, 11, 14$ होंगे।

अतः, योगफल $=2+5+8+11+14=40$.

वैकल्पिक : $S_n=\Sigma T_n=3\Sigma n-\Sigma 1=\frac{3n(n+1)}{2}-n$

$\Rightarrow S_5=\frac{3.5.6}{2}-5=40$.

50. (c) दिया गया है, प्रथम पद $a=10$, अंतिम पद $l=50$ एवं योग $S=300$

$\therefore S=\frac{n}{2}(a+l)\Rightarrow 300=\frac{n}{2}(10+50)\Rightarrow n=10$.

51. (a) श्रेणी का n वाँ पद $=20+(n-1)\left(-\frac{2}{3}\right)$

महत्तम योग के लिए, n वाँ पद ≥ 0

$\Rightarrow 20+(n-1)\left(-\frac{2}{3}\right)\geq 0 \Rightarrow n\leq 31$

अतः 31 पदों का योगफल महत्तम है तथा

योगफल $=\frac{31}{2}\left[40+30\times\left(-\frac{2}{3}\right)\right]=310$.

52. (a) श्रेणी $108+117+........+999$ समान्तर श्रेणी में हैं, जहाँ $a=108$, सार्वअन्तर $d=9$,

$n=\frac{999}{9}-\frac{99}{9}=111-11=100$

अतः योगफल $=\frac{100}{2}(108+999)=50\times 1107=55350$.

53. (c) दिया गया है, $\frac{\frac{m}{2}[2a+(m-1)d]}{\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]}=\frac{m^2}{n^2}$

$\Rightarrow \frac{2a+(m-1)d}{2a+(n-1)d}=\frac{m}{n}\Rightarrow \frac{a+\frac{1}{2}(m-1)d}{a+\frac{1}{2}(n-1)d}=\frac{m}{n}$

$\Rightarrow an+\frac{1}{2}(m-1)nd=am+\frac{1}{2}(n-1)md$

$\Rightarrow a(n-m)+\frac{d}{2}[mn-n-mn+m]=0$

$\Rightarrow a(n-m)+\frac{d}{2}(m-n)=0\Rightarrow a=\frac{d}{2}$ और $d=2a$

$\therefore$ अभीष्ट अनुपात $\frac{T_m}{T_n}=\frac{a+(m-1)d}{a+(n-1)d}=\frac{a+(m-1)2a}{a+(n-1)2a}$

$=\frac{1+2m-2}{1+2n-2}=\frac{2m-1}{2n-1}$.

ट्रिक : m को $2m-1$ से व n को $2n-1$ से प्रतिस्थापित करें, स्पष्टतः यदि S_m द्विघातीय है, तब T_m एक घातीय अर्थात् रेखीय होगा।

54. (c) दिया गया अनुक्रम है,

$\log a+\log\left(\frac{a^2}{b}\right)+\log\left(\frac{a^3}{b^2}\right)+\log\left(\frac{a^4}{b^3}\right)+......+\log\left(\frac{a^n}{b^{n-1}}\right)$

यह समान्तर श्रेणी है जिसका प्रथम पद $\log a$ तथा सार्वअन्तर $=\log\left(\frac{a^2}{b}\right)-\log a=\log\left(\frac{a}{b}\right)$ है

अतः n पदों का योगफल $=$

$\frac{n}{2}\left[\log a+\log\left(\frac{a^n}{b^{n-1}}\right)\right]=\frac{n}{2}\log\left(\frac{a^{n+1}}{b^{n-1}}\right)$.

ट्रिक : $n=1, 2$ के लिए निरीक्षण करें।

55. (a) $(x+1)+(x+4)+.........+(x+28)=155$

यदि L.H.S. में समान्तर श्रेणी के पदों की संख्या n है, तब $x+28=(x+1)+(n-1)3\Rightarrow n=10$

$\therefore (x+1)+(x+4)+......+(x+28)=155$

$\Rightarrow \frac{10}{2}[(x+1)+(x+28)]=155\Rightarrow x=1$.

56. (c) दी गयी संख्यायें 13, 17, ...97 हैं, जो कि प्रथम पद 13 तथा सार्वअन्तर 4 वाली एक समान्तर श्रेणी है। यदि पदों की संख्या n है, तब

$97=13+(n-1)4\Rightarrow 4n=88\Rightarrow n=22$

अतः संख्याओं का योगफल

$=\frac{22}{2}[13+97]=11(110)=1210$.

57. (c) $S_{2n}-S_n=\frac{2n}{2}\{2a+(2n-1)d\}-\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

$=\frac{n}{2}\{4a+4nd-2d-2a-nd+d\}=\frac{n}{2}\{2a+(3n-1)d\}$

$=\frac{1}{3}.\frac{3n}{2}\{2a+(3n-1)d\}=\frac{1}{3}S_{3n}$.

58. (d) $\log_{\sqrt{3}}x+\log_{\sqrt[4]{3}}x+\log_{\sqrt[6]{3}}x+......+\log_{\sqrt[16]{3}}x=36$

$\Rightarrow \frac{1}{\log_x\sqrt{3}}+\frac{1}{\log_x\sqrt[4]{3}}+\frac{1}{\log_x\sqrt[6]{3}}+...+\frac{1}{\log_x\sqrt[16]{3}}=36$

$\Rightarrow \frac{1}{(1/2)\log_x 3}+\frac{1}{(1/4)\log_x 3}+\frac{1}{(1/6)\log_x 3}+..........$

$..........+\frac{1}{(1/16)\log_x 3}=36$

$\Rightarrow (\log_3 x)(2+4+6+.....+16)=36$

$\Rightarrow (\log_3 x)\frac{8}{2}[2+16]=36\Rightarrow \log_3 x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x=3^{1/2}\Rightarrow x=\sqrt{3}$.

59. (a) $\frac{S_{kn}}{S_n}=\frac{(kn/2)\{2a+(kn-1)d\}}{(n/2)\{2a+(n-1)d\}}=k\left\{\frac{(2a-d)+knd}{(2a-d)+nd}\right\}$

अर्थात्, यदि $2a-d=0$, तो $\frac{k^2nd}{nd}=k^2$ जो कि n से स्वतंत्र है।

60. (a) $n=1,2,3,.....$ रखने पर,

श्रेणी का प्रथम पद $a=\frac{1}{x}+y$ तथा द्वितीय पद $=\frac{2}{x}+y$

$\therefore d=\left(\frac{2}{x}+y\right)-\left(\frac{1}{x}+y\right)=\frac{1}{x}$

श्रेणी के r पदों का योग

$=\frac{r}{2}\left[2\left(\frac{1}{x}+y\right)+(r-1)\frac{1}{x}\right]=\frac{r}{2}\left[\frac{2}{x}+2y+\frac{r}{x}-\frac{1}{x}\right]$

$=\frac{r^2-r+2r}{2x}+ry=\left[\frac{r(r+1)}{2x}+ry\right]$.

61. (d) माना $S=1+2+3+..........+100$

$=\frac{100}{2}(1+100)=50(101)=5050$

माना $S_1=3+6+9+12+.........+99$

$=3(1+2+3+4+.........+33)$

$=3.\frac{33}{2}(1+33)=99\times 17=1683$

माना $S_2=5+10+15+........+100$

$=5(1+2+3+........+20)$

$= 5.\frac{20}{2}(1+20) = 50\times 21 = 1050$

माना $S_3 = 15+30+45+........+90$

$= 15(1+2+3+........+6)$

$= 15.\frac{6}{2}(1+6) = 45\times 7 = 315$

$\therefore$ अभीष्ट योग $= S - S_1 - S_2 + S_3$

$= 5050 - 1683 - 1050 + 315 = 2632.$

62. (c) माना प्रथम तीन पद $a-d, a$ और $a+d$ हैं।

अतः $(a-d)+(a+d) = 12 \Rightarrow 2a = 12$

$\Rightarrow a = 6$ एवं $(a-d)a = 24$

$\Rightarrow 6(6-d) = 24 \Rightarrow d = 2$

$\therefore$ प्रथम पद $= a - d = 6 - 2 = 4$.

63. (c) दिया गया है, $\frac{2n}{2}\{2.2+(2n-1)3\} = \frac{n}{2}\{2.57+(n-1)2\}$

$2(6n+1) = 112 + 2n$ या $10n = 110$, $\therefore n = 11$.

64. (d) 250 से 1000 तक की संख्याएँ जो 3 से विभाजित हों, क्रमशः 252, 255, ..., 999 होंगी।

$\therefore T_n = 999 = 252 + (n-1)3 \Rightarrow 333 = 84 + n - 1$

$\Rightarrow n = 250$

$\therefore S = \frac{n}{2}[a+l] = \frac{250}{2}[252+999]$

$= 125\times 1251 = 156375$.

65. (b) समान्तर श्रेणी का 7वाँ पद $= 40$

$\therefore a + 6d = 40$

$S_{13} = \frac{13}{2}[2a+(13-1)d] = \frac{13}{2}[2(a+6d)]$

$= \frac{13}{2}.2.40 = 520$.

66. (d) $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n+1}$ समान्तर श्रेणी में हैं

एवं सार्वअनुपात $= d$

माना $S = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + ... + \frac{1}{a_na_{n+1}}$

$\Rightarrow S = \frac{1}{d}\left\{\frac{d}{a_1a_2} + \frac{d}{a_2a_3} + ... + \frac{d}{a_n\, a_{n+1}}\right\}$

$\Rightarrow S = \frac{1}{d}\left\{\frac{a_2-a_1}{a_1a_2} + \frac{a_3-a_2}{a_2a_3} + ... + \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\, a_{n+1}}\right\}$

$\Rightarrow S = \frac{1}{d}\left\{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right\}$

$\Rightarrow S = \frac{1}{d}\left\{\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right\} = \frac{1}{d}\left\{\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1a_{n+1}}\right\}$

$\Rightarrow S = \frac{1}{d}\left(\frac{nd}{a_1a_{n+1}}\right) = \frac{n}{a_1a_{n+1}}$.

67. (b) $T_2 = S_2 - S_1$

$= 5(2)^2 + 2(2) - \{5(1)^2 + 2(1)\} = 24 - 7 = 17$.

68. (a) चूँकि $a_1, a_2, a_3, ..., .., a_n$ एक समान्तर श्रेणी है। अतः

$a_2 - a_1 = a_4 - a_3 = ... = a_{2n} - a_{2n-1} = d$

$\therefore a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + ... + a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2$

$= (a_1-a_2)(a_1+a_2) + (a_3-a_4)(a_3+a_4) + ...$

$...... + (a_{2n-1} - a_{2n})(a_{2n-1} + a_{2n})$

$= -d(a_1 + a_2 + ... + a_{2n}) = -d\left\{\frac{2n}{2}(a_1 + a_{2n})\right\}$

एवं हम जानते हैं कि $a_{2n} = a_1 + (2n-1)d \Rightarrow d = \frac{a_{2n}-a_1}{2n-1}$

$\Rightarrow -d = \frac{a_1 - a_{2n}}{2n-1}$.

$\therefore$ योगफल$= \frac{n(a_1-a_{2n}).(a_1+a_{2n})}{2n-1} = \frac{n}{2n-1}(a_1^2 - a_{2n}^2)$ है।

69. (b) स्पष्टतः, $164 = (3m^2+5m) - \{3(m-1)^2 + 5(m-1)\}$

$\Rightarrow 164 = (3m^2+5m) - 3m^2 + 6m - 3 - 5m + 5$

$\Rightarrow 164 = 6m + 2 \Rightarrow m = 27$.

70. (d) स्पष्टतः, $S_n = \frac{n}{2}\{2P + (n-1)Q\}$, अतः $d = Q$.

वैकल्पिक : $d = T_2 - T_1 = (S_2 - S_1) - S_1$

$= S_2 - 2S_1 = 2P + Q - 2P = Q$.

71. (b) $S_{2n} = 3S_n$

$\Rightarrow \frac{2n}{2}\{2a + (2n-1)d\} = 3.\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

$\Rightarrow 2a = (n+1)d$

अतः $2a = (n+1)d$ को $\frac{S_{3n}}{S_n}$ में रखने पर, इसका मान 6 प्राप्त होता है।

72. (d) $S_{2p+1} = \frac{2p+1}{2}\{2(p^2+1) + (2p+1-1)1\}$

$= \left(\frac{2p+1}{2}\right)(2p^2 + 2p + 2) = (2p+1)(p^2+p+1)$

$= p^3 + (p+1)^3$.

73. (b) $11 + (11+d) + (11+2d) + (11+3d) = 56 \Rightarrow d = 2$

और $\{11+(n-1)2\} + \{11+(n-2)2\}$

$+\{11+(n-3)2\} + \{11+(n-4)2\} = 112$

$\Rightarrow n = 11$.

74. (d) $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$\Rightarrow 406 = \frac{n}{2}[6+(n-1)4] \Rightarrow 812 = n[6+4n-4]$

$\Rightarrow 812 = 2n + 4n^2 \Rightarrow 406 = 2n^2 + n$

$\Rightarrow 2n^2 + n - 406 = 0$

$\Rightarrow n = \frac{-1\pm\sqrt{1+4.2.406}}{2.2} = \frac{-1\pm\sqrt{3249}}{4} = \frac{-1\pm 57}{4}$

(+) चिन्ह लेने पर $n = \frac{-1+57}{4} = 14$.

75. (b) प्रश्नानुसार, $\frac{15}{2}[10 + 14\times d] = 390 \Rightarrow d = 3$

अतः मध्य पद, अर्थात् 8 वाँ पद $= 5 + 7\times 3 = 26$.

76. (a) प्रश्नानुसार,

$\frac{10}{2}\{2a + (10-1)d\} = 4\left[\frac{5}{2}[2a + (5-1)d]\right]$

$\Rightarrow 2a+9d=4a+8d$ या $\frac{a}{d}=\frac{1}{2}$

अतः $a:d=1:2$.

77. (b) माना समान्तर श्रेणी की तीन संख्यायें $a-d, a, a+d$ हैं।

योगफल $= a-d+a+a+d=18$

एवं वर्गों का योग $(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=58$

$\therefore a=6$ एवं $(6-d)^2+36+(6+d)^2=158$

$\Rightarrow 36+d^2+36+d^2=122 \Rightarrow 2d^2+72=122$

$\Rightarrow 2d^2=50 \Rightarrow d=5$

$\therefore$ तीनों संख्यायें 1, 6, 11 हैं। अतः अधिकतम संख्या = 11.

78. (a) $\frac{3+5+7+.... \text{ ...... n पदों तक}}{5+8+11+......10 \text{ पदों तक}}=7$

$\Rightarrow \frac{\frac{n}{2}[6+(n-1)2]}{\frac{10}{2}[10+(10-1)3]}=7 \Rightarrow \frac{n(2n+4)}{10\times 37}=7$

$\Rightarrow n^2+2n-1295=0 \Rightarrow (n+37)(n-35)=0$

अतः $n=35$.

79. (b) यहाँ $\frac{1}{3}, A_1, A_2, \frac{1}{24}$ समान्तर श्रेणी में होंगे,

$\therefore A_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{24}-A_2 \Rightarrow A_1+A_2=\frac{3}{8}$ ......(i)

अब चूँकि $A_1, \frac{1}{3}$ व A_2 का समान्तर माध्य है।

अतः $2A_1=\frac{1}{3}+A_2 \Rightarrow 2A_1-A_2=\frac{1}{3}$ ......(ii)

(i) व (ii) से, $A_1=\frac{17}{72}$ और $A_2=\frac{5}{36}$.

वैकल्पिक : सूत्र $A_m=a+\frac{m(b-a)}{n+1}$

जहाँ $n=2, a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{24}$

$\therefore A_1=\frac{1}{3}+\frac{-7/24}{3}=\frac{17}{72}$

$A_2=\frac{1}{3}+\frac{-14/24}{3}=\frac{10}{72}=\frac{5}{36}$.

80. (c) $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\frac{a+b}{2}$

$\Rightarrow a^{n+1}-ab^n+b^{n+1}-ba^n=0 \Rightarrow (a-b)(a^n-b^n)=0$

यदि $a^n-b^n=0$, तब $\left(\frac{a}{b}\right)^n=1=\left(\frac{a}{b}\right)^0$. अतः $n=0$.

81. (d) माना कि अभीष्ट संख्यायें a व b हैं

अतः, प्रश्नानुसार $a=\frac{1}{b}$ एवं $\frac{a+b}{2}=\frac{13}{12}$

$\Rightarrow a+b=\frac{13}{6} \Rightarrow a+\frac{1}{a}=\frac{13}{6} \Rightarrow 6a^2-13a+6=0$

$\Rightarrow \left(a-\frac{3}{2}\right)\left(a-\frac{2}{3}\right)=0 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$ एवं $b=\frac{2}{3}$

या $a=\frac{2}{3}$ एवं $b=\frac{3}{2}$.

ट्रिक : विकल्पों (a), (b), (c), (d) का समान्तर माध्य एक के बाद एक निकालें।

82. (a) माना दो राशियाँ a व b हैं तथा $A_1, A_2......., A_n$ इनके बीच में n समान्तर माध्य हों, तो $a, A_1, A_2,......, A_n, b$ समान्तर श्रेणी में होंगे। माना सार्वअन्तर d है

अब, $T_{n+2}=b=a+(n+2-1)d \Rightarrow d=\frac{b-a}{n+1}$

तथा $A_1+A_2+......+A_n=S_{n+1}-a$

$=\frac{1}{2}(n+1)\left[2a+(n+1-1)\frac{(b-a)}{(n+1)}\right]-a$

$=\frac{n}{2}[2a+(b-a)]=\frac{n}{2}(a+b)=n\left(\frac{a+b}{2}\right)=nA$.

नोट : विद्यार्थी इस प्रश्न को सूत्र की तरह याद रखें।

83. (b) समान्तर माध्य $=\frac{1+2+3+......+n}{n}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n}=\frac{n+1}{2}$.

84. (a) a व b के बीच n समान्तर माध्यों का योग $=\frac{n}{2}(a+b)$.

वैकल्पिक : हम जानते हैं, कि $A_1+A_2+......+A_n=nA$, जहाँ $A=\frac{a+b}{2}$.

85. (b) परिणामी श्रेणी का प्रथम पद 2 तथा अन्तिम पद 38 तथा पदों की संख्या $n+2$ है। इसलिए श्रेणी का योगफल

$=\frac{n+2}{2}(2+38)=20(n+2)$.

संकल्पना द्वारा, $20(n+2)=200 \Rightarrow n=8$.

86. (b) समांतर माध्य $=\frac{a+(a+nd)+(a+2nd)}{3}$

$=\frac{3a+3nd}{3}=a+nd$.

87. (c) माना $x+y=u, x-y=v$

$\Rightarrow x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$

$\therefore \frac{f(x,y)+f(y,x)}{2}=\frac{\frac{u+v}{2}.\frac{u-v}{2}+f\left(\frac{u+v}{2}.\frac{v-u}{2}\right)}{2}=0$.

88. (b) चूँकि $\log 2, \log(2^n-1)$ तथा $\log(2^n+3)$ समान्तर श्रेणी में हैं, अतः $2\log(2^n-1)=\log 2+\log(2^n+3)$

$\Rightarrow (2^n-5)(2^n+1)=0$

परन्तु 2^n ऋणात्मक नहीं हो सकता है

अतः $2^n-5=0 \Rightarrow 2^n=5$ या $n=\log_2 5$.

89. (b) माना चार संख्यायें $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ हैं

अब $(a-3d)+(a+3d)=8 \Rightarrow a=4$

तथा $(a-d)(a+d)=15 \Rightarrow a^2-d^2=15 \Rightarrow d=1$

अतः अभीष्ट संख्यायें 1, 3, 5, 7 हैं तथा महत्तम संख्या 7 है।

90. (c) माना त्रिभुज की भुजाएँ $a-d, a, a+d$ हैं, तो इसका कर्ण $a+d$ होगा, जो कि स्पष्टतः महत्तम भुजा होगी।

अतः, $(a+d)^2=a^2+(a-d)^2$

$\Rightarrow a^2+d^2+2ad=a^2+a^2-2ad+d^2 \Rightarrow a=4d$

अतः भुजाओं का अनुपात $=a-d:a:a+d$

$=(4d-d):4d:(4d+d)=3:4:5$.

91. (a) माना तीन संख्यायें $a+d, a, a-d$ हैं।

अतः, $a+d+a+a-d=33 \Rightarrow a=11$

$a(a+d)(a-d)=792 \Rightarrow 11(121-d^2)=792 \Rightarrow d=7$

तब अभीष्ट संख्यायें 4, 11, 18 होंगी

अतः न्यूनतम संख्या 4 है।

92. (c) a, b, c, d, e, f समान्तर श्रेणी में हैं

अतः $b-a=c-b=d-c=e-d=f-e=K$, जहाँ K सार्वअन्तर है।

अब, $d-c=e-d \Rightarrow e+c=2d$

$e-c+2c=2d \Rightarrow e-c=2(d-c)$.

ट्रिक : $a=1, b=2, c=3, d=4, e=5$ एवं $f=6$ रखकर निरीक्षण करें।

93. (b) माना तीन संख्यायें $a-d, a, a+d$ हैं।

अतः, $a-d+a+a+d=15 \Rightarrow a=5$

एवं $(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=83$

$\Rightarrow a^2+d^2-2ad+a^2+a^2+d^2+2ad=83$

$\Rightarrow 2(a^2+d^2)+a^2=83$

$a=5$ रखने पर,

$2(25+d^2)+25=83 \Rightarrow 2d^2=8 \Rightarrow d=2$

अतः संख्यायें 3, 5, 7 होंगी।

ट्रिक : चूँकि $3+5+7=15$ व $3^2+5^2+7^2=83$.

94. (b) माना चार समान्तर माध्य A_1, A_2, A_3 एवं A_4 हैं।

अतः, $3, A_1, A_2, A_3, A_4, 23$ समान्तर श्रेणी में होंगे

$\therefore T_6=23=a+5d \Rightarrow d=4$

इस प्रकार, $A_1=3+4=7, A_2=7+4=11,$

$A_3=11+4=15, A_4=15+4=19$.

95. (a) माना समान्तर श्रेणी के क्रमिक पद $a-d, a, a+d$ हैं।

प्रश्नानुसार, $(a-d)+a+(a+d)=51$

$\Rightarrow a=17$ एवं $(a-d)(a+d)=273 \Rightarrow a^2-d^2=273$

$\Rightarrow -d^2=273-289 \Rightarrow d=4$

अतः क्रमिक पद 13, 17, 21 होंगे।

ट्रिक : दोनों प्रतिबन्ध विकल्प (a) द्वारा संतुष्ट होते हैं अर्थात् क्रमिक पद 21, 17, 13 हैं।

96. (b) चूँकि $\frac{1}{p+q}, \frac{1}{r+q}$ तथा $\frac{1}{q+r}$ समान्तर श्रेणी में हैं

$\therefore \frac{1}{r+q}-\frac{1}{p+q}=\frac{1}{q+r}-\frac{1}{r+p}$

$\Rightarrow \frac{p+q-r-p}{(r+p)(p+q)}=\frac{r+p-q-r}{(q+r)(r+p)}$

$\Rightarrow \frac{q-r}{p+q}=\frac{p-q}{q+r}$ या $q^2-r^2=p^2-q^2$

$\therefore 2q^2=r^2+p^2$

अतः p^2, q^2, r^2 समान्तर श्रेणी में होंगे।

97. (e) माना d सार्वअन्तर है, तब $\log_y x=1+d \Rightarrow x=y^{1+d}$

$\log_z y=1+2d \Rightarrow y=z^{1+2d}$

व $-15\log_x z=1+3d \Rightarrow z=x^{-(1+3d)/15}$

$\therefore x=y^{1+d}=z^{(1+2d)(1+d)}=x^{-(1+d)(1+2d)(1+3d)/15}$

$\Rightarrow (1+d)(1+2d)(1+3d)=-15$

$\Rightarrow 6d^3+11d^2+6d+16=0$

$\Rightarrow (d+2)(6d^2-d+8)=0 \Rightarrow d=-2$

[ध्यान दें कि $6d^2-d+8=0$ के मूल सम्मिश्र हैं]

$\therefore x=y^{1+d}=y^{-1}, y=z^{1-4}=z^{-3}$

$\therefore x=(z^{-3})^{-1}=z^3 \Rightarrow x=y^{-1}=z^3$.

98. (b) इसे $n=2, 3, 4$........ रखकर सिद्ध किया जा सकता है, कि पूर्णांक व इसके घन का अन्तर सदैव 6 से विभाजित होगा।

99. (d) $(a+2b-c)(2b+c-a)(c+a-b)$

$=(a+a+c-c)(a+c+c-a)(2b-b)=4abc$.

($\because a, b, c$ समान्तर श्रेणी में हैं, $\therefore 2b=a+c$).

100. (d) माना A_1, A_2, A_3 व A_4 समान्तर श्रेणी की चार संख्यायें हैं

तब, $A_1+A_4=8$ .....(i) एवं $A_2.A_3=15$ .....(ii)

समान्तर श्रेणी के गुणधर्म से,

$A_2+A_3=A_1+A_4=8$ .....(iii)

समी (ii) व (iii) से,

$A_2+\frac{15}{A_2}=8 \Rightarrow A_2^2-8A_2+15=0$

$A_2=3$ या 5 और $A_3=5$ या 3.

हम जानते हैं कि $A_2=\frac{A_1+A_3}{2} \Rightarrow A_1=2A_2-A_3$

$\Rightarrow A_1=2\times3-5=1$ या $A_4=8-A_1=7$

$\therefore$ श्रेणी 1, 3, 5, 7 है; अतः श्रेणी की न्यूनतम संख्या = 1.

101. (c) माना कि समान्तर श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है

समान्तर श्रेणी का 11वाँ पद = $a+10d$

समान्तर श्रेणी का 21वाँ पद = $a+20d$

$2(a+10d)=7(a+20d) \Rightarrow 2a+20d=7a+140d$

$5a+120d=0 \Rightarrow a+24d=0$

अतः 25 वाँ पद शून्य है।

102. (a) $2\tan^{-1}y=\tan^{-1}x+\tan^{-1}z$

$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{2y}{1-y^2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{x+z}{1-xz}\right) \Rightarrow \frac{2y}{1-y^2}=\frac{x+z}{1-xz}$

लेकिन $2y=x+z$

$\therefore 1-y^2=1-xz \Rightarrow y^2=xz$

$\because x, y, z$ गुणोत्तर श्रेणी व समान्तर श्रेणी दोनों में हैं।

अतः $x=y=z$ होगा।

गुणोत्तर श्रेणी

1. (b) यदि a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तो $b^2=ac$

$\Rightarrow b^2(a-c)=ac(a-c) \Rightarrow b^2a-b^2c=a^2c-ac^2$

$\Rightarrow a(b^2+c^2)=c(a^2+b^2)$.

ट्रिक: $a=1, b=2, c=4$ रखकर विकल्पों का निरीक्षण करें।

2. (d) दिया गया अनुक्रम $\sqrt{2}, \sqrt{10}, \sqrt{50}$........ है।

सार्वअनुपात $r=\sqrt{5}$, प्रथम पद $a=\sqrt{2}$,

तब 7 वाँ पद = $t_7=\sqrt{2}(\sqrt{5})^{7-1}$

$= \sqrt{2}(\sqrt{5})^6 = \sqrt{2}(5)^3 = 125\sqrt{2}$.

3. (c) माना कि गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद $= A$ और सार्वअनुपात $= r$
हम जानते हैं, कि गुणोत्तर श्रेणी का nवाँ पद $= Ar^{n-1}$
अब, $t_4 = a = Ar^3, t_7 = b = Ar^6$ एवं $t_{10} = c = Ar^9$
सम्बन्ध $b^2 = ac$ सत्य है, क्योंकि $b^2 = (Ar^6)^2 = A^2r^{12}$ एवं $ac = (Ar^3)(Ar^9) = A^2r^{12}$
वैकल्पिक : जैसा कि हमें ज्ञात है कि यदि p, q, r समान्तर श्रेणी में होते हैं तब pवें, qवें, rवें पद हमेशा गुणोत्तर श्रेणी में होंगे। इसलिए a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में होंगे अर्थात $b^2 = ac$.

4. (b) दिया है, प्रथम पद $a = 5$ और सार्वअनुपात $r = -5$.
माना कि n वाँ पद = 3125,
तब $ar^{n-1} = 3125 \Rightarrow 5(-5)^{n-1} = 3125 \Rightarrow (-5)^{n-1} = 5^4$
अतः $n = 5$.

5. (b) माना जोड़ी गयी संख्या x है,
तब $x+2, x+14, x+62$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं
अतः $(x+14)^2 = (x+2)(x+62)$
$\Rightarrow x^2 + 196 + 28x = x^2 + 64x + 124$
$\Rightarrow 36x = 72 \Rightarrow x = 2$.
ट्रिक : (a) यदि 1 जोड़ा जाये, तब संख्यायें 3, 15, 63 होंगी जो कि स्पष्टतः गुणोत्तर श्रेणी में नहीं हैं।
(b) यदि 2 जोड़ा जायें तब संख्यायें 4, 16, 64 होंगी जो कि स्पष्टतः गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

6. (b) दिया है, $m = ar^{p+q-1}$ एवं $n = ar^{p-q-1}$

$$r^{p+q-1-p+q+1} = \frac{m}{n} \Rightarrow r = \left(\frac{m}{n}\right)^{1/(2q)} \text{ एवं } a = \frac{m}{\left(\frac{m}{n}\right)^{(p+q-1)/2q}}$$

$$\text{अब } p \text{ वाँ पद} = ar^{p-1} = \frac{m}{\left(\frac{m}{n}\right)^{(p+q-1)/2q}}\left(\frac{m}{n}\right)^{(p-1)/2q}$$

$$= m\left(\frac{m}{n}\right)^{(p-1)/2q-(p+q-1)/(2q)} = m\left(\frac{m}{n}\right)^{-1/2} = m^{1-1/2}n^{1/2}$$

$= m^{1/2}n^{1/2} = \sqrt{mn}$.
वैकल्पिक: चूँकि हम जानते हैं कि किसी गुणोत्तर श्रेणी में प्रत्येक पद इसके समान दूरी पर स्थित पदों का गुणोत्तर माध्य होता है। यहाँ $(p+q)$वें व $(p-q)$वें पद, pवें पद से समान दूरी पर अर्थात् q दूरी पर हैं। अतः pवाँ पद, $(p+q)$वें व $(p-q)$ वें पदों का गुणोत्तर माध्य होगा, अर्थात् $\sqrt{mn}$.

7. (a) प्रश्नानुसार, $T_n = T_{n+1} + T_{n+2}$
$\Rightarrow ar^{n-1} = ar^n + ar^{n+1} \Rightarrow r^{n-1} = r^n(1+r)$

$$\Rightarrow r^2 + r - 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

चूँकि प्रत्येक पद धनात्मक है। अतः सार्वअनुपात $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ है।

8. (d) दिया है : $x, 2x+2, 3x+3$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं
अतः, $(2x+2)^2 = x(3x+3) \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$
$\Rightarrow (x+4)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1, -4$
अब, प्रथम पद $= a = x$
द्वितीय पद $= ar = 2(x+1) \Rightarrow r = \frac{2(x+1)}{x}$

$$\text{तब, चतुर्थ पद } = ar^3 = x\left[\frac{2(x+1)}{x}\right]^3 = \frac{8}{x^2}(x+1)^3$$

$x = -4$ रखने पर, $T_4 = \frac{8}{16}(-3)^3 = -\frac{27}{2} = -13.5$.

9. (a) यहाँ $\frac{S_3}{S_6} = \frac{125}{152} \Rightarrow \frac{a(r^3-1)/(r-1)}{a(r^6-1)/(r-1)} = \frac{125}{152}$

$\Rightarrow (r^3-1)152 = 125(r^6-1) \Rightarrow r^3 = \frac{27}{125} \Rightarrow r = \frac{3}{5}$.

10. (b) x, y, z गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तब $y^2 = x \,.\, z$
अब $a^x = b^y = c^z = m$
$\Rightarrow x \log_e a = y \log_e b = z \log_e c = \log_e m$
$\Rightarrow x = \log_a m, y = \log_b m, z = \log_c m$
पुनः x, y, z गुणोत्तर श्रेणी में हैं, अतः $\frac{y}{x} = \frac{z}{y}$

$$\Rightarrow \frac{\log_b m}{\log_a m} = \frac{\log_c m}{\log_b m} \Rightarrow \log_b a = \log_c b.$$

11. (b) माना $AR^{p-1} = a$ .....(i)
$AR^{q-1} = b$ .....(ii) और $AR^{r-1} = c$ .....(iii)
अतः $a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q} = \{AR^{p-1}\}^{q-r}\{AR^{q-1}\}^{r-p}\{AR^{r-1}\}^{p-q}$
$= A^{(q-r+r-p+p-q)}R^{(pq-pr-q+r+qr-pq-r+p+pr-rq-p+q)}$
$= A^0R^0 = 1$.
नोट : इस प्रकार के प्रश्नों, जिनमें पदों की घात चक्रीय क्रम में हो तथा ऋण चिन्ह से भी सम्बन्धित हों,का मान अधिकांशतः 1 होता है।

12. (c) दिया है, $ar^2 = 4$
अतः प्रथम 5 पदों का गुणनफल
$= a(ar)(ar^2)(ar^3)(ar^4) = a^5r^{10} = [ar^2]^5 = 4^5$.

13. (b) $T_5 = ar^4 = \frac{1}{3}$ .....(i)
एवं $T_9 = ar^8 = \frac{16}{243}$ .....(ii)
समीकरण (i) व (ii) से, $r = \frac{2}{3}$ एवं $a = \frac{27}{16}$
अब चौथा पद $= ar^3 = \frac{3^3}{2^4} \cdot \frac{2^3}{3^3} = \frac{1}{2}$.

14. (b) दी गयी श्रेणी $2\times4 + 4\times6 + 6\times8....$ है।
n वाँ पद $= T_n = 2n \,.\, 2(n+1) = 4n(n+1)$
$n = 20$ रखने पर, $T_{20} = 4 \,.\, 20(20+1) = 1680$.

15. (a) $a = AR^{p-1}, b = AR^{q-1}, c = AR^{r-1}$

$$\therefore \left(\frac{c}{b}\right)^p\left(\frac{b}{a}\right)^r\left(\frac{a}{c}\right)^q = \left(\frac{AR^{r-1}}{AR^{q-1}}\right)^p\left(\frac{AR^{q-1}}{AR^{p-1}}\right)^r\left(\frac{AR^{p-1}}{AR^{r-1}}\right)^q$$

$= R^{(r-q)p+(q-p)r+(p-r)q} = R^0 = 1$.

16. (d) $l = ar^{n-1} \Rightarrow \frac{l}{a} = r^{n-1} \Rightarrow \frac{\log l - \log a}{\log r} + 1 = n$.

17. (c) स्पष्टतः, $(a^{x/2})^2 = \log_x a \,.\, \log_b x = \log_b a$

$\Rightarrow a^x = \log_b a \Rightarrow x = \log_a(\log_b a)$

$\Rightarrow x = \log_a\left(\frac{\log_e a}{\log_e b}\right) = \log_a(\log_e a) - \log_a(\log_e b)$.

18. (a) माना समीकरण $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ के मूल $\frac{A}{R}, A, AR$ हैं,

तब $A^3 =$ मूलों का गुणनफल $= -\frac{d}{a} \Rightarrow A = -\left(\frac{d}{a}\right)^{1/3}$

चूँकि समीकरण का एक मूल A है

$\therefore aA^3 + bA^2 + cA + d = 0$

$\Rightarrow a\left(-\frac{d}{a}\right) + b\left(-\frac{d}{a}\right)^{2/3} + c\left(-\frac{d}{a}\right)^{1/3} + d = 0$

$\Rightarrow b\left(\frac{d}{a}\right)^{2/3} = c\left(\frac{d}{a}\right)^{1/3} \Rightarrow b^3\frac{d^2}{a^2} = c^3\frac{d}{a} \Rightarrow b^3 d = c^3 a$.

19. (a) प्रश्नानुसार, $ar^9 = 9$ व $ar^3 = 4$

$\Rightarrow r^3 = \frac{3}{2}$ व $a = \frac{8}{3}$

$\therefore 7$ वाँ पद, अर्थात् $ar^6 = \frac{8}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 6$.

ट्रिक : चूंकि 7वाँ पद 10 वें व चौथे पद से समदूरस्थ है। अतः $\sqrt{9 \times 4} = 6$.

20. (b) $T_6 = 32$ एवं $T_8 = 128 \Rightarrow ar^5 = 32$ .....(i)

तथा $ar^7 = 128$ .....(ii)

समीकरण (ii) को (i) से भाग देने पर, $r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$.

21. (a) $T_n = ar^{n-1} \Rightarrow \frac{5}{1024} = 5.\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}$

$\Rightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^{10} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow 10 = n - 1 \Rightarrow n = 11$.

22. (c) $a^2 = ar^2 \Rightarrow a = r^2$. ज्ञात है $ar = 8 \Rightarrow r = 2$ और $a = 4$.

$\therefore T_6 = ar^5 = 4 \times 2^5 = 128$.

23. (b) माना किसी गुणोत्तर श्रेणी के 9 पद क्रमशः

$\frac{a}{r^4}, \frac{a}{r^3}, \frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2, ar^3, ar^4$ हैं

दिया है, पाँचवा पद $a = 2$

अतः, 9 पदों का गुणनफल $= a^9 = (2)^9 = 512$.

24. (d) $a, ar, ar^2 ....\infty$ अनन्त गुणोत्तर श्रेणी है

तब, योग $S = \frac{a}{1-r} = 9 \Rightarrow a = 9(1-r)$ .....(i)

एवं $a + ar = 5$

$\Rightarrow a(1+r) = 5 \Rightarrow 9(1-r)(1+r) = 5$, [समी (i) से]

$1 - r^2 = \frac{5}{9} \Rightarrow r = \pm\frac{2}{3}$.

25. (a) दी गयी श्रेणी है, $3 + 4\frac{1}{2} + 6\frac{3}{4} + ... = 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{4} + ...$

$= 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{4} + \frac{3^4}{8} + \frac{3^5}{16} + ...$ (गुणोत्तर श्रेणी में)

यहाँ $a = 3, r = \frac{3}{2}$

तब पाँच पदों का योगफल

$$S_5 = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{3\left[\left(\frac{3}{2}\right)^5 - 1\right]}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{1\left[\frac{3^5}{32} - 1\right]}{\frac{1}{2}}$$

$$= 6\left[\frac{243 - 32}{32}\right] = \frac{211 \times 3}{16} = \frac{633}{16} = 39\frac{9}{16}.$$

26. (a) दी गयी श्रेणी गुणोत्तर श्रेणी है, जहाँ $a = 0.9 = \frac{9}{10}$ एवं $r = \frac{1}{10} = 0.1$

$$\therefore S_{100} = a\left(\frac{1 - r^{100}}{1 - r}\right) = \frac{9}{10}\left(\frac{1 - \frac{1}{10^{100}}}{1 - \frac{1}{10}}\right) = 1 - \frac{1}{10^{100}}.$$

27. (a) $0.\dot{2}\dot{3}4 = 0.2343434 .....$

$= 0.2 + 0.034 + 0.00034 + 0.0000034 + ...$

$= 0.2 + \frac{34}{1000} + \frac{34}{100000} + \frac{34}{10000000} + ...\infty$

$= \frac{2}{10} + 34\left[\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^7} + ...\infty\right]$

$= \frac{2}{10} + 34\left[\frac{1/10^3}{1 - 1/1000}\right] = \frac{2}{10} + 34 \times \frac{1}{1000} \times \frac{100}{99}$

$= \frac{2}{10} + \frac{34}{990} = \frac{232}{990}$.

28. (b) माना गुणोत्तर श्रेणी के तीन पद a, ar, ar^2 हैं। तब,

$a + ar + ar^2 = 19 \Rightarrow a[1 + r + r^2] = 19$ .....(i)

$a \,.\, ar \,.\, ar^2 = 216 \Rightarrow a^3 r^3 = 216 \Rightarrow ar = 6$ .....(ii)

समी. (ii) को (i) से भाग देने पर,

$\frac{6}{r} + \frac{6}{r}r + \frac{6}{r}r^2 = 19 \Rightarrow \frac{6}{r} + 6 + 6r = 19$

$\Rightarrow r^2 - \frac{13}{6}r + 1 = 0$. अतः $r = \frac{3}{2}$.

29. (b) दी गयी श्रेणी है, $6 + 66 + 666 + ... + n$ पदों तक

$= \frac{6}{9}(9 + 99 + 999 + ...\ n$ पदों तक)

$= \frac{2}{3}(10 + 10^2 + 10^3 + ... + n$ पदों तक $-n$)

$= \frac{2}{3}\left(\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right) = \frac{1}{27}[20(10^n - 1) - 18n]$

$= \frac{2(10^{n+1} - 9n - 10)}{27}$.

30. (d) माना गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद व सार्वानुपात क्रमशः a व r है, तब प्रश्नानुसार,

$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} \Rightarrow ar^{n-1} = ar^{n-2} + ar^{n-3}$

$\Rightarrow ar^{n-1} = ar^{n-1}r^{-1} + ar^{n-1}r^{-2}$

$\Rightarrow 1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \Rightarrow r^2 - r - 1 = 0$

$\Rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

केवल (+) चिन्ह् लेने पर $(\because r > 1)$.

31. (b) दिया है, $a + ar = 1$ एवं $r = 2$

अतः $a + 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$.

32. (a) दिया है, $\frac{a(r^n - 1)}{r-1} = 255$, $(\because r > 1)$ .....(i)

$ar^{n-1} = 128$ .....(ii)

एवं सार्वानुपात $r = 2$ .....(iii)

(i), (ii) व (iii) से, $a(2)^{n-1} = 128$ .....(iv)

एवं $\frac{a(2^n - 1)}{2-1} = 255$ .....(v)

समीकरण (v) को (iv) से भाग देने पर,

$\frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = \frac{255}{128} \Rightarrow 2 - 2^{-n+1} = \frac{255}{128}$

$\Rightarrow 2^{-n} = 2^{-8} \Rightarrow n = 8$

समीकरण (iv) में $n = 8$ रखने पर,

$a \cdot 2^7 = 128 = 2^7$ या $a = 1$.

33. (c) $1 + (1+x) + (1 + x + x^2) + ... +$

$(1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{n-1}) + ...$

अभीष्ट योग $= \frac{1}{(1-x)}\{(1-x) + (1-x^2) + (1-x^3)$

$+ (1-x^4) + ...$ n पदों तक$\}$

$= \frac{1}{(1-x)}[n - \{x + x^2 + x^3 + ...$ n पदों तक$\}]$

$= \frac{1}{(1-x)}\left[n - \frac{x(1-x^n)}{1-x}\right] = \frac{n(1-x) - x(1-x^n)}{(1-x)^2}$.

34. (b) प्रश्नानुसार, $\frac{a(r^6 - 1)}{(r-1)} = 9 . \frac{a(r^3 - 1)}{(r-1)}$, $(\because r > 1)$

$\Rightarrow r^6 - 1 = 9r^3 - 9 \Rightarrow (r^3)^2 - 9(r^3) + 8 = 0$

$\Rightarrow (r^3 - 1)(r^3 - 8) = 0$

$\Rightarrow r = 1, \omega, \omega^2$ और $r = 2$, किन्तु $r = 1, \omega, \omega^2$ दिये गये प्रतिबन्ध को संतुष्ट नहीं करते हैं। अतः $r = 2$.

35. (c) $S = 1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{90}$ (91 पदों)

$= \frac{1.(10^{91} - 1)}{10 - 1} = \frac{(10^{13})^7 - 1}{10^{13} - 1} \times \frac{10^{13} - 1}{10 - 1}$

$= [(10^{13})^6 + (10^{13})^5 + (10^{13})^4 + ... 1]$

$(10^{12} + 10^{11} + ... + 1)$

यह दो पूर्णांकों का गुणनफल है, इसलिए अभाज्य नहीं होगा।

36. (b) अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेणी है, जिसका सार्वअनुपात $\frac{1}{3}$ है।

अतः $\frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{2[1-(1/3)^{20}]}{1-(1/3)} = 3\left[1 - \frac{1}{3^{20}}\right]$.

37. (c) दिया है, $1 + a + a^2 + ... + a^x = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)$

$\Rightarrow \frac{(1-a^{x+1})}{(1-a)} = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)$

$\Rightarrow (1-a^{x+1}) = (1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)$

$\Rightarrow (1-a^{x+1}) = (1-a^8) \Rightarrow x + 1 = 8 \Rightarrow x = 7$.

38. (b) $a_1 = 3, a_n = 96 \Rightarrow a_1 r^{n-1} = 96 \Rightarrow r^{n-1} = 32$ ......(i)

अब, $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} = 189 \Rightarrow \frac{3(32r-1)}{r-1} = 189$,

(समीकरण (i) से)

अतः $r = 2$ एवं $n = 6$.

39. (a) श्रेणी का nवाँ पद $= ar^{n-1} = a(3)^{n-1} = 486$ .....(i)

एवं n पदों का योग, $S_n = \frac{a(3^n - 1)}{3-1} = 728$, $(\because r > 1)$ .....(ii)

(i) से, $a\left(\frac{3^n}{3}\right) = 486$ या $a.3^n = 3 \times 486 = 1458$

(ii) से, $a.3^n - a = 728 \times 2$ या $a.3^n - a = 1456$

$1458 - a = 1456 \Rightarrow a = 2$.

40. (d) दिया है, $x_1.x_2.x_3 .... x_n = 1$

$\because$ समान्तर माध्य $\ge$ गुणोत्तर माध्य

$\therefore \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}\right) \ge (x_1.x_2.x_3 .... x_n)^{\frac{1}{n}}$

$= (1)^{\frac{1}{n}} = 1$

$\therefore x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \ge n$

$\therefore x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$, n से छोटा नहीं हो सकता है।

41. (a) माना दी गयी गुणोत्तर श्रेणी की तीन संख्यायें अर्थात् a, ar, ar^2 हैं

$a + ar + ar^2 = 38$ एवं $a^3 r^3 = 1728$ .....(i)

$a(1 + r + r^2) = 38$ .....(ii)

समीकरण (i) से, $ar = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{r}$

समीकरण (ii) से, $\frac{12}{r}(1 + r + r^2) = 38$

हल करने पर, $r = \frac{2}{3}$ एवं $a = \frac{12 \times 3}{2} = 18$

अभीष्ट संख्यायें 18, 12, 8 हैं, अतः अधिकतम संख्या 18 है।

42. (b) श्रेणी $3 + 33 + 333 + ... +$ n पदों तक

$= \frac{1}{3}[9 + 99 + 999 + ... + n$ पदों तक$]$

$= \frac{1}{3}[(10-1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + ... + n$ पदों तक$]$

$= \frac{1}{3}[10 + 10^2 + ... + 10^n] - \frac{1}{3}[1 + 1 + 1 + ... + n$ पदों तक$]$

$= \frac{1}{3} . \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - \frac{1}{3}.n = \frac{1}{3}\left[\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n\right]$

$= \frac{1}{3}\left[\frac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}\right] = \frac{1}{27}[10^{n+1} - 9n - 10]$.

43. (d) $a = 7$ और $ar^{n-1} = 448$. अब, $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = 889$

$\Rightarrow \frac{(ar^{n-1}.r-a)}{r-1}=889 \Rightarrow \frac{448r-7}{r-1}=889 \Rightarrow r=2$.

44. (a) $\frac{ar^n-a}{r-1}=364 \Rightarrow \frac{ar^{n-1}.r-a}{r-1}=364$ .....(i)

$\Rightarrow \frac{3\times 243-a}{2}=364 \quad \Rightarrow a=1$

a का मान समीकरण (i) में रखने पर, $n=6$.

45. (c) यदि a व b के बीच n गुणोत्तर माध्य $g_1, g_2 .... g_n$ रखे जाएँ तो $a, g_1, g_2, ... g_n, b$ गुणोत्तर श्रेणी में होंगे

अतः $g_1=ar, g_2=ar^2 .... g_n=ar^n$

$\therefore\ b=ar^{n+1} \Rightarrow r=\left(\frac{b}{a}\right)^{1/(n+1)}$

अब n वाँ गुणोत्तर माध्य $(g_n)=ar^n=a\left(\frac{b}{a}\right)^{n/(n+1)}$.

वैकल्पिक : mवाँ गुणोत्तर माध्य निम्न सूत्र द्वारा दिया जाता है $G_m=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n+1}}$. m को n से प्रतिस्थापित करने पर अभीष्ट परिणाम प्राप्त हो जाता है।

46. (b) प्रश्नानुसार, $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=(ab)^{1/2}$

$\Rightarrow\ a^{n+1}-a^{n+1/2}b^{1/2}+b^{n+1}-a^{1/2}b^{n+1/2}=0$

$\Rightarrow\ (a^{n+1/2}-b^{n+1/2})(a^{1/2}-b^{1/2})=0$

$\Rightarrow\ a^{n+1/2}-b^{n+1/2}=0 \quad (\because a\neq b \Rightarrow a^{1/2}\neq b^{1/2})$

$\Rightarrow\ \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1/2}=1=\left(\frac{a}{b}\right)^0 \Rightarrow n+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow n=-\frac{1}{2}$.

47. (b) दिये अनुसार, $G=\sqrt{xy}$

$\therefore \frac{1}{G^2-x^2}+\frac{1}{G^2-y^2}=\frac{1}{xy-x^2}+\frac{1}{xy-y^2}$

$=\frac{1}{x-y}\left\{-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right\}=\frac{1}{xy}=\frac{1}{G^2}$.

48. (c) प्रश्नानुसार, $2, g_1, g_2, g_3, 32$

जहाँ $a=2, ar=g_1, ar^2=g_2, ar^3=g_3$ एवं $ar^4=32$

अब $2\times r^4=32 \Rightarrow r^4=16=(2)^4 \Rightarrow r=2$

अतः, तीसरा गुणोत्तर माध्य $=ar^3=2\times 2^3=16$.

वैकल्पिक : सूत्र द्वारा $G_3=2.\left(\frac{32}{2}\right)^{3/4}=2.8=16$.

49. (b) माना 486 तथा 2/3 के मध्य गुणोत्तर माध्य G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 हैं, अतः कुल पदों की संख्या 7 है।

$T_n=ar^{n-1} \Rightarrow 2/3=486(r)^6 \Rightarrow r=1/3$

अतः चतुर्थ गुणोत्तर माध्य, $T_5=ar^4=486\,(1/3)^4=6$.

50. (a) माना α और β दिये गये समीकरण $x^2-18x+9=0$ के मूल हैं

$\therefore\ \alpha$ और β का गुणोत्तर माध्य $=\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{9}=3$.

51. (b) $a=3, r=3$

गुणोत्तर माध्य $=(3.3^2.3^3.....3^n)^{1/n}=(3^{1+2+3 .... +n})^{1/n}$

$=\left(3^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^{1/n}=3^{\frac{(n+1)}{2}}$.

52. (d) दिया है, $4, g_1, g_2, g_3, \frac{1}{4}$ एक गुणोत्तर श्रेणी में हैं

यहाँ $a=4$,

$g_1=ar=4\times r, \quad g_2=ar^2, \quad g_3=ar^3$

एवं $g_4=ar^4=4\times r^4=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow r^4=\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow r=\frac{1}{2}$

अब तीनों गुणोत्तर माध्यों का गुणनफल

$g_1.g_2.g_3=ar.ar^2.ar^3=a^3r^6=4^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{4^3}{4^3}=1$.

नोट : a व $\frac{1}{a}$ के बीच n गुणोत्तर माध्य का गुणनफल हमेशा 1 होता है।

53. (b) माना $1, a, b, 64 \Rightarrow a^2=b$ तथा $b^2=64a$

$\Rightarrow a=4$ तथा $b=16$.

54. (a) $\because\ a, b, c$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{c}{b}=r \Rightarrow \frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2}{b^2}=r^2$

$\Rightarrow\ a^2, b^2, c^2$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

55. (c) हम जानते हैं कि किसी गुणोत्तर श्रेणी के प्रारम्भ एवं अंत से समदूरस्थ पदों का गुणनफल प्रथम पद व अन्तिम पद के गुणनफल के बराबर होता है। अतः $G_1.G_2=xy$.

56. (a) माना तीन संख्यायें $\frac{a}{r}, a$ एवं ar हैं, तब $a^3=1728$

$\Rightarrow\ a=12$. अतः मध्य पद 12 है।

57. (b) माना संख्यायें $\frac{a}{r}, a, ar$ हैं

प्रश्नानुसार, $\frac{a}{r}.a.ar=216 \Rightarrow a=6$

तथा युग्म गुणकों का योग $=156$

$\Rightarrow\ \frac{a}{r}.a+\frac{a}{r}.ar+a.ar=156 \Rightarrow r=3$

अतः संख्यायें 2, 6, 18 हैं।

ट्रिक : चूंकि $2\times 6\times 18=216$, (दिया है) व अन्य विकल्प यह मान नहीं देते हैं।

58. (a) प्रश्नानुसार, $\frac{3/4}{1-r}=\frac{4}{3} \Rightarrow r=\frac{7}{16}$.

59. (b) $3+3\alpha+3\alpha^2+3\alpha^3+ ....\infty=\frac{45}{8}$

$\Rightarrow 3\left[\frac{1}{1-\alpha}\right]=\frac{45}{8} \Rightarrow 8=15(1-\alpha) \Rightarrow \alpha=\frac{7}{15}$.

60. (d) $S_\infty=\frac{a}{1-r}$, जहाँ $-1<r<1$ अर्थात् $|r|<1$.

61. (b) $A=1+r^z+r^{2z}+r^{3z}+ .... \infty$

$A = 1 + [r^z + r^{2z} + r^{3z} + ... \infty]$

हम जानते हैं, गुणोत्तर श्रेणी के अनन्त पदों का योगफल

$S_\infty = \frac{a}{1-r}$, $(-1 < r < 1)$

अतः, $A = 1 + \left[\frac{r^z}{1-r^z}\right] \Rightarrow A = \frac{1-r^z+r^z}{1-r^z}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{1-r^z} \Rightarrow 1-r^z = \frac{1}{A} \Rightarrow r^z = \frac{A-1}{A}$

अतः $r = \left[\frac{A-1}{A}\right]^{1/z}$.

62. (a) चूंकि दी गयी श्रेणी, गुणोत्तर श्रेणी में है, तब

$x = \frac{1}{1-a} \Rightarrow a = \frac{x-1}{x}$ एवं $y = \frac{1}{1-b} \Rightarrow b = \frac{y-1}{y}$

$\therefore 1 + ab + a^2b^2 + ... \infty = \frac{1}{1-ab}$

$= \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}.\frac{y-1}{y}} = \frac{xy}{x+y-1}$.

63. (c) यहाँ $ar = 2$ एवं $S_\infty = 8 = \frac{a}{1-r}$

$\Rightarrow 8 = \frac{2}{r(1-r)}, \left(\because a = \frac{2}{r}\right)$

$\Rightarrow 4r(1-r) = 1 \Rightarrow 4r - 4r^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow 4r^2 - 4r + 1 = 0 \Rightarrow \left(r - \frac{1}{2}\right)(4r-2) = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

अतः $a = 4$.

64. (a) $0.4\dot{2}\dot{3} = 0.4232323$ ....

$= 0.4 + 0.023 + 0.00023 + 0.0000023 + ... \infty$

$= \frac{4}{10} + \frac{23}{10^3} + \frac{23}{10^5} + \frac{23}{10^7} .... \infty$

$= \frac{4}{10} + \frac{23}{10^3}\left[1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + ... \infty\right]$

$= \frac{4}{10} + \frac{23}{1000}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}}\right) = \frac{4}{10} + \frac{23}{990} = \frac{419}{990}$.

65. (d) $y = x - x^2 + x^3 - x^4 + ... \infty$

तब $xy = x^2 - x^3 + x^4 - ...... \infty$

जोड़ने पर, $y + xy = x + 0 + 0 ...... + 0$

$\Rightarrow x - xy = y \Rightarrow x(1-y) = y \Rightarrow x = \frac{y}{1-y}$.

वैकल्पिक : $y = \frac{x}{1-(-x)} \Rightarrow y = \frac{x}{1+x}$

$\Rightarrow y + yx = x \Rightarrow x = \frac{y}{1-y}$.

66. (b) दिया है, $x = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \Rightarrow a = \frac{x-1}{x}$

$y = \sum_{n=0}^{\infty} b^n = \frac{1}{1-b} \Rightarrow b = \frac{y-1}{y}$

$z = \sum_{n=0}^{\infty} a^n b^n = \frac{1}{1-ab} \Rightarrow ab = \frac{z-1}{z}$

$\therefore \frac{x-1}{x}.\frac{y-1}{y} = \frac{z-1}{z} \Rightarrow xy + z = zx + yz$.

67. (c) दिया है, $\frac{a}{1-r} = x$ .....(i)

एवं $\frac{a^2}{1-r^2} = \frac{a}{1-r}.\frac{a}{1+r} = y$ .....(ii)

$\Rightarrow y = x.\frac{a}{1+r} = x.\frac{x(1-r)}{1+r} \Rightarrow \frac{y}{x^2} = \frac{1-r}{1+r}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{y} = \frac{1+r}{1-r} \Rightarrow \frac{x^2}{y}(1-r) = 1+r$

$\Rightarrow r\left[1 + \frac{x^2}{y}\right] = -1 + \frac{x^2}{y} \Rightarrow r = \frac{x^2-y}{x^2+y}$.

68. (b) माना पहली श्रेणी $a + ar + ar^2 + ...$ है तथा दूसरी श्रेणी $a^2 + a^2r^2 + a^2r^4 + ...$ होगी

तब प्रश्नानुसार, $\frac{a}{1-r} = 3$ या $a = 3(1-r)$

एवं $\frac{a^2}{1-r^2} = 3$ या $a^2 = 3(1-r^2)$

a का विलोपन करने पर, $\{3(1-r)\}^2 = 3(1-r^2)$

$\Rightarrow 3(1-r) = (1+r), \{\because r \ne 1\}$

$\Rightarrow 4r = 2$ या $r = \frac{1}{2}$.

69. (b) माना r गुणोत्तर श्रेणी का सार्वअनुपात है, तब

$S = \frac{a}{1-r} \Rightarrow r = 1 - \frac{a}{S}$

अब $S_n = n$ पदों का योगफल

$= a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) = \frac{a}{1-r}(1-r^n) = S\left[1 - \left(1 - \frac{a}{S}\right)^n\right]$.

70. (d) 0.14189189189....

$= 0.14 + 0.00189 + 0.00000189 + ...$

$= \frac{14}{100} + 189\left[\frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^8} + ...\infty\right]$

$= \frac{7}{50} + 189\left[\frac{1/10^5}{1-(1/10^3)}\right] = \frac{7}{50} + 189\left[\frac{1}{10^5} \times \frac{10^3}{999}\right]$

$= \frac{7}{50} + \frac{189}{999 \times 100}$

$= \frac{7}{50} + \frac{7}{3700} = \frac{7}{50} + \frac{7}{25 \times 148} = \frac{21}{148}$.

71. (d) स्पष्टतः, यह एक अनंत गुणोत्तर श्रेणी है जिसका सार्वअनुपात 0.24 है।

$\therefore S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{5.05}{1-0.24} = 6.64474$.

72. (a) $(S_1)_\infty = \frac{a}{1-r} = 3$ या $a = 3(1-r)$ .....(i)

$(S_2)_\infty = \frac{a^2}{1-r^2} = 3$

या $a^2 = 3(1-r^2)$ या $9(1-r)^2 = 3(1-r^2)$, [समी. (i) से]

या $3(1-2r+r^2) = 1-r^2$ या $2r^2 - 3r + 1 = 0$

या $(r-1)(2r-1) = 0$, $\therefore r = 1, \frac{1}{2}$

यदि $r = 1$, तब $a = 3(1-1) = 0$, जोकि असंभव है।

यदि $r = \frac{1}{2}$, तब $a = 3\left(1-\frac{1}{2}\right) = 3/2$

अतः अभीष्ट श्रेणी 3/2, 3/4, 3/8, 3/16,..... है।

73. (d) यहाँ, $\frac{a}{1-r} = 4$ एवं $ar = \frac{3}{4}$

तब, $r(1-r) = \frac{3}{16}$ या $16r^2 - 16r + 3 = 0$

या $(4r-3)(4r-1) = 0$

$r = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ एवं $a = 3, 1$. अतः, $(a, r) = \left(3, \frac{1}{4}\right), \left(1, \frac{3}{4}\right)$.

74. (d) $x = \frac{1/4}{1-(1/2)} = \frac{1}{2}$

$\therefore \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5\left(\frac{1}{4}\right)} = 5^{-\log_5 4^{-1}} = 5^{\log_5 4} = 4$.

75. (a) $4^{1/3}.4^{1/9}.4^{1/27}......\infty$

$\therefore S = 4^{1/3+1/9+1/27}......\infty$

$\Rightarrow S = 4^{\left(\frac{1/3}{1-1/3}\right)} = 4^{\frac{1/3}{2/3}} \Rightarrow S = 4^{1/2} \Rightarrow S = 2$.

76. (a) $y = \frac{x}{1-x}$, (अनन्त गुणोत्तर श्रेणी के लिये)

$\therefore y - yx = x$ या $y = x(1+y)$, अर्थात् $x = \frac{y}{1+y}$.

77. (a) $\frac{a}{1-r} = 3$ .....(i) तथा $\frac{a^2}{1-r^2} = 3$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से, $\frac{a}{1+r} = 1 \Rightarrow a = 1+r$

समीकरण (i) से, $\frac{1+r}{1-r} = 3 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$. अतः, $a = \frac{3}{2}$

अतः प्रथम पद $= \frac{3}{2}$ और सार्वअनुपात $= \frac{1}{2}$.

78. (a) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}, \frac{1}{2}, ...$

श्रेणी का सार्वअनुपात $= \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}$

$\therefore$ योग $= \frac{a}{1-r} = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \Big/ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}\right)$

$= \frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)} . \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(1+\sqrt{2})} = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^2$.

79. (b) $\frac{a}{1-r} = 20$ .....(i)

$\frac{a^2}{1-r^2} = 100$ .....(ii)

(i)व (ii)से,

$\frac{a}{1+r} = 5$, $[\because a = 20(1-r),$ समीकरण (i) से$]$

$\Rightarrow \frac{20(1-r)}{1+r} = 5 \Rightarrow 5r = 3 \Rightarrow r = \frac{3}{5}$.

80. (c) दिया है, $a = 2\left(\frac{ar}{1-r}\right) \Rightarrow 1-r = 2r \Rightarrow r = \frac{1}{3}$.

81. (a) सार्वअनुपात $(r) = \frac{2}{x}$

परिमित योग के लिए, $r < 1 \Rightarrow \frac{2}{x} < 1$

$\Rightarrow 2 < x \Rightarrow x > 2$.

82. (c) दी गयी श्रेणी है, 0.5737373......

$= 0.5 + 0.073 + 0.00073$

$= 0.5 + \frac{73}{1000} + \frac{73}{100000} + ...$

$= 0.5 + 73\left[\frac{1}{1000} + \frac{1}{100000} + ...\right]$

$= 0.5 + 73\left[\frac{1/1000}{1-\frac{1}{100}}\right] = 0.5 + \frac{73}{1000} . \frac{100}{99} = \frac{5}{10} + \frac{73}{990}$

$= \frac{495+73}{990} = \frac{568}{990}$.

83. (d) दी गयी श्रेणी है, 0.037037037......

$= 0.037 + 0.000037 + 0.0000000037 + ...$

$= \frac{37}{10^3} + \frac{37}{10^6} + \frac{37}{10^9} + ...$

$= 37\left[\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^9} + ...\right]$

$= 37\left[\frac{1/10^3}{1-1/10^3}\right] = 37\left[\frac{1}{10^3} . \frac{10^3}{999}\right] = \frac{37}{999}$.

84. (a) $3+x, 9+x, 21+x$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं

$\therefore (9+x)^2 = (3+x)(21+x)$

$\Rightarrow 81 + x^2 + 18x = x^2 + 24x + 63$

$\Rightarrow 6x = 18$ या $x = 3$.

ट्रिक : विकल्प (a) के परीक्षण से, $3+3, 9+3, 21+3$ गुणोत्तर श्रेणी में है।

85. (b) $s = \frac{a}{1-r} \Rightarrow s - sr = a \Rightarrow -sr = a - s \Rightarrow r = \frac{s-a}{s}$.

86. (c) दी गयी श्रेणी $9-3+1-\frac{1}{3}......\infty$ अनन्त गुणोत्तर श्रेणी है, जहाँ $a=9, r=\frac{-1}{3}$

$\therefore S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{9}{1+\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{9\times 3}{4} = \frac{27}{4}$.

87. (b) $(a+2b+2c)(a-2b+2c) = a^2+4c^2$

$\Rightarrow (a+2c)^2-(2b)^2 = a^2+4c^2$

$\Rightarrow a^2+4ac+4c^2-4b^2 = a^2+4c^2$

$\Rightarrow 4ac-4b^2=0 \Rightarrow b^2=ac$

अतः *a, b, c* गुणोत्तर श्रेणी में होंगे।

88. (c) $(32)(32)^{1/6}(32)^{1/36}......\infty = (32)^{1+\frac{1}{6}+\frac{1}{36}+.....\infty}$

$=(32)^{\frac{1}{1-(1/6)}} = (32)^{\frac{1}{5/6}} = (32)^{6/5} = 2^6 = 64$.

हरात्मक श्रेणी

1. (c) दिया है, हरात्मक श्रेणी के लिए $T_m=n, T_n=m$. अतः इसके तुल्य समान्तर श्रेणी का *m*वाँ पद $=\frac{1}{n}$ व *n*वाँ पद $=\frac{1}{m}$.

माना इस श्रेणी का प्रथम पद a व सार्वअन्तर *d* है, तो

$a+(m-1)d=\frac{1}{n}$ .....(i)

$a+(n-1)d=\frac{1}{m}$ .....(ii)

हल करने पर, $a=\frac{1}{mn}, d=\frac{1}{mn}$

अब संगत समान्तर श्रेणी का *r* वाँ पद

$=a+(r-1)d=\frac{1}{mn}+(r-1)\frac{1}{mn}=\frac{1+r-1}{mn}=\frac{r}{mn}$

अतः संगत हरात्मक श्रेणी का *r* वाँ पद $\frac{mn}{r}$ है।

नोट : इस प्रश्न को विद्यार्थी एक तथ्य समझकर याद रखें।

2. (d) माना x जोड़ दिया जाए, तब संख्यायें $x+13, 15+x, 19+x$ हरात्मक श्रेणी में होंगी

$\Rightarrow (15+x)=\frac{2(x+13)(19+x)}{x+13+x+19}$

$\Rightarrow x^2+31x+240=x^2+32x+247 \Rightarrow x=-7$.

ट्रिक : इस प्रकार के प्रश्नों का विकल्पों से परीक्षण करें।

3. (d) श्रेणी $2, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, ...$ हरात्मक श्रेणी में है, तब $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, ...$ समान्तर श्रेणी में होंगे।

अतः प्रथम पद $a=\frac{1}{2}$ और सार्वअनुपात $d=-\frac{1}{10}$

अतः समान्तर श्रेणी का 5वाँ पद $=\frac{1}{2}+(5-1)\left(-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{10}$

अतः, हरात्मक श्रेणी में 5वाँ पद = 10.

4. (c) चूंकि $a_1, a_2, a_3, ... a_n$ हरात्मक श्रेणी में हैं

अतः $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, ..., \frac{1}{a_n}$ समान्तर श्रेणी में होंगे

$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}=.......=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=d$

$\Rightarrow \frac{a_1-a_2}{a_1a_2}=\frac{a_3-a_2}{a_2a_3}=.......=\frac{a_{n-1}-a_n}{a_{n-1}a_n}=d$

$\Rightarrow a_1-a_2=da_1a_2$

$a_2-a_3=da_2a_3$

....

....

एवं $a_{n-1}-a_n=da_na_{n-1}$

जोड़ने पर, $d(a_1a_2+a_2a_3+......+a_na_{n-1})$

$=(a_1+a_2+......+a_{n-1})-(a_2+a_3+.....+a_n)$

$=a_1-a_n$ .....(i)

इस समान्तर श्रेणी का *n* वाँ पद

$=\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)d \Rightarrow d=\frac{a_1-a_n}{a_1a_n(n-1)}$

समीकरण (i) में d का मान रखने पर,

$(a_1-a_n)=\frac{a_1-a_n}{a_1a_n(n-1)}(a_1a_2+a_2a_3+.......+a_na_{n-1})$

$(a_1a_2+a_2a_3+........+a_na_{n-1})=a_1a_n(n-1)$.

5. (b) यदि x, y, z हरात्मक श्रेणी में हैं, तो $y=\frac{2xz}{x+z}$

अब, $\log_e(x+z)+\log_e(x-2y+z)$

$=\log_e\{(x+z)(x-2y+z)\}$

$=\log_e\left[(x+z)\left(x+z-\frac{4xz}{x+z}\right)\right]$

$=\log_e[(x+z)^2-4xz]=\log_e(x-z)^2=2\log_e(x-z)$.

6. (a) संगत समान्तर श्रेणी का 5 वाँ पद $=a+4d=45$ .....(i)

एवं संगत समान्तर श्रेणी का 11वाँ पद

$=a+10d=69$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से, $a=29, d=4$

अतः संगत समान्तर श्रेणी का 16वाँ पद

$=a+15d=29+15\times 4=89$.

हरात्मक श्रेणी का 16वाँ पद $\frac{1}{89}$ है।

7. (b) यहाँ पहला पद 7 व दूसरा पद 9 है, तब 12 वाँ पद $=7+11\times 2=29$ होगा

अतः हरात्मक श्रेणी का 12 वाँ पद $=\frac{1}{29}$

8. (d) यहाँ $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ समान्तर श्रेणी में हैं।माना $\frac{1}{a}=p-q, \frac{1}{b}=p$ एवं $\frac{1}{c}=p+q$, जहाँ $p, q>0$ एवं $p>q$. अब इन मानों को $\frac{3a+2b}{2a-b}+\frac{3c+2b}{2c-b}$ में प्रतिस्थापित करने पर $10+\frac{14q^2}{p^2-q^2}$ प्राप्त होता है जो, कि स्पष्टतः 10 से बड़ा है, $(\because p>q>0)$.

ट्रिक : $a=1, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{3}$ रखने पर व्यंजक निम्न मान देता है, $\frac{3+1}{2-\frac{1}{2}}+\frac{1+1}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=\frac{8}{3}+12>10$.

9. (a) चूंकि a, b, c, d हरात्मक श्रेणी में हैं, अतः a तथा c का हरात्मक माध्य b है, $\therefore\ b = \frac{2ac}{a+c}$ एवं b तथा d का हरात्मक माध्य c है। $\therefore c = \frac{2bd}{b+d}$, $\therefore\ (a+c)(b+d) = \frac{2ac}{b}.\frac{2bd}{c}$

$\Rightarrow ab + ad + bc + cd = 4ad \Rightarrow ab + bc + cd = 3ad$.

ट्रिक : $a = 1, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{3}, d = \frac{1}{4}$ के लिए निरीक्षण करें।

10. (d) स्पष्टतः, इसके संगत समान्तर श्रेणी का 7 वाँ पद = $\frac{1}{8}$ एवं 8 वाँ पद = $\frac{1}{7}$ होगा। अतः $a + 6d = \frac{1}{8}$ व $a + 7d = \frac{1}{7}$

हल करने पर, $d = \frac{1}{56}$ व $a = \frac{1}{56}$

अतः इस समान्तर श्रेणी का 15 वाँ पद

$= \frac{1}{56} + 14 \times \frac{1}{56} = \frac{15}{56}$

अतः हरात्मक श्रेणी का 15वाँ पद = $\frac{56}{15}$

11. (d) संगत समान्तर श्रेणी पर विचार करने पर,

$a + 6d = 10$ एवं $a + 11d = 25 \Rightarrow d = 3, a = -8$

$\Rightarrow T_{20} = a + 19d = -8 + 57 = 49$

अतः हरात्मक श्रेणी का 20वाँ पद $\frac{1}{49}$ है।

12. (c) हरात्मक श्रेणी का $T_6 = \frac{1}{61} \Rightarrow$ समान्तर श्रेणी का $T_6 = 61$

तथा हरात्मक श्रेणी का $T_{10} = \frac{1}{105} \Rightarrow$ समान्तर श्रेणी का $T_{10} = 105$,

अतः, $a + 5d = 61$ ....(i) तथा $a + 9d = 105$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से, $a = 6$

अतः, हरात्मक श्रेणी का प्रथम पद $= \frac{1}{a} = \frac{1}{6}$.

13. (b) माना समान्तर श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है

समान्तर श्रेणी का pवाँ पद $(T_p) = a + (p-1)d = \frac{1}{q}$ .....(i)

समान्तर श्रेणी का qवाँ पद $(T_q) = a + (q-1)d = \frac{1}{p}$ .....(ii)

समी (i) में से (ii) को घटाने पर ,

$(p-q)d = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{p-q}{pq} \Rightarrow d = \frac{1}{pq}$

समीकरण (i) से, $a + (p-1)\frac{1}{pq} = \frac{1}{q} \Rightarrow a = \frac{1}{pq}$.

$\therefore T_{pq} = a + (pq-1)d = \frac{1}{pq} + (pq-1)\frac{1}{pq} = 1$.

अतः pq वाँ पद 1 है।

14. (b) $a + 3d = \frac{5}{3}$ तथा $a + 7d = 3$

हल करने पर, $a = \frac{2}{3}, d = \frac{1}{3}$

समान्तर श्रेणी का 6 वाँ पद $= a + 5d = \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$

$\Rightarrow$ हरात्मक श्रेणी का 6 वाँ पद $= \frac{3}{7}$.

15. (a) दिये अनुसार, $H = \frac{2pq}{p+q}$

$\therefore\ \frac{H}{p} + \frac{H}{q} = \frac{2q}{p+q} + \frac{2p}{p+q} = \frac{2(p+q)}{p+q} = 2$.

16. (c) $H = \frac{2ab}{a+b}$ रखने पर, $\frac{1}{H-a} + \frac{1}{H-b}$

$= \frac{1}{\left(\frac{2ab}{a+b} - a\right)} + \frac{1}{\left(\frac{2ab}{a+b} - b\right)} = \frac{a+b}{ab-a^2} + \frac{a+b}{ab-b^2}$

$= \left(\frac{a+b}{b-a}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \left(\frac{a+b}{b-a}\right)\left(\frac{b-a}{ab}\right) = \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

17. (d) माना मूल α, β हैं, तो हरात्मक माध्य $= \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} = \frac{11 \times 2}{10} = \frac{11}{5}$.

18. (c) हरात्मक माध्य $= \frac{2\left(\frac{a^2}{1-a^2b^2}\right)}{\frac{a}{1-ab} + \frac{a}{1+ab}} = \frac{2a^2}{2a} = a$.

19. (a) $x_n = \frac{(n+1)ab}{na+b}$

6वाँ हरात्मक माध्य = $x_6 = \frac{7.3.6/13}{\left(6.3 + \frac{6}{13}\right)} = \frac{126}{240} = \frac{63}{120}$.

20. (b) $\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} = \frac{2ab}{a+b}$

$\Rightarrow a^{n+2} + ab^{n+1} + ba^{n+1} + b^{n+2} = 2a^{n+1}b + 2b^{n+1}a$

$\Rightarrow a^{n+1}(a-b) = b^{n+1}(a-b)$

या $\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} = (1) = \left(\frac{a}{b}\right)^0$

अतः $n = -1$.

21. (b) $H = \frac{2ab}{a+b}$ रखने पर,

$\frac{H+a}{H-a} + \frac{H+b}{H-b} = \frac{2(H^2 - ab)}{(H-a)(H-b)} = \frac{2\left[\frac{4ab}{(a+b)^2} - ab\right]}{\left[\frac{4ab}{(a+b)^2} - ab\right]} = 2$.

ट्रिक : माना $a = 1, H = \frac{1}{2}$ व $b = \frac{1}{3}$, तब

$\frac{H+a}{H-a} + \frac{H+b}{H-b} = \frac{3/2}{-1/2} + \frac{5/6}{1/6} = 2$.

22. (c) असमिका के सिद्धान्त से, हमें ज्ञात है कि n वें घातों का समान्तर माध्य > समांतर माध्य की n वीं घात

अर्थात्, $\frac{1}{2}(a^n + c^n) > \left(\frac{1}{2}(a+c)\right)^n$

या $\frac{1}{2}(a^n + c^n) > (A)^n$ या $\frac{1}{2}(a^n + c^n) > (H)^n$

चूँकि, समान्तर माध्य > हरात्मक माध्य

$\frac{1}{2}(a^n + c^n) > (b)^n \Rightarrow a^n + c^n > 2b^n$

$n=2$ रखने पर, $a^2+c^2>2b^2$.

23. (c) चूँकि a, b, c, d हरात्मक श्रेणी में हैं। अतः a व c का हरात्मक माध्य b एंव a व c का गुणोत्तर माध्य $\sqrt{ac}$ है।

अब, गुणोत्तर माध्य > हरात्मक माध्य

अतः $\sqrt{ac}>b \Rightarrow ac>b^2$ .....(i)

पुनः a, b, c, d हरात्मक श्रेणी में हैं अतः b व d का हरात्मक माध्य c है।

इसलिए $bd>c^2$ .....(ii)

(i) व (ii) का गुणा करने पर,

$abcd>b^2c^2$ या $ad>bc$. अतः विकल्प (b) सही है।

अब a व c का समान्तर माध्य $=\frac{1}{2}(a+c)$

चूंकि, समान्तर माध्य > हरात्मक माध्य $\Rightarrow a+c>2b$ ....(iii)

एवं b व d का हरात्मक माध्य c है $\Rightarrow b+d>2c$ .....(iv)

(iii) व (iv) से,

$(a+c)+(b+d)>2(b+c) \Rightarrow a+d>b+c$

अतः विकल्प (a) सत्य है।

$\therefore$ (a) व (b) दोनों विकल्प सही हैं।

समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य में सम्बन्ध

1. (a) यह आधारभूत संकल्पना है।

2. (d) माना $A = \frac{a+b}{2}, G = \sqrt{ab}$ एवं $H = \frac{2ab}{a+b}$

तब $G^2 = ab$ .....(i)

एवं $AH = \left(\frac{a+b}{2}\right) . \frac{2ab}{a+b} = ab$ .....(ii)

(i) व (ii) से, $G^2 = AH$.

3. (b) दिया है, a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं तथा b, c, d हरात्मक श्रेणी में हैं।

$\therefore \ 2b = a + c$ एवं $c = \frac{2bd}{b+d}$

$\Rightarrow c(b+d) = 2bd = (a+c)d \Rightarrow bc = ad$.

4. (d) प्रत्येक पद को bc से भाग देने पर, $\frac{a}{bc}, \frac{1}{c}, \frac{1}{b}$ समान्तर श्रेणी में होंगे, परन्तु $\frac{1}{b}$ की जगह $\frac{2}{b}$ है। अतः उत्तर (d) है।

5. (c) $\because$ समीकरण के मूल बराबर हैं, अतः $B^2 - 4AC = 0$

$\Rightarrow \ b^2(c-a)^2 - 4ac(b-c)(a-b) = 0$

$\Rightarrow b^2(c^2 - 2ca + a^2) - 4ac(ba - b^2 - ca + bc) = 0$

$\Rightarrow b^2(c^2 + 2ca + a^2) - 4ac\{b(a+c) - ac\} = 0$

$\Rightarrow b^2(a+c)^2 - 4ac\{b(a+c) - ac\} = 0$

जो कि सत्य होगा यदि $b = \frac{2ac}{a+c}$ या $b(a+c) = 2ac$

अर्थात यदि a, b, c हरात्मक श्रेणी में हैं।

6. (c) यहाँ $\frac{\log x}{\log a}, \frac{\log x}{\log b}, \frac{\log x}{\log c}$ हरात्मक श्रेणी में हैं

$\Rightarrow \frac{\log a}{\log x}, \frac{\log b}{\log x}, \frac{\log c}{\log x}$ समान्तर श्रेणी में हैं।

$\Rightarrow \log_x a, \log_x b, \log_x c$ समान्तर श्रेणी में हैं।

$\Rightarrow a, b, c$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

नोट : विद्यार्थी इसे एक तथ्य समझकर याद रखें।

7. (a) माना a, b व c गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तब $b^2 = ac$

$\Rightarrow 2\log_e b = \log_e a + \log_e c$ या $\log_e b = \frac{\log_e a + \log_e c}{2}$

अतः उनके लघुगणक समान्तर श्रेणी में हैं।

8. (a) यदि किसी समान्तर श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है, तब $T_p = a + (p-1)d, T_q = a + (q-1)d$

एवं $T_r = a + (r-1)d$.

यदि T_p, T_q, T_r गुणोत्तर श्रेणी में हैं

तब सार्वअनुपात $R = \frac{T_q}{T_p} = \frac{T_r}{T_q} = \frac{T_q - T_r}{T_p - T_q}$

$= \frac{[a+(q-1)d] - [a+(r-1)d]}{[a+(p-1)d] - [a+(q-1)d]} = \frac{q-r}{p-q}$

इसी प्रकार $R = \frac{q-r}{p-q} = \frac{r-s}{q-r}$

अतः $(p-q), (q-r), (r-s)$ गुणोत्तर श्रेणी में होंगे।

9. (c) a तथा b का समान्तर माध्य $A = \frac{a+b}{2}$

एवं गुणोत्तर माध्य $G = \sqrt{ab}$

तब $A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

$= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2(\sqrt{a})(\sqrt{b})}{2} = \left[\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{2}}\right]^2$.

10. (b) यदि $(b-c)^2, (c-a)^2, (a-b)^2$ समान्तर श्रेणी में हैं,

तो $(c-a)^2 - (b-c)^2 = (a-b)^2 - (c-a)^2$

$\Rightarrow (b-a)(2c-a-b) = (c-b)(2a-b-c)$ .....(i)

यदि $\frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{a-b}$ समान्तर श्रेणी में हैं,

तब $\frac{1}{c-a} - \frac{1}{b-c} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{c-a}$

$\Rightarrow \frac{b+a-2c}{(c-a)(b-c)} = \frac{c+b-2a}{(a-b)(c-a)}$

$\Rightarrow (a-b)(b+a-2c) = (b-c)(c+b-2a)$

$\Rightarrow (b-a)(2c-a-b) = (c-b)(2a-b-c)$,

जो कि (i) से सत्य है।

11. (a) माना $a^{1/x} = b^{1/y} = c^{1/z} = k \Rightarrow a = k^x, b = k^y, c = k^z$

अब a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हैं

$\therefore \ b^2 = ac \Rightarrow k^{2y} = k^x.k^z = k^{x+z} \Rightarrow 2y = x + z$

$\Rightarrow \ x, y, z$ समान्तर श्रेणी में हैं।

12. (c) समान्तर माध्य $= \frac{a+b}{2} = A$ एवं गुणोत्तर माध्य $= \sqrt{ab} = G$

हल करने पर a व b के मान

$A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}$ के द्वारा प्राप्त होते हैं।

ट्रिक : माना कि संख्यायें 1, 9 हैं, तब $A = 5$ व $G = 3$.

अब ये मान विकल्पों में रखने पर,

विकल्प (c) $\Rightarrow 5 \pm \sqrt{8 \times 2}$ अर्थात् 9 व 1.

13. (c) चूंकि a व c के व्युत्क्रम दाँये पक्ष में हैं। अतः माना a, b, c हरात्मक श्रेणी में हैं, तो $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ समान्तर श्रेणी में होंगे।

$\Rightarrow \ \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = d$, (माना)

$\Rightarrow \ \frac{a-b}{ab} = d = \frac{b-c}{bc} \Rightarrow a - b = abd$ एवं $b - c = bcd$

अब, वामपक्ष $= -\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} = -\frac{1}{abd} + \frac{1}{bcd}$

$= \frac{1}{bd}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{bd}(2d) \Rightarrow \frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} =$ RHS

स्पष्टतः, a, b, c हरात्मक श्रेणी में हैं।

14. (b) चूंकि $A > G > H$

जहाँ A समान्तर माध्य, G गुणोत्तर माध्य एवं H हरात्मक माध्य है। $\therefore \ A > G$

$\Rightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ या $(a+b) > 2\sqrt{ab}$.

15. (c) दिया है, b^2, a^2, c^2 समान्तर श्रेणी में है।

अतः $a^2 - b^2 = c^2 - a^2$

$\Rightarrow (a-b)(a+b) = (c-a)(c+a)$

$\Rightarrow \frac{a-b}{c+a} = \frac{c-a}{a+b} \Rightarrow \frac{b-a+c-c}{(c+a)(b+c)} = \frac{a+b-b-c}{(b+c)(a+b)}$

$\Rightarrow \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+b} = \frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c}$

$\Rightarrow \frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}$ समान्तर श्रेणी में हैं

अतः $(a+b), (b+c), (c+a)$ हरात्मक श्रेणी में हैं।

16. (d) दिये अनुसार, $b = \frac{a+c}{2}$ .....(i)

एवं $b^2 = ac$ .....(ii)

$\Rightarrow (a+c)^2 = 4ac \Rightarrow (a-c)^2 = 0 \Rightarrow a = c$

समीकरण (i) में $a = c$ रखने पर, $b = c$; $\therefore a = b = c$.

17. (c) दिया है, a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हैं

$\therefore b^2 = ac$ .....(i)

$x = \frac{a+b}{2}$ .....(ii)

$y = \frac{b+c}{2}$ .....(iii)

अब $\frac{a}{x} + \frac{c}{y} = \frac{2a}{a+b} + \frac{2c}{b+c} = \frac{2(ab+bc+2ca)}{ab+ac+b^2+bc}$

$= \frac{2(ab+bc+2ca)}{(ab+ac+ac+bc)} = 2, \{\because b^2 = ac\}$.

ट्रिक : माना $a = 1, b = 2, c = 4$, तब स्पष्टतः $x = \frac{3}{2}$ एवं $y = 3$. अतः $\frac{1}{3/2} + \frac{4}{3} = 2$.

18. (b) दिया है, a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं $\Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$ .....(i)

एवं $b^2 = ad$ ..... (ii)

अतः $a, a-b, d-c$ गुणोत्तर श्रेणी में होंगे, क्योंकि

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = a(a-2b) + ad$

$= a(a-a-c) + ad = ad - ac$.

19. (c) a^2, b^2, c^2 समान्तर श्रेणी में हैं, अतः $a^2 + (ab+bc+ca)$, $b^2 + (ab+bc+ca)$, $c^2 + (ab+bc+ca)$ समान्तर श्रेणी में होंगे

$\Rightarrow \{a(a+b) + c(a+b)\}, \{b(b+a) + c(b+a)\}$, $\{c(c+b) + a(b+c)\}$ समान्तर श्रेणी में होंगे

$\Rightarrow (a+b)(a+c), (b+a)(b+c), (c+a)(c+b)$ समान्तर श्रेणी में होंगे

$\Rightarrow \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ समान्तर श्रेणी में होंगे

{प्रत्येक पद को $(a+b)(b+c)(c+a)$ से भाग देने पर}.

20. (a) a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं $\Rightarrow \frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ समान्तर श्रेणी में होंगे, {प्रत्येक पद को abc से भाग देने पर}.

21. (c) $x, 1, z$ समान्तर श्रेणी में हैं, तब $2 = x + z$ ......(i)

एवं $4 = xz$ ......(ii)

(ii) को (i) से भाग देने पर, $\frac{x \cdot z}{x+z} = \frac{4}{2}$ या $\frac{2xz}{x+z} = 4$

अतः $x, 4, z$ हरात्मक श्रेणी में होंगे।

22. (c) स्पष्टतः, $x = \frac{1}{1-a}, y = \frac{1}{1-b}, z = \frac{1}{1-c}$

चूंकि a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं।

$\Rightarrow 1-a, 1-b, 1-c$ समान्तर श्रेणी में होंगे

$\Rightarrow \frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-b}, \frac{1}{1-c}$ हरात्मक श्रेणी में हैं।

$\therefore x, y, z$ हरात्मक श्रेणी में हैं।

23. (d) दिये अनुसार, $b^2 = ac$ एवं $\frac{2}{c-a} = \frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-b}$

$\Rightarrow 2(b-c)(a-b) = -(a-c)^2$

$\Rightarrow 2(ab - ac - b^2 + bc) = -\{(\sqrt{a}+\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{c})\}^2$

$\Rightarrow 2(ab - 2b^2 + bc) = -(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2(\sqrt{a}+\sqrt{c})^2$

$\Rightarrow 2b(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2 = -(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2(\sqrt{a}+\sqrt{c})^2$

$\Rightarrow 2b = -(a + c + 2\sqrt{ac}), (\because \sqrt{a} - \sqrt{c} \neq 0)$

$\Rightarrow 2b = -(a + c + 2b) \Rightarrow a + b + c = -3b = -3\sqrt{ac}$

जो कि a, b व c से स्वतंत्र नहीं है।

24. (c) a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं, तब $2b = a + c$ .....(i)

b, c, d गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तब $c^2 = bd$

c, d, e हरात्मक श्रेणी में हैं, तब $d = \frac{2ce}{c+e}$ ....(iii)

समीकरण (ii) से, $c^2 = bd = \left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{2ce}{c+e}\right)$

$\Rightarrow c^2 = \frac{ace + c^2e}{c+e} \Rightarrow c^3 + c^2e = ace + c^2e$

$\Rightarrow c^3 = ace \Rightarrow c^2 = ae$

अतः a, c, e गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

25. (a) दिया है,

$b^2 = ac$ एवं $\frac{2}{c-a} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} = \frac{a-c}{(a-b)(b-c)}$

$\Rightarrow 2(a-b)(b-c) = -(a-c)^2$

$\Rightarrow -(a-c)^2 = 2(ab - 2b^2 + bc) = 2b\{a - 2\sqrt{ac} + c\}$

$\Rightarrow -\{(\sqrt{a}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{c})\}^2 = 2b(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2$

$\Rightarrow 2b = -\{a + 2\sqrt{ac} + c\} = -a - 2b - c$ या $a + 4b + c = 0$.

26. (c) माना $a^x = b^y = c^z = d^u = k$, (माना)

तब $a = k^{1/x}, b = k^{1/y}, c = k^{1/z}, d = k^{1/u}$

चूंकि a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हैं अतः

$b^2 = ac \Rightarrow k^{2/y} = k^{1/x} . k^{1/z} = k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}$

$\Rightarrow \frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ समान्तर श्रेणी में हैं।

$\Rightarrow x, y, z$ हरात्मक श्रेणी में हैं।

इसी प्रकार यह सिद्ध किया जा सकता है कि y, z, u हरात्मक श्रेणी में हैं।

$\therefore x, y, z$ व u हरात्मक श्रेणी में हैं।

27. (a) दिया है, a, A_1, A_2, b समान्तर श्रेणी में हैं

अतः $A_1 = \frac{a+A_2}{2}, A_2 = \frac{A_1+b}{2}$

$\Rightarrow A_1 + A_2 = \frac{1}{2}(a+b+A_1+A_2)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(A_1+A_2) = \frac{1}{2}(a+b)$ या $A_1 + A_2 = a+b$ .....(i)

तथा a, G_1, G_2, b गुणोत्तर श्रेणी में होंगे

$\therefore G_1^2 = aG_2, G_2^2 = bG_1$ .....(ii)

$\Rightarrow G_1^2 G_2^2 = abG_1G_2 \Rightarrow G_1G_2 = ab$

अतः $\frac{A_1+A_2}{G_1G_2} = \frac{a+b}{ab}$.

ट्रिक : माना $a = 1, b = 2$, तब $A_1 + A_2 = 1+2 = 3$ व $G_1 . G_2 = 2 \times 1 = 2$

$\therefore \frac{A_1+A_2}{G_1G_2} = \frac{3}{2}$, जो कि विकल्प (a) द्वारा दिया जाता है।

28. (b) माना दो संख्यायें a व b हैं,

तो $G = \sqrt{AH} \Rightarrow$ गुणोत्तर माध्य $= \sqrt{27 \times 12} = 18$.

29. (b) दिये अनुसार, $2b = a + c \Rightarrow 3^{2b} = 3^{a+c}$

या $(3^b)^2 = 3^a . 3^c$ अर्थात् $3^a, 3^b, 3^c$ गुणोत्तर श्रेणी में होंगे।

नोट : विद्यार्थी इसे एक तथ्य समझकर याद रखें।

30. (a) माना दी गयी समान्तर श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है तब जैसा कि दिया गया है $(m+1)$ वें, $(n+1)$ वें एवं $(r+1)$ वें पद गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

$\Rightarrow a+md, a+nd, a+rd$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं

$\Rightarrow (a+nd)^2 = (a+md)(a+rd)$

$\Rightarrow a(2n-m-r) = d(mr-n^2)$

या $\frac{d}{a} = \frac{2n-(m+r)}{mr-n^2}$ .....(i)

m, n, r हरात्मक श्रेणी में हैं $\Rightarrow n = \frac{2mr}{m+r}$ .....(ii)

(i) व (ii) से, $\frac{d}{a} = \frac{2n-(m+r)}{mr-n^2} = \frac{2}{n}\left(\frac{2n-(m+r)}{(m+r)-2n}\right) = -\frac{2}{n}$.

31. (c) $\because G^2 = AH \Rightarrow (18)^2 = 27H \Rightarrow H = 12$.

32. (b) दिया है, समान्तर माध्य = 2(गुणोत्तर माध्य)

या $\frac{1}{2}(a+b) = 2\sqrt{ab}$

या $\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}} = \frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1}$

$\Rightarrow \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3}}{1}$

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ या $a : b = (2+\sqrt{3}) : (2-\sqrt{3})$.

33. (a) $x+y+z = 15$, यदि $9, x, y, z, a$ समान्तर श्रेणी में हैं

योग $= 9 + 15 + a = \frac{5}{2}(9+a) \Rightarrow 24 + a = \frac{5}{2}(9+a)$

$\Rightarrow 48 + 2a = 45 + 5a \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = 1$ .....(i)

एवं $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{5}{3}$, यदि $9, x, y, z, a$ हरात्मक श्रेणी में हैं

अतः योगफल $= \frac{1}{9}+\frac{5}{3}+\frac{1}{a} = \frac{5}{2}\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{a}\right] \Rightarrow a = 1$.

34. (c) माना A_j, H_j, (जहाँ $j = 1, 2, 3, ... 9$) 2 व 3 के बीच क्रमशः समान्तर माध्य व हरात्मक माध्य हैं।

तब $2, A_1, A_2 .... A_9, 3$ समान्तर श्रेणी में होंगे।

माना इस समान्तर श्रेणी का सार्वअन्तर d है, तो

$3 = 2 + 10d \Rightarrow d = \frac{1}{10}$

यदि j वाँ समान्तर माध्य A हो, तो

$A = 2 + jd = 2 + \left(\frac{j}{10}\right)$

पुनः $2, H_1, H_2 ...., H_9, 3$ हरात्मक श्रेणी में होंगे

अर्थात् $\frac{1}{2}, \frac{1}{H_1}, \frac{1}{H_2}, ... \frac{1}{H_9}, \frac{1}{3}$ समान्तर श्रेणी में होंगे

माना इस समान्तर श्रेणी का सार्वअन्तर D है,

तब $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} + 10D \Rightarrow D = -\frac{1}{60}$

यदि j वाँ हरात्मक माध्य H हो, तो

$\frac{1}{H} = \frac{1}{2} + jD = \frac{1}{2} - \frac{j}{60}$

$\therefore A + \frac{6}{H} = 2 + \frac{j}{10} + 6\left(\frac{1}{2} - \frac{j}{60}\right) = 5 + \frac{j}{10} - \frac{j}{10} = 5$.

वैकल्पिकः हम जानते हैं, कि

$A_m = 2 + \frac{m(3-2)}{9+1} = 2 + \frac{m}{10}$

एवं $\frac{1}{H_m} = \frac{1}{2} + \frac{m(2-3)}{2 \times 3(9+1)} = \frac{1}{2} - \frac{m}{60}$

$\therefore A_m + 6 \times \frac{1}{H_m}$ अर्थात् $A + \frac{6}{H} = 2 + \frac{m}{10} + 3 - \frac{m}{10} = 5$.

35. (b) माना गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद व सार्वअनुपात A व R है

तब $a = AR^{p-1}, b = AR^{q-1}$ एवं $c = AR^{r-1}$ .....(i)

पुनः यदि x व d संगत समान्तर श्रेणी के क्रमशः प्रथम पद व सार्वअन्तर हों, तब $\frac{1}{a} = x + (p-1)d, \frac{1}{b} = x + (q-1)d$,

$\frac{1}{c} = x + (r-1)d$ .....(ii)

समीकरण (i) से $\frac{a}{b} = R^{p-q}$

या $\left(\frac{a}{b}\right)^{1/c} = (R^{p-q})^{1/c} = R^k$, जहाँ $k = \frac{p-q}{c}$

समीकरण (ii) से, $k = (p-q)\{x+(r-1)d\}$

$= (p-q)x-(p-q)(r-1)d$

$= (p-q)x-(p-q)d+(rp-rq)d$ .....(iii)

इसी प्रकार, $\left(\frac{b}{c}\right)^{1/a} = (R^{q-r})^{1/a} = R^n$, जहाँ $n = \frac{q-r}{a}$

$\Rightarrow n = (q-r)\times\{x+(p-1)d\}$

$\Rightarrow n = (q-r)x-(q-r)d+(pq-pr)d$ .....(iv)

एवं $\left(\frac{c}{a}\right)^{1/b} = (R^{r-p})^{1/b} = R^m$

जहाँ, $m = \frac{r-p}{b} = (r-p)\{x+(q-1)d\}$

$= (r-p)x-(r-p)d+(rq-qp)d$ .....(v)

अतः $\left(\frac{a}{b}\right)^{1/c}\left(\frac{b}{c}\right)^{1/a}\left(\frac{c}{a}\right)^{1/b} = R^k R^m R^n = R^{m+n+k}$

$= R^0 = 1$

{चूंकि (iii), (iv) व (v) को जोड़ने पर, $k+m+n=0$ }

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$\frac{1}{c}(\log_e a-\log_e b)+\frac{1}{a}(\log_e b-\log_e c)$

$+\frac{1}{b}(\log_e c-\log_e a) = \log_e(1)$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)\log_e a+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\log_e b+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\log_e c = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{b-c}{bc}\right)\log_e a+\left(\frac{c-a}{ac}\right)\log_e b+\left(\frac{a-b}{ab}\right)\log_e c = 0$

$\Rightarrow a(b-c)\log_e a+b(c-a)\log_e b+c(a-b)\log_e c = 0$.

नोट : इस प्रकार के प्रश्न, अर्थात् जिनके पदों में गुणांक चक्रीय क्रम में होते हैं व ऋण चिन्ह से भी सम्बन्धित होते हैं, का मान अधिकांशतः 0 होता है।

36. (a) दिया है, a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं

$\Rightarrow 2b = a+c$ ......(i)

एवं a^2, b^2, c^2 हरात्मक श्रेणी में हैं $\Rightarrow b^2 = \frac{2a^2c^2}{a^2+c^2}$

$\Rightarrow b^2(a^2+c^2) = 2a^2c^2$

$\Rightarrow b^2\{(a+c)^2-2ac\} = 2a^2c^2$

$\Rightarrow b^2\{4b^2-2ac\} = 2a^2c^2$, (i) से

$\Rightarrow 4b^4-2acb^2 = 2a^2c^2 \Rightarrow (b^2-ac)(2b^2+ac) = 0$

$\Rightarrow$ या तो $b^2-ac = 0$ या $2b^2+ac = 0$

यदि $b^2-ac = 0$, तब $b^2 = ac$

$\Rightarrow \left\{\frac{1}{2}(a+c)\right\}^2 = ac$, (i) से

$\Rightarrow (a+c)^2 = 4ac \Rightarrow (a-c)^2 = 0$. अतः $a = c$

यदि $a = c$ तब $b^2 = ac$ से, $b^2 = a^2$ या $b = a$.

इस प्रकार $a = b = c$.

37. (d) माना संख्यायें $\frac{a}{r}, a, ar, 2ar-a$ हैं .....(i),

जहाँ प्रथम तीन गुणोत्तर श्रेणी में एवं अन्तिम तीन समान्तर श्रेणी में हैं।

दिया है, समान्तर श्रेणी का सार्वअनुपात 6 है।

अतः $ar-a = 6$ .....(ii)

एवं $\frac{a}{r} = 2ar-a \Rightarrow \frac{a}{r} = 2(ar-a)+a$

$\Rightarrow \frac{a}{r} = 2(6)+a$, ((ii) से)

$\Rightarrow \left(\frac{a}{r}\right)-a = 12 \Rightarrow a(1-r) = 12r \Rightarrow r = -\frac{1}{2}$

(i) से, $a\left[\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right] = 6$ या $a = -4$

समीकरण (i) से, अभीष्ट संख्यायें $8, -4, 2, 8$ हैं।

38. (b) संख्यायें $(\sqrt{2}+1), 1, (\sqrt{2}-1)$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं

$\therefore (1)^2 = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2})^2-(1)^2 = 2-1 = 1$.

39. (d) दिया है, $\frac{\text{हरात्मक माध्य}}{\text{गुणोत्तर माध्य}} = \frac{12}{13} \Rightarrow \frac{\frac{2ab}{a+b}}{\sqrt{ab}} = \frac{12}{13}$

या $\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} = \frac{13}{12}$

$\Rightarrow \frac{(a+b)+2\sqrt{ab}}{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \frac{13+12}{13-12} = \frac{25}{1}$

$\Rightarrow \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \frac{5^2}{1} \Rightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{5}{1}$

$\Rightarrow \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{5+1}{5-1}$

$\Rightarrow \frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}} = \frac{6}{4} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{1/2} = \frac{6}{4} \Rightarrow a:b = 9:4$.

40. (d) योगान्तरानुपात से, $\frac{b+a}{b-a} = \frac{b+c}{b-c} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{b}{c} \Rightarrow a = c$.

41. (b) दिया है, $\frac{a}{b} = \frac{9}{1}$ या $a = 9b$

यहाँ $H = \frac{2ab}{a+b}$ एवं $G = \sqrt{ab}$

$\Rightarrow H:G = \frac{2ab}{a+b}:\sqrt{ab} = \frac{2.9b^2}{10b}:3b = \frac{3}{5}$

अतः $G:H = 5:3$.

42. (c) यदि a, b, c हरात्मक श्रेणी में हैं, तो $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ समान्तर श्रेणी में होंगे।

$\Rightarrow \frac{a+b+c}{a}, \frac{a+b+c}{b}, \frac{a+b+c}{c}$ समान्तर श्रेणी में हैं।

$\Rightarrow \frac{b+c}{a}, \frac{a+c}{b}, \frac{a+b}{c}$ समान्तर श्रेणी में हैं।

$\Rightarrow \frac{a}{b+c}, \frac{b}{a+c}, \frac{c}{a+b}$ हरात्मक श्रेणी में हैं।

43. (b) यदि $\frac{x+y}{2}, y, \frac{y+z}{2}$ हरात्मक श्रेणी में हैं।

तब $y=\frac{2\left(\frac{x+y}{2}.\frac{y+z}{2}\right)}{\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}}=\frac{\frac{2}{4}(x+y)(y+z)}{\frac{1}{2}(x+2y+z)}$

$y=\frac{xy+xz+y^2+yz}{x+2y+z}$

$\Rightarrow xy+2y^2+yz=xy+xz+y^2+yz \Rightarrow y^2=xz$

इस प्रकार x, y, z गुणोत्तर श्रेणी में होंगे।

44. (d) माना समान्तर श्रेणी, गुणोत्तर श्रेणी एवं हरात्मक श्रेणी के प्रथम पद एवं $(2n-1)$ वाँ पद क्रमशः α, β हैं। तब,

समान्तर श्रेणी के लिए : $\beta=\alpha+(2n-2)d \Rightarrow d=\frac{\beta-\alpha}{2n-2}$

n वाँ पद $=a=\alpha+(n-1)d=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ .....(i)

पुनः गुणोत्तर श्रेणी के लिए : $\beta=\alpha.r^{2n-2} \Rightarrow r=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2n-2}}$

$\therefore$ n वाँ पद $=b=\alpha r^{n-1}=\alpha\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{n-1}{2n-2}}=\alpha\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$

या $b=(\alpha\beta)^{1/2}=\sqrt{\alpha\beta}$ .....(ii)

हरात्मक श्रेणी के लिए : $\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+(2n-2)d'$

$\Rightarrow \frac{1}{c}=\frac{1}{\alpha}+(n-1)d'=\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha-\beta}{2\alpha\beta}=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}$

$\Rightarrow c=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ .....(iii)

अब, एक से अधिक विकल्प सही हो सकते हैं

विकल्प (a) के लिए,

$a-b=\frac{\alpha+\beta}{2}-\sqrt{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2\geq 0 \Rightarrow a\geq b$

$b-c=\sqrt{\alpha\beta}-\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}(\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta})$

$=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{(\alpha+\beta)}(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2\geq 0 \Rightarrow b\geq c$

$\therefore a\geq b\geq c$ .....(iv)

विकल्प (c) के लिए : $ac=\frac{\alpha+\beta}{2}.\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\alpha\beta=b^2$

$\therefore ac-b^2=0$ .....(v)

स्पष्टतः $a+c\neq b$ .....(vi)

अतः (a) एवं (c) दोनों सही हैं।

45. (b) माना a तथा b तीन श्रेणियों के समान प्रथम व अन्तिम पद है तथा पदों की संख्या $(2n+1)$ है। तब समान्तर श्रेणी का मध्य पद $\frac{a+b}{2}$ है। गुणोत्तर श्रेणी का मध्य पद $\sqrt{ab}$ व हरात्मक श्रेणी का मध्य पद $\frac{2ab}{a+b}$ है। स्पष्टतः यह पद गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

46. (b) $a+x, b+x, c+x$ हरात्मक श्रेणी में हैं

$\therefore b+x=\frac{2(a+x)(c+x)}{(a+x)+(c+x)}$

$\Rightarrow (b+x)(a+c+2x)=2(a+x)(c+x)$

$\Rightarrow (a+c+2b)x+2x^2+ab+bc=2ac+2x(a+c)+2x^2$

$\Rightarrow x(c+a-2b)=bc+ab-2ac$

$\Rightarrow x(c+a-2b)=bc+ab-2b^2$, ($\because a, b, c$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं)

$\Rightarrow x(c+a-2b)=b(c+a-2b)$

$\Rightarrow x=b$,यदि $c+a-2b\neq 0$.

47. (c) $\frac{a+b}{1-ab}, b, \frac{b+c}{1-bc}$ समान्तर श्रेणी में हैं

$\Rightarrow b-\frac{a+b}{1-ab}=\frac{b+c}{1-bc}-b$

$\Rightarrow -\frac{a(b^2+1)}{1-ab}=\frac{c(b^2+1)}{1-bc} \Rightarrow -\left(\frac{1-ab}{a}\right)=\frac{1-bc}{c}$

$\Rightarrow -\frac{1}{a}+b=\frac{1}{c}-b \Rightarrow 2b=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$

$\Rightarrow a, \frac{1}{b}, c$ हरात्मक श्रेणी में होंगे।

48. (d) यह आधारभूत संकल्पना है।

49. (b) $y-x, 2(y-a), (y-z)$ हरात्मक श्रेणी में हैं

$\Rightarrow \frac{1}{y-x}, \frac{1}{2(y-a)}, \frac{1}{y-z}$ समान्तर श्रेणी में हैं

$\Rightarrow \frac{1}{2(y-a)}-\frac{1}{y-x}=\frac{1}{y-z}-\frac{1}{2(y-a)}$

$\Rightarrow \frac{2a-y-x}{y-x}=\frac{y+z-2a}{y-z}$

$\Rightarrow \frac{(x-a)+(y-a)}{(x-a)-(y-a)}=\frac{(y-a)+(z-a)}{(y-a)-(z-a)}$

$\Rightarrow \frac{x-a}{y-a}=\frac{y-a}{z-a}$, (योगान्तरानुपात द्वारा)

$\Rightarrow x-a, y-a, z-a$ गुणोत्तर श्रेणी में होंगे।

50. (c) $\frac{\frac{a+b}{2}}{\frac{2ab}{a+b}}=\frac{m}{n} \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4ab}=\frac{m}{n} \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{2ab}=\frac{2m}{n}$

अन्तरानुपात लगाने पर, $\frac{a^2+b^2}{2ab}=\frac{2m-n}{n}$

योगन्तरानुपात लगाने पर,

$\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}=\frac{m}{m-n} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m-n}}$

पुनः योगन्तरानुपात लगाने पर,

$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{m}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m}-\sqrt{m-n}}$.

51. (d) $\log_x y, \log_z x, \log_y z$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं

$\Rightarrow (\log_z x)^2=\log_x y\times\log_y z=\log_x z=\frac{1}{\log_z x}$

$\Rightarrow (\log_z x)^3=1 \Rightarrow z=x$

अतः हम देख सकते हैं, $z=x=y=4$.

52. (d) परिकल्पना से, $q = \frac{2pr}{p+r} \Rightarrow \frac{q}{2} = \frac{pr}{p+r} = K$ (माना)

$\Rightarrow q = 2K, pr = (p+r)K$ एवं p^2, q^2, r^2 समान्तर श्रेणी में हैं।

$\therefore 2q^2 = p^2 + r^2 = (p+r)^2 - 2pr$

$\Rightarrow 8K^2 = (p+r)^2 - 2(p+r)K$

$\Rightarrow (p+r)^2 - 2(p+r)K - 8K^2 = 0 \Rightarrow p+r = 4K, -2K$

जब $p+r = 4K$, तब $pr = 4K^2$

$\therefore (p-r)^2 = (p+r)^2 - 4pr = 16K^2 - 16K^2 = 0$

$\Rightarrow p = r$ जो कि सम्भव नहीं है, $(\because p \ne r)$

$\therefore p + r = -2K \Rightarrow pr = -2K \cdot K = -2K^2$

अब $(p-r)^2 = (p+r)^2 - 4pr = 4K^2 - 4(-2K^2) = 12K^2$

$\Rightarrow p - r = \pm 2\sqrt{3}K$ एवं $p + r = -2K$

$\therefore 2p = (-2 \pm 2\sqrt{3})K \Rightarrow p = (-1 \pm \sqrt{3})K$

व $2r = -2K \mp 2\sqrt{3}K \Rightarrow r = (-1 \mp \sqrt{3})K$

$\therefore p : q : r = (-1 \pm \sqrt{3})K : 2K : (-1 \mp \sqrt{3})K$

$= -1 \pm \sqrt{3} : 2 : -1 \mp \sqrt{3} = 1 \mp \sqrt{3} : -2 : 1 \pm \sqrt{3}$.

53. (b) प्रश्नानुसार, $ab = 36$ एवं $a + b = 13$

हल करने पर, $a = 4, b = 9$.

54. (b) $\frac{a+bx}{a-bx} = \frac{b+cx}{b-cx} = \frac{c+dx}{c-dx}$

योगान्तरानुपात नियम से,

$\frac{2a}{2bx} = \frac{2b}{2cx} = \frac{2c}{2dx} \Rightarrow b^2 = ac$ एवं $c^2 = bd$

$\Rightarrow a, b, c$ एवं b, c, d गुणोत्तर श्रेणी में हैं

अतः, a, b, c, d गुणोत्तर श्रेणी में होंगे।

55. (c) विकल्प द्वारा जाँच करें,

(a) 1, 3, 5 समान्तर श्रेणी में हैं, लेकिन 1, 5 − 3, 3 − 1 अर्थात् 1, 2, 2 गुणोत्तर श्रेणी में नहीं है।

(b) 1, 2, 4 समान्तर श्रेणी में नहीं हैं।

(c) 1, 2, 3 समान्तर श्रेणी में हैं एवं 1, $3-2, 2-1$ अर्थात् 1, 1, 1 गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

56. (b) दो संख्यायें a तथा c के लिए,

$\frac{a^n + c^n}{2} > \left(\frac{a+c}{2}\right)^n$, (जहाँ $n \in N, n > 1$)

$\because$ समान्तर माध्य > गुणोत्तर माध्य > हरात्मक माध्य

$\therefore \frac{a+b}{2} > b$, ($\because a, b, c$ हरात्मक श्रेणी में हैं)

$\Rightarrow \left(\frac{a+c}{2}\right)^n > b^n \Rightarrow \frac{a^n + c^n}{2} > \left(\frac{a+c}{2}\right)^n > b^n$.

57. (a) (समान्तर माध्य) (हरात्मक माध्य) $= ab =$ (गुणोत्तर माध्य)^2

$\Rightarrow 9 \cdot 36 =$ (गुणोत्तर माध्य)^2 $\Rightarrow$ गुणोत्तर माध्य = 18.

58. (c) माना $x^a = x^{b/2} z^{b/2} = z^c = \lambda$

$\Rightarrow x = \lambda^{1/a}, z = \lambda^{1/c}, xz = \lambda^{2/b}$

$\Rightarrow \lambda^{(1/a)+(1/c)} = \lambda^{2/b} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$

$\Rightarrow a, b, c$ हरात्मक श्रेणी में हैं।

59. (b) माना गुणोत्तर श्रेणी के तीन पद $\frac{a}{r}, a, ar$ हैं

अतः $\frac{a}{r} \cdot a \cdot ar = 512$

$\Rightarrow a^3 = 8^3 \Rightarrow a = 8$

द्वितीय शर्तानुसार $\frac{a}{r} + 8, a + 6, ar$ समान्तर श्रेणी में होंगे

$\Rightarrow 2(a+6) = \frac{a}{r} + 8 + ar \Rightarrow 28 = 8\left\{\frac{1}{r} + 1 + r\right\}$

$\Rightarrow \frac{1}{r} + r + 1 = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{1}{r} + r - \frac{5}{2} = 0$

$\Rightarrow r^2 - \frac{5}{2}r + 1 = 0 \Rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0$

$\Rightarrow (2r-1)(r-2) = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}, r = 2$ $(\because r > 1)$

$\Rightarrow r = 2$. अतः अभीष्ट संख्यायें 4, 8, 16 हैं।

ट्रिक : (a) का परीक्षण करने पर $2+8, 4+6, 8$ समान्तर श्रेणी में नहीं हैं।

विकल्प (b) का परीक्षण करने पर, $4+8, 8+6, 16$ अर्थात् $12, 14, 16$ समान्तर श्रेणी में हैं।

60. (c,d) चूंकि हरात्मक माध्य $= \frac{2ab}{a+b}$ एवं गुणोत्तर माध्य $= \sqrt{ab}$

$\therefore \frac{\text{हरात्मक माध्य}}{\text{गुणोत्तर माध्य}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{2ab/(a+b)}{\sqrt{ab}} = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \frac{2\sqrt{ab}}{(a+b)} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}} = \frac{5+4}{5-4} \Rightarrow \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \frac{9}{1}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{3+1}{3-1}$

$\Rightarrow \frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}} = \frac{4}{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right) = 2^2 = 4$

$\Rightarrow a : b = 4 : 1$ या $b : a = 1 : 4$.

वैकल्पिक : माना संख्यायें $\lambda : 1$ में हैं, अर्थात् λa व a हैं

तब $\frac{2(\lambda a)a}{\lambda a + a} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda a \cdot a}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + 1} = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow 25\lambda = 4(\lambda^2 + 2\lambda + 1) \Rightarrow (\lambda - 4)(4\lambda - 1) = 0$

$\Rightarrow \lambda = 4$ या $\lambda = \frac{1}{4}$.

61. (a) दिया है, समान्तर माध्य = गुणोत्तर माध्य = हरात्मक माध्य

$\Rightarrow \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} = \frac{2ab}{a+b}$, अतः $a = b$.

62. (c) a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं $\Rightarrow 2b = a + c$

अब $(10^{bx+10})^2 = (10^{ax+10} . 10^{cx+10})$

$\Rightarrow 10^{2(bx+10)} = 10^{ax+cx+20}$

$\Rightarrow 2(bx+10) = ax + cx + 20, \forall x$

$\Rightarrow 2b = a + c$ अर्थात् a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं

अतः x के सभी मानों के लिए यह गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

नोट : चूँकि हम जानते हैं यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं, तब n व r के प्रत्येक मान के लिए $x^{an+r}, x^{bn+r}, x^{cn+r}$ गुणोत्तर श्रेणी में होंगे।

63. (c) माना $a={}^nC_{r-1}, b={}^nC_r, C={}^nc_{r+1}$ एवं $d={}^nc_{r+2}$, तब इन मानों को रखने पर $\frac{a+b}{a}, \frac{b+c}{b}, \frac{c+d}{c}$ हरात्मक श्रेणी में होंगे।

64. (c) यदि संख्यायें $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ हैं, तो

$x = \log_2 3, y = \log_2 2 . 3 = 1 + \log_2 3$

एवं $z = 2 + \log_2 3$, अर्थात् x, y, z समान्तर श्रेणी में हैं

अतः $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ अर्थात् दी गयी संख्यायें हरात्मक श्रेणी में होंगी।

65. (c) माना संख्यायें $a-d, a, a+d$ हैं

तब $(a-d)^2, a^2, (a+d)^2$ गुणोत्तर श्रेणी में होंगे।

$\therefore a^4 = (a-d)^2(a+d)^2 \Rightarrow d^4 - 2a^2d^2 = 0$

$\Rightarrow d = 0, \pm\sqrt{2}a$

अतः d तीन मान रखता है।

66. (c) $\because a, b, c$ गुणोत्तर श्रेणी में है $\Rightarrow b^2 = ac$ .....(i)

माना $a^x = b^y = c^z = k \Rightarrow a = k^{1/x}, b = k^{1/y}, c = k^{1/z}$

समीरकण (i) में a, b व c के मानों को रखने पर,

$k^{2/y} = k^{1/x}.k^{1/z} = k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}$, अर्थात् $\frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$

$\therefore \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ समान्तर श्रेणी में हैं या x, y, z हरात्मक श्रेणी में हैं।

67. (c) माना दो संख्यायें p व q हैं

$\therefore G_1 = p^{2/3} q^{1/3}, G_2 = p^{1/3} q^{2/3}$

$$\therefore \frac{G_1^2}{G_2} + \frac{G_2^2}{G_1} = \frac{p^{4/3} q^{2/3}}{p^{1/3} q^{2/3}} + \frac{p^{2/3} q^{4/3}}{p^{2/3} q^{1/3}}$$

$$= p + q = 2 \times \left(\frac{p+q}{2}\right) = 2A.$$

68. (a) $\log(x+z) + \log(x+z-2y) = 2\log(x-z)$

$\log(x+z)(x+z-2y) = \log(x-z)^2$

$xz - xy - yz = -xz \Rightarrow 2xz = xy + yz$

xyz से भाग देने पर,

$\frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ अर्थात् $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ समान्तर श्रेणी में हैं

$\Rightarrow x, y, z$ हरात्मक श्रेणी में हैं।

69. (c) $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ हरात्मक श्रेणी में हैं।

अतः इसके व्युत्क्रम $\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ समान्तर श्रेणी में होंगे।

प्रत्येक पद में 1 जोड़ने पर,

$\frac{a+b+c}{a}, \frac{a+b+c}{b}, \frac{a+b+c}{c} \Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ समान्तर श्रेणी में हैं

$\Rightarrow a, b, c$ हरात्मक श्रेणी में होंगे।

70. (a) a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं, अर्थात् $2b = a + c$

माना $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \Rightarrow b - c = a - b \Rightarrow 2b = a + c$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ समान्तर श्रेणी में हैं।

71. (d) माना श्रेणी के तीन पद $a+d, a, a-d$ हैं

$\therefore a + d + a + a - d = 27 \Rightarrow 3a = 27 \Rightarrow a = 9$

अब $(a+d-1), (a-1), (a-d+3)$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं

अतः $(a-1)^2 = (a+d-1)(a-d+3)$

$\Rightarrow 64 = (8+d)(12-d) \Rightarrow 64 = -d^2 + 4d + 96$

$\Rightarrow d^2 - 4d - 32 = 0 \Rightarrow d^2 - 8d + 4d - 32 = 0$

$\Rightarrow (d-8)(d+4) = 0$, $\therefore d = -4, 8$

श्रेणी 5, 9, 13 ($d = -4$ के लिए) एवं 17, 9, 1 ($d = 8$ के लिए) हैं।

$\therefore$ अवरोही समान्तर श्रेणी 17, 9, 1 होगी।

72. (c) p, q, r गुणोत्तर श्रेणी में हैं, $\therefore q^2 = pr$ .....(i)

एवं a, b, c भी गुणोत्तर श्रेणी में हैं, $\therefore b^2 = ac$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से, $q^2b^2 = (pr)(ac)$

$\Rightarrow (bq)^2 = (cp).(ar)$

अतः cp, bq, ar गुणोत्तर श्रेणी में होंगे।

73. (c) यदि $\frac{1}{16}, a, b$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तब

$a^2 = \frac{b}{16}$ या $16a^2 = b$ .....(i)

और यदि $a, b, \frac{1}{6}$ हरात्मक श्रेणी में हैं,

तब $b = \frac{2.a.\frac{1}{6}}{a+\frac{1}{6}} = \frac{2a}{6a+1}$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से, $16a^2 = \frac{2a}{6a+1}$

या $2a\left(8a - \frac{1}{6a+1}\right) = 0$ या $8a(6a+1) - 1 = 0$

या $48a^2 + 8a - 1 = 0$, $(\because a \neq 0)$

या $(4a+1)(12a-1) = 0$, $\therefore a = -\frac{1}{4}, \frac{1}{12}$

जब $a=-\frac{1}{4}$ तब (i) से, $b=16\left(-\frac{1}{4}\right)^2=1$

जब $a=\frac{1}{12}$ तब (i) से, $b=16\left(\frac{1}{12}\right)^2=\frac{1}{9}$

अतः $a=-\frac{1}{4}, b=1$ या $a=\frac{1}{12}, b=\frac{1}{9}$.

74. (b) $a+d>b+c$

$\Rightarrow a+b+c+d>2b+2c \Rightarrow \frac{a+c}{2}+\frac{b+d}{2}>b+c$

$\because \frac{a+c}{2}>b$ एवं $\frac{b+d}{2}>c$, $[\because A>H]$

a तथा c का हरात्मक माध्य b तथा समान्तर माध्य $\frac{a+c}{2}$ है

b तथा d का हरात्मक माध्य c तथा समान्तर माध्य $\frac{b+d}{2}$ है

अतः a, b, c, d हरात्मक श्रेणी में हैं

$\Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ समान्तर श्रेणी में होंगे।

75. (a) माना दो संख्याएं क्रमशः a तथा b हैं

$\Rightarrow$ n समान्तर माध्यों का योग $= n\times$ एक समान्तर माध्य

$\Rightarrow A_1+A_2=2\times\left(\frac{a+b}{2}\right)=a+b$

n गुणोत्तर माध्यों का गुणनफल = (एक गुणोत्तर माध्य)

$\Rightarrow G_1.G_2=(\sqrt{ab})^2=ab$

$\frac{1}{a}, \frac{1}{H_1}, \frac{1}{H_2}, \frac{1}{b}$ समान्तर श्रेणी में हैं

$\Rightarrow \frac{1}{H_1}+\frac{1}{H_2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab} \Rightarrow \frac{H_1H_2}{H_1+H_2}=\frac{G_1G_2}{A_1+A_2}$

$\Rightarrow \frac{G_1G_2}{H_1H_2}\times\frac{H_1+H_2}{A_1+A_2}=1$.

76. (b) समान्तर श्रेणी का प्रथम पद = 1, माना सार्वअन्तर = d

$\therefore T_2=a+d,\ T_{10}=a+9d, T_{34}=a+33d$

$\therefore (a+9d)^2=(a+d)(a+33d)$

$\Rightarrow a^2+81d^2+18ad=a^2+ad+33ad+33d^2$

$a=1$ रखने पर,

$1+81d^2+18d=1+d+33d+33d^2$

$\Rightarrow 48d^2-16d=0 \Rightarrow 16d(3d-1)=0$

$\Rightarrow d=0,\ d=1/3$.

77. (d) a, b, c, d समान्तर श्रेणी में हैं

$\Rightarrow \frac{a}{abcd}, \frac{b}{abcd}, \frac{c}{abcd}, \frac{d}{abcd}$ समान्तर श्रेणी में हैं

$\therefore \frac{1}{bcd}, \frac{1}{acd}, \frac{1}{abd}, \frac{1}{abc}$ समान्तर श्रेणी में है

$\therefore bcd, acd, abd, abc$ हरात्मक श्रेणी में हैं

अतः विपरीत क्रम में abc, abd, acd, bcd हरात्मक श्रेणी में होंगे।

78. (a) $\alpha+\beta=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha\beta)^2}$

$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$ .....(i)

$\alpha+\beta=-b/a$ एवं $\alpha\beta=c/a$

समीकरण (i) में रखने पर,

$\Rightarrow \left(\frac{-b}{a}\right)\left(\frac{c^2}{a^2}\right)=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}$

या $-bc^2=ab^2-2ca^2$ या $2ca^2=ab^2+bc^2$

abc से भाग देने पर, $\frac{2a}{b}=\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$

$\Rightarrow \frac{c}{a}, \frac{a}{b}, \frac{b}{c}$ समान्तर श्रेणी में होंगे।

79. (d) $\frac{T_2}{T_1}=\frac{T_3}{T_2} \Rightarrow 2^{(b-a)x}=2^{(c-b)x} \Rightarrow (b-a)x=(c-b)x$

$\Rightarrow (b-a)=(c-b)$, $\forall x$ तथा $x\neq 0$

$\therefore 2^{ax+1}, 2^{bx+1}, 2^{cx+1}$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं, $\forall$ x तथा $x\neq 0$.

80. (a) माना $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ समान्तर श्रेणी में हैं

प्रत्येक पद में 1 जोड़ने पर,

$\frac{a+b+c}{b+c}, \frac{b+c+a}{c+a}, \frac{c+a+b}{a+b}$ समान्तर श्रेणी में हैं।

प्रत्येक पद को $(a+b+c)$ से भाग देने पर,

$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ समान्तर श्रेणी में हैं।

अतः $b+c, c+a, a+b$ हरात्मक श्रेणी में हैं, जो कि प्रश्न में दिया गया है।

अर्थात् $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ समान्तर श्रेणी में हैं।

81. (a) $\frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{a}{c}$ समान्तर श्रेणी में हैं

$\Rightarrow \frac{2c}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{c} \Rightarrow \frac{2c}{b}=\frac{bc+a^2}{ac} \Rightarrow 2ac^2=b^2c+ba^2$

$\therefore a^2b, c^2a$ एवं b^2c समान्तर श्रेणी में होंगे।

82. (c) $x^2-2ax+b^2=0$ के मूलों का योगफल $2a$ है

$\therefore$ A = मूलों का समान्तर माध्य = a

$x^2-2bx+a^2=0$ के मूलों का गुणनफल a^2 है

इस प्रकार मूलों का गुणोत्तर माध्य $G=a$

अतः $A=G$.

83. (b) $x^2-2Ax+G^2=0$ .....(i)

माना a, b दो संख्याऐं है जिनका समान्तर माध्य A तथा गुणोत्तर माध्य G है

$\therefore A=\frac{a+b}{2}, G^2=ab$

(i) से, $x^2-(a+b)x+ab=0$

$\Rightarrow x^2-ax-bx+ab=0 \Rightarrow x(x-a)-b(x-a)=0$

$\Rightarrow (x-a)(x-b)=0$

$\therefore$ समीकरण के मूल a, b हैं।

$\therefore \ A-G=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}[(a+b)-2\sqrt{ab}]$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0 \Rightarrow A>G$.

84. (d) $2\ln(c-a)=\ln(a+c)+\ln(a-2b+c)$

$\Rightarrow (c-a)^2=(a+c)(a-2b+c)$

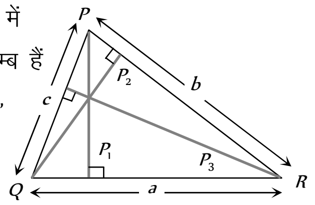
$\Rightarrow c^2+a^2-2ac=(a+c)^2-2b(a+c)$

$\Rightarrow c^2+a^2-2ac=a^2+c^2+2ac-2ab-2bc$

$\Rightarrow b(a+c)=2ac \Rightarrow b=\frac{2ac}{a+c}$.

अतः a, b, c हरात्मक श्रेणी में हैं।

85. (b) माना P_1, P_2, P_3 त्रिभुज में P, Q व R से डाले गये लम्ब हैं



$\therefore \ P_1=c\sin Q=\lambda bc$,

$P_2=a\sin R=\lambda ca$

$P_3=b\sin P=\lambda ab$

$\left[\because \frac{\sin P}{a}=\frac{\sin Q}{b}=\frac{\sin R}{c}=\lambda\right]$

$\Rightarrow P_1, P_2, P_3$ समान्तर श्रेणी में हैं

$\Rightarrow \ \lambda bc, \lambda ca, \lambda ab$ समान्तर श्रेणी में हैं

$\Rightarrow bc, ca, ab$ समान्तर श्रेणी में हैं

$\Rightarrow \frac{abc}{a}, \frac{abc}{b}, \frac{abc}{c}$ समान्तर श्रेणी में हैं

$\Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ समान्तर श्रेणी में हैं

$\therefore a, b, c$ हरात्मक श्रेणी में अर्थात्, त्रिभुज की भुजायें हरात्मक श्रेणी में होंगी।

86. (c) दिया गया है, कि a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हैं

$\Rightarrow \log_x a, \log_x b, \log_x c$ समान्तर श्रेणी में हैं

$\Rightarrow \frac{\log a}{\log x}, \frac{\log b}{\log x}, \frac{\log c}{\log x}$ समान्तर श्रेणी में हैं

$\Rightarrow \frac{\log x}{\log a}, \frac{\log x}{\log b}, \frac{\log x}{\log c}$ हरात्मक श्रेणी में हैं

अर्थात् $\log_a x, \log_b x, \log_c x$ हरात्मक श्रेणी में हैं।

87. (a) a, b, c समान्तर श्रेणी में है $\Rightarrow a+c=2b$ .....(i)

तथा $b-a, c-b, a$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

$\Rightarrow (c-b)^2=(b-a)a \Rightarrow (b-a)(c-b)=(b-a)a$

($\because c-b=b-a$ क्योंकि a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं)

$\Rightarrow c-b=a$, $(\because a\neq b) \Rightarrow b=c-a$ .....(ii)

(i)व (ii) से , $a=\frac{b}{2}$ एवं $c=\frac{3b}{2}$

$\therefore \ a:b:c::\frac{b}{2}:b:\frac{3b}{2} \Rightarrow a:b:c::1:2:3$.

88. (b) $(y-x), 2(y-a), (y-z)$ हरात्मक श्रेणी में हैं

$\Rightarrow \frac{1}{y-x}, \frac{1}{2(y-a)}, \frac{1}{y-z}$ समान्तर श्रेणी में हैं

$\Rightarrow \frac{1}{2(y-a)}-\frac{1}{(y-x)}=\frac{1}{y-z}-\frac{1}{2(y-a)}$

$\Rightarrow \frac{y-x-2y+2a}{(y-x)}=\frac{2y-2a-y+z}{(y-a)-(z-a)}$

$\Rightarrow \frac{-x-y+2a}{(y-x)}=\frac{y+z-2a}{(y-z)}$

$\Rightarrow \frac{(x-a)+(y-a)}{(x-a)-(y-a)}=\frac{(y-a)+(z-a)}{(y-a)-(z-a)}$

$\Rightarrow \frac{(x-a)}{(y-a)}=\frac{(y-a)}{(z-a)}$

$(x-a), (y-a), (z-a)$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

89. (d) a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं,

$\Rightarrow 2b=a+c, b-a=c-b$

अब, a^2, b^2, c^2 हरात्मक श्रेणी में हैं,

$\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}=\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2} \Rightarrow \frac{a^2-b^2}{a^2b^2}=\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}$

$\Rightarrow (a-b)[c^2(a+b)-a^2(b+c)]=0$, $[\because (b-c)=(a-b)]$

$\Rightarrow a=b$ या $c^2a+c^2b-a^2b-a^2c=0$

$\Rightarrow c^2a+c^2b-a^2b-a^2c=0 \Rightarrow ac(c-a)=b(a^2-c^2)$

$\Rightarrow ac=-b(c+a) \Rightarrow -ac=b.2b$

$\Rightarrow b^2=(-a/2)c$, $\therefore -a/2, b, c$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

90. (a) समान्तर माध्य $\geq$ गुणोत्तर माध्य

$\Rightarrow \frac{a_1+a_2+....+a_{n-1}+2a_n}{n}\geq (a_1.a_2,...a_{n-1}2a_n)^{\frac{1}{n}}\geq (2c)^{\frac{1}{n}}$

$\therefore \ a_1+a_2+......+a_{n-1}+2a_n$ का न्यूनतम मान $=n(2c)^{1/n}$.

91. (a) माना धनात्मक संख्यायें a_1 एवं a_2 हैं

a_1, A, a_2 समान्तर श्रेणी में हैं, तब $A=\frac{a_1+a_2}{2}$

a_1, G, a_2 गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तब $G=\sqrt{a_1a_2}$

$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{H}, \frac{1}{a_2}$ हरात्मक श्रेणी में हैं, तब

$\frac{2}{H}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2} \Rightarrow H=\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}$; अतः $H=\frac{G^2}{A}$.

92. (a) माना दो संख्यायें a एवं b हैं

हम जानते हैं, $H=\frac{G^2}{A} \Rightarrow \frac{72}{5}=\frac{576}{A} \Rightarrow A=40$

$a+b=80$ .....(i) एवं $ab=576$ .....(ii)

(i) व (ii) को हल करने पर,

$a-b=64$ .....(iii)

(i) और (iii) को हल करने पर,

$a=72$, $b=8$

$\therefore$ महत्तम संख्या = 72.

93. (a) हम जानते हैं, कि $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-b}=0$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{c-b}=\frac{1}{b-a}-\frac{1}{c}$

$\Rightarrow \frac{c-b+a}{a(c-b)}=\frac{c-b+a}{(b-a)c} \Rightarrow ac-ab=bc-ac$

$\Rightarrow 2ac = ab + bc \Rightarrow \frac{2ac}{a+c} = b$

अर्थात् a, b, c हरात्मक श्रेणी में होंगे।

94. (a) $\because a^2, b^2, c^2$ समान्तर श्रेणी में हैं, तब $b^2 - a^2 = c^2 - b^2$

$\Rightarrow (b-a)(b+a) = (c-b)(c+b)$

$\Rightarrow \frac{b-a}{c+b} = \frac{c-b}{b+a} \Rightarrow \frac{(b-a)(a+b+c)}{(c+a)(b+c)} = \frac{(c-b)(a+b+c)}{(a+b)(c+a)}$

$\Rightarrow \frac{b^2 + bc - ac - a^2}{(c+a)(b+c)} = \frac{c^2 + ac - ab - b^2}{(a+b)(c+a)}$

$\Rightarrow \frac{b}{c+a} - \frac{a}{b+c} = \frac{c}{a+b} - \frac{b}{c+a}$

अतः $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ समान्तर श्रेणी में हैं।

95. (a) p, q, r गुणोत्तर श्रेणी में हैं, $\therefore q^2 = pr$

$\because \tan^{-1} p, \tan^{-1} q, \tan^{-1} r$ समान्तर श्रेणी में हैं।

$\therefore \tan^{-1} p + \tan^{-1} r = 2\tan^{-1} q$

$\Rightarrow p + r = 2q \Rightarrow p, q, r$ समान्तर श्रेणी में हैं

अतः p, q, r समान्तर श्रेणी व गुणोत्तर श्रेणी दोनों में हैं।

यह सम्भव है, यदि $p = q = r$.

96. (b) $\frac{\frac{x+y}{2}}{\sqrt{xy}} = \frac{p}{q}$

$\frac{x+y}{2(\sqrt{xy})} = \frac{p}{q}$ .....(i)

$\frac{x^2 + y^2 + 2xy}{4xy} = \frac{p^2}{q^2}$

$\frac{x^2 + y^2 + 2xy - 4xy}{4xy} = \frac{p^2 - q^2}{q^2}$

$\frac{(x-y)^2}{4xy} = \frac{p^2 - q^2}{q^2}$

$\frac{x-y}{2\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{q}$ .....(ii)

समी. (i) को (ii) से भाग देने पर,

तब $\frac{x+y}{x-y} = \frac{p}{\sqrt{p^2 - q^2}}$; $\frac{x}{y} = \frac{p + \sqrt{p^2 - q^2}}{p - \sqrt{p^2 - q^2}}$.

समान्तरीय गुणोत्तर श्रेणी, अन्तर विधि

1. (d) यह समांतरीय गुणोत्तर श्रेणी है,

माना $S = 1 + 2x + 3x^2 + ... \infty$

$\Rightarrow x.S = x + 2x^2 + ... \infty$

घटाने पर, $(1-x)S = 1 + x + x^2 + ... \infty = \frac{1}{1-x}$

$\therefore S = \frac{1}{(1-x)^2}$.

वैकल्पिक : $S = \left[1 + \frac{r}{1-r} \times \text{समान्तर श्रेणी का अन्तर}\right]\frac{1}{1-r}$ के प्रयोग से हल कर सकते हैं।

2. (d) यह एक समांतरीय गुणोत्तर श्रेणी है,

अतः $S_\infty = \frac{a}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow S_\infty = 4 + 8 = 12$.

3. (d) माना समांतरीय गुणोत्तर श्रेणी के अनन्त पदों तक का योगफल S है,

तब $S = 1 + 4.\frac{1}{5} + 7.\frac{1}{5^2} + 10.\frac{1}{5^3} + ...$

$\Rightarrow \frac{1}{5}S = \frac{1}{5} + 4.\frac{1}{5^2} + 7.\frac{1}{5^3} + ...$

घटाने पर, $\left(1 - \frac{1}{5}\right)S = 1 + 3.\frac{1}{5} + 3.\frac{1}{5^2} + 3.\frac{1}{5^3} + ...$

$= 1 + 3\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + ...\right)$

$\Rightarrow \frac{4}{5}.S = 1 + 3.\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\right) = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow S = \frac{35}{16}$.

वैकल्पिक : सूत्र $S_\infty = \frac{ab}{1-r} + \frac{dbr}{(1-r)^2}$ से,

यहाँ $a = 1, b = 1, d = 3, r = \frac{1}{5}$, इसलिए

$S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} + \frac{3 \times 1 \times \frac{1}{5}}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{4} + \frac{\frac{3}{5}}{\frac{16}{25}} = \frac{5}{4} + \frac{15}{16} = \frac{35}{16}$.

वैकल्पिक: $S = \left[1 + \frac{r}{1-r} \times \text{स.श्रे का अन्तर}\right]\frac{1}{1-r}$ के प्रयोग से हल कर सकते हैं।

4. (d) माना $S = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + ... \infty$

$\Rightarrow x.S = x + 3x^2 + 6x^3 + ... \infty$

घटाने पर, $S(1-x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... \infty$

$\Rightarrow x(1-x)S = x + 2x^2 + 3x^3 + ... \infty$

पुनः घटाने पर,

$S[(1-x) - x(1-x)] = 1 + x + x^2 + x^3 + ... \infty$

$\Rightarrow S[(1-x)(1-x)] = \frac{1}{1-x} \Rightarrow S = \frac{1}{(1-x)^3}$.

5. (b) माना T_n, nवाँ पद है एवं S, n पदों तक का योग है

$S = 1 + 3 + 7 + 15 + 31 + ... + T_n$

पुनः $S = 1 + 3 + 7 + 15 + ... + T_{n-1} + T_n$

घटाने पर, $0 = 1 + \{2 + 4 + 8 + ...(T_n - T_{n-1})\} - T_n$

$\therefore T_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... n$ पदों तक

$T_n = \frac{1(2^n - 1)}{2-1} = 2^n - 1$

अब, $S = \Sigma T_n = \Sigma 2^n - \Sigma 1$

$$S = (2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n) - n$$

$$S = 2\left(\frac{2^n - 1}{2-1}\right) - n = 2^{n+1} - 2 - n.$$

वैकल्पिक : $1 + 3 + 7 + ... + T_n$

$$= 2 - 1 + 2^2 - 1 + 2^3 - 1 + ... + 2^n - 1$$

$$= (2 + 2^2 + ... + 2^n) - n = 2^{n+1} - 2 - n.$$

ट्रिक : $n = 1, 2$ के लिए परीक्षण करें ।

6. (b) यहाँ $S = 2 + 4 + 7 + 11 + 16 + ... + T_n$

पुनः $S = \quad 2 + 4 + 7 + 11 + ... + T_{n-1} + T_n$

घटाने पर, $0 = 2 + \{2 + 3 + 4 + 5 + ...(T_n - T_{n-1})\} - T_n$

$$T_n = 2 + \frac{1}{2}(n-1)(4 + \{n-2\}1\} = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

अब, $S = \Sigma T_n = \frac{1}{2}\Sigma(n^2 + n + 2) = \frac{1}{2}(\Sigma n^2 + \Sigma n + 2\Sigma 1)$

$$S = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) + 2n\right\}$$

$$S = \frac{n}{12}\{(n+1)(2n+1+3) + 12\}$$

$$S = \frac{n}{6}\{(n+1)(n+2) + 6\} = \frac{n}{6}(n^2 + 3n + 8).$$

7. (d) माना श्रेणी का n वाँ पद T_n है, तब

$S_n = 12 + 16 + 24 + 40 + ... + T_n$

पुनः $S_n = \quad 12 + 16 + 24 + ... + T_n$

घटाने पर, $0 = (12 + 4 + 8 + 16 + ... + n$ पदों तक $) - T_n$

या $T_n = 12 + [4 + 8 + 16 + ... + (n-1)$ पदों तक$]$

$$= 12 + \frac{4(2^{n-1} - 1)}{2-1} = 2^{n+1} + 8$$

$n = 1, 2, 3......$ रखने पर,

$T_1 = 2^2 + 8$, $T_2 = 2^3 + 8$, $T_3 = 2^4 + 8......$ आदि।

$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_n$

$S_n = (2^2 + 2^3 + 2^4 + ...n$ पदों तक$)$

$+(8 + 8 + 8 + ... n$ पदों तक$)$

$$S_n = \frac{2^2(2^n - 1)}{2-1} + 8n = 4(2^n - 1) + 8n.$$

8. (d) a, b, c हरात्मक श्रेणी में हैं $\Rightarrow b = \frac{2ac}{a+c}$

निरीक्षण से, (a) असत्य (b) असत्य (c) असत्य।

9. (d) माना, $S = 1 + \frac{1.3}{6} + \frac{1.3.5}{6.8} + ...\infty$

$$\Rightarrow \frac{S}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.6} + \frac{1.3.5}{4.6.8} + ...\infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{S}{8} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{4} - \frac{1}{2}.\frac{1.3}{4.6} - \frac{1}{2}\frac{1.3.5}{4.6.8} - ....\infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{S}{8} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{1.2} - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)}{1.2.3} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)\left(\frac{1}{2} - 3\right)}{1.2.3.4}....\infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{S}{8} = (1-1)^{1/2} = 0 \Rightarrow \frac{S}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow S = 4.$$

10. (c) माना $S = 2 + 4 + 7 + 11 + 16 + ... + T_n$

$S = \quad 2 + 4 + 7 + 11 + 16 + ... T_{n-1} + T_n$

घटाने पर,

$0 = 2 + \{2 + 3 + 4 + ... + (T_n - T_{n-1})\} - T_n$

$\Rightarrow T_n = 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + ...n$ पदों तक$)$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{2 + n^2 + n}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

11. (a) माना S_n दी गयी श्रेणी के n पदों तक का योगफल है, तब

$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + nx^{n-1}$ .....(i)

$xS_n = \quad x + 2x^2 + 3x^2 + ... + nx^n$ .....(ii)

समीकरण (i) में से (ii) को घटाने पर,

$(1-x)S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + ... n$ पदों तक $- nx^n$

$$= \left(\frac{(1-x^n)}{(1-x)}\right) - nx^n$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{(1-x^n) - nx^n(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

12. (c) प्रथम n पदों तक का योग =

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) + ... + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= n - \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}\right\}$$

$$= n - \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = n - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = n - 1 + 2^{-n}.$$

ट्रिक: $n = 1, 2$ के लिए निरीक्षण करने पर अर्थात्

$S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{5}{4}$ तथा विकल्प (c) $\Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}$

व $S_2 = 2 + 2^{-2} - 1 = \frac{5}{4}$.

13. (a) माना $S_n = 1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{4}{5^3} + ... + \frac{n}{5^{n-1}}$

$$\frac{1}{5}S_n = \quad \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + ... + \frac{n}{5^n}$$

घटाने पर,

$\left(1 - \frac{1}{5}\right)S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + ... + n$ पदों तक $- \frac{n}{5^n}$

$$\Rightarrow \frac{4}{5}S_n = \frac{1 - \frac{1}{5^n}}{\frac{4}{5}} - \frac{n}{5^n} \Rightarrow S_n = \frac{25}{16} - \frac{4n + 5}{16 \times 5^{n-1}}.$$

14. (b) $2^{1/4}.4^{1/8}.8^{1/16}.16^{1/32}.....\infty$

$= 2^{1/4+2/8+3/16+......} = 2^S$, जहाँ S निम्न प्रकार है

$$S = \frac{1}{4} + 2\frac{1}{8} + 3\frac{1}{16} + 4\frac{1}{32} + ... \infty \quad ......(i)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}S = \frac{1}{8} + \frac{2}{16} + \frac{3}{32} + \frac{4}{64} + ... \infty \quad ......(ii)$$

(ii) को (i) मे से घटाने पर, $S = 1$

अतः अभीष्ट गुणनफल $= 2^1 = 2$.

15. (a) माना $S = i - 2 - 3i + 4 + 5i + ... + 100\,i^{100}$

$\Rightarrow S = i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + 5i^5 + ... + 100\,i^{100}$

$\Rightarrow iS = i^2 + 2i^3 + 3i^4 + 4i^5 + ... + 99\,i^{100} + 100\,i^{101}$

$\therefore S - iS = [i + i^2 + i^3 + i^4 + ... + i^{100}] - 100\,i^{101}$

$\Rightarrow S(1-i) = 0 - 100\,i^{101} = -100\,i$

$\therefore S = \frac{-100\,i}{1-i} = -50\,i(1+i) = -50(i-1) = 50(1-i)$.

16. (a) माना $S = 2 + 7 + 14 + 23 + 34 + ... + T_n$ ......(i)

एवं $S = 2 + 7 + 14 + ... + T_{n-1} + T_n$ ......(ii)

(i) व (ii) से,

$0 = 2 + [5 + 7 + 9 + 11 .... + T_n - T_{n-1}] - T_n$

$\Rightarrow T_n = 2 + \left[\frac{n-1}{2}\{2 \times 5 + (n-2)2\}\right]$

$\Rightarrow T_n = 2 + (n-1)(n+3)$

$n = 99$ रखने पर, $T_{99} = 2 + 98 \times 102 = 9998$.

17. (a) सममिति से हम देखते हैं, कि S_{50}, 50 पद रखता है $S_1, S_2, S_3, S_4,$.......... .. के प्रथम पद क्रमशः 1, 2, 4, 7....... हैं। यदि n वें समुच्चय का प्रथम पद T_n है, तब

$S = T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_n$

$\Rightarrow S = 1 + 2 + 4 + 7 + 11 + ... + T_{n-1} + T_n$

या $S = 1 + 2 + 4 + 7 + ... + T_{n-1} + T_n$

अतः घटाने पर,

$0 = 1 + [1 + 2 + 3 + 4 + ... + (T_n - T_{n-1})] - T_n$

या $0 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} - T_n \Rightarrow T_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$

$\Rightarrow T_{50} = S_{50}$ में प्रथम पद $= 1226$

अतः S_{50} में पदों का योगफल

$= \frac{50}{2}\{2 \times 1226 + (50-1) \times 1\}$

$= 25(2452 + 49) = 25(2501) = 62525$.

n वें पदों की विशेष श्रेणियाँ, n पदों का योग और अनन्त पदों का योग

1. (d) $T_n = \frac{1}{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]} = 2\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right]$

$n = 1, 2, 3, ..., (n+1)$ रखने पर,

$T_1 = 2\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right],\ T_2 = 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right], ...,$

$T_{n+1} = 2\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right]$

अतः $(n+1)$ पदों का योग $= \sum_{k=1}^{n+1} T_k$

$\Rightarrow S_{n+1} = 2\left[1 - \frac{1}{n+2}\right] \Rightarrow S_{n+1} = \frac{2(n+1)}{(n+2)}$.

2. (c) माना श्रेणी का nवाँ पद $T_n = 2\sum n - \sum 1$

$\Rightarrow T_n = \frac{2n(n+1)}{2} - n = n^2$

$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{n}(k^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

अतः $(n-1)$ पदों का योग $S_{n-1} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

3. (b) जब n विषम है तो अन्तिम पद अर्थात् n वाँ पद n^2 होगा। इस स्थिति में $(n-1)$ सम होगा। अतः प्रथम $n-1$ पदों का योग n की जगह $(n-1)$ रखने पर प्राप्त होता है। अतः यह $\frac{1}{2}(n-1)n^2$ है।

अतः n पदों का योग $= (n-1$ पदों का योग$) + n$वाँ पद

$$= \frac{1}{2}(n-1)n^2 + n^2 = \frac{1}{2}(n+1)n^2.$$

ट्रिक: $n = 1, 3$ के लिए परीक्षण करने पर यहाँ $S_1 = 1, S_3 = 18$ जो कि (b) देता है।

4. (b) $2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2n)^2$

$= 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2)$

$= \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$.

5. (d) यहाँ $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$

अतः $S_n = \frac{1}{2}\{\Sigma n^2 + \Sigma n\} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

6. (a) $T_n = n^2 + n \Rightarrow S_n = \Sigma T_n = \Sigma n^2 + \Sigma n$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{n(n+1)}{6}\{2n + 1 + 3\} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

7. (c) $S_n = 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + ... + n(n!)$

$= (2-1)(1!) + (3-1)(2!) + (4-1)(3!) + ... + [(n+1)-1](n!)$

$= (2.1! - 1!) + (3.2! - 2!) + (4.3! - 3!) + ... + [(n+1)(n!) - (n!)]$

$= (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + ... + [(n+1)! - (n)!]$

$= (n+1)! - 1!$.

8. (b) $\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+........+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

9. (b) $S=3.6+4.7+.......$ $(n-2)$ पदों तक

$=(1.4+2.5+3.6+4.7+.........$ n पदों तक) – 14

$=\Sigma n(n+3)-14=\frac{1}{6}(2n^3+12n^2+10n)-14$

$=\left(\frac{2n^3+12n^2+10n-84}{6}\right)$, जहाँ $n=3, 4, 5.......$

ट्रिक : $S_1=18, S_2=46$

अब विकल्पों में $(n-2)=1, 2$ अर्थात् $n=3, 4$ रखने पर, स्पष्टतः विकल्प (b) मान देता है।

10. (a) $3\sum_{i=1}^{n} i-2\sum_{i=1}^{n} 1=3\frac{n(n+1)}{2}-2n=\frac{n(3n-1)}{2}$.

11. (b) $T_n=n^2(n+1)=n^3+n^2$

$S_n=\Sigma T_n=\Sigma n^3+\Sigma n^2=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=\frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2n+1}{3}\right]=\frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{12}$.

12. (c) $T_n=n(n+1)(n+2)=n(n^2+3n+2)=n^3+3n^2+2n$

$\therefore S_n=\Sigma(n^3)+\Sigma(3n^2)+\Sigma(2n)$

$S_n=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+\frac{3.n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2.n(n+1)}{2}$

$S_n=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

13. (c) 'n' प्राकृत संख्याओं के घनों का योग

$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{15^2(16)^2}{4}=14400$.

14. (b) $\Sigma n^2=330+\Sigma n$

$\Rightarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=330+\frac{n(n+1)}{2}$

$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2n+1}{3}-1\right]=330$

$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}.\frac{2(n-1)}{3}=330$

$\Rightarrow n(n+1)(n-1)=990 \Rightarrow n=10$.

15. (d) माना

$S=3+7+13+21+........+T_n \Rightarrow T_n=n^2+n+1$.

माना $T_r=\cot^{-1}(r^2+r+1)=\tan^{-1}(r+1)-\tan^{-1}r$.

$r=1, 2,........., n$ रखकर जोड़ने पर,

$\tan^{-1}(n+1)-\tan^{-1}1=\tan^{-1}\left(\frac{n}{n+2}\right)=\cot^{-1}\left(\frac{n+2}{n}\right)$.

16. (b) $T_n=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$. यह n वीं पंक्ति का प्रथम पद है एवं n वीं पंक्ति के पद समान्तर श्रेणी बनाते हैं जिसका प्रथम पद $\frac{1}{2}(n^2-n+2)$ एवं सार्वअन्तर 1 है अतः nवीं पंक्ति के पदों का योग $\frac{n}{2}\left[2.\frac{1}{2}(n^2-n+2)+(n-1)1\right]=\frac{n}{2}(n^2+1)$.

17. (a) दी गयी श्रेणी $\frac{1}{1}+\frac{1+2}{2}+\frac{1+2+3}{3}+......$ है, जिसका

nवाँ पद $T_n=\frac{1+2+3+.......+n}{n}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n}=\frac{n+1}{2}$.

18. (a) हम जानते हैं, कि

$\left\{\frac{n}{2}(n+1)\right\}^2=(1+2+......+n)^2=\sum_{r=1}^{n} r^2+2\sum_{s<t} st$

$\Rightarrow \sum_{s<t} st=\frac{1}{2}\left\{\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$

$=\frac{n}{24}(n-1)(n+1)(3n+2)$.

ट्रिक : $S_n=1.2+2.3+3.4+........+(n-1).n$

विकल्पों में $(n-1)=1, 2$ अर्थात् $n=2, 3$ रखकर परीक्षण करें।

19. (a) यहाँ समान्तर श्रेणी 1, 2, 3, ... का n वाँ पद $T_n=n$

एवं समान्तर श्रेणी 3, 5, 7,........ का n वाँ पद $T_n=2n+1$

$\therefore T_n=n(2n+1)^2=4n^3+4n^2+n$

अतः $S=\sum_{1}^{20} T_n=4\sum_{1}^{20} n^3+4\sum_{1}^{20} n^2+\sum_{1}^{20} n$

$=4\cdot\frac{1}{4}20^2\cdot 21^2+4\cdot\frac{1}{6}20\cdot 21\cdot 41+\frac{1}{2}20\cdot 21=188090$.

20. (a) $\frac{1^3+2^3+3^3+4^3+.........+12^3}{1^2+2^2+3^2+4^2+........+12^2}$

$=\frac{\left(\sum_{n=1}^{12} n^3\right)}{\left(\sum_{n=1}^{12} n^2\right)}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2\times\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$

$=\frac{3}{2}.\frac{n(n+1)}{(2n+1)}=\frac{3}{2}.\frac{12.13}{25}=\frac{234}{25}$, [$n=12$ रखने पर].

21. (c) $T_n=\frac{(2n+1)}{n(n+1)(2n+1)/6}=\frac{6}{n(n+1)}$

$S_n=\Sigma(T_n)=\Sigma 6\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]=6\left[1-\frac{1}{n+1}\right]$

$S_n=\frac{6n}{n+1}$.

22. (a) दी गयी श्रेणी है,

$1.3.5+2.5.8+3.7.11+.......+n(2n+1)(3n+2)$

अतः $T_n=n(2n+1)(3n+2)=n[6n^2+4n+3n+2]$

$T_n=6n^3+7n^2+2n$

अब योग $=6\Sigma n^3+7\Sigma n^2+2\Sigma n$

$= 6\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2 + 7\left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right] + 2\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]$

$= \frac{1}{6}n(n+1)[9n(n+1) + 7(2n+1) + 6]$

$= \frac{1}{6}n(n+1)[9n^2 + 9n + 14n + 7 + 6]$

$= \frac{n(n+1)(9n^2 + 23n + 13)}{6}$.

23. (d) $T_n = \frac{3^n - 1}{3^n} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$S_n = n - \sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = n - \frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{\left(1-\frac{1}{3}\right)}$

$= n - \frac{1}{2}(1 - 3^{-n}) = n + \frac{1}{2}(3^{-n} - 1)$.

24. (c) यह $\Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ का रूप है।

25. (b) दी गई श्रेणी के प्रथम खण्ड के पद 1, 2, 3, 4........n तथा द्वितीय खण्ड के पद 2, 3, 4, 5..........$(n+1)$ हैं।

$\therefore$ दी गई श्रेणी का n वाँ पद $= n(n+1) = n^2 + n$

अतः योगफल $= \Sigma n^2 + \Sigma n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{n}{2}(n+1)$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

26. (b) $\sum_{n=1}^{20}(n^3) - \sum_{n=1}^{10}(n^3) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2_{n=20} - \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2_{n=10}$

$\Rightarrow \left[\frac{20\times 21}{2}\right]^2 - \left[\frac{10\times 11}{2}\right]^2 = 44100 - 3025 = 41075.$

27. (a) यह समांतरीय गुणोत्तर श्रेणी है, जिसका nवाँ पद

$= T_n = n(2n+1)^2 = 4n^3 + 4n^2 + n$

$\therefore S_n = \sum_1^n T_n = \sum_1^n (4n^3 + 4n^2 + n)$

$= 4\sum_1^n n^3 + 4\sum_1^n n^2 + \sum_1^n n$

$= 4\left\{\frac{n}{2}(n+1)\right\}^2 + \frac{4}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{n}{2}(n+1)$

$= \frac{n}{6}(n+1)(6n^2 + 14n + 7)$.

28. (b) यहाँ $T_n = 3 + n(n-1) = 3 + n^2 - n$

अब योग $S = \Sigma T_n = \Sigma(3 + n^2 - n)$

$= 3n + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{1}{6}n(n+1)[2n+1-3] + 3n = \frac{n^3 + 8n}{3}$.

29. (d) $S = (2n-1) + 2(2n-3) + 3(2n-5) + ...$

$S = [2n + 2.2n + 3.2n + ... + n.2n] -$

$[1 + 2.3 + 3.5 + ... + n.(2n-1)]$

माना $S_1 = 2n(1 + 2 + 3 + ... + n) = \frac{2n.n(n+1)}{2} = n^2(n+1)$

एवं $S_2 = 1 + 2.3 + 3.5 + ... + n.(2n-1)$

$T_n = n(2n-1) = 2n^2 - n$

$\therefore S_2 = \Sigma(2n^2 - n) = 2\Sigma(n^2) - \Sigma(n)$

$= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore S = S_1 - S_2 = n^2(n+1) - \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$

$= n(n+1)\left[n - \frac{2n+1}{3} + \frac{1}{2}\right]$

$= n(n+1)\left[\frac{6n - 4n - 2 + 3}{6}\right] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

30. (c) श्रेणी

$1 + 2 + 5 + 10 + 17 + 26 + 37 + 50 + 65 + 82 + 101 + ...$

का 11वाँ पद अभीष्ट पद है।

वैकल्पिक : श्रेणी $1 + 2 + 5 + 10 + 17 + ...$ का n वाँ पद $(n-1)^2 + 1$ है

$\therefore T_{11} = 10^2 + 1 = 101$.

31. (c) अभीष्ट योग $= \Sigma(20)^2 - \Sigma(10)^2 = 2870 - 385 = 2485$.

32. (b) दी गयी श्रेणी है,

$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ...$

अतः श्रेणी के अनन्त पदों का योग 1 है।

33. (c) $T_n = \frac{\frac{n(n+1)}{2.2}}{1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3} = \frac{\frac{n(n+1)}{4}}{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$

$= \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$\therefore S_n = \sum\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

34. (a) $T_n = \frac{1 + 2 + 3 + ... + n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{1}{2}(n+1)$

अतः $S = \frac{1}{2}(\Sigma n + n) = \frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2} + n\right\} = \frac{n(n+3)}{4}$.

35. (b) दी गयी श्रेणी है,

$\frac{2}{1!} + \frac{(2+5)}{2!} + \frac{(2+5+8)}{3!} + \frac{(2+5+8+11)}{4!} + ...$

अतः $T_n = \frac{(2 + 5 + 8 + ... n \text{ पदों तक})}{n!} = \frac{\frac{n}{2}[2.2 + (n-1)3]}{n!}$

$T_n = \frac{n(3n+1)}{2(n)!}$.

36. (d) $t_n = \frac{1}{4}(n+2)(n+3)$, तब $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + ... + \frac{1}{t_{2003}}$

$$= 4\left[\frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + ... + \frac{1}{(2005).(2006)}\right]$$

$$= 4\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2006}\right] = 4.\frac{2003}{3(2006)} = \frac{4006}{3009}.$$

37. (a) $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + ...\infty = \frac{\pi^4}{90}$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + ... + \infty + \frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + ...\infty\right)$$

$$= \frac{\pi^4}{90}$$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + ... + \infty + \frac{1}{16} \times \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\therefore \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + ... + \infty = \frac{\pi^4}{90} - \frac{1}{16}\left(\frac{\pi^4}{90}\right)$$

$$= \frac{15}{16}\left(\frac{\pi^4}{90}\right) = \frac{\pi^4}{96}.$$

38. (a) दी गई श्रेणी है, $\frac{1}{(1+a)(2+a)}$

$+\frac{1}{(2+a)(3+a)}+\frac{1}{(3+a)(4+a)}+.....+\infty$

श्रेणी का n वाँ पद =

$$T_n=\frac{1}{(n+a)(n+1+a)}=\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n+1+a}$$

$$T_1=\frac{1}{1+a}-\frac{1}{2+a};T_2=\frac{1}{2+a}-\frac{1}{3+a},$$

$$T_3=\frac{1}{3+a}-\frac{1}{4+a}$$

....

....

$$T_{n-1}=\frac{1}{n-1+a}-\frac{1}{n+a},\ T_n=\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n+1+a}$$

$$\therefore S_n=T_1+T_2+T_3+......+T_n$$

$$=\frac{1}{1+a}-\frac{1}{n+1+a}=\frac{n}{(1+a)(n+1+a)}$$

$$S_n=\frac{1}{(1+a)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{a}{n}\right)}$$

$S_\infty=S_n$, जब $n\to\infty$

$$\therefore\ S_\infty=\frac{1}{(1+a)}.$$

Critical Thinking Questions

1. (b) माना $\angle A=x^0$, तब $\angle B=x+10^o$,

$\angle C=x+20^o$ एवं $\angle D=x+30^o$

परन्तु $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=2\pi$

अतः $(x^o)+(x^o+10^o)+(x^o+20^o)+(x^o+30^o)=360^o$

$\Rightarrow x=75^o$

अतः चुर्तभुज के कोण $75^o, 85^o, 95^o, 105^o$ हैं।

ट्रिक : इस प्रकार के प्रश्नों में विद्यार्थी को विकल्पों द्वारा प्रतिबंधों को संतुष्ट करना चाहिये। यहाँ विकल्प (b) दोनों प्रतिबंधों को सन्तुष्ट करता है, अर्थात् कोण समान्तर श्रेणी में हैं जिसका सार्वअन्तर 10^o है व कोणों का योग 360^o है।

2. (a) दिया है, $\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=\frac{m}{2}\{2a+(m-1)d\}$

$\Rightarrow 2a(m-n)+d(m^2-m-n^2+n)=0$

$\Rightarrow (m-n)\{2a+d(m+n-1)\}=0$

$\Rightarrow 2a+(m+n-1)d=0$, $(\because m\ne n)$

$$\therefore\ S_{m+n}=\frac{m+n}{2}\{2a+(m+n-1)d\}=\frac{m+n}{2}\{0\}=0.$$

3. (a) p,q,r धनात्मक तथा समान्तर श्रेणी में हैं

$\therefore q=\frac{p+r}{2}$ ......(i)

$\because$ समी. $px^2+qx+r=0$ के मूल वास्तविक हैं,

अतः $q^2\ge 4pr\Rightarrow\left[\frac{p+r}{2}\right]^2\ge 4pr$ [(i) से]

$\Rightarrow p^2+r^2-14pr\ge 0$

$\Rightarrow\left(\frac{r}{p}\right)^2-14\left(\frac{r}{p}\right)+1\ge 0$ $(\because p>0$ व $p\ne 0)$

$\Rightarrow\left(\frac{r}{p}-7\right)^2-48\ge 0\Rightarrow\left(\frac{r}{p}-7\right)^2-(4\sqrt{3})^2\ge 0$

$\Rightarrow\left|\frac{r}{p}-7\right|\ge 4\sqrt{3}$.

4. (b) यहाँ $a_1=a_2=a_3=1$ एवं $d_1=1, d_2=2, d_3=3$

अतः $S_1=\frac{n}{2}(n+1)$ ......(i)

$S_2=\frac{n}{2}[2n]$ ......(ii)

$S_3=\frac{n}{2}[3n-1]$ ......(iii)

(i) व (iii) को जोड़ने पर,

$$S_1+S_3=\frac{n}{2}[(n+1)+(3n-1)]=2\left[\frac{n}{2}(2n)\right]=2S_2$$

अतः सही सम्बन्ध $S_1+S_3=2S_2$ है।

5. (d) $\log_a x+2\log_a x+.......+a\log_a x=\frac{a+1}{2}$

$\Rightarrow\ \log_a x(1+2+........+a)=\frac{a+1}{2}$

$\Rightarrow\ \log_a x.\frac{a(a+1)}{2}=\frac{a+1}{2}\Rightarrow\ x=a^{1/a}$.

6. (c) जयराम को 10000 रू की किश्त भरने में 10 साल लगेंगे।

चूंकि वह 10% वार्षिक दर पर बचे हुए भुगतान पर ब्याज देता है अतः प्रथम वर्ष में दिया गया भुगतान

$=1000+\frac{10000\times 10}{100}=2000$ रूपये

द्वितीय वर्ष में दिया गया भुगतान = 1000 + (10000 – 1000) का 10% वार्षिक दर से ब्याज $=1000+\frac{9000\times 10}{100}=1900$ रूपये

तृतीय वर्ष में दिया गया भुगतान =1800 रू, इत्यदि।

अतः जयराम द्वारा 10 वर्षों में दिया गया भुगतान 2000 रूपये 1900 रूपये, 1800 रूपये, 1700 रूपये........है जो कि समांतर श्रेणी में है, जिसका प्रथम पद $a=2000$ तथा $d=-100$

अतः कुल रूपये जिनका 10 वर्षों में भुगतान किया गया

$=\frac{10}{2}[2(2000)+(10-1)(-100)]$ = 15500 रूपये

अतः जयराम द्वारा दिये गये कुल रूपये

$=5000+15500=20500$ रूपये।

7. (b,c,d) दिया है $x_n=x_{n+1}\sqrt{2}$

$\therefore x_1=x_2\sqrt{2}, x_2=x_3\sqrt{2}, x_n=x_{n+1}\sqrt{2}$

गुणा करने पर $x_1 = x_{n+1}(\sqrt{2})^n \Rightarrow x_{n+1} = \frac{x_1}{(\sqrt{2})^n}$

अतः $x_n = \frac{x_1}{(\sqrt{2})^{n-1}}$; S_n का क्षेत्रफल $= x_n^2 = \frac{x_1^2}{2^{n-1}} < 1$

$\Rightarrow 2^{n-1} > x_1^2 \quad (x_1 = 10)$

$\therefore 2^{n-1} > 100$ किन्तु $2^7 > 100, 2^8 > 100$, इत्यादि

$\therefore n-1 = 7, 8, 9..... \Rightarrow n = 8, 9, 10.....$

8. (a) यहाँ $a = 1, 2, 3, ..., m$; $d = 1, 3, 5, ..., 2m-1$ एवं $n = n$, $\therefore S_1 + S_2 + ... + S_m = \frac{1}{2}mn(mn+1)$.

$\left[S = \frac{m}{2}(a+l)\right.$, चूंकि $S_1, S_2, S_3, ... S_m$ समान्तर श्रेणी बनाते हैं$\left.\right]$

9. (d) $a_1 + a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} + a_{24} = 225$

$\Rightarrow (a_1 + a_{24}) + (a_5 + a_{20}) + (a_{10} + a_{15}) = 225$

$\Rightarrow 3(a_1 + a_{24}) = 225 \Rightarrow a_1 + a_{24} = 75$

($\because$ समान्तर श्रेणी में प्रांरभ तथा अंत से बराबर दूरी पर स्थित पदों का योग समान होता है और यह प्रथम तथा अन्तिम पद के योग के बराबर होता है।)

$a_1 + a_2 + ... + a_{24} = \frac{24}{2}(a_1 + a_{24}) = 12 \times 75 = 900$.

10. (c) माना समीकरण $x^3 - 12x^2 + 39x - 28 = 0$ के मूल $a-d, a, a+d$ हैं,

तब $(a-d)+a+(a+d)=12$ एवं $(a-d)a(a+d)=28$

$\Rightarrow 3a = 12$ एवं $a(a^2 - d^2) = 28$

$\Rightarrow a = 4$ एवं $a(a^2 - d^2) = 28$

$\Rightarrow 16 - d^2 = 7 \Rightarrow d = \pm 3$.

11. (a) $a_1 = 1, a_2 = r, a_3 = r^2, ...$

$\therefore 4a_2 + 5a_3 = 4r + 5r^2$

इसके निम्निष्ठ मान के लिए, $\frac{d}{dr}(4r + 5r^2) = 0 \Rightarrow r = \frac{-2}{5}$.

12. (d) दिया है, $S = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ......(i)

$P = a(ar)(ar^2)......... .(ar^{n-1}) = a^n r^{1+2+......... +(n-1)}$

$= a^n r^{(n-1)n/2}$, अर्थात् $P^2 = a^{2n} r^{n(n-1)}$ ......(ii)

एवं $R = \frac{1}{a} + \frac{1}{ar} + \frac{1}{ar^2} + ...$ n पदों तक

$= \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + ...\ n \text{ पदों तक}\right)$

$= \frac{\frac{1}{a}\left[\left(\frac{1}{r}\right)^n - 1\right]}{\left(\frac{1}{r} - 1\right)}$, $\left(\because \frac{1}{r} > 1 \text{ यदि } r < 1\right)$

$= \frac{(1-r^n)}{ar^{n-1}(1-r)}$ .... (iii)

अतः $\frac{S}{R} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \times \frac{ar^{n-1}(1-r)}{(1-r^n)} = a^2 r^{n-1}$

या $\left(\frac{S}{R}\right)^n = (a^2 r^{n-1})^n = a^{2n} r^{n(n-1)} = P^2$.

13. (c) चूँकि $n^m + 1$, $1 + n + n^2 + ... + n^{127}$ को विभाजित करता है

इसलिए $\frac{1 + n + n^2 + ... + n^{127}}{n^m + 1}$ एक पूर्णांक होगा

$\Rightarrow \frac{1 - n^{128}}{1-n} \times \frac{1}{n^m + 1}$ एक पूर्णांक होगा

$\Rightarrow \frac{(1-n^{64})(1+n^{64})}{(1-n)(n^m+1)}$, जो कि अधिकतम $m = 64$ के लिए पूर्णांक होगा।

14. (c) यदि दी गई गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद a, सार्वअनुपात r व पदों की संख्या $2n$ है, तो

$a\frac{(r^{2n} - 1)}{(r-1)} = 5a\frac{(r^{2n} - 1)}{(r^2 - 1)} \Rightarrow r + 1 = 5 \Rightarrow r = 4$.

15. (a) चूँकि $f(x+y) = f(x)f(y)$, $x, y \in N$ के समस्त मानों के लिए, इसलिए $x \in N$ के किसी भी मान के लिए

$f(x) = f(x-1+1) = f(x-1)f(1)$

$= f(x-2)[f(1)]^2 = ... = [f(1)]^x$

$\Rightarrow f(x) = 3^x$, ($\because f(1) = 3$)

अब $\sum_{x=1}^{n} f(x) = 120 \Rightarrow \sum_{x=1}^{n} 3^x = 120$

$\Rightarrow \frac{3(3^n - 1)}{(3-1)} = 120 \Rightarrow n = 4$.

16. (c) यहाँ $G = (ab)^{1/2}$ एवं $G_1 = ar^1, G_2 = ar^2, ..., G_n = ar^n$

अतः $G_1 . G_2 . G_3 ..... G_n = a^n r^{1+2+...+n} = a^n r^{n(n+1)/2}$

परन्तु $ar^{n+1} = b \Rightarrow r = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/(n+1)}$

अतः अभीष्ट गुणनफल

$= a^n \left(\frac{b}{a}\right)^{1/(n+1) . n(n+1)/2} = (ab)^{n/2} = \{(ab)^{1/2}\}^n = G^n$.

नोट : यह एक तथ्य है।

17. (c) चूँकि $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ एक आरोही गुणोत्तर श्रेणी बनाते हैं,

अतः $\alpha\delta = \beta\gamma$ जहाँ $\alpha < \beta < \gamma < \delta$

$x^2 - 3x + a = 0$ को हल करने पर, $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{9-4a})$

$\because \alpha < \beta$, अतः $\alpha = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{9-4a})$, $\beta = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{9-4a})$

इसी प्रकार $x^2 - 12x + b = 0$ से,

$\gamma = \frac{1}{2}(12 - \sqrt{144 - 4b})$, $\delta = \frac{1}{2}(12 + \sqrt{144 - 4b})$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ के मानों को $\alpha\delta = \beta\gamma$ में रखने पर, $(a, b) = (2, 32)$.

ट्रिक : विकल्पों द्वारा निरीक्षण से केवल विकल्प (c) प्रतिबन्ध को संतुष्ट करता है।

18. (c) दिया है, $2.\dot{3}\dot{5}\dot{7} = 2.3573573573\ 57......$

$= 2 + 0.357 + 0.000357 + 0.000000357 + ...\infty$

$= 2 + \frac{357}{10^3} + \frac{357}{10^6} + \frac{357}{10^9} + ...$

$\therefore S_\infty = 2 + \frac{\frac{357}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} = 2 + \frac{357}{10^3} \times \frac{10^3}{999} = \frac{2355}{999}$.

19. (d) $1-\cos\alpha=\frac{1}{2-\sqrt{2}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{3\pi}{4} \Rightarrow \alpha=\frac{3\pi}{4}$.

20. (b) $5=\frac{x}{1-r}$

$\Rightarrow 5-5r=x \Rightarrow r=1-\frac{x}{5}$

$|r|<1$ अर्थात्, $\left|1-\frac{x}{5}\right|<1 \Rightarrow -1<1-\frac{x}{5}<1$

$-5<(5-x)<5 \Rightarrow -10<-x<0 \Rightarrow 10>x>0$

अर्थात्, $0<x<10$.

21. (c) a, b, c हरात्मक श्रेणी में हैं, तब $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ समान्तर श्रेणी में होंगे

$\Rightarrow \frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$

अब $\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{3}{b}-\frac{2}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right)=\frac{3}{b^2}-\frac{2}{ab}$.

22. (b) प्रश्नानुसार, $(1-ab)m^2-(a^2+b^2)m-(1+ab)=0$

$\Rightarrow m(a^2+b^2)+(m^2+1)ab=m^2-1$ ......(i)

अब $H_1=a$ व b के बीच पहला हरात्मक माध्य

$=\frac{(m+1)ab}{a+mb}$ एवं $H_m=\frac{(m+1)ab}{b+ma}$

$\therefore H_m-H_1=(m+1)ab\left[\frac{1}{b+ma}-\frac{1}{a+mb}\right]$

$=(m+1)ab\frac{[(m-1)(b-a)]}{(b+ma)(a+mb)}=\frac{(m^2-1)ab(b-a)}{m(a^2+b^2)+(m^2+1)ab}$

$=\frac{(m^2-1)ab(b-a)}{m^2-1}$, [(i) द्वारा]

$=ab(b-a)$.

23. (c) माना स्कूल की घर से दूरी $=d$
तथा लगने वाला समय क्रमशः t_1 और t है

$\therefore t_1=\frac{d}{x}$ एवं $t_2=\frac{d}{y}$

औसत वेग $=\frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल समय}}$

$=\frac{2d}{\left(\frac{d}{x}+\frac{d}{y}\right)}=\frac{2xy}{x+y}$, जो कि x तथा y का हरात्मक माध्य है।

24. (c) a, b, c, d हरात्मक श्रेणी में हैं, तब $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c},\frac{1}{d}$ समान्तर श्रेणी में होंगे।

अतः $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{d}-\frac{1}{c} \Rightarrow b=\frac{2ac}{a+c}$

a व c का गुणोत्तर माध्य $=\sqrt{ac}$.

चूँकि गुणोत्तर माध्य > हरात्मक माध्य अतः $\sqrt{ac}>b$ या $ac>b^2$

इसी प्रकार $\sqrt{bd}>c$ या $bd>c^2$

जोड़ने पर, $ac+bd>b^2+c^2$.

25. (b) चूँकि समान्तर माध्य > गुणोत्तर माध्य

$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}, \frac{b+c}{2}>\sqrt{bc}$ और $\frac{a+c}{2}>\sqrt{ac}$.

इन असमिकाओं को गुणा करने पर,

$(a+b)(b+c)(c+a)>8abc$.

26. (a) माना तीन संख्यायें $\frac{a}{r}, a, ar$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

अतः प्रश्नानुसार,

प्रतिबन्ध I : $\frac{a}{r}+a+ar=14 \Rightarrow a\left(\frac{1}{r}+1+r\right)=14$ ....(i)

तथा II : $\frac{a}{r}+1, a+1$ एवं $ar-1$ समान्तर श्रेणी में होंगे,

तब $2(a+1)=\frac{a}{r}+1+ar-1=\frac{a}{r}(1+r^2)$ ......(ii)

(i) व (ii) से, $a=4$ तथा $r=2$

$\therefore$ अभीष्ट संख्यायें 2, 4, 8 हैं, अतः सबसे बड़ी संख्या 8 है।

27. (b) दिये अनुसार, $b^2=ac$ एवं

$2(\log 2b-\log 3c)=\log a-\log 2b+\log 3c-\log a$

$\Rightarrow b^2=ac$ एवं $2b=3c \Rightarrow b=2a/3$ एवं $c=4a/9$

चूँकि $a+b=\frac{5a}{3}>c, b+c=\frac{10a}{9}>a, c+a=\frac{13a}{9}>b$

अतः a, b, c एक त्रिभुज बनाते हैं जिसकी सबसे बड़ी भुजा a है। अब ΔABC का महत्तम कोण A ज्ञात करने के लिए कोज्या सूत्र (cosine formula) से,

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{29}{48}<0$

$\therefore$ अतः कोण A, अधिक कोण है।

28. (a) माना दो राशियाँ a व b हैं, तब a, A_1, A_2, b समान्तर श्रेणी में होंगे

$\therefore A_1-a=b-A_2 \Rightarrow A_1+A_2=a+b$ ......(i)

पुनः a, G_1, G_2, b गुणोत्तर श्रेणी में हैं

$\therefore \frac{G_1}{a}=\frac{b}{G_2} \Rightarrow G_1G_2=ab$ .....(ii)

पुनः a, H_1, H_2, b हरात्मक श्रेणी में हैं,

$\therefore \frac{1}{H_1}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{H_2} \Rightarrow \frac{1}{H_1}+\frac{1}{H_2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

$\Rightarrow \frac{H_1+H_2}{H_1H_2}=\frac{a+b}{ab}=\frac{A_1+A_2}{G_1G_2}$, [(i) व (ii) से]

$\therefore \frac{G_1G_2}{H_1H_2}=\frac{A_1+A_2}{H_1+H_2}$.

29. (a) माना संख्यायें x व y हैं, तब $A=\frac{1}{2}(x+y), \sqrt{xy}=G$ या

$G^2=xy$ एवं $\frac{2xy}{(x+y)}=4$,

$\Rightarrow G^2=4A$

$\therefore\ 2A+G^2=2A+4A=27 \Rightarrow A=\frac{9}{2}$

$\therefore\ x+y=9,\ xy=18$

अतः संख्यायें 6 व 3 हैं।

30. (c) माना प्राप्त संख्यायें a व b हैं

अब समान्तर माध्य $=\frac{a+b}{2}$ एवं गुणोत्तर माध्य $=\sqrt{ab}$

प्रश्नानुसार,

समान्तर माध्य = गुणोत्तर माध्य+ 2 $\Rightarrow \frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}+2$ ....(i)

एवं $\frac{a}{b}=\frac{4}{1} \Rightarrow a=4b$ .....(ii)

(i) व (ii) से, $a=16$ व $b=4$.

31. (c) दिया है, समान्तर माध्य $=8$ एवं गुणोत्तर माध्य = 5

यदि α, β वर्ग समीकरण के मूल हैं, तो वर्ग समीकरण है,

$x^2-x(\alpha+\beta)+\alpha\beta=0$ ......(i)

समान्तर माध्य$=\frac{\alpha+\beta}{2}=8 \Rightarrow \alpha+\beta=16$ ......(ii)

एवं गुणोत्तर माध्य $=\sqrt{\alpha\beta}=5 \Rightarrow \alpha\beta=25$ ....(iii)

अतः अभीष्ट वर्ग समीकरण $x^2-16x+25=0$ है।

32. (b) चूँकि हम जानते हैं,

समान्तर माध्य > गुणोत्तर माध्य > हरात्मक माध्य

$\therefore$ समान्तर माध्य = 15, गुणोत्तर माध्य = 12,

हरात्मक माध्य $=\frac{144}{15}$.

33. (b) **ट्रिक:** $b=1$ तथा $c=8$ रखने पर, $a=4.5$ तथा $G_1=2, G_2=4$. अब $G_1^3+G_2^3=72$.

विकल्प (b) यही मान देता है, अर्थात् $2\times2\times4\times\frac{9}{2}=72$.

34. (c) a, ar, ar^2 गुणोत्तर श्रेणी में हैं तथा $a, ar-8, ar^2-64$ समान्तर श्रेणी में हैं

अतः $a(r^2-2r+1)=64$ .....(i)

पुनः $a, ar-8, ar^2-64$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

$\therefore (ar-8)^2=a(ar^2-64)$ या $a(16r-64)=64$ .....(ii)

(i) व (ii) को हल करने पर, $r=5, a=4$

अतः अभीष्ट संख्यायें 4,20,100 हैं।

ट्रिक : प्रतिबन्धानुसार,

(a) $\Rightarrow$ 4, 20, – 28 जो कि समान्तर श्रेणी में नहीं हैं।

(b) $\Rightarrow$ 4, 12, – 28 जो कि समान्तर श्रेणी में नहीं हैं।

(c) $\Rightarrow$ 4, 20, 36 जो कि स्पष्टतः समान्तर श्रेणी में हैं जिनका सार्वअन्तर 16 है। ये संख्यायें दूसरे प्रतिबन्ध को भी सन्तुष्ट करती हैं अर्थात् 4, 20 – 8, 36 गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

35. (b) x, y, z गुणोत्तर श्रेणी में हैं अतः $y^2=xz$

$\therefore 2\log y=\log x+\log z$

$\Rightarrow 2(\log y+1)=(1+\log x)+(1+\log z)$

$\Rightarrow 1+\log x, 1+\log y, 1+\log z$ समान्तर श्रेणी में हैं

$\Rightarrow \frac{1}{1+\log x}, \frac{1}{1+\log y}, \frac{1}{1+\log z}$ हरात्मक श्रेणी में हैं।

36. (c) $a=\frac{x+y}{2}, g=\sqrt{xy}$ एवं $h=\frac{2xy}{x+y}$

$g^2=\left(\sqrt{xy}\right)^2=xy$ ...(i), $ah=\frac{x+y}{2}.\frac{2xy}{x+y}=xy$ ...(ii)

(i) व (ii) से, $g^2=ah$ या $g=\sqrt{ah}$, अतः a व h के मध्य गुणोत्तर माध्य g है।

37. (d) $\frac{1}{2}[2^{\sin\theta}+2^{\cos\theta}]\ge\sqrt{2^{\sin\theta}2^{\cos\theta}}$

($\because$ समान्तर माध्य $\ge$ गुणोत्तर माध्य)

$\Rightarrow 2^{\sin\theta}+2^{\cos\theta}\ge 2.2^{(\sin\theta+\cos\theta)/2}$ .....(i)

अब $(\sin\theta+\cos\theta)=\sqrt{2}\sin(\theta+\pi/4)\ge-\sqrt{2}$

θ के समस्त वास्तविक मानों के लिए,

$2^{\sin\theta}+2^{\cos\theta}\ge 2.2^{(\sin\theta+\cos\theta)/2}>2.2^{-\sqrt{2}/2}$

$\Rightarrow 2^{\sin\theta}+2^{\cos\theta}\ge 2^{1-(1/\sqrt{2})}$.

38. (a) $\frac{(a+b)+(c+d)}{2}\ge\sqrt{(a+b)(c+d)}$

या $\frac{2}{2}>\sqrt{M}$ या $1\ge M$

$\because\ M>0$, अतः $0<M\le1$.

39. (d) $b=a+d, c=a+2d$, जहाँ $d>0$

अब $a^2,(a+d)^2,(a+2d)^2$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं

$\therefore (a+d)^4=a^2(a+2d)^2$ या $(a+d)^2=\pm a(a+2d)$

या $a^2+d^2+2ad=\pm(a^2+2ad)$

(+) चिन्ह लेने पर, $d=0$ (असम्भव क्योंकि $a<b<c$)

(–) चिन्ह लेने पर,

$2a^2+4ad+d^2=0$, $\left[\because a+b+c=\frac{3}{2},\ \therefore a+d=\frac{1}{2}\right]$

$2a^2+4a\left(\frac{1}{2}-a\right)+\left(\frac{1}{2}-a\right)^2=0$ या $4a^2-4a-1=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

यहाँ $d=\frac{1}{2}-a>0$ या $a<\frac{1}{2}$, अतः $a=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

40. (c) यह श्रेणी समान्तर गुणोत्तर श्रेणी है।

अतः संगत समान्तर श्रेणी $1+4+7+10+.........$ का n वाँ पद $=3n-2$ एवं संगत गुणोत्तर श्रेणी $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+.........$ का n वाँ पद $=\frac{1}{5^{n-1}}$

अतः अभीष्ट श्रेणी का n वाँ पद $\frac{3n-2}{5^{n-1}}$ है।

ट्रिक : विकल्पों में $n=1, 2$ रखकर निरीक्षण करें।

41. (b) माना श्रेणी $\frac{1}{1+1^2+1^4}+\frac{2}{1+2^2+2^4}+\frac{3}{1+3^2+3^4}+......$

का n वाँ पद T_n है, तब $T_n=\frac{n}{1+n^2+n^4}=\frac{n}{(1+n^2)^2-n^2}$

$$=\frac{n}{(n^2+n+1)(n^2-n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+(n-1)n}-\frac{1}{1+n(n+1)}\right]$$

अब $\sum_{r=1}^{n}T_r=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1.2}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+1.2}-\frac{1}{1+2.3}\right]$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+2.3}-\frac{1}{1+3.4}\right]+.......+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+(n-1)n}-\frac{1}{1+n(n+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{1+n(n+1)}\right]=\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}.$$

ट्रिक : $n=1, 2$ का निरीक्षण करने पर $S_1=\frac{1}{3}$ तथा $S_2=\frac{3}{7}$, जो कि विकल्प (b)द्वारा प्राप्त होता है।

42. (d) चूंकि n विषम पूर्णांक हैं, अतः $(-1)^{n-1}=1$ व $n-1$, $n-3, n-5$ इत्यादि सम पूर्णांक होंगे।

अब, $n^3-(n-1)^3+(n-2)^3-(n-3)^3+........+(-1)^{n-1}1^3$

$$=n^3+(n-1)^3+(n-2)^3+.......+1^3$$

$$-2[(n-1)^3+(n-3)^3+.......+2^3]$$

$$=n^3+(n-1)^3+(n-2)^3+.......+1^3$$

$$-2\times 2^3\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^3+\left(\frac{n-3}{2}\right)^3+.......+1^3\right]$$

[$\because n-1, n-3$ सम पूर्णांक हैं]

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-16\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\right]^2$$

$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-16\frac{(n-1)^2(n+1)^2}{16\times 4}$$

$$=\frac{1}{4}(n+1)^2[n^2-(n-1)^2]=\frac{1}{4}(n+1)^2(2n-1).$$

43. (d) $n=1$ रखने पर, $s=\frac{1}{1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

जाँच करने पर विकल्प (d) सही है।

44. (c) स्पष्टतः, $T_n=\frac{1^3+2^3+3^3+.........+n^3}{1+3+5+.........\ n \text{ पदों तक}}$

$$=\frac{\Sigma n^3}{\frac{n}{2}[2+(n-1)2]}=\frac{1}{4}\frac{n^2(n+1)^2}{n^2}=\frac{1}{4}(n^2+2n+1).$$

45. (d) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2-1}}$

हर का परिमेयकरण करने पर,

$$\therefore S=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+...+\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2-1}\right)$$

$S=n-1.$

श्रेणियाँ

Self Evaluation Test - 4

1. यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में हों, तो सरल रेखा $ax+by+c=0$ सदैव निम्न बिन्दु से गुजरेगी [IIT 1984]

(a) $(-1,-2)$ (b) $(1,-2)$

(c) $(-1, 2)$ (d) $(1, 2)$

2. यदि $\frac{S_n}{S_m}=\frac{n^4}{m^4}$ (जहाँ S_k, समांतर श्रेणी $a_1, a_2, ...\infty$ के प्रथम k पदों का योग है), तब $\frac{a_{m+1}}{a_{n+1}}$ का मान m व n के पदों में होगा

(a) $\frac{(2m+1)^3}{(2n+1)^3}$ (b) $\frac{(2n+1)^3}{(2m+1)^3}$

(c) $\frac{(2m-1)^3}{(2n-1)^3}$ (d) $\frac{(2m+1)^3}{(2n-1)^3}$

3. किसी कार्य के भाग को निश्चित दिनों में करने के लिए 150 कामगार लगाये जाते हैं। दूसरे दिन 4 कामगार हटा दिये जाते हैं तथा तीसरे दिन 4 फिर हटा दिये जाते हैं। यह प्रक्रिया इसी प्रकार चलती रहती है। इस प्रकार कार्य सम्पादन के लिए 8 दिन अधिक लगते हैं, तो उन दिनों की संख्या, जिनमें कार्य सम्पादन हुआ था, होगी [Kurukshetra CEE 1996]

(a) 15 (b) 20

(c) 25 (d) 30

4. संख्याओं के दो समूह $a, 2b$ व $2a, b$, (जहाँ $a, b \in R$) के बीच n समान्तर माध्य स्थापित किये गये हैं। यदि इन संख्याओं के दोनों समूहों के लिये mवाँ समान्तर माध्य बराबर हो, तो $a:b$ है

(a) $n-m+1:m$ (b) $n-m+1:n$

(c) $n:n-m+1$ (d) $m:n-m+1$

5. यदि x_1, x_2, x_3 तथा y_1, y_2, y_3 गुणोत्तर श्रेणी में हैं, जिनके सार्व- अनुपात समान हैं, तब बिन्दु $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ तथा (x_3, y_3) [IIT 1999]

(a) एक सरल रेखा पर हैं

(b) एक दीर्घवृत्त (ellipse) पर हैं

(c) एक वृत्त (circle) पर हैं

(d) एक त्रिभुज के शीर्ष (vertices) हैं

6. माना a_n धनात्मक संख्याओं की गुणोत्तर श्रेणी का nवाँ पद है। माना $\sum_{n=1}^{100} a_{2n}=\alpha$ व $\sum_{n=1}^{100} a_{2n-1}=\beta$ इस प्रकार हैं कि $\alpha \neq \beta$, तो सार्वअनुपात है [IIT Screening 1992]

(a) $\frac{\alpha}{\beta}$ (b) $\frac{\beta}{\alpha}$

(c) $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ (d) $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$

7. किसी गुणोत्तर श्रेणी के तीन क्रमागत पदों का योग 14 है। प्रथम तथा द्वितीय पद में 1 जोड़ने तथा तृतीय पद में से एक घटाने पर नये पद समांतर श्रेणी बनाते हैं, तो मूल पदों में से न्यूनतम पद होगा [MP PET 2001]

(a) 1 (b) 2

(c) 4 (d) 8

8. यदि a व b समीकरण $x^2-3x+p=0$ के मूल हैं तथा c व d समीकरण $x^2-12x+q=0$ के मूल हैं, जहाँ a, b, c, d एक वर्धमान गुणोत्तर श्रेणी बनाते हैं, तब $(q+p):(q-p)$ का अनुपात है

(a) $8:7$ (b) $11:10$

(c) $17:15$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. श्रेणी $2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+........$ का अनन्त पदों तक योग है [AMU 1984]

(a) 3 (b) 4

(c) 7/2 (d) 9/2

10. यदि $|\alpha|, |\beta|<1$, $1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+...\infty=s_1$,

$1-\beta+\beta^2-\beta^3+....\infty=s_2$, तब

$1-\alpha\beta+a^2\beta^2-a^3\beta^3+....\infty$ का मान होगा [AMU 2002]

(a) $s_1 s_2$ (b) $\frac{s_1 s_2}{1+s_1 s_2}$

(c) $\frac{s_1 s_2}{1-s_1-s_2+2s_1 s_2}$ (d) $\frac{1}{1+s_1 s_2}$

11. यदि 1 व $\frac{1}{31}$ के बीच n हरात्मक माध्य हों तथा 7 वें व $(n-1)$वें हरात्मक माध्यों का अनुपात $9:5$ हों, तो n का मान होगा [RPET 1986]

(a) 12 (b) 13

(c) 14 (d) 15

12. यदि समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूलों का योग उनके व्युत्क्रमों के वर्गों के योगफल के बराबर है, तो bc^2, ca^2, ab^2 होंगे [IIT 1976]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में

(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

13. यदि a, b, c, d भिन्न वास्तविक संख्यायें ऐसी हों कि

$(a^2+b^2+c^2)p^2-2(ab+bc+cd)p+(b^2+c^2+d^2)\le 0$ हो, तब a, b, c, d होंगे [IIT 1987]

(a) समान्तर श्रेणी में

(b) गुणोत्तर श्रेणी में

(c) हरात्मक श्रेणी में

(d) $ab=cd$

14. यदि α, β, γ क्रमशः $ca, ab; ab, bc; bc, ca$ के गुणोत्तर माध्य हों जहाँ a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं, तो $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ होंगे

(a) समान्तर श्रेणी में (b) हरात्मक श्रेणी में

(c) गुणोत्तर श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

15. माना कि $a_1, a_2, ... , a_{10}$ समान्तर श्रेणी में हैं और $h_1, h_2, ..., h_{10}$ हरात्मक श्रेणी में हैं। यदि $a_1 = h_1 = 2$ तथा $a_{10} = h_{10} = 3$, तो $a_4 h_7 =$ [IIT 1999]

(a) 2 (b) 3

(c) 5 (d) 6

16. दो अनुक्रम $\{t_n\}$ तथा $\{s_n\}$ इस प्रकार परिभाषित हैं कि $t_n = \log\left(\frac{5^{n+1}}{3^{n-1}}\right), s_n = \left[\log\left(\frac{5}{3}\right)\right]^n$ तब [AMU 2002]

(a) $\{t_n\}$ समान्तर श्रेणी में, $\{s_n\}$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं

(b) $\{t_n\}$ तथा $\{s_n\}$ दोनों गुणोत्तर श्रेणी में हैं

(c) $\{t_n\}$ तथा $\{s_n\}$ दोनों समान्तर श्रेणी में हैं

(d) $\{s_n\}$ गुणोत्तर श्रेणी में है तथा $\{t_n\}$ न तो समान्तर और न ही गुणोत्तर श्रेणी में है

17. यदि a_1, a_2, a_3 कोई भी तीन धनात्मक वास्तविक संख्यायें हों, तो निम्न में से कौन सा कथन सत्य नहीं है [Orissa JEE 2002]

(a) $3a_1a_2a_3 \le a_1^3 + a_2^3 + a_3^3$

(b) $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_1} \ge 3$

(c) $(a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \ge 9$

(d) $(a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right)^3 \le 27$

18. यदि विषम संख्यायें निम्न प्रकार से हों

1 3

5 7 9 11

13 15 17 19 21 23

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

तब nवीं पंक्ति की संख्याओं का योग होगा

(a) $2^{n-2}[2^n + 2^{n-1} - 1]$ (b) $\frac{1}{2}(2n+1)$

(c) $2n$ (d) $4n^3$

19. n के सभी धनात्मक पूर्णांकों के लिये, $3.1.2 + 3.2.3 + 3.3.4 + ... + 3.n.(n+1)$ का मान होगा [RPET 1999]

(a) $n(n+1)(n+2)$

(b) $n(n+1)(2n+1)$

(c) $(n-1)n(n+1)$

(d) $\frac{(n-1)\, n\, (n+1)}{2}$

20. श्रेणी $\frac{1}{3 \times 7} + \frac{1}{7 \times 11} + \frac{1}{11 \times 15} + ...$ का योग है [MNR 1984; UPSEAT 2000]

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{6}$

(c) $\frac{1}{9}$ (d) $\frac{1}{12}$

AS Answers and Solutions

(SET - 4)

1. (b) a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं, अतः $2b = a + c$.
सरल रेखा $ax + by + c = 0$, $(1, -2)$ से गुजरेगी क्योंकि रेखा $a - 2b + c = 0$ या $2b = a + c$ को संतुष्ट करती है।

2. (a) $\frac{S_n}{S_m} = \frac{n^4}{m^4}$.
$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)]$
और $S_m = \frac{m}{2}[2a_1 + d(m-1)]$ का प्रयोग कर हल करने पर,
$\frac{a_{m+1}}{a_{n+1}} = \frac{(2m+1)^3}{(2n+1)^3}$.

3. (c) माना दिनों की संख्या n है। अतः एक कामगार एक दिन में काम का $\left(\frac{1}{150n}\right)$ वॉं भाग कर सकता है।
प्रश्नानुसार,
$[150 + 146 + 142 + ... + (n+8) \text{ पदों तक}] \times \frac{1}{150n} = 1$
$\Rightarrow n = 17$
अतः काम पूर्ण करने में लगा कुल समय $= 17 + 8 = 25$.

4. (d) a तथा $2b$ के बीच m वाँ माध्य $= a + \frac{m(2b-a)}{n+1}$ ......(i)
$2a$ और b के बीच m वाँ माध्य $= 2a + \frac{m(b-2a)}{n+1}$ ......(ii)
प्रश्नानुसार, $a + \frac{m(2b-a)}{n+1} = 2a + \frac{m(b-2a)}{n+1}$
$\Rightarrow m(2b-a) = a(n+1) + m(b-2a)$
$\Rightarrow a(n-m+1) = bm \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m}{n-m+1}$.

5. (a) दिया गया है, $x_2 = rx_1, x_3 = r^2x_1, y_2 = ry_1, y_3 = r^2y_1$
Δ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ rx_1 & ry_1 & 1 \\ r^2x_1 & r^2y_1 & 1 \end{vmatrix}$
$= \frac{1}{2}x_1y_1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r & r & 1 \\ r^2 & r^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$
अर्थात् सरल रेखा पर हैं।

6. (a) माना कि $a, ar, ar^2 ....,$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं।
अब, $\alpha = \sum_{n=1}^{100} a_{2n} = a_2 + a_4 + ...$ 100 पदों तक
$= ar + ar^3 + ...$ 100 पदों तक
$= ar(1 + r^2 + r^4 + ... r^{198})$
और $\beta = \sum_{n=1}^{100} a_{2n-1} = a + ar^3 + ... 100$ पदों तक
$= a(1 + r^2 + ... + r^{198})$
स्पष्टतः $\frac{\alpha}{\beta} = r$.

7. (b) माना संख्यायें a, ar, ar^2 हैं
तब, $a + ar + ar^2 = 14 \Rightarrow a(1 + r + r^2) = 14$ .....(i)
और $2(ar + 1) = (a + 1) + (ar^2 - 1)$
$a(r^2 - 2r + 1) = 2$ .....(ii)
a का मान (i) से (ii) में रखने पर,
$2r^2 - 5r + 2 = 0 \Rightarrow r = 2, \frac{1}{2}$ तथा $a = 2, 8$
$\therefore$ संख्यायें 2, 4, 8 या 8, 4, 2 हैं।
अतः श्रेणी की छोटी संख्या 2 है।

8. (c) माना समीकरण $x^2 - 3x + p = 0$ के मूल a, b हैं,
$\therefore a + b = 3, ab = p$
समीकरण $x^2 - 12x + q = 0$ के मूल c, d हैं,
$\therefore c + d = 12, cd = q$
a, b, c, d गुणोत्तर श्रेणी में हैं,
$\therefore \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$
$\Rightarrow \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} = \frac{(c-d)^2}{(c+d)^2} \Rightarrow 1 - \frac{4ab}{(a+b)^2} = 1 - \frac{4cd}{(c+d)^2}$
$\Rightarrow \frac{ab}{(a+b)^2} = \frac{cd}{(c+d)^2} \Rightarrow \frac{p}{9} = \frac{q}{144}$
$\Rightarrow \frac{p}{1} = \frac{q}{16} \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{p+q}{q-p} = \frac{17}{15}$.
ट्रिक : माना $a = 1, b = 2, c = 4, d = 8$, तब
$p = 2, q = 32 \Rightarrow (q + p) : (q - p) = 17 : 15$.

9. (c) दी गयी श्रेणी है,
$= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + ... \infty$
$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... \infty\right)$
$+ \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ... \infty\right)$
$= \left(\frac{1}{1 - (1/2)}\right) + \left(\frac{1}{1 - (1/3)}\right) = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$.

10. (c) $s_1 = \frac{1}{1+\alpha}, s_2 = \frac{1}{1+\beta}$
माना $s = 1 - \alpha\beta + \alpha^2\beta^2 .... \Rightarrow s = \frac{1}{1+\alpha\beta}$
$\alpha = \frac{1}{s_1} - 1, \beta = \frac{1}{s_2} - 1$

$\therefore s = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{s_1}-1\right)\left(\dfrac{1}{s_2}-1\right)}$

$s = \dfrac{s_1 s_2}{2s_1 s_2 + 1 - s_1 - s_2}$.

11. (c) प्रश्नानुसार, $\dfrac{\dfrac{1}{a+7d}}{\dfrac{1}{a+(n-1)d}} = \dfrac{9}{5}$ ......(i)

दिया है, $\dfrac{1}{a+(n+1)d} = \dfrac{1}{31}$, (जहाँ $a=1$) ......(ii)

$\therefore\ d = 2, n = 14$.

12. (a) माना दी गयी समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल α, β हैं,

अतः $\alpha+\beta = -\dfrac{b}{a}$ तथा $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

$\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2} = \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \dfrac{\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{2c}{a}}{\dfrac{c^2}{a^2}} = \dfrac{b^2-2ac}{c^2}$

प्रतिबन्धानुसार, $\alpha+\beta = \dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$

$\Rightarrow -\dfrac{b}{a} = \dfrac{b^2-2ac}{c^2} \Rightarrow -bc^2 = ab^2 - 2a^2c$

$\therefore\ 2a^2c = ab^2+bc^2 \Rightarrow ab^2, ca^2, bc^2$

या bc^2, ca^2, ab^2 समान्तर श्रेणी में हैं।

13. (b) दिया गया है, $(a^2+b^2+c^2)p^2 - 2(ab+bc+cd)p$
$+(b^2+c^2+d^2) \le 0$ ..... (i)

किन्तु वामपक्ष
$=(a^2p^2-2abp+b^2)+(b^2p^2-2bcp+c^2)$
$+(c^2p^2-2cdp+d^2)$
$=(ap-b)^2+(bp-c)^2+(cp-d)^2 \ge 0$ .....(ii)

चूँकि वास्तविक संख्याओं के वर्गों का योग अऋणात्मक है अतः (i) और (ii) से,

$\Rightarrow (ap-b)^2+(bp-c)^2+(cp-d)^2 = 0$

$\Rightarrow ap-b = 0 = bp-c = cp-d \Rightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{d}{c} = p$

$\therefore a, b, c, d$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

14. (a) संकल्पना से, $\alpha^2 = a^2bc, \beta^2 = b^2ca, \gamma^2 = c^2ab$ और $2b = a+c$. अतः $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ समान्तर श्रेणी में हैं।

15. (d) दिया गया है, $a_1 = h_1 = 2, a_{10} = h_{10} = 3$

अतः $a_1 + 9d = 3$. समान्तर श्रेणी के लिए $2+9d = 3$ या $d = \dfrac{1}{9}$

$\therefore a_4 = a_1 + 3d = 2 + \dfrac{3}{9} = 2 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3}$

हरात्मक श्रेणी के लिये, $\dfrac{1}{2} + 9d' = \dfrac{1}{3}$

या $9d' = -\dfrac{1}{6}$ या $d' = -\dfrac{1}{54}$

$\therefore \dfrac{1}{h_7} = \dfrac{1}{h_1} + 6d' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{6}{54} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{7}{18} \Rightarrow h_7 = \dfrac{18}{7}$

$\therefore\ a_4 h_7 = \dfrac{7}{3} \times \dfrac{18}{7} = 6$.

16. (a) $t_n = \log\left(\dfrac{5^{n+1}}{3^{n-1}}\right)$; $s_n = [\log(5/3)]^n$

$t_1 = \log 25$; $s_1 = [\log 5/3]^1$

$t_2 = \log\dfrac{125}{3}$; $s_2 = [\log 5/3]^2$

$t_3 = \log\dfrac{625}{9}$; $s_3 = [\log 5/3]^3$

स्पष्टतः, t_n समान्तर श्रेणी और s_n गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

17. (d) $\because$ गुणोत्तर माध्य $\ge$ हरात्मक माध्य

$\Rightarrow (a_1.a_2.a_3)^{1/3} \ge \dfrac{3}{(1/a_1+1/a_2+1/a_3)}$

$\Rightarrow (a_1.a_2.a_3) \ge \dfrac{27}{(1/a_1+1/a_2+1/a_3)^3}$

$(a_1.a_2.a_3)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}\right)^3 \ge 27$.

18. (d) पहली पंक्ति 2 संख्याओं को सम्मिलित करती है, दूसरी 4 को, तीसरी पंक्ति 6 को इसी तरह n वीं पंक्ति $2n$ संख्याओं को सम्मिलित करती है जिसका पहला पद $(n-1)^2+n^2$ और सार्वान्तर 2 है।

अतः $2n$ पदों का योग

$= \dfrac{2n}{2}\{2(n-1)^2+2n^2+(2n-1)2\} = 4n^3$.

19. (a) माना श्रेणी का n वाँ पद T_n है, तब $T_n = 3n(n+1)$
यदि पहले n पदों के योग को S_n से प्रदर्शित करें, तब

$S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k = \sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k)$

$= 3\sum_{k=1}^{n}(k^2) + 3\sum_{k=1}^{n}(k) = \dfrac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{3n(n+1)}{2}$

$= \dfrac{3n(n+1)}{2}\left[\dfrac{2n+1}{3}+1\right] = \dfrac{3n(n+1)}{2}.\dfrac{2(n+2)}{3}$

$= n(n+1)(n+2)$.

20. (d) दी गई श्रेणी है, $\dfrac{1}{3\times7}+\dfrac{1}{7\times11}+\dfrac{1}{11\times15}+.......\infty$

माना $S = \dfrac{1}{3\times7}+\dfrac{1}{7\times11}+\dfrac{1}{11\times15}+......\infty$

तब $S = \dfrac{1}{4}\left[\left\{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{7}\right\}+\left\{\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}\right\}+......\right]$

$= \dfrac{1}{4}\left[\left\{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{11}+....\infty\right\}-\left\{\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{15}+......\infty\right\}\right]$

$= \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{3}+0\right] = \dfrac{1}{12}$.

* * *