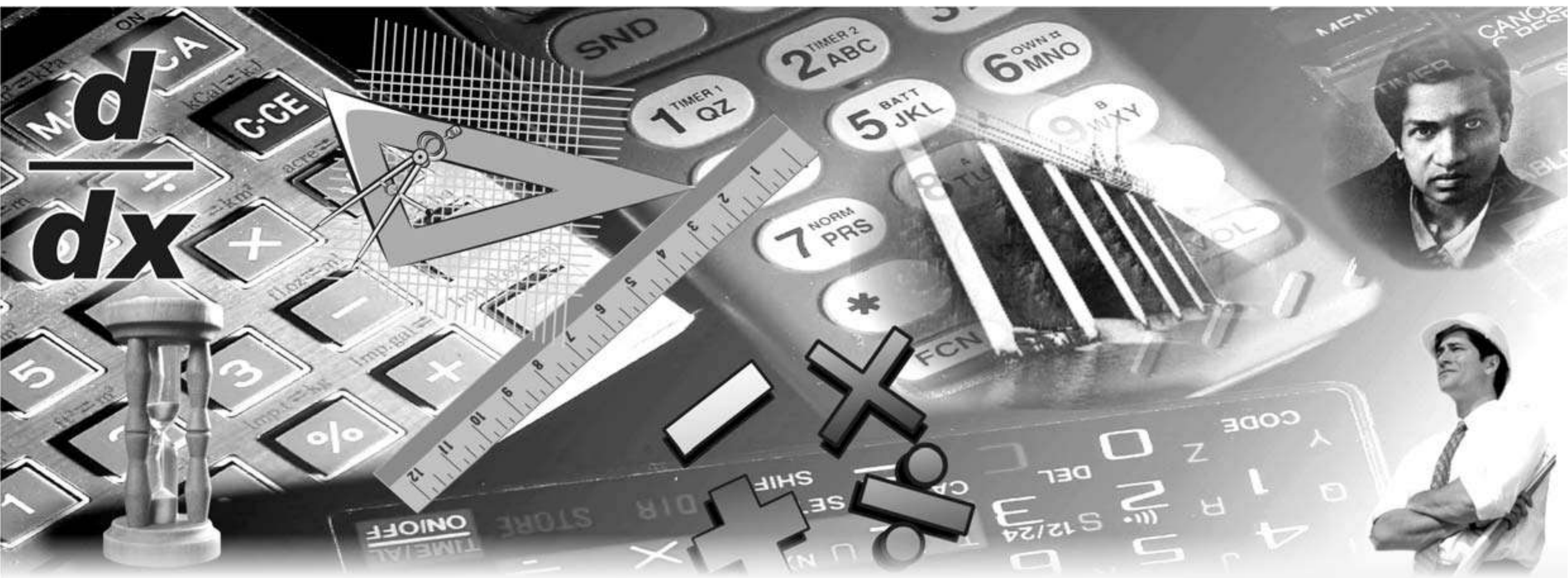


Chapter
5

वर्ग समीकरण एवं असमिकायें

बहुपद (Polynomial)

बहुपद फलन वह बीजीय व्यंजक है, जिसमें cx^n के रूप में एक से अधिक पद हों, जबकि n एक अऋणात्मक पूर्णांक है।

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, जहाँ x एक चर है, $a_0, a_1, a_2, ... a_n$ अचर हैं तथा $a_n \neq 0$

उदाहरणार्थ : $4x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 5x + 3$, $3x^3 + x^2 - 3x + 5$.

(1) **वास्तविक बहुपद** (Real polynomial) **:** माना $a_0, a_1, a_2 .... a_n$ वास्तविक संख्यायें हैं तथा x एक वास्तविक चर है।

तब $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$ वास्तविक चर x का वास्तविक गुणांकों के लिये वास्तविक बहुपद कहलाता है।

उदाहरणार्थ: $3x^3 - 4x^2 + 5x - 4, x^2 - 2x + 1$ आदि वास्तविक बहुपद हैं।

(2) **सम्मिश्र बहुपद** (Complex polynomial) **:** यदि $a_0, a_1, a_2 .... a_n$ सम्मिश्र संख्यायें हैं तथा x एक परिवर्ती सम्मिश्र संख्या है, तब $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$ सम्मिश्र चर x का सम्मिश्र गुणांकों के लिये सम्मिश्र बहुपद कहलाता है।

उदाहरणार्थ: $3x^2 - (2+4i)x + (5i-4), x^3 - 5ix^2 + (1+2i)x + 4$ आदि सम्मिश्र बहुपद हैं।

(3) **बहुपद की घात** (Degree of polynomial) **:** किसी बहुपद में चर x की अधिकतम घात को बहुपद की घात कहते हैं।

उदाहरणार्थ : $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ एक n घात का बहुपद है।

$f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 7x + 5$ एक 3 घात का बहुपद है।

द्विघात के बहुपद को सामान्यतः वर्ग बहुपद कहते हैं। घात 3 तथा 4 के बहुपदों को क्रमशः त्रिघातीय बहुपद तथा चतुर्थ घातीय बहुपद कहते हैं।

(4) **बहुपदीय समीकरण** (Polynomial equation) **:** यदि $f(x)$ एक वास्तविक या सम्मिश्र बहुपद है, तब $f(x)=0$ बहुपदीय समीकरण कहलाता है।

वर्ग समीकरण के प्रकार (Types of quadratic equation)

वह समीकरण जिसमें अज्ञात राशि की अधिकतम घात दो हो, वर्ग समीकरण कहलाता है।

वर्ग समीकरण दो प्रकार के होते हैं

सारणी : 5.1

शुद्ध वर्ग समीकरण	पूर्ण वर्ग समीकरण
$ax^2 + c = 0$, जहाँ $a, c \in C$ और $b = 0, a \neq 0$	$ax^2 + bx + c = 0$, जहाँ $a, b, c \in C$ और $a \neq 0$, $b \neq 0$

वर्ग समीकरण के मूल (Roots of a quadratic equation) : चर x के वह मान, जो वर्ग समीकरण को संतुष्ट करते हैं, वर्ग समीकरण के मूल कहलाते हैं।

वर्ग समीकरण का हल (Solution of quadratic equation)

(1) **गुणनखण्ड विधि** (Factorization method) : माना $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta) = 0$, तब $x = \alpha$ तथा $x = \beta$ दिये गये समीकरण को संतुष्ट करते हैं। अतः समीकरण को रेखीय गुणनखंडों में विभक्त करते हैं तथा प्रत्येक गुणनखंड को शून्य के बराबर रखकर समीकरण के मूल प्राप्त करते हैं।

उदाहरणार्थ : $3x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(3x+1) = 0$;

$x = 1, -1/3$

(2) **श्रीधराचार्य विधि** (Sri Dharacharya method): द्विघात समीकरण को निम्न प्रकार पूर्ण वर्ग बनाते हैं; $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ जोड़ने तथा घटाने पर, $\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0$ से, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

इस प्रकार, वर्ग समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) के दो मूल $\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ होंगे।

प्रत्येक वर्ग समीकरण के दो तथा केवल दो मूल होते हैं।

मूलों की प्रकृति (Nature of roots)

वर्ग समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ में मान लेते हैं कि a, b, c ($a \neq 0$) वास्तविक संख्यायें हैं। इस परिस्थिति में मूलों की प्रकृति के सम्बन्ध में निम्नलिखित तथ्य सत्य हैं :

(1) समीकरण के मूल वास्तविक तथा भिन्न (असमान) होते हैं यदि और केवल यदि $D \equiv b^2 - 4ac > 0$.

(2) समीकरण के मूल वास्तविक तथा सम्पाती (समान) होते हैं यदि और केवल यदि $D \equiv b^2 - 4ac = 0$.

(3) समीकरण के मूल सम्मिश्र $\alpha \pm i\beta, \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0 \in R$ (अधिकल्पित) होते हैं। यदि और केवल यदि $D \equiv b^2 - 4ac < 0$.

(4) समीकरण के मूल परिमेय होंगे यदि और केवल यदि $a, b, c \in Q$ (परिमेय संख्या) तथा $D \equiv b^2 - 4ac$ एक (परिमेय संख्या का) पूर्ण वर्ग है।

(5) समीकरण के मूल (असमान) अपरिमेय अथवा करणी के रूप में होंगे यदि और केवल यदि $D \equiv b^2 - 4ac > 0$ तथा पूर्ण वर्ग नहीं हो (a, b तथा c के परिमेय होने पर भी) यदि $p + \sqrt{q}$ (p, q परिमेय) एक अपरिमेय मूल हो तब $p - \sqrt{q}$ भी एक मूल होगा (a, b, c परिमेय)।

(6) $\alpha + i\beta$, जहाँ $(\alpha, \beta(\neq 0) \in R$ एक मूल होता है यदि और केवल यदि $\alpha - i\beta$ एक संयुग्मी मूल हो, अर्थात् सम्मिश्र मूल सदैव एक वर्ग समीकरण में युग्म के रूप में विद्यमान होते हैं। यदि समीकरण दो सम्मिश्र संख्याओं से अधिक सन्तुष्ट होती है तब वह समीकरण एक सर्वसमिका (identity) $0.x^2 + 0.x + 0 = 0$ अर्थात् $a = 0 = b = c$ में परिणित होती है।

मूलों तथा गुणांकों के मध्य सम्बन्ध (Relations between roots and coefficients)

(1) **वर्ग समीकरण के मूलों तथा गुणांकों के मध्य सम्बन्ध** (Relation between roots and coefficients of quadratic equation) : यदि α तथा β, वर्ग समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) के मूल हैं, तब, मूलों का योगफल $= S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

मूलों का गुणनफल $= P = \alpha.\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

(2) **दिये गये मूलों से समीकरण का निर्माण** (Formation of an equation with given roots) **:** वर्ग समीकरण $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ से प्राप्त मूल α तथा β हैं,

$\therefore \ x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$, अर्थात् $x^2 -$ (मूलों का योग) $x +$ मूलों का गुणनफल $= 0$

$\therefore \ x^2 - Sx + P = 0$

(3) **मूलों के सममित फलन** : α व β में एक फलन सममित फलन कहलाता है, यदि α व β को आपस में परिवर्तित करने पर, फलन में कोई परिवर्तन न हो।

उदाहरणार्थ : $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$, α व β का एक सममित फलन है जबकि $\alpha^2 - \beta^2 + 3\alpha\beta$, α व β का एक सममित फलन नहीं है।

α तथा β में सममित फलन ज्ञात करने के लिए दिये गये व्यंजक को $\alpha + \beta$ व $\alpha\beta$ के पदों में व्यक्त करते हैं। कुछ महत्वपूर्ण परिणाम निम्नलिखित हैं।

(i) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

(ii) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

(iii) $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^3 + \beta^3)(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)$

(iv) $\alpha^5 + \beta^5 = (\alpha^3 + \beta^3)(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)$

(v) $|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$

(vi) $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$

(vii) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)[(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta]$

(viii) $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \beta^2)$

उच्च घात के समीकरण (Higher degree equations)

समीकरण $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ .....(i)

जहाँ गुणांक $a_0, a_1, ..., a_n \in R$ (या C) तथा $a_0 \neq 0$ है, को nवें घात का समीकरण कहते हैं। तब, n मूल $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in C$ होते हैं तथा हम लिख सकते हैं

$p(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)......(x - \alpha_n)$

$= a_0\{x^n - (\Sigma\alpha_1)x^{n-1} + (\Sigma\alpha_1\alpha_2)x^{n-2} - ..... + (-1)^n\alpha_1\alpha_2.....\alpha_n\}$ ......(ii)

(i) व (ii) की तुलना करने पर, $\Sigma\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = -\frac{a_1}{a_0}$

$\Sigma\alpha_1\alpha_2 = \alpha_1\alpha_2 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_2}{a_0}$

तथा इसी प्रकार $\alpha_1\alpha_2.....\alpha_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$

त्रिघातीय समीकरण (Cubic equation) यदि $n = 3$ हो तो समीकरण $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ एक त्रिघात (cubic) समीकरण होता है तथा इसके लिए $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$; $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$; $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

चतुर्थघातीय समीकरणः यदि चतुर्थघातीय समीकरण $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ के मूल α, β, γ, तथा δ हैं, तब

$\sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a}$

$\sigma_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = \frac{c}{a}$

$\sigma_3 = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -\frac{d}{a}$

$\sigma_4 = \alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a}$

दिये गये मूलों से बहुपद समीकरण का निर्माणः यदि $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...\alpha_n$, n घात के एक बहुपद समीकरण के मूल हों तो समीकरण होगा $x^n - \sigma_1x^{n-1} + \sigma_2x^{n-2} - \sigma_3x^{n-3+......}+(-1)^n\sigma_n = 0$

जहाँ $\sigma_r = \sum\alpha_1\alpha_2.....\alpha_r$.

त्रिघातीय समीकरण : यदि α, β, γ एक त्रिघातीय समीकरण के मूल हों तो, $x^3 - \sigma_1x^2 + \sigma_2x - \sigma_3 = 0$

या $x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma = 0$.

चतुर्थ घातीय समीकरण : यदि $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ एक चतुर्थघातीय समीकरण के मूल हों तो समीकरण होगा

$x^4 - \sigma_1x^3 + \sigma_2x^2 - \sigma_3x + \sigma_4 = 0$

या $x^4 - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)x^3 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta$

$+ \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)x^2 - (\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta)\ x + \alpha\beta\gamma\delta = 0$

उभयनिष्ठ मूलों के लिए प्रतिबन्ध
(Condition for common roots)

(1) **केवल एक उभयनिष्ठ मूल हो** (Only one root is common): माना वर्ग समीकरणों $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ तथा $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ का एक उभयनिष्ठ मूल α है।

$\therefore \quad a_1\alpha^2+b_1\alpha+c_1=0$, $a_2\alpha^2+b_2\alpha+c_2=0$

क्रेमर नियम से: $\dfrac{\alpha^2}{\begin{vmatrix}-c_1 & b_1\\ -c_2 & b_2\end{vmatrix}}=\dfrac{\alpha}{\begin{vmatrix}a_1 & -c_1\\ a_2 & -c_2\end{vmatrix}}=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}$

या $\quad \dfrac{\alpha^2}{b_1c_2-b_2c_1}=\dfrac{\alpha}{a_2c_1-a_1c_2}=\dfrac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$

$\therefore \quad \alpha=\dfrac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}=\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_2c_1-a_1c_2}$, $\alpha\neq 0$

अतः एक उभयनिष्ठ मूल के लिये प्रतिबंध

$(c_1a_2-c_2a_1)^2=(b_1c_2-b_2c_1)(a_1b_2-a_2b_1)$ होगा।

(2) **दोनों मूल उभयनिष्ठ हों** (Both roots are common) : अभीष्ट प्रतिबंध $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ होगा।

वर्ग समीकरणों के गुण (Properties of quadratic equation)

(1) यदि $f(a)$ तथा $f(b)$ के चिन्ह विपरीत हैं, तब समीकरण $f(x)=0$ के a तथा b के मध्य कम से कम एक अथवा व्यापक रूप में, विषम संख्या में मूल होंगे।

(2) यदि $f(a)=f(b)$, तब a तथा b का मध्य बिन्दु c इस प्रकार विद्यमान होगा, कि $f'(c)=0$, $a<c<b$.

(3) यदि α समीकरण $f(x)=0$ का मूल है, तब बहुपद $f(x)$, $(x-\alpha)$ से पूर्ण रूप से विभाज्य होगा अथवा $(x-\alpha)$, समीकरण $f(x)$ का गुणनखंड है।

(4) यदि वर्ग समीकरणों $a_1x^2+b_1x+c_1=0$, $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ के मूलों का अनुपात समान है।

अर्थात् $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}=\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}$, तब $\dfrac{b_1^2}{b_2^2}=\dfrac{a_1c_1}{a_2c_2}$.

वर्ग व्यंजक (The quadratic expression)

(1) माना कि $f(x)\equiv ax^2+bx+c,\ a,b,c\in R$, $a>0$ एक वर्ग व्यंजक है। चूँकि $f(x)=a\left\{\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right\}$ ......(i)

है, इसलिए (i) से सत्य है।

(i) $f(x)>0\ (<0)\ \ \forall\ \ x\in R$ यदि और केवल यदि $a>0(<0)$ तथा $D\equiv b^2-4ac<0$.

(ii) $f(x)\geq 0(\leq 0)$ यदि और केवल यदि $a>0(<0)$ तथा $D\equiv b^2-4ac=0$, इस परिस्थिति $(D=0)$ में, $f(x)=0$ यदि और केवल यदि $x=-\dfrac{b}{2a}$

(iii) यदि $D\equiv b^2-4ac>0$ तथा $a>0\ (<0)$ हो, तब

$$f(x)\begin{cases}<0(>0), & f(x)=0, \text{ के मूलों के मध्य सभी } x \text{ के लिए}\\ >0(<0), & f(x)=0, \text{ के मूलों के मध्य न होने वाले सभी } x \text{ के लिए}\\ =0, & f(x)=0, \text{ के सभी मूलों के लिए}\end{cases}$$

(iv) यदि $a>0,(<0)$ तब $f(x)$ का निम्निष्ठ अथवा उच्चिष्ठ मान $x=-\dfrac{b}{2a}$ के लिए होता है तथा यह मान $[f(x)]_{\min(\max)}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ होता है।

(2) **द्विघातीय व्यंजक की चिन्ह परिपाटी** (Sign of quadratic expression) : माना $f(x)=ax^2+bx+c$ या $y=ax^2+bx+c$, जहाँ $a, b, c\in R$ तथा $a\neq 0$, x के कुछ मानों के लिये $f(x)$ धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है। इससे निम्न स्थितियाँ प्राप्त होती हैं।

(i) $a>0$ तथा $D<0$, अतः $f(x)>0$, $x\in R$ के लिये, अर्थात् $f(x)$, x के समस्त वास्तविक मानों के लिये धनात्मक है।

(ii) $a<0$ तथा $D<0$, अतः $f(x)<0$, $x\in R$ के लिये, अर्थात् $f(x)$ x के समस्त वास्तविक मानों के लिये ऋणात्मक है।

(iii) $a>0$ तथा $D=0$, अतः $f(x)\geq 0$, $x\in R$ के लिये, अर्थात् $f(x)$, शीर्ष के अतिरिक्त x के समस्त वास्तविक मानों के लिए धनात्मक है। शीर्ष पर $f(x)=0$ होगा।

(iv) $a<0$ तथा $D=0$, अतः $f(x)\leq 0$ $x\in R$ के लिये, अर्थात् $f(x)$, शीर्ष के अतिरिक्त x के सभी मानों के लिये ऋणात्मक है। शीर्ष पर $f(x)=0$ होगा।

(v) $a>0$ तथा $D>0$ माना $f(x)=0$ के दो वास्तविक मूल α तथा β हैं $(\alpha<\beta)$, तब $f(x)>0$, $x\in(-\infty,\alpha)\cup(\beta,\infty)$ के लिये तथा $f(x)<0$, $x\in(\alpha,\beta)$ के लिये।

(vi) $a<0$ तथा $D>0$ माना $f(x)=0$ के दो वास्तविक मूल α तथा β हैं $(\alpha<\beta)$, तब $f(x)<0$, $x\in(-\infty,\alpha)\cup(\beta,\infty)$ के लिये तथा $f(x)>0$, $x\in(\alpha,\beta)$ के लिये।

(3) **द्विघातीय व्यंजक का ग्राफ** : मान $y=ax^2+bx+c=f(x)$

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right]\Rightarrow y+\frac{D}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

माना $y+\dfrac{D}{4a}=Y$ तथा $X=x+\dfrac{b}{2a}$

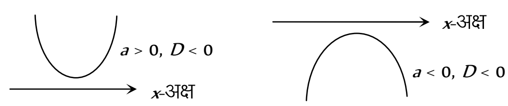
$Y=a.X^2\ \Rightarrow\ X^2=\dfrac{1}{a}Y$

(i) $y=f(x)$ का ग्राफ परवलयाकार होता है।

(ii) परवलय का अक्ष $X=0$ या $x+\dfrac{b}{2a}=0$, (अर्थात् y-अक्ष के समान्तर) है।

(iii) (a) यदि $a>0$, तब परवलय ऊर्ध्वमुखी होगा।

(b) यदि $a<0$, तब परवलय अधोमुखी होगा।



(iv) **अक्षों से प्रतिच्छेदन**

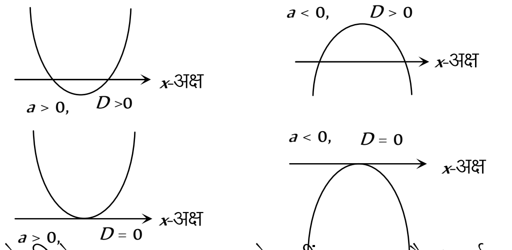
(a) **x-अक्ष :** x-अक्ष के लिए $y=0\Rightarrow ax^2+bx+c=0$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

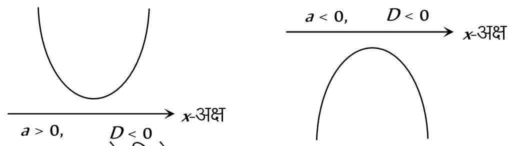
$\Rightarrow ax^2+bx+c=0\ \Rightarrow\ x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$D>0$ के लिये, परवलय x-अक्ष को दो वास्तविक तथा भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर काटता है, अर्थात् $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

$D = 0$ के लिये, परवलय x-अक्ष को एक बिंदु पर स्पर्श करता है, $x = -b/2a$.



$D < 0$ के लिये, परवलय x-अक्ष को नहीं काटता है (अर्थात् x का काल्पनिक मान प्राप्त होता है) ।



(b) **y-अक्ष** : y-अक्ष के लिये $x = 0$, $y = c$

तरंगवक्र विधि (Wavy curve method)

माना $f(x) = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2}(x - a_3)^{k_3}$

$$.......(x - a_{n-1})^{k_{n-1}}(x - a_n)^{k_n} \quad .....(i)$$

जहाँ $k_1, k_2, k_3 ..., k_n \in N$ तथा $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ अचर प्राकृत संख्यायें हैं, जो प्रतिबन्ध $a_1 < a_2 < a_3 ..... < a_{n-1} < a_n$ को संतुष्ट करती हैं।

सर्वप्रथम, हम वास्तविक अक्ष पर संख्याओं $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ को चिन्हित करते हैं तथा a_n के दाँयी ओर धनात्मक चिन्ह् रखते हैं।

यदि k_n सम है, तब हम a_n के बाँयी ओर धन चिन्ह् रखते हैं तथा यदि k_n विषम है, तब a_n के बाँयी ओर ऋण चिन्ह् रखते हैं। अगले अन्तराल में चिन्हों को निम्नलिखित नियम के अनुसार रखते हैं :

जब बिन्दु a_{n-1} से गुजरते हैं, तब बहुपद का चिन्ह् परिवर्तित होता है, यदि k_{n-1} एक विषम संख्या है तथा बहुपद $f(x)$ का चिन्ह् वही रहता है, यदि k_{n-1} एक सम संख्या है। तब हम अगले अन्तराल में चिन्ह रखने के लिये इसी प्रक्रिया को अपनाते हैं, इसी प्रकार सभी अन्तरालों पर विचार करते हैं। $f(x) > 0$ का हल उन सभी अन्तरालों का संघ (Union) होता है, जिसमें धनात्मक चिन्ह होता है तथा $f(x) < 0$ का हल उन सभी अंतरालों का संघ (Union) होता है, जिसमें ऋणात्मक चिन्ह होता है।

मूलों की स्थिति (Position of roots)

(1) यदि $f(x) = 0$ एक समीकरण है तथा a, b दो वास्तविक संख्यायें इस प्रकार हैं कि $f(a).f(b) < 0$ तब समीकरण $f(x) = 0$, a तथा b के बीच में कम से कम एक वास्तविक मूल या वास्तविक मूलों की विषम संख्या रखता है। $f(a)$ तथा $f(b)$ के समान चिन्ह की स्थिति में a तथा b के बीच में $f(x) = 0$ के या तो कोई वास्तविक मूल नहीं या सम संख्या में वास्तविक मूल आते हैं।

(2) यदि प्रथम पद का गुणांक धनात्मक हो तब विषम घात का प्रत्येक समीकरण कम से कम एक वास्तविक मूल रखता है जिसका चिन्ह समीकरण के अचर पद के चिन्ह का विपरीत होता है।

उदाहरणार्थ : $x^3 - 3x + 2 = 0$ का एक वास्तविक ऋणात्मक मूल है।

(3) समघात का प्रत्येक समीकरण जिसका अचर पद ऋणात्मक तथा प्रथम पद का गुणांक धनात्मक हो, कम से कम दो वास्तविक मूल एक धनात्मक तथा एक ऋणात्मक रहता है।

उदाहरणार्थ: $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 5x - 2 = 0$ के दो वास्तविक मूल एक धनात्मक व एक ऋणात्मक है।

(4) यदि एक समीकरण केवल एक चिन्ह् परिवर्तन रखता है, तब यह एक धनात्मक मूल रखता है और अधिक नहीं।

(5) यदि एक समीकरण के सभी पद धनात्मक हैं तथा समीकरण x की विषम घातों को नहीं रखता, तब इसके सभी मूल सम्मिश्र होते हैं।

चिन्हों का डिस्कार्ट का नियम (Descarte's rule of signs)

किसी बहुपद समीकरण $f(x) = 0$ के अधिकतम धनात्मक मूलों की संख्या, $f(x)$ में चिन्ह परिवर्तन की संख्या के बराबर होती है।

बहुपद समीकरण $f(x) = 0$ में अधिकतम ऋणात्मक मूलों की संख्या, $f(-x)$ में चिन्ह परिवर्तन की संख्या के बराबर होती है।

परिमेय बीजीय असमिकायें (Rational algebraic inequations)

(1) **x के वास्तविक मानों के लिये परिमेय व्यंजक $P(x)/Q(x)$ के मान, जहाँ $P(x)$ तथा $Q(x)$ द्विघातीय व्यंजक हैं** : x के वास्तविक मानों के लिये $\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$ के रूप के परिमेय व्यंजक का मान ज्ञात करने के लिये निम्न क्रिया विधि अपनाते हैं।

क्रियाविधि :

Step I: दिये गये परिमेय व्यंजक को y के बराबर रखते हैं।

Step II: step I के व्यंजक का सरलीकरण कर x में द्विघातीय समीकरण प्राप्त करते हैं।

Step III: Step II के द्विघातीय समीकरण का विविक्तकर ज्ञात करते हैं।

Step IV: विविक्तकर ≥ 0 रखते हैं तथा असमिका को y के लिये हल करते हैं। इस प्रकार प्राप्त y के मान दिये गए व्यंजक के मानों का समुच्च्य कहलाते हैं।

(2) **परिमेय बीजीय असमिकाओं का हल** : यदि $P(x)$ तथा $Q(x)$, x में बहुपद हैं, तब असमिकाओं $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ तथा $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ को परिमेय बीजीय असमिकायें कहते हैं।

इन असमिकाओं को हल करने के लिये हम निम्न क्रियाविधि का उपयोग करते हैं।

क्रियाविधि :

Step I: $P(x)$ तथा $Q(x)$ ज्ञात करते हैं।

Step II: $P(x)$ तथा $Q(x)$ को रेखीय गुणनखण्डों में विभक्त करते हैं।

Step III: सभी गुणनखण्डों में x के गुणांक को धनात्मक बनाते हैं।

Step IV: सभी गुणनखंडों को शून्य के बराबर रखकर चरम बिंदु ज्ञात करते हैं।

Step V: संख्या रेखा पर चरम बिन्दुओं को अंकित करते हैं। यदि चरम बिन्दुओं की संख्या n हो, तब ये संख्या रेखा को $(n+1)$ भागों में विभाजित करते हैं।

Step VI: दाँयी ओर, अंतिम भाग में व्यंजक $\frac{P(x)}{Q(x)}$ धनात्मक चिन्ह रखता है तथा अन्य भागों में व्यंजक धनात्मक या ऋणात्मक चिन्ह रखता है, जो गुणनखंडों की घातों पर निर्भर करता है।

(3) **लैगरान्ज सर्वसमिका** (Lagrange's identity)

यदि $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in R$ तो

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2$$

रैखिक, द्विघातीय तथा चतुर्थघातीय समीकरण में परिवर्तन होने योग्य समीकरण (Equations which can be reduced to linear, Quadratic and Biquadratic equations)

Type I : $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=A$ के रूप का समीकरण

जहाँ $a<b<c<d$, $b-a=d-c$ को चर में परिवर्तन कर हल कर सकते हैं।

अर्थात् $y=\frac{(x-a)+(x-b)+(x-c)+(x-d)}{4}$

$y=x-\frac{(a+b+c+d)}{4}$.

Typ II : $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=Ax^2$ के रूप का समीकरण

जहाँ $ab=cd$ को चर $y=x+\frac{ab}{x}$ में परिवर्तन द्वारा दो वर्ग समीकरणों में परिवर्तित कर सकते हैं।

Type III : $(x-a)^4+(x-b)^4=A$ के रूप का समीकरण चर में परिवर्तन अर्थात् $y=\frac{(x-a)+(x-b)}{2}$ में प्रतिस्थापित कर हल कर सकते हैं।

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम (Some important results)

(1) वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के लिए

(i) एक मूल दूसरे मूल का व्युत्क्रम होगा यदि $a=c$.

(ii) एक मूल शून्य होगा यदि $c=0$.

(iii) दोनों मूल परिमाण में बराबर परन्तु चिन्ह में विपरीत होंगे यदि $b=0$.

(iv) दोनों मूल शून्य होंगे यदि $b=c=0$.

(v) दोनों मूल धनात्मक होंगे यदि a व c समान चिन्ह् के हों तथा b का चिन्ह विपरीत हो।

(vi) दोनों मूल विपरीत चिन्ह के होंगे यदि a व c के चिन्ह् विपरीत हों।

(vii) मूल ऋणात्मक होंगे यदि a,b,c के चिन्ह समान हों।

(2) यदि $f(x)=ax^2+bx+c$, जहाँ $a>0$ तब

(i) $f(x)=0$ के दोनों मूलों के एक दी गई संख्या k से अधिक होने का प्रतिबन्ध $b^2-4ac\ge 0; f(k)>0; \frac{-b}{2a}>k$.

(ii) $f(x)=0$ के दोनों मूलों के एक दी गई संख्या k से कम होने का प्रतिबन्ध $b^2-4ac\ge 0$, $f(k)>0$, $\frac{-b}{2a}<k$.

(iii) संख्या k, $f(x)=0$ के मूलों के बीच में स्थित होगी, यदि $b^2-4ac>0; f(k)<0$.

(iv) $f(x)=0$ के दोनों मूलों का k_1 व k_2 के बीच में स्थित होने का $f(k_1)f(k_2)<0, b^2-4ac>0$ है।

(v) दोनों संख्याओं k_1 व k_2 का $f(x)=0$ के मूलों के बीच में स्थित होने का प्रतिबन्ध $f(k_1)>0, f(k_2)>0, b^2-4ac\ge 0$ तथा $k_1<\frac{-b}{2a}<k_2$, जहाँ $k_1<k_2$.

(vi) दोनों संख्याओं k_1 व k_2 का $f(x)=0$ के मूलों के बीच में स्थित होने का प्रतिबन्ध $b^2-4ac>0; f(k_1)<0; f(k_2)<0$ है।

Tips & Tricks

- n घात के समीकरण के n मूल (वास्तविक या काल्पनिक) होते हैं।
- विषम घात का समीकरण कम से कम एक वास्तविक मूल रखता है, जिसका चिन्ह समीकरण के अन्तिम पद (अचर पद) के विपरीत होता है, जबकि उच्चतम घात के पद का गुणांक धनात्मक हो ।
- प्रत्येक सम घात का समीकरण जिसका अचर पद ऋणात्मक तथा उच्चतम घात के पद का गुणांक धनात्मक हो, कम से कम दो वास्तविक मूल रखता है, जिसमें एक धनात्मक व एक ऋणात्मक होता है।

यदि $f(\alpha)=0$ व $f'(\alpha)=0$, तो α वर्ग समीकरण $f(x)=0$ का पुनरावृत्त मूल होगा तथा $f(x)=a(x-\alpha)^2$, स्पष्टतः $\alpha=\frac{-b}{2a}$.

- यदि α वर्ग समीकरण $f(x)=ax^2+bx+c=0$ का एक पुनरावृत्त मूल है तो α, $f'(x)=0$ का भी एक मूल होगा।
- यदि α दो वर्ग समीकरणों $f(x)=0$ तथा $\phi(x)=0$ का एक पुनरावृत्त उभयनिष्ठ मूल है, तो α वर्ग समीकरणों $f'(x)=0$ तथा $\phi'(x)=0$ का भी एक उभयनिष्ठ मूल होगा।
- वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ $[a,b,c\in R]$ में, यदि $a+b+c=0$ तो समीकरण के मूल 1, c/a होंगे तथा यदि $a-b+c=0$, तो मूल -1 व $-c/a$ होंगे।
- यदि वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल $p:q$ में हो, तो $pqb^2=(p+q)^2ac$.
- यदि वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का एक मूल दूसरे का nवीं घात है तो $(ac^n)^{\frac{1}{n+1}}+(a^nc)^{\frac{1}{n+1}}+b=0$.
- यदि वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल α,β, हों, तो $cx^2+bx+a=0$ के मूल $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$ होंगे।
- वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल $a'x^2+b'x+c'=0$ के मूलों के व्युत्क्रम होंगे यदि $(cc'-aa')^2=(ba'-cb')(ab'-bc')$.
- यदि वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का एक मूल दूसरे का k गुना हों, तो $\frac{(k+1)^2}{k}=\frac{b^2}{ac}$.
- यदि एक समीकरण केवल एक चिन्ह् परिवर्तन रखता है, तब यह एक धनात्मक मूल रखता हैं और अधिक नहीं।
- यदि एक समीकरण के सभी पद धनात्मक हैं तथा समीकरण x की विषम घातों को नहीं रखता, तब इसके सभी मूल सम्मिश्र होते हैं।
- दो वर्ग समीकरणों में उभयनिष्ठ मूल ज्ञात करने के लिए, द्विघात के पद के गुणांक के दोनों समीकरणों में समान कर घटाते हैं। इस प्रकार प्राप्त x का मान अभीष्ट उभयनिष्ठ मूल हैं।
- परिमेय गुणांकों वाले दो विभिन्न वर्ग समीकरणों में एक अपरिमेय या काल्पनिक मूल उभयनिष्ठ नहीं हो सकता है क्योंकि अपरिमेय तथा काल्पनिक मूल सदैव युग्म रूप में विद्यमान होते हैं।

OT Ordinary Thinking

Objective Questions

वर्ग समीकरण के हल व मूलों की प्रकृति

1. समीकरण $a(x^2+1)-(a^2+1)x=0$ के मूल हैं

(a) $a, \frac{1}{a}$ (b) $a, 2a$

(c) $a, \frac{1}{2a}$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. समीकरण $x^4-8x^2-9=0$ के मूल हैं

(a) $\pm 3, \pm 1$ (b) $\pm 3, \pm i$

(c) $\pm 2, \pm i$ (d) इनमें से कोई नहीं

3. समीकरण $ix^2-4x-4i=0$ के मूल हैं

(a) $-2i$ (b) $2i$

(c) $-2i, -2i$ (d) $2i, 2i$

4. समीकरण $x^{2/3}+x^{1/3}-2=0$ के मूल हैं [UPSEAT 2004]

(a) 1, 4 (b) 1, –4

(c) 1, –8 (d) 1, 8

5. यदि $x=2+2^{2/3}+2^{1/3}$, तब $x^3-6x^2+6x=$ [MNR 1985]

(a) 3 (b) 2

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

6. वर्ग समीकरण $8\sec^2\theta-6\sec\theta+1=0$ के मूलों की संख्या है [Pb. CET 1989, 94]

(a) अनन्त (b) 1

(c) 2 (d) 0

7. समीकरण $\sqrt{3x+1}+1=\sqrt{x}$ के मूल हैं

(a) 0 (b) 1

(c) 0, 1 (d) इनमें से कोई नहीं

8. वह अंक जो अपने धनात्मक वर्गमूल से 12 अधिक है, है

(a) 9 (b) 16

(c) 25 (d) इनमें से कोई नहीं

9. समीकरण $3^{2x}-10.3^x+9=0$ के मूल हैं

(a) 1, 2 (b) 0, 2

(c) 0, 1 (d) 1, 3

10. यदि $x^{2/3}-7x^{1/3}+10=0$, तब $x=$ [BIT Ranchi 1992]

(a) {125} (b) {8}

(c) ϕ (d) {125, 8}

11. यदि $x^2+y^2=25$, $xy=12$, तब $x=$ [BIT Ranchi 1992]

(a) {3, 4} (b) {3, –3}

(c) {3, 4, –3, –4} (d) {–3, –3}

12. समीकरण $x^{\log_x (1-x)^2}=9$ का हल समुच्चय है [Pb. CET 2003]

(a) {– 2, 4}

(b) {4}

(c) {0, – 2, 4}

(d) इनमें से कोई नहीं

13. माना समीकरण $ax^2+bx+c=0$ जहाँ a, b, c पूर्णांक हैं, का एक मूल $3+\sqrt{5}$ है, तो दूसरा मूल होगा [MNR 1982]

(a) $3-\sqrt{5}$ (b) 3

(c) $\sqrt{5}$ (d) इनमें से कोई नहीं

14. समीकरण $|x|^2-3|x|+2=0$ के वास्तविक हलों की संख्या है [IIT 1982, 89; MP PET 1997; DCE 2002; AMU 2000; UPSEAT 1999; AIEEE 2003]

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

15. समीकरण $e^{\sin x}-e^{-\sin x}-4=0$ के वास्तविक मूलों की संख्या है [IIT 1982; Pb. CET 2000]

(a) 1 (b) 2

(c) अनन्त (d) इनमें से कोई नहीं

16. समीकरण $|x^2+4x+3|+2x+5=0$ के वास्तविक हलों की संख्या है

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

17. समीकरण $(p-q)x^2+(q-r)x+(r-p)=0$ के मूल हैं [RPET 1986; MP PET 1999; Pb. CET 2004]

(a) $\frac{p-q}{r-p}, 1$ (b) $\frac{q-r}{p-q}, 1$

(c) $\frac{r-p}{p-q}, 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

18. यदि समीकरण $x^2+px+12=0$ का एक मूल 4 हो जबकि समीकरण $x^2+px+q=0$ के मूल बराबर हैं तो q का मान होगा [RPET 1991; AIEEE 2004]

(a) 4 (b) 4/49

(c) 49/4 (d) इनमें से कोई नहीं

19. समीकरण $x-\frac{2}{x-1}=1-\frac{2}{x-1}$ के मूल हैं [IIT 1984; UPSEAT 1999; Pb. CET 2003]

(a) एक (b) दो

(c) अनन्त (d) इनमें से कोई नहीं

20. समीकरण $x+\frac{1}{x}=2$ का हल होगा [MNR 1983]

(a) 2, –1 (b) $0, -1, -\frac{1}{5}$

(c) $-1, -\frac{1}{5}$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. यदि समीकरण $2x^2+6x+\alpha^2+1=0$ के मूलों का गुणनफल $-\alpha$ है तो α का मान होगा

(a) –1 (b) 1

(c) 2 (d) –2

22. यदि $\sqrt{3x^2-7x-30}+\sqrt{2x^2-7x-5}=x+5$ हो, तो x बराबर है

(a) 2 (b) 3

(c) 6 (d) 5

23. $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+.........\infty}}$ का मान है

(a) $1-\sqrt{2}$ (b) $1+\sqrt{2}$

(c) $1\pm\sqrt{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

24. समीकरण $2^{x+2}27^{x/(x-1)}=9$ के मूल हैं

(a) $1-\log_2 3, 2$ (b) $\log_2\left(\frac{2}{3}\right), 1$

(c) 2,–2 (d) $-2, 1-\frac{\log 3}{\log 2}$

25. माना α व β समीकरण $x^2+x+1=0$ के मूल हैं। वह समीकरण जिसके मूल α^{19}, β^7 हैं, होगा [IIT Screening 1994]

(a) $x^2-x-1=0$ (b) $x^2-x+1=0$

(c) $x^2+x-1=0$ (d) $x^2+x+1=0$

26. यदि $|x-2|+|x-3|=7$, तब $x=$

(a) 6 (b) –1

(c) 6 या –1 (d) इनमें से कोई नहीं

27. यदि समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के भिन्न मूल x_1, x_2, x_3 हों तो

(a) $a=b=0, c\in R$ (b) $a=c=0, b\in R$

(c) $b^2-4ac\ge 0$ (d) $a=b=c=0$

28. समीकरण $|x|^2-7|x|+12=0$ के मूलों की संख्या है [MNR 1995]

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

29. $\frac{\log 5+\log(x^2+1)}{\log(x-2)}=2$ के हलों की संख्या है

(a) 2 (b) 3

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

30. यदि $x=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$, तब $x+\frac{1}{x}=$ [EAMCET 1994]

(a) 4 (b) 6

(c) 3 (d) 2

31. यदि $\log_2 x+\log_x 2=\frac{10}{3}=\log_2 y+\log_y 2$ तथा $x\ne y$, तब $x+y=$ [EAMCET 1994]

(a) 2 (b) 65/8

(c) 37/6 (d) इनमें से कोई नहीं

32. $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....}}}$ का मान है [Karnataka CET 2001]

(a) –1 (b) 1

(c) 2 (d) 3

33. समीकरण $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$ में x का मान होगा

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{3}{2}$

(c) $\frac{2}{1}$ (d) $\frac{5}{3}$

34. समीकरण $e^x-x-1=0$ के होंगे [Kurukshetra CEE 1998]

(a) केवल एक वास्तविक मूल $x=0$

(b) कम से कम दो वास्तविक मूल

(c) ठीक दो वास्तविक मूल

(d) अनन्त वास्तविक मूल

35. समीकरण $\sqrt{(x+1)}-\sqrt{(x-1)}=\sqrt{(4x-1)}$ के होंगे [IIT 1997 Cancelled]

(a) कोई हल नहीं (b) एक हल

(c) दो हल (d) दो से अधिक हल

36. समीकरण $\log_e x+\log_e(1+x)=0$ को निम्न प्रकार लिख सकते हैं [Kurukshetra CEE 1998; MP PET 1989]

(a) $x^2+x-e=0$ (b) $x^2+x-1=0$

(c) $x^2+x+1=0$ (d) $x^2+xe-e=0$

37. यदि $x=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+....\infty}}}$, तब [Pb. CET 1999]

(a) x एक अपरिमेय संख्या है (b) $2<x<3$

(c) $x=3$ (d) इनमें से कोई नहीं

38. समीकरण $x^2+5|x|+4=0$ के वास्तविक हल होंगे [UPSEAT 1993, 99; Orissa JEE 2004]

(a) – 1, 4 (b) 1, 4

(c) – 4, 4 (d) इनमें से कोई नहीं

39. समीकरण $\log_4\{\log_2(\sqrt{x+8}-\sqrt{x})\}=0$ का एक वास्तविक मूल होगा [AMU 1999]

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

40. $\{x\in R: |x-2|=x^2\}=$ [EAMCET 2000]

(a) {– 1, 2} (b) {1, 2}

(c) {– 1, – 2} (d) {1, – 2}

41. $\log_4(x-1)=\log_2(x-3)$ के हलों की संख्या होगी [IIT Screening 2001]

(a) 3 (b) 1

(c) 2 (d) 0

42. $|x-2|^2+|x-2|-6=0$ के मूल होंगे [UPSEAT 2003]

(a) 0, 4 (b) –1, 3

(c) 4, 2 (d) 5, 1

43. समीकरण $\frac{p+q-x}{r}+\frac{q+r-x}{p}+\frac{r+p-x}{q}+\frac{3x}{p+q+r}=0$ का हल है [MP PET 2004]

(a) $x=p+q+r$ (b) $x=p-q+r$

(c) $x=\frac{p+q}{q+r}$ (d) $x=\frac{p}{q}+r$

44. समीकरण $x^2-5|x|+6=0$ के हलों की संख्या है [Karnataka CET 2004]

(a) 4 (b) 3

(c) 2 (d) 1

45. यदि समीकरण $(m^2+1)x^2+2amx+a^2-b^2=0$ के मूल बराबर हों तो

(a) $a^2+b^2(m^2+1)=0$ (b) $b^2+a^2(m^2+1)=0$

(c) $a^2-b^2(m^2+1)=0$ (d) $b^2-a^2(m^2+1)=0$

46. यदि $P(x)=ax^2+bx+c$ व $Q(x)=-ax^2+dx+c$ जहाँ $ac\ne 0$, तो $P(x).Q(x)=0$ कम से कम रखता है [IIT 1985; Pb. CET 2003; AMU 2005]

(a) चार वास्तविक मूल (b) दो वास्तविक मूल

(c) चार काल्पनिक मूल (d) इनमें से कोई नहीं

47. समीकरण $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ के दोनों मूल सदैव होंगे [MNR 1986; IIT 1980; Kurukshetra CEE 1998; RPET 2002]

(a) धनात्मक (b) ऋणात्मक

(c) वास्तविक (d) काल्पनिक

48. यदि समीकरण $2x^2+3(\lambda-2)x+\lambda+4=0$ के मूल परिमाण में बराबर तथा चिन्ह में विपरीत हों तो $\lambda=$
(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 2/3

49. यदि समीकरण $(p^2+q^2)x^2-2q(p+r)x+(q^2+r^2)=0$ के मूल वास्तविक तथा बराबर हों तो p,q,r होंगे
(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

50. यदि $a+b+c=0$, तब समीकरण $4ax^2+3bx+2c=0$ के मूल हैं
(a) समान (b) अधिकल्पित
(c) वास्तविक (d) इनमें से कोई नहीं

51. समीकरण $2(a^2+b^2)x^2+2(a+b)x+1=0$ के मूल हैं
(a) परिमेय (b) अपरिमेय
(c) वास्तविक (d) अधिकल्पित

52. यदि समीकरणों $px^2+2qx+r=0$ तथा $qx^2-2\sqrt{pr}x+q=0$ के मूल वास्तविक हों, तो
(a) $p=q$ (b) $q^2=pr$
(c) $p^2=qr$ (d) $r^2=pq$

53. यदि समीकरण $ax^2+x+b=0$ के मूल वास्तविक हों, तो समीकरण $x^2-4\sqrt{ab}x+1=0$ के मूल होंगे
(a) परिमेय (b) अपरिमेय
(c) वास्तविक (d) अधिकल्पित

54. यदि समीकरणों $x^2+ax+b=0$ तथा $x^2+bx+a=0$ का एक मूल संपाती हो तो $(a+b)$ का संख्यात्मक मान होगा
[IIT 1986; RPET 1992; EAMCET 2002]
(a) 0 (b) – 1
(c) 2 (d) 5

55. समीकरण $x^{(3/4)(\log_2 x)^2+(\log_2 x)-5/4}=\sqrt{2}$ रखता है [IIT 1989]
(a) कम से कम एक वास्तविक हल
(b) तीन वास्तविक हल
(c) एक अपरिमेय हल
(d) उपरोक्त सभी

56. यदि $a>0, b>0, c>0$ तब समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के दोनों मूल होंगे [IIT 1990]
(a) वास्तविक तथा ऋणात्मक
(b) वास्तविक भाग ऋणात्मक
(c) परिमेय संख्याएँ
(d) इनमें से कोई नहीं

57. k का वह मान जिसके लिये समीकरण $2x^2-kx+x+8=0$ के मूल वास्तविक एवं बराबर हों [BIT Ranchi 1990]
(a) –9 तथा –7 (b) 9 तथा 7
(c) –9 तथा 7 (d) 9 तथा –7

58. द्विघात समीकरण $2x^2+3x+1=0$ के मूल होंगे [IIT 1983]
(a) अपरिमेय (b) परिमेय
(c) काल्पनिक (d) इनमें से कोई नहीं

59. यदि l,m,n वास्तविक हों तथा $l\neq m$, तो समीकरण $(l-m)x^2-5(l+m)x-2(l-m)=0$ के मूल होंगे
[IIT 1979; RPET 1983]
(a) सम्मिश्र (b) वास्तविक व भिन्न
(c) वास्तविक व बराबर (d) इनमें से कोई नहीं

60. यदि समीकरण $x^2-8x+(a^2-6a)=0$ के मूल वास्तविक हों, तो
[RPET 1987, 97; MP PET 1999]
(a) $-2<a<8$ (b) $2<a<8$
(c) $-2\le a\le 8$ (d) $2\le a\le 8$

61. समीकरण $x^2+2\sqrt{3}x+3=0$ के मूल हैं [RPET 1986]
(a) वास्तविक एवं भिन्न
(b) परिमेय व बराबर
(c) अपरिमेय व बराबर
(d) अपरिमेय व भिन्न

62. यदि समीकरण $(\cos p-1)x^2+(\cos p)x+\sin p=0$ के मूल वास्तविक हों, तो [IIT 1990; RPET 1995]
(a) $p\in(-\pi,0)$ (b) $p\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
(c) $p\in(0,\pi)$ (d) $p\in(0,2\pi)$

63. यदि $x^2+2x+2xy+my-3$ के दो परिमेय गुणनखण्ड हों तो m का मान है [RPET 1990]
(a) –6,–2 (b) –6,2
(c) 6,–2 (d) 6, 2

64. यदि a तथा b विषम पूर्णांक हैं, तो समीकरण $2ax^2+(2a+b)x+b=0, a\neq 0,$ के मूल होंगे [Pb. CET 1988]
(a) परिमेय (b) अपरिमेय
(c) अवास्तविक (d) बराबर

65. $ax^2+b=0$ के मूल वास्तविक और भिन्न होंगे यदि
(a) $ab>0$ (b) $ab<0$
(c) $a,b>0$ (d) $a,b<0$

66. समीकरणों $2x^2-5x+1=0$ व $x^2+5x+2=0$ के मूल हैं
(a) व्युत्क्रमणीय व समान चिन्हों के
(b) व्युत्क्रमणीय व विपरीत चिन्हों के
(c) गुणनफल में बराबर
(d) इनमें से कोई नहीं

67. यदि $a+b+c=0,\ a\neq 0, a,b,c\in Q$, तो समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के दोनों मूल हैं
(a) परिमेय (b) अवास्तविक
(c) अपरिमेय (d) शून्य

68. यदि $a,b,c\in Q$, तब समीकरण $(b+c-2a)x^2+(c+a-2b)x+(a+b-2c)=0$ के मूल हैं
(a) परिमेय (b) अवास्तविक
(c) अपरिमेय (d) बराबर

69. व्यंजक $x^2+2bx+c$ का मान धनात्मक होगा यदि [Roorkee 1995]
(a) $b^2-4c>0$ (b) $b^2-4c<0$
(c) $c^2<b$ (d) $b^2<c$

70. यदि समीकरण $4x^2+px+9=0$ के मूल समान हों, तो p का निरपेक्ष मान है [MP PET 1995]
(a) 144 (b) 12
(c) –12 (d) ±12

71. समीकरण $(c^2-ab)x^2-2(a^2-bc)x+(b^2-ac)=0$ के मूल बराबर होने का प्रतिबन्ध है [TS Rajendra 1982]
(a) $a=0$ (b) $b=0$
(c) $c=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

72. यदि $b_1b_2 = 2(c_1 + c_2)$ तब समीकरणों $x^2 + b_1x + c_1 = 0$ तथा $x^2 + b_2x + c_2 = 0$ में से कम से कम एक रखता है

(a) वास्तविक मूल
(b) पूर्णतः अधिकल्पित मूल
(c) अधिकल्पित मूल
(d) इनमें से कोई नहीं

73. k का वह मान जिसके लिये वर्ग समीकरण, $kx^2 + 1 = kx + 3x - 11x^2$ के मूल वास्तविक तथा बराबर हों, हैं [BIT Ranchi 1993]

(a) $-11, -3$ (b) $5, 7$
(c) $5, -7$ (d) इनमें से कोई नहीं

74. व्यंजक $y = ax^2 + bx + c$ सदैव c के समान चिन्ह रखता है यदि

(a) $4ac < b^2$ (b) $4ac > b^2$
(c) $ac < b^2$ (d) $ac > b^2$

75. यदि समीकरण $\frac{a}{x+a+m} + \frac{b}{x+b+m} = 1$ के मूल परिमाण में बराबर व चिन्ह में विपरीत हों, तो m का मान होगा

(a) $\frac{a+b}{a-b}$ (b) 0
(c) $\frac{a-b}{a+b}$ (d) $\frac{2(a-b)}{a+b}$

76. यदि समीकरण $(a^2 + b^2)t^2 - 2(ac + bd)t + (c^2 + d^2) = 0$ के मूल बराबर हों, तब [MP PET 1996]

(a) $ab = dc$ (b) $ac = bd$
(c) $ad + bc = 0$ (d) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

77. k के किन मानों के लिये समीकरण $x^2 - 2(1 + 3k)x + 7(3 + 2k) = 0$ के मूल बराबर होंगे [MP PET 1997]

(a) $1, -\frac{10}{9}$ (b) $2, -\frac{10}{9}$
(c) $3, -\frac{10}{9}$ (d) $4, -\frac{10}{9}$

78. यदि समीकरण $x^2 + a^2 = 8x + 6a$ के मूल वास्तविक हैं, तो [MP PET 1999]

(a) $a \in [2, 8]$ (b) $a \in [-2, 8]$
(c) $a \in (2, 8)$ (d) $a \in (-2, 8)$

79. यदि $p, q \in \{1, 2, 3, 4\}$ तो समीकरण $px^2 + qx + 1 = 0$ जैसे समीकरणों की संख्या जिनके मूल वास्तविक हों, हैं [IIT Screening 1994]

(a) 15 (b) 9
(c) 7 (d) 8

80. k के किस मान के लिये समीकरण $x^2 - (3k - 1)x + 2k^2 + 2k - 11 = 0$ के मूल समान होंगे [Karnataka CET 1998]

(a) 5 (b) 9
(c) (a) तथा (b) दोनों (d) 0

81. k के किस मान के लिये समीकरण $(k - 2)x^2 + 8x + k + 4 = 0$ के दोनों मूल वास्तविक, भिन्न तथा ऋणात्मक होंगे [Orissa JEE 2002]

(a) 0 (b) 2
(c) 3 (d) -4

82. यदि $k \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, तब समीकरण $x^2 + 2kx + 4 = 0$ के मूल होंगे [DCE 2002]

(a) सम्मिश्र
(b) वास्तविक तथा भिन्न
(c) वास्तविक तथा बराबर
(d) एक वास्तविक और एक काल्पनिक

83. यदि समीकरण $(m - n)x^2 + (n - l)x + l - m = 0$ के मूल बराबर हों तो l, m तथा n निम्न को संतुष्ट करेंगे [DCE 2002]

(a) $2l = m + n$ (b) $2m = n + l$
(c) $m = n + l$ (d) $l = m + n$

84. न्यूनतम पूर्णांक k के किस मान के लिये समीकरण $x^2 + 5x + k = 0$ के मूल काल्पनिक होंगे [Kerala (Engg.) 2002]

(a) 4 (b) 5
(c) 6 (d) 7

85. यदि समीकरण $4x^2 + 6px + 1 = 0$ के मूल समान हों तो p का मान होगा [MP PET 2003]

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{1}{3}$
(c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{4}{3}$

86. $x^2 + x + 1 + 2k(x^2 - x - 1) = 0$ के पूर्ण वर्ग होने के लिये k के मानों की संख्या हैं [Orissa JEE 2004]

(a) 2 (b) 0
(c) 1 (d) 3

87. यदि $\sin A, \sin B, \cos A$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं तो समीकरण $x^2 + 2x \cot B + 1 = 0$ के मूल सदैव होंगे [Orissa JEE 2005]

(a) वास्तविक
(b) काल्पनिक
(c) 1 से बड़ा
(d) बराबर

88. समीकरण $x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ के वास्तविक मूल होने के लिये 'a' तथा 'b' के मान होंगे [DCE 2005]

(a) $-6, -4$ (b) $-6, 5$
(c) $-6, 4$ (d) $6, -4$

मूलों तथा गुणांकों के मध्य सम्बन्ध

1. यदि समीकरण $5x^2 + 13x + k = 0$ का एक मूल एक–दूसरे का व्युत्क्रम हो तो $k =$ [MNR 1980, 1983]

(a) 0 (b) 5
(c) 1/6 (d) 6

2. यदि α तथा β समीकरण $4x^2 + 3x + 7 = 0$ के मूल हों तो $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} =$ [MNR 1981; RPET 1990]

(a) $-\frac{3}{7}$ (b) $\frac{3}{7}$
(c) $-\frac{3}{5}$ (d) $\frac{3}{5}$

3. यदि समीकरण $(a + 1)x^2 + (2a + 3)x + (3a + 4) = 0$ के मूलों का गुणनफल 2 हो, तो मूलों का योग है

(a) 1 (b) –1
(c) 2 (d) –2

4. यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α तथा β हों तो समीकरण $cx^2 + bx + a = 0$ के मूल होंगे

[MNR 1988; RPET 2003]

(a) $-\alpha,-\beta$ (b) $\alpha,\frac{1}{\beta}$

(c) $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$ (d) इनमें से कोई नहीं

5. यदि α,β समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल हों, तो वह समीकरण जिसके मूल $\alpha+\frac{1}{\beta}$ तथा $\beta+\frac{1}{\alpha}$ होंगे, है [RPET 1991]

(a) $acx^2+(a+c)bx+(a+c)^2=0$

(b) $abx^2+(a+c)bx+(a+c)^2=0$

(c) $acx^2+(a+b)cx+(a+c)^2=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

6. यदि समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का एक मूल समीकरण $a'x^2+b'x+c'=0$ के एक मूल का व्युत्क्रम हो, तो [IIT 1968]

(a) $(cc'-aa')^2=(ba'-cb')(ab'-bc')$

(b) $(bb'-aa')^2=(ca'-bc')(ab'-bc')$

(c) $(cc'-aa')^2=(ba'+cb')(ab'+bc')$

(d) इनमें से कोई नहीं

7. यदि α तथा β समीकरण $2x^2+2(a+b)x+a^2+b^2=0$ के मूल हों, तो वह समीकरण जिसके मूल $(\alpha+\beta)^2$ तथा $(\alpha-\beta)^2$ होंगे, है

(a) $x^2-2abx-(a^2-b^2)^2=0$

(b) $x^2-4abx-(a^2-b^2)^2=0$

(c) $x^2-4abx+(a^2-b^2)^2=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

8. यदि $2+i\sqrt{3}$ समीकरण $x^2+px+q=0$ जहाँ p तथा q वास्तविक हैं, का एक मूल हो, तो $(p,q)=$

[IIT 1981; MP PET 1997, 2004]

(a) $(-4,7)$ (b) $(4,-7)$

(c) (4, 7) (d) $(-4,-7)$

9. यदि समीकरण $\lambda x^2+2x+3\lambda=0$ के मूलों का योग उनके गुणनफल के बराबर हो, तो $\lambda=$

(a) 4 (b) –4

(c) 6 (d) इनमें से कोई नहीं

10. यदि α तथा β समीकरण $x^2+6x+\lambda=0$ के मूल हों और $3\alpha+2\beta=-20$ हों, तो $\lambda=$

(a) –8 (b) –16

(c) 16 (d) 8

11. यदि α तथा β समीकरण $2x^2-3x+4=0$ के मूल हों, तो वह समीकरण जिसके मूल α^2 तथा β^2 होंगे, है

(a) $4x^2+7x+16=0$

(b) $4x^2+7x+6=0$

(c) $4x^2+7x+1=0$

(d) $4x^2-7x+16=0$

12. यदि α तथा β समीकरण $x^2-a(x+1)-b=0$ के मूल हों, तो $(\alpha+1)(\beta+1)=$

(a) b (b) $-b$

(c) $1-b$ (d) $b-1$

13. यदि α तथा β समीकरण $2x^2-2(m^2+1)x+m^4+m^2+1=0$ के मूल हों, तो $\alpha^2+\beta^2=$

(a) 0 (b) 1

(c) m (d) m^2

14. यदि समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूलों का अनुपात $p:q$ हो, तो [Pb. CET 1994]

(a) $pqb^2+(p+q)^2ac=0$ (b) $pqb^2-(p+q)^2ac=0$

(c) $pqa^2-(p+q)^2bc=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

15. यदि α तथा β समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल हों, तो $\frac{\alpha}{a\beta+b}+\frac{\beta}{a\alpha+b}=$

(a) $\frac{2}{a}$ (b) $\frac{2}{b}$

(c) $\frac{2}{c}$ (d) $-\frac{2}{a}$

16. यदि समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूलों का योग उनके वर्गों के योग के बराबर हो, तो

(a) $a(a+b)=2bc$ (b) $c(a+c)=2ab$

(c) $b(a+b)=2ac$ (d) $b(a+b)=ac$

17. यदि समीकरण $\frac{\alpha}{x-\alpha}+\frac{\beta}{x-\beta}=1$ के मूल परिमाण में बराबर तथा चिन्ह में विपरीत हों, तो $\alpha+\beta=$

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

18. यदि α तथा β समीकरण $x^2-2x+3=0$ के मूल हों, तो वह समीकरण जिसके मूल $\frac{1}{\alpha^2}$ तथा $\frac{1}{\beta^2}$ होंगे, है

(a) $x^2+2x+1=0$ (b) $9x^2+2x+1=0$

(c) $9x^2-2x+1=0$ (d) $9x^2+2x-1=0$

19. यदि α,β समीकरण $x^2+px+1=0$ के तथा γ,δ समीकरण $x^2+qx+1=0$ के मूल हों, तो $q^2-p^2=$

[IIT 1978; DCE 2000]

(a) $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)$

(b) $(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)(\alpha-\delta)(\beta+\delta)$

(c) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)$

(d) इनमें से कोई नहीं

20. यदि α,β समीकरण $x^2-px+q=0$ तथा α',β' समीकरण $x^2-p'x+q'=0$ के मूल हों, तो $(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\alpha')^2+(\alpha-\beta')^2+(\beta-\beta')^2$ का मान होगा

(a) $2\{p^2-2q+p'^2-2q'-pp'\}$

(b) $2\{p^2-2q+p'^2-2q'-qq'\}$

(c) $2\{p^2-2q-p'^2-2q'-pp'\}$

(d) $2\{p^2-2q-p'^2-2q'-qq'\}$

21. यदि $ax^2+bx+c=0$ का एक मूल, दूसरे मूल का वर्ग हो तब $b^3+ac^2+a^2c$ का मान होगा

(a) $3abc$ (b) $-3abc$

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

22. एक वर्ग समीकरण t में, जिसके मूलों का समान्तर माध्य (AM) A है तथा गुणोत्तर माध्य (GM) G है, होगी [IIT 1968, 74]

(a) $t^2-2At+G^2=0$

(b) $t^2 - 2At - G^2 = 0$

(c) $t^2 + 2At + G^2 = 0$

(d) इनमें से कोई नहीं

23. यदि समीकरण $(x-a)(x-b) = c, c \neq 0,$ के मूल α, β हो, तब $(x-\alpha)(x-\beta) + c = 0$ के मूल होंगे [IIT 1992; MP PET 2000; DCE 2000]

(a) a, c (b) b, c

(c) a, b (d) $a+c, b+c$

24. यदि समीकरण $x^2 - px + 8 = 0$ के मूलों का अन्तर 2 हो, तब p का मान होगा [Roorkee 1992]

(a) ± 2 (b) ± 4

(c) ± 6 (d) ± 8

25. यदि वर्ग समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलों का योग, मूलों के व्युत्क्रमों के वर्गों के योग के समान हों तब $\frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}$ होंगे [AIEEE 2003; DCE 2000]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में

(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

26. यदि समीकरण $ax^2 + 2bx + c = 0$ के मूल α तथा β हों, तो $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ का मान होगा [BIT Ranchi 1990]

(a) $\frac{2b}{ac}$ (b) $\frac{2b}{\sqrt{ac}}$

(c) $-\frac{2b}{\sqrt{ac}}$ (d) $\frac{-b}{\sqrt{2}}$

27. वह वर्ग समीकरण जिसके गुणांक वास्तविक हैं तथा जिसका एक मूल $7 + 5i$ है, होगा [RPET 1992]

(a) $x^2 - 14x + 74 = 0$ (b) $x^2 + 14x + 74 = 0$

(c) $x^2 - 14x - 74 = 0$ (d) $x^2 + 14x - 74 = 0$

28. यदि समीकरण $\frac{1}{x+p} + \frac{1}{x+q} = \frac{1}{r}$ के मूल बराबर एवं विपरीत चिन्हों के हैं, तो मूलों का गुणनफल होगा [IIT 1967; RPET 1999]

(a) $\frac{p^2+q^2}{2}$ (b) $-\frac{(p^2+q^2)}{2}$

(c) $\frac{p^2-q^2}{2}$ (d) $-\frac{(p^2-q^2)}{2}$

29. यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल एक–दूसरे के व्युत्क्रम हों, तो [RPET 1985]

(a) $a - c = 0$ (b) $b - c = 0$

(c) $a + c = 0$ (d) $b + c = 0$

30. वह द्विघात समीकरण जिसका एक मूल $2 - \sqrt{3}$ है, होगा [RPET 1985]

(a) $x^2 - 4x - 1 = 0$ (b) $x^2 - 4x + 1 = 0$

(c) $x^2 + 4x - 1 = 0$ (d) $x^2 + 4x + 1 = 0$

31. यदि समीकरण $Ax^2 + Bx + C = 0$ के मूल α तथा β एवं समीकरण $x^2 + px + q = 0$ के मूल α^2, β^2 हों, तो p का मान होगा [RPET 1986]

(a) $\frac{B^2 - 2AC}{A^2}$ (b) $\frac{2AC - B^2}{A^2}$

(c) $\frac{B^2 - 4AC}{A^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

32. वह द्विघात समीकरण जिसका एक मूल $\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ है, होगा [RPET 1987]

(a) $x^2 + 4x - 1 = 0$ (b) $x^2 + 4x + 1 = 0$

(c) $x^2 - 4x - 1 = 0$ (d) $\sqrt{2}x^2 - 4x + 1 = 0$

33. यदि समीकरण $x^2 + x + 1 = 0$ के मूल α, β तथा समीकरण $x^2 + px + q = 0$ के मूल $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ हों, तो p का मान होगा [RPET 1987]

(a) –2 (b) –1

(c) 1 (d) 2

34. यदि α, β समीकरण $x^2 + ax + b = 0$ के मूल हों, तो $\alpha^3 + \beta^3$ का मान होगा [RPET 1989; Pb. CET 1991]

(a) $-(a^3 + 3ab)$ (b) $a^3 + 3ab$

(c) $-a^3 + 3ab$ (d) $a^3 - 3ab$

35. यदि समीकरण $x^2 + px + q = 0$ के मूलों का योग उनके अन्तर का तीन गुना हो तो निम्न में कौन सत्य है [Dhanbad Engg. 1968]

(a) $9p^2 = 2q$ (b) $2q^2 = 9p$

(c) $2p^2 = 9q$ (d) $9q^2 = 2p$

36. यदि समीकरण $x^2 + 2mx + m^2 - 2m + 6 = 0$ के मूल बराबर हों, तो m का मान होगा [MP PET 1986]

(a) 3 (b) 0

(c) 2 (d) –1

37. यदि समीकरण $(2k+1)x^2 - (7k+3)x + k + 2 = 0$ के मूल एक दूसरे के व्युत्क्रम हों, तो k का मान होगा [MP PET 1986]

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 3

38. यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल l तथा $2l$ हैं, तो [MP PET 1986; MP PET 2002]

(a) $b^2 = 9ac$ (b) $2b^2 = 9ac$

(c) $b^2 = -4ac$ (d) $a^2 = c^2$

39. यदि किसी द्विघात समीकरण के मूलों का योग 2 है एवं उनके घनों का योग 98 है तो समीकरण होगा [MP PET 1986]

(a) $x^2 + 2x + 15 = 0$ (b) $x^2 + 15x + 2 = 0$

(c) $2x^2 - 2x + 15 = 0$ (d) $x^2 - 2x - 15 = 0$

40. यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α, β हों, तो $\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + \alpha\beta$ का मान होगा [EAMCET 1980; AMU 1984]

(a) $\frac{c(a-b)}{a^2}$ (b) 0

(c) $-\frac{bc}{a^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

41. यदि समीकरण $mx^2 + 6x + (2m-1) = 0$ के मूलों का गुणनफल –1 हो, तो m का मान होगा [Pb. CET 1990]

(a) 1 (b) – 1

(c) $\frac{1}{3}$ (d) $-\frac{1}{3}$

42. समीकरण $x^2 + ax + b = 0$ के मूल p तथा q हों तो वह समीकरण जिसके मूल p^2q तथा pq^2 हैं, होगा [MP PET 1980]

(a) $x^2 + abx + b^3 = 0$ (b) $x^2 - abx + b^3 = 0$

(c) $bx^2 + x + a = 0$ (d) $x^2 + ax + ab = 0$

43. वह समीकरण जिसके मूल $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$ तथा $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$ हैं, होगा [MP PET 1994]

(a) $7x^2-6x+1=0$
(b) $6x^2-7x+1=0$
(c) $x^2-6x+7=0$
(d) $x^2-7x+6=0$

44. यदि α तथा β समीकरण $x^2-4x+1=0$ के मूल हैं, तो $\alpha^3+\beta^3$ का मान होगा [MP PET 1994]
(a) 76 (b) 52
(c) –52 (d) –76

45. एक दो अंकों की संख्या अपने अंकों के योग की चार गुनी तथा गुणनफल की तीन गुनी है। संख्या है [MP PET 1994]
(a) 42 (b) 24
(c) 12 (d) 21

46. यदि α,β समीकरण $2x^2-35x+2=0$ के मूल हों, तो $(2\alpha-35)^3.(2\beta-35)^3$ का मान है [Bihar CEE 1994]
(a) 1 (b) 64
(c) 8 (d) इनमें से कोई नहीं

47. यदि α,α^2 समीकरण $x^2+x+1=0$ के मूल हों, तो वह समीकरण जिसके मूल α^{31},α^{62} हैं [AMU 1999]
(a) $x^2-x+1=0$ (b) $x^2+x-1=0$
(c) $x^2+x+1=0$ (d) $x^{60}+x^{30}+1=0$

48. यदि $3p^2=5p+2$ तथा $3q^2=5q+2$, जहाँ $p\neq q$ हैं तब pq=
(a) $\frac{2}{3}$ (b) $-\frac{2}{3}$
(c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{3}{2}$

49. यदि α,β वर्ग समीकरण $x^2+bx-c=0$ के मूल हैं, तो वह समीकरण जिसके मूल b तथा c हैं, है [Pb. CET 1989]
(a) $x^2+\alpha x-\beta=0$
(b) $x^2-[(\alpha+\beta)+\alpha\beta]x-\alpha\beta(\alpha+\beta)=0$
(c) $x^2+[(\alpha+\beta)+\alpha\beta]x+\alpha\beta(\alpha+\beta)=0$
(d) $x^2+[\alpha\beta+(\alpha+\beta)]x-\alpha\beta(\alpha+\beta)=0$

50. यदि α तथा β समीकरण $ax^2+bx+c=0$ (a,b,c भिन्न–भिन्न हैं व $a\neq 0;$), के मूल हों, तो $(1+\alpha+\alpha^2)\ (1+\beta+\beta^2)$ = [DCE 2000]
(a) शून्य (b) धनात्मक
(c) ऋणात्मक (d) इनमें से कोई नहीं

51. यदि समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल वास्तविक हों एवं $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ व $\frac{\alpha+1}{\alpha}$ रुप के हों, तब $(a+b+c)^2$ का मान होगा [AMU 2000]
(a) b^2-4ac (b) b^2-2ac
(c) $2b^2-ac$ (d) इनमें से कोई नहीं

52. यदि $ax^2+2bx+c=0$ के मूलों का अनुपात $px^2+2qx+r=0$ के मूलों के अनुपात के बराबर है, तब [Pb. CET 1991]
(a) $\frac{b}{ac}=\frac{q}{pr}$ (b) $\frac{b^2}{ac}=\frac{q^2}{pr}$
(c) $\frac{2b}{ac}=\frac{q^2}{pr}$ (d) इनमें से कोई नहीं

53. समीकरण $x^2+bx-c=0,(b,c>0)$ के मूल हैं
(a) दोनों धनात्मक (b) दोनों ऋणात्मक
(c) विपरीत चिन्हों के (d) इनमें से कोई नहीं

54. यदि p तथा q समीकरण $x^2+pq=(p+1)x$ के मूल हों, तो q=
(a) –1 (b) 1
(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

55. यदि $ax^2+bx+c=0$ के मूल α,β तथा $Ax^2+Bx+C=0$ के मूल $\alpha-k,\beta-k,$ हों, तो $\frac{B^2-4AC}{b^2-4ac}$ का मान है [RPET 1999]
(a) 0 (b) 1
(c) $\left(\frac{A}{a}\right)^2$ (d) $\left(\frac{a}{A}\right)^2$

56. यदि p तथा q समीकरण $x^2+px+q=0$ के मूल हों, तो [IIT 1995;AIEEE 2002; UPSEAT 2003;RPET 2001]
(a) $p=1,q=-2$ (b) $p=-2,q=1$
(c) $p=1,q=0$ (d) $p=-2,q=0$

57. यदि समीकरण $ix^2-2(i+1)x+(2-i)=0$ का एक मूल $2-i$ हो, तो दूसरा मूल होगा
(a) $-i$ (b) i
(c) $2+i$ (d) $2-i$

58. समीकरण $5x^2-7x+k=0$ के मूल एक दूसरे के व्युत्क्रम हों, तो k का मान होगा [RPET 1995; MP PET 2002]
(a) 5 (b) 2
(c) 1/5 (d) 1

59. समीकरण $x^2-7x+6=0$ के मूल α,β, हों, तो $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ = [RPET 1995]
(a) 6/7 (b) 7/6
(c) 7/10 (d) 8/9

60. यदि α,β समीकरण $x^2-2x+4=0$ के मूल हों, तो $\alpha^5+\beta^5$ बराबर है [EAMCET 1990]
(a) 16 (b) 32
(c) 64 (d) इनमें से कोई नहीं

61. यदि $a(p+q)^2+2bpq+c=0$ तथा $a(p+r)^2+2bpr+c=0$, तब qr =
(a) $p^2+\frac{c}{a}$ (b) $p^2+\frac{a}{c}$
(c) $p^2+\frac{a}{b}$ (d) $p^2+\frac{b}{a}$

62. वर्ग समीकरण $(a+b-2c)x^2-(2a-b-c)x+(a-2b+c)=0$ के मूल हैं
(a) $a+b+c$ और $a-b+c$ (b) $\frac{1}{2}$ और $a-2b+c$
(c) $a-2b+c$ और $\frac{1}{a+b-x}$ (d) इनमें से कोई नहीं

63. यदि α,β समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल हों, तो वह समीकरण जिसके मूल $2+\alpha,2+\beta$ है, होगा [EAMCET 1994]
(a) $ax^2+x(4a-b)+4a-2b+c=0$
(b) $ax^2+x(4a-b)+4a+2b+c=0$
(c) $ax^2+x(b-4a)+4a+2b+c=0$
(d) $ax^2+x(b-4a)+4a-2b+c=0$

64. यदि $x^2+bx+c=0$ तथा $x^2+qx+r=0$ के मूलों का अनुपात समान है, तब [EAMCET 1994]

(a) $r^2c = b^2q$ (b) $r^2b = c^2q$

(c) $rb^2 = cq^2$ (d) $rc^2 = bq^2$

65. यदि $x^2 - x - k = 0$ का एक मूल अन्य का वर्ग है, तब $k =$ [EAMCET 1986, 1987]

(a) $2 \pm \sqrt{3}$ (b) $3 \pm \sqrt{2}$

(c) $2 \pm \sqrt{5}$ (d) $5 \pm \sqrt{2}$

66. यदि $3 + 4i$ समीकरण $x^2 + px + q = 0$ का एक मूल है (p तथा q वास्तविक संख्यायें हैं), तब [EAMCET 1985]

(a) $p = 6, q = 25$ (b) $p = 6, q = 1$

(c) $p = -6, q = -7$ (d) $p = -6, q = 25$

67. यदि द्विघातीय समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलों का योग उनके व्युत्क्रमों के वर्गों के योग के बराबर हो, तो $\frac{b^2}{ac} + \frac{bc}{a^2} =$ [BIT Ranchi 1996]

(a) 2 (b) –2

(c) 1 (d) –1

68. यदि α तथा β समीकरण $x^2 - 6x + a = 0$ के मूल हों और सम्बन्ध $3\alpha + 2\beta = 16$, सन्तुष्ट करते हों, तब a का मान है

(a) – 8 (b) 8

(c) – 16 (d) 9

69. यदि α तथा β समीकरण $lx^2 + mx + n = 0$ के मूल हैं, तब वह समीकरण जिसके मूल $\alpha^3\beta$ तथा $\alpha\beta^3$ हैं, है [MP PET 1997]

(a) $l^4x^2 - nl(m^2 - 2nl)x + n^4 = 0$

(b) $l^4x^2 + nl(m^2 - 2nl)x + n^4 = 0$

(c) $l^4x^2 + nl(m^2 - 2nl)x - n^4 = 0$

(d) $l^4x^2 - nl(m^2 + 2nl)x + n^4 = 0$

70. यदि समीकरण $x^2 + px + q = 0$ के मूलों का अन्तर 1 है, तो [MP PET 1999]

(a) $p^2 = 4q$ (b) $p^2 = 4q + 1$

(c) $p^2 = 4q - 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

71. समीकरण $(5 + \sqrt{2})x^2 - (4 + \sqrt{5})x + 8 + 2\sqrt{5} = 0$ के मूलों का हरात्मक माध्य (harmonic mean) है [IIT 1999; MP PET 2000]

(a) 2 (b) 4

(c) 6 (d) 8

72. यदि समीकरण $x^2 - bx + c = 0$ के मूल दो क्रमागत पूर्णांक हों तो $b^2 - 4c$ का मान होगा [RPET 1991; Kurukshetra CEE 1998; AIEEE 2005]

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

73. यदि α तथा β समीकरण $Ax^2 + Bx + C = 0$ के मूल हों, तो $\alpha^3 + \beta^3$ का मान होगा [RPET 1996; DCE 2005]

(a) $\frac{3ABC - B^3}{A^3}$ (b) $\frac{3ABC + B^3}{A^3}$

(c) $\frac{B^3 - 3ABC}{A^3}$ (d) $\frac{B^3 - 3ABC}{B^3}$

74. यदि α, β समीकरण $x^2 - (1 + n^2)x + \frac{1}{2}(1 + n^2 + n^4) = 0$ के मूल हों, तो $\alpha^2 + \beta^2$ का मान होगा [RPET 1996]

(a) $2n$ (b) n^3

(c) n^2 (d) $2n^2$

75. p के किस मान के लिये समीकरण $x^2 - 30x + p = 0$ का एक मूल दूसरे मूल का वर्ग होगा [Roorkee 1998]

(a) केवल 125 (b) 125 तथा –216

(c) 125 तथा 215 (d) केवल 216

76. समीकरण $x^2 - 3x + 1 = 0$ के मूलों के वर्गों का योग होगा [Karnataka CET 1998]

(a) 5 (b) 7

(c) 9 (d) 10

77. एक समीकरण के मूलों का योग –1 और उनके व्युत्क्रमों का योग $\frac{1}{6}$ है तो वह समीकरण है [Karnataka CET 1998]

(a) $x^2 + x - 6 = 0$ (b) $x^2 - x + 6 = 0$

(c) $6x^2 + x + 1 = 0$ (d) $x^2 - 6x + 1 = 0$

78. समीकरण $x^2 + px + q = 0$ के मूलों का योग, मूलों के वर्गों के योग के बराबर हो, तो [Pb. CET 1999]

(a) $p^2 - q^2 = 0$ (b) $p^2 + q^2 = 2q$

(c) $p^2 + p = 2q$ (d) इनमें से कोई नहीं

79. यदि α, β समीकरण $x^2 - 3x + 1 = 0$, के मूल हों, तो समीकरण जिसके मूल $\frac{1}{\alpha - 2}, \frac{1}{\beta - 2}$ हैं, होगा [RPET 1999]

(a) $x^2 + x - 1 = 0$ (b) $x^2 + x + 1 = 0$

(c) $x^2 - x - 1 = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

80. समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलों को 1 कम करने पर प्राप्त मूलों द्वारा निर्मित समीकरण $2x^2 + 8x + 2 = 0$ हों तब [EAMCET 2000]

(a) $a = -b$ (b) $b = -c$

(c) $c = -a$ (d) $b = a + c$

81. यदि α, β समीकरण $9x^2 + 6x + 1 = 0$ के मूल हों, तो वह समीकरण जिसके मूल $\frac{1}{\alpha}$ व $\frac{1}{\beta}$ है, होगा [EAMCET 2000]

(a) $2x^2 + 3x + 18 = 0$ (b) $x^2 + 6x - 9 = 0$

(c) $x^2 + 6x + 9 = 0$ (d) $x^2 - 6x + 9 = 0$

82. यदि α तथा β समीकरण $6x^2 - 6x + 1 = 0$ के मूल हों, तो $\frac{1}{2}\left[a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3\right] + \frac{1}{2}\left[a + b\beta + c\beta^2 + d\beta^3\right]$ का मान होगा [RPET 2000]

(a) $\frac{1}{4}(a + b + c + d)$ (b) $\frac{a}{1} + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4}$

(c) $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{c}{3} - \frac{d}{4}$ (d) इनमें से कोई नहीं

83. यदि $\tan\alpha$ तथा $\tan\beta$ समीकरण $x^2 - px + q = 0$ के मूल हों, तो $\sin^2(\alpha + \beta) =$ [RPET 2000]

(a) $\frac{p^2}{p^2 + (1 - q)^2}$ (b) $\frac{p^2}{p^2 + q^2}$

(c) $\frac{q^2}{p^2 + (1 - q)^2}$ (d) $\frac{p^2}{(p + q)^2}$

84. यदि वर्ग समीकरण $\frac{x - m}{mx + 1} = \frac{x + n}{nx + 1}$ के मूल परस्पर व्युत्क्रम हों तो [MP PET 2001]

(a) $n = 0$ (b) $m = n$

(c) $m+n=1$ (d) $m^2+n^2=1$

85. यदि समीकरण $x^2-5x+16=0$ के मूल α,β हों तथा समीकरण $x^2+px+q=0$ के मूल $\alpha^2+\beta^2$, $\frac{\alpha\beta}{2}$ हों, तब [MP PET 2001]

(a) $p=1, q=-56$ (b) $p=-1, q=-56$
(c) $p=1, q=56$ (d) $p=-1, q=56$

86. k के किस मान के लिये समीकरण $x^2-x+3k=0$ का एक मूल समीकरण $x^2-x+k=0$ के एक मूल का दुगुना होगा [UPSEAT 2001]

(a) 1 (b) – 2
(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

87. यदि α,β समीकरण $x^2-x+p=0$ के मूल तथा γ,δ समीकरण $x^2-4x+q=0$ के मूल हों तथा $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तो p,q के पूर्णांक मान क्रमशः होंगे [IIT Screening 2001]

(a) – 2, – 32 (b) – 2, 3
(c) – 6, 3 (d) – 6, – 32

88. वह वर्ग समीकरण, जिसके मूलों का समांतर माध्य 8/5 तथा व्युत्क्रमों का समांतर माध्य 8/7 है, होगा [AMU 2001]

(a) $5x^2-16x+7=0$ (b) $7x^2-16x+5=0$
(c) $7x^2-16x+8=0$ (d) $3x^2-12x+7=0$

89. यदि $1-i$ समीकरण $x^2-ax+b=0$ का एक मूल हो तो $b=$ [EAMCET 2002]

(a) – 2 (b) – 1
(c) 1 (d) 2

90. यदि समीकरण $x^2+kx-24=0$ का एक मूल 3 हो, तो यह निम्न का भी एक मूल होगा [EAMCET 2002]

(a) $x^2+5x+k=0$ (b) $x^2-5x+k=0$
(c) $x^2-kx+6=0$ (d) $x^2+kx+24=0$

91. यदि $\alpha\ne\beta$ किन्तु $\alpha^2=5\alpha-3$ तथा $\beta^2=5\beta-3$, तब समीकरण जिसके मूल $\frac{\alpha}{\beta}$ एवं $\frac{\beta}{\alpha}$ है, होगा [AIEEE 2002]

(a) $3x^2-25x+3=0$ (b) $x^2+5x-3=0$
(c) $x^2-5x+3=0$ (d) $3x^2-19x+3=0$

92. यदि समीकरणों $x^2+ax+b=0$ तथा $x^2+bx+a=0$ के संगत मूलों का अंतर समान है और $a\ne b$ तब [AIEEE 2002]

(a) $a+b+4=0$ (b) $a+b-4=0$
(c) $a-b-4=0$ (d) $a-b+4=0$

93. $t^2x^2+|x|+9=0$ के वास्तविक मूलों का गुणनफल होगा [AIEEE 2002]

(a) सदैव धनात्मक (b) सदैव ऋणात्मक
(c) अस्तित्व नहीं है (d) इनमें से कोई नहीं

94. यदि समीकरण $12x^2-mx+5=0$ के मूल 2 : 3 में हों तो $m=$ [RPET 2002]

(a) $5\sqrt{10}$ (b) $3\sqrt{10}$
(c) $2\sqrt{10}$ (d) इनमें से कोई नहीं

95. यदि समीकरण $x^2+px+q=0$ का एक मूल $2+\sqrt{3}$ हों तो p तथा q का मान होगा [UPSEAT 2002]

(a) – 4, 1 (b) 4, – 1
(c) 2, $\sqrt{3}$ (d) $-2, -\sqrt{3}$

96. वह प्रतिबंध जिसके लिये समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का एक मूल दूसरे मूल का तीन गुना होगा, है [DCE 2002]

(a) $b^2=8ac$ (b) $3b^2+16ac=0$
(c) $3b^2=16ac$ (d) $b^2+3ac=0$

97. वह समीकरण, जिसके मूल समीकरण $3x^2-20x+17=0$ के मूलों के व्युत्क्रम होंगे, है [DCE 2002]

(a) $3x^2+20x-17=0$ (b) $17x^2-20x+3=0$
(c) $17x^2+20x+3=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

98. यदि α,β समीकरण $x^2+2x+4=0$ के मूल हों, तो $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}$ का मान होगा [Kerala (Engg.) 2002]

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$
(c) 32 (d) $\frac{1}{4}$

99. वास्तविक गुणांकों का न्यूनतम घात का वह समीकरण जिसका एक मूल $1+i$ है, होगा [Kerala (Engg.) 2002]

(a) $x^2+x+1=0$ (b) $x^2-2x+2=0$
(c) $x^2+2x+2=0$ (d) $x^2+2x-2=0$

100. वह वर्ग समीकरण क्या है, जिनके मूलों का समान्तर माध्य 9 तथा गुणोत्तर माध्य 4 है [AIEEE 2004]

(a) $x^2-18x-16=0$ (b) $x^2-18x+16=0$
(c) $x^2+18x-16=0$ (d) $x^2+18x+16=0$

101. यदि समीकरण $6x^2-5x+1=0$ के मूल α,β हों, तो $\tan^{-1}\alpha+\tan^{-1}\beta$ का मान होगा [MP PET 2004]

(a) $\pi/4$ (b) 1
(c) 0 (d) $\pi/2$

102. यदि समीकरण $x^2-px+q=0$ के मूल a तथा b हों, तो $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$ [Orissa JEE 2004]

(a) $\frac{1}{p}$ (b) $\frac{1}{q}$
(c) $\frac{1}{2p}$ (d) $\frac{p}{q}$

103. यदि समीकरण $x^2+px+q=0$ का एक मूल दूसरे समीकरण के मूल का वर्ग है तो वह समीकरण होगा [IIT Screening 2004]

(a) $p^3+q^2-q(3p+1)=0$ (b) $p^3+q^2+q(1+3p)=0$
(c) $p^3+q^2+q(3p-1)=0$ (d) $p^3+q^2+q(1-3p)=0$

104. यदि समीकरण $x^2+ax+3=0$ का एक मूल 3 है तथा दूसरे समीकरण $x^2+ax+b=0$ के एक मूल का तीन गुना हो तो b का मान होगा [J & K 2005]

(a) 3 (b) 4
(c) 2 (d) 1

105. यदि α,β समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल हैं और $(\alpha+\beta,)$ $(\alpha^2+\beta^2),(\alpha^3+\beta^3)$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं तब (जहाँ $\Delta=b^2-4ac$) [IIT Screening 2005]

(a) $\Delta\ne 0$ (b) $b\Delta=0$
(c) $cb\ne 0$ (d) $c\Delta=0$

106. यदि $\alpha-\beta=\alpha\beta$ है, तब $2x^2-(p+1)x+(p-1)=0$ में p का मान है [Orissa JEE 2005]

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) – 2

107. यदि $3p^2 = 5p + 2$ तथा $3q^2 = 5q + 2$ जहाँ $p \neq q$ हो, तो वह समीकरण क्या है जिनके मूल $3p - 2q$ तथा $3q - 2p$ हैं [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $3x^2 - 5x - 100 = 0$ (b) $5x^2 + 3x + 100 = 0$

(c) $3x^2 - 5x + 100 = 0$ (d) $5x^2 - 3x - 100 = 0$

(e) $5x^2 + 3x + 100 = 0$

मूलों के उभयनिष्ठ होने का प्रतिबंध, वर्ग व्यंजक व मूलों की स्थिति

1. यदि समीकरणों $k(6x^2 + 3) + rx + 2x^2 - 1 = 0$ तथा $6k(2x^2 + 1) + px + 4x^2 - 2 = 0$ के दोनों मूल उभयनिष्ठ हों, तो $2r - p$ का मान होगा [MNR 1983]

(a) –1 (b) 0

(c) 1 (d) 2

2. यदि समीकरणों $x^2 + px + q = 0$ तथा $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ का एक मूल उभयनिष्ठ हो, तो इसका मान होगा (जहाँ $p \neq \alpha$ और $q \neq \beta$) [IIT 1974, 1976; RPET 1997]

(a) $\frac{q - \beta}{\alpha - p}$ (b) $\frac{p\beta - \alpha q}{q - \beta}$

(c) $\frac{q - \beta}{\alpha - p}$ या $\frac{p\beta - \alpha q}{q - \beta}$ (d) इनमें से कोई नहीं

3. यदि दो समीकरणों $x^2 - cx + d = 0$ तथा $x^2 - ax + b = 0$ का एक उभयनिष्ठ मूल हो तथा दूसरा समीकरण समान मूल रखता है, तब $2(b + d) =$

(a) 0 (b) $a + c$

(c) ac (d) $-ac$

4. यदि $x^2 - hx - 21 = 0, x^2 - 3hx + 35 = 0$ $(h > 0)$ एक उभयनिष्ठ मूल रखते हैं, तब h का मान है [EAMCET 1986]

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

5. यदि समीकरणों $x^2 + px + qr = 0$, $x^2 + qx + rp = 0$, $x^2 + rx + pq = 0$ का प्रत्येक युग्म उभयनिष्ठ मूल रखता है, तब तीनों उभयनिष्ठ मूलों का योगफल है

(a) $\frac{-(p + q + r)}{2}$ (b) $\frac{-p + q + r}{2}$

(c) $-(p + q + r)$ (d) $-p + q + r$

6. यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ तथा $bx^2 + cx + a = 0$ एक उभयनिष्ठ मूल रखते हैं तथा $a \neq 0$, तब $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} =$ [IIT 1982; Kurukshetra CEE 1983]

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) इनमें से कोई नहीं

7. यदि समीकरणों $x^2 + px + q = 0$ तथा $x^2 + qx + p = 0$ का एक मूल उभयनिष्ठ हो, तो $p + q + 1 =$ [Orissa JEE 2002]

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) – 1

8. यदि $x^2 + ax + 10 = 0$ तथा $x^2 + bx - 10 = 0$ का एक मूल उभयनिष्ठ हो, तो $a^2 - b^2$ का मान होगा [Kerala (Engg.) 2002]

(a) 10 (b) 20

(c) 30 (d) 40

9. $x^2 - 11x + a$ तथा $x^2 - 14x + 2a$ का एक गुणनखण्ड उभयनिष्ठ होगा, यदि $a =$ [Roorkee 1981]

(a) 24 (b) 0, 24

(c) 3, 24 (d) 0, 3

10. यदि $x^2 - 3x + 2$, व्यंजक $x^4 - px^2 + q$ का एक गुणनखण्ड हो, तो $(p, q) =$ [IIT 1974; MP PET 1995; Pb. CET 2001]

(a) (3, 4) (b) (4, 5)

(c) (4, 3) (d) (5, 4)

11. यदि x वास्तविक है, तो $x^2 - 8x + 17$ का न्यूनतम मान होगा [MNR 1980]

(a) –1 (b) 0

(c) 1 (d) 2

12. यदि x वास्तविक है, तो व्यंजक $\frac{x^2 + 14x + 9}{x^2 + 2x + 3}$ के अधिकतम एवं न्यूनतम मान होंगे [Dhanbad Engg. 1968]

(a) 4, – 5 (b) 5, – 4

(c) – 4, 5 (d) – 4, – 5

13. यदि x वास्तविक है, तो व्यंजक $\frac{x + 2}{2x^2 + 3x + 6}$ निम्न अंतराल में समस्त मानों को ग्रहण करता है [IIT 1969]

(a) $\left(\frac{1}{13}, \frac{1}{3}\right)$ (b) $\left[-\frac{1}{13}, \frac{1}{3}\right]$

(c) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{13}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

14. यदि $x^2 + px + 1$, व्यंजक $ax^3 + bx + c$ का एक गुणनखण्ड हो, तो [IIT 1980]

(a) $a^2 + c^2 = -ab$ (b) $a^2 - c^2 = -ab$

(c) $a^2 - c^2 = ab$ (d) इनमें से कोई नहीं

15. यदि x, y, z वास्तविक व भिन्न हों, तो $u = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6yz - 3zx - 2xy$ हमेशा होगा [IIT 1979]

(a) अऋणात्मक (b) अधनात्मक

(c) शून्य (d) इनमें से कोई नहीं

16. यदि x धनात्मक है तो $5+4x-4x^2$ का अधिकतम मान होगा [MNR 1979]
(a) 5 (b) 6
(c) 1 (d) 2

17. यदि x वास्तविक है, तो फलन $\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)}$ का प्रत्येक मान वास्तविक होगा, यदि [IIT 1984; Karnataka CET 2002]
(a) $a>b>c$ (b) $a<b<c$
(c) $a>c<b$ (d) $a<c<b$

18. यदि x वास्तविक है, तो व्यंजक $\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$ के अधिकतम एवं न्यूनतम मान है [IIT 1984]
(a) 2, 1 (b) $5, \frac{1}{5}$
(c) $7, \frac{1}{7}$ (d) इनमें से कोई नहीं

19. यदि x वास्तविक है तो $\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ का मान निम्न के बीच में नहीं होगा [Roorkee 1983]
(a) –9 तथा –5 (b) –5 तथा 9
(c) 0 तथा 9 (d) 5 तथा 9

20. यदि x वास्तविक है तो $x^2-6x+13$ का मान कम नहीं होगा [RPET 1986]
(a) 4 से (b) 6 से
(c) 7 से (d) 8 से

21. अन्तराल $(-3, 3/2)$ में x^2-3x+3 का न्यूनतम मान है [EAMCET 1991; 93]
(a) 3/4 (b) 5
(c) –15 (d) –20

22. यदि $x^2+x+a=0$ के मूल a से अधिक हैं, तब [EAMCET 1994]
(a) $2<a<3$ (b) $a>3$
(c) $-3<a<3$ (d) $a<-2$

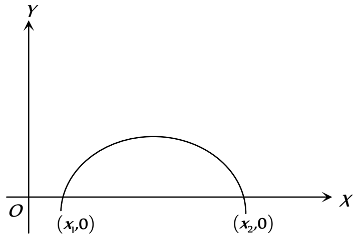
23. यदि समीकरण $x^2-2ax+a^2+a-3=0$ के मूल वास्तविक हैं और 3 से कम हैं, तो [IIT 1999; MP PET 2000]
(a) $a<2$ (b) $2\le a\le 3$
(c) $3<a\le 4$ (d) $a>4$

24. यदि x वास्तविक हो तो समीकरण $x^2-6x+10$ का न्यूनतम मान होगा [Kurukshetra CEE 1998]
(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 10

25. यदि α, β समीकरण $x^2+(3-\lambda)x-\lambda=0$ के मूल हों, तो λ के किस मान के लिये $\alpha^2+\beta^2$ का मान न्यूनतम होगा [AMU 2002]
(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

26. यदि $f(x)=x^2+4x+1$ तब
(a) $f(x)>0$ सभी x के लिये
(b) $f(x)>1$ जब $x\ge 0$
(c) $f(x)\ge 1$ जब $x\le -4$
(d) $f(x)=f(-x)$ जब x के लिये

27. दिये चित्र, $y=ax^2+bx+c$ का ग्राफ प्रदर्शित करता है, तब



(a) $a<0$
(b) $b^2<4ac$
(c) $c>0$
(d) a तथा b विपरीत चिन्ह वाले हैं

28. यदि a,b,c ऐसी वास्तविक संख्याएँ हों कि $a+b+c=0$ हो, तब वर्ग समीकरण $3ax^2+2bx+c=0$ का [MNR 1992; DCE 1999]
(a) कम से कम एक मूल [0, 1] में है
(b) कम से कम एक मूल [1, 2] में है
(c) कम से कम एक मूल $[-1, 0]$ में है
(d) इनमें से कोई नहीं

29. यदि α, β वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल हों और k कोई वास्तविक संख्या है, तो वह प्रतिबन्ध जिसके लिये $\alpha<k<\beta$ है, होगा
(a) $ac>0$ (b) $ak^2+bk+c=0$
(c) $ac<0$ (d) $a^2k^2+abk+ac<0$

30. p के वे मान जिसके लिये समीकरण $4x^2-20px+(25p^2+15p-66)=0$ के दोनों मूल 2 से कम हैं, स्थित हैं
(a) $\left(\frac{4}{5}, 2\right)$ में (b) $(2, \infty)$ में
(c) $\left(-1, -\frac{4}{5}\right)$ में (d) $(-\infty, -1)$ में

31. यदि α तथा β $(\alpha<\beta)$ समीकरण $x^2+bx+c=0$ के मूल हों, जहाँ $c<0<b$, तब [IIT Screening 2000; Pb. CET 2000]
(a) $0<\alpha<\beta$ (b) $\alpha<0<\beta<|\alpha|$
(c) $\alpha<\beta<0$ (d) $\alpha<0<|\alpha|<\beta$

32. यदि $b>a$ तब समीकरण $(x-a)(x-b)=1$ के [IIT Screening 2000]
(a) दोनों मूल $[a,b]$ में होंगे
(b) दोनों मूल $(-\infty, a)$ में होंगे
(c) दोनों मूल $(b, +\infty)$ में होंगे
(d) एक मूल $(-\infty, a)$ में तथा दूसरा मूल $(b, +\infty)$ में होगा

33. समीकरण $x^5-6x^2-4x+5=0$ के अधिकतम वास्तविक हलों की संख्या होगी [EAMCET 2002]
(a) 0
(b) 3
(c) 4
(d) 5

34. यदि $2a+3b+6c=0$ तब समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का कम से कम एक मूल निम्न अंतराल में होगा [Kurukshetra CEE 2002; AIEEE 2002, 04]

(a) (0, 1) (b) (1, 2)
(c) (2, 3) (d) (3, 4)

35. यदि समीकरण $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x = 0$, $a_n \neq 0, n \geq 2$ का एक धनात्मक मूल $x = \alpha$ है तो समीकरण $na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_1 = 0$ का एक धनात्मक मूल होगा जो कि [AIEEE 2005]

(a) α से बड़ा है या बराबर है (b) α के बराबर
(c) α से बड़ा (d) α से छोटा

36. यदि बहुपद $P(x)$ का समुच्चय S है जिसकी घात ≤ 2 हो, जबकि $P(0) = 0$, $P(1) = 1$, $P'(x) > 0, \forall x \in (0,1)$, तब [IIT Screening 2005]

(a) $S = 0$
(b) $S = ax + (1-a)x^2, \forall a \in (0, \infty)$
(c) $S = ax + (1-a)x^2, \forall a \in R$
(d) $S = ax + (1-a)x^2, \forall a \in (0,2)$

37. यदि समीकरण $ax^2 + 2bx + c = 0$, $2bx^2 + cx + a = 0$ तथा $cx^2 + ax + 2b = 0$ के मूल क्रमशः α तथा β; α तथा γ; α तथा δ हों व a, b तथा c धनात्मक वास्तविक संख्यायें हो तो $\alpha + \alpha^2$ का मान होगा [Kerala (Engg.) 2005]

(a) – 1 (b) 0
(c) abc (d) $a + 2b + c$
(e) इनमें से कोई नहीं

वर्ग असमीकरण के हल और विविध समीकरण

1. x के कितने वास्तविक मानों के लिये समीकरण $\left|3x^2 + 12x + 6\right| = 5x + 16$ अस्तित्व रखता है [AMU 1999]

(a) 4 (b) 3
(c) 2 (d) 1

2. यदि x वास्तविक है तथा $x + 2 > \sqrt{x+4}$ को सन्तुष्ट करता है, तब [AMU 1999]

(a) $x < -2$ (b) $x > 0$
(c) $-3 < x < 0$ (d) $-3 < x < 4$

3. असमिका $x^2 - 4x < 12$ का हल होगा [AMU 1999]

(a) $x < -2$ या $x > 6$ (b) $-6 < x < 2$
(c) $2 < x < 6$ (d) $-2 < x < 6$

4. समीकरण $\log(-2x) = 2\log(x+1)$ के मूलों की संख्या होगी [AMU 2001]

(a) 3 (b) 2
(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

5. सभी वास्तविक संख्याओं x का वह समुच्चय जिसके लिये $x^2 - |x+2| + x > 0$, होगा [IIT Screening 2002]

(a) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ (b) $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$
(c) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ (d) $(\sqrt{2}, \infty)$

6. यदि समीकरण $x^2 + 2ax + 10 - 3a > 0$ है तथा $x \in R$, तब [IIT Screening 2004]

(a) $-5 < a < 2$ (b) $a < -5$
(c) $a > 5$ (d) $2 < a < 5$

7. समीकरण $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$ के मूल होंगे [MP PET 1986]

(a) 1, 1, 1, 1 (b) 2, 2, 2, 2
(c) 3, 1, 3, 1 (d) 1, 2, 1, 2

8. यदि समीकरण $8x^3 - 14x^2 + 7x - 1 = 0$ के मूल गुणोत्तर श्रेणी में हों, तो मूल होंगे [MP PET 1986]

(a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ (b) 2, 4, 8
(c) 3, 6, 12 (d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि समीकरण $4x^3 + 16x^2 - 9x - 36 = 0$ के दो मूलों का योग शून्य हो तो मूल होंगे [MP PET 1986]

(a) 1, 2 –2 (b) $-2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$
(c) $-3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$ (d) $-4, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$

10. समीकरण $2x^5 - 14x^4 + 31x^3 - 64x^2 + 19x + 130 = 0$ का एक मूल होगा [MP PET 1985]

(a) 1 (b) 3
(c) 5 (d) 7

11. यदि समीकरण $x^3 - 3x + 2 = 0$ के दो मूल बराबर हों तो मूल होंगे [MP PET 1985]

(a) 2, 2, 3 (b) 1, 1, –2
(c) – 2, 3, 3 (d) –2, –2, 1

12. यदि a, b, c वास्तविक है एवं $x^3 - 3b^2x + 2c^3$, $x - a$ तथा $x - b$ से विभाजित है, तब

(a) $a = -b = -c$ (b) $a = 2b = 2c$
(c) $a = b = c$, $a = -2b = -2c$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. यदि $x^3 + 8 = 0$ के मूल α, β तथा γ हैं, तो वह समीकरण जिसके मूल α^2, β^2 तथा γ^2 है, होगा

(a) $x^3 - 8 = 0$ (b) $x^3 - 16 = 0$
(c) $x^3 + 64 = 0$ (d) $x^3 - 64 = 0$.

14. यदि α, β, γ समीकरण $x^3 + 4x + 1 = 0$ के मूल हों, तो $(\alpha+\beta)^{-1} + (\beta+\gamma)^{-1} + (\gamma+\alpha)^{-1} =$ [EAMCET 2003]

(a) 2 (b) 3
(c) 4 (d) 5

15. यदि समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ के दो मूलों का योग शून्य हो तो pq का मान होगा [EAMCET 2003]

(a) $-r$ (b) r
(c) $2r$ (d) $-2r$

16. यदि समीकरण $x^3 + x + 1 = 0$ के मूल α, β, γ हों, तो $\alpha^3\beta^3\gamma^3$ का मान होगा [MP PET 2004]

(a) 0 (b) – 3
(c) 3 (d) – 1

17. समीकरण $x^4 - 2x^3 + x = 380$ के मूल हैं [UPSEAT 2004]

(a) $5, -4, \frac{1 \pm 5\sqrt{-3}}{2}$ (b) $-5, 4, \frac{-1 \pm 5\sqrt{-3}}{2}$
(c) $5, 4, \frac{-1 \pm 5\sqrt{-3}}{2}$ (d) $-5, -4, \frac{1 \pm 5\sqrt{-3}}{2}$

18. यदि α, β *तथा* γ समीकरण $x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$ के मूल हों, तो $y = \sum \alpha^2 + \alpha\beta\gamma$ निम्न समीकरण को सन्तुष्ट करेगा [J & K 2005]

(a) $y^3 + y + 2 = 0$ (b) $y^3 - y^2 - y - 2 = 0$
(c) $y^3 + 3y^2 - y - 3 = 0$ (d) $y^3 + 4y^2 + 5y + 20 = 0$

19. यदि α, β, γ समीकरण $2x^3 - 3x^2 + 6x + 1 = 0$ के मूल हों, तो $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ का मान है [Karnataka CET 2005]

(a) $-\frac{15}{4}$ (b) $\frac{15}{4}$

(c) $\frac{9}{4}$ (d) 4

20. समीकरण $pqx^2 - (p+q)^2 x + (p+q)^2 = 0$ का हल समुच्चय है [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $\left\{\frac{p}{q}, \frac{q}{p}\right\}$ (b) $\left\{pq, \frac{p}{q}\right\}$

(c) $\left\{\frac{q}{p}, pq\right\}$ (d) $\left\{\frac{p+q}{p}, \frac{p+q}{q}\right\}$

(e) $\left\{\frac{p-q}{p}, \frac{p-q}{q}\right\}$

Critical Thinking

Objective Questions

1. यदि $x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+......\infty}}}$, तो $x =$

(a) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (b) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(c) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. समीकरण $|x^2| + |x| - 6 = 0$ के मूल होंगे [EAMCET 1988, 93]

(a) एक और केवल एक वास्तविक संख्या

(b) वास्तविक, जिनका योग एक है

(c) वास्तविक, जिनका योग शून्य है

(d) वास्तविक, जिनका गुणनफल शून्य है

3. यदि $ax^2 + bx + c = 0$, तब $x =$ [MP PET 1995]

(a) $\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (b) $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{2a}$

(c) $\frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. यदि समीकरणों $2x^2 + 3x + 5\lambda = 0$ तथा $x^2 + 2x + 3\lambda = 0$ का एक मूल उभयनिष्ठ हो, तो $\lambda =$ [RPET 1989]

(a) 0

(b) –1

(c) 0,–1

(d) 2,–1

5. यदि समीकरण $x^2 + \lambda x + \mu = 0$ के मूल बराबर हों और समीकरण $x^2 + \lambda x - 12 = 0$ का एक मूल 2 हो, तो $(\lambda, \mu) =$

(a) (4, 4) (b) (– 4, 4)

(c) (4,–4) (d) (–4,–4)

6. यदि x वास्तविक है तथा $k = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ हो, तब [MNR 1992; RPET 1997]

(a) $\frac{1}{3} \le k \le 3$ (b) $k \ge 5$

(c) $k \le 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. यदि $a < b < c < d$ तब समीकरण $(x-a)(x-c) + 2(x-b)(x-d) = 0$ के मूल होंगे [IIT 1984]

(a) वास्तविक व भिन्न (b) वास्तविक व समान

(c) काल्पनिक (d) इनमें से कोई नहीं

8. यदि समीकरण $qx^2 + px + q = 0$ के मूल सम्मिश्र हों, जहाँ p, q वास्तविक हैं, तब समीकरण $x^2 - 4qx + p^2 = 0$ के मूल हैं

(a) वास्तविक व असमान (b) वास्तविक व समान

(c) काल्पनिक (d) इनमें से कोई नहीं

9. $(a^2 - 1)x^2 + 2(a-1)x + 2$ के धनात्मक होने के लिये 'a' का मान है (किसी भी x के लिये) [UPSEAT 2001]

(a) $a \ge 1$ (b) $a \le 1$

(c) $a > -3$ (d) $a < -3$ या $a > 1$

10. यदि समीकरण $\frac{x^2 - bx}{ax - c} = \frac{m-1}{m+1}$ के मूल बराबर व विपरीत चिन्हों के हों तो m का मान होगा [RPET 1988, 2001; MP PET 1996, 2002; Pb. CET 2000]

(a) $\frac{a-b}{a+b}$ (b) $\frac{b-a}{a+b}$

(c) $\frac{a+b}{a-b}$ (d) $\frac{b+a}{b-a}$

11. समीकरण $x^2 + px + q = 0$ को हल करते समय x का गुणांक 13 के स्थान पर 17 रख दिया गया, जिससे समीकरण के मूल –2 तथा –15 प्राप्त हुए। समीकरण के सही मूल हैं [IIT 1977, 79]

(a) 3, 10 (b) – 3, – 10

(c) – 5, – 8 (d) इनमें से कोई नहीं

12. यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल दूसरे का n गुना हो, तो

(a) $na^2 = bc(n+1)^2$ (b) $nb^2 = ac(n+1)^2$

(c) $nc^2 = ab(n+1)^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. यदि वर्ग समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल दूसरे मूल का n वीं घात हो, तब $(ac^n)^{\frac{1}{n+1}} + (a^n c)^{\frac{1}{n+1}}$ का मान होगा [IIT 1983]

(a) b (b) $-b$

(c) $b^{\frac{1}{n+1}}$ (d) $-b^{\frac{1}{n+1}}$

14. यदि $\sin\alpha, \cos\alpha$ समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हों, तो [MP PET 1993]

(a) $a^2 - b^2 + 2ac = 0$ (b) $(a-c)^2 = b^2 + c^2$

(c) $a^2 + b^2 - 2ac = 0$ (d) $a^2 + b^2 + 2ac = 0$

15. यदि वर्ग समीकरण $x^2 - 2kx + k^2 + k - 5 = 0$ के दोनों मूलों का मान 5 से कम हो तो k निम्न अन्तराल में स्थित होगा [AIEEE 2005]

(a) $(-\infty, 4)$ (b) [4, 5]

(c) (5, 6) (d) $(6, \infty)$

16. यदि समीकरणों $x^2 - bx + c = 0$ तथा $x^2 - cx + b = 0$ के मूलों का अन्तर समान हो, तो $b + c$ का मान है [BIT Ranchi 1969; MP PET 1993]

(a) 4 (b) 1
(c) 0 (d) –4

17. यदि समीकरण $x^2 - 3kx + 2e^{2\log k} - 1 = 0$ के मूलों का गुणनफल 7 है, तो इसके मूल वास्तविक होंगे जब [IIT 1984]
(a) $k = 1$ (b) $k = 2$
(c) $k = 3$ (d) इनमें से कोई नहीं

18. यदि समीकरण $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$ का एक मूल 1 हो, तो दूसरा मूल होगा [RPET 1986]
(a) $\frac{a(b-c)}{b(c-a)}$ (b) $\frac{b(c-a)}{a(b-c)}$
(c) $\frac{c(a-b)}{a(b-c)}$ (d) इनमें से कोई नहीं

19. त्रिभुज ABC में $\angle A$ को $5\cos A + 3 = 0$ द्वारा परिभाषित किया गया है, तो वह समीकरण जिसके मूल $\sin A$ व $\tan A$ हैं, होगा [Roorkee 1972]
(a) $15x^2 - 8x + 16 = 0$ (b) $15x^2 + 8x - 16 = 0$
(c) $15x^2 - 8\sqrt{2}x + 16 = 0$ (d) $15x^2 - 8x - 16 = 0$

20. यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल दूसरे का वर्ग हो तो $a(c-b)^3 = cX$, जहाँ X है
(a) $a^3 + b^3$ (b) $(a-b)^3$
(c) $a^3 - b^3$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. यदि $x^2 + ax + \beta = 0$ के मूल 8, 2 हों व $x^2 + \alpha x + b = 0$ के मूल 3, 3 हों, तो $x^2 + ax + b = 0$ के मूल होंगे [EAMCET 1987]
(a) $8, -1$ (b) $-9, 2$
(c) $-8, -2$ (d) 9, 1

22. x के मानों का समुच्चय जो कि $5x + 2 < 3x + 8$ तथा $\frac{x+2}{x-1} < 4$ को सन्तुष्ट करता है, है [EAMCET 1989]
(a) $(2, 3)$ (b) $(-\infty, 1) \cup (2, 3)$
(c) $(-\infty, 1)$ (d) $(1, 3)$

23. यदि α, β समीकरण $x^2 - ax + b = 0$ के मूल हों तथा यदि $\alpha^n + \beta^n = V_n$ हों, तो [RPET 1995; Karnataka CET 2000; Pb. CET 2002]
(a) $V_{n+1} = aV_n + bV_{n-1}$ (b) $V_{n+1} = aV_n + aV_{n-1}$
(c) $V_{n+1} = aV_n - bV_{n-1}$ (d) $V_{n+1} = aV_{n-1} - bV_n$

24. यदि $|\alpha^2 - \beta^2| = \frac{7}{4}$ जहाँ α तथा β समीकरण $2x^2 + 7x + c = 0$ के मूल हों, तो c का मान है
(a) 4 (b) 0
(c) 6 (d) 2

25. λ के किस मान के लिये समीकरण $x^2 + (2+\lambda)x - \frac{1}{2}(1+\lambda) = 0$ के मूलों के वर्गों का योग न्यूनतम होगा [AMU 1999]
(a) 3/2 (b) 1
(c) 1/2 (d) 11/4

26. समीकरण $x^2 - |x| - 6 = 0$ के सभी वास्तविक मूलों का गुणनफल होगा [Roorkee 2000]
(a) – 9 (b) 6
(c) 9 (d) 36

27. समीकरण $3x^2 + px + 3 = 0, p > 0$ का एक मूल यदि दूसरे मूल का वर्ग हो तो p का मान होगा [IIT Screening 2000]
(a) $\frac{1}{3}$ (b) 1
(c) 3 (d) $\frac{2}{3}$

28. यदि α, β समीकरण $x^2 + px + q = 0$ के मूल हों तथा $\alpha + h, \beta + h$ समीकरण $x^2 + rx + s = 0$ के मूल हों, तो [AMU 2001]
(a) $\frac{p}{r} = \frac{q}{s}$ (b) $2h = \left[\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right]$
(c) $p^2 - 4q = r^2 - 4s$ (d) $pr^2 = qs^2$

29. यदि वर्ग समीकरण $x^2 + px + q = 0$ के मूल $a - 2$ तथा $b - 2$ हों, जहाँ a तथा b समीकरण $x^2 - 3x + 1 = 0$ के मूल हैं, तो [Kerala (Engg.) 2002]
(a) $p = 1, q = 5$
(b) $p = 1, q = -5$
(c) $p = -1, q = 1$
(d) इनमें से कोई नहीं

30. a के किस मान के लिये समीकरण
$(a^2 - 5a + 3)x^2 + (3a - 1)x + 2 = 0$
का एक मूल दूसरे मूल का दोगुना होगा [AIEEE 2003]
(a) $\frac{2}{3}$ (b) $-\frac{2}{3}$
(c) $\frac{1}{3}$ (d) $-\frac{1}{3}$

31. यदि a, b, c G.P. में हों, तब समीकरणों $ax^2 + 2bx + c = 0$ तथा $dx^2 + 2ex + f = 0$ का एक मूल उभयनिष्ठ होगा, यदि $\frac{d}{a}, \frac{e}{b}, \frac{f}{c}$ होंगे [IIT 1985; Pb. CET 2000; DCE 2000]
(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

32. a के किस मान के लिये समीकरणों $x^2 - 3x + a = 0$ तथा $x^2 + ax - 3 = 0$ का एक मूल उभयनिष्ठ होगा [Pb. CET 1999]
(a) 3 (b) 1
(c) – 2 (d) 2

33. यदि $(x+1)$ व्यंजक
$x^4 - (p-3)x^3 - (3p-5)x^2 + (2p-7)x + 6$
का एक गुणनखण्ड हो, तो $p =$ [IIT 1975]
(a) 4 (b) 2
(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

34. यदि समीकरण $4x^4 - 24x^3 + 57x^2 + 18x - 45 = 0$ का एक मूल $3 + i\sqrt{6}$ है, तब अन्य मूल होंगे

(a) $3-i\sqrt{6}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ (b) $3-i\sqrt{6}, \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

(c) $3-i\sqrt{6}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

35. a के किस मान के लिये समीकरण $2x^2-2(2a+1)x+a(a+1)=0$ का एक मूल a से छोटा व दूसरा मूल a से बड़ा होगा [UPSEAT 2001]

(a) $1>a>0$ (b) $-1<a<0$

(c) $a\ge 0$ (d) $a>0$ या $a<-1$

36. a,b,c वास्तविक संख्यायें हैं जहाँ $a\ne 0$ यदि समीकरण $a^2x^2+bx+c=0$ का एक मूल α है एवं समीकरण $a^2x^2-bx-c=0$ का एक मूल β है तथा $0<\alpha<\beta$ तो समीकरण $a^2x^2+2bx+2c=0$ का एक मूल γ होगा जो हमेशा सन्तुष्ट करेगा [IIT 1989]

(a) $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$ (b) $\gamma=\alpha+\frac{\beta}{2}$

(c) $\gamma=\alpha$ (d) $\alpha<\gamma<\beta$

37. यदि α, β, γ समीकरण $x^3+ax^2+bx+c=0$ के मूल हों, तो $\alpha^{-1}+\beta^{-1}+\gamma^{-1}=$ [EAMCET 2002]

(a) $\frac{a}{c}$ (b) $\frac{-b}{c}$

(c) $\frac{b}{a}$ (d) $\frac{c}{a}$

38. यदि $\frac{2x}{2x^2+5x+2}>\frac{1}{x+1}$ तो [IIT 1987]

(a) $-2>x>-1$ (b) $-2\ge x\ge -1$

(c) $-2<x<-1$ (d) $-2<x\le -1$

39. यदि $a<0$ तब असमिका $ax^2-2x+4>0$ के मूल निम्न द्वारा प्रदर्शित होंगे [AMU 2001]

(a) $\frac{1+\sqrt{1-4a}}{a}>x>\frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$

(b) $x<\frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$

(c) $x<2$

(d) $2>x>\frac{1+\sqrt{1-4a}}{a}$

40. यदि समीकरण $x^3-9x^2+14x+24=0$ के दो मूलों का अनुपात 3 : 2 हो तो मूल होंगे [UPSEAT 1999]

(a) 6, 4, – 1

(b) 6, 4, 1

(c) – 6, 4, 1

(d) – 6, – 4, 1

Answers

वर्ग समीकरण के हल व मूलों की प्रकृति

1	a	2	b	3	c	4	c	5	b
6	d	7	d	8	b	9	b	10	d
11	c	12	a	13	a	14	d	15	d
16	b	17	c	18	c	19	d	20	d
21	a	22	c	23	b	24	d	25	d
26	c	27	d	28	d	29	d	30	a
31	d	32	c	33	b	34	a	35	a
36	b	37	c	38	d	39	a	40	d
41	b	42	a	43	a	44	a	45	c
46	b	47	c	48	b	49	b	50	c
51	d	52	b	53	d	54	b	55	d
56	b	57	d	58	b	59	b	60	c
61	c	62	c	63	c	64	a	65	b
66	b	67	a	68	a	69	d	70	b
71	a	72	a	73	c	74	b	75	b
76	d	77	b	78	b	79	c	80	c
81	c	82	b	83	b	84	d	85	c
86	a	87	a	88	d				

मूलों तथा गुणांकों के मध्य सम्बन्ध

1	b	2	a	3	b	4	c	5	a
6	a	7	b	8	a	9	d	10	b
11	a	12	c	13	d	14	b	15	d
16	c	17	a	18	b	19	a	20	a
21	a	22	a	23	c	24	c	25	c
26	c	27	a	28	b	29	a	30	b
31	b	32	a	33	c	34	c	35	c
36	a	37	b	38	b	39	d	40	a
41	c	42	a	43	a	44	b	45	b
46	b	47	c	48	b	49	c	50	b
51	a	52	b	53	c	54	b	55	c
56	a	57	a	58	a	59	b	60	b
61	a	62	d	63	d	64	c	65	c
66	d	67	a	68	b	69	a	70	b
71	b	72	a	73	a	74	c	75	b
76	b	77	a	78	c	79	c	80	b
81	c	82	b	83	a	84	a	85	b
86	b	87	a	88	a	89	d	90	c
91	d	92	a	93	c	94	a	95	a
96	c	97	b	98	d	99	b	100	b
101	a	102	d	103	d	104	a	105	d
106	b	107	a						

मूलों के उभयनिष्ठ होने का प्रतिबंध, वर्ग व्यंजक व मूलों की स्थिति

1	b	2	c	3	c	4	d	5	a
6	c	7	a	8	d	9	b	10	d
11	c	12	a	13	b	14	c	15	a
16	b	17	d	18	c	19	d	20	a
21	a	22	d	23	a	24	a	25	c
26	c	27	a,d	28	a	29	d	30	d
31	b	32	d	33	b	34	a	35	d
36	d	37	b						

वर्ग असमीकरण के हल और विविध समीकरण

1	c	2	b	3	d	4	b	5	b
6	a	7	a	8	a	9	d	10	c
11	b	12	c	13	d	14	c	15	b
16	d	17	a	18	b	19	a	20	d

Critical Thinking Questions

1	a	2	c	3	c	4	c	5	a
6	a	7	a	8	a	9	d	10	a
11	b	12	b	13	b	14	a	15	a
16	d	17	b	18	c	19	b	20	b
21	d	22	b	23	c	24	c	25	c
26	a	27	c	28	c	29	d	30	a
31	a	32	d	33	a	34	c	35	d
36	d	37	b	38	c	39	a	40	a

Answers and Solutions

वर्ग समीकरण के हल व मूलों की प्रकृति

1. (a) समीकरण $a(x^2+1)-(a^2+1)x=0$

$\Rightarrow ax^2-(a^2+1)x+a=0$

$\Rightarrow (ax-1)(x-a)=0 \Rightarrow x=a, \frac{1}{a}$.

2. (b) समीकरण $x^4-8x^2-9=0$

$\Rightarrow x^4-9x^2+x^2-9=0 \Rightarrow x^2(x^2-9)+1(x^2-9)=0$

$\Rightarrow (x^2+1)(x^2-9)=0 \Rightarrow x=\pm i, \pm 3$.

3. (c) दिया है $ix^2-4x-4i=0$

$\Rightarrow x^2+4ix-4=0 \Rightarrow x^2+2ix+2ix-4=0$

$\Rightarrow (x+2i)(x+2i)=0 \Rightarrow x=-2i, -2i$.

4. (c) $x^{2/3}+x^{1/3}-2=0 \Rightarrow (x^{1/3})^2+1(x^{1/3})-2=0$

माना $a=x^{1/3}$, तब $a^2+a-2=0 \Rightarrow a=1,-2$

अतः $x=1,-8$ $(a=x^{1/3}$ से)

5. (b) $x=2+2^{2/3}+2^{1/3} \Rightarrow x-2=2^{2/3}+2^{1/3}$

दोनों पक्षों का घन करने पर

$x^3-8-6x^2+12x=6+6(x-2)$

$\Rightarrow x^3-6x^2+6x=2$.

6. (d) $8\sec^2\theta-6\sec\theta+1=0 \Rightarrow \sec\theta=\frac{1}{2}$

या $\sec\theta=\frac{1}{4}$, लेकिन $\sec\theta\ge 1$ या $\sec\theta\le -1$.

अतः दिया गया समीकरण कोई हल नहीं रखता है।

7. (d) दिया गया समीकरण $\sqrt{3x+1}+1=\sqrt{x}$

$\Rightarrow \sqrt{3x+1}=\sqrt{x}-1$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$3x+1=x+1-2\sqrt{x} \Rightarrow 2\sqrt{x}+2x=0$ (अपरिमेय फलन)

इस प्रकार $x\neq 0$ एवं $x\neq 1$, चूँकि समीकरण वर्ग समीकरण नहीं है।

8. (b) माना संख्या x है।

अतः, $x=\sqrt{x}+12 \Rightarrow x-12=\sqrt{x}$

$\Rightarrow x^2-25x+144=0$

$\Rightarrow x^2-16x-9x+144=0 \Rightarrow x=16$

चूँकि $x=9$ प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट नहीं करता है।

ट्रिक : चूँकि निरीक्षण से पता चलता है कि 16 अपने धनात्मक वर्गमूल अर्थात् 4 से 12 अधिक है।

9. (b) दिये गये समीकरण $3^{2x}-10.3^x+9=0$ को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है $(3^x)^2-10(3^x)+9=0$

माना $a=3^x$, तो यह निम्न समीकरण में बदल जाता है।

$a^2-10a+9=0 \Rightarrow (a-9)(a-1)=0 \Rightarrow a=9,1$

अब $a=3^x \Rightarrow 9=3^x \Rightarrow 3^2=3^x \Rightarrow x=2$

एवं $1=3^x \Rightarrow 3^0=3^x \Rightarrow x=0$. अतः मूल 0, 2 हैं।

10. (d) दिया है $x^{2/3}-7x^{1/3}+10=0$.

इसे $(x^{1/3})^2-7(x^{1/3})+10=0$ के रूप में लिखा जा सकता है

माना $a=x^{1/3}$, तो यह निम्न समीकरण द्वारा लिखा जा सकता है

$a^2-7a+10=0 \Rightarrow (a-5)(a-2)=0 \Rightarrow a=5,2$

यह मान रखने पर $a^3=x \Rightarrow x=125$ एवं 8 ।

11. (c) $x^2+y^2=25$ एवं $xy=12$

$\Rightarrow x^2+\left(\frac{12}{x}\right)^2=25 \Rightarrow x^4+144-25x^2=0$

$\Rightarrow (x^2-16)(x^2-9)=0 \Rightarrow x^2=16$ एवं $x^2=9$

$\Rightarrow x=\pm 4$ एवं $x=\pm 3$.

12. (a) $x^{\log_x(1-x)^2}=9$

$\Rightarrow (1-x)^2=9$ $(\because a^{\log_a N}=N)$

$\Rightarrow 9=(1-x)^2 \Rightarrow 1+x^2-2x-9=0$

$\Rightarrow x^2-2x-8=0 \Rightarrow (x+2)(x-4)=0 \Rightarrow x=-2,4$.

13. (a) यदि वर्ग समीकरण का एक मूल परिमेय गुणांक के साथ अपरिमेय हो एवं $\alpha+\sqrt{\beta}$ के रूप में हो, तो दूसरा मूल भी अपरिमेय होगा और $\alpha-\sqrt{\beta}$ के रूप में होगा।

14. (d) दिया है $|x|^2-3|x|+2=0$

स्थिति I : यदि $x<0$ तो समीकरण $x^2+3x+2=0$ होगा।

$\Rightarrow (x+2)(x+1)=0 \Rightarrow x=-2,-1$

यहाँ $x=-1,-2$, $x<0$ को सन्तुष्ट करते हैं अतः $x=-1$, -2 हल हैं।

स्थिति II : यदि $x>0$ तो समीकरण $x^2-3x+2=0$

$\Rightarrow (x-2)(x-1)=0 \Rightarrow x=2,1$ है। अतः $x=2$, 1 हल है।

अतः अभीष्ट हलों की संख्या 4 है अर्थात् $x=-1,1,2,-2$

वैकल्पिक : $|x|^2-3|x|+2=0$

$\Rightarrow (|x|-1)(|x|-2)=0$

$\Rightarrow |x|=1$ एवं $|x|=2 \Rightarrow x=\pm 1, x=\pm 2$ है।

15. (d) दिया गया समीकरण $e^{\sin x}-e^{-\sin x}-4=0$

माना $e^{\sin x}=y$, तो दिया गया समीकरण निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$y^2-4y-1=0 \Rightarrow y=2\pm\sqrt{5}$

परन्तु $y=e^{\sin x}$ का मान हमेशा धनात्मक होता है

$y=2+\sqrt{5}$ $(\because 2<\sqrt{5})$

$\Rightarrow \log_e y=\log_e(2+\sqrt{5}) \Rightarrow \sin x=\log_e(2+\sqrt{5})>1$

जो कि असम्भव है क्योंकि $\sin x$ का मान 1 से बड़ा नहीं हो सकता। अतः x का कोई भी वास्तविक मान दिये गये समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है।

16. (b) यहाँ दो स्थितियाँ उत्पन्न होती है।

स्थिति I : $x^2+4x+3>0$

तब समीकरण $x^2+4x+3+2x+5=0$ होगा

$\Rightarrow x^2+6x+8=0 \Rightarrow (x+2)(x+4)=0 \Rightarrow x=-2,-4$

$x=-2$ को संतुष्ट नहीं करेगा समीकरण $x^2+4x+3>0$, अतः $x=-4$ ही केवल दिये गये समीकरण का हल होगा।

स्थिति II : $x^2+4x+3<0$

तो समीकरण $-(x^2+4x+3)+2x+5=0$

$\Rightarrow -x^2-2x+2=0 \Rightarrow x^2+2x-2=0$

$\Rightarrow (x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3})=0$

$\Rightarrow x=-1+\sqrt{3},-1-\sqrt{3}$

अतः $x=-(1+\sqrt{3})$ प्रतिबन्ध में $x^2+4x+3<0$ को संतुष्ट करता है तथा $x=-1+\sqrt{3}$ सन्तुष्ट नहीं करता। अतः वास्तविक हलों की संख्या 2 है।

17. (c) दिया गया समीकरण $(p-q)x^2+(q-r)x+(r-p)=0$ है

$$x=\frac{(r-q)\pm\sqrt{(q-r)^2-4(r-p)(p-q)}}{2(p-q)}$$

$$\Rightarrow x=\frac{(r-q)\pm(q+r-2p)}{2(p-q)} \Rightarrow x=\frac{r-p}{p-q},1$$

18. (c) $x=4$ समीकरण $x^2+px+12=0$ में रखने पर, ($p=-7$) प्राप्त होता है।

अब दूसरे समीकरण $x^2+px+q=0$ के मूल बराबर हैं।

इसलिए $p^2=4q \Rightarrow q=\frac{49}{4}$

19. (d) यदि $x\neq 1$, तो प्रत्येक पद को $(x-1)$ से गुणा करने पर दिया गया समीकरण $x(x-1)=(x-1)$ या $(x-1)^2=0$ हो जाता है या $x=1$ जो कि सम्भव नहीं है क्योंकि $x\neq 1$। अतः दिए गये समीकरण का कोई मूल नहीं है।

20. (d) $x+\frac{1}{x}=2 \Rightarrow x+\frac{1}{x}-2=0$ $(\because x\neq 0)$

$\Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1,1$.

21. (a) प्रश्नानुसार $\frac{\alpha^2+1}{2}=-\alpha$

$\Rightarrow \alpha^2+2\alpha+1=0 \Rightarrow \alpha=-1,-1$.

22. (c) $\sqrt{3x^2-7x-30}+\sqrt{2x^2-7x-5}=x+5$

$\sqrt{3x^2-7x-30}=(x+5)-\sqrt{2x^2-7x-5}$

वर्ग करने पर, $\sqrt{2x^2-7x-5}=5$

$2x^2-7x-30=0 \Rightarrow x=6$.

23. (b) माना $x=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+.....\infty}}$

$\Rightarrow x=2+\frac{1}{x}$ (सरल करने पर)

$\Rightarrow x=1\pm\sqrt{2}$

परन्तु व्यंजक का मान ऋणात्मक व 2 से कम नहीं हो सकता। अतः अभीष्ट उत्तर $1+\sqrt{2}$ है।

24. (d) $2^{x+2}.3^{3x/(x-1)}=9$ दोनों पक्षों का log लेने पर,

$$(x+2)\log 2+\left(\frac{3x}{x-1}\right)\log 3=2\log 3$$

$$\Rightarrow (x+2)\left(\log 2+\frac{1}{x-1}\log 3\right)=0$$

$\Rightarrow x=-2$ या $\frac{1}{1-x}=\frac{\log 2}{\log 3}$

$\Rightarrow 1-x=\frac{\log 3}{\log 2} \Rightarrow x=1-\frac{\log 3}{\log 2}$

25. (d) दिया है $x^2+x+1=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}[-1\pm i\sqrt{3}]=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}),\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})=\omega,\omega^2$

लेकिन $\alpha^{19}=\omega^{19}=\omega$ तथा $\beta^7=\omega^{14}=\omega^2$.

अतः यही दिया गया समीकरण होगा।

26. (c) यहाँ $x=2$ व 3 क्रान्तिक बिन्दु हैं।

जब $x<2, |x-2|=-(x-2), |x-3|=-(x-3)$

$\therefore 2-x+3-x=7$

$\Rightarrow x=-1<2$

$\therefore x=-1$ एक हल है।

जब $2\le x<3, |x-2|=x-2, |x-3|=-(x-3)$

$\therefore$ तब समीकरण $x-2+3-x=7 \Rightarrow 1=7$

$\therefore$ इस स्थिति में कोई हल नहीं है।

जब $x\ge 3$, तब समीकरण

$x-2+x-3=7 \Rightarrow x=6>3$

अतः, $x=6$ या -1

ट्रिक : निरीक्षण से दोनों मान $x=6,-1$ दिये गये समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं।

27. (d) चूँकि द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के तीन भिन्न मूल हैं। अतः यह एक सर्वसमिका होगी, $a=b=c=0$.

28. (d) समीकरण $(|x|-4)(|x|-3)=0$

$\Rightarrow |x|=4 \Rightarrow x=\pm 4 \Rightarrow |x|=3 \Rightarrow x=\pm 3$.

29. (d) $\frac{\log 5+\log(x^2+1)}{\log(x-2)}=2$

$\Rightarrow \log\{5(x^2+1)\}=\log(x-2)^2 \Rightarrow 5(x^2+1)=(x-2)^2$

$\Rightarrow 4x^2+4x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

लेकिन $x=-\frac{1}{2}$ के लिए $\log(x-2)$ अर्थहीन है।

अतः इसका कोई मूल नहीं है।

30. (a) हमें ज्ञात है कि $x=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

$$\therefore \frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}.\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$$

$$=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

$$\therefore x+\frac{1}{x}=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

$$=(\sqrt{3}+2)+(2-\sqrt{3})=4.$$

31. (d) $\log_2 x+\frac{1}{\log_2 x}=3+\frac{1}{3}=\log_2 y+\frac{1}{\log_2 y}$

$\therefore \log_2 x=3, \log_2 y=\frac{1}{3}$ $(\because x\neq y)$

$\Rightarrow x=2^3$ एवं $y=2^{1/3} \Rightarrow x+y=8+2^{1/3}$.

32. (c) $x=\sqrt{2+x} \Rightarrow x^2-x-2=0$

$\Rightarrow (x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x=2,-1$

लेकिन $\sqrt{2+\sqrt{2+.....}} \ne -1$, अतः $x=2$.

33. (b) समीकरण $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$

$\Rightarrow 2^{2x}+2^{2x-1}=3^{x+\frac{1}{2}}+3^{x-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow 2^{2x}\left(1+\frac{1}{2}\right)=3^{x-\frac{1}{2}}(1+3)$

$\Rightarrow 2^{2x}.\frac{3}{2}=3^{x-\frac{1}{2}}.4 \Rightarrow 2^{2x-3}=3^{x-\frac{3}{2}}$

दोनों तरफ लघुगणक लेने पर

$\Rightarrow (2x-3)\log 2=(x-3/2)\log 3$

$\Rightarrow 2x\log 2-3\log 2=x\log 3-\frac{3}{2}\log 3$

$\Rightarrow x\log 4-x\log 3=3\log 2-\frac{3}{2}\log 3$

$\Rightarrow x\log\left(\frac{4}{3}\right)=\log 8-\log 3\sqrt{3}$

$\Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x=\frac{8}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x=\left(\frac{4}{3}\right)^{3/2}$

$\therefore x=\frac{3}{2}$

ट्रिक: समीकरण को विकल्पों से जाँच करने पर केवल विकल्प (b) सन्तुष्ट करता है।

34. (a) $e^x=x+1 \Rightarrow 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+......=x+1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+......=0$

$x^2=0, x^3=0, ...x^n=0$

अतः, $x=0$ केवल एक वास्तविक मूल है।

ट्रिक: समीकरण को विकल्पों से जाँच करने पर केवल विकल्प (a) सन्तुष्ट करता है।

35. (a) दिया है $\sqrt{(x+1)}-\sqrt{(x-1)}=\sqrt{(4x-1)}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, $-2\sqrt{(x^2-1)}=2x-1$

पुनः वर्ग करने पर $x=\frac{5}{4}$ जो दिए गये समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है। अतः इस समीकरण का कोई हल नहीं है।

36. (b) $\log_e x+\log_e(1+x)=0 \Rightarrow \log_e(1+x)=\log_e\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow x(x+1)=1 \Rightarrow x^2+x-1=0$

37. (c) $x=\sqrt{6+x}$, $x>0 \Rightarrow x^2=6+x, x>0$

$\Rightarrow x^2-x-6=0, x>0 \Rightarrow x=3, x>0$.

38. (d) $x^2+5|x|+4=0 \Rightarrow |x|^2+5|x|+4=0$

$\Rightarrow |x|=-1,-4$, जो कि संभव नहीं है अतः दिए गए समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं है।

39. (a) $\log_4\{\log_2(\sqrt{x+8}-\sqrt{x})\}=0$

$\Rightarrow 4^0=\log_2(\sqrt{x+8}-\sqrt{x}) \Rightarrow 2^1=\sqrt{x+8}-\sqrt{x}$

$\Rightarrow 4=x+8+x-2\sqrt{x^2+8x}$

$\Rightarrow 2\sqrt{x^2+8x}=2x+4 \Rightarrow x^2+8x=x^2+4+4x$

$\Rightarrow 4x=4 \Rightarrow x=1$.

40. (d) $|x-2|=x^2 \Rightarrow x-2=x^2$ या $2-x=x^2$

$\Rightarrow x^2-x+2=0$ या $x^2+x-2=0$

$\Rightarrow x^2+x-2=0$

[$\because x^2-x+2=0$ कोई भी वास्तविक मूल नहीं देता है]

$\Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow x=-2,1$.

41. (b) $\log_4(x-1)=\log_2(x-3) \Rightarrow x-1=(x-3)^2$

$\Rightarrow x^2-7x+10=0 \Rightarrow (x-5)(x-2)=0$

$\therefore x=5, 2$ लेकिन $x-3<0$ जब $x=2$

$\therefore x=5$ एक हल है

अतः हलों की संख्या 1 है।

42. (a) जब $x<2$, $(x-2)^2-(x-2)-6=0$

$\Rightarrow x^2-4x+4-x+2-6=0 \Rightarrow x^2-5x=0$

$\Rightarrow x(x-5)=0 \Rightarrow x=0$

जब $x\ge 2$; $(x-2)^2+(x-2)-6=0$

$\Rightarrow x^2-4x+4+x-2-6=0$

$\Rightarrow x^2-3x-4=0 \Rightarrow x^2-4x+x-4=0$

$\Rightarrow (x-4)(x+1)=0 \Rightarrow x=4$.

43. (a) $\frac{p+q-x}{r}+\frac{q+r-x}{p}+\frac{r+p-x}{q}=\frac{-3x}{p+q+r}$

$\frac{p+q+r-x}{r}+\frac{p+q+r-x}{p}+\frac{p+q+r-x}{q}$

$=3-\frac{3x}{p+q+r}$

$\Rightarrow (p+q+r-x)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)=3\left(\frac{p+q+r-x}{p+q+r}\right)$

$\Rightarrow (p+q+r-x)\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-\frac{3}{p+q+r}\right]=0$

$\Rightarrow x=p+q+r$.

44. (a) दिया गया समीकरण $x^2-5|x|+6=0$ है।

अर्थात् $x^2-5x+6=0$ एवं $x^2+5x+6=0$

$x^2-3x-2x+6=0$ एवं $x^2+3x+2x+6=0$

$(x-3)(x-2)=0$ एवं $(x+3).(x+2)=0$

$x=3, x=2$ एवं $x=-3, x=-2$.

अर्थात् इस समीकरण के चार हल होंगे।

45. (c) यदि मूल समान हैं, तब $B^2-4AC=0$

$\Rightarrow 4a^2m^2=4(m^2+1)(a^2-b^2) \Rightarrow a^2-b^2(m^2+1)=0$.

46. (b) माना सभी मूल काल्पनिक हैं तो दोनों समीकरणों $P(x)=0$ व $Q(x)=0$ के मूल काल्पनिक होंगे।

अतः $b^2-4ac<0; d^2+4ac<0$, इसलिए $b^2+d^2<0$, जोकि असम्भव है। जब तक कि $b=0, d=0$।

अतः यदि $b \neq 0$ या $d \neq 0$ हो, तो कम से कम दो मूल वास्तविक हैं।

यदि $b = 0,\ d = 0$, तो समीकरण

$P(x) = ax^2 + c = 0$ व $Q(x) = -ax^2 + c = 0$ होंगे

या $x^2 = -\frac{c}{a}; x^2 = \frac{c}{a}$ अतः $\frac{c}{a}$ व $-\frac{c}{a}$ में से एक अवश्य धनात्मक होगा। अतः दो मूल अवश्य वास्तविक होंगे।

47. (c) दिये गये समीकरण

$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$

को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

$3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca) = 0$

$\Delta = 4\{(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)\}$ $(\because b^2 - 4ac = \Delta)$

$= 4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

$= 2\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geq 0$

अतः दोनों मूल सदैव वास्तविक होंगे।

48. (b) माना मूल α व $-\alpha$ हैं, तो मूलों का योगफल

$\alpha + (-\alpha) = \frac{3(\lambda-2)}{2} \Rightarrow 0 = \frac{3}{2}(\lambda-2) \Rightarrow \lambda = 2$

49. (b) दिया गया समीकरण

$(p^2+q^2)x^2 - 2q(p+r)x + (q^2+r^2) = 0$

यदि मूल वास्तविक व बराबर हों तब

$4q^2(p+r)^2 - 4(p^2+q^2)(q^2+r^2) = 0$

$\Rightarrow q^2(p^2+r^2+2pr) - (p^2q^2+p^2r^2+q^4+q^2r^2) = 0$

$\Rightarrow q^2p^2+q^2r^2+2pq^2r-p^2q^2-p^2r^2-q^4-q^2r^2 = 0$

$\Rightarrow 2pq^2r - p^2r^2 - q^4 = 0 \Rightarrow (q^2-pr)^2 = 0$

$\therefore q^2 = pr$. अतः p, q, r गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

50. (c) हमें ज्ञात है कि $4ax^2 + 3bx + 2c = 0$, माना मूल α व β हैं।

माना $D = B^2 - 4AC = 9b^2 - 4(4a)(2c) = 9b^2 - 32ac$

दिया है, $(a+b+c) = 0 \Rightarrow b = -(a+c)$

यह मान रखने पर

$= 9(a+c)^2 - 32ac = 9(a-c)^2 + 4ac$.

अतः मूल वास्तविक हैं।

51. (d) दिया गया समीकरण

$2(a^2+b^2)x^2 + 2(a+b)x + 1 = 0$

माना $A = 2(a^2+b^2), B = 2(a+b)$ एवं $C = 1$

$B^2 - 4AC = 4(a^2+b^2+2ab) - 4.2(a^2+b^2)1$

$\Rightarrow B^2 - 4AC = -4(a-b)^2 < 0$

अतः दिये गये समीकरण के मूल काल्पनिक हैं।

52. (b) समीकरण $px^2 + 2qx + r = 0$ .....(i) व $qx^2 - 2(\sqrt{pr})x + q = 0$ .....(ii) के मूल वास्तविक हैं तो

$4q^2 - 4pr \geq 0$ [(i) से]

व $q^2 - pr \geq 0 \Rightarrow q^2 \geq pr$ .....(iii)

((ii) से, $4(pr) - 4q^2 \geq 0$ (वास्तविक मूल के लिए)

$\Rightarrow pr \geq q^2$ .....(iv)

(iii) व (iv) से $q^2 = pr$.

53. (d) समीकरण $ax^2 + x + b = 0$ के मूल वास्तविक हैं।

$\Rightarrow (1)^2 - 4ab \geq 0 \Rightarrow -4ab \geq -1$ या $4ab \leq 1$ .....(i)

अब दूसरा समीकरण $x^2 - 4\sqrt{ab}x + 1 = 0$ है

अतः $D = 16ab - 4$, (i) से $D \leq 0$

अतः मूल काल्पनिक है।

54. (b) यदि α सम्पाती मूल है तो

$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ एवं $\alpha^2 + b\alpha + a = 0$

$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{a^2-b^2} = \frac{\alpha}{b-a} = \frac{1}{b-a}$

$\Rightarrow \alpha^2 = -(a+b); \alpha = 1 \Rightarrow -(a+b) = 1 \Rightarrow (a+b) = -1$.

55. (d) दिये गये समीकरण को अर्थ पूर्ण होने के लिए $x > 0$ होना चाहिए। $x > 0$ के लिए दिये गये समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

$\frac{3}{4}(\log_2 x)^2 + \log_2 x - \frac{5}{4} = \log_x \sqrt{2} = \frac{1}{2}\log_x 2$

$\Rightarrow \frac{3}{4}t^2 + t - \frac{5}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}\right)$

$t = \log_2 x$ रखने पर, $\log_x 2 = \frac{1}{t}$

(क्योंकि $\log_2 x \log_x 2 = 1$)

$\Rightarrow 3t^3 + 4t^2 - 5t - 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t+2)(3t+1) = 0$

$\Rightarrow \log_2 x = t = 1, -2, -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow x = 2, 2^{-2}, 2^{-1/3}$ या $x = 2, \frac{1}{4}, \frac{1}{2^{1/3}}$

अतः समीकरण के तीन वास्तविक मूल हैं। जिनमें से केवल एक मूल अपरिमेय $\frac{1}{2^{1/3}}$ है।

56. (b) समीकरण के मूल $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ हैं।

(i) माना $b^2 - 4ac > 0, b > 0$

अब यदि $a > 0, c > 0, b^2 - 4ac < b^2$

$\Rightarrow$ मूल ऋणात्मक है।

(ii) माना $b^2 - 4ac < 0$, तो मूल

$x = \frac{-b \pm i\sqrt{(4ac-b^2)}}{2a}$, $(i = \sqrt{-1})$ होंगे।

जो कि काल्पनिक है एवं ऋणात्मक वास्तविक भाग रखते हैं। $(\because b > 0)$

$\therefore$ प्रत्येक स्थिति में मूल ऋणात्मक वास्तविक भागों वाले हैं।

57. (d) समीकरण $2x^2 - kx + x + 8 = 0$ के मूल बराबर व वास्तविक होंगे $D = b^2 - 4ac = 0$.

$\Rightarrow (1-k)^2 - 4.2.8 = 0 \Rightarrow k^2 + 1 - 2k - 64 = 0$

$\Rightarrow k^2 - 2k - 63 = 0 \Rightarrow k = 9, -7$.

58. (b) माना $f(x) = 2x^2 + 3x + 1 = 0$

$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4}$

अतः मूल $-\frac{1}{2}, -1$ (परिमेय) है।

59. (b) दिया गया समीकरण $(l-m)x^2 - 5(l+m)x - 2(l-m) = 0$

तब $D = 25\ (l+m)^2 + 8\ (l-m)^2$

जो कि धनात्मक है क्योंकि l, m, n वास्तविक व $l \neq m$ हैं।
अतः मूल वास्तविक व भिन्न हैं।

60. (c) समीकरण $x^2 - 8x + (a^2 - 6a) = 0$ के मूल वास्तविक हैं,

$\therefore$ $D \geq 0 \Rightarrow 64 - 4(a^2 - 6a) \geq 0 \Rightarrow 16 - a^2 + 6a \geq 0$

$\Rightarrow a^2 - 6a - 16 \leq 0 \Rightarrow (a-8)(a+2) \leq 0$

अब दो स्थितियाँ हैं।

स्थिति I : $(a-8) \leq 0$ एवं $(a+2) \geq 0$

$\Rightarrow a \leq 8$ एवं $a \geq -2$

स्थिति II : $(a-8) \geq 0$ एवं $(a+2) \leq 0$

$\Rightarrow a \geq 8$ एवं $a \leq -2$ परन्तु यह असम्भव है।

अतः $-2 \leq a \leq 8$

वैकल्पिक: विद्यार्थी ध्यान रखें कि व्यंजक $(x-a)(x-b)\{a < b\}$ शून्य से कम या बराबर होगा यदि $x \in [a, b]$ या अन्यथा $x \notin [a, b]$.

अतः $(a-8)(a+2) \leq 0$

अर्थात् $\{a - (-2)\}(a-8) \leq 0 \Rightarrow a \in [-2, 8]$.

61. (c) माना $f(x) = x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

तब $x = \dfrac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{12-12}}{2}$ या $x = -\sqrt{3}$.

अतः मूल वास्तविक व अपरिमेय हैं।

62. (c) दिया गया समीकरण $(\cos p - 1)x^2 + (\cos p)x + \sin p = 0$

$D \geq 0$ ($\because$ मूल वास्तविक है)

$\Rightarrow \cos^2 p - 4(\cos p - 1)\sin p \geq 0$

$\Rightarrow \cos^2 p - 4\cos p \sin p + 4\sin p \geq 0$

$\Rightarrow (\cos p - 2\sin p)^2 - 4\sin^2 p + 4\sin p \geq 0$

$\Rightarrow (\cos p - 2\sin p)^2 + 4\sin p(1 - \sin p) \geq 0$ .....(i)

अब $(1 - \sin p) \geq 0$ प्रत्येक वास्तविक p के लिए, $\sin p > 0$ के लिए $0 < p < \pi$. अतः $4\sin p(1 - \sin p) \geq 0$ जब $0 < p < \pi$ या $p \in (0, \pi)$

63. (c) व्यंजक $x^2 + 2x + 2xy + my - 3$ को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है $x^2 + 2x(1+y) + (my - 3)$

परन्तु गुणनखण्ड परिमेय हैं, अतः $B^2 - 4AC$ पूर्ण वर्ग होगा

अब $4\{(1+y)^2 - (my - 3)\} \geq 0$

$\Rightarrow 4\{y^2 + 1 + 2y - my + 3\} \geq 0 \Rightarrow y^2 + 2y - my + 4 \geq 0$

अतः $2y - my = \pm 4y$ {यह पूर्ण वर्ग है}

$\Rightarrow 2y - my = 4y \Rightarrow m = -2$

अब (–) चिन्ह लेने पर, $m = 6$.

64. (a) दिया गया समीकरण $2ax^2 + (2a+b)x + b = 0, (a \neq 0)$ है।

अब विविक्तकर $D = B^2 - 4AC$

$= (2a+b)^2 - 4.2ab = (2a-b)^2$

स्पष्टतः D पूर्ण वर्ग है, अतः दिये गये समीकरण के मूल परिमेय होंगे।

65. (b) $B^2 - 4AC > 0 \Rightarrow 0 - 4ab > 0 \Rightarrow ab < 0$.

66. (b) यदि $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α, β हों, तब $cx^2 + bx + a = 0$ के मूल $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$ होंगे।

अतः $cx^2 - bx + a = 0$ के मूल $-\dfrac{1}{\alpha}, -\dfrac{1}{\beta}$ होंगे।

67. (a) $D \equiv b^2 - 4ac = (-a-c)^2 - 4ac$

$= (a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2 \geq 0$

अतः मूल परिमेय होंगे।

68. (a) $(b+c-2a) + (c+a-2b) + (a+b-2c) = 0$

अतः मूल परिमेय है।

69. (d) $x^2 + 2bx + c = (x+b)^2 + c - b^2$

$\because$ $(x+b)^2$ एक वर्ग है, इसलिए सदैव धनात्मक होगा

अतः दिया हुआ व्यंजक धनात्मक होगा यदि $c - b^2 > 0$ या $b^2 < c$.

70. (d) प्रश्नानुसार, $p^2 = 144 \Rightarrow |p| = 12$.

71. (a) प्रश्नानुसार, $4(a^2 - bc)^2 - 4(c^2 - ab)(b^2 - ac) = 0$

$\Rightarrow a(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = 0$

$\Rightarrow a = 0$ या $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

72. (a) यदि $x^2 + b_1 x + c_1 = 0$ तथा $x^2 + b_2 x + c_2 = 0$ के विविक्तकर क्रमशः D_1 तथा D_2 है। तब

$D_1 + D_2 = b_1^2 - 4c_1 + b_2^2 - 4c_2 = (b_1^2 + b_2^2) - 4(c_1 + c_2)$

$= b_1^2 + b_2^2 - 2b_1 b_2$, $(\because b_1 b_2 = 2(c_1 + c_2))$

$= (b_1 - b_2)^2 \geq 0$

$\Rightarrow D_1 \geq 0$ या $D_2 \geq 0$ या D_1 तथा D_2 दोनों धनात्मक है।

73. (c) वर्ग समीकरण $(k+11)x^2 - (k+3)x + 1 = 0$ है।

प्रश्नानुसार, $(k+3)^2 - 4(k+11)(1) = 0 \Rightarrow k = -7, 5$.

74. (b) यदि $f(x) = ax^2 + bx + c$, तब $f(0) = c$, अतः $y = f(x)$ का ग्राफ y-अक्ष पर $(0, c)$ पर मिलता है।

यदि $c > 0$, तब संकल्पना द्वारा $f(x) > 0$ । इसका अर्थ है कि x-अक्ष पर वक्र $y = f(x)$ नहीं मिलता है।

यदि $c < 0$, तब संकल्पना से $f(x) < 0$ जिसका अर्थ है कि वक्र $y = f(x)$ सदैव x-अक्ष से नीचे है।

अतः दोनों ही स्थितियों में यह x-अक्ष को प्रतिच्छेद नहीं करता। अर्थात् किसी वास्तविक x के लिए $f(x) \neq 0$. अतः $f(x) = 0$ अर्थात् $ax^2 + bx + c = 0$ अधिकल्पित मूल रखता है इसलिए $b^2 < 4ac$.

75. (b) स्पष्टतः मूल परिणाम में बराबर हैं व चिन्ह में विपरीत होंगे यदि x का गुणांक = 0, लेकिन समीकरण

$x^2 + 2mx + m^2 - ab = 0$ है।

अतः अभीष्ट परिणाम प्राप्त हुआ।

76. (d) दिये अनुसार, $\{2(ac+bd)\}^2 = 4(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

$\Rightarrow 4a^2c^2 + 4b^2d^2 + 8abcd = 4a^2c^2 + 4a^2d^2 + 4b^2c^2 + 4b^2d^2$

$\Rightarrow 4a^2d^2 + 4b^2c^2 - 8abcd = 0 \Rightarrow 4(ad - bc)^2 = 0$

$\Rightarrow ad = bc \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

77. (b) परीक्षण करने पर यह $k = 2$ के लिए सन्तुष्ट करता है।

78. (b) चूँकि समीकरण $x^2 - 8x + a^2 - 6a = 0$ के मूल वास्तविक है।

$\therefore\ 64-4(a^2-6a)\ge 0$ या $a^2-6a-16\le 0$

$\Rightarrow\ a\in[-2,8]$

79. (c) मूलों के वास्तविक होने के लिए, विविक्तकर ≥ 0

$\Rightarrow q^2-4p\ge 0 \Rightarrow q^2\ge 4p$

$p=1$ के लिए $q^2\ge 4\ \Rightarrow q=2,3,4$

$p=2, q^2\ge 8\ \Rightarrow q=3,4$

$p=3, q^2\ge 12\ \Rightarrow q=4$

$p=4, q^2\ge 16\ \Rightarrow q=4$

अतः कुल सात हल संभव है।

80. (c) मूलों के होने के लिए, $b^2-4ac=0$

$\Rightarrow (3k-1)^2=4(2k^2+2k-11)$

$\Rightarrow 9k^2+1-6k=8k^2+8k-44$

$\Rightarrow k^2-14k+45=0 \Rightarrow (k-5)(k-9)=0$

$k=5$ या $k=9$.

81. (c) विकल्पों से $k=3$ रखने पर $\Rightarrow x^2+8x+7=0$

$\Rightarrow (x+1)(x+7)=0 \Rightarrow x=-1,-7$

अर्थात् $k=3$ के लिए मूल ऋणात्मक है।

82. (b) दिया गया समीकरण $x^2+2kx+4=0$

$k=-3$ रखने पर, $x^2-6x+4=0$

$\Rightarrow x=3+\sqrt{5},\ 3-\sqrt{5}$

$k=3$ रखने पर, $x^2+6x+4=0$

$\Rightarrow x=-3+\sqrt{5}, -3-\sqrt{5}$

अर्थात् मूल वास्तविक एवं असमान होंगे।

83. (b) मूल बराबर है, तो $b^2-4ac=0$

$\Rightarrow (n-l)^2-4(m-n)(l-m)=0$

$\Rightarrow\ n^2+l^2-2nl-4(ml-nl-m^2+mn)=0$

$\Rightarrow\ n^2+l^2-2nl-4ml+4nl+4m^2-4mn=0$

$\Rightarrow\ l^2+n^2+(2m)^2+2nl-4mn-4ml=0$

$\Rightarrow (l+n-2m)^2=0 \Rightarrow l+n=2m$

$\Rightarrow l, m, n$ समान्तर श्रेणी में है।

84. (d) मूल अवास्तविक होंगे यदि विविक्तकर <0

अर्थात् यदि $5^2-4.1.k<0$ अर्थात् यदि $4k>25$

अर्थात् यदि $k>\frac{25}{4}$ अर्थात् अभीष्ट न्यूनतम पूर्णांक 7 है।

85. (c) समीकरण $4x^2+6px+1=0$ के मूल बराबर है

$\therefore B^2-4AC=0$

$\Rightarrow (6p)^2=4.4.1 \Rightarrow 36p^2=16 \Rightarrow p=2/3$.

86. (a) दिया समीकरण $(1+2k)x^2+(1-2k)x+(1-2k)=0$ है।

यदि समीकरण पूर्ण वर्ग है तब मूल बराबर होंगे

अर्थात् $(1-2k)^2-4(1+2k)(1-2k)=0$

अर्थात् $k=\frac{1}{2},\frac{-3}{10}$ अतः कुल मानों की संख्या = 2.

87. (a) दिया है $\sin^2 B=\sin A\cos A \Rightarrow\ \cos 2B=1-\sin 2A\ge 0$

अब $x^2+2x\cot B+1=0$ के लिए

$D=4(\cot^2 B-1)=4\cos 2B\,\text{cosec}^2 B\ge 0$ लेने पर

अतः मूल हमेशा वास्तविक होंगे।

88. (d) माना चार वास्तविक मूल $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ हैं।

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)=0$

$x^4-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta$

$+\alpha\delta+\beta\delta+\alpha\gamma)x^2-(\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta$

$+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta)x+\alpha\beta\gamma\delta=0$

$x^4-\sum\alpha.x^3+\sum\alpha\beta.x^2-\sum\alpha\beta\gamma.x+\alpha\beta\gamma\delta=0$

समीकरण $x^4-4x^3+ax^2+bx+1=0$ से तुलना करने पर,

$\sum\alpha=4, \sum\alpha\beta=a$

$\sum\alpha\beta\gamma=-b, \alpha\beta\gamma\delta=1$

वास्तविक मूलों के लिए, मूलों का समान्तर माध्य $\ge$ मूलों का गुणोत्तर माध्य

$\frac{1}{4}(\sum\alpha)\ge(\alpha\beta\gamma\delta)^{1/4}$; $\sum\alpha=4$

$\therefore\ \frac{1}{4}\sum\alpha=\frac{1}{4}\times 4=1$

$(\alpha\beta\gamma\delta)^{1/4}=1 \Rightarrow\ \alpha\beta\gamma\delta=1$

$\Sigma\alpha=4$ एवं $\alpha\beta\gamma\delta=1$

$\therefore\ \alpha=\beta=\gamma=\delta=1$

अब, $\sum\alpha\beta=a$

$\therefore a=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\alpha\delta+\beta\delta+\alpha\gamma$

$=1\times1+1\times1+1\times1+1\times1+1\times1+1\times1=6$

$-b=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta$

$=1\times1\times1+1\times1\times1+1\times1\times1+1\times1\times1$

$=(1)^3+(1)^3+(1)^3+(1)^3=1+1+1+1=4$

$\therefore b=-4$; $\therefore a=6$ एवं $b=-4$.

मूलों तथा गुणांकों के मध्य सम्बन्ध

1. (b) माना प्रथम मूल $=\alpha$ एवं दूसरा मूल $=\frac{1}{\alpha}$

तब $\alpha.\frac{1}{\alpha}=\frac{k}{5}\ \Rightarrow k=5$.

2. (a) दिया हुआ समीकरण $4x^2+3x+7=0$ है।

अतः $\alpha+\beta=-\frac{3}{4}$ एवं $\alpha\beta=\frac{7}{4}$

अब $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-3/4}{7/4}=\frac{-3}{4}\times\frac{4}{7}=-\frac{3}{7}$.

3. (b) दिया है

$\alpha\beta=2\ \Rightarrow \frac{3a+4}{a+1}=2 \Rightarrow 3a+4=2a+2 \Rightarrow a=-2$

$\alpha+\beta=-\frac{2a+3}{a+1}$

a का मान रखने पर, मूलों का योगफल

$=-\frac{2a+3}{a+1}=-\frac{-4+3}{-2+1}=-1$.

4. (c) समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल α,β हैं।

$\Rightarrow \alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ एवं $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

माना समीकरण $cx^2+bx+a=0$ के मूल α',β' है, तब

$\alpha'+\beta'=-\frac{b}{c}$ एवं $\alpha'\beta'=\frac{a}{c}$

लेकिन $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-b/a}{c/a}=\frac{-b}{c} \Rightarrow \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\alpha'+\beta'$

अतः $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$ एवं $\beta' = \frac{1}{\beta}$.

5. (a) यहाँ $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ एवं $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

यदि मूल $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ है, तब मूलों का योगफल

$= \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = (\alpha + \beta) + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -\frac{b}{ac}(a + c)$

एवं गुणनफल $= \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$

$= \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta} = 2 + \frac{c}{a} + \frac{a}{c}$

$= \frac{2ac + c^2 + a^2}{ac} = \frac{(a + c)^2}{ac}$

अतः अभीष्ट समीकरण $x^2 + \frac{b}{ac}(a + c)x + \frac{(a + c)^2}{ac} = 0$

$\Rightarrow acx^2 + (a + c)bx + (a + c)^2 = 0$.

ट्रिक : माना $a = 1$, $b = -3, c = 2$, तब $\alpha = 1$, $\beta = 2$

$\therefore \quad \alpha + \frac{1}{\beta} = \frac{3}{2}$ एवं $\beta + \frac{1}{\alpha} = 3$

इसलिए अभीष्ट समीकरण है

$(x - 3)(2x - 3) = 0$ अर्थात् $2x^2 - 9x + 9 = 0$

यहाँ विकल्प (a), $a = 1, b = -3, c = 2$ रखने पर यह समीकरण देता है।

6. (a) माना प्रथम समीकरण का मूल α है, तो दूसरे समीकरण का मूल $\frac{1}{\alpha}$ होगा।

अतः $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ एवं $a'\frac{1}{\alpha^2} + b'\frac{1}{\alpha} + c' = 0$ या

$c'\alpha^2 + b'\alpha + a' = 0$

अतः $\frac{\alpha^2}{ba' - b'c} = \frac{\alpha}{cc' - aa'} = \frac{1}{ab' - bc'}$

$(cc' - aa')^2 = (ba' - cb')(ab' - bc')$.

7. (b) मूलों का योगफल $\alpha + \beta = -(a + b)$ एवं $\alpha\beta = \frac{a^2 + b^2}{2}$

$\Rightarrow (\alpha + \beta)^2 = (a + b)^2$ एवं $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$

$= 2ab - (a^2 + b^2) = -(a - b)^2$

अतः वह समीकरण जिसके मूल $(\alpha + \beta)^2$ एवं $(\alpha - \beta)^2$ है

$x^2 - \{(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2\}x + (\alpha + \beta)^2(\alpha - \beta)^2 = 0$ हैं,

$\Rightarrow x^2 - \{(a + b)^2 - (a - b)^2\}x - (a + b)^2(a - b)^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4abx - (a^2 - b^2)^2 = 0$

8. (a) चूँकि $2 + i\sqrt{3}$ एक मूल है। अतः $2 - i\sqrt{3}$ दूसरा मूल होगा। अब मूलों का योग $= 4 = -p$ व मूलों का गुणनफल $= 7 = q$. अतः $(p, q) = (-4, 7)$.

9. (d) प्रश्नानुसार, $-\frac{2}{\lambda} = 3 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$

10. (b) $\alpha + \beta = -6$ .....(i)

$\alpha\beta = \lambda$ .....(ii)

एवं दिया है $3\alpha + 2\beta = -20$ .....(iii)

(i) व (iii) को हल करने पर, $\beta = 2, \alpha = -8$

ये मान (ii) में रखने पर $\lambda = -16$.

11. (a) $\alpha + \beta = \frac{3}{2}$ एवं $\alpha\beta = 2$

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{9}{4} - 4 = -\frac{7}{4}$

अतः अभीष्ट समीकरण $x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 + \frac{7}{4}x + 4 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 7x + 16 = 0$ है।

12. (c) दिया गया समीकरण $x^2 - a(x + 1) - b = 0$ है।

$\Rightarrow x^2 - ax - a - b = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = a, \alpha\beta = -(a + b)$

अब $(\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1$

$= -(a + b) + a + 1 = 1 - b$

13. (d) $\alpha + \beta = \frac{2(m^2 + 1)}{2} = m^2 + 1$ .....(i)

एवं $\alpha\beta = \frac{m^4 + m^2 + 1}{2}$ .....(ii)

अतः $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (m^2 + 1)^2 - 2\frac{(m^4 + m^2 + 1)}{2}$

$= m^4 + 2m^2 + 1 - m^4 - m^2 - 1 = m^2$

14. (b) माना समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $p\alpha, q\alpha$ हैं,

तो $p\alpha + q\alpha = -\frac{b}{a}$ एवं $p\alpha.q\alpha = \frac{c}{a}$

प्रथम सम्बन्ध से, $\alpha = -\frac{b}{a(p + q)}$

α का यह मान, दूसरे सम्बन्ध में रखने पर,

$\frac{b^2}{a^2(p + q)^2} \times pq = \frac{c}{a} \Rightarrow b^2pq - ac(p + q)^2 = 0$

नोट : विद्यार्थी इस प्रश्न को एक तथ्य समझकर याद रखें।

15. (d) $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$

एवं $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{(b^2 - 2ac)}{a^2}$

अब $\frac{\alpha}{a\beta + b} + \frac{\beta}{a\alpha + b} = \frac{\alpha(a\alpha + b) + \beta(a\beta + b)}{(a\beta + b)(a\alpha + b)}$

$= \frac{a(\alpha^2 + \beta^2) + b(\alpha + \beta)}{\alpha\beta a^2 + ab(\alpha + \beta) + b^2} = \frac{a\frac{(b^2 - 2ac)}{a^2} + b\left(-\frac{b}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)a^2 + ab\left(-\frac{b}{a}\right) + b^2}$

$= \frac{b^2 - ac - b^2}{a^2c - ab^2 + ab^2} = \frac{-2ac}{a^2c} = -\frac{2}{a}$.

16. (c) माना समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α, β हैं।

तब $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ एवं $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}$

प्रश्नानुसार $\alpha + \beta = a^2 + \beta^2$

$\Rightarrow \ -\frac{b}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \Rightarrow b(a+b) = 2ac$.

17. (a) दिये गये समीकरण $\frac{\alpha}{x-\alpha} + \frac{\beta}{x-\beta} = 1$ को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

$\Rightarrow x^2 - 2(\alpha+\beta)x + 3\alpha\beta = 0$

माना मूल α' व $-\alpha'$ है।

$\alpha' + (-\alpha') = 2(\alpha+\beta) \Rightarrow 0 = 2(\alpha+\beta) \Rightarrow \alpha+\beta = 0$.

18. (b) α, β समीकरण $x^2 - 2x + 3 = 0$ के मूल हैं तो $\alpha+\beta = 2$ व $\alpha\beta = 3$ अब समीकरण जिसके मूल $\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}$ हैं

$x^2 - \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)x + \frac{1}{\alpha^2\beta^2} = 0$ होगा।

$\Rightarrow x^2 - \left(-\frac{2}{9}\right)x + \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow 9x^2 + 2x + 1 = 0$.

19. (a) दिये अनुसार, $\alpha+\beta = -p,\ \alpha\beta = 1, \gamma+\delta = -q$ एवं $\gamma\delta = 1$

अब, $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)$

$= \{\alpha\beta - \gamma(\alpha+\beta) + \gamma^2\}\{\alpha\beta + \delta(\alpha+\beta) + \delta^2\}$

$= (1 + p\gamma + \gamma^2)(1 - p\delta + \delta^2) = (p\gamma - q\gamma)(-p\delta - q\delta)$

(चूँकि γ, $x^2 + qx + 1 = 0$ का मूल है)

$\Rightarrow \gamma^2 + q\gamma + 1 = 0 \ \Rightarrow \gamma^2 + 1 = -q\gamma$ एवं इसी प्रकार

$\delta^2 + 1 = -q\delta = -\gamma\delta(p-q)(p+q) = q^2 - p^2$.

20. (a) दिये अनुसार,

$\alpha+\beta = p,\ \alpha\beta = q, \alpha'+\beta' = p', \alpha'\beta' = q'$

अब, $(\alpha-\alpha')^2 + (\beta-\alpha')^2 + (\alpha-\beta')^2 + (\beta-\beta')^2$

$= 2(\alpha^2+\beta^2) + 2(\alpha'^2+\beta'^2) - 2\alpha'(\alpha+\beta) - 2\beta'(\alpha+\beta)$

$= 2\{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta + (\alpha'+\beta')^2 - 2\alpha'\beta' - (\alpha+\beta)(\alpha'+\beta')\}$

$= 2\{p^2 - 2q + p'^2 - 2q' - pp'\}$.

21. (a) माना α, α^2 दो मूल हैं, तब

$\alpha + \alpha^2 = -\frac{b}{a}$ .....(i) एवं $\alpha.\alpha^2 = \frac{c}{a}$ .....(ii)

(i) के दोनों पक्षों का घन करने पर

$\alpha^3 + \alpha^6 + 3\alpha\alpha^2(\alpha+\alpha^2) = -\frac{b^3}{a^3}$

$\Rightarrow \frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2} + 3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^3}{c^3}$ [(i) व (ii) से]

$\Rightarrow b^3 + ac^2 + a^2c = 3abc$.

22. (a) यदि α, β मूल हैं, तब

$A = \frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow \alpha+\beta = 2A$ एवं $G = \sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow \alpha\beta = G^2$

तब अभीष्ट समीकरण $t^2 - 2At + G^2 = 0$ है।

23. (c) दिये अनुसार, $\alpha+\beta = a+b$, $\alpha\beta = ab - c$ या $ab = \alpha\beta + c$.

तब अभीष्ट समीकरण $x^2 - x(\alpha+\beta) + \alpha\beta + c = 0$ है।

$\Leftrightarrow x^2 - x(a+b) + ab = 0$, जिसके मूल a, b है।

24. (c) दिये अनुसार यदि α, β मूल है तब $\alpha+\beta = p$ तथा $\alpha\beta = 8$

$\therefore (\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2 = 4\alpha\beta$

$\Rightarrow p^2 - 2^2 = 4(8) \Rightarrow p^2 = 36 \Rightarrow p = \pm 6$

25. (c) दिये गये समीकरण के मूल α, β हैं तब

$\alpha+\beta = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2}$

$\Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{(b^2/a^2) - (2c/a)}{(c^2/a^2)} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$

$\Rightarrow \frac{2a}{c} = \frac{b^2}{c^2} + \frac{b}{a} = \frac{(ab^2 + bc^2)}{ac^2}$

$\Rightarrow 2a^2c = ab^2 + bc^2 \Rightarrow \frac{2a}{b} = \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$

$\Rightarrow \frac{c}{a}, \frac{a}{b}, \frac{b}{c}$ स.श्रे. में है $\Rightarrow \frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}$ हरात्मक श्रेणी में है।

26. (c) दिया गया समीकरण $ax^2 + 2bx + c = 0$ है।

अतः $\alpha+\beta = -\frac{2b}{a}$ एवं $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

अब $\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{-2b/a}{\sqrt{c/a}} = -\frac{2b}{\sqrt{ac}}$.

27. (a) माना $\alpha = 7 + 5i$, तब इसका संयुग्मी $\beta = 7 - 5i$ होगा अतः अभीष्ट समीकरण $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$ है।

$\Rightarrow x^2 - (14)x + (49+25) = 0 \Rightarrow x^2 - 14x + 74 = 0$ है।

28. (b) दिये गये समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$x^2 + x(p+q-2r) + pq - pr - qr = 0$ .....(i)

जिसके मूल α व $-\alpha$ है तब मूलों का गुणनफल

$-\alpha^2 = pq - pr - qr = pq - r(p+q)$ .....(ii)

और योगफल $0 = p + q - 2r \Rightarrow r = \frac{p+q}{2}$ .....(iii)

(ii) व (iii) से

$-\alpha^2 = pq - \frac{p+q}{2}(p+q) = -\frac{1}{2}\{(p+q)^2 - 2pq\}$

$= -\frac{(P^2 + q^2)}{2}$.

29. (a) दिया गया समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ है। जिसके मूल α व $\frac{1}{\alpha}$ हैं, तब मूलों का गुणनफल

$\alpha.\frac{1}{\alpha} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \Rightarrow a - c = 0$

30. (b) दिया गया एक मूल $2-\sqrt{3}$ है, अतः दूसरा मूल $2+\sqrt{3}$ होगा तब मूलों का योगफल $2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3} = 4$ तथा मूलों का गुणनफल $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$ है।

31. (b) α, β समीकरण $Ax^2 + Bx + C = 0$ के मूल हैं।

अतः $\alpha+\beta = -\frac{B}{A}$ एवं $\alpha\beta = \frac{C}{A}$

पुनः α^2, β^2 समीकरण $x^2 + px + q = 0$ के मूल हैं।

तब $\alpha^2 + \beta^2 = -p$ एवं $(\alpha\beta)^2 = q$

अब $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \left(-\frac{B}{A}\right)^2 - 2\frac{C}{A}$

$\Rightarrow -p = \frac{B^2 - 2AC}{A^2} \Rightarrow p = \frac{2AC - B^2}{A^2}$

32. (a) माना $\alpha = \frac{1}{2+\sqrt{5}}$ एवं $\beta = \frac{1}{2-\sqrt{5}}$
मूलों का योगफल $\alpha + \beta = -4$ एवं मूलों का गुणनफल $\alpha\beta = -1$
अतः अभीष्ट समीकरण $x^2 + 4x - 1 = 0$ है।

33. (c) दिये गये समीकरण $x^2 + x + 1 = 0$ के मूल α व β हैं, अतः $\alpha + \beta = -1$ व $\alpha\beta = 1$
पुनः $\frac{\alpha}{\beta}$ व $\frac{\beta}{\alpha}$ समीकरण $x^2 + px + q = 0$ के मूल हैं।
$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = -p \Rightarrow -p = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$
$\Rightarrow -p = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{1-2}{1} \Rightarrow p = 1$

34. (c) मूलों का योगफल $\alpha + \beta = -a$ एवं मूलों का गुणनफल $\alpha\beta = b$
अतः, $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
$= (\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2 - 3\alpha\beta] = -a(a^2 - 3b) = -a^3 + 3ab$

35. (c) माना α, β समीकरण $x^2 + px + q = 0$ के मूल हैं।
तब $\alpha + \beta = -p$ एवं $\alpha\beta = q$
दिया है $(\alpha+\beta) = 3(\alpha-\beta) = -p \Rightarrow \alpha - \beta = \frac{-p}{3}$
अब $(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$
$\Rightarrow \frac{p^2}{9} = p^2 - 4q$ या $2p^2 = 9q$.

36. (a) माना मूल α व α हैं, तब $\alpha + \alpha = -2m \Rightarrow \alpha = -m$
एवं $\alpha.\alpha = m^2 - 2m + 6 \Rightarrow m^2 = m^2 - 2m + 6$
$\Rightarrow m = 3$.

37. (b) माना मूल α व $\frac{1}{\alpha}$ है, तब
$\alpha.\frac{1}{\alpha} = \frac{k+2}{2k+1} \Rightarrow 1 = \frac{k+2}{2k+1} \Rightarrow k = 1$

38. (b) $l + 2l = -\frac{b}{a} \Rightarrow l = -\frac{b}{3a}$ .....(i)
एवं $l.2l = \frac{c}{a} \Rightarrow l^2 = \frac{c}{2a}$
$\Rightarrow \left(-\frac{b}{3a}\right)^2 = \frac{c}{2a} \Rightarrow \frac{b^2}{9a^2} = \frac{c}{2a}$ या $2b^2 = 9ac$
वैकल्पिक : स्पष्टतः मूलों का अनुपात 1 : 2 है, अतः $mnb^2 = (m+n)^2 ac \Rightarrow 2b^2 = 9ac$.

39. (d) माना मूल α व β हैं।
$\alpha + \beta = 2$ एवं $\alpha^3 + \beta^3 = 98$
$\therefore \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
$\Rightarrow 98 = 2[(\alpha+\beta)^2 - 3\alpha\beta] \Rightarrow 49 = (4 - 3\alpha\beta)$
$\Rightarrow \alpha\beta = -15$
अतः समीकरण $x^2 - 2x - 15 = 0$ है।

40. (a) $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ एवं $\alpha\beta = \frac{c}{a}$
अब $\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + \alpha\beta = \alpha\beta(\beta + \alpha) + \alpha\beta$
$= \alpha\beta(1 + \alpha + \beta) = \frac{c}{a}\left\{1 + \left(-\frac{b}{a}\right)\right\} = \frac{c(a-b)}{a^2}$

41. (c) प्रश्नानुसार,
$\frac{2m-1}{m} = -1 \Rightarrow 3m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$

42. (a) $f(x) = x^2 + ax + b = 0 \Rightarrow p + q = -a$ एवं $pq = b$
अतः अभीष्ट समीकरण जिसके मूल p^2q व pq^2 हैं
मूलों का योगफल $= p^2q + pq^2 = pq(p+q) = -ab$
एवं मूलों का गुणनफल $= pq^2.qp^2 = (pq)^3 = b^3$
अतः समीकरण $x^2 + abx + b^3 = 0$ होगा।

43. (a) अभीष्ट समीकरण है :
$x^2 - \left(\frac{1}{3+\sqrt{2}} + \frac{1}{3-\sqrt{2}}\right)x + \frac{1}{3+\sqrt{2}} \times \frac{1}{3-\sqrt{2}} = 0$
$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{6}{7}\right)x + \frac{1}{7} = 0 \Rightarrow 7x^2 - 6x + 1 = 0$

44. (b) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$= (4)^3 - 3 \times 1(4) = 52$

45. (b) स्पष्टतः यह 24 है।

46. (b) चूँकि α, β समीकरण $2x^2 - 35x + 2 = 0$ के मूल हैं एवं $\alpha\beta = 1$
$\therefore 2\alpha^2 - 35\alpha = -2$ या $2\alpha - 35 = \frac{-2}{\alpha}$
$2\beta^2 - 35\beta = -2$ या $2\beta - 35 = \frac{-2}{\beta}$
अब $(2\alpha - 35)^3(2\beta - 35)^3 = \left(\frac{-2}{\alpha}\right)^3\left(\frac{-2}{\beta}\right)^3$
$= \frac{8.8}{\alpha^3\beta^3} = \frac{64}{1} = 64$

47. (c) दिया गया समीकरण $x^2 + x + 1 = 0$ है।
$\Rightarrow \alpha + \alpha^2 = -1$ .....(i) एवं $\alpha^3 = 1$ .....(ii)
अब वह समीकरण जिसके मूल α^{31} एवं α^{62} है।
$\therefore \alpha^{31} + \alpha^{62} = \alpha^{31}(1 + \alpha^{31})$
$\Rightarrow \alpha^{31} + \alpha^{62} = \alpha^{30}.\alpha(1 + \alpha^{30}.\alpha)$
$\Rightarrow \alpha^{31} + \alpha^{62} = (\alpha^3)^{10}.\alpha\{1 + (\alpha^3)^{10}.\alpha\}$
$\Rightarrow \alpha^{31} + \alpha^{62} = \alpha(1 + \alpha)$
$\Rightarrow \alpha^{31} + \alpha^{62} = -1$ [(i) से]
पुनः $\alpha^{31}.\alpha^{62} = \alpha^{93} \Rightarrow \alpha^{31}.\alpha^{62} = [\alpha^3]^{31} = 1$
अभीष्ट समीकरण $x^2 - (\alpha^{31} + \alpha^{62})x + \alpha^{31}.\alpha^{62} = 0$
$\Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$ है।
ट्रिक : $\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \omega$
$\alpha^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \omega^2$
$\therefore \alpha^{31} = \omega^{31} = \omega$ एवं $\alpha^{62} = \omega^{62} = \omega^2$
$\therefore$ समीकरण $x^2 + x + 1 = 0$ है।

48. (b) प्रश्नानुसार, p व q समीकरण $3x^2 - 5x - 2 = 0$ के मूल हैं।

अतः $p.q = -\frac{2}{3}$.

49. (c) $\alpha + \beta = -b$ एवं $\alpha\beta = -c$

अब $b + c = -[(\alpha+\beta)+\alpha\beta], bc = (\alpha+\beta)(\alpha\beta)$

अतः अभीष्ट समीकरण

$x^2 + [(\alpha+\beta)+\alpha\beta]x + \alpha\beta(\alpha+\beta) = 0$ है।

50. (b) $\alpha+\beta = -b/a, \alpha\beta = c/a$

$(1+\alpha+\alpha^2)(1+\beta+\beta^2)$

$= 1 + (\alpha+\beta) + (\alpha^2+\beta^2) + \alpha\beta + \alpha\beta(\alpha+\beta) + \alpha^2\beta^2$

$= 1 + (\alpha+\beta) + (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta + \alpha\beta(\alpha+\beta) + (\alpha\beta)^2$

$= 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a} + \left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right) + \frac{c^2}{a^2}$

$= (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)/a^2$

$= [(a-b^2) + (b-c)^2 + (c-a)^2]/2a^2$ जो कि धनात्मक है।

ट्रिक : यह स्पष्ट है कि दिये गये व्यंजक का मान प्रत्येक भिन्न a, b, c के लिए शून्य, धनात्मक या ऋणात्मक होगा अतः माना $a = 1, b = 0, c = -4$ लेने पर $\alpha = 2, \beta = -2$ । स्पष्टतः व्यंजक का मान धनात्मक है।

51. (a) यहाँ $\frac{\alpha+1}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha-1} = -\frac{b}{a}$ एवं $\frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{c}{a}$

$\therefore \alpha = \frac{c+a}{c-a}$ एवं $\frac{2\alpha^2-1}{\alpha(\alpha-1)} = -\frac{b}{a}$

α का मान रखने पर $(a+b+c)^2 = b^2 - 4ac$.

नोट : विद्यार्थी इस तथ्य को याद रखें।

52. (b) यदि समीकरण $ax^2 + 2bx + c = 0$ के मूल $m : n$ के अनुपात में हों तो

$mn(2b)^2 = (m+n)^2 ac$ .....(i)

एवं यदि $px^2 + 2qx + r = 0$ के मूल $m : n$ के अनुपात में हों तो $mn(2q)^2 = (m+n)^2 pr$ .....(ii)

(i) में (ii) का भाग देने पर $\frac{b^2}{q^2} = \frac{(ac)}{(pr)}$ या $\frac{b^2}{ac} = \frac{q^2}{pr}$.

53. (c) चूँकि $b, c > 0$.

अतः $\alpha + \beta = -b < 0$ एवं $\alpha\beta = -c < 0$

चूँकि मूलों का गुणनफल ऋणात्मक है। अतः मूल विपरीत चिन्हों के होंगे।

54. (b) समीकरण $x^2 - (p+1)x + pq = 0$

चूँकि p, q मूल है, अतः $p + q = p + 1 \Rightarrow q = 1$.

55. (c) $(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = (b^2 - 4ac)/a^2$ ......(i)

एवं $\{(\alpha-k)-(\beta-k)\}^2$

$= \{(\alpha-k)+(\beta-k)\}^2 - 4(\alpha-k)(\beta-k)$

$= (-B/A)^2 - 4(C/A) = (B^2 - 4AC)/A^2$ .....(ii)

(i) व (ii) से, $(b^2 - 4ac)/a^2 = (B^2 - 4AC)/A^2$

$\therefore \frac{b^2 - 4AC}{b^2 - 4ac} = \left(\frac{A}{a}\right)^2$

56. (a) स्पष्टतः $p + q = -p$ एवं $pq = q \Rightarrow p = 1$ एवं $q = -2$.

57. (a) माना α दूसरा मूल है, तब मूलों का गुणनफल $\alpha.(2-i) = \frac{(2-i)}{i} \Rightarrow \alpha = -i$.

58. (a) $\alpha.\frac{1}{\alpha} = \frac{k}{5}$ या $k = 5$.

59. (b) $\alpha+\beta = 7, \alpha\beta = 6$. अतः $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{7}{6}$

60. (b) यहाँ $\alpha^2 + \beta^2 = -4, \alpha^3 + \beta^3 = -16$

$\therefore (\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3) = \alpha^5 + \beta^5 + \alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$

$\Rightarrow (-4)(-16) = \alpha^5 + \beta^5 + (16)(2) \Rightarrow \alpha^5 + \beta^5 = 32$

61. (a) दिए गए समीकरण द्वारा हम प्राप्त करते हैं कि समीकरण $a(p+x)^2 + 2bpx + c = 0$ या

$ax^2 + 2x(a+b)p + ap^2 + c = 0$ के मूल q तथा r हैं

अब मूलों का गुणनफल $qr = \frac{ap^2+c}{a} = p^2 + \frac{c}{a}$ है।

62. (d) दिए गये समीकरण का एक मूल $x = 1$ है, क्योंकि गुणांकों का योगफल शून्य है।

63. (d) $\alpha+\beta = \frac{-b}{a}$ एवं $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

अब मूलों का योगफल $= 2 + \alpha + 2 + \beta = 4 - \frac{b}{a}$

एवं मूलों का गुणनफल $= (2+\alpha)(2+\beta)$

$= 4 + \frac{c}{a} - \frac{2b}{a} = \frac{4a+c-2b}{a}$

अतः अभीष्ट समीकरण $x^2 - x\left(4 - \frac{b}{a}\right) + \frac{4a+c-2b}{a} = 0$

या $ax^2 - x(4a-b) + 4a + c - 2b = 0$

या $ax^2 + x(b-4a) + 4a - 2b + c = 0$ है।

64. (c) माना समीकरण $x^2 + bx + c = 0$ के मूल α, β हैं एवं α', β' समीकरण $x^2 + qx + r = 0$ के मूल हैं।

तब $\alpha+\beta = -b, \alpha\beta = c, \alpha'+\beta' = -q, \alpha'\beta' = r$

यह दिया गया है कि $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha'+\beta'}{\alpha'-\beta'}$

$\Rightarrow \frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2} = \frac{(\alpha'+\beta')^2}{(\alpha'-\beta')^2} \Rightarrow \frac{b^2}{b^2-4c} = \frac{q^2}{q^2-4r}$

$\Rightarrow b^2 r = q^2 c$

65. (c) माना α व α^2 समीकरण $x^2 - x - k = 0$ के मूल हैं, तब $\alpha + \alpha^2 = 1$ एवं $\alpha^3 = -k$.

$\therefore (-k)^{1/3} + (-k)^{2/3} = 1 \Rightarrow -k^{1/3} + k^{2/3} = 1$

$\Rightarrow (k^{2/3} - k^{1/3})^3 = 1 \Rightarrow k^2 - k - 3k(k^{2/3} - k^{1/3}) = 1$

$\Rightarrow k^2 - k - 3k(1) = 1 \Rightarrow k^2 - 4k - 1 = 0 \Rightarrow k = 2 \pm \sqrt{5}$.

66. (d) चूँकि $3 + 4i$ समीकरण $x^2 + px + q = 0$ का मूल हैं, अतः इसका अन्य मूल $3 - 4i$ होगा।

अब मूलों का योगफल $= -p$ तथा मूलों का गुणनफल $= q$

अतः $p = -6, q = 25$.

67. (a) माना α, β समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हैं, तब $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$.

दिया है $\alpha + \beta = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2}$

$\Rightarrow -\frac{b}{a}\frac{c^2}{a^2} = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta \Rightarrow -\frac{bc^2}{a^3} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}$

$\Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{b^2}{a^2 c} + \frac{bc}{a^3} \Rightarrow 2 = \frac{b^2}{ac} + \frac{bc}{a^2}$.

68. (b) $3\alpha + 2\beta = 16 \Rightarrow 2(\alpha+\beta) + \alpha = 16$

$\Rightarrow 2 \times 6 + \alpha = 16 \Rightarrow \alpha = 4$

$\therefore 4^2 - 6 \times 4 + a = 0 \Rightarrow a = 8$.

69. (a) $l = 1, m = -3, n = 2 \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 1$ लेने पर।

70. (b) माना समीकरण के मूल α, β हैं।

दिया है $\alpha - \beta = 1$

$\therefore (\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta \Rightarrow (1)^2 = (-p)^2 - 4q$

$\therefore p^2 = 4q + 1$.

71. (b) दिया गया समीकरण

$(5+\sqrt{2})x^2 - (4+\sqrt{5})x + 8 + 2\sqrt{5} = 0$ है।

अतः $x_1 + x_2 = \frac{4+\sqrt{5}}{5+\sqrt{2}}$

एवं $x_1 x_2 = \frac{8+2\sqrt{5}}{5+\sqrt{2}} = \frac{2(4+\sqrt{5})}{5+\sqrt{2}} = 2(x_1 + x_2)$

हरात्मक माध्य $= \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2} = \frac{2x_1x_2}{x_1x_2/2} = 4$ है।

72. (a) माना मूल α एवं $\alpha + 1$ है।

तब मूलों का योगफल $= 2\alpha + 1 = b$

एवं मूलों का गुणनफल $= \alpha(\alpha+1) = c$

अब $b^2 - 4c = (2\alpha+1)^2 - 4\alpha(\alpha+1)$

$= 4\alpha^2 + 1 + 4\alpha - 4\alpha^2 - 4\alpha$

$\therefore b^2 - 4c = 1$.

73. (a) दिया गया समीकरण $Ax^2 + Bx + C = 0$

$\Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{B}{A}, \alpha\beta = \frac{C}{A}$

$\therefore \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$= \left(-\frac{B}{A}\right)^3 - 3\left(\frac{C}{A}\right)\left(-\frac{B}{A}\right) = -\frac{B^3}{A^3} + \frac{3BC}{A^2}$

$\alpha^3 + \beta^3 = \frac{3ABC - B^3}{A^3}$.

74. (c) $\alpha + \beta = 1 + n^2$; $\alpha\beta = \frac{1}{2}(1 + n^2 + n^4)$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (1+n^2)^2 - 2.\frac{1}{2}(1 + n^2 + n^4)$

$= 1 + n^4 + 2n^2 - 1 - n^2 - n^4 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = n^2$.

75. (b) $\alpha + \alpha^2 = 30$ एवं $\alpha^3 = p$

$\alpha^2 + \alpha - 30 = 0 \Rightarrow (\alpha+6)(\alpha-5) = 0 \Rightarrow \alpha = -6, 5$

$\therefore p = \alpha^3 = (-6)^3 = -216$ एवं $p = (5)^3 = 125$

$p = 125$ एवं -216 .

76. (b) माना मूल α और β हैं।

अतः $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = (3)^2 - 2 \times 1 = 7$.

77. (a) माना मूल α व β है। दिया है $\alpha + \beta = -1$

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{6} \Rightarrow \alpha\beta = -6$

अतः समीकरण $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$ है।

78. (c) माना मूल α व β हैं $\Rightarrow \alpha + \beta = -p$, $\alpha\beta = q$

दिया है, $\alpha + \beta = \alpha^2 + \beta^2$

लेकिन $\alpha + \beta = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$\Rightarrow -p = (-p)^2 - 2q$

$\Rightarrow p^2 - 2q = -p \Rightarrow p^2 + p = 2q$.

79. (c) α, β समीकरण $x^2 - 3x + 1 = 0$ के मूल हैं।

$\therefore \alpha + \beta = 3$ तथा $\alpha\beta = 1$

$S = \frac{1}{\alpha - 2} + \frac{1}{\beta - 2} = \frac{\alpha + \beta - 4}{\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4}$

$= \frac{3 - 4}{1 - 2.3 + 4} = 1$

तथा $P = \frac{1}{(\alpha - 2)(\beta - 2)} = \frac{1}{\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4} = -1$

अतः समीकरण जिसके मूल $\frac{1}{\alpha - 2}$ तथा $\frac{1}{\beta - 2}$ है

$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$.

80. (b) समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α, β हैं।

$\therefore \alpha + \beta = -b/a$, $\alpha\beta = c/a$

अब मूल $\alpha - 1, \beta - 1$

मूलों का योग, $\alpha + \beta - 2 = (-b/a) - 2 = -8/2 = -4$

मूलों का गुणनफल, $(\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1$

$= c/a + b/a + 1 = 1$

$\because$ नया समीकरण $2x^2 + 8x + 2 = 0$ है।

$\therefore \frac{b}{a} = 2$ अर्थात् $b = 2a$, $c + b = 0 \Rightarrow b = -c$.

81. (c) दिया गया समीकरण $9x^2 + 6x + 1 = 0$ है।

$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3}$ एवं $\alpha\beta = \frac{1}{9}$

$\therefore \alpha - \beta = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{\frac{4}{9} - 4.\frac{1}{9}} = 0$

$\Rightarrow \alpha = \frac{-1}{3}, \beta = \frac{-1}{3}$

$\therefore$ समीकरण $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0$.

82. (b) α, β समीकरण $6x^2 - 6x + 1 = 0$ के मूल हैं।

$\Rightarrow \alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 1/6$

$\therefore \frac{1}{2}\left[a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3\right] + \frac{1}{2}\left[a + b\beta + c\beta^2 + d\beta^3\right]$

$= a + \frac{1}{2}b(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}c(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{2}d(\alpha^3 + \beta^3)$

$= a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta] + \frac{1}{2}d[(\alpha + \beta)^3$

$-3\alpha\beta(\alpha + \beta)]$

$= a + \frac{b}{2} + \frac{1}{2}c\left[(1)^2 - 2.\frac{1}{6}\right] + \frac{1}{2}d\left[(1)^3 - 3.\frac{1}{6}\right]$

$= \frac{a}{1} + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4}$.

83. (a) यहाँ, $\tan\alpha + \tan\beta = p$ .....(i)

$\tan\alpha \tan\beta = q$ .....(ii)

अतः $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{p}{1 - q}$

$\Rightarrow \sin^2(\alpha + \beta) = \frac{1 - \cos[2(\alpha + \beta)]}{2}$

$= \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{1 - \tan^2(\alpha + \beta)}{1 + \tan^2(\alpha + \beta)}\right\} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1 - \left(\frac{p}{1 - q}\right)^2}{1 + \left(\frac{p}{1 - q}\right)^2}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(1 - q)^2 + p^2 - (1 - q)^2 + p^2}{(1 - q)^2 + p^2}\right] = \frac{p^2}{p^2 + (1 - q)^2}$.

84. (a) दिया है, $\frac{x - m}{mx + 1} = \frac{x + n}{nx - 1}$

$\Rightarrow x^2(m - n) + 2mnx + (m + n) = 0$

मूल क्रमशः $\alpha, \frac{1}{\alpha}$ हैं तब $\alpha.\frac{1}{\alpha} = \frac{m + n}{m - n}$

$\Rightarrow m - n = m + n \Rightarrow n = 0$.

85. (b) चूँकि समीकरण $x^2 - 5x + 16 = 0$ के मूल α, β है।

$\Rightarrow \alpha + \beta = 5$ एवं $\alpha\beta = 16$ एवं $\alpha^2 + \beta^2 + \frac{\alpha\beta}{2} = -p$

$\Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \frac{\alpha\beta}{2} = -p \Rightarrow 25 - 32 + 8 = -p$

$\Rightarrow p = -1$ एवं $(\alpha^2 + \beta^2)\left(\frac{\alpha\beta}{2}\right) = q$

$\Rightarrow \left[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\right]\left[\frac{\alpha\beta}{2}\right] = q \Rightarrow q = [25 - 32]\frac{16}{2} = -56$

अतः, $p = -1, q = -56$.

86. (b) माना α समीकरण $x^2 - x + k = 0$ का एक मूल है, तब 2α समीकरण $x^2 - x + 3k = 0$ का मूल होगा।

$\therefore \alpha^2 - \alpha + k = 0$ एवं $4\alpha^2 - 2\alpha + 3k = 0$

$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{-3k + 2k} = \frac{\alpha}{4k - 3k} = \frac{1}{-2 + 4}$

$\Rightarrow \alpha^2 = -k/2$ एवं $\alpha = k/2$

अब, $\alpha^2 = (\alpha)^2 \Rightarrow -k/2 = (k/2)^2$

$\Rightarrow k^2 + 2k = 0 \Rightarrow k = 0$ या -2.

87. (a) माना r गुणोत्तर श्रेणी $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ का सार्वअनुपात है, तब $\beta = \alpha r,\ \gamma = \alpha r^2$ तथा $\delta = \alpha r^3$

$\therefore \alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha + \alpha r = 1 \Rightarrow \alpha(1+r) = 1$ .....(i)

$\alpha\beta = p \Rightarrow \alpha(\alpha r) = p \Rightarrow \alpha^2 r = p$ .....(ii)

$\gamma + \delta = 4 \Rightarrow \alpha r^2 + \alpha r^3 = 4 \Rightarrow \alpha r^2(1+r) = 4$ .....(iii)

तथा $\gamma\delta = q \Rightarrow \alpha r^2 . \alpha r^3 = q \Rightarrow \alpha^2 r^5 = q$ .....(iv)

समीकरण (iii) को (i) से भाग देने पर, $r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2$

यदि $r = 2$ लेते है, तब α पूर्णांक नहीं है

अतः $r = -2$ समीकरण (i) में रखने पर $\alpha = -1$

(ii) से $p = \alpha^2 r = (-1)^2(-2) = -2$

तथा (iv) से $q = \alpha^2 r^5 = (-1)^2(-2)^5 = -32$

$\Rightarrow (p, q) = (-2, -32)$.

88. (a) माना मूल α एवं β है

$\Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{8}{5} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{16}{5}$ .....(i)

तथा $\frac{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}{2} = \frac{8}{7} \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta} = \frac{8}{7} \Rightarrow \frac{(16/5)}{2(8/7)} = \alpha\beta$

$\Rightarrow \alpha\beta = \frac{7}{5}$ .....(ii)

$\therefore$ समीकरण $x^2 - \left(\frac{16}{5}\right)x + \frac{7}{5} = 0$

$\Rightarrow 5x^2 - 16x + 7 = 0$ है।

89. (d) $1 - i$ समीकरण का एक मूल है, अतः $x = 1 - i$

$\Rightarrow (x-1) = -i \Rightarrow (x-1)^2 = (-i)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$

तुलना करने पर, $a = 2,\ b = 2$.

90. (c) समीकरण $x^2 + kx - 24 = 0$ का एक मूल 3 है।

$\Rightarrow 3^2 - 3k - 24 = 0 \Rightarrow k = 5$

$x = 3$ व $k = 5$ विकल्प में रखने पर सिर्फ (c) सही उत्तर है।

91. (d) $\alpha^2 - 5\alpha + 3 = 0$ .....(i)

$\beta^2 - 5\beta + 3 = 0$ .....(ii)

(i) – (ii) से,

$\Rightarrow (\alpha^2 - \beta^2) - 5\alpha + 5\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 5(\alpha - \beta) \Rightarrow \alpha + \beta = 5$ है, होगा

(i) + (ii) से,

$\Rightarrow (\alpha^2 + \beta^2) - 5(\alpha + \beta) + 6 = 0$

$\Rightarrow (\alpha^2 + \beta^2) - 5.5 + 6 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 19$

तब $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \Rightarrow 25 = 19 + 2\alpha\beta \Rightarrow \alpha\beta = 3$

तब वह समीकरण जिसके मूल $\frac{\alpha}{\beta}$ तथा $\frac{\beta}{\alpha}$ है

$x^2 - x\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{\alpha}{\beta}.\frac{\beta}{\alpha} = 0$

$\Rightarrow x^2 - x\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}\right) + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x.\frac{19}{3} + 1 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 19x + 3 = 0$.

92. (a) माना α_1, β_1 समीकरण के मूल हैं।

$x^2 + ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$

$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \beta_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$

एवं α_2, β_2 समीकरण $x^2 + bx + a = 0$ के मूल है

अतः, $\alpha_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2},\ \beta_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2}$

अब $\alpha_1 - \beta_1 = \sqrt{a^2 - 4b}$; $\alpha_2 - \beta_2 = \sqrt{b^2 - 4a}$

दिया है, $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 \Rightarrow \sqrt{a^2 - 4b} = \sqrt{b^2 - 4a}$

$\Rightarrow a^2 - b^2 = -4(a - b) \Rightarrow a + b + 4 = 0$.

93. (c) ध्यान दें $t \in R, t^2x^2 + |x| + 9 \ge 9$ अतः दिये गये समीकरण का कोई भी वास्तविक मूल नहीं है।

94. (a) माना समीकरण के मूल α तथा β है।

अतः $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2\beta}{3} \therefore \alpha + \beta = \frac{m}{12}$

$\Rightarrow \frac{2\beta}{3} + \beta = \frac{m}{12} \Rightarrow \frac{5\beta}{3} = \frac{m}{12}$ .....(i)

एवं $\alpha\beta = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{2\beta}{3}.\beta = \frac{5}{12} \Rightarrow \beta^2 = \frac{5}{8}$

$\Rightarrow \beta = \sqrt{5/8}$

β का मान (i) में रखने पर, $\frac{5}{3}.\sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{m}{12}$

$\Rightarrow m = 5\sqrt{10}$.

95. (a) यदि एक मूल $2+\sqrt{3}$ है तब दूसरा मूल $2-\sqrt{3}$ होगा।

$\Rightarrow$ मूलों का योगफल $=-p=[2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}]=4 \Rightarrow p=-4$

एवं मूलों का गुणनफल $=q=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}]=4-3=1$

$\Rightarrow (p,q)=(-4,\ 1)$.

96. (c) माना मूल α एवं 3α हैं।

$\therefore\ \alpha+3\alpha=\frac{-b}{a} \Rightarrow \alpha=-\frac{b}{4a}$ एवं $\alpha.3\alpha=\frac{c}{a}$

$\Rightarrow\ \frac{c}{a}=3.\frac{b^2}{16a^2} \Rightarrow 16ac=3b^2$.

97. (b) दिया गया समीकरण $3x^2-20x+17=0$ है।

$\Rightarrow\ (x-1)(3x-17)=0 \Rightarrow x=1,\ \frac{17}{3}$

अतः व्युत्क्रम मूल 1 तथा $\frac{3}{17}$ हैं।

$\therefore$ अतः समीकरण $x^2-\left(1+\frac{3}{17}\right)x+\frac{3}{17}=0$

$\Rightarrow 17x^2-20x+3=0$.

98. (d) यहाँ, $\alpha+\beta=-2$ एवं $\alpha\beta=4$

यह $\therefore \frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{(\alpha\beta)^3}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^3}$

$=\frac{(-2)^3-3(-2)(4)}{(4)^3}=\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$.

99. (b) माना $x=1+i \Leftrightarrow x-1=i$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=i^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1=-1$

$\Leftrightarrow x^2-2x+2=0$.

100. (b) माना दो संख्यायें x_1 व x_2 है

$\frac{x_1+x_2}{2}=9$ एवं $x_1x_2=16$

$x_1+x_2=18$ एवं $x_1x_2=16$

समीकरणः x^2-(मूलों का योगफल)$x+$मूलों का गुणनफल $=0$

अभीष्ट समीकरण $x^2-18x+16=0$ है।

101. (a) $\alpha+\beta=\frac{5}{6},\ \alpha\beta=\frac{1}{6}$

$\tan^{-1}\alpha+\tan^{-1}\beta=\tan^{-1}\left(\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}\right)$

$=\tan^{-1}\left(\frac{5/6}{1-(1/6)}\right)=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$.

102. (d) समीकरण $x^2-px+q=0$ के मूल a तथा b हैं

अर्थात् $a+b=p$ ......(i) एवं $ab=q$ ......(ii)

तब $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{p}{q}$.

103. (d) माना दिये गये समीकरण $x^2+px+q=0$ के मूल α व α^2 हैं।

अब, $\alpha.\alpha^2=\alpha^3=q,\ \ \alpha+\alpha^2=-p$

दोनों पक्षों का घन करने पर,

$\alpha^3+(\alpha^2)^3+3\alpha.\alpha^2(\alpha+\alpha^2)=-p^3$

$q+q^2+3q(-p)=-p^3$

$p^3+q^2+q(1-3p)=0$.

104. (a) दिया है, $3^2+a.3+3=0$; $a=-4$

माना समीकरण $x^2-4x+b=0$ के मूल α व 3α हैं।

$\alpha+3\alpha=4 \Rightarrow 4\alpha=4 \Rightarrow \alpha=1$

अतः $1-4+b=0 \Rightarrow b=3$

105. (d) $(\alpha^2+\beta^2)^2=(\alpha+\beta)(\alpha^3+\beta^3)$

$\left(\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)^2=\left(\frac{-b}{a}\right)\left(\frac{-b^2+3abc}{a^3}\right)$

$\Rightarrow\ 4a^2c^2=acb^2 \Rightarrow ac(b^2-4ac)=0$

$a\neq 0 \Rightarrow c\Delta=0$

106. (b) $2x^2-(p+1)x+(p-1)=0$

दिया गया है $\alpha-\beta=\alpha\beta \Rightarrow (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\alpha^2\beta^2$

$\Rightarrow \frac{(p-1)^2}{4}=\frac{(p+1)^2}{4}-\frac{4(p-1)}{2}$

$\Rightarrow\ 2(p-1)=p \Rightarrow p=2$.

107. (a) दिये गये मूल $3p-2q$ तथा $3q-2p$ हैं।

मूलों का योगफल $=(3p-2q)+(3q-2p)=(p+q)=\frac{5}{3}$

मूलों का गुणनफल $=(3p-2q)(3q-2p)$

$=9pq-6q^2-6p^2+4pq=13pq-2(3p^2+3q^2)$

$=13\left(\frac{-2}{3}\right)-2(5p+2+5q+2)$

$=13\left(\frac{-2}{3}\right)-2\left[5\left(\frac{5}{3}\right)+4\right]$

$=\frac{-26}{3}-2\left[\frac{25}{3}+4\right]=\frac{-100}{3}$

अतः समीकरण $3x^2-5x-100=0$ है।

मूलों के उभयनिष्ठ होने का प्रतिबंध, वर्ग व्यंजक व मूलों की स्थिति

1. (b) दिये गये समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

$(6k+2)x^2+rx+3k-1=0$ .....(i)

व $2(6k+2)x^2+px+2(3k-1)=0$ .....(ii)

उभयनिष्ठ मूल के प्रतिबन्धानुसार,

$\frac{12k+4}{6k+2}=\frac{p}{r}=\frac{6k-2}{3k-1}=2$ या $2r-p=0$

2. (c) माना उभयनिष्ठ मूल y है, तो $y^2+py+q=0$ व $y^2+\alpha y+\beta=0$

बज्रगुणन विधि से हल करने पर,

$\frac{y^2}{p\beta-q\alpha}=\frac{y}{q-\beta}=\frac{1}{\alpha-p}$

$\therefore\ y=\frac{q-\beta}{\alpha-p}$ एवं $\frac{y^2}{y}=y=\frac{p\beta-q\alpha}{q-\beta}$

3. (c) माना समीकरण $x^2-cx+d=0$ के मूल α,β है तो समीकरण $x^2-ax+b=0$ के मूल α,α होंगे

$\therefore\ \alpha+\beta=c, \alpha\beta=d, \alpha+\alpha=a, \alpha^2=b$

अतः $2(b+d)=2(\alpha^2+\alpha\beta)=2\alpha(\alpha+\beta)=ac$

4. (d) घटाने पर $2hx = 56$ या $hx = 28$ प्राप्त होता है।
यह मान किसी में भी रखने पर, $x^2 = 49$
$\therefore \left[\frac{28}{h}\right]^2 = 7^2 \Rightarrow h = 4 (h > 0)$

5. (a) यदि $\alpha, \beta; \beta, \gamma$ तथा γ, α क्रमशः मूल हैं।
$\therefore \alpha + \beta = -p, \beta + \gamma = -q, \gamma + \alpha = -r$
सभी को जोड़ने पर, $\Sigma\alpha = -(p+q+r)/2$ इत्यादि।

6. (c) उभयनिष्ठ मूल के प्रतिबन्ध से,
$(bc - a^2)^2 = (ca - b^2)(ab - c^2)$
उपरोक्त को सरल करने पर, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

7. (a) माना एक उभयनिष्ठ मूल α है।
अतः $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ .....(i)
एवं $\alpha^2 + q\alpha + p = 0$ ....(ii)
(i) – (ii) से,
$\Rightarrow (p - q)\alpha + (q - p) = 0 \Rightarrow \alpha = 1$
α का मान (i) में रखने पर, $p + q + 1 = 0$.

8. (d) माना एक उभयनिष्ठ मूल α है, तब
$\alpha^2 + a\alpha + 10 = 0$ .....(i)
एवं $\alpha^2 + b\alpha - 10 = 0$ .....(ii)
(i) – (ii) से,
$(a - b)\alpha + 20 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{20}{a-b}$
α का मान समीकरण (i) में रखने पर,
$\left(-\frac{20}{a-b}\right)^2 + a\left(-\frac{20}{a-b}\right) + 10 = 0$
$\Rightarrow 400 - 20a(a-b) + 10(a-b)^2 = 0$
$\Rightarrow 40 - 2a^2 + 2ab + a^2 + b^2 - 2ab = 0$
$\Rightarrow a^2 - b^2 = 40$

9. (b) व्यंजक $x^2 - 11x + a$ व $x^2 - 14x + 2a$ का एक गुणनखण्ड उभयनिष्ठ है, तो
$\Rightarrow \frac{x^2}{-22a + 14a} = \frac{x}{a - 2a} = \frac{1}{-14 + 11}$
$\Rightarrow \frac{x^2}{-8a} = \frac{x}{-a} = \frac{1}{-3} \Rightarrow x^2 = \frac{8a}{3}$ एवं $x = \frac{a}{3}$
$\Rightarrow \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{8a}{3} \Rightarrow \frac{a^2}{9} = \frac{8a}{3} \Rightarrow a = 0, 24$.
ट्रिक : विकल्पों में 'a' का मान रखकर परीक्षण कर सकते हैं।

10. (d) $x^2 - 3x + 2$, $x^4 - px^2 + q = 0$ का एक गुणनखण्ड है।
अतः $(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 1) = 0$
$\Rightarrow x = 2, 1$, दिये गये समीकरण में यह मान रखने पर,
अतः $4p - q - 16 = 0$ .....(i)
एवं $p - q - 1 = 0$ .....(ii)
(i) व (ii) को हल करने पर $(p, q) = (5, 4)$

11. (c) $x^2 - 8x + 17 = (x^2 - 8x + 16) + 1 = (x - 4)^2 + 1$
चूँकि x वास्तविक है। अतः $(x - 4)^2$ हमेशा धनात्मक होगा एवं इसका न्यूनतम मान 0 होगा। इसलिए दिये गये व्यंजक का न्यूनतम मान 1 है।

12. (a) माना $y = \frac{x^2 + 14x + 9}{x^2 + 2x + 3}$
$\Rightarrow y(x^2 + 2x + 3) - x^2 - 14x - 9 = 0$
$\Rightarrow (y - 1)x^2 + (2y - 14)x + 3y - 9 = 0$
वास्तविक x के लिए विविक्तकर ≥ 0
अर्थात् $4(y - 7)^2 - 4(y - 1)3(y - 3) \geq 0$
$\Rightarrow y^2 + y - 20 \leq 0$ या $(y - 4)(y + 5) \leq 0$
अब दो गुणनखण्ड़ों का गुणन ऋणात्मक होगा यदि वे विपरीत चिन्हों के हों। अतः दो स्थितियाँ उत्पन्न होती हैं।
स्थिति I : $y - 4 \geq 0$ या $y \geq 4$ व $y + 5 \leq 0$ या $y \leq -5$
यह असम्भव है।
स्थिति II : $y - 4 \leq 0$ या $y \leq 4$ व $y + 5 \geq 0$ या $y \geq -5$
दोनों संतुष्ट होंगे यदि $-5 \leq y \leq 4$
अतः y का अधिकतम मान 4 व न्यूनतम मान – 5 है।

13. (b) यदि दिया गया व्यंजक y है, तब
$y = 2x^2y + (3y - 1)x + (6y - 2) = 0$
यदि $y \neq 0$ तो $\Delta \geq 0$ वास्तविक x के लिए अर्थात् $B^2 - 4AC \geq 0$
या – $39y^2 + 10y + 1 \geq 0$ या $(13y + 1)(3y - 1) \leq 0$
$\Rightarrow -1/13 \leq y \leq 1/3$
यदि $y = 0$ तब $x = -2$ जो कि वास्तविक है अतः y का यह मान ऊपर दिये गये परास में शामिल है।

14. (c) दिया है, $x^2 + px + 1$, $ax^3 + bx + c = 0$ का एक गुणनखण्ड है, तो माना
$ax^3 + bx + c \equiv (x^2 + px + 1)(ax + \lambda)$, जहाँ λ नियतांक है। अतः x की घातों के गुणांकों की तुलना करने पर,
$0 = ap + \lambda,\ b = p\lambda + a, c = \lambda$
$\Rightarrow p = -\frac{\lambda}{a} = -\frac{c}{a}$
अतः $b = \left(-\frac{c}{a}\right)c + a$ या $ab = a^2 - c^2$.

15. (a) $x, y, z \in R$ व भिन्न हैं।
अब, $u = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6yz - 3zx - 2xy$
$= \frac{1}{2}(2x^2 + 8y^2 + 18z^2 - 12yz - 6zx - 4xy)$
$= \frac{1}{2}\{(x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 6zx + 9z^2) + (4y^2 - 12yz + 9z^2)\}$
$= \frac{1}{2}\{(x - 2y)^2 + (x - 3z)^2 + (2y - 3z)^2\}$
चूँकि यह वास्तविक संख्याओं के वर्गों का योगफल है। अतः यह अऋणात्मक होगा।

16. (b) माना $f(x) = 5 + 4x - 4x^2 = y \Rightarrow 4x^2 - 4x - 5 + y = 0$
चूँकि x वास्तविक है, अतः $B^2 - 4AC \geq 0$
$\Rightarrow 16 - 4.4(-5 + y) \geq 0$
$\Rightarrow 16 - 16(-5 + y) \geq 0 \Rightarrow -5 + y \leq 1 \Rightarrow y \leq 6$
अतः y का अधिकतम मान 6 है।

17. (d) माना $y = \frac{(x - a)(x - b)}{(x - c)}$
या $y(x - c) = x^2 - (a + b)x + ab$

या $x^2-(a+b+y)x+ab+cy=0$

$\Delta=(a+b+y)^2-4(ab+cy)$

$=y^2+2y(a+b-2c)+(a-b)^2$

चूँकि x वास्तविक है और y सभी वास्तविक मान ग्रहण करता है, अतः y के सभी वास्तविक मानों के लिए $\Delta\geq 0$ होना चाहिए। y में द्विघात समीकरण का चिन्ह वही होगा जो प्रथम पद का है यदि $B^2-4AC<0$

अर्थात् $4(a+b-2c)^2-4(a-b)^2<0$

या $4(a+b-2c+a-b)(a+b-2c-a+b)<0$

या $16(a-c)(b-c)<0$ या $16(c-a)(c-b)=$ ऋणात्मक

$\therefore c$, a और b के बीच स्थित है, अर्थात् $a<c<b$ .....(i)

जहाँ $a<b$, किन्तु यदि $b<a$ तब उपरोक्त प्रतिबन्ध $b<c<a$ या $a>c>b$ होगा। .....(ii)

अतः (i) और (ii) से हम देखते हैं कि (d) सही उत्तर है।

18. (c) माना $y=\dfrac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$

$\Rightarrow (y-1)x^2+3(y+1)x+4(y-1)=0$

x के वास्तविक होने के लिए $D\geq 0$

$\Rightarrow 9(y+1)^2-16(y-1)^2\geq 0$

$\Rightarrow -7y^2+50y-7\geq 0\Rightarrow 7y^2-50y+7\leq 0$

$\Rightarrow (y-7)(7y-1)\leq 0$

अब दो गुणांकों का गुणनफल ऋणात्मक होगा, यदि एक ऋणात्मक व दूसरा धनात्मक हो।

स्थिति I : $(y-7)\geq 0$ तथा $(7y-1)\leq 0$

$\Rightarrow y\geq 7$ एवं $y\leq\dfrac{1}{7}$ परन्तु यह असम्भव है।

स्थिति II : $(y-7)\leq 0$ एवं $(7y-1)\geq 0$

$\Rightarrow y\leq 7$ एवं $y\geq\dfrac{1}{7}\Rightarrow\dfrac{1}{7}\leq y\leq 7$

अतः उच्चिष्ठ मान 7 व निम्निष्ठ मान $\dfrac{1}{7}$ है।

19. (d) माना $y=\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$

$\Rightarrow x^2(y-1)+2(y-17)x+(71-7y)=0$

वास्तविक x के लिए $D\geq 0$

$\Rightarrow 4(y-17)^2-4(y-1)(71-7y)\geq 0$

$\Rightarrow (y^2-3+y+289)-(71y-7y^2-71+7y)\geq 0$

$\Rightarrow y^2-14y+45\geq 0\Rightarrow (y-5)(y-9)\geq 0$

यह तभी संभव है जब $y-5$ व $y-9$ दोनों ऋणात्मक हों या दोनों धनात्मक हों। माना $y-5\leq 0\Rightarrow y\leq 5$ एवं $y-9\leq 0\Rightarrow y\leq 9$.

अतः $y\leq 5$ .....(i)

यदि $y-5\geq 0\Rightarrow y\geq 5$ एवं $y-9\geq 0\Rightarrow y\geq 9$

अतः $y\geq 9$. .....(ii)

अतः y, 5 व 9 के बीच नहीं हो सकता।

20. (a) माना $y=x^2-6x+13\Rightarrow x^2-6x+13-y=0$

$D\geq 0\Rightarrow 36-4(13-y)\geq 0$

$\Rightarrow 36-52+4y\geq 0\Rightarrow 4y\geq 16\Rightarrow y\geq 4$

अतः y का मान 4 से कम नहीं होगा।

वैकल्पिक: $x^2-6x+13=(x-3)^2+4$

स्पष्टतः न्यूनतम मान 4 है।

21. (a) $x^2-3x+3=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

अतः न्यूनतम मान $\dfrac{3}{4}$ है, जो कि $\left(-3,\dfrac{3}{2}\right)$ में है।

22. (d) यदि वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल एक संख्या k से अधिक हैं, तब $ak^2+bk+c>0$ यदि $a>0$, $b^2-4ac\geq 0$ तथा मूलों का योगफल $>2k$। इसलिए यदि $x^2+x+a=0$ के मूल संख्या a से अधिक हैं, तब

$a^2+a+a>0, 1-4a\geq 0$ एवं $-1>2a$

$\Rightarrow a(a+2)>0,\ a\leq\dfrac{1}{4}$ एवं $a<-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow a>0$ या $a<-2, a<\dfrac{1}{4}$ एवं $a<-\dfrac{1}{2}$

अतः $a<-2$.

23. (a) दिया गया समीकरण $x^2-2ax+a^2+a-3=0$ है।

यदि मूल वास्तविक हैं। तब $D\geq 0$

$\Rightarrow 4a^2-4(a^2+a-3)\geq 0\Rightarrow -a+3\geq 0$

$\Rightarrow a-3\leq 0\Rightarrow a\leq 3$

मूल 3 से कम हैं, अतः $f(3)>0$

$9-6a+a^2+a-3>0\Rightarrow a^2-5a+6>0$

$\Rightarrow (a-2)(a-3)>0\Rightarrow$ या $a<2$ or $a>3$

अतः $a<2$ सभी को संतुष्ट करेगा।

24. (a) यदि $x^2-6x+10=(x-3)^2+1$

वास्तविक x के लिए, $(x-3)^2+1$ का न्यूनतम मान 1 है।

25. (c) $\alpha+\beta=\lambda-3$ तथा $\alpha\beta=-\lambda$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(\lambda-3)^2+2\lambda$

$=\lambda^2-4\lambda+9$

विकल्पों से

$\lambda=0$ के लिए $(\alpha^2+\beta^2)_{\lambda=0}=9$

$\lambda=1$ के लिए $(\alpha^2+\beta^2)_{\lambda=1}=1-4+9=6$

$\lambda=2$ के लिए $(\alpha^2+\beta^2)_{\lambda=2}=4-8+9=5$

$\lambda=3$ के लिए $(\alpha^2+\beta^2)_{\lambda=3}=9-12+9=6$

$\alpha^2+\beta^2$, $\lambda=2$ पर न्यूनतम है।

26. (c) चूँकि $f(x)$ एक वास्तविक मूल रखने वाला वर्ग व्यंजक है। इसलिए $f(x)$ सभी x के लिए समान चिन्ह नहीं रखता है।

$f(x)\geq 1\Rightarrow x^2+4x+1\geq 1\Rightarrow x^2+4x\geq 0$

$\Rightarrow x\leq -4$ या $x\geq 0$.

27. (a,d) यह चित्र से स्पष्ट है कि x_1 तथा x_2 के बीच फलन $y=ax^2+bx+c$ उच्चिष्ठ रखता है।

$\therefore \dfrac{d^2y}{dx^2}<0\Rightarrow a<0$

स्पष्टतः, $x_1,x_2>0\Rightarrow x_1+x_2>0$

$\Rightarrow$ मूलों का योगफल >0

$\Rightarrow \dfrac{-b}{a}>0\Rightarrow\dfrac{b}{a}<0\Rightarrow$ a तथा b विपरीत चिन्ह के हैं।

28. (a) माना $f'(x)\equiv 3ax^2+2bx+c$ वर्ग समीकरण जिसका प्रतिअवकलज $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ द्वारा दिया जाता है।

चूँकि $f(x)$ बहुपद फलन है, अतः यह R में सतत् व अवकलनीय है। अतः रोले प्रमेय द्वारा

अतः $f(0)=0$ व $f(1)=a+b+c=0$ (संकल्पना द्वारा) अतः कम से कम x का एक मान इस प्रकार है कि $x=\alpha\in(0,1)$

$f'(\alpha)=0 \Leftrightarrow 3a\alpha^2+2b\alpha+c=0$

अर्थात् $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ का एक मूल [0, 1] में है।

29. (d) यहाँ $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

चूँकि α,β समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल हैं, एवं

$\alpha<k<\beta$, अतः $a(k-\alpha)(k-\beta)<0$

एवं $a^2k^2+abk+ac=a(ak^2+bk+c)$

$=a^2(k-\alpha)(k-\beta)<0 \Rightarrow a^2k^2+abk+ac<0$

30. (d) माना $f(x)=4x^2-20px+(25p^2+15p-66)=0$ .....(i)

(i) के मूल वास्तविक होंगे यदि

$b^2-4ac=400p^2-16(25p^2+15p-66)$

$=16(66-15p)\geq 0$

$\Rightarrow p\leq 22/5$ .....(ii)

(i) के दोनों मूल 2 से कम हैं। अतः $f(2)>0$ व मूलों का योग < 4 ।

$\Rightarrow 4.2^2-20p.2+(25p^2+15p-66)>0$ एवं $\frac{20p}{4}<4$

$\Rightarrow p^2-p-2>0$ एवं $p<4/5$

$\Rightarrow (p+1)(p-2)>0$ एवं $p<4/5$

$\Rightarrow p<-1$ या $p>2$ एवं $p<4/5 \Rightarrow p<-1$ .....(iii)

(ii) व (iii) से $p<-1$ अर्थात् $p\in(-\infty,-1)$.

31. (b) यहाँ $D=b^2-4c>0$ क्योंकि $c<0<b$. अतः मूल वास्तविक तथा असमान हैं।

अब $\alpha+\beta=-b<0$ तथा $\alpha\beta=c<0$

$\therefore$ एक मूल धनात्मक तथा दूसरा ऋणात्मक है। ऋणात्मक मूल संख्यात्मक दृष्टि से बड़ा है। $\alpha<\beta,\alpha$ ऋणात्मक मूल है जबकि β धनात्मक मूल है। अतः $|\alpha|>\beta$ तथा $\alpha<0<\beta$ ।

32. (d) समीकरण $x^2-(a+b)x+ab-1=0$ है।

$\therefore$ विविक्तकर $=(a+b)^2-4(ab-1)=(b-a)^2+4>0$

$\therefore$ दोनों मूल वास्तविक हैं। माना मूल α,β है, जहाँ

$\alpha=\frac{(a+b)-\sqrt{(b-a)^2+4}}{2}$ तथा $\beta=\frac{(a+b)+\sqrt{(b-a)^2+4}}{2}$

स्पष्टतः, $\alpha<\frac{(a+b)-\sqrt{(b-a)^2}}{2}=\frac{(a+b)-(b-a)}{2}=a$

$(\because b>a)$

तथा $\beta>\frac{(a+b)+\sqrt{(b-a)^2}}{2}=\frac{a+b+b-a}{2}=b$

इस प्रकार, एक मूल α, a से छोटा है तथा दूसरा मूल β, b से बड़ा है।

33. (b) माना $f(x)=x^5-6x^2-4x+5=0$

तब $f(x)$ में चिन्ह परिवर्तन की संख्या 2 है। अतः $f(x)$ अधिक से अधिक दो धनात्मक मूल रखता है।

अब, $f(-x)=-x^5-6x^4+4x+5=0$

तब चिन्ह परिवर्तन की संख्या 1 है।

अतः $f(x)$ अधिकतम एक ऋणात्मक मूल रखता है। अतः सम्भावित मूलों की संख्या = 3

34. (a) $f(x)=ax^2+bx+c$

माना $F(x)=\int f(x)dx=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx$

स्पष्टतः $F(0)=0$ तथा $F(1)=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c$

$=\frac{2a+3b+6c}{6}=0$

$\Rightarrow F(0)=F(1)=0$

कम से कम एक बिन्दु c, 0 और 1 के बीच इस प्रकार से विद्यमान है $F'(x)=0$ या $ax^2+bx+c=0$ किसी $x\in(0,1)$ के लिए।

35. (d) माना $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_1x$;

$f(0)=0;\ f(\alpha)=0$

$\Rightarrow f'(x)=0$ का कम से कम एक मूल $(0,\alpha)$ के बीच होगा।

अर्थात् समीकरण $na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+....+a_1=0$ का धनात्मक मूल α से छोटा है।

36. (d) माना $P(x)=bx^2+ax+c$

$\therefore\quad P(0)=0\Rightarrow c=0$

$\therefore\quad P(1)=1\Rightarrow a+b=1$

$P(x)=ax+(1-a)x^2$

अब $P'(x)=a+2(1-a)x$

$\because\ P'(x)>0$ के लिए $x\in(0,1)$

सिर्फ विकल्प (d) उपरोक्त शर्त को पूरा करता है।

37. (b) यहाँ $\alpha+\beta=-\frac{2b}{a}$

$\gamma+\alpha=-\frac{c}{2b}$, $\alpha+\delta=-\frac{a}{c}$

और $\alpha\beta=\frac{c}{a},\alpha\gamma=\frac{a}{2b},\alpha\delta=\frac{2b}{c}$

$\Rightarrow \alpha+\delta=-\frac{1}{\alpha\beta},\alpha^2\beta+\alpha\beta\delta=-1$ .....(i)

$\Rightarrow \alpha+\beta=-\frac{1}{\alpha\gamma},\alpha^2\gamma+\alpha\beta\gamma=-1$ .....(ii)

$\Rightarrow \alpha+\gamma=-\frac{1}{\alpha\delta},\alpha^2\delta+\alpha\beta\gamma=-1$ .....(iii)

समीकरणों (i), (ii) तथा (iii) को हल करने पर $\alpha=-1$

$\alpha+\alpha^2=(-1)+(-1)^2=-1+1=0$.

वर्ग असमीकरण के हल और विविध समीकरण

1. (c) समीकरण $|3x^2+12x+6|=5x+16$ है .....(i)

जब $3x^2+12x+6\geq 0 \Leftrightarrow x^2+4x\geq -2$

$\Leftrightarrow |x+2|^2\geq 4-2 \Leftrightarrow |x+2|\geq(\sqrt{2})^2$

$\Leftrightarrow x+2\leq-\sqrt{2}$ या $x+2\geq\sqrt{2}$ ....(ii)

तब (i) होगा $3x^2+12x+6=5x+16$ होगा

$\Leftrightarrow 3x^2+7x-10=0 \Rightarrow x=1,-\frac{10}{3}$

लेकिन $x=-\frac{10}{3}$ (ii) को संतुष्ट नहीं करता

जब $3x^2+12x+6<0 \Rightarrow x^2+4x<-2$

$\Rightarrow |x+2| \le \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2}-2 \le x \le -2+\sqrt{2}$ .....(iii)

तब (i) होगा $\Rightarrow 3x^2+12x+6=-(5x+16)$

$\Rightarrow 3x^2+17x+22=0 \Rightarrow x=-2,-\frac{11}{3}$

पर $x=-\frac{11}{3}$ (iii) को संतुष्ट नहीं करता। अतः 1 और – 2 दो हल हैं।

2. (b) दिया है, $x+2>\sqrt{x+4} \Rightarrow (x+2)^2>(x+4)$

$\Rightarrow x^2+4x+4>x+4 \Rightarrow x^2+3x>0$

$\Rightarrow x(x+3)>0 \Rightarrow x<-3$ या $x>0 \Rightarrow x>0$.

3. (d) $x^2-4x<12$

$\Rightarrow x^2-4x-12<0 \Rightarrow x^2-6x+2x-12<0$

$\Rightarrow (x-6)(x+2)<0 \Rightarrow -2<x<6$.

4. (b) दिया है, $\log(-2x)=2\log(x+1)$

$\Rightarrow -2x=(x+1)^2 \Rightarrow x^2+4x+1=0$

$\Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4}}{2} \Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{12}}{2}$

$\Rightarrow x=-2\pm\sqrt{3} \Rightarrow x=(-2+\sqrt{3}),(-2-\sqrt{3})$.

5. (b) **स्थिति I:** जब $x+2\ge 0$ अर्थात् $x\ge -2$,

तब यह सर्वसमिका होगी

$x^2-(x+2)+x>0 \Rightarrow x^2-2>0 \Rightarrow |x|>\sqrt{2}$

$\Rightarrow x<-\sqrt{2}$ या $x>\sqrt{2}$

$\because x\ge -2$, अतः इस स्थिति में हल समुच्चय का भाग $[-2,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\infty)$ होगा।

स्थिति II: जब $x+2\le 0$ अर्थात् $x\le -2$,

तब दी हुयी सर्वसमिका $x^2+(x+2)+x>0$ होगी

$\Rightarrow x^2+2x+2>0 \Rightarrow (x+1)^2+1>0$, जोकि सभी वास्तविक x के लिए सत्य है।

अतः इस स्थिति में हल समुच्चय का भाग $(-\infty,-2]$ होगा।

दोनों परिणामों को मिलाने पर हल

$(-\infty,-2)\cup([-2,-\sqrt{2}]\cup(\sqrt{2},\infty)=(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\infty)$ है।

6. (a) दी गयी शर्त के अनुसार,

$4a^2-4(10-3a)<0 \Rightarrow a^2+3a-10<0$

$\Rightarrow (a+5)(a-2)<0 \Rightarrow -5<a<2$.

7. (a) माना $f(x)=x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$

$\Rightarrow (x-1)(x^3-3x^2+3x-1)=0$

$\Rightarrow (x-1)(x-1)^3=0 \Rightarrow x=1,1,1,1$

8. (a) माना मूल $\frac{\alpha}{\beta},\alpha,\alpha\beta,\beta\ne 0$ हैं तब मूलों का गुणनफल

$=\alpha^3=-\frac{-1}{8}=\frac{1}{8} \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}$ और $\beta=\frac{1}{2}$ अतः मूल $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}$ हैं।

ट्रिक: निरीक्षण द्वारा, हम पाते हैं कि संख्यायें $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}$ दिये हुए समीकरण को संतुष्ट करती हैं।

9. (d) दिया गया समीकरण $4x^3+16x^2-9x-36=0$ है।

$x=-4$ रखने पर $\Rightarrow -4\times 64+256+36-36=0$

अतः $x=-4$ समीकरण का मूल है।

अब परिवर्तित समीकरण $4x^2(x+4)-9(x+4)=0$ है।

$\Rightarrow (x+4)(4x^2-9)=0 \Rightarrow x=-4, x=\pm\frac{3}{2}$

अतः मूल $-4,-\frac{3}{2},\frac{3}{2}$ हैं।

10. (c) $x=5$ रखने पर

$2(5)^5-14(5)^4+31(5)^3-64(5)^2+19(5)+130=0$

अतः $x=5$ दिये गये समीकरण को संतुष्ट करता है।

अतः 5 समीकरण का मूल है।

11. (b) दिया गया समीकरण $x^3-3x+2=0$ है।

$\Rightarrow x^2(x-1)+x(x-1)-2(x-1)=0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2+x-2)=0 \Rightarrow (x-1)(x-1)(x+2)=0$

अतः मूल $1,1,-2$ हैं।

12. (c) चूँकि $f(x)=x^3-3b^2x+2c^3$, $x-a$ और $x-b$ से विभाज्य है, अतः

$f(a)=0 \Rightarrow a^3-3b^2a+2c^3=0$ .....(i)

और $f(b)=0 \Rightarrow b^3-3b^3+2c^3=0$ .....(ii)

(ii) से, $b=c$

(i) से, $a^3-3ab^2+2b^3=0$ ($b=c$ रखने पर)

$\Rightarrow (a-b)(a^2+ab-2b^2)=0$

$\Rightarrow a=b$ या $a^2+ab=2b^2$

अतः $a=b=c$ या $a^2+ab=2b^2$ और $b=c$

$a^2+ab=2b^2$ किन्तु $a=-2b$ के द्वारा संतुष्ट होता है।

किन्तु $b=c$

$\therefore a^2+ab-2b^2$ और $b=c$, $a=-2b=-2c$ के तुल्य है।

13. (d) माना $y=x^2$ तब $x=\sqrt{y}$

$\therefore x^3+8=0 \Rightarrow y^{3/2}+8=0$

$\Rightarrow y^3=64 \Rightarrow y^3-64=0$

अतः समीकरण जिसके मूल α^2,β^2 और γ^2 हैं, $x^3-64=0$ है।

14. (c) यदि α,β,γ समीकरण के मूल हैं, तब

$x^3-px^2+qx-r=0$

$\therefore (\alpha+\beta)^{-1}+(\beta+\gamma)^{-1}+(\gamma+\alpha)^{-1}=\frac{p^2+q}{pq-r}$

दिया है, $p=0,\ q=4,\ r=-1$

$\Rightarrow \frac{p^2+q}{pq-r}=\frac{0+4}{0+1}=4$.

15. (b) दिया है, $\alpha+\beta=0$

$\alpha+\beta+\gamma=-p \Rightarrow \gamma=-p$

$\gamma=-p$ दिये गये समीकरण में रखने पर

$\Rightarrow -p^3+p^3-pq+r=0 \Rightarrow pq=r$.

16. (d) हम जानते हैं कि समीकरण

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ के मूल $\alpha\beta\gamma=\frac{-d}{a}$ को संतुष्ट करते हैं उपरोक्त समीकरण की दिये गये समीकरण से तुलना करने पर $d=1, a=1$

इसलिए, $\alpha\beta\gamma=-1$ या $\alpha^3\beta^3\gamma^3=-1$.

17. (a) दिया गया समीकरण $x^4-2x^3+x-380=0$ है।
शेषफल प्रमेय का प्रयोग करने पर,

$(x-5)(x+4)(x^2-x+19)=0$

$x-5=0$, $x-4=0$ और $x^2-x+19=0$

$x=5$, $x=-4$ और $x=\frac{-1\pm5\sqrt{-3}}{2}$.

18. (b) दिया गया समीकरण $x^3-3x^2+x+5=0$ है।
तब $\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, $\alpha\beta\gamma=-5$

$y=\Sigma\alpha^2+\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha\beta\gamma$

$=9-2-5=2$

$\therefore\ y=2$

यह समीकरण $y^3-y^2-y-2=0$ को संतुष्ट करता है।

19. (a) दिया गया समीकरण $2x^3-3x^2+6x+1=0$ है।

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}$, $\alpha\beta\gamma=\frac{-1}{2}$, $\Sigma\alpha\beta=3$

$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\Sigma\alpha\beta)$

$=\left(\frac{3}{2}\right)^2-2.3=\frac{9}{4}-6=\frac{-15}{4}$.

20. (d) दिया गया समीकरण $(pq)x^2-(p+q)^2x+(p+q)^2=0$ है।

माना हल समुच्चय $\left\{\frac{p+q}{p},\frac{p+q}{q}\right\}$ है।

मूलों का योग $=\frac{(p+q)^2}{pq}\Rightarrow\frac{p+q}{p}+\frac{p+q}{q}=\frac{(p+q)^2}{pq}$

इसी प्रकार, मूलों का गुणनफल $=\frac{(p+q)^2}{pq}$

$\Rightarrow\frac{p+q}{p}\times\frac{p+q}{q}=\frac{(p+q)^2}{pq}$.

Critical Thinking Questions

1. (a) $x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+.....}}}\ \infty$

$\Rightarrow x=\sqrt{1+x}$

$\Rightarrow x^2=1+x\ \Rightarrow x^2-x-1=0$

$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\because\ x>0$, $\therefore\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

2. (c) जब $x<0$, $|x|=-x$

$\therefore$ समीकरण $x^2-x-6=0$ है $\Rightarrow x=-2,3$

$\because x<0, \therefore x=-2$ हल है

जब $x\ge0$,$|x|=x$

$\therefore$ समीकरण $x^2+x-6=0$ है $\Rightarrow x=2,-3$

$\because\ x\ge0$, $\therefore\ x=2$ हल है

अतः $x=2$, -2 हल हैं व इनका योग शून्य है।

वैकल्पिक :$|x^2|+|x|-6=0$

$\Rightarrow(|x|+3)(|x|-2)=0$

$\Rightarrow|x|=-3$, जोकि असंभव है और $|x|=2$

$\Rightarrow x=\pm2$.

3. (c) $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

चूंकि $\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}$

$=\frac{2c(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4ac}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

इसी प्रकार $\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}\times\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}$

$=\frac{2c(-b+\sqrt{b^2-4ac})}{4ac}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

वैकल्पिक : दिये गये समीकरण $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ का परिमेयीकरण करने पर हम पाते हैं कि (c) सही है।

4. (c) दिया हुआ समीकरण $2x^2+3x+5\lambda=0$
तथा $x^2+2x+3\lambda=0$ का एक उभयनिष्ठ मूल है। यदि

$\frac{x^2}{-\lambda}=\frac{x}{-\lambda}=\frac{1}{1}\Rightarrow x^2=-\lambda, x=-\lambda$ या $\lambda=-1, 0$.

5. (a) चूंकि मूल समान है अतः $\lambda^2=4\mu$.
दूसरे समीकरण $x^2+\lambda x-12=0$ का मूल 2 है।
अतः $x=2$ रखने पर $\Rightarrow 4+2\lambda-12=0\Rightarrow\lambda=4$

अतः $\lambda^2=4\mu$ से हम पाते हैं $\mu=\frac{16}{4}=4$

$\Rightarrow(\lambda,\mu)=(4,4)$.

6. (a) $k=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

$\Rightarrow x^2(k-1)+x(k+1)+k-1=0$

चूँकि x वास्तविक है

$\Rightarrow(k+1)^2-4(k-1)^2\ge0$

$\Rightarrow 3k^2-10k+3\ge0$

यह तभी संभव है जब k का मान समीकरण $3k^2-10k+3=0$ के मूलों के बीच हो। अर्थात् जब $\frac{1}{3}\le k\le3$ {चूंकि मूल $\frac{1}{3}$ तथा 3 है}

7. (a) दिये गये समीकरण को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

$3x^2-(a+c+2b+2d)x+(ac+2bd)=0$

इसका विविक्तकर D

$=(a+c+2b+2d)^2-4.3(ac+2bd)$

$=\{(a+2d)+(c+2b)\}^2-12(ac+2bd)$

$= \{(a+2d)-(c+2b)\}^2 + 4(a+2d)(c+2b) - 12(ac+2bd)$

$= \{(a+2d)-(c+2b)\}^2 - 8ac + 8ab + 8dc - 8bd$

$= \{(a+2d)-(c+2b)\}^2 + 8(c-b)(d-a)$

जो कि धनात्मक है, $\because a < b < c < d$ । अतः मूल वास्तविक व अलग-अलग हैं।

8. (a) दिये गये समीकरण

$qx^2 + px + q = 0$ .....(i)

और $x^2 - 4qx + p^2 = 0$ .....(ii) हैं।

$\because$ (i) के मूल सम्मिश्र हैं अतः $p^2 - 4q^2 < 0$

अतः (ii) का विविक्तकर है:

$16q^2 - 4p^2 = -4(p^2 - 4q^2) > 0$

अतः मूल वास्तविक और अलग-अलग है।

9. (d) हम जानते हैं कि व्यंजक $ax^2 + bx + c > 0$, सभी x के लिए, यदि $a > 0$ और $b^2 < 4ac$

$\therefore (a^2-1)x^2 + 2(a-1)x + 2$ धनात्मक है सभी x के लिए यदि $a^2 - 1 > 0$ और $4(a-1)^2 - 8(a^2-1) < 0$

$\Rightarrow a^2 - 1 > 0$ और $-4(a-1)(a+3) < 0$

$\Rightarrow a^2 - 1 > 0$ और $(a-1)(a+3) > 0$

$\Rightarrow a^2 > 1$ और $a < -3$ या $a > 1 \Rightarrow a < -3$ या $a > 1$.

10. (a) दिये गये समीकरण को लिखा जा सकता है,

$(m+1)x^2 - \{m(a+b) - (a-b)\}x + c(m-1) = 0$.

मूल बराबर और विपरीत चिन्ह के हैं। अतः मूलों का योग शून्य होगा।

$\Rightarrow 0 = m(a+b) - (a-b) \Rightarrow m = \frac{a-b}{a+b}$.

11. (b) माना समीकरण (सही रूप में) $x^2 + 17x + q = 0$ है। इसके मूल –2, –15 हैं। अतः 30 = q,

सही समीकरण $x^2 + 13x + 30 = 0$ है। अतः मूल – 3, – 10 हैं।

12. (b) माना मूल α और $n\alpha$ हैं।

मूलों का योग $\alpha + n\alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{a(n+1)}$ .....(i)

और गुणनफल $\alpha . n\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{c}{na}$ ....(ii)

(i) और (ii) से,

$\Rightarrow \left[-\frac{b}{a(n+1)}\right]^2 = \frac{c}{na} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2(n+1)^2} = \frac{c}{na}$

$\Rightarrow nb^2 = ac(n+1)^2$.

नोट: विद्यार्थियों को यह प्रश्न तथ्य की तरह याद रखना चाहिए।

13. (b) माना α, α^n दो मूल हैं

तब $\alpha + \alpha^n = -b/a, \alpha\alpha^n = c/a$

α को विलोपित करने पर, $\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} + \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}} = -\frac{b}{a}$

$\Rightarrow a.a^{-\frac{1}{n+1}}.c^{\frac{1}{n+1}} + a.a^{-\frac{n}{n+1}}.c^{\frac{n}{n+1}} = -b$

या $(a^n c)^{\frac{1}{n+1}} + (ac^n)^{\frac{1}{n+1}} = -b$.

14. (a) दिया गया है $\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{b}{a}$, $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{c}{a}$

α को विलोपित करने पर,

$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} \Rightarrow a^2 - b^2 + 2ac = 0$

15. (a) $x^2 - 2kx + k^2 + k - 5 = 0$

मूल 5 से कम हैं, $D \ge 0$

$4k^2 - 4(k^2 + k - 5) \ge 0$ ......(i)

$\Rightarrow k \le 5 \Rightarrow f(5) > 0$ .....(ii)

$\Rightarrow k \in (-\infty, 4) \cup (5, \infty)$; $-\left(\frac{2k}{2}\right) < 5 \Rightarrow k < 5$ .....(iii)

(i), (ii), (iii) से $k \in (-\infty, 4)$

16. (d) माना समीकरण $x^2 - bx + c = 0$ के मूल α, β और $x^2 - cx + b = 0$ के मूल α', β' हैं।

$\therefore \alpha - \beta = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{b^2 - 4c}$ .....(i)

और $\alpha' - \beta' = \sqrt{(\alpha' + \beta')^2 - 4\alpha'\beta'} = \sqrt{c^2 - 4b}$ .....(ii)

पर $\alpha - \beta = \alpha' - \beta'$

$\Rightarrow \sqrt{b^2 - 4c} = \sqrt{c^2 - 4b} \Rightarrow b^2 - 4c = c^2 - 4b$

$\Rightarrow b^2 - c^2 = 4c - 4b$

$\Rightarrow (b+c)(b-c) = 4(c-b) \Rightarrow b + c = -4$

17. (b) दिये गये समीकरण को लिखा जा सकता है

$x^2 - 3kx + 2k^2 - 1 = 0$

अतः मूलों का गुणनफल $2k^2 - 1$ है, किन्तु मूलों का गुणनफल 7 है। अतः $2k^2 - 1 = 7 \Rightarrow 2k^2 = 8 \Rightarrow k = \pm 2$

लेकिन k ऋणात्मक नहीं हो सकता है।

18. (c) माना $\alpha = 1$ और दूसरा मूल β है, तब मूलों का गुणनफल । है। $\beta = \frac{c(a-b)}{a(b-c)} \Rightarrow \beta = \frac{c(a-b)}{a(b-c)}$

19. (b) दिया गया है $5\cos A + 3 = 0$ या $\cos A = -\frac{3}{5}$

माना $\alpha = \sin A$ तथा $\beta = \tan A$, तब मूलों का योग $= \alpha + \beta = \sin A + \tan A$

$= \sin A + \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\cos A}(1 + \cos A)$

$= \frac{\sqrt{1 - 9/25}}{-3/5}\left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{-5}.\frac{5}{3}.\frac{2}{5} = \frac{8}{-15}$

और मूलों का गुणनफल $\alpha.\beta = \sin A \tan A = \frac{\sin^2 A}{\cos A}$

$= \frac{16/25}{-3/5} = -\frac{16}{25} \times \frac{5}{3} = -\frac{16}{15}$

अतः अभीष्ट समीकरण $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ है

$\Rightarrow x^2 + \frac{8x}{15} - \frac{16}{15} = 0$

$\Rightarrow 15x^2 + 8x - 16 = 0$

20. (b) यदि समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का एक मूल दूसरे का वर्ग है तो $b^3+ac^2+a^2c=3abc$
जिसे निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है
$a(c-b)^3=c(a-b)^3$
ट्रिक: माना मूल 2 और 4 हैं, तब समीकरण $x^2-6x+8=0$ होगा

$$X=\frac{a(c-b)^3}{c}=\frac{1(14)^3}{8}=\frac{14}{2}\times\frac{14}{2}\times\frac{14}{2}=7^3$$

जो कि $(a-b)^3=7^3$ द्वारा दिया गया है।

21. (d) समीकरण $x^2+ax+\beta=0$ के मूल 8 व 2 हैं।
$\therefore 8+2=10=-a, 8.2=16=\beta$
अर्थात् $a=-10, \beta=16$
$x^2+\alpha x+b=0$ के मूल 3, 3 हैं।
$\therefore\ 3+3=6=-\alpha,\ 3.3=b$ अर्थात् $\alpha=-6, b=9$
अब, $x^2+ax+b=0\Rightarrow x^2-10x+9=0$
या $(x-1)(x-9)=0\Rightarrow x=1,9$.

22. (b) **ट्रिक :** निरीक्षण द्वारा, हम देख सकते हैं कि x के वह सभी मान जो $(-\infty,1)\cup(2,3)$ के बीच में हैं, समीकरण को संतुष्ट करते हैं व इस अन्तराल के बाहर के मान संतुष्ट नहीं करते हैं।

23. (c) $x^2-ax+b=0$ को x^{n-1} से गुणा करने पर
$x^{n+1}-ax^n+bx^{n-1}=0$ .....(i)
$x^2-ax+b=0$ के मूल α,β हैं। अतः ये (i) को संतुष्ट करेंगे।
और $\alpha^{n+1}-a\alpha^n+b\alpha^{n-1}=0$ .....(ii)
$\beta^{n+1}-a\beta^n+b\beta^{n-1}=0$ .....(iii)
(ii) व (iii) को जोड़ने पर
$(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-a(\alpha^n+\beta^n)+b(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})=0$
या $V_{n+1}-aV_n+bV_{n-1}=0$
या $V_{n+1}=aV_n-bV_{n-1}=0$ (दिया है $\alpha^n+\beta^n=V_n$)
ट्रिक : $n=0$, 1, 2 रखने पर
$V_0=\alpha^0+\beta^0=2$, $V_1=\alpha+\beta=a$,
$\alpha^2+\beta^2=V_2=a^2-2b$
विकल्प (c) $\Rightarrow V_2=aV_1-bV_0=a^2-2b$

24. (c) $\alpha+\beta=-\frac{7}{2}$ और $\alpha\beta=\frac{c}{2}$

$\therefore |\alpha^2-\beta^2|=\frac{7}{4}\Rightarrow\alpha^2-\beta^2=\pm\frac{7}{4}$

$\Rightarrow(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\pm\frac{7}{4}\Rightarrow -\frac{7}{2}\sqrt{\frac{49}{4}-2c}=\pm\frac{7}{4}$

$\Rightarrow\sqrt{49-8c}=\mp1\Rightarrow 49-8c=1\Rightarrow c=6$

25. (c) दिया गया समीकरण $x^2+(2+\lambda)x-\frac{1}{2}(1+\lambda)=0$ है

अतः $\alpha+\beta=-(2+\lambda)=0$ और $\alpha\beta=-\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)$

अब $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$\Rightarrow\alpha^2+\beta^2=[-(2+\lambda)]^2+2.\frac{(1+\lambda)}{2}$

$\Rightarrow\alpha^2+\beta^2=\lambda^2+4+4\lambda+1+\lambda=\lambda^2+5\lambda+5$
जो कि $\lambda=1/2$ के लिए न्यूनतम है।

26. (a) दिया गया समीकरण $x^2-|x|-6=0$ है।
यदि $x>0$, $\therefore$ समीकरण $x^2-x-6=0$ है
$\Rightarrow(x-3)(x+2)=0\Rightarrow x=3, x=-2\Rightarrow x=3$
यदि $x<0$, $\therefore$ समीकरण $x^2+x-6=0$ हैं।
$\Rightarrow(x+3)(x-2)=0\Rightarrow x=-3, x=2\Rightarrow x=-3$
अतः सभी सम्भावित वास्तविक मूलों का गुणनफल $=-9$.

27. (c) $\alpha+\alpha^2=-\frac{p}{3}$ और $\alpha.\alpha^2=1$.
अतः $\alpha=1,\omega,\omega^2$. यदि $\alpha=1, p<0$.
यदि $\alpha=\omega$ या ω^2, $\omega+\omega^2=-\frac{p}{3}$

$\Rightarrow -1=\frac{-p}{3}\Rightarrow p=3$.

28. (c) $\alpha+\beta=-p, \alpha\beta=q$
$\alpha+\beta+2h=-r,\ (\alpha+h)(\beta+h)=s$
$-p+2h=-r\Rightarrow h=\frac{p-r}{2}$ .....(i)
अब $\alpha\beta+h(\alpha+\beta)+h^2=s$
$\Rightarrow q+h(-p)+h^2=s$
$\Rightarrow q+\left(\frac{p-r}{2}\right)(-p)+\left(\frac{p-r}{2}\right)^2=s$
$\Rightarrow q-\frac{(p^2-pr)}{2}+\frac{p^2+r^2-2pr}{4}=s$
$\Rightarrow 4q-2p^2+2pr+p^2+r^2-2pr=4s$
$\Rightarrow 4q-p^2+r^2-4s=0\Rightarrow r^2-4s=p^2-4q$.

29. (d) $a+b=3$, $ab=1$ तथा $-p=a-2+b-2$, $q=(a-2)(b-2)$
$\Rightarrow -p=a+b-4$, $q=ab-2(a+b)+4$
$\Rightarrow -p=3-4$ तथा $q=1-2(3)+4\Rightarrow(p,q)=(1,-1)$.

30. (a) माना कि मूल α और 2α हैं।
$\Rightarrow\alpha+2\alpha=\frac{1-3a}{a^2-5a+3}$ और $\alpha.2\alpha=\frac{2}{a^2-5a+3}$

$\Rightarrow 2\left[\frac{1}{9}\frac{(1-3a)^2}{(a^2-5a+3)^2}\right]=\frac{2}{a^2-5a+3}$

$\Rightarrow\frac{(1-3a)^2}{(a^2-5a+3)}=9\Rightarrow 9a^2-6a+1=9a^2-45a+27$

$\Rightarrow 39a=26\Rightarrow a=\frac{2}{3}$.

31. (a) दिया गया है $b^2=ac\Rightarrow$ समीकरण $ax^2+2bx+c=0$ को $ax^2+2\sqrt{ac}x+c=0$ लिखा जा सकता है।
$\Rightarrow(\sqrt{a}x+\sqrt{c})^2=0\Rightarrow x=-\sqrt{\frac{c}{a}}$ (पुनरावृत्त मूल)
संकल्पना द्वारा यह अवश्य उभयनिष्ठ मूल होगा। अतः यह समीकरण $dx^2+2ex+f=0$ को संतुष्ट करेगा।

$\Rightarrow d\frac{c}{a}-2e\sqrt{\frac{c}{a}}+f=0\Rightarrow\frac{d}{a}+\frac{f}{c}=\frac{2e}{c}\sqrt{\frac{c}{a}}=\frac{2e}{b}$

$\Rightarrow\frac{d}{a},\frac{e}{b},\frac{f}{c}$ समान्तर श्रेणी में है।

32. (d) दिये गये समीकरण $x^2-3x+a=0$ ......(i)

और $x^2+ax-3=0$ ......(ii) हैं

(ii) में से (i) को घटाने पर,

$\Rightarrow -3x-ax+a+3=0$

$\Rightarrow (a+3)(-x+1)=0$

$\Rightarrow a=-3$ या $x=1$

जब $a=-3$, दोनों समीकरण समान होंगे।

समीकरण (i) लेने पर, अतः $x=1$, जोकि दोनों समीकरण का उभयनिष्ठ मूल है।

$1+a-3=0 \Rightarrow a=2.$

33. (a) यदि $(x+1)$

$x^4-(p-3)x^3-(3p-5)x^2+(2p-7)x+6$ का गुणांक है तब $x=-1$ रखने पर

$1+(p-3)-(3p-5)-(2p-7)+6=0$

$\Rightarrow -4p=-16 \Rightarrow p=4$.

34. (c) समीकरण जिसके मूल $3\pm i\sqrt{6}$ है, $x^2-6x+15=0$ होगी और दिये गये समीकरण को इससे भाग देने पर

$4x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

35. (d) दी गयी शर्तानुसार *a* मूलों के मध्य विद्यमान है। माना $f(x)=2x^2-2(2a+1)x+a(a+1)$

'*a*' को मूलों के मध्य विद्यमान रहने के लिए $D\ge 0$ और $f(a)<0$ होना चाहिए।

$D\ge 0$

$\Rightarrow 4(2a+1)^2-8a(a+1)\ge 0$

$\Rightarrow 8(a^2+a+1/2)\ge 0$ जोकि हमेशा सत्य है।

साथ ही, $f(a)<0 \Rightarrow 2a^2-2a(2a+1)+a(a+1)<0$

$\Rightarrow -a^2-a<0 \Rightarrow a^2+a>0 \Rightarrow a(1+a)>0$

$\Rightarrow a>0$ या $a<-1$.

36. (d) चूँकि α और β दिये गये समीकरण के मूल हैं। अतः $a^2\alpha^2+b\alpha+c=0$ और $a^2\beta^2-b\beta-c=0$.

माना कि $f(x)=a^2x^2+2bx+2c=0$

तब $f(\alpha)=a^2\alpha^2+2b\alpha+2c=0$

$=a^2\alpha^2+2(b\alpha+c)=a^2\alpha^2-2a^2\alpha^2=-a^2\alpha^2=-ve$

और $f(\beta)=a^2\beta^2+2(b\beta+c)=a^2\beta^2+2a^2\beta^2$

$=3a^2\beta^2=+ve$

चूँकि $f(\alpha)$ और $f(\beta)$ विपरीत चिन्ह के हैं अतः समीकरणों के सिद्धांत से, समीकरण $f(x)=0$ के मूल α और β के बीच एक मूल γ विद्यमान होगा अर्थात् $\alpha<\gamma<\beta$.

37. (b) α, β, γ समीकरण

$x^3+ax^2+bx+c=0$ के मूल हैं

$\therefore \alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$ और $\alpha\beta\gamma=-c$

$\alpha^{-1}+\beta^{-1}+\gamma^{-1}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$

$=-b/c$.

38. (c) दिया गया है $\frac{2x}{2x^2+5x+2}>\frac{1}{x+1}$

$\Rightarrow \frac{2x}{(2x+1)(x+2)}>\frac{1}{(x+1)}$

$\Rightarrow \frac{2x}{(2x+1)(x+2)}-\frac{1}{(x+1)}>0$

$\Rightarrow \frac{2x(x+1)-(2x+1)(x+2)}{(x+1)(2x+1)(x+2)}>0$

$\Rightarrow \frac{2x^2+2x-2x^2-4x-x-2}{(x+1)(x+2)(2x+1)}>0$

$\Rightarrow \frac{-3x-2}{(x+1)(x+2)(2x+1)}>0$

प्रत्येक गुणांक को शून्य के बराबर रखने पर

$x=-2,-1,-\frac{2}{3},-\frac{1}{2}$.

स्पष्टतः $-\frac{2}{3}<x<-\frac{1}{2}$ या $-2<x<-1$.

39. (a) $ax^2-2x+4>0$

$\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-16a}}{2a} \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-4a}}{a}$

$\therefore \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}<x<\frac{1+\sqrt{1-4a}}{a}$.

40. (a) माना अभीष्ट मूल $3\alpha, 2\alpha, \beta$ हैं।

($\because$ दो मूलों का अनुपात $3:2$ है)

$\therefore \sum\alpha=3\alpha+2\alpha+\beta=\frac{-(-9)}{1}=9$

$\Rightarrow 5\alpha+\beta=9$ .....(i)

$\sum\alpha\beta=3\alpha.2\alpha+2\alpha.\beta+\beta.3\alpha=14$

$\Rightarrow 5\alpha\beta+6\alpha^2=14$ .....(ii)

तथा $\sum\alpha\beta\gamma=3\alpha.2\alpha.\beta=-24$

$\Rightarrow 6\alpha^2\beta=-24$ या $\alpha^2\beta=-4$ .....(iii)

(i) से $\beta=9-5\alpha$, β का मान (ii) में रखने पर

$\Rightarrow 5\alpha(9-5\alpha)+6\alpha^2=14$

$\Rightarrow 19\alpha^2-45\alpha+14=0$

$\Rightarrow (\alpha-2)(19\alpha-7)=0$

$\therefore \alpha=2$ या $\frac{7}{19}$

$\therefore$ (i) से यदि $\alpha=2$, तब $\beta=9-5\times 2=-1$

$\because \alpha=2, \beta=-1$ समीकरण (iii) को संतुष्ट करते हैं अतः मूल 6, 4, –1 है।

वर्ग समीकरण एवं असमिकायें

SET Self Evaluation Test -5

1. यदि $|x^2 - x - 6| = x + 2$, तो x के मान हैं [Roorkee 1982; RPET 1992]

(a) – 2, 2, – 4 (b) – 2, 2, 4
(c) 3, 2, – 2 (d) 4, 4, 3

2. समीकरण $2x^2 + 3x - 9 \le 0$ का हल होगा [Kurukshetra CEE 1998]

(a) $\frac{3}{2} \le x \le 3$ (b) $-3 \le x \le \frac{3}{2}$
(c) $-3 \le x \le 3$ (d) $\frac{3}{2} \le x \le 2$

3. a का वह मान जिसके लिये वर्ग समीकरण $3x^2 + 2(a^2+1)x + (a^2 - 3a + 2) = 0$ के मूल विपरीत चिन्हों के हों किस अन्तराल में होगा

(a) $(-\infty, 1)$ (b) $(-\infty, 0)$
(c) $(1, 2)$ (d) $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

4. यदि समीकरण $x^2 + px + q = 0$ के मूल α तथा β हों एवं समीकरण $x^2 - xr + s = 0$ के मूल α^4, β^4 हो तो समीकरण $x^2 - 4qx + 2q^2 - r = 0$ के मूल होंगे [IIT 1989]

(a) दोनों ऋणात्मक
(b) दोनों धनात्मक
(c) दोनों वास्तविक
(d) एक ऋणात्मक एवं एक धनात्मक

5. यदि व्यंजक $\left(mx - 1 + \frac{1}{x}\right)$ सदैव अऋणात्मक है तब m का न्यूनतम मान होगा

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) 0
(c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{2}$

6. यदि समीकरण $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$ के मूल समान हों, तो a, b, c होंगे [Roorkee 1993; RPET 2001]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

7. यदि समीकरण $lx^2 + nx + n = 0$ के मूल $p : q$ के अनुपात में हों, तो $\sqrt{\frac{P}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{n}{l}} =$ [RPET 1997; Pb. CET 1992]

(a) 0 (b) $2\sqrt{\frac{n}{l}}$
(c) $\frac{n}{l}$ (d) इनमें से कोई नहीं

8. दो विद्यार्थी समीकरण $x^2 + px + q = 0$ को हल करते हैं। एक विद्यार्थी p का मान गलत लेकर मूल 2 तथा 6 प्राप्त करता है और दूसरा q का मान गलत लेकर मूल 2 तथा – 9 प्राप्त करता है। समीकरण के सही मूल हैं

(a) 2, 3 (b) 3, 4
(c) –2, – 3 (d) – 3, – 4

9. यदि समीकरणों $ax^2 + bx + c = 0$ तथा $px^2 + qx + r = 0$ के मूल क्रमशः α_1, α_2 व β_1, β_2 हों एवं समीकरण निकाय $\alpha_1 y + \alpha_2 z = 0$ व $\beta_1 y + \beta_2 z = 0$ का एक अशून्य हल हो, तो [IIT 1987]

(a) $a^2qc = p^2br$ (b) $b^2pr = q^2ac$
(c) $c^2ar = r^2pb$ (d) इनमें से कोई नहीं

10. यदि α, β समीकरण $x^2 - px + q = 0$ के मूल हैं तो उस समीकरण को ज्ञात कीजिए जिसके मूल $(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^3 - \beta^3)$ व $\alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3$ हैं [Roorkee 1994]

(a) $x^2 - Sx + P = 0$ (b) $x^2 + Sx + P = 0$
(c) $x^2 + Sx - P = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

(जहाँ $S = p[p^4 - 5p^2q + 5q^2]$, और $P = p^2q^2[p^4 - 5p^2q + 4q^2]$

11. किसी वर्ग समीकरण को हल करते समय एक विद्यार्थी ने अचर पद गलत लेकर दो मूल 3 तथा 2 निकाले तथा दूसरे विद्यार्थी ने अचर पद व x^2 का गुणांक सही अर्थात क्रमशः –6 व 1 लिये तो सही मूल हैं [EAMCET 1991]

(a) 3, –2 (b) –3, 2
(c) –6, –1 (d) 6, –1

12. माना α, β समीकरण $ax^2 + 2bx + c = 0$ के मूल हैं तथा γ, δ समीकरण $px^2 + 2qx + r = 0$ के मूल हैं। यदि $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ गुणोत्तर श्रेणी में हों, तो

(a) $q^2ac = b^2pr$ (b) $qac = bpr$
(c) $c^2pq = r^2ab$ (d) $p^2ab = a^2qr$

13. यदि α वर्ग समीकरण $x^2 + 6x - 2 = 0$ का मूल है, तब अन्य मूल β हैं

(a) $\alpha^2 + 5\alpha - 8$
(b) $\frac{\alpha}{3\alpha - 1}$
(c) $\frac{2\alpha^2 + 12\alpha - 6}{\alpha}$
(d) $\beta = -3 - \sqrt{11}$ यदि $\alpha = -3 + \sqrt{11}$ या $\beta = -3 + \sqrt{11}$ यदि $\alpha = -3 - \sqrt{11}$
(e) उपरोक्त सभी

14. समीकरण $x^3 + 3Hx + G = 0$ में यदि G तथा H वास्तविक हों और $G^2 + 4H^3 > 0$, तब मूल होंगे [Karnataka CET 2000; Pb. CET 2001]

(a) सभी वास्तविक व समान

(b) सभी वास्तविक व अलग–अलग

(c) एक वास्तविक व दो काल्पनिक

(d) सभी वास्तविक व दो समान

15. यदि α, β वर्ग समीकरण $x^2 + px + p^3 = 0, (p \neq 0)$ के मूल हों, तथा (α, β) परवलय $y^2 = x$ पर स्थित एक बिन्दु हों, तो समीकरण के मूल होंगे [MP PET 2000]

(a) 4, – 2 (b) – 4, – 2

(c) 4, 2 (d) – 4, 2

16. यदि α, β समीकरण $x^2 - 3x + a = 0$ के मूल हों और γ, δ समीकरण $x^2 - 12x + b = 0$ के मूल हों तथा $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ किसी गुणोत्तर श्रेणी के बढ़ते हुये पद हैं, तो [DCE 2000]

(a) $a = 3, b = 12$ (b) $a = 12, b = 3$

(c) $a = 2, b = 32$ (d) $a = 4, b = 16$

17. a के किस मान के लिये $(a \geq 3)$ समीकरण $x^2 - (a-2)x + (a-3) = 0$ के मूलों के घनों का योग न्यूनतम होगा [Orissa JEE 2002]

(a) 3 (b) 4

(c) 5 (d) इनमें से कोई नहीं

18. यदि $2 + i$ समीकरण $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$ का एक मूल हो तो अन्य मूल होंगे [Kerala (Engg.) 2002]

(a) 1 और $2 - i$ (b) – 1 और $3 + i$

(c) 0 और 1 (d) – 1 और $i - 2$

19. समीकरण $x^2 + px + (1 - p) = 0$ का एक मूल $(1 - p)$ है तो समीकरण के मूल हैं [AIEEE 2004]

(a) – 1, 2 (b) –1, 1

(c) 0, –1 (d) इनमें से कोई नहीं

20. माना $y = \sqrt{\frac{(x+1)(x-3)}{(x-2)}}$ तो y के वास्तविक मानों के लिये x है [IIT 1980]

(a) $-1 \leq x < 2$ या $x \geq 3$ (b) $-1 \leq x < 3$ या $x > 2$

(c) $1 \leq x < 2$ या $x \geq 3$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. समीकरण $(3|x| - 3)^2 = |x| + 7$ के हल जो कि फलन $y = \sqrt{x(x-3)}$ के प्रान्त में हैं, होंगे

(a) $\pm 1/9, \pm 2$ (b) $-1/9, 2$

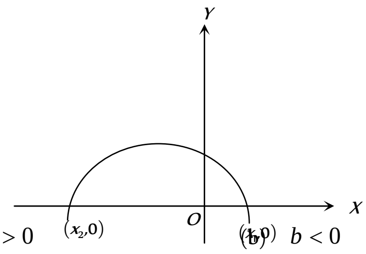
(c) $1/9, -2$ (d) $-1/9, -2$

22. वह प्रतिबंध जिसके लिये $x^3 - 3px + 2q$, $x^2 + 2ax + a^2$ प्रकार के गुणनखण्ड से विभाजित होगा [AMU 2002]

(a) $3p = 2q$ (b) $3p + 2q = 0$

(c) $p^3 = q^2$ (d) $27p^3 = 4q^2$

23. चित्र द्वारा $y = ax^2 + bx + c$ का ग्राफ प्रदर्शित है, तब



(a) $a > 0$ (b) $b < 0$

(c) $c > 0$ (d) $b^2 - 4ac = 0$

24. k के उन मानों की संख्या जिनके लिये समीकरण $x^2 - 3x + k = 0$ के दो वास्तविक और भिन्न मूल अन्तराल (0, 1), में हों, होगी [UPSEAT 2001; Kurukshetra CEET 2002]

(a) 0 (b) 2

(c) 3 (d) अनन्तः अनेक

25. यदि समीकरण $x^3 + px + q = 0$ के मूल α, β और γ हों तो $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ का मान होगा [Pb. CET 2002]

(a) $-3q$ (b) $-p$

(c) $-pq$ (d) $3pq$

Answers and Solutions

(SET - 5)

1. (b) $|x^2-x-6|=x+2$

स्थिति I : $x^2-x-6<0$

$\Rightarrow (x-3)(x+2)<0 \Rightarrow -2<x<3$

इस स्थिति में समीकरण

$x^2-x-6=-x-2$ होगी $\Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$

स्पष्टतः $x=2$ समीकरण के प्रांत को संतुष्ट करती है अतः $x=2$ हल है।

स्थिति II : $x^2-x-6\ge 0$. अतः $x\le -2$ या $x\ge 3$

इस स्थिति में समीकरण

$x^2-x-6=0=x+2$

$\Rightarrow x^2-2x-8=0$ या $x=-2,4$ होगी।

x के दोनों मान x के प्रान्त को संतुष्ट करते हैं अतः $x=-2,4$ मूल हैं।

अतः मूल $x=-2,2,4$ हैं।

2. (b) $2x^2+3x-9\le 0$

$\Rightarrow 2x^2+6x-3x-9\le 0$

$\Rightarrow 2x(x+3)-3(x+3)\le 0$

$\Rightarrow (2x-3)(x+3)\le 0$

$\Rightarrow -3\le x\le 3/2$.

3. (c) जैसा कि हमें ज्ञात है कि यदि वर्ग समीकरण के दो मूल विपरीत चिन्ह के होते हैं तो उनका गुणनफल ऋणात्मक होता है और विविक्तकर

$4(a^2+1)^2-12(a^2-3a+2)>0$

और $\frac{1}{3}(a^2-3a+2)<0$

दोनों शर्तें सन्तुष्ट होंगी यदि $a^2-3a+2<0$

अर्थात् यदि $(a-1)(a-2)<0$ या यदि $1<a<2$.

4. (c) यदि समीकरण $x^2-4qx+2q^2-r=0$ का विविक्तकर D है

तो $D=16q^2-4(2q^2-r)=8q^2+4r$

$=8\alpha^2\beta^2+4(\alpha^4+\beta^4)=4(\alpha^2+\beta^2)^2\ge 0$

अतः समीकरण $x^2-4qx+2q^2-r=0$ के मूल वास्तविक हैं।

5. (c) हमें ज्ञात है कि $ax^2+bx+c\ge 0$ यदि $a>0$ और $b^2-4ac\le 0$.

$\therefore mx-1+\frac{1}{x}=0 \Rightarrow \frac{mx^2-x+1}{x}\ge 0$

$\Rightarrow mx^2-x+1\ge 0$ और $x>0$

$mx^2-x+1\ge 0$ यदि $m>0$ और $1-4m\le 0$

या यदि $m>0$ और $m\ge \frac{1}{4}$

अतः m का न्यूनतम मान $\frac{1}{4}$ है।

6. (c) $\because$ मूल समान हैं अतः $b^2(c-a)^2-4ac(b-c)(a-b)=0$

$\Rightarrow b^2(c^2+a^2-2ac)-4ac(ab-ac-b^2+bc)=0$

$\Rightarrow b^2(c^2+a^2-2ac)+4ab^2c+4a^2c^2-4abc(c+a)=0$

$\Rightarrow [b(c+a)]^2+[2ac]^2-2.2ac.b.(c+a)=0$

$\Rightarrow [b(c+a)-2ac]^2=0 \Rightarrow b(c+a)=2ac$

$\Rightarrow b=\frac{2ac}{a+c} \Rightarrow a,b,c$ ह.श्रे. में हैं।

वैकल्पिक : यहाँ x^2 का गुणांक + x का गुणांक + अचर पद = 0

$\Rightarrow a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$ चूँकि 1 समीकरण का मूल है व इसके दोनों मूल समान हैं अतः दूसरा मूल भी 1 होगा। $\frac{c(a-b)}{a(b-c)} \Rightarrow b=\frac{2ac}{a+c} \Rightarrow a, b, c$ ह.श्रे. में है।

7. (a) माना $lx^2+nx+n=0$ के मूल α तथा β हैं। दिया है कि

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{p}{q} \Rightarrow \alpha=\beta\left(\frac{p}{q}\right)$ .....(i)

$\alpha+\beta=\frac{-n}{l}$ और $\alpha\beta=\frac{n}{l}$

$\sqrt{\left(\frac{p}{q}\right)}+\sqrt{\left(\frac{q}{p}\right)}+\sqrt{\left(\frac{n}{l}\right)}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\alpha\beta}$

$=\frac{(\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)}{\sqrt{\alpha\beta}}=0$.

8. (d) माना कि सही समीकरण $x^2+px+q=0$ .....(i) है।

पहले विद्यार्थी द्वारा निकाले गये मूल 6 और 2 हैं।

उनका योग $=6+2=8=-p$

तथा उनका गुणनफल $=6\times 2=12=q$

अतः (i) समीकरण $x^2-8x+12=0$ होगा .....(ii)

परन्तु विद्यार्थी ने केवल p में गलती की है। अतः q का मान 12 ही रहेगा। दूसरे विद्यार्थी द्वारा प्राप्त मूल 2 व – 9 हैं।

इनका योग $=-9+2=-7=-p$

व गुणनफल $=-9\times 2=-18=q$ अर्थात् $p=7$ व $q=18$

परन्तु इसमें केवल q में गलती की है। अतः p का मान 7 ही रहेगा।

अतः सही समीकरण $x^2+7x+12=0$ होगा।

$\Rightarrow (x+4)(x+3)=0 \Rightarrow x=-4,-3$.

9. (b) दिये गये समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल α_1,α_2 हैं।

$\therefore \alpha_1+\alpha_2=-\frac{b}{a}$ और $\alpha_1\alpha_2=\frac{c}{a}$

$px^2+qx+r=0$ के मूल β_1,β_2 हैं।

$\therefore \beta_1+\beta_2=-\frac{q}{p}$ और $\beta_1\beta_2=\frac{r}{p}$

दिया गया है $\alpha_1 y+\alpha_2 z=0$ और $\beta_1 y+\beta_2 z=0$

$\Rightarrow \frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}$

$\therefore \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2}=\frac{c/a}{r/p}$ या $\frac{\alpha_1}{\beta_1}.\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\frac{cp}{ar}$

$\because \frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}\Rightarrow\frac{\alpha_1}{\alpha_1}=\frac{\beta_1}{\beta_2}$ या $\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}=\frac{\beta_1^2}{\beta_2^2}$

$\Rightarrow\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_2^2}=\frac{\beta_1^2+\beta_2^2}{\beta_2^2}$ (दोनों पक्षों में 1 का योग करने पर)

$\Rightarrow\frac{\alpha_2^2}{\beta_2^2}=\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\beta_1^2+\beta_2^2}=\frac{(\alpha_1+\alpha_2)^2-2\alpha_1\alpha_2}{(\beta_1+\beta_2)^2-2\beta_1\beta_2}$

इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर,

$\frac{cp}{ar}=\frac{b^2/a^2-2(c/a)}{q^2/p^2-2(r/p)}=\frac{(b^2-2ac)p^2}{(q^2-2pr)a^2}$

$\Rightarrow \frac{c}{r}=\frac{pb^2-2acp}{q^2a-2apr}\Rightarrow b^2rp-2acpr=q^2ac-pr2ac$

अतः $b^2pr=q^2ac$.

10. (a) $\alpha+\beta=p,\alpha\beta=q$

यदि मूल A और B हैं, तब

$A=(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)$

$=(p^2-4q)p(p^2-q)=p[p^4-5p^2q+4q^2]$

$B=\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)=q^2p$

$\therefore S=A+B=p[p^4-5p^2q+5q^2]$

$P=p^2q^2(p^4-5p^2q+4q^2)$

अभीष्ट समीकरण $x^2-Sx+P=0$ है।

ट्रिक: $p=3,q=2$ रखकर निरीक्षण करने पर $\alpha=2,\beta=1$ । अभीष्ट समीकरण के मूल 21,12 होंगे। अतः $S=33$ और $P=252$ जो कि विकल्प (a) में दिये गये हैं।

11. (d) माना कि सही समीकरण $ax^2+bx+c=0$ है और सही मूल α और β है। यदि c गलत है तो मूल 3 और 2 हैं।

$\therefore \alpha+\beta=3+2=5$ .....(i)

साथ ही $a=1$ और $c=-6$

$\therefore \alpha\beta=c/a=-6$ .....(ii)

(i) और (ii) को हल करने पर सही मूल 6 और –1 हैं।

12. (a) $\alpha+\beta=-\frac{2b}{a},\alpha\beta=\frac{c}{a},\gamma+\delta=-\frac{2q}{p},\gamma\delta=\frac{r}{p}$

जैसा कि ज्ञात है $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ गु.श्रे. में है, अतः

$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$ .....(i)

किन्तु $\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}=\frac{pc}{ar}\Rightarrow\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^2=\frac{pc}{ar}$ [(i) से] .....(ii)

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}=\frac{\beta}{\delta}$

$\Rightarrow\frac{bp}{aq}=\sqrt{\frac{pc}{ar}}\Rightarrow\frac{b^2p^2}{a^2q^2}=\frac{pc}{ar}\Rightarrow q^2ac=b^2pr$

13. (e) यदि $x^2+6x-2=0$ के मूल α और β हैं तब $\alpha+\beta=-6\Rightarrow\beta=-6-\alpha$

$\Rightarrow\beta=-6-\alpha+\alpha^2+6\alpha-2$

(समीकरण $x^2+6x-2=0$ का मूल α है अतः $\alpha^2+6\alpha-2=0$)

$\Rightarrow\beta=\alpha^2+5\alpha-8$

$\alpha\beta=-2\Rightarrow\beta=\frac{-2}{\alpha}$

$\Rightarrow\beta=\frac{-2+2(\alpha^2+6\alpha-2)}{\alpha}$ $(\because\alpha^2+6\alpha-2=0)$

$\Rightarrow\beta=\frac{2\alpha^2+12\alpha-6}{\alpha}$

$\left.\begin{matrix}\alpha+\beta=-6\\ \alpha\beta=-2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=3\Rightarrow\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=3$

$\Rightarrow\beta=\frac{\alpha}{3\alpha-1}$

x के लिए, वर्ग समीकरण को हल करने पर, $x=-3\pm\sqrt{11}$

$\therefore\beta=-3+\sqrt{11}$, यदि $\alpha=-3-\sqrt{11}$ $\left(\beta=\frac{-2}{\alpha}\right.$ द्वारा$\left.\right)$

या $\beta=-3-\sqrt{11}$, यदि $\alpha=-3+\sqrt{11}$ $\left(\beta=\frac{-2}{\alpha}\right.$ द्वारा$\left.\right)$

14. (c) दिया गया समीकरण $x^3+3Hx+G=0$ है और G व H वास्तविक हैं और $G^2+4H^3>0$.

माना कि α,β दिये गये त्रिघातीय समीकरण के मूल हैं

हमें ज्ञात है कि $\alpha=\left(\frac{-G+\sqrt{G^2+4H^3}}{2}\right)^{1/3}$ और

$\beta=\left(\frac{-G-\sqrt{G^2+4H^3}}{2}\right)^{1/3}$, $\because G^2+4H^3>0$, अतः

त्रिघातीय समीकरण के एक वास्तविक व दो काल्पनिक मूल होंगे।

15. (a) $\alpha+\beta=-p,\ \alpha\beta=p^3$, साथ ही (α,β), $y^2=x$ पर स्थित हैं।

$\therefore\beta^2=\alpha\Rightarrow\beta^3=p^3\Rightarrow\beta=p$

तब $p^2+p=-p\Rightarrow p^2+2p=0$

$\Rightarrow p(p+2)=0\Rightarrow p+2=0(\because p\neq0)$

$\Rightarrow p=-2$, $\therefore\alpha=4,\beta=-2$.

16. (c) माना $r>1$ गु.श्रे. $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ का, सार्व-अनुपात है $\beta=r\alpha,\ \gamma=r^2\alpha$ तब $\delta=r^3\alpha$

$\therefore\ \alpha+\beta=\alpha(1+r)=3$ .....(i)

$\alpha\beta=\alpha(\alpha r)=a$ .....(ii)

$\gamma+\delta=\alpha r^2(1+r)=12$ .....(iii)

और $\gamma\delta=(\alpha r^2)(\alpha r^3)=b\Rightarrow\alpha^2r^5=b$ .....(iv)

(iii) को (i) से भाग देने पर, $r^2=4\Rightarrow r=2$

तब (i) से, $\alpha=1\Rightarrow a=2$, $b=2^5=32$.

17. (a) माना मूल α और β हैं।

$\therefore\ \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(a-2)^3-3(a-3)(a-2)$

$=a^3-9a^2+27a-26=(a-3)^3+1$

यह न्यूनतम मान ग्रहण करेगा यदि $(a-3)^3=0$.

$\therefore a=3$.

18. (a) जैसा कि दिया गया है गुणांक वास्तविक है और एक मूल $2+i$ है अतः दूसरा मूल $2-i$ होगा ($2+i$ का संयुग्मी)। माना तीसरा मूल α है तब मूलों का योगफल $=2+i+2-i+\alpha$

$\Rightarrow -(-5)=4+\alpha \Rightarrow \alpha=1$

अतः दो मूल $2-i$ और 1 होंगे।

19. (c) ज्ञात है $x^2+px+(1-p)=0$ .....(i)

$(1-p)^2+p(1-p)+(1-p)=0$

$(1-p)[1-p+p+1]=0;\ \ p=1$

समीकरण (i) में $p=1$ रखने पर,

$x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0$ अर्थात् $x=0,-1$.

20. (a) $y=\sqrt{\frac{(x+1)(x-3)}{(x-2)}}$

यहाँ x का मान 2 नहीं हो सकता है।

$\Rightarrow$ या तो दोनों अंश व हर धनात्मक हैं

$x\ge -1, x\ge 3$ और $x>2 \Rightarrow x\ge 3$ .....(i)

या दोनों अंश व हर ऋणात्मक हैं

$x\ge -1$ और $x<2 \Rightarrow -1\le x<2$ .....(ii)

(i) व (ii) से, $-1\le x<2$ या $x\ge 3$.

21. (d) फलन की प्रान्त की परिभाषा से, $y=\sqrt{x(x-3)}$
$x(x-3)\ge 0$ अर्थात् $x\le 0$ या $x\ge 3$ .....(i)

दिये गये समीकरण को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

$9|x|^2-19|x|+2=0$

$\Rightarrow (9|x|-1)(|x|-2)=0 \Rightarrow |x|=2$ या $|x|=1/9$

$\therefore$ समीकरण के हल $\pm 2, \pm 1/9$ हैं।

(i) के प्रान्तानुसार, अभीष्ट हल $-2, \frac{-1}{9}$ हैं।

22. (c) दिया गया है कि $x^2+2ax+a^2$, $x^3-3px+2q=0$ का गुणांक है।

माना कि $x^3-3px+2q=(x^2+2ax+a^2)(x+\lambda)$,

जहाँ λ अचर है।

दोनों पक्षों की समान घातों के गुणांकों की तुलना करने पर,

$x^3-3px+2q=x^3+(2a+\lambda)x^2+(a^2+2a\lambda)x+\lambda a^2$

$\Rightarrow 2a+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-2a$ .....(i)

और $-3p=a^2+2a\lambda$ .....(ii)

और $2q=\lambda a^2$ .....(iii)

(iii) में λ का मान रखने पर,

$\Rightarrow 2q=-2a^3 \Rightarrow q=-a^3$ .....(iv)

(ii) में λ का मान रखने पर,

$\Rightarrow -3p=a^2+2a(-2a)=a^2-4a^2=-3a^2$

$\Rightarrow -3p=-3a^2 \Rightarrow p=a^2 \Rightarrow p=(-q)^{2/3} \Rightarrow p^3=q^2$.

23. (b,c) $\because\ a<0$

अतः $x_2+x_1<0$ (चित्रानुसार)

$\Rightarrow \frac{-a}{b}<0 \Rightarrow \frac{a}{b}>0 \Rightarrow b<0\ (\because a<0)$

वक्र $y=ax^2+bx+c$, y-अक्ष पर $x=0$ पर मिलता है अतः $y=c$ । चित्रानुसार $y>0 \Rightarrow c>0$.

24. (a) मूल α,β अंतराल $(0,1)(\alpha\ne\beta)$ में विद्यमान है, अतः

(i) $\Delta>0$, (ii) $f(0)>0, f(1)>0$, (iii) $0<\alpha+\beta<2$

$\therefore$ यहाँ $\alpha+\beta=3 \nless 2$ सभी k के लिए

अतः कोई k विद्यमान नहीं है।

25. (a) ज्ञात है $x^3+px+q=0$ .....(i)

$\therefore$ समीकरण (i) के मूल α,β,γ हैं

$\therefore$ मूलों का योगफल $=\alpha+\beta+\gamma$

$=-\frac{x^2 \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}=\frac{-0}{1}=0$

और किन्हीं दो मूलों का गुणनफल

$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}=p$

$\therefore$ किन्हीं तीन मूलों का गुणनफल $=\alpha\beta\gamma=-q$

$\because\ \alpha+\beta+\gamma=0$

$\therefore\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma=-3q$.

* * *