Chapter
6
क्रमचय एवं संच

क्रमचय

प्रस्तावना (Introduction)

(1) **क्रमगुणन** (Factorial) **:** यदि n कोई धनात्मक पूर्णांक है, तो प्रथम n प्राकृत संख्याओं का सतत् गुणनफल, क्रमगुणन n कहलाता है, जिसे $n!$ या $\underline{n}$ से व्यक्त करते हैं। क्रमगुणन शून्य परिभाषित है, अर्थात् $0! = 1$.

जब n ऋणात्मक या भिन्न हो, तो $n!$ परिभाषित नहीं होगा, किन्तु $\frac{1}{(-n)!} = 0$. अतः, $n! = n(n-1)(n-2)$ 3.2.1

(2) **अभाज्य p का $n!$ में घातांक** (Exponent of Prime p in $n!$) : अभाज्य p का $n!$ में घातांक $E_p(n!)$ से प्रदर्शित होता है तथा $E_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + ... + \left[\frac{n}{pk}\right]$, जहाँ $p^k < n < p^{k+1}$ तथा $\left[\frac{n}{p}\right]$ महत्तम पूर्णांक को व्यक्त करता है, जो कि $\frac{n}{p}$ के बराबर या इससे कम है।

उदाहरणार्थ : 100! में 3 का घातांक

$$= E_3(100!) = \left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{3^2}\right] + \left[\frac{100}{3^3}\right] + \left[\frac{100}{3^4}\right]$$

$$= 33 + 11 + 3 + 1 = 48 .$$

क्रमचय की परिभाषा (Definition of permutation)

किसी दिए हुए व्यक्तियों अथवा वस्तुओं के समूह में से एक बार में कुछ कम अथवा सभी व्यक्तियों अथवा वस्तुओं को लेकर भिन्न-भिन्न विन्यासों, जिनमें क्रम को महत्व दिया गया हो, को क्रमचय कहते हैं।

उदाहरणार्थ : तीन विभिन्न वस्तुएँ a, b तथा c दी गई हैं तो इन तीन में से दो वस्तुओं को लेकर बने विन्यास ab, ac, bc, ba, ca, cb होंगे। अतः क्रमचयों की संख्या 6 है।

पुनरावृत्ति रहित क्रमचयों की संख्या
(Number of permutations without repetition)

(1) n वस्तुओं में से, एक समय में r वस्तुएँ लेकर विन्यास बनाना तथा n वस्तुओं से r स्थानों को भरना समतुल्य है।

r-स्थान :	1	2	3	4	...	r
विकल्पों की संख्या :	n	$(n-1)$	$(n-2)$	$(n-3)$		$n-(r-1)$

विन्यासों की संख्या = r स्थानों को भरने के तरीकों की संख्या

$$= n(n-1)(n-2).......(n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)((n-r)!)}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} = {}^nP_r$$

(2) n विभिन्न वस्तुओं में से एक साथ सभी को लेकर बने विन्यासों की संख्या = ${}^nP_n = n!$

- ${}^nP_0 = \frac{n!}{n!} = 1; {}^nP_r = n.{}^{n-1}P_{r-1}$

पुनरावृत्ति के साथ क्रमचयों की संख्या
(Number of permutations with repetition)

(1) n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुएँ लेकर बने क्रमचयों (विन्यासों) की संख्या, जबकि प्रत्येक वस्तु एक, दो, तीन,......,r बार तक किसी भी व्यवस्था में ली जा सकती है = r स्थानों को भरने के तरीकों की संख्या, जहाँ प्रत्येक स्थान n वस्तुओं में से किसी एक से भरा जा सकता है।

r-स्थान :	1	2	3	4	r
विकल्पों की संख्या :	n	n	n	n	n

क्रमचयों की संख्या = r स्थानों को भरने के तरीकों की संख्या = $(n)^r$

(2) यदि n वस्तुओं में से p वस्तुएँ एक प्रकार की, q वस्तुएँ दूसरे प्रकार की, r वस्तुएँ तीसरे प्रकार की हों तथा शेष वस्तुएँ भिन्न-भिन्न प्रकार की हों, तो सभी n वस्तुओं को एक साथ लेकर बने क्रमचयों की संख्या $\frac{n!}{p!q!r!}$ होगी।

प्रतिबन्धित क्रमचय (Conditional permutations)

(1) n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाए जा सकने वाले क्रमचयों की संख्या, जबकि p निश्चित वस्तुएँ सदैव सम्मिलित हों = ${}^{n-p}C_{r-p}\ r!$.

(2) n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाए जा सकने वाले क्रमचयों की संख्या, जबकि p निश्चित वस्तुएँ कभी भी सम्मिलित न हों = ${}^{n-p}C_r\ r!$.

(3) n विभिन्न वस्तुओं में से r से अधिक वस्तुएँ एक साथ न लेकर (अर्थात् r या उससे कम वस्तुएँ एक साथ लेकर) बनाए जा सकने वाले कुल क्रमचयों की संख्या, जबकि प्रत्येक वस्तु की कितनी भी बार पुनरावृत्ति हो सकती है, $\frac{n(n^r-1)}{n-1}$ होगी।

(4) n विभिन्न वस्तुओं में से सभी को एक साथ लेकर बनाए जा सकने वाले क्रमचयों की संख्या, जबकि m विशिष्ट वस्तुएँ सदैव एक साथ हों, $m!\times(n-m+1)!$ होगी।

(5) n विभिन्न वस्तुओं में से सभी को एक साथ लेकर बनाए जा सकने वाले क्रमचयों की संख्या, जबकि m विशिष्ट वस्तुएँ कभी एक साथ न हों, $n! - m!\times(n-m+1)!$ होगी।

(6) माना n वस्तुएँ हैं, जिनमें m वस्तुएँ एक प्रकार की तथा शेष $(n-m)$ वस्तुएँ दूसरे प्रकार की हैं, तो इन वस्तुओं को लेकर बनाए जा सकने वाले परस्पर विभिन्न अपवर्जी क्रमचयों की संख्या $\frac{n!}{(m!)\times(n-m)!}$ होगी।

उपरोक्त प्रमेय का आगे विस्तार किया जा सकता है, अर्थात् यदि n वस्तुएँ हों, जिनमें p_1 एकसमान एक प्रकार की, p_2 एकसमान दूसरे प्रकार की, p_3 एकसमान तीसरे प्रकार की,......, p_r एकसमान r वें प्रकार की वस्तुएँ इस प्रकार हैं कि $p_1+p_2+......+p_r=n$; तो इन वस्तुओं को लेकर बनाए जा सकने वाले क्रमचयों की संख्या $\frac{n!}{(p_1!)\times(p_2!)\times......\times(p_r!)}$ होगी।

चक्रीय क्रमचय (Circular permutations)

चक्रीय क्रमचय में, किसी वस्तु की दूसरों के सापेक्ष स्थिति महत्वपूर्ण होती है। अतः चक्रीय क्रमचय में हम किसी एक वस्तु की स्थिति को स्थिर मानते हैं और तब अन्य वस्तुओं को सभी सम्भव तरीके से व्यवस्थित करते हैं।

चक्रीय क्रमचय दो प्रकार के होते हैं :

(i) चक्रीय क्रमचय, जिसमें दक्षिणावर्त तथा वामावर्त क्रम भिन्न क्रमचय देते हैं। उदाहरण के लिए, एक गोल मेज की परिधि में व्यक्तियों को बैठाने की व्यवस्था।

(ii) चक्रीय क्रमचय, जिसमें दक्षिणावर्त तथा वामावर्त क्रम समान क्रमचय देते हैं। **उदाहरण के लिए** : एक माला बनाने के लिए मणियों की व्यवस्था।

दक्षिणावर्त तथा वामावर्त व्यवस्था में अन्तर (Difference between clockwise and anticlockwise arrangement) : (i) यदि दक्षिणावर्त तथा वामावर्त क्रम की व्यवस्थाएँ भिन्न नहीं हैं जैसे माला में मणियों की व्यवस्था, माला में फूलों की व्यवस्था इत्यादि, तो n विभिन्न वस्तुओं के चक्रीय क्रमचयों की संख्या $\frac{(n-1)!}{2}$ होगी।

(ii) n विभिन्न वस्तुओं में से r एक साथ लेने पर चक्रीय क्रमचयों की संख्या $\frac{{}^nP_r}{r}$ होती है, जब दक्षिणावर्त तथा वामावर्त क्रम भिन्न क्रमचय देते हैं।

(iii) n विभिन्न वस्तुओं में से r को एक साथ लेने पर चक्रीय क्रमचयों की संख्या $\frac{{}^nP_r}{2r}$ होती है, जबकि दक्षिणावर्त तथा वामावर्त क्रम समान क्रमचय देते हैं।

चक्रीय क्रमचय से सम्बन्धित प्रमेय

प्रमेय (i) : n विभिन्न वस्तुओं के चक्रीय क्रमचयों की संख्या $(n-1)!$ होती है।

प्रमेय (ii) : एक गोल मेज की परिधि में n व्यक्तियों को $(n-1)!$ तरीके से बैठाया जा सकता है।

प्रमेय (iii) : n विभिन्न मणियों को एक माला में व्यवस्थित करने के प्रकार $\frac{1}{2}(n-1)!$ होते हैं।

संचय

संचय की परिभाषा (Definition of combination)

दी गई वस्तुओं में से कुछ या सभी वस्तुओं को साथ लेकर बिना क्रम का ध्यान रखे, जो विभिन्न समूह या समुदाय (groups) बनाए जाते हैं, उन्हें उन वस्तुओं का संचय कहते हैं।

संकेत (Notation): n वस्तुओं में से r वस्तुएँ एक साथ लेकर बनाये जा सकने वाले संचयों की संख्या को $C(n,r)$ या ${}^nC_r$ या $\binom{n}{r}$ से प्रदर्शित करते हैं।

${}^nC_r$ सदैव एक प्राकृत संख्या होती है।

क्रमचय व संचय में अंतर % (i) संचय में केवल चयन किया जाता है, जबकि क्रमचय में न केवल चयन करते हैं, बल्कि एक चयन में विभिन्न क्रम की व्यवस्थाओं पर भी ध्यान देते हैं।

(ii) प्रत्येक संचय के संगत अनेक क्रमचय होते हैं।

उदाहरणार्थ : 6 क्रमचय *ABC, ACB, BCA, BAC, CBA* तथा *CAB* के संगत एक ही संचय *ABC* है।

बिना पुनरावृत्ति के संचयों की संख्या (Number of combinations without repetition)

n भिन्न वस्तुओं में से $r(0\le r\le n)$ वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाए जा सकने वाले संचयों (चयन या समूह) की संख्या ${}^nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ होती है, जबकि ${}^nC_r={}^nC_{n-r}$.

माना कुल चयनों या समूहों की संख्या = x, प्रत्येक समूह में r वस्तुएँ हैं, जो $r!$ प्रकार से व्यवस्थित की जा सकती हैं, अतः r वस्तुओं की व्यवस्थाओं की संख्या = $x\times(r!)$, किन्तु व्यवस्थाओं की संख्या = ${}^nP_r$.

$$\Rightarrow x\times(r!)={}^nP_r\Rightarrow x=\frac{{}^nP_r}{r!}\Rightarrow x=\frac{n!}{r!(n-r)!}={}^nC_r.$$

पुनरावृत्ति के साथ क्रमचयों की संख्या (Number of permutations with repetition)

(1) n भिन्न वस्तुओं में से r को एक साथ लेकर बने संचयों की संख्या जबकि कोई भी वस्तु कितने भी बार आ सकती है

= $(1+x+x^2+.......+x^r)^n$ में x^r का गुणांक = $(1-x)^{-n}$ में x^r का गुणांक = ${}^{n+r-1}C_r$

(2) n वस्तुओं में से कुछ अथवा सभी को एक साथ लेकर बने सम्भावित समूहों अथवा संचयों की संख्या ${}^nC_1+{}^nC_2+.....+{}^nC_n$ अर्थात् 2^n-1 होगी।

(3) $n=(n_1+n_2+....)$ वस्तुओं में से कुछ अथवा सभी वस्तुओं को लेकर बने सम्भावित समूहों अथवा संचयों की संख्या (जबकि n_1 वस्तुएँ एक प्रकार की, n_2 दूसरे प्रकार की तथा अन्य इसी प्रकार से हों) $\{(n_1+1)(n_2+1)......\}-1$ होंगी।

(4) n समान वस्तुओं में से r वस्तुओं के चयन के तरीकों की संख्या 1 होती है।

(5) n समान वस्तुओं में से शून्य या अधिक वस्तुओं के चयन की संख्या $n+1$ होती है।

(6) $a_1+a_2+a_3+......+a_n+k$ वस्तुओं में से, (जहाँ a_1 एक समान एक प्रकार की, a_n एक समान n वें प्रकार की तथा k भिन्न वस्तुएँ हैं) कम से कम एक वस्तु के चयन की संख्या

$[(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1).......(a_n+1)]2^k-1$ होगी।

प्रतिबन्धित संचय (Conditional combinations)

(1) n असमान वस्तुओं में से r वस्तुएँ एक साथ लेकर बने संचयों की संख्या, जबकि k विशेष वस्तुएँ

(i) सदैव सम्मिलित की जायें = ${}^{n-k}C_{r-k}$

(ii) कभी सम्मिलित न हों = ${}^{n-k}C_r$

(2) n वस्तुओं में से, जिनमें p वस्तुएँ एकसमान हैं, r वस्तुओं को एक साथ लेकर बने संचयों की संख्या

= ${}^{n-p}C_r+{}^{n-p}C_{r-1}+{}^{n-p}C_{r-2}+.......+{}^{n-p}C_0$, यदि $r\le p$ तथा

${}^{n-p}C_r+{}^{n-p}C_{r-1}+{}^{n-p}C_{r-2}+.......+{}^{n-p}C_{r-p}$, यदि $r>p$

समूह में विभाजन (Division into groups)

स्थिति I : (1) n असमान वस्तुओं को r विभिन्न समूहों में व्यवस्थित करने की कुल विधियाँ ${}^{n+r-1}P_n$ या $n!\,{}^{n-1}C_{r-1}$ होंगी। (रिक्त समूह मान्य है या नहीं के अनुसार)

(2) n असमान वस्तुओं को r विभिन्न समूहों में बाँटने की कुल विधियाँ होंगी

$r^n-{}^rC_1(r-1)^n+{}^rC_2(r-2)^n-.........+(-1)^{n-1}\,{}^nC_{r-1}$ या $n!$ $(e^x-1)^r$ में x^n का गुणांक ।

यहाँ रिक्त समूह मान्य नहीं है।

(3) $m\times n$ असमान वस्तुओं को n व्यक्तियों में (या अंकित समूह में) बराबर-बराबर बाँटने की कुल विधियाँ = (समूह में विभाजित करने की विधियों की संख्या) × (समूहों की संख्या) ! = $\frac{(mn)!n!}{(m!)^n n!}=\frac{(mn)!}{(m!)^n}$.

स्थिति II : $(m+n)$ असमान वस्तुओं को m तथा n वस्तुओं के दो समूहों में विभाजित करने की कुल विधियाँ

$$= {}^{m+n}C_m.{}^nC_n=\frac{(m+n)!}{m!n!}, m\ne n.$$

उपपरिणाम (Corollary) : यदि $m=n$, तो समूह समान आकार के होंगे। इन समूहों का विभाजन दो प्रकार से होगा।

प्रकार I : यदि समूह का क्रम महत्वपूर्ण न हो : $2n$ असमान वस्तुओं को दो समूहों में बराबर-बराबर बाँटे जाने की कुल विधियाँ $\frac{(2n)!}{2!(n!)^2}$ होंगी।

प्रकार II : यदि समूह का क्रम महत्वपूर्ण है : (1) $2n$ असमान वस्तुओं को दो भिन्न समूहों में बराबर-बराबर बाँटे जाने की कुल विधियाँ $\frac{(2n)!}{2!(n!)^2}\times 2!=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ होंगी।

(2) $(m+n+p)$ असमान वस्तुओं को क्रमशः m, n तथा p वस्तुओं के तीन संग्रहों में बाँटने की कुल विधियाँ

$${}^{m+n+p}C_m.{}^{n+p}C_n.{}^pC_p=\frac{(m+n+p)!}{m!n!p!}, m\ne n\ne p$$ होंगी।

उप-परिणाम (Corollary): यदि $m=n=p$, तो समूह समान आकार के होंगे। इन समूहों का विभाजन दो प्रकार से होगा।

प्रकार I : यदि समूह का क्रम महत्वपूर्ण न हो : $3p$ असमान वस्तुओं को तीन समूहों में बराबर-बराबर बाँटने की कुल विधियाँ $\frac{(3p)!}{3!(p!)^3}$ होंगी।

प्रकार II : यदि समूह का क्रम महत्वपूर्ण है : $3p$ असमान वस्तुओं को तीन भिन्न समूहों में बराबर-बराबर बाँटने की कुल विधियाँ $\frac{(3p)!}{3!(p!)^3}.3!=\frac{(3p)!}{(p!)^3}$ होंगी।

- यदि समूह का क्रम महत्वपूर्ण न हो : mn असमान वस्तुओं को m समूहों में बराबर-बराबर बाँटे जाने की कुल विधियाँ $\frac{mn!}{(n!)^m m!}$ होंगी।
- यदि समूह का क्रम महत्वपूर्ण हो: mn असमान वस्तुओं को m विभिन्न समूहों में बराबर-बराबर बाँटे जाने की कुल विधियाँ $\frac{(mn)!}{(n!)^m m!}\times m!=\frac{(mn)!}{(n!)^m}$ होंगी।

व्यतिक्रम (Derangement)

दिये गये क्रम में किसी भी प्रकार का परिवर्तन व्यतिक्रम कहलाता है।

यदि n वस्तुओं को एक पंक्ति में व्यवस्थित किया गया है, तब इनको व्यतिक्रमित (Deranged) करने के कुल प्रकार, जिससे कि कोई भी वस्तु अपनी मूल स्थिति पर न रहे,

$$n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+......+(-1)^n.\frac{1}{n!}\right)$$ होंगे।

ज्यामितीय समस्याओं से सम्बन्धित कुछ महत्वपूर्ण परिणाम (Some important results related to geometrical problems)

(1) एक समतल पर n बिन्दुओं को मिलाने से बनने वाली कुल विभिन्न रेखाओं की संख्या ${}^nC_2-{}^mC_2+1$ हैं, जबकि $m(<n)$ समरेखीय बिन्दु हैं।

(2) एक समतल पर n बिन्दुओं को मिलाने से बनने वाले त्रिभुजों की संख्या ${}^nC_3-{}^mC_3$ हैं, जबकि $m\ (<n)$ समरेखीय बिन्दु हैं।

(3) n भुजाओं वाले बहुभुज में विकर्णों की संख्या ${}^nC_2-n$ होती है।

(4) यदि एक समतल में m समान्तर रेखाएँ, n अन्य समान्तर रेखाओं द्वारा प्रतिच्छेदित की जाती हैं, तो इस प्रकार बनने वाले समान्तर चतुर्भुजों की संख्या ${}^mC_2\times{}^nC_2$ अर्थात् $\frac{mn(m-1)(n-1)}{4}$ होती है।

(5) किसी वृत्त की परिधि पर n बिन्दु दिए गए हैं, तो उन्हें मिलाने पर, (i) सरल रेखाओं की संख्या = ${}^nC_2$ (ii) त्रिभुजों की संख्या = ${}^nC_3$

(iii) चतुर्भुजों की संख्या = ${}^nC_4$.

(6) किसी समतल पर n सरल रेखाएँ इस प्रकार खींची जायें, कि कोई भी दो रेखाएँ परस्पर समान्तर नहीं हैं तथा कोई भी तीन रेखाएँ एक बिन्दु से नहीं गुजरती हैं, तो ये रेखाएँ समतल को $(1+\Sigma n)$ भागों में विभाजित करेंगी।

(7) एक $n\times n$ वर्ग में किसी भी आकार के आयतों की संख्या $\sum_{r=1}^{n} r^3$ तथा किसी भी आकार के वर्गों की संख्या $\sum_{r=1}^{n} r^2$ होती है।

(8) एक $n\times p, (n<p)$ आयत में किसी भी आकार के आयतों की संख्या $\frac{np}{4}(n+1)(p+1)$ तथा किसी भी आकार के वर्गों की संख्या $\sum_{r=1}^{n}(n+1-r)(p+1-r)$ होती है।

बहुपद प्रमेय (Multinomial theorem)

माना $x_1, x_2, ..., x_m$ पूर्णांक हैं, तो समीकरण

$x_1 + x_2 + ... + x_m = n$ .....(i)

के हलों की संख्या, प्रतिबन्ध

$a_1 \le x_1 \le b_1, a_2 \le x_2 \le b_2, ..., a_m \le x_m \le b_m$ .....(ii)

के अन्तर्गत,

$(x^{a_1} + x^{a_1+1} + ... + x^{b_1})(x^{a_2} + x^{a_2+1} + ... + x^{b_2})......$

$(x^{a_m} + x^{a_{m+1}} + ... + x^{b_m})$ ......(iii)

में x^n के गुणांक के बराबर है।

ऐसा इसलिए है कि जितने प्रकार से (i) में m पूर्णांकों का योग n होगा, उतने ही प्रकार से (iii) में x^n आयेगा।

विभाजन के प्रकारों की संख्या ज्ञात करने में रेखीय समीकरण के हल तथा प्रसार में किसी घात के गुणांक का प्रयोग :

(i) $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_r = n$ के पूर्णांक हलों की संख्या, जहाँ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ... x_r \ge 0$, जो n समान वस्तुओं को r व्यक्तियों में बाँटें जाने वाले तरीकों की संख्या के बराबर है।

यह $(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + ...)^r$ के प्रसार में x^n के गुणांक के बराबर है।

$= \left(\frac{1}{1-x}\right)^r$ में x^n का गुणांक $= (1-x)^{-r}$ में x^n का गुणांक

$= \left\{1 + rx + \frac{r(r+1)}{2!}x^2 + ... + \frac{r(r+1)(r+2)......(r+n-1)}{n!}x^n + ...\right.$

में x^n का गुणांक

$$= \frac{r(r+1)(r+2)....(r+n-1)}{n!} = \frac{(r+n-1)!}{n!(r-1)!} = {}^{n+r-1}C_{r-1}$$

(ii) $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_r = n$ के पूर्णांक हलों की संख्या (जहाँ $x_1 \ge 1, x_2 \ge 1, ... x_r \ge 1$) n समान वस्तुओं को r व्यक्तियों में बाँटे जाने के तरीकों की संख्या के बराबर है, जहाँ प्रत्येक को कम से कम 1 वस्तु मिले। यह $(x^1 + x^2 + x^3 + ...)^r$ के प्रसार में x^n के गुणांक के बराबर है।

$= \left(\frac{x}{1-x}\right)^r$ में x^n का गुणांक $= x^r(1-x)^{-r}$ में x^n का गुणांक

$= x^r\left\{1 + rx + \frac{r(r+1)}{2!}x^2 + ... + \frac{r(r+1)(r+2).....(r+n-1)}{n!}x^n + ...\right\}$

में x^n का गुणांक

$= \left\{1 + rx + \frac{r(r+1)}{2!}x^2 + ... + \frac{r(r+1)(r+2).....(r+n-1)}{n!}x^n + ...\right\}$

में x^{n-r} का गुणांक

$= \frac{r(r+1)(r+2)......(r+n-r-1)}{(n-r)!} = \frac{r(r+1)(r+2).....(n-1)}{(n-r)!} = \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} = {}^{n-1}C_{r-1}$.

विभाजकों की संख्या (Number of divisors)

माना $N = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3} ...... p_k^{\alpha_k}$, जहाँ $p_1, p_2, p_3, ... p_k$ विभिन्न अभाज्य संख्यायें हैं तथा $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_k$ प्राकृत संख्याएँ हैं, तो

(1) 1 और N को शामिल करते हुए N के कुल विभाजकों की संख्या $= (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)....(\alpha_k+1)$

(2) 1 और N को बहिष्कृत करते हुए N के कुल विभाजकों की संख्या $= (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1).....(\alpha_k+1)-2$

(3) 1 या N को बहिष्कृत करते हुए N के कुल विभाजकों की संख्या $= (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1).....(\alpha_k+1)-1$

(4) इन विभाजकों का योग

$$= (p_1^0 + p_1^1 + p_1^2 + ... + p_1^{\alpha_1})(p_2^0 + p_2^1 + p_2^2 + ... + p_2^{\alpha_2}).....(p_k^0 + p_k^1 + p_k^2 + ... + p_k^{\alpha_k})$$

(5) N को दो विभाजकों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करने के तरीकों की संख्या है

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)....(\alpha_k+1), \text{यदि } N \text{ पूर्ण वर्ग नहीं है} \\ \frac{1}{2}[(\alpha_1+1)(\alpha_2+1).....(\alpha_k+1)+1], \text{यदि } N \text{ पूर्ण वर्ग है} \end{cases}$$

(6) एक मिश्रित संख्या N को उन दो विभाजकों, जो एक-दूसरे के सापेक्ष अभाज्य हैं, के गुणनफल में व्यक्त करने के 2^{n-1} तरीकें होंगे, जहाँ n, N के विभिन्न विभाजकों की संख्या है।

Tips & Tricks

- ${}^nC_0 = {}^nC_n = 1, {}^nC_1 = n$.
- ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$.
- ${}^nC_x = {}^nC_y \Leftrightarrow x = y$ अथवा $x + y = n$.
- $n.{}^{n-1}C_{r-1} = (n-r+1){}^nC_{r-1}$.
- यदि n सम है, तो ${}^nC_r$ का महत्तम मान ${}^nC_{n/2}$ होगा।
- यदि n विषम है, तो ${}^nC_r$ का महत्तम मान ${}^nC_r$ या ${}^nC_{\frac{n+1}{2}}$ या ${}^nC_{\frac{n-1}{2}}$.
- ${}^nC_r = \frac{n}{r}.{}^{n-1}C_{r-1}$.
- n विभिन्न वस्तुओं में से शून्य या अधिक वस्तुओं के चयनों की संख्या ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + ... + {}^nC_n = 2^n$ होती है।
- एक या अधिक प्रश्नों के उत्तर देने के तरीकों की संख्या, जबकि प्रत्येक प्रश्न विकल्प रखता है $= 3^n - 1$.
- सभी n प्रश्नों के उत्तर देने के तरीकों की संख्या जबकि प्रत्येक प्रश्न विकल्प रखता है $= 2^n$.
- ${}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + ... = {}^nC_1 + {}^nC_3 + {}^nC_5 + ... = 2^{n-1}$.
- ${}^{2n+1}C_0 + {}^{2n+1}C_1 + {}^{2n+1}C_2 + ... + {}^{2n+1}C_n = 2^{2n}$.
- ${}^nC_n + {}^{n+1}C_n + {}^{n+2}C_n + {}^{n+3}C_n + ... + {}^{2n-1}C_n = {}^{2n}C_{n+1}$.
- n विभिन्न वस्तुओं में से सभी को एक साथ लेने पर संचयों की संख्या ${}^nC_n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{1}{0!} = 1$, $(\because 0! = 1)$.

✍ अन्तराल विधि (Gap method) : माना कि 5 पुरूषों A, B, C, D, E को एक पंक्ति में $\times A \times B \times C \times D \times E \times$ प्रकार से व्यवस्थित किया गया है। इन पाँच व्यक्तियों के बीच में 6 रिक्त स्थान हैं, चार मध्य में तथा दो प्रत्येक कोने पर हैं। अब यदि तीन महिलाओं P, Q, R को इस प्रकार व्यवस्थित करना है कि उनमें से कोई भी दो एक साथ न रहें, तो हम अन्तराल-विधि प्रयोग में लाते हैं अर्थात् इन तीन महिलाओं को $^6P_3$ प्रकार से व्यवस्थित कर सकते हैं।

साथ-साथ (Together) : माना कि हमें 5 व्यक्तियों को एक पंक्ति में खड़ा करना है, तो यह $5! = 120$ प्रकार से किया जा सकता है। परन्तु यदि दो विशेष व्यक्तियों को साथ-साथ ही रखना है, तो हम यह मान लेते हैं कि इन दो व्यक्तियों को एक साथ बाँध दिया गया है। अतः अब कुल $5 - 2 + 1$ इकाईयाँ होंगी जिन्हें $4! = 24$ प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है। परन्तु इन दो व्यक्तियों को भी $2!$ प्रकार से बाँधा जा सकता है। अतः कुल विभिन्न प्रकार $= 24 \times 2 = 48$.

कभी एक साथ न रहें, तब अभीष्ट प्रकार = कुल – साथ-साथ

$$= 120 - 48 = 72.$$

✍ एक प्रकार की विभिन्न n वस्तुओं तथा दूसरे प्रकार की विभिन्न n वस्तुओं को एक पंक्ति में एक के बाद एक रखने के कुल तरीकों की संख्या $= 2.n!.n!$.

✍ m एक प्रकार की तथा n दूसरे प्रकार की वस्तुओं को हार के रूप में रखने के तरीके, जबकि

(i) दूसरे प्रकार की सभी वस्तुयें एक साथ हों $= \dfrac{m!n!}{2}$

(ii) दूसरे प्रकार की कोई भी दो वस्तुयें एक साथ हों $= \dfrac{(m-1)^n P_n}{2}$

✍ सभी संख्याएँ जिनका अंतिम अंक एक सम संख्या 0, 2, 4, 6 या 8 है, वे 2 से विभाजित होंगी।

✍ सभी संख्याएँ, जिनके अंकों का योग 3 से विभाजित है, वे 3 से विभाजित होंगी। ***उदाहरणार्थ*** : 534 में अंकों का योग 12 है, जो 3 से विभाजित है, अतः 534 भी 3 से विभाजित होगी।

✍ सभी संख्याएँ, जिनके अंतिम दो अंकों से बनी संख्या 4 से विभाजित है, वे 4 से विभाजित होंगी। ***उदाहरणार्थ*** : 7312 व 8936 इस प्रकार हैं कि 12 व 36, 4 से विभाजित हैं, अतः दी गई संख्याएँ भी 4 से विभाजित होंगी।

✍ सभी संख्याएँ जिनका अंतिम अंक 0 या 5 है, वे 5 से विभाजित होंगी।

✍ संख्याएँ, जो एक साथ 2 तथा 3 दोनों से विभाजित हों, वे 6 से विभाजित होंगी। ***उदाहरणार्थ*** : 108, 756 इत्यादि।

✍ सभी संख्याएँ जिनके अंतिम तीन अंकों से बनी संख्याएँ 8 से विभाजित हों, वें 8 से विभाजित होंगी ।

✍ सभी संख्याएँ जिनके अंकों का योग 9 से पूर्णतः विभाज्य हैं, वे 9 से विभाजित होंगी।

✍ सभी संख्याएँ जिनके अन्तिम दो अंकों से बनी संख्या 25 से विभाजित हों, वे 25 से विभाजित होंगी। ***उदाहरणार्थ*** : 73125, 2400 इत्यादि।

✍ यदि n विभिन्न अंक $(a, a_2, a_3 .... a_n)$ दिये गये हों, तब पुनरावृत्ति के बिना निर्मित सभी संख्याओं के इकाई स्थान पर स्थित अंकों का योग $(n-1)!(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$ होता है। इस स्थिति में सभी संख्याओं का योग $(n-1)!(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$. (1111........ n बार) होता है।

Ordinary Thinking

Objective Questions

क्रमचय की परिभाषा, पुनरावृत्ति रहित तथा पुनरावृत्ति के साथ क्रमचयों की संख्या, प्रतिबन्धित क्रमच;

1. यदि सबसे अच्छा तथा सबसे खराब प्रश्न-पत्र साथ-साथ न रखे जायें तो 6 परीक्षा प्रश्न-पत्रों को कितने प्रकार से रखा जा सकता है
   (a) 120 (b) 480
   (c) 240 (d) इनमें से कोई नहीं

2. 1, 2, 3, 4, 5, 6 के प्रयोग से 3000 और 4000 के बीच ऐसी कितनी संख्यायें बनायी जा सकती हैं जो 5 से विभाजित हो सकती हैं (जबकि अंकों की पुनरावृत्ति न हो)
   (a) $^6P_2$ (b) $^5P_2$
   (c) $^4P_2$ (d) $^6P_3$

3. एक हाथ की 4 अँगुलियाँ में 6 अँगूठियाँ कितने प्रकार से पहनी जा सकती हैं [AMU 1983]
   (a) 4^6 (b) $^6C_4$
   (c) 6^4 (d) इनमें से कोई नहीं

4. 1, 2, 3, 4 अंकों से कुल कितनी संख्यायें बनाई जा सकती हैं जबकि किसी भी अंक की पुनरावृत्ति न हो
   (a) $^4P_4$ (b) $^4P_3$
   (c) $^4P_1 + {^4P_2} + {^4P_3}$ (d) $^4P_1 + {^4P_2} + {^4P_3} + {^4P_4}$

5. एक पद के लिये 3 उम्मीदवार हैं, जिनमें से एक व्यक्ति 7 व्यक्तियों के मतों से चुना जाना है, तब कितने प्रकार से मतदान किया जा सकता है
   (a) 7^3 (b) 3^7
   (c) $^7C_3$ (d) इनमें से कोई नहीं

6. भोपाल तथा ग्वालियर के बीच 4 बस चलती हैं। एक आदमी ग्वालियर से भोपाल जाता है तथा किसी अन्य बस द्वारा ग्वालियर वापिस आता है, तो कुल सम्भव प्रकार होंगे
   (a) 12 (b) 16
   (c) 4 (d) 8

7. यदि $^nP_5 = 20 . {^nP_3}$, तो $n =$
   (a) 4 (b) 8
   (c) 6 (d) 7

8. शब्द UNIVERSAL के अक्षरों से 3 अक्षरों वाले कितने शब्द बनाये जा सकते हैं
   (a) 504 (b) 405
   (c) 540 (d) 450

9. यदि $^nP_4 : {^nP_5} = 1 : 2$, तो $n =$ [MP PET 1987; RPET 1996]
   (a) 4 (b) 5
   (c) 6 (d) 7

10. mn पत्रों को कितने प्रकार से n पत्र-पेटियों में डाला जा सकता है
   (a) $(mn)^n$ (b) m^{mn}
   (c) n^{mn} (d) इनमें से कोई नहीं

11. 10 सत्य तथा असत्य प्रश्नों के उत्तर कितने प्रकार से दिये जा सकते हैं
(a) 20 (b) 100
(c) 512 (d) 1024

12. अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 से तीन अंकों वाली कितनी सम संख्यायें बनायी जा सकती हैं (जबकि पुनरावृत्ति वर्जित है)
(a) 224 (b) 280
(c) 324 (d) इनमें से कोई नहीं

13. यदि ${}^nP_5 = 9 \times {}^{n-1}P_4$, तो n का मान है
(a) 6 (b) 8
(c) 5 (d) 9

14. ${}^nP_r$ का मान होता है [IIT 1971; MP PET 1993]
(a) ${}^{n-1}P_r + r\,{}^{n-1}P_{r-1}$ (b) $n.\,{}^{n-1}P_r + {}^{n-1}P_{r-1}$
(c) $n({}^{n-1}P_r + {}^{n-1}P_{r-1})$ (d) ${}^{n-1}P_{r-1} + {}^{n-1}P_r$

15. विभिन्न अंकों से बनाई गई 9 अंकों वाली सभी संख्याओं की संख्या है [IIT 1982]
(a) $9 \times 9\,!$ (b) $9\,!$
(c) 10 ! (d) इनमें से कोई नहीं

16. छः फलकों के चार पांसे फेंके जाते हैं। ऐसे सम्भावित परिणामों की संख्या, जिनमें कम से कम एक पांसा अंक 2 को दर्शाता है, है
(a) 1296 (b) 625
(c) 671 (d) इनमें से कोई नहीं

17. 4 पार्सल और 5 डाकखाने हैं तब पार्सलों का कितने विभिन्न प्रकारों से पंजीयन (registration) कराया जा सकता है [MP PET 1983]
(a) 20 (b) 4^5
(c) 5^4 (d) $5^4 - 4^5$

18. 5 इनामों को 4 विद्यार्थियों में कितने प्रकार से बाँटा जा सकता है, जबकि कोई भी विद्यार्थी एक या अधिक इनाम प्राप्त कर सकता है [BIT Ranchi 1990; RPET 1988, 97]
(a) 1024 (b) 625
(c) 120 (d) 600

19. किसी रेलगाड़ी में 5 सीटें खाली हैं, तो तीन यात्री इन सीटों पर कुल कितने प्रकार से बैठ सकते हैं [RPET 1985; MP PET 2003]
(a) 20 (b) 30
(c) 10 (d) 60

20. r क्रमागत प्राकृत संख्याओं का गुणन, निम्नलिखित से हमेशा विभाजित है [IIT 1985]
(a) $r\,!$ (b) r^2
(c) r^n (d) इनमें से कोई नहीं

21. 3, 4, 5, 6 की सहायता से सभी को एक साथ लेकर बनाई गई संख्याओं के इकाई स्थान के अंकों का योग है [Pb. CET 1990]
(a) 18 (b) 432
(c) 108 (d) 144

22. छः एकसमान सिक्कों को एक पंक्ति में रखा गया है। कितने प्रकार से 'शीर्ष' (Head) और 'पुच्छ' (Tail) को बराबर संख्या में व्यवस्थित किया जा सकता है
(a) 20 (b) 9
(c) 120 (d) 40

23. 4, 5, 6, 7, 8 से बनने वाली व 56000 से बड़ी संख्याओं की संख्या है
(a) 72 (b) 96
(c) 90 (d) 98

24. 10 गेंदों को दो लड़कों के बीच कितने प्रकार से बांटा जा सकता है जबकि एक दो गेंदे लेता है तथा दूसरा आठ गेंदे लेता है
(a) 45 (b) 75
(c) 90 (d) इनमें से कोई नहीं

25. अंकों 2, 4, 6, 8 का (बिना पुनरावृत्ति के) उपयोग करके बनने वाली सभी चार अंकों की संख्याओं का योगफल है
(a) 133320 (b) 533280
(c) 53328 (d) इनमें से कोई नहीं

26. एक गाँव से एक नगर की ओर 5 सडकें जाती हैं। एक ग्रामीण कितने विभिन्न तरीकों से नगर जाकर गाँव लौट सकता है [MP PET 1996]
(a) 25 (b) 20
(c) 10 (d) 5

27. 5 परीक्षा-पत्रों को कितने प्रकार से रख सकते हैं जबकि भौतिकी और रसायन के परीक्षा पत्र कभी साथ में न आयें
(a) 31 (b) 48
(c) 60 (d) 72

28. प्रथम, द्वितीय व तृतीय पारितोषिक 5 प्रतियोगियों को दिये जा सकने की विधियाँ होंगी
(a) 10 (b) 60
(c) 15 (d) 125

29. अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 6 से तीन अंकों की कितनी विषम संख्यायें बनाई जा सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति संभव हो [Pb. CET 1999]
(a) 60 (b) 108
(c) 36 (d) 30

30. अंकों 2, 0, 4, 3, 8 से पांच अंकों की कितनी संख्यायें बनाई जा सकती हैं जबकि अंकों की पुनरावृत्ति न हो [MP PET 2000; Pb. CET 2001]
(a) 96 (b) 120
(c) 144 (d) 14

31. यदि ${}^{12}P_r = 1320$, तब r का मान है [Pb. CET 2004]
(a) 5 (b) 4
(c) 3 (d) 2

32. यदि कोई भी दो क्रमागत अंक समान नहीं हैं, तब n अंकों की कुल संख्यायें हैं [Orissa JEE 2004]
(a) $n!$ (b) 9 !
(c) 9^n (d) n^9

33. यदि दोनों O साथ-साथ न आयें, तो शब्द 'SALOON' के अक्षरों के विन्यासों की संख्या होगी
(a) 360 (b) 720
(c) 240 (d) 120

34. यदि दो व्यंजन पास-पास न आते हों, तो शब्द 'MAXIMUM' के अक्षरों से बनाये जा सकने वाले शब्दों की संख्या है
(a) 4 ! (b) $3\,! \times 4\,!$
(c) 7 ! (d) इनमें से कोई नहीं

35. n पुस्तकों को एक पंक्ति में कितने प्रकार से रखा जा सकता है ताकि दो विशेष पुस्तकें साथ-साथ न आयें
(a) $n\,! - (n-2)!$ (b) $(n-1)!(n-2)$
(c) $n\,! - 2(n-1)$ (d) $(n-2)n!$

36. 500 तथा 600 के बीच आने वाली कितनी संख्यायें अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 6 की सहायता से बनायी जा सकती हैं जबकि किसी अंक की पुनरावृत्ति न हो
(a) 20 (b) 40
(c) 60 (d) 80

37. 1000 से बड़ी परन्तु 4000 से बड़ी नहीं, कितनी संख्यायें अंकों 0, 1, 2, 3, 4 से बनायी जा सकती हैं, जबकि अंकों की पुनरावृत्ति हो सकती है [IIT 1976; AIEEE 2002]
(a) 350 (b) 375
(c) 450 (d) 576

38. अंकों 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1 से कितनी संख्यायें बनायी जा सकती हैं जबकि विषम अंक हमेशा विषम स्थान पर ही रहें [RPET 1988, 1991, 1992]
(a) 24 (b) 18
(c) 12 (d) 30

39. 5 लड़के और 3 लड़कियाँ कितनी विधियों से एक पंक्ति में बैठाये जा सकते हैं ताकि कोई दो लड़कियाँ साथ-साथ न बैठें
(a) $5\,! \times 3\,!$ (b) ${}^4P_3 \times 5\,!$
(c) ${}^6P_3 \times 5\,!$ (d) ${}^5P_3 \times 3!$

40. अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 6 से 1000 से छोटी कितनी संख्यायें बनायी जा सकती हैं, जबकि अंको की पुनरावृत्ति न हो
(a) 156 (b) 160
(c) 150 (d) इनमें से कोई नहीं

41. शब्द 'COURTESY' के अक्षरों से ऐसे कितने शब्द बनाये जा सकते हैं जिनका पहला अक्षर C तथा अन्तिम अक्षर Y हो
(a) 6 ! (b) 8 !
(c) $2(6)\,!$ (d) $2(7)\,!$

42. शब्द 'DELHI' के अक्षरों से कितने शब्द बनाये जा सकते हैं, यदि प्रत्येक शब्द में L बीच में आता हो
(a) 12 (b) 24
(c) 60 (d) 6

43. पाँच अंकों की ऐसी कितनी संख्यायें बनायी जा सकती हैं जिनमें अंक 3, 4 और 7 केवल एक बार आये और अंक 5 दो बार आये

(a) 30 (b) 60

(c) 45 (d) 90

44. 4 पत्र-पेटियों में 3 पत्र कितने प्रकार से डाले जा सकते हैं, जबकि सभी पत्र एक ही पेटी में नहीं डाले जायें

(a) 63 (b) 60

(c) 77 (d) 81

45. 5 अंको के ऐसे टेलीफोन क्रमांकों की संख्या, जिनमें कम से कम एक अंक की पुनरावृत्ति हो, हैं [Pb. CET 2000]

(a) 90,000 (b) 100,000

(c) 30,240 (d) 69,760

46. शब्द 'MATHEMATICS' के अक्षरों के विन्यासों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं[MP PET 1984; DCE 2001]

(a) $\frac{11!}{2!2!}$ (b) $\frac{11!}{2!}$

(c) $\frac{11!}{2!2!2!}$ (d) $11!$

47. शब्द 'CALCUTTA' के सभी अक्षरों को एक साथ लेकर बने क्रमचयों की संख्या होगी [MP PET 1984]

(a) 2520 (b) 5040

(c) 10,080 (d) 40,320

48. 2, 3, 7, 0, 8, 6 अंकों से ऐसी कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं जिनका मान 99 तथा 1000 के बीच में हो, जबकि प्रत्येक संख्या में प्रत्येक अंक एक ही बार आना चाहिये [MP PET 1984]

(a) 100 (b) 90

(c) 120 (d) 80

49. एक सर्कस में 10 जानवरों को रखने के लिये 10 पिंजड़े हैं, इनमें से 4 पिंजड़े इतने छोटे हैं कि 10 जानवरों में से 5 इसमें प्रवेश नहीं कर सकते हैं, तो 10 जानवरों को इन 10 पिंजड़ों में कितने प्रकार से रखा जा सकता है [Roorkee 1989]

(a) 66400 (b) 86400

(c) 96400 (d) इनमें से कोई नहीं

50. शब्द 'COMMITTEE' के अक्षरों से कुल कितने शब्द बनाये जा सकते हैं [RPET 1986; MP PET 2002]

(a) $\frac{9!}{(2!)^2}$ (b) $\frac{9!}{(2!)^3}$

(c) $\frac{9!}{2!}$ (d) $9!$

51. अंकों 3, 4, 5, 6, 7, 8 से 3000 व 4000 के बीच 5 से विभाज्य कुल कितनी संख्यायें बनाई जा सकती हैं यदि किसी भी संख्या में किसी भी अंक की पुनरावृत्ति वर्जित है [RPET 1990]

(a) 60 (b) 12

(c) 120 (d) 24

52. शब्द 'MODESTY' के अक्षरों को सभी सम्भव क्रमों में शब्दकोश की तरह लिखा गया है, तो शब्द MODESTY की रैंक होगी

(a) 5040 (b) 720

(c) 1681 (d) 2520

53. यदि $(x+2)$ वस्तुओं को एक साथ लेने के क्रमचयों की संख्या को a प्रदर्शित करता है, x वस्तुओं में से 11को एक साथ लेकर बने क्रमचयों की संख्या को b प्रदर्शित करता है तथा $(x-11)$ वस्तुओं को एक साथ लेकर बने क्रमचयों की संख्या को c इस प्रकार प्रदर्शित करता है कि $a = 182\ bc$,तब x का मान है

(a) 15 (b) 12

(c) 10 (d) 18

54. अंकों 0, 1, 2, 3 का प्रयोग करके चार अंकों की सभी सम्भव संख्याएँ इस प्रकार बनाई जाती हैं कि किसी भी संख्या में अंकों की पुनरावृत्ति न हो । इन संख्याओं में सम संख्याओं की संख्या है

(a) 9 (b) 18

(c) 10 (d) इनमें से कोई नहीं

55. दस उम्मीदवारों $A_1, A_2, ..., A_{10}$ को स्थान देने के तरीकों की संख्या, जिसमें A_1 सदैव A_{10} से ऊपर है, होगी

(a) $5!$ (b) $2(5!)$

(c) $10!$ (d) $\frac{1}{2}(10!)$

56. शब्द 'EAMCET' के सभी अक्षर सभी सम्भव प्रकार से व्यवस्थित हैं। उन व्यवस्थाओं की संख्या जिसमें दो स्वर एक दूसरे के पास-पास न हों, हैं [EAMCET 1987; DCE 2000]

(a) 360 (b) 114

(c) 72 (d) 54

57. 5 लड़के और 5 लड़कियों को एक पंक्ति में कितने प्रकार से खड़ा किया जा सकता है यदि कोई भी दो लड़कियाँ साथ-साथ न हों [RPET 1997]

(a) $(5!)^2$ (b) $5! \times 4!$

(c) $5! \times 6!$ (d) $6 \times 5!$

58. शब्द "BANANA" के अक्षरों से बनने वाले कुल क्रमचयों की संख्या होगी [RPET 1997, 2000]

(a) 60 (b) 120

(c) 720 (d) 24

59. शब्द "MOBILE" के अक्षरों से बनने वाले शब्दों की कुल संख्या, यदि व्यंजन सदैव विषम स्थानों पर आयें, होगी [RPET 1999]

(a) 20 (b) 36

(c) 30 (d) 720

60. अंकों 1, 2, 3, 4, 5 के प्रयोग से 24000 से बड़ी कितनी संख्यायें बनाई जा सकती हैं, जबकि अंकों की पुनरावृत्ति न हो [RPET 1999]

(a) 36 (b) 60

(c) 84 (d) 120

61. अंकों 3, 4, 5, 6 के प्रयोग से 100 से बड़ी तथा 5 से विभाजित कितनी संख्यायें बनाई जा सकती हैं यदि किसी भी अंक की पुनरावृत्ति न हो [AMU 1999]

(a) 6 (b) 12

(c) 24 (d) 30

62. अंकों 1, 2, 3, 2, 3, 3, 4 से सात अंकों की कितनी संख्यायें बनायी जा सकती हैं [Pb. CET 1999]

(a) 420 (b) 840

(c) 2520 (d) 5040

63. अंकों 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 से चार अंकों की कितनी संख्यायें बनाई जा सकती हैं यदि प्रत्येक संख्या में 1 उपस्थित हो [AMU 2001]

(a) 1225 (b) 1252

(c) 1522 (d) 480

64. अंकों 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 को लेकर चार अंकों की कितनी सम संख्यायें बनाई जा सकती हैं, जबकि अंकों की पुनरावृत्ति न हो [Kerala (Engg.) 2001]

(a) 120 (b) 300

(c) 420 (d) 20

65. अंकों 0, 1, 2, 3, 5, 7 से चार अंकों की कितनी विषम संख्यायें बनाई जा सकती हैं [AIEEE 2002]

(a) 216 (b) 375

(c) 400 (d) 720

66. शब्द "BANANA" के अक्षरों को लेकर कितने शब्द बनाये जा सकते हैं जबकि दोनों 'N' एक साथ न आयें [IIT Screening 2002]

(a) 40 (b) 60

(c) 80 (d) 100

67. 5 छात्रों तथा 3 छात्राओं को कितने प्रकार से एक पँक्ति में बैठाया जा सकता है जबकि प्रत्येक छात्रा सदैव दो छात्रों के बीच रहे [Kerala (Engg.) 2002]

(a) 2880 (b) 1880

(c) 3800 (d) 2800

68. यदि 11 किताबें, जिसमें से 5 गणित की, 4 भौतिकी की तथा 1 रसायन की हैं, किसी अलमारी में रखी हुई हैं, तो इन्हें अलमारी में कितने प्रकार से रखा जा सकता है, जबकि एक विषय की किताबें एक साथ आयें [AMU 2002]

(a) 4! 2! (b) 11!

(c) 5! 4! 3! 2! (d) इनमें से कोई नहीं

69. 'ARTICLE' शब्द के अक्षरों से बनने वाले शब्दों की कुल संख्या, जबकि स्वर सम स्थान पर आयें, है [Karnataka CET 2003]

(a) 36 (b) 574

(c) 144 (d) 754

70. 9 व्यक्तियों को तीन बराबर समूहों में विभाजित करने के कुल प्रकार होंगे [Orissa JEE 2003]

(a) 1680 (b) 840

(c) 560 (d) 280

71. यदि एक आदमी और उसकी पत्नी बस में चढते हैं, जिसमें पांच सीट खाली हैं, तब उनके सीटों पर बैठने के विभिन्न तरीके होंगे [Pb. CET 2004]

(a) 2 (b) 5
(c) 20 (d) 40

72. यदि 'SACHIN' शब्द के अक्षरों से सभी सम्भव शब्द बनाये जायें और इन शब्दों को अंग्रेजी के शब्दकोश के अनुसार क्रमबद्ध किया जाए, तो 'SACHIN' शब्द का क्रम होगा [AIEEE 2005]

(a) 603 (b) 602
(c) 601 (d) 600

73. माना ग्यारह अक्षरों A, B .....,K को स्वेच्छ क्रमचय पूर्णांक 1, 2,.....11, से प्रदर्शित किया जाता हैं तब $(A-1)(B-2)(C-3).....(K-11)$ है [Orissa JEE 2005]

(a) आवश्यक शून्य (b) हमेशा विषम
(c) हमेशा सम (d) इनमें से कोई नहीं

74. 100 रुपए के चार नोट और 5 विभिन्न नोट जिनमें से एक 1 रुपए का नोट, दूसरा 2 रुपए का नोट, तीसरा 5 रुपए का नोट, चौथा 20 रुपए का नोट और पांचवा 50 रुपए का नोट है इन नोटों को 3 बच्चों में इस प्रकार बाँटा जाता है कि प्रत्येक बच्चे को कम से कम एक 100 रुपए का नोट अवश्य प्राप्त होता है, तो नोटों के बाँटने के तरीकों की संख्या होगी [DCE 2005]

(a) 3×5^3 (b) 5×3^5
(c) 3^6 (d) इनमें से कोई नहीं

75. 0, 2, 3, 6, 7, 8 अंकों से बनी ऐसी कितनी संख्याएँ होंगी, जो 999 और 10000 के परिसर में स्थित हों और जिनमें अंकों की पुनरावृत्ति न हो [AMU 2005]

(a) 100 (b) 200
(c) 300 (d) 400

वृत्तीय या चक्रीय क्रमचय

1. यदि एक समिति के ग्यारह सदस्य एक मेज के चारों ओर इस प्रकार बैठते हों कि अध्यक्ष तथा सचिव हमेशा साथ-साथ बैठें, तो विन्यासों की संख्या है

(a) $10\,!\times 2$ (b) $10\,!$
(c) $9\,!\times 2$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. एक छल्ले में 5 चाबियाँ कितने प्रकार से रखी जा सकती हैं

(a) $\frac{1}{2}(4!)$ (b) $\frac{1}{2}(5\,!)$
(c) $4\,!$ (d) $5\,!$

3. 5 बालक और 5 बालिकाओं को एक वृत्त में कितने प्रकार से बैठाया जा सकता है ताकि कोई भी दो बालक पास-पास न बैठें [IIT 1975; MP PET 1987]

(a) $5!\times 5\,!$ (b) $4\,!\times 5\,!$
(c) $\frac{5\,!\times 5\,!}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. 12 व्यक्तियों को एक गोल मेज के चारों ओर किस प्रकार बैठा सकते हैं जबकि 3 विशेष व्यक्ति हमेशा एक साथ रहें

(a) 9 ! (b) 10 !
(c) 3 ! 10 ! (d) 3 ! 9 !

5. एक समिति के 15 सदस्य एक गोल मेज के चारों ओर कितने प्रकार से बैठ सकते हैं, जबकि सचिव अध्यक्ष के एक ओर बैठता है तथा उप सचिव दूसरी ओर बैठता है

(a) $2\times(12\,!)$ (b) 24
(c) $2\times(15\,!)$ (d) इनमें से कोई नहीं

6. 10 फूलों से एक हार कितने प्रकार से गूंथा जा सकता है [MP PET 1984]

(a) $10\,!$ (b) $9\,!$
(c) $2(9\,!)$ (d) $\frac{9\,!}{2}$

7. एक पार्टी में 20 व्यक्ति आमंत्रित किये गए हैं। एक वृत्ताकार मेज पर इन अतिथियों तथा मेजबान को कितने प्रकार से बैठाया जा सकता है, यदि मेजबान के दोनों ओर दो विशेष व्यक्तियों (अतिथियों में से) को सदैव बैठाया जाये [IIT 1977]

(a) $20\,!$ (b) $2\,.\,18\,!$
(c) $18\,!$ (d) इनमें से कोई नहीं

8. विभिन्न रंगों की 5 मणिकाओं से एक हार कुल कितने प्रकार से बनाया जा सकता है [RPET 2002]

(a) 12 (b) 24
(c) 120 (d) 60

9. n पुरुष किसी गोल मेज के चारों ओर बैठ सकते हैं [MP PET 1982]

(a) $\frac{1}{2}(n+1)\,!$ प्रकार से (b) $(n-1)\,!$ प्रकार से
(c) $\frac{1}{2}(n-1)\,!$ प्रकार से (d) $(n+1)\,!$ प्रकार से

10. 5 पुरुष व 2 महिलाओं को एक वृत्ताकार मेज के चारों ओर कितने प्रकार से बैठाया जा सकता है, जबकि दोनों महिलायें एक साथ न बैठें [Roorkee 1999]

(a) 480 (b) 600
(c) 720 (d) 840

11. 7 पुरुष और 7 महिलाओं को एक वृत्ताकार मेज के चारों तरफ कितने प्रकार से बैठाया जा सकता है जबकि कोई भी दो महिलायें एक साथ न बैठें [EAMCET 1990; MP PET 2001; DCE 2001; UPSEAT 2002;Pb. CET 2000]

(a) $(7\,!)^2$ (b) $7\,!\times 6\,!$
(c) $(6\,!)^2$ (d) $7\,!$

12. n विभिन्न वस्तुओं के वृत्ताकार क्रमचयों की संख्या होगी [Kerala (Engg.) 2001]

(a) $n!$ (b) n
(c) $(n-2)!$ (d) $(n-1)!$

13. विभिन्न रंगों के 8 मोतियों को लेकर एक हार कितने प्रकार से बनाया जा सकता है [EAMCET 2002]

(a) 2520 (b) 2880
(c) 5040 (d) 4320

14. 6 पुरुष तथा 5 महिलाओं को एक वृत्ताकार मेज के चारों तरफ कितने प्रकार से बैठाया जा सकता है, जबकि कोई भी दो महिलायें एक साथ न बैठे [AIEEE 2003; RPET 2003]

(a) $6!\times 5!$ (b) 30
(c) $5!\times 4!$ (d) $7!\times 5!$

संचय की परिभाषा, प्रतिबन्धित संचय, समूहों में विभाजन, व्यतिक्रम

1. यदि n सम हो और ${}^nC_r$ का मान महत्तम हो, तो $r=$

(a) $\frac{n}{2}$ (b) $\frac{n+1}{2}$
(c) $\frac{n-1}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. एक व्यक्ति के 7 मित्र हैं। वह कितनी विधियों से उनमें से एक या अधिक को चाय पर बुला सकता है

(a) 128 (b) 256
(c) 127 (d) 130

3. एक महाविद्यालय में कुल 12 वालीबॉल खिलाड़ी हैं, जिनमें से 9 खिलाड़ियों की एक टीम बनाना है। यदि कप्तान हमेशा एक ही रहता हो, तो कितने प्रकार से टीम बनायी जा सकती है

(a) 36 (b) 108
(c) 99 (d) 165

4. 15 लड़कों तथा 8 लड़कियों के एक समूह से एक लड़का तथा एक लड़की कितने प्रकार से चुनी जा सकती हैं

(a) 15×8 (b) $15+8$
(c) ${}^{23}P_2$ (d) ${}^{23}C_2$

5. यदि ${}^{15}C_{3r}={}^{15}C_{r+3}$, तो r का मान होगा [IIT 1967; RPET 1991; MP PET 1998; Karnataka CET 1996]

(a) 3 (b) 4
(c) 5 (d) 8

6. ${}^{47}C_4+\sum_{r=1}^{5}{}^{52-r}C_3=$ [IIT 1980; RPET 2002; UPSEAT 2000]

(a) ${}^{47}C_6$ (b) ${}^{52}C_5$

(c) ${}^{52}C_4$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. ${}^nC_r \div {}^nC_{r-1} =$ [MP PET 1984]

(a) $\frac{n-r}{r}$ (b) $\frac{n+r-1}{r}$

(c) $\frac{n-r+1}{r}$ (d) $\frac{n-r-1}{r}$

8. यदि ${}^{2n}C_3 : {}^nC_2 = 44 : 3$ हो, तो r के किस मान के लिये ${}^nC_r$ का मान 15 होगा [MP PET 1981]

(a) $r=3$ (b) $r=4$

(c) $r=6$ (d) $r=5$

9. यदि $2 \times {}^nC_5 = 9 \times {}^{n-2}C_5$ हो, तो n का मान होगा

(a) 7 (b) 10

(c) 9 (d) 5

10. यदि ${}^{n^2-n}C_2 = {}^{n^2-n}C_{10}$, तो $n =$

(a) 12 (b) केवल 4

(c) केवल -3 (d) 4 या -3

11. यदि ${}^nC_{r-1} = 36, {}^nC_r = 84$ तथा ${}^nC_{r+1} = 126$, तो r का मान होगा [IIT 1979; Pb. CET 1993, 2003; DCE 1999, 2000]

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) इनमें से कोई नहीं

12. ${}^nC_r + 2{}^nC_{r-1} + {}^nC_{r-2} =$

(a) ${}^{n+1}C_r$ (b) ${}^{n+1}C_{r+1}$

(c) ${}^{n+2}C_r$ (d) ${}^{n+2}C_{r+1}$

13. 8 व्यक्तियों के सम्मेलन में, यदि प्रत्येक व्यक्ति एक दूसरे से एक ही बार हाथ मिलाता है तब हस्त मिलनों की कुल संख्या होगी

[MP PET 1984]

(a) 64 (b) 56

(c) 49 (d) 28

14. ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} =$

[MP PET 1984; Kerala (Engg.) 2002]

(a) ${}^{n+1}C_r$ (b) ${}^nC_{r+1}$

(c) ${}^{n+1}C_{r+1}$ (d) ${}^{n-1}C_{r-1}$

15. यदि ${}^8C_r = {}^8C_{r+2}$ हो, तब ${}^rC_2$ का मान होगा

[MP PET 1984; RPET 1987]

(a) 8

(b) 3

(c) 5

(d) 2

16. यदि ${}^{20}C_{n+2} = {}^nC_{16}$ हो, तब n का मान होगा [MP PET 1984]

(a) 7 (b) 10

(c) 13 (d) कोई मान नहीं

17. ${}^{15}C_3 + {}^{15}C_{13}$ का मान होगा [MP PET 1983]

(a) ${}^{16}C_3$ (b) ${}^{30}C_{16}$

(c) ${}^{15}C_{10}$ (d) ${}^{15}C_{15}$

18. किसी कमरे में उपस्थित प्रत्येक व्यक्ति एक दूसरे से हाथ मिलाता है। यदि कुल हाथ मिलाये जाने की संख्या 66 हो, तो कमरे में उपस्थित कुल व्यक्तियों की संख्या है

[MNR 1991; Kurukshetra CEE 1998; Kerala (Engg.) 2001]

(a) 11 (b) 12

(c) 13 (d) 14

19. ${}^{10}C_{x-1} > 2 \,.\, {}^{10}C_x$ का हल समुच्चय है

(a) {1, 2, 3} (b) {4, 5, 6}

(c) {8, 9, 10} (d) {9, 10, 11}

20. $\sum_{r=0}^{m} {}^{n+r}C_n =$ [Pb. CET 2003]

(a) ${}^{n+m+1}C_{n+1}$ (b) ${}^{n+m+2}C_n$

(c) ${}^{n+m+3}C_{n-1}$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. एक फुटबॉल चैम्पियनशिप में 153 मैच खेले गये। प्रत्येक टीम ने प्रत्येक टीम के साथ एक मैच खेला। चैम्पियनशिप में सम्मिलित टीमों की संख्या है [WB JEE 1992; Kurukshetra CEE 1998]

(a) 17 (b) 18

(c) 9 (d) 13

22. किसी परीक्षा में तीन वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं तथा प्रत्येक प्रश्न में 4 विकल्प हैं। उन तरीकों की संख्या जिसमें कोई विद्यार्थी सभी प्रश्नों का उत्तर सही न दे सके, है [Pb. CET 1990; UPSEAT 2001]

(a) 11 (b) 12

(c) 27 (d) 63

23. यदि $\alpha = {}^mC_2$, तब ${}^{\alpha}C_2$ बराबर है

(a) ${}^{m+1}C_4$ (b) ${}^{m-1}C_4$

(c) $3 \,.\, {}^{m+2}C_4$ (d) $3 \,.\, {}^{m+1}C_4$

24. दीपावली त्यौहार के अवसर पर एक कक्षा के सभी विद्यार्थी एक दूसरे को बधाई पत्र भेजते हैं। यदि 20 विद्यार्थी कक्षा में हैं, तब विद्यार्थियों द्वारा कुल कितने बधाई पत्रों का आदान प्रदान किया गया

(a) ${}^{20}C_2$ (b) $2 \,.\, {}^{20}C_2$

(c) $2 \,.\, {}^{20}P_2$ (d) इनमें से कोई नहीं

25. एक शहर में न तो दो व्यक्ति एकसमान दाँतों का समूह रखते हैं और न ही कोई व्यक्ति ऐसा है जिसके दाँत न हों। साथ ही किसी व्यक्ति के 32 से ज्यादा दाँत नहीं हैं। यदि हम दाँतों के आकार तथा आकृति की उपेक्षा कर दें तथा दाँतों की केवल स्थिति पर ध्यान दें, तब शहर की अधिकतम जनसंख्या है

(a) 2^{32} (b) $(32)^2 - 1$

(c) $2^{32} - 1$ (d) 2^{32-1}

26. यदि ${}^{2n}C_2 : {}^nC_2 = 9 : 2$ और ${}^nC_r = 10$, तो $r =$

(a) 1 (b) 2

(c) 4 (d) 5

27. यदि ${}^{10}C_r = {}^{10}C_{r+2}$, तो ${}^5C_r$ का मान होगा [RPET 1996]

(a) 120 (b) 10

(c) 360 (d) 5

28. यदि ${}^nC_r = 84, {}^nC_{r-1} = 36$ तथा ${}^nC_{r+1} = 126$, तो n का मान होगा [RPET 1997; MP PET 2001]

(a) 8 (b) 9

(c) 10 (d) 5

29. यदि ${}^nC_3 + {}^nC_4 > {}^{n+1}C_3$, तब [RPET 1999]

(a) $n > 6$ (b) $n > 7$

(c) $n < 6$ (d) इनमें से कोई नहीं

30. यदि ${}^{15}C_{r+3} = {}^{15}C_{2r-6}$ हो, तो r का मान होगा [Pb. CET 1999]

(a) 2 (b) 4

(c) 6 (d) -9

31. यदि ${}^{n+1}C_3 = 2\,{}^nC_2$, तो $n =$ [MP PET 2000; Pb. CET 2002]

(a) 3 (b) 4

(c) 5 (d) 6

32. $\binom{n}{n-r} + \binom{n}{r+1}$ का मान होगा, यदि $0 \le r \le (n-1)$

[AMU 2000]

(a) $\binom{n}{r-1}$ (b) $\binom{n}{r}$

(c) $\begin{pmatrix} n \\ r+1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} n+1 \\ r+1 \end{pmatrix}$

33. प्राकृत संख्या n का न्यूनतम मान जो कि $C(n,5)+C(n,6) > C(n+1,5)$ को संतुष्ट करता है, होगा [EAMCET 2002]

(a) 11 (b) 10
(c) 12 (d) 13

34. किसी पार्टी में 15 व्यक्ति हैं तथा प्रत्येक व्यक्ति एक दूसरे से हाथ मिलाता है, तब हस्त मिलनों की कुल संख्या होगी [RPET 2002]

(a) ${}^{15}P_2$ (b) ${}^{15}C_2$
(c) $15!$ (d) $2(15!)$

35. यदि n और r दो धनात्मक पूर्णांक इस प्रकार हैं कि $n \ge r$, तब ${}^nC_{r-1} + {}^nC_r =$ [Kerala (Engg.) 2002]

(a) ${}^nC_{n-r}$ (b) ${}^nC_r$
(c) ${}^{n-1}C_r$ (d) ${}^{n+1}C_r$

36. यदि ${}^{43}C_{r-6} = {}^{43}C_{3r+1}$, तब r का मान होगा [Kerala (Engg.) 2002]

(a) 12 (b) 8
(c) 6 (d) 10

37. संख्या 12233 के अंकों से 6 अंकों की कितनी संख्याऐं बनायी जा सकती हैं [Karnataka CET 2004]

(a) 30 (b) 60
(c) 90 (d) 120

38. किसी चुनाव में 8 उम्मीदवारों में से 5 व्यक्तियों को चुना जाना है। यदि कोई मतदाता अधिक से अधिक उतने ही मत दे सकता है जितने व्यक्तियों को चुना जाना है, तो एक मतदाता कितने प्रकार से मतदान कर सकता है

(a) 216 (b) 114
(c) 218 (d) इनमें से कोई नहीं

39. किसी चुनाव में उम्मीदवारों की संख्या चुने जाने वाले सदस्यों से 1 अधिक है। यदि कोई मतदाता 254 प्रकार से वोट दे सकता है, तो उम्मीदवारों की संख्या होगी

(a) 7 (b) 10
(c) 8 (d) 6

40. 21 अंग्रेजी की पुस्तकें तथा 19 हिन्दी की पुस्तकें एक पंक्ति में कितने प्रकार से रखी जा सकती हैं ताकि हिन्दी की कोई भी दो पुस्तकें साथ-साथ न हों

(a) 1540 (b) 1450
(c) 1504 (d) 1405

41. ${}^nC_r + {}^{n-1}C_r + \ldots\ldots + {}^rC_r =$ [AMU 2002]

(a) ${}^{n+1}C_r$ (b) ${}^{n+1}C_{r+1}$
(c) ${}^{n+2}C_r$ (d) 2^n

42. 5 व्यंजन और 4 स्वरों में से 3 व्यंजन और 2 स्वरों को लेकर कितने भिन्न शब्द बनाये जा सकते हैं

(a) ${}^5C_3 \times {}^4C_2$ (b) $\dfrac{{}^5C_3 \times {}^4C_2}{5}$
(c) ${}^5C_3 \times {}^4C_3$ (d) $({}^5C_3 \times {}^4C_2)(5!)$

43. 25 खिलाड़ियों में से 11 खिलाड़ियों की एक टीम कितने प्रकार से बनायी जा सकती है, यदि उनमें से 6 को हमेशा लेना हो तथा 5 को कभी भी न लेना हो

(a) 2020 (b) 2002
(c) 2008 (d) 8002

44. नगर निगम के 12 सदस्यों में से एक या अधिक सदस्यों की एक समिति कितने प्रकार से बनायी जा सकती है

(a) 4095 (b) 5095
(c) 4905 (d) 4090

45. 10 सफेद, 9 काली तथा 7 लाल गेंदों में से एक या अधिक गेंद कितने प्रकार से चुनी जा सकती है

(a) 881 (b) 891
(c) 879 (d) 892

46. n वस्तुओं में से r वस्तुओं को लेकर बनाये गये क्रमचयों की संख्या, जब p वस्तुयें हमेशा सम्मिलित की जाती हैं, होगी

(a) ${}^nC_r\, p!$ (b) ${}^{n-p}C_r\, r!$
(c) ${}^{n-p}C_{r-p}\, r!$ (d) इनमें से कोई नहीं

47. 52 पत्तों की दो गड्डियाँ फेंटी जाती हैं। एक व्यक्ति को 26 पत्ते बांटने के कुल प्रकार कितने होंगे, यदि उसके पास एक ही सूट (suit) तथा एक ही मान (denomination) के दो पत्ते न आवें

(a) ${}^{52}C_{26} \,.\, 2^{26}$ (b) ${}^{104}C_{26}$
(c) $2 \,.\, {}^{52}C_{26}$ (d) इनमें से कोई नहीं

48. एक भ्रमण करती हुई क्रिकेट टीम में 16 खिलाड़ी हैं, जिसमें 5 गेंदबाज तथा 2 विकेट कीपर हैं। इनमें से 11 खिलाड़ियों की ऐसी कितनी टीमें चुनी जा सकती हैं जिसमें तीन गेंदबाज तथा एक विकेट कीपर हो [MP PET 1984]

(a) 650 (b) 720
(c) 750 (d) 800

49. 6 पुस्तकों में से एक या अधिक पुस्तकों को कितने प्रकार से चुना जा सकता है [MP PET 1984]

(a) 64 (b) 63
(c) 62 (d) 65

50. 15 विभिन्न किताबों को 5 बराबर समूहों में कितने प्रकार से बाँटा जा सकता है [MP PET 1982]

(a) $\dfrac{15!}{5!(3!)^5}$ (b) $\dfrac{15!}{(3!)^5}$
(c) ${}^{15}C_5$ (d) ${}^{15}P_5$

51. 52 पत्तों को 4 खिलाड़ियों में बराबर-बराबर बाँटने के कुल कितने प्रकार हैं [IIT 1979]

(a) $\dfrac{52!}{(13!)^4}$ (b) $\dfrac{52!}{(13!)^2\, 4!}$
(c) $\dfrac{52!}{(12!)^4\,(4!)}$ (d) इनमें से कोई नहीं

52. 6 व्यंजन व 5 स्वरों से 4 व्यंजन एवं 3 स्वरों के कुल कितने शब्द बनाये जा सकते हैं [RPET 1985]

(a) 75000 (b) 756000
(c) 75600 (d) इनमें से कोई नहीं

53. 13 क्रिकेट खिलाड़ियों से, जिनमें 4 गेंदबाज हैं, 11 खिलाड़ियों की टीम कुल कितने प्रकार से बनायी जा सकती है यदि टीम में कम से कम 2 गेंदबाज अवश्य शमिल हों [RPET 1988]

(a) 55 (b) 72
(c) 78 (d) इनमें से कोई नहीं

54. छः '+' व चार '–' चिन्हों को एक सरल रेखा में कुल कितने प्रकार से रखा जा सकता है यदि दो '–' कभी भी साथ न आयें [IIT 1988]

(a) 15 (b) 18
(c) 35 (d) 42

55. 5 विभिन्न हरी, 4 विभिन्न नीली एवं 3 विभिन्न लाल रंग की गेंदों से कुल कितने समूह बनाये जा सकते हैं यदि कम से कम 1 हरी एवं 1 नीली गेंद अवश्य शामिल की जाए [IIT 1974]

(a) 3700 (b) 3720
(c) 4340 (d) इनमें से कोई नहीं

56. चार अधिकारियों एवं 8 जवानों में से 6 व्यक्ति कुल कितने प्रकार से चुने जा सकते हैं यदि कम से कम एक अधिकारी को अवश्य शामिल किया जाए [Roorkee 1985; MP PET 2001]

(a) 224 (b) 672
(c) 896 (d) इनमें से कोई नहीं

57. 12 रिक्त स्थानों को भरने के लिए 25 उम्मीदवार हैं, जिनमें से 5 अनुसूचित जाति के हैं। यदि 3 रिक्त स्थान अनुसूचित जाति के उम्मीदवारों के लिये आरक्षित हों जबकि शेष में खुली प्रतियोगिता है, तो चुनाव के कुल तरीके हैं [RPET 1981]

(a) ${}^5C_3 \times {}^{22}C_9$ (b) ${}^{22}C_9 - {}^5C_3$
(c) ${}^{22}C_3 + {}^5C_3$ (d) इनमें से कोई नहीं

58. एक चुनाव में 5 उम्मीदवार हैं एवं तीन रिक्त स्थान हैं। एक मतदाता अधिकतम तीन उम्मीदवारों को मत दे सकता है, तो मतदाता कुल कितने प्रकार से मत दे सकता है [MP PET 1987]

(a) 125 (b) 60
(c) 10 (d) 25

59. एक कमरे में 9 कुर्सियाँ हैं जिन पर 6 आदमियों को बैठाया जाना है, जिनमें से एक मेहमान है जिसके लिए विशेष कुर्सी निश्चित है, तो वे कुल कितने प्रकार से बैठ सकते हैं [MP PET 1987]

(a) 6720 (b) 60480
(c) 30 (d) 346

60. 6 लड़कों तथा 4 लड़कियों में से 7 का एक समूह बनाना है। यदि समूह में लड़के बहुसंख्यक रहें, तो यह कितने तरीके से बनाया जा सकता है [MP PET 1994]

(a) 120 (b) 90
(c) 100 (d) 80

61. 10 व्यक्ति दो नावों पर कितनी प्रकार से जा सकते हैं ताकि दोनों नावों पर 5 व्यक्ति रहें, जबकि यह माना गया है कि दो विशेष व्यक्ति एक ही नाव में नहीं जायेंगे
[Pb. CET 1999]
(a) $\frac{1}{2}(^{10}C_5)$ (b) $2(^8C_4)$
(c) $\frac{1}{2}(^8C_5)$ (d) इनमें से कोई नहीं

62. 1 से लेकर 30 तक की संख्याओं में से तीन संख्यायें कितने प्रकार से चुनी जा सकती हैं जबकि तीनों संख्यायें सम न हों
(a) 4060 (b) 3605
(c) 455 (d) इनमें से कोई नहीं

63. उन शब्दों जो अक्षरों a, b, c, d, e, f में से 3 को एक साथ लेकर इस प्रकार बनाये जाते हैं कि प्रत्येक शब्द कम से कम एक स्वर रखता हो, की संख्या है
(a) 72 (b) 48
(c) 96 (d) इनमें से कोई नहीं

64. शब्द 'CORGOO' से चार अक्षरों के चयन करने के कुल प्रकारों की संख्या है
(a) 15 (b) 11
(c) 7 (d) इनमें से कोई नहीं

65. उन छः अंकों की प्राकृत संख्याओं की कुल संख्या जो अंकों 1, 2, 3, 4 से बन सकती हैं, यदि सभी संख्याओं में प्रत्येक अंक कम से कम एक बार आये
(a) 1560 (b) 840
(c) 1080 (d) 480

66. संख्याओं 1, 2, 3, 4, ..., 200 द्वारा सभी सम्भव दो गुणनखण्ड बनते हैं। सभी प्राप्त खण्डों में से 5 के गुणज खण्डों की संख्या है
(a) 5040 (b) 7180
(c) 8150 (d) इनमें से कोई नहीं

67. 20 एक रूपए के सिक्कों, 10 पचास पैसे के सिक्कों तथा 7 बीस पैसे के सिक्कों में से 6 सिक्कों के चयन की प्रक्रिया कितने प्रकार से की जा सकती है
(a) 28 (b) 56
(c) $^{37}C_6$ (d) इनमें से कोई नहीं

68. यदि 35 सेबों को 3 लड़कों के बीच इस प्रकार वितरित किया जाता है कि प्रत्येक लड़का कितने भी सेब ले सकता है, तब इस प्रकार के वितरण के कुल प्रकारों की संख्या है
(a) 1332 (b) 666
(c) 333 (d) इनमें से कोई नहीं

69. एक पिता 8 बच्चों में से 3 बच्चों को एक बार में एक साथ लेकर पशु उद्यान इस प्रकार जाता है कि तीन समान बच्चे एक साथ एक से अधिक बार नहीं जा सकते, तब वह उद्यान कितनी बार जाएगा
(a) 336 (b) 112
(c) 56 (d) इनमें से कोई नहीं

70. 10 लाल तथा 8 सफेद गेंदों वाले थैले में से 5 लाल तथा 4 सफेद गेंदें कितने प्रकार से निकाली जा सकती हैं
[EAMCET 1991; Pb. CET 2000]
(a) $^8C_5 \times {}^{10}C_4$
(b) $^{10}C_5 \times {}^8C_4$
(c) $^{18}C_9$
(d) इनमें से कोई नहीं

71. $^{14}C_4 + \sum_{j=1}^{4} {}^{18-j}C_3$ का मान है [EAMCET 1991]
(a) $^{18}C_3$ (b) $^{18}C_4$
(c) $^{14}C_7$ (d) इनमें से कोई नहीं

72. शब्द 'MATHEMATICS' के चार अक्षरों को लेकर बनाये गये अक्षरों की संख्या होगी
[Kurukshetra CEE 1996; Pb. CET 1995]
(a) 136 (b) 192
(c) 1680 (d) 2454

73. अंग्रेजी वर्णमाला के दिये गये 10 अक्षरों में से 5 अक्षरों को लेकर कितने शब्द बनाये जा सकते हैं जबकि कम से कम एक अक्षर की पुनरावृत्ति हो
[UPSEAT 1999]
(a) 99748 (b) 98748
(c) 96747 (d) 97147

74. 8 पुरुषों तथा 4 महिलाओं को लेकर 6 सदस्यों की एक समिति कितने प्रकार से बनाई जा सकती है, जबकि कम से कम 3 महिलायें सदैव सम्मिलित रहें
[Kerala (Engg.) 2002]
(a) 252 (b) 672
(c) 444 (d) 420

75. एक व्यक्ति $(2n+1)$ सिक्कों में से कम से कम एक तथा अधिकतम n सिक्के चुन सकता है यदि वह सिक्कों को कुल 255 प्रकार से चुन सकता है, तो n का मान होगा
[AMU 2002]
(a) 4 (b) 8
(c) 16 (d) 32

76. एक व्यक्ति के 10 मित्र हैं, तो वह कितने प्रकार से एक अथवा अधिक मित्रों को पार्टी में बुला सकता है [AMU 2002]
(a) $10\,!$ (b) 2^{10}
(c) $10\,!-1$ (d) $2^{10}-1$

77. एक विद्यार्थी को किसी परीक्षा में 13 में से 10 प्रश्नों का उत्तर इस प्रकार देना है कि वह प्रथम पांच प्रश्नों में से कम से कम 4 प्रश्न का चुनाव कर सकता है, तो वह कुल कितने प्रकार से प्रश्नों का उत्तर दे सकता है [AIEEE 2003]
(a) 140 (b) 196
(c) 280 (d) 346

78. यदि n वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेकर बनने वाले संचयों को ^nC_r द्वारा प्रदर्शित किया जाये, तो व्यंजक $^nC_{r+1} + {}^nC_{r-1} + 2 \times {}^nC_r$ का मान होगा [AIEEE 2003]
(a) $^{n+2}C_r$ (b) $^{n+2}C_{r+1}$
(c) $^{n+1}C_r$ (d) $^{n+1}C_{r+1}$

79. $(2n+1)$ पुस्तकों के समुच्चय से एक विद्यार्थी अधिकतम n पुस्तकों का चयन कर सकता है। यदि उसके द्वारा एक पुस्तक कुल 63 भिन्न भिन्न प्रकारों से चयन की जाती है, तब n का मान होगा
[IIT 1987; RPET 1999; Pb. CET 2003; Orissa JEE 2005]
(a) 2 (b) 3
(c) 4 (d) इनमें से कोई नहीं

80. $^{n-1}C_r = (k^2-3).{}^nC_{r+1}$, यदि $k \in$ [IIT Screening 2004]
(a) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ (b) $(-\infty, -2)$
(c) $(2, \infty)$ (d) $(\sqrt{3}, 2)$

81. $\sum_{r=0}^{n-1} \frac{^nC_r}{^nC_r + {}^nC_{r+1}}$ का मान है [MP PET 2004]
(a) $n+1$ (b) $\frac{n}{2}$
(c) $n+2$ (d) इनमें से कोई नहीं

82. 5 सेवों, 10 आमों तथा 15 संतरों में से कोई 15 फल दो व्यक्तियों में वितरित किये जाते हैं, तब वितरण के कुल प्रकारों की संख्या है
[DCE 2005]
(a) 66 (b) 36
(c) 60 (d) इनमें से कोई नहीं

83. $^{50}C_4 + \sum_{r=1}^{6} {}^{56-r}C_3$ का मान है [AIEEE 2005]
(a) $^{56}C_3$ (b) $^{56}C_4$
(c) $^{55}C_4$ (d) $^{55}C_3$

84. यदि $^nC_{12} = {}^nC_6$, तब $^nC_2 =$ [Karnataka CET 2005]
(a) 72 (b) 153
(c) 306 (d) 2556

85. एक विद्यार्थी को 13 प्रश्नों में से 10 प्रश्नों के उत्तर देने हैं जबकि उसे प्रथम 5 प्रश्नों में से 4 प्रश्न हल करना आवश्यक है, विद्यार्थी को उपलब्ध प्रश्न चुनने के तरीकों की संख्या है
[Kerala (Engg.) 2005]
(a) 140 (b) 196
(c) 280 (d) 346
(e) 265

ज्यामितीय प्रश्न

1. एक रेखा पर स्थित 5 बिन्दुओं और समान्तर रेखा पर स्थित 3 बिन्दुओं से कितने त्रिभुज बनाये जा सकते हैं

(a) ${}^8C_3$ (b) ${}^8C_3 - {}^5C_3$

(c) ${}^8C_3 - {}^5C_3 - 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. एक अष्टभुज में विकर्णों की संख्या होती है [MP PET 1984; Pb. CET 1989, 2000]

(a) 28 (b) 20

(c) 10 (d) 16

3. यदि बहुभुज के विकर्णो की संख्या 44 हो, तो भुजाओं की संख्या होगी [MP PET 1998; Pb. CET 1996, 2002]

(a) 7 (b) 11

(c) 8 d) इनमें से कोई नहीं

4. एक वृत्त के चार बिन्दुओं को मिलाकर कितने त्रिभुज बनाये जा सकते हैं

(a) 4 (b) 6

(c) 8 (d) 10

5. 9 असमरेख बिन्दुओं से कितने त्रिभुज बनाये जा सकते हैं

(a) 84 (b) 72

(c) 144 (d) 126

6. m भुजाओं वाले बहुभुज के विकर्णों की संख्या होती है [BIT 1992; MP PET 1999; UPSEAT 1999; DCE 1999; Pb. CET 2001]

(a) $\frac{1}{2!}m(m-5)$ (b) $\frac{1}{2!}m(m-1)$

(c) $\frac{1}{2!}m(m-3)$ (d) $\frac{1}{2!}m(m-2)$

7. किसी वृत्त पर 8 बिन्दुओं को जोड़ने वाली सरल रेखाओं की संख्या है [MP PET 1984; Kerala (Engg.) 2002]

(a) 8 (b) 16

(c) 24 (d) 28

8. 12 बिन्दुओं के एक समुच्चय से, जिनमें 7 समरेखीय हैं, कुल कितने त्रिभुज बनाये जा सकते हैं [Roorkee 1989; BIT 1989; MP PET 1995; Pb. CET 1997, 98; Roorkee 2000; DCE 2002; AMU 2005]

(a) 185 (b) 175

(c) 115 (d) 105

9. किसी समतल में 10 बिन्दु हैं जिसमें 4 समरेखीय हैं, तो इन बिन्दुओं को मिलाकर कुल कितने त्रिभुज बनाये जा सकते हैं [RPET 1990]

(a) 60 (b) 116

(c) 120 (d) इनमें से कोई नहीं

10. किसी समतल में 16 बिन्दु हैं जिनमें से 6 समरेखीय हैं, तो इन बिन्दुओं को मिलाकर कुल कितनी रेखायें खींची जा सकती हैं [RPET 1986; MP PET 1987]

(a) 106 (b) 105

(c) 60 (d) 55

11. सरल रेखायें I_1, I_2, I_3 समान्तर हैं तथा एक ही तल में स्थित हैं। I_1 रेखा पर m बिन्दु, I_2 पर n बिन्दु तथा I_3 पर k बिन्दु लिये गये हैं। इन बिन्दुओं को जोड़ने से बने त्रिभुजों की अधिकतम संख्या होगी [IIT Screening 1993; UPSEAT 2001]

(a) ${}^{m+n+k}C_3$

(b) ${}^{m+n+k}C_3 - {}^mC_3 - {}^nC_3 - {}^kC_3$

(c) ${}^mC_3 + {}^nC_3 + {}^kC_3$

(d) इनमें से कोई नहीं

12. चार समान्तर रेखाओं तथा तीन अन्य समान्तर रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को जोड़कर बनने वाले समान्तर चतुर्भुजों की संख्या है [WB JEE 1993; RPET 2001]

(a) 6 (b) 18

(c) 12 (d) 9

13. किसी समतल में स्थित 6 बिन्दुओं को जोड़ने से प्राप्त सरल रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दुओं की संख्या, जबकि इन रेखाओं में कोई भी रेखायें समान्तर तथा सम्पाती नहीं हैं तथा कोई भी तीन रेखायें संगामी नहीं हैं (इन छः बिन्दुओं को अपवाद स्वरूप छोड़कर), है

(a) 105 (b) 45

(c) 51 (d) इनमें से कोई नहीं

14. एक सरल रेखा AB पर m बिन्दु तथा एक अन्य रेखा AC पर n बिन्दु हैं, जिनमें बिन्दु A सम्मिलित नहीं है। अब इन बिन्दुओं को जोड़कर त्रिभुज बनाये गये हैं (i) जब A सम्मिलित नहीं है (ii) जब A सम्मिलित है, तो इन दोनों स्थितियों में बने त्रिभुजों की संख्याओं का अनुपात है

(a) $\frac{m+n-2}{m+n}$ (b) $\frac{m+n-2}{2}$

(c) $\frac{m+n-2}{m+n+2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

15. एक समतल में n सरल रेखाएँ हैं जिसमें से न तो कोई दो एक दूसरे के समान्तर हैं और न ही कोई तीन एक ही बिन्दु से गुजरती हैं। तो उनके प्रतिच्छेद बिन्दुओं को जोड़ने पर प्राप्त नई रेखाओं की संख्या है

(a) $\frac{n(n-1)(n-2)}{8}$ (b) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$

(c) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$ (d) इनमें से कोई नहीं

16. एक समान्तर चतुर्भुज स्वयं की भुजाओं के समान्तर m रेखाओं के दो समुच्चयों द्वारा काटा जाता है, तब इस प्रकार बनने वाले समान्तर चतुर्भुजों की संख्या है [Karnataka CET 1992]

(a) $({}^mC_2)^2$ (b) $\left({}^{m+1}C_2\right)^2$

(c) $\left({}^{m+2}C_2\right)^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

17. एक समतल में 37 सरल रेखाएँ हैं, जिनमें से 13, बिन्दु A से तथा 11, बिन्दु B से गुजरती है। इसके अतिरिक्त न तो तीन रेखाएँ एक ही बिन्दु से गुजरती हैं, न ही रेखाएँ दोनों बिन्दुओं A तथा B से गुजरती हैं और न ही दो समान्तर हैं, तब रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दुओं की संख्या है

(a) 535 (b) 601

(c) 728 (d) इनमें से कोई नहीं

18. 8 सरल रेखाओं तथा 4 वृत्तों के प्रतिच्छेद बिन्दुओं की अधिकतम सम्भव संख्या है

(a) 32 (b) 64

(c) 76 (d) 104

19. एक समतल के 18 बिन्दुओं में से 5 समरेखीय बिन्दुओं को छोड़कर कोई भी तीन बिन्दु समान सरल रेखा में नहीं हैं

इन बिन्दुओं को मिलाने से बनने वाली (i) सरल रेखाओं (ii) त्रिभुजों की संख्या है [WB JEE 1992]

(i) (a) 140 (b) 142 (c) 144 (d) 146

(ii) (a) 816 (b) 806 (c) 800 (d) 750

20. एक समतल में 16 बिन्दु हैं जिनमें से 8 एक सरल रेखा में स्थित हैं तथा अन्य कोई भी 3 समरेखीय नहीं हैं। इन बिन्दुओं को जोड़कर बनने वाले त्रिभुजों की संख्या होगी [Kurukshetra CEE 1996, 1998]

(a) 504 (b) 552

(c) 560 (d) 1120

21. माना n भुजाओं वाले बहुभुज के शीर्षों को लेकर बनने वाले त्रिभुजों की संख्या T_n है। यदि $T_{n+1} - T_n = 21,$ तो n का मान होगा [IIT Screening 2001]

(a) 5 (b) 7

(c) 6 (d) 4

22. किसी समतल में दिये गये 10 बिन्दुओं में से 6 एक सरल रेखा में हैं, तो इन बिन्दुओं को लेकर बनने वाले त्रिभुजों की संख्या होगी [RPET 2000]

(a) 100 (b) 150

(c) 120 (d) इनमें से कोई नहीं

23. किसी समतल में स्थित n बिन्दुओं में से p समरेखीय हैं, इन बिन्दुओं को लेकर कितनी रेखायें खींची जा सकती हैं [Karnataka CET 2002]

(a) ${}^{(n-p)}C_2$ (b) ${}^nC_2 - {}^pC_2$

(c) ${}^nC_2 - {}^pC_2 + 1$ (d) ${}^nC_2 - {}^pC_2 - 1$

24. 2, 3, 4, 5, 6, 7 इकाई लम्बाई के 6 रेखाखण्डों से बनने वाले त्रिभुजों की संख्या होगी [AMU 2002]

(a) ${}^6C_3 - 7$ (b) ${}^6C_3 - 6$

(c) ${}^6C_3 - 5$ (d) ${}^6C_3 - 4$

25. यदि किसी बहुभुज में 35 विकर्ण हैं, तो उसकी भुजाओं की संख्या होगी [AMU 2002]

(a) 8 (b) 9

(c) 10 (d) 11

26. 20 बिन्दुओं, जिनमें से 4 समरेखीय हैं, को लेकर कितनी सरल रेखायें खींची जा सकती हैं [Kerala (Engg.) 2002]

(a) 183 (b) 186

(c) 197 (d) 185

बहुपद प्रमेय, विभाजकों की संख्या, विविध प्रश्न

1. यदि ${}^nC_r = {}^nC_{r-1}$ और ${}^nP_r = {}^nP_{r+1}$, तो n का मान है

(a) 3 (b) 4

(c) 2 (d) 5

2. ${}^nP_r \div {}^nC_r =$ [MP PET 1984]

(a) $n!$ (b) $(n-r)!$

(c) $\frac{1}{r!}$ (d) $r!$

3. 4 अंकों वाली ऐसी कितनी संख्यायें हैं, जो 5 से अविभाज्य हैं

(a) 7200 (b) 3600

(c) 14400 (d) 1800

4. यदि ${}^nP_r = 840, {}^nC_r = 35,$ तब n का मान है [EAMCET 1986]

(a) 1 (b) 3

(c) 5 (d) 7

5. यदि ${}^nP_3 + {}^nC_{n-2} = 14n$, तो $n =$

(a) 5 (b) 6

(c) 8 (d) 10

6. 16 रूपये चार व्यक्तियों में कितने प्रकार से बाँटे जा सकते हैं जबकि किसी भी व्यक्ति को 3 रूपये से कम प्राप्त न होते हों

(a) 70 (b) 35

(c) 64 (d) 192

7. एक समुच्चय में $(2n+1)$ अवयव हैं इस समुच्चय के ऐसे उपसमुच्चयों की संख्या, जिनमें अधिकतम n अवयव हों, होगी

(a) 2^n (b) 2^{n+1}

(c) 2^{n-1} (d) 2^{2n}

8. 9600 के विभाजकों की संख्या (1 व 9600 भी सम्मिलित हैं) होगी [IIT Screening 1993]

(a) 60

(b) 58

(c) 48

(d) 46

9. 24 अक्षरों, जिनमें कि आठ a तथा आठ b हैं एवं अन्य आठ भिन्न हैं, में से 8 अक्षरों को कितने विभिन्न प्रकार से चुन सकते हैं

(a) 2^7 (b) $8 \,.\, 2^8$

(c) $10 \,.\, 2^7$ (d) इनमें से कोई नहीं

10. यदि ${}^nP_4 = 30\ {}^nC_5$, तो $n =$ [MP PET 1995]

(a) 6 (b) 7

(c) 8 (d) 9

11. समीकरण $x+y+z=100$ के धनात्मक पूर्णांक हलों के क्रमित त्रिकों (Ordered triplets) की संख्या है

(a) 6005 (b) 4851

(c) 5081 (d) इनमें से कोई नहीं

12. यदि a, b, c, d, e अभाज्य पूर्णांक हैं, तब गुणनफल ab^2c^2de के सभी विभाजकों की संख्या होगी (1 को छोड़कर)

(a) 94 (b) 72

(c) 36 (d) 71

13. एक n-अंक संख्या वह धन संख्या है जिसमें ठीक n अंक होते हैं। नौ सौ विभिन्न n-अंक संख्यायें केवल तीन अंकों 2, 5 और 7 का प्रयोग करते हुए बनानी हैं। n का न्यूनतम मान जिसके लिये यह सम्भव होगा [IIT 1998]

(a) 6 (b) 7

(c) 8 (d) 9

14. $n = 38808$ के भाजकों की संख्या (1 व n को छोड़कर) होगी [RPET 2000]

(a) 70 (b) 68

(c) 72 (d) 74

15. यदि ${}^nP_4 = 24.\,{}^nC_5$, तो n का मान होगा [Karnataka CET 2001]

(a) 10 (b) 15

(c) 9 (d) 5

16. यदि ${}^nP_r = 720.\,{}^nC_r$, तब r का मान होगा [Kerala (Engg.) 2001]

(a) 6 (b) 5

(c) 4 (d) 7

17. $\sum_{i=0}^{m}\binom{10}{i}\binom{20}{m-i}$, $\left(\text{जबकि} \binom{p}{q} = 0 \text{ यदि } p < q\right)$ का योग होगा [IIT Screening 2002]

(a) 5 (b) 15

(c) 10 (d) 20

18. 960 के सभी धनात्मक विभाजकों का योग है [Karnataka CET 2000]

(a) 3048 (b) 3087

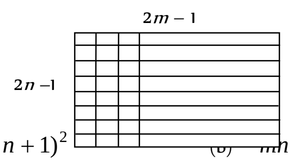
(c) 3047 (d) 2180

19. किसी बस में 3 पुरूषों और 2 महिलाओं के बैठने के तरीकों की संख्या, जबकि प्रत्येक ओर बैठने वाले पुरूषों और महिलाओं की संख्या 3 है, होगी [DCE 2005]

(a) 5! (b) ${}^6C_5 \times 5!$

(c) $6! \times {}^6P_5$ (d) $5! + {}^6C_5$

20. एक आयताकार पट्टी की विमा $(2m-1)\times(2n-1)$ है, (जहाँ $m > 0, n > 0$). इसे भुजाओं के लम्बवत् रेखायें खींचकर इकाई क्षेत्रफल के वर्गों में विभाजित किया जाता है। तब उन आयतों की संख्या, जिनकी भुजायें विषम इकाई लम्बाई की हैं, होगी [IIT Screening 2005]



(a) $(m+n+1)^2$ (b) $mn(m+1)(n+1)$

(c) 4^{m+n-2} (d) m^2n^2

21. यदि $P(n,r) = 1680$ और $C(n,r) = 70$, तब $69n + r! =$ [Kerala (Engg.)2005]

(a) 128 (b) 576

(c) 256 (d) 625

(e) 1152

Critical Thinking

Objective Questions

1. $2^n\{1.3.5.....(2n-3)(2n-1)\}$ का मान है

(a) $\frac{(2n)!}{n!}$ (b) $\frac{(2n)!}{2^n}$

(c) $\frac{n!}{(2n)!}$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. एक प्रश्न-पत्र को दो भागों A तथा B में विभाजित किया गया है तथा प्रत्येक भाग में 5 प्रश्न हैं। प्रत्येक भाग से कम से कम दो प्रश्न चुनते हुये कोई विद्यार्थी कितने प्रकार से 6 प्रश्नों के उत्तर दे सकता है [Roorkee 1980]

(a) 80 (b) 100

(c) 200 (d) इनमें से कोई नहीं

3. अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 से 10 तथा 1000 के बीच आने वाली कितनी संख्यायें बनाई जा सकती हैं, जबकि अंकों की पुनरावृत्ति हो

(a) 1024 (b) 810

(c) 2346 (d) इनमें से कोई नहीं

4. शब्द 'TRIANGLE' के अक्षरों को कितने प्रकार से लिखा जा सकता है ताकि दो स्वर साथ-साथ न आयें

(a) 1200 (b) 2400

(c) 14400 (d) इनमें से कोई नहीं

5. 4 विभिन्न रंग की गेंदे एवं 4 बॉक्स गेंदों जैसे रंग के हैं तो गेंदों को बॉक्स में रखने के (एक गेंद बॉक्स में) कुल कितने तरीके होंगे यदि कोई गेंद अपने रंग के बॉक्स में न जाए [IIT 1992]

(a) 8 (b) 7

(c) 9 (d) इनमें से कोई नहीं

6. यदि ${}^{56}P_{r+6} : {}^{54}P_{r+3} = 30800 : 1$, तो $r =$

[Roorkee 1983; Kurukshetra CEE 1998]

(a) 31 (b) 41

(c) 51 (d) इनमें से कोई नहीं

7. एक वर्णमाला के 10 अक्षर दिये गये हैं। इन दिये हुये अक्षरों से 5 अक्षरों के शब्द बनाये जाते हैं। उन शब्दों की संख्या जिनमें कम से कम एक अक्षर की पुनरावृत्ति हो, होगी

[IIT 1980; MNR 1998, 99; DCE 2001]

(a) 69760 (b) 30240

(c) 99748 (b) इनमें से कोई नहीं

8. ताश के 52 पत्तों को चार व्यक्तियों में कितने प्रकार से बॉटा जा सकता है ताकि तीन व्यक्तियों में प्रत्येक के पास 17 पत्ते हों और चौथे के पास केवल एक पत्ता हो [IIT 1979]

(a) $\frac{52!}{(17!)^3}$ (b) $52!$

(c) $\frac{52!}{17!}$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. शब्द 'ARRANGE' के अक्षरों के भिन्न भिन्न विन्यासों (क्रमचयों) की संख्या, जिनमें दोनों R एक साथ न आते हों, है [MP PET 1993]

(a) 360 (b) 900

(c) 1260 (d) 1620

10. एक बॉक्स में दो सफेद, तीन काली तथा चार लाल गेदें हैं। इस बॉक्स से तीन गेंदें कुल कितने विभिन्न प्रकारों से निकाली जा सकती हैं, जिनमें कम से कम एक काली गेंद अवश्य हो

[IIT 1986; DCE 1994]

(a) 64 (b) 45

(c) 46 (d) इनमें से कोई नहीं

11. m पुरूष तथा n महिलाओं को एक सरल रेखा में इस प्रकार बैठाना है, कि दो महिलाएँ एक साथ न बैठें। यदि $m > n$ हो, तब दर्शाइये कि इन्हें बैठाने के कुल प्रकार हैं [IIT 1983]

(a) $\frac{m!(m+1)!}{(m-n+1)!}$ (b) $\frac{m!(m-1)!}{(m-n+1)!}$

(c) $\frac{(m-1)!(m+1)!}{(m-n+1)!}$ (d) इनमें से कोई नहीं

12. अंकों 0, 1, 2, 3, 4 तथा 5 के प्रयोग से 3 से विभाजित होने वाली एक पांच अंकों की संख्या, जिसमें अंकों की पुनरावृत्ति न हो, की रचना करनी है। इसके लिये विभिन्न प्रकारों की संख्या है

[IIT 1989; AIEEE 2002]

(a) 216 (b) 240

(c) 600 (d) 3125

13. किसी परीक्षा में n प्रश्न पूछे जाते हैं। इस परीक्षा में 2^{n-i} विद्यार्थियों ने कम से कम i प्रश्नों के त्रुटिपूर्ण उत्तर दिये हैं, जहाँ $i = 1, 2, ...n$ है। यदि त्रुटिपूर्ण उत्तरों की कुल संख्या 2047 हो, तब n का मान होगा

(a) 10 (b) 11

(c) 12 (d) 13

14. 1 से 1000 तक के पूर्णांकों को लिखने में, अंक 3 कितनी बार लिखा जायेगा

(a) 269 (b) 300

(c) 271 (d) 302

15. 10 व्यक्ति, जिनमें A, B तथा C सम्मिलित हैं, एक कार्यक्रम में भाषण देने वाले हैं। यदि A, B के पूर्व भाषण देना चाहे तथा B,C के पूर्व भाषण देना चाहे तब कुल कितने प्रकार से यह कार्यक्रम हो सकेगा

(a) $\frac{10!}{6}$ (b) $3!7!$

(c) ${}^{10}P_3 . 7!$ (d) इनमें से कोई नहीं

16. एक परीक्षक 8 प्रश्नों हेतु 30 अंकों का कितने प्रकार से बंटन कर सकता है, यदि किसी प्रश्न को 2 अंकों से कम अंक न बंटित करे

(a) ${}^{21}C_7$ (b) ${}^{30}C_{16}$

(c) ${}^{21}C_{16}$ (d) इनमें से कोई नहीं

17. 'INDEPENDENCE' शब्द के अक्षरों से कितने शब्द बनाये जा सकते हैं, जिसमें स्वर हमेशा साथ रहें [Roorkee 1989]

(a) 16800 (b) 16630

(c) 1663200 (d) इनमें से कोई नहीं

18. 5 विभिन्न रंगों की गेंदों को तीन विभिन्न आकार के सन्दूकों में रखना है। प्रत्येक सन्दूक पाँचों गेंदों को रख सकता है। अतः हम इन गेंदों को सन्दूकों में कुल कितने प्रकार से रख सकते हैं, यदि कोई भी सन्दूक खाली न रहे [IIT 1981]

(a) 50 (b) 100

(c) 150 (d) 200

19. 6 आदमी एवं 4 औरतों में से 5 सदस्यों की एक समिति कितने प्रकार से बनाई जा सकती है, यदि समिति में कम से कम 1 औरत अवश्य हो [RPET 1987; IIT 1968; Pb. CET 2003]

(a) 186 (b) 246

(c) 252 (d) इनमें से कोई नहीं

20. 'BHARAT' शब्द के अक्षरों से कुल कितने शब्द बनाये जा सकते हैं, जिसमें 'B' व 'H' कभी भी एक साथ नहीं आयें [IIT 1977]

(a) 360 (b) 300

(c) 240 (d) 120

21. 10 व्यक्ति $A, B, ..., J$ हैं। किसी पंक्ति में 5 को खड़ा किया जा सकता है। हम इन्हें एक पंक्ति में कितने प्रकार से व्यवस्थित कर सकते हैं, यदि A को अवश्य रखना है तथा G व H सम्मिलित नहीं हैं

(a) ${}^{8}P_5$ (b) ${}^{7}P_5$

(c) ${}^{7}C_3(4!)$ (d) ${}^{7}C_3(5!)$

22. 1 से लेकर 1000 तक की संख्याओं को लिखने पर अंक 5 कितनी बार लिखा जाएगा

(a) 271 (b) 272

(c) 300 (d) इनमें से कोई नहीं

23. $100\,!$ में 3 का घातांक है

(a) 33 (b) 44

(c) 48 (d) 52

24. शब्द 'MISSISSIPPI' के अक्षरों द्वारा एक या अधिक अक्षरों के कितने अलग अलग समूह बनाये जा सकते हैं

(a) 150 (b) 148

(c) 149 (d) इनमें से कोई नहीं

25. एक व्यक्ति एक परीक्षा के लिए जाता है, जिसमें अधिकतम अंक m वाले चार प्रश्न-पत्र होते हैं। उस व्यक्ति द्वारा $2m$ अंक प्राप्त करने के कुल प्रकारों की संख्या है

(a) ${}^{2m+3}C_3$ (b) $\frac{1}{3}(m+1)(2m^2+4m+1)$

(c) $\frac{1}{3}(m+1)(2m^2+4m+3)$ (d) इनमें से कोई नहीं

26. दो महिलाएँ एक शतरंज प्रतियोगिता में भाग लेती हैं। प्रत्येक प्रतियोगी अन्य प्रतियोगियों के साथ दो मैच खेलता है। पुरूषों के आपस में खेले गए मैचों की संख्या पुरूषों व महिलाओं के बीच खेले गए मैचों की सख्या से 66 अधिक है, तब प्रतियोगियों की संख्या है

(a) 6 (b) 11

(c) 13 (d) इनमें से कोई नहीं

27. एक पिता 8 बच्चों में से 3 बच्चों को एक बार में एक साथ लेकर पशु उद्यान इस प्रकार जाता है कि तीन समान बच्चे एक साथ एक से अधिक बार नहीं जा सकते, तब प्रत्येक बच्चा कितनी बार उद्यान जाएगा

(a) 56 (b) 21

(c) 112 (d) इनमें से कोई नहीं

28. एक पुस्कालय एक पुस्तक की a प्रतियाँ, दूसरी दो पुस्तकों में से प्रत्येक की b प्रतियाँ, अन्य तीन पुस्तकों में से प्रत्येक की c प्रतियाँ तथा d पुस्तकों की एक-एक प्रतियाँ रखता है। इन पुस्तकों के वितरण के कुल प्रकारों की संख्या है

(a) $\frac{(a+b+c+d)!}{a!\,b!\,c!}$ (b) $\frac{(a+2b+3c+d)!}{a!\,(b!)^2(c!)^3}$

(c) $\frac{(a+2b+3c+d)!}{a!\,b!\,c!}$ (d) इनमें से कोई नहीं

29. एक कार में 2 व्यक्ति आगे की सीट पर तथा एक व्यक्ति पिछली सीट पर बैठ सकता है। यदि 6 व्यक्तियों में से 2 कार चला सकते हैं, तब कार के भरने के कुल प्रकारों की संख्या है

(a) 10 (b) 20

(c) 30 (d) इनमें से कोई नहीं

30. हमारे पास $(n+1)$ सफेद गेंदें तथा $(n+1)$ काली गेंदें हैं। प्रत्येक समुच्चय में गेंदें 1 से $n+1$ तक अंकित हैं। यदि इन गेंदों को एक पंक्ति में इस प्रकार व्यवस्थित किया जाए कि दो निकटवर्ती गेंदो के रंग भिन्न-भिन्न हों, तब इन व्यवस्थाओं की संख्या है

[EAMCET 1991]

(a) $(2n+2)!$ (b) $(2n+2)!\times 2$

(c) $(n+1)!\times 2$ (d) $2\{(n+1)!\}^2$

31. 12 व्यक्तियों को एक गोल मेज के चारों ओर बिठाया जाना है। यदि उनमें से दो विशिष्ट व्यक्ति एक के बाद एक न बैठें हों, तब कुल व्यवस्थाओं की संख्या है

[EAMCET 1994]

(a) $9(10\,!)$ (b) $2(10\,!)$

(c) $45(8\,!)$ (d) $10\,!$

32. 5000 तथा 10,000 के बीच अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 का प्रयोग करके कितनी संख्याएँ बनायी जा सकती हैं जबकि प्रत्येक अंक, प्रत्येक संख्या में एक से अधिक बार सम्मिलित न किया गया हो

[Karnataka CET 1993]

(a) $5\times{}^8P_3$ (b) $5\times{}^8C_3$

(c) $5!\times{}^8P_3$ (d) $5!\times{}^8C_3$

33. यदि x, y तथा r धनात्मक पूर्णांक हैं, तब

$${}^xC_r+{}^xC_{r-1}\,{}^yC_1+{}^xC_{r-2}\,{}^yC_2+.......+{}^yC_r=$$

[Karnataka CET 1993; RPET 2001]

(a) $\frac{x!\,y!}{r!}$ (b) $\frac{(x+y)!}{r!}$

(c) ${}^{x+y}C_r$ (d) ${}^{xy}C_r$

34. शब्द 'PROPORTION' के 4 अक्षरों की व्यवस्था कितने प्रकार से की जा सकती है

(a) 700 (b) 750

(c) 758 (d) 800

35. शब्द 'MORADABAD'के चार अक्षरों को एक साथ लेकर बनने वाले विभिन्न शब्दों की संख्या है

(a) 500 (b) 600

(c) 620 (d) 626

36. एक कक्षा के 10 विद्यार्थियों में 3 लड़कियाँ हैं। एक पंक्ति में बिठाने के तरीकों की कुल संख्या जबकि तीनों लड़कियों में से कोई भी दो एक साथ न बैठें, होगी

(a) $7!\times{}^6P_3$

(b) $7!\times{}^8P_3$

(c) $7!\times 3!$

(d) $\frac{10!}{3!\,7!}$

37. $2\le r\le n$ के लिए, $\binom{n}{r}+2\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r-2}=$

[IIT Screening 2000; Pb. CET 2000]

(a) $\binom{n+1}{r-1}$ (b) $2\binom{n+1}{r+1}$

(c) $2\binom{n+2}{r}$ (d) $\binom{n+2}{r}$

38. $abc=30$ के धनात्मक पूर्णांक हलों की संख्या होगी

[UPSEAT 2001]

(a) 30 (b) 27

(c) 8 (d) इनमें से कोई नहीं

39. संख्या 223355888 के अंकों को लेकर 9 अंको की कितनी संख्यायें बनाई जा सकती हैं जबकि विषम अंक सम स्थानों पर आयें

[IIT Screening 2000; Karnataka CET 2002]

(a) 16 (b) 36

(c) 60 (d) 180

40. CRICKET शब्द के सात अक्षरों को लेकर एक शब्दकोश बनाया जाता है। यदि शब्दों को मूल शब्दकोश में अंग्रेज़ी वर्णमाला के क्रम के अनुसार व्यवस्थित किया जाता है, तब 'CRICKET' शब्द के पहले आने वाले शब्दों की संख्या होगी

[Orissa JEE 2003]

(a) 530

(b) 480

(c) 531

(d) 481

Answers

क्रमचय की परिभाषा, पुनरावृत्ति रहित तथा पुनरावृत्ति के साथ क्रमचयों की संख्या, प्रतिबंधित क्रमचय

1	b	2	c	3	a	4	d	5	b
6	a	7	b	8	a	9	c	10	c
11	d	12	a	13	d	14	a	15	a
16	c	17	c	18	a	19	d	20	a
21	c	22	a	23	c	24	c	25	a
26	a	27	d	28	b	29	b	30	a
31	c	32	c	33	c	34	a	35	b
36	a	37	b	38	b	39	c	40	a
41	a	42	b	43	b	44	b	45	d
46	c	47	b	48	a	49	b	50	b
51	b	52	c	53	b	54	c	55	d
56	c	57	c	58	a	59	b	60	c
61	b	62	a	63	d	64	c	65	d
66	a	67	a	68	c	69	c	70	a
71	c	72	c	73	c	74	c	75	c

वृत्तीय या चक्रीय क्रमचय

1	c	2	a	3	b	4	d	5	a
6	d	7	b	8	a	9	b	10	a
11	b	12	d	13	a	14	a		

संचय की परिभाषा, प्रतिबन्धित संचय, समूहों में विभाजन, व्यतिक्रम

1	a	2	c	3	d	4	a	5	a
6	c	7	c	8	b	9	b	10	d
11	c	12	c	13	d	14	a	15	b
16	d	17	a	18	b	19	c	20	a
21	b	22	d	23	d	24	b	25	c
26	b	27	d	28	b	29	a	30	c
31	c	32	d	33	a	34	b	35	d
36	a	37	c	38	c	39	c	40	a
41	b	42	d	43	b	44	a	45	c
46	c	47	a	48	b	49	b	50	a
51	a	52	b	53	c	54	c	55	b
56	c	57	a	58	d	59	a	60	c
61	b	62	b	63	c	64	c	65	a
66	b	67	a	68	b	69	c	70	b
71	b	72	d	73	a	74	a	75	a
76	d	77	b	78	b	79	b	80	d
81	b	82	a	83	b	84	b	85	a

ज्यामितीय प्रश्न

1	c	2	b	3	b	4	a	5	a
6	c	7	d	8	a	9	b	10	a
11	b	12	b	13	c	14	a	15	c
16	c	17	a	18	d	19	c,b	20	a
21	b	22	a	23	c	24	a	25	c
26	d								

बहुपद प्रमेय, विभाजकों की संख्या, विविध प्रश्न

1	a	2	d	3	a	4	d	5	a
6	b	7	d	8	c	9	c	10	c
11	b	12	d	13	b	14	a	15	c
16	a	17	b	18	a	19	b	20	d
21	b								

Critical Thinking Questions

1	a	2	c	3	b	4	c	5	c
6	b	7	a	8	a	9	b	10	a
11	a	12	a	13	b	14	b	15	a
16	a	17	a	18	c	19	b	20	c
21	d	22	c	23	c	24	c	25	c
26	c	27	b	28	b	29	b	30	d
31	a	32	a	33	c	34	c	35	d
36	b	37	d	38	b	39	c	40	a

Answers and Solutions

क्रमचय की परिभाषा, पुनरावृत्ति रहित तथा पुनरावृत्ति के साथ क्रमचयों की संख्या, प्रतिबंधित क्रमचय

1. (b) यदि अच्छा व खराब पेपर हमेशा साथ हों, तो कुल प्रकार $5! \times 2$ हैं। अतः अभीष्ट प्रकार $6! - 5! \times 2 = 480$ होंगे।

2. (c) 5 से विभाजित होने के लिए, 5 को इकाई के स्थान पर होना चाहिए एवं 3000 व 4000 के बीच में संख्या होने के लिए 3 को हजार के स्थान पर होना चाहिए।

अतः अब 4 अंकों से 2 स्थान भरने के कुल प्रकार $= {}^4P_2$ हैं।

3. (a) यह स्पष्ट है।

4. (d) 1 अंक की संख्यायें $= {}^4P_1$

2 अंकों की संख्यायें $= {}^4P_2$

3 अंकों की संख्यायें $= {}^4P_3$

4 अंकों की संख्यायें $= {}^4P_4$

अतः अभीष्ट प्रकार $= {}^4P_1 + {}^4P_2 + {}^4P_3 + {}^4P_4$.

5. (b) प्रत्येक व्यक्ति तीन-तीन प्रकार से मत दे सकता है।

अतः अभीष्ट प्रकार $= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^7$ हैं।

6. (a) चूँकि व्यक्ति 4 प्रकार से जाकर 3 प्रकार से लौट सकता है। अतः अभीष्ट कुल प्रकार $4 \times 3 = 12$ हैं।

7. (b) $\dfrac{n!}{(n-5)!} \times \dfrac{(n-3)!}{n!} = 20$

$\Rightarrow (n-3)(n-4) = 20 \Rightarrow n = -1, 8$

परन्तु -1 लिया नहीं जा सकता है।

8. (a) अभीष्ट शब्दों की संख्या $= {}^9P_3 = 504$.

9. (c) $\dfrac{n!}{(n-4)!} \times \dfrac{(n-5)!}{n!} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow n - 4 = 2 \Rightarrow n = 6$.

10. (c) अभीष्ट प्रकार n^{mn} हैं चूँकि प्रत्येक पत्र n प्रकार से भेजा जा सकता है।

11. (d) अभीष्ट प्रकार $2^{10} = 1024$ है, क्योंकि प्रत्येक प्रश्न का दो प्रकार से उत्तर दिया जा सकता है।

12. (a) संख्या सम होगी यदि अन्तिम अंक 2, 4, 6 या 8 अर्थात् अन्तिम अंक को 4 तरीकों से एवं शेष दो अंकों को ${}^8P_2$ प्रकार से भरा जा सकता है।

अतः अभीष्ट संख्यायें $= {}^8P_2 \times 4 = 224$ हैं।

13. (d) $\dfrac{{}^nP_5}{{}^{n-1}P_4} = 9 \Rightarrow \dfrac{n!}{(n-5)!} \times \dfrac{(n-5)!}{(n-1)!} = 9 \Rightarrow n = 9$.

14. (a) ${}^{n-1}P_r + r.{}^{n-1}P_{r-1}$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!} + r\frac{(n-1)!}{(n-r)!}, \quad \left(\because {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}\right)$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!}\left\{1 + r.\frac{1}{n-r}\right\}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!}\left(\frac{n}{n-r}\right) = \frac{n!}{(n-r)!} = {}^nP_r.$$

वैकल्पिक : हम जानते हैं, कि ${}^{n-1}C_r + {}^{n-1}C_{r-1} = {}^nC_r$

$$\Rightarrow \frac{{}^{n-1}P_r}{r!} + \frac{{}^{n-1}P_{r-1}}{(r-1)!} = \frac{{}^nP_r}{r!} \Rightarrow {}^{n-1}P_r + r.{}^{n-1}P_{r-1} = {}^nP_r.$$

15. (a) कुल 10 अंक दिये हैं, अर्थात् 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

9 अंकों की कुल संख्याएँ = (9 अंकों की कुल संख्याएँ जिनमें प्रथम स्थान पर 0 वाली संख्यायें भी सम्मिलित हैं) – (9 अंकों की वह संख्याएँ जिनमें प्रथम स्थान पर 0 स्थित है)

$$= {}^{10}P_9 - {}^9P_8 = \frac{10!}{1!} - \frac{9!}{1!} = 10! - 9! = (10-1)9! = 9.9!.$$

16. (c) कम से कम एक पाँसे पर 2 का अंक होने की स्थिति में सम्भावित परिणामों की संख्या = (कुल परिणामों की संख्या) – (कुल परिणाम उस स्थिति के जिसमें अंक 2 किसी पाँसे पर न हो) $= 6^4 - 5^4 = 1296 - 625 = 671$.

17. (c) अभीष्ट प्रकार $= 5^4$, {चूँकि प्रत्येक पार्सल को 5 प्रकार से पंजीकृत किया जा सकता है।}.

18. (a) अभीष्ट प्रकार $= 4^5 = 1024$

{चूँकि प्रत्येक इनाम को 4 प्रकार से दिया जा सकता है।}.

19. (d) अभीष्ट प्रकार $= {}^5P_3 = 60$.

20. (a) यह स्पष्ट है।

21. (c) अभीष्ट योग $= 3!(3+4+5+6) = 6 \times 18 = 108$

[यदि हम 3 को इकाई के स्थान पर रखें तो शेष तीन अंकों को $3!$ प्रकार से भरा जा सकता है, इसी प्रकार 4, 5 व 6 के लिए कर सकते हैं।]

22. (a) अभीष्ट प्रकार $= \dfrac{6!}{3!3!} = \dfrac{720}{6 \times 6} = 20$

[$\because$ शीर्षों की संख्या $= 3$, पुच्छों की संख्या = 3 एवं सिक्के एक जैसे हैं]

23. (c) अभीष्ट प्रकार $= 5! - 4! - 3! = 120 - 24 - 6 = 90$.

[संख्यायें 56000 से छोटी होंगी, यदि 4 प्रथम स्थान पर हो या 5 व 4 प्रथम दो स्थानों पर हों]

24. (c) A, 2 प्राप्त करता है तथा B, 8 प्राप्त करता है; $\dfrac{10!}{2!8!} = 45$

A, 8 प्राप्त करता है तथा B, 2 प्राप्त करता है; $\dfrac{10!}{8!2!} = 45$

$\therefore 45 + 45 = 90$.

25. (a) इकाई स्थान के अंकों का योगफल $6(2+4+6+8) = 120$ है। इसी प्रकार दहाई स्थान के अंकों का योगफल 120 तथा सैकड़ा स्थान के अंकों का योगफल 120 इत्यादि है। सभी 24 संख्याओं का योगफल

$= 120(1 + 10 + 10^2 + 10^3) = 120 \times 1111 = 133320$.

26. (a) व्यक्ति 5 प्रकार से जा सकता है एवं 5 प्रकार से ही वापस आ सकता है, अतः कुल प्रकार $5 \times 5 = 25$.

27. (d) 5 परीक्षा–पत्रों के कुल क्रमचय $= 5\,! = 120$

जब भौतिक व रसायन साथ-साथ हों $= 4\,! \times 2\,! = 48$

$\therefore$ अभीष्ट क्रमचय $= 120 - 48 = 72$.

28. (b) प्रथम पारितोषिक देने के कुल प्रकार =5

अब द्वितीय पारितोषिक देने के कुल प्रकार =4

तथा तृतीय पारितोषिक देने के कुल प्रकार =3

(चूँकि केवल एक प्रतिस्पर्धी केवल एक ही पारितोषिक ले सकता है)

अतः कुल प्रकार $= 5 \times 4 \times 3 = 60$ प्रकार।

29. (b) सैकड़ा के स्थान को भरने के प्रकार = 6

दहाई के स्थान को भरने के प्रकार = 6

इकाई के स्थान को भरने के प्रकार = 3

($\because$ विषम संख्यायें निर्मित करना है)

अभीष्ट प्रकार = 6 × 6 × 3 = 108.

30. (a) दी गई संख्यायें 2, 0, 4, 3, 8 हैं

अतः कुल संख्यायें

= (कुल क्रमचय) – (0 से शुरू होने वाली संख्यायें)

= 5! – 4! = 120 – 24 = 96.

31. (c) $\because\ ^{12}P_3 = 1320$; $\therefore\ r = 3$.

32. (c) यह स्पष्ट है।

33. (c) कुल क्रमचय $= \frac{6\,!}{2\,!} = 360$

'O के एक साथ आने के प्रकारों की संख्या = 5! = 120

अतः अभीष्ट प्रकारों की संख्या = 360 – 120 = 240.

34. (a) $\bullet A \bullet I \bullet U \bullet$

बिन्दुवत् स्थानों को $MXMM$ से भरना है

अतः, अभीष्ट प्रकार $= 3\,! \times \frac{4\,!}{3\,!} = 4\,!$

{$\because$ 3 स्वरों को भी 3 ! प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है}.

35. (b) n किताबों के कुल क्रमचय $= n\,!$

यदि दो विशेष किताबें एक साथ हैं, तो क्रमचय $= (n-1)\,! \times 2$

अतः अभीष्ट प्रकार $= n\,! - (n-1)\,! \times 2$

$= n(n-1)\,! - (n-1)\,! \times 2 = (n-1)\,!\,(n-2)$.

36. (a) 5 को सैकड़ा के स्थान पर होना चाहिए। अतः अब 5 में से 2 स्थान भरने हैं, अर्थात् $^5P_2 = 5 \times 4 = 20$.

37. (b) 1000 से बड़ी व 4000 से छोटी या बराबर संख्यायें 4 अंकों की होंगी एवं संख्याओं के पहले अंक 1 (केवल 1000 को छोड़कर) या 2 या 3 होंगे एवं '0' बाद के सभी स्थानों पर।

पहला स्थान सुनिश्चित करने के बाद, द्वितीय स्थान को शेष 5 अंकों से अर्थात् 5 प्रकार से भरा जा सकता है। चूँकि पुनरावृत्ति हो सकती है, अतः तृतीय एवं चतुर्थ स्थान भी पाँच-पाँच प्रकार से भरा जा सकता है। अतः कुल प्रकार जिसमें 1 पहले स्थान पर है $= 5 \times 5 \times 5 = 125$ परन्तु इनमें संख्या 1000 भी सम्मिलित है। अतः कुल प्रकार 124 है। इसी प्रकार प्रथम स्थान पर 2 या 3 सुनिश्चित करने पर 125 प्रकार होंगे तथा एक संख्या 4000 होगी। अतः अभीष्ट प्रकार $= 124 + 125 + 125 + 1 = 375$ हैं।

38. (b) 4 विषम अंक 1, 3, 3, 1 को $\frac{4\,!}{2\,!\,2\,!} = 6$ प्रकार से विषम स्थानों पर भरा जा सकता है एवं तीन सम अंक 2, 4, 2 को तीन सम स्थानों पर $\frac{3\,!}{2\,!} = 3$ प्रकार से भरा जा सकता है। अतः अभीष्ट प्रकार $= 6 \times 3 = 18$.

39. (c) चूँकि 5 लड़के 5 ! प्रकार से बैठ सकते हैं। इस स्थिति में 6 रिक्त स्थान होंगे अतः 3 लड़कियों को $^6P_3$ प्रकार से बैठाया जा सकता है। अतः अभीष्ट क्रमचय $^6P_3 \times 5\,!$.

40. (a) 1 अंक की संख्यायें $= {}^6P_1$

2 अंक की संख्यायें $= {}^6P_2$

3 अंक की संख्यायें $= {}^6P_3$

अतः अभीष्ट संख्यायें $= 6 + 30 + 120 = 156$.

41. (a) चूँकि C व Y का स्थान सुनिश्चित है। अतः शेष 6 अक्षरों को 6 ! प्रकार से लिखा जा सकता है।

42. (b) चूँकि L एक स्थान निश्चित है। अतः अब 4 अक्षरों को $4\,! = 24$ प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है।

43. (b) अभीष्ट प्रकार $= \frac{5\,!}{2\,!} = 60$.

44. (b) 4 पत्र-पेटियों में 3 पत्रों को $4^3 = 64$ प्रकार से डाला जा सकता है। परन्तु इनमें वे 4 तरीके भी सम्मिलित हैं जिनमें प्रत्येक पत्र को एक ही पत्र-पेटी में डाला जाए। अतः अभीष्ट प्रकार = 64 – 4 = 60 हैं।

45. (d) अंकों 0, 1, 2, ..., 9 के प्रयोग से 5 अंकों के टेलीफोन क्रमांकों की संख्या (चूँकि अंकों की पुनरावृत्ति हो सकती है) $= 10^5$ हैं।

5 अंकों के टेलीफोन क्रमांकों की संख्या, जिनमें किसी भी अंक की पुनरावृत्ति न हो $= {}^{10}P_5 = 30240$

अतः, टेलीफोन क्रमांकों की अभीष्ट संख्या

$= 10^5 - 30240 = 69760$.

46. (c) चूँकि $2M$, $2A$ व $2T$ हैं

$\therefore$ अभीष्ट प्रकार $= \frac{11\,!}{2\,!\,2\,!\,2\,!}$.

47. (b) अभीष्ट प्रकार $= \frac{8\,!}{2\,!\,2\,!\,2\,!} = 5040$.

48. (a) अभीष्ट प्रकार $= {}^6P_3 - {}^5P_2 = 120 - 20 = 100$

{चूँकि 99 व 1000 के बीच में संख्यायें 3 अंकों की हैं परन्तु वे संख्यायें अग्राहय हैं, जिनमें '0' सैकड़े के स्थान पर आया है।}

49. (b) सर्वप्रथम हमें वह 5 जानवरों, जो 4 छोटे पिंजड़ों में नहीं घुस सकते हैं, उन्हें 5 पिंजडो में बसाना है अतः इसके कुल तरीके $^6P_5$ हैं। अब 5 जानवरों को बसाने के बाद 5 पिंजड़े एवं 5 जानवर शेष बचते हैं जिसके कुल तरीके 5! हैं। अतः कुल तरीके $= {}^6P_5 \times 5\,! = 86400$ हैं।

50. (b) यह स्पष्ट है।

51. (b) 3 को हजार के स्थान पर रखते हैं एवं चूँकि संख्या 5 से विभाजित होनी चाहिये अतः 5 को इकाई के स्थान पर होना चाहिये। अतः अब दो रिक्त स्थानों को $^4P_2 = 12$ तरीकों से भरा जा सकता है।

52. (c) D से शुरू होने वाले शब्द = $6\,! = 720$

E से शुरू होने वाले शब्द = $6\,! = 720$

MD से शुरू होने वाले शब्द = $5\,! = 120$

ME से शुरू होने वाले शब्द = $5\,! = 120$

अब MO से शुरू होने वाला प्रथम शब्द ही MODESTY होगा।

अतः अभीष्ट रेंक $= 720 + 720 + 120 + 120 + 1 = 1681$.

53. (b) $a = {}^{x+2}P_{x+2} = (x+2)\,!,\ b = {}^{x}P_{11} = \dfrac{x\,!}{(x-11)\,!}$

और $c = {}^{x-11}P_{x-11} = (x-11)\,!$

अब $a = 182\ bc \Rightarrow (x+2)\,! = 182\ .\ \dfrac{x\,!}{(x-11)\,!}(x-11)\,!$

$\Rightarrow (x+2)! = 182\,x\,! \Rightarrow (x+2)(x+1) = 182 \ \Rightarrow\ x = 12$.

54. (c) सम संख्याओं को बनाने में दांयी स्थिति 0 या 2 से भरी जा सकती है। जब 0 भरता है तब बचे हुए स्थान $3\,!$ प्रकार से भरे जा सकते हैं तथा जब 2 भरते हैं तब बायां स्थान 2 प्रकार से भरा जा सकता है (0 प्रयुक्त नहीं हो सकती) तथा मध्य के दो स्थान $2\,!$ प्रकार (0 प्रयुक्त हो सकती है) से भरे जा सकते हैं। इसलिए बनने वाली सम संख्याओं की संख्या $= 3\,! + 2(2\,!) = 10$.

55. (d) बिना किसी प्रतिबन्ध के 10 व्यक्ति, $10\,!$ प्रकार से क्रमानुसार व्यवस्थित किये जा सकते हैं। अर्थात् वे सभी प्रकार जिसमें A_1, A_{10} के ऊपर तथा A_{10}, A_1 के ऊपर है $= 10\,!$. साथ ही A_1 के A_{10} से ऊपर होने के प्रकार A_{10} के A_1 से ऊपर होने के प्रकार के ठीक समान हैं।

अतः अभीष्ट प्रकारों की संख्या $= \dfrac{1}{2}(10\,!)$.

56. (c) पहले हम तीन व्यंजनों को $3\,!$ प्रकार से व्यवस्थित करते हैं तथा तब चार स्थानों पर (दो स्थान उनके बीच में तथा दो स्थान दो किनारों पर) 3 स्वर ${}^4P_3 \times \dfrac{1}{2\,!}$ प्रकार से व्यवस्थित किए जा सकते हैं। अतः अभीष्ट व्यवस्थाओं की संख्या

$= 3\,! \times {}^4P_3 \times \dfrac{1}{2\,!} = 72$.

57. (c) 5 लड़कों को एक पंक्ति में खड़े करने के प्रकार $= 5\,!$

5 लड़कियों को एक पंक्ति में खड़े करने के प्रकार,

जबकि दो लड़कियाँ साथ-साथ न खड़ी हों $= {}^6P_5$

अतः अभीष्ट प्रकारों की संख्या $= 5\,! \times {}^6P_5 = 5\,! \times 6\,!$.

58. (a) कुल क्रमचयों की संख्या $= \dfrac{6\,!}{3\,!\,2\,!} = 60$.

59. (b) शब्द "MOBILE" में तीन सम स्थान व तीन विषम स्थान हैं तथा तीन स्वर व तीन व्यंजन हैं। हम 3 व्यंजनों को 3 विषम स्थान पर रखना चाहते हैं, अतः ये ${}^3P_3$ प्रकार होंगे। शेष तीन स्थानों पर बचे हुये तीन स्वर रखने के प्रकार ${}^3P_3$ होंगे।

अतः कुल प्रकार $= {}^3P_3 \times {}^3P_3 = 36$.

60. (c) दिये गये अंकों 1, 2, 3, 4, 5 से 24000 से बड़ी संख्यायें बनानी हैं।

अतः कुल संख्यायें = (कुल प्रकार) – (1 से शुरू होने वाली संख्यायें) – (21 से शुरू होने वाली संख्यायें) – (23 से शुरू होने वाली संख्यायें)

$= 5\,! - 4\,! - 3\,! - 3\,! = 120 - 24 - 6 - 6 = 84$.

61. (b) 5 से विभाजित संख्या के इकाई के स्थान पर '5' आयेगा, अतः

3 अंकों की संख्या			4 अंकों की संख्या			
H	T	U	Th	H	T	U
×	×	5	×	×	×	5
${}^3P_2$ प्रकार			${}^3P_3$ प्रकार			
$= \dfrac{3!}{1!} = 3 \times 2$			$= \dfrac{3!}{0!} = 3 \times 2$			

$\Rightarrow$ कुल प्रकार = 12.

62. (a) अभीष्ट प्रकार $= \dfrac{7\,!}{3\,!\,2\,!} = \dfrac{5040}{6 \times 2} = 420$

($\because$ 3 तीन बार तथा 2 दो बार है।).

63. (d) 1 को 4 में से एक स्थान पर निश्चित करने के बाद 3 स्थानों को भरने के प्रकार $= {}^7P_3$ किन्तु कुछ संख्यायें जिनका चतुर्थ अंक (हजारवां अंक) शून्य है, के कुल प्रकार $= {}^6P_2$

अतः अभीष्ट प्रकार $= {}^7P_3 - {}^6P_2 = 480$.

64. (c) इकाई के स्थान को भरने के प्रकार = 4,(0, 2, 4 अथवा 6 से)। शेष तीन स्थान बचे हुये 6 अंकों से भरने के प्रकार $= {}^6P_3 = 120$. अतः कुल प्रकार = 4 × 120 = 480. किन्तु इन प्रकारों में वे प्रकार भी शामिल हैं जिनमें हजारवें स्थान (चतुर्थ) पर शून्य आता है, अतः इसके प्रकार $= 3 \times {}^5P_2 = 3 \times 5 \times 4 = 60$

0	×	×	×
स्थिर	${}^5P_2$ प्रकार		3 प्रकार (केवल 2, 4 या 6)

$\therefore$ अभीष्ट प्रकार = 480 – 60 = 420.

65. (d) दी गई 6 संख्यायें 0, 1, 2, 3, 5, 7 हैं,

विषम अंक के लिए अंतिम स्थान पर 1, 3, 5, 7 होना चाहिए, अर्थात् 4 प्रकार। शेष बचे हुए तीन स्थानों में से प्रत्येक स्थान को 6 प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है, अतः तीन स्थानों को व्यवस्थित करने के प्रकार = 6 × 6 × 6 = 216

परन्तु 0 से शुरू होने वाली संख्यायें अग्राह्य हैं, अतः

= 216 – 36 = 180

अतः अभीष्ट प्रकार = 180 × 4 = 720.

66. (a) व्यवस्थित करने के प्रकार

= (कुल प्रकार) – (वह प्रकार जिनमें दोनों 'N' साथ-साथ आते हैं)

$= \dfrac{6!}{2! \times 3!} - \dfrac{5!}{3!} = 60 - 20 = 40$.

67. (a) 5 छात्रों को बैठाने के प्रकार $= 5\,!$

B × B × B × B × B

तीन छात्राओं को बैठाने के प्रकार (4 स्थानों में) $= {}^4P_3$

$\therefore$ अभीष्ट प्रकार $= 5!.{}^4P_3 = 2880$.

68. (c) संभावित प्रकार $= 5!.4!.3!.2!$.

69. (c) 7 स्थानों में से 4 विषम तथा 3 सम स्थान हैं। अतः तीन स्वर तीन स्थानों में $^3P_3$ प्रकार से व्यवस्थित कर सकते हैं तथा शेष 4 व्यंजन 4 विषम स्थानों में $^4P_4$ प्रकार से व्यवस्थित कर सकते हैं।

अतः बनने वाले कुल शब्दों की संख्या= $^3P_3 \times {}^4P_4$ = 144.

70. (a) 9 व्यक्तियों को तीन बराबर समूहों में विभाजित करने के प्रकार $= \dfrac{9!}{(3!)^3} = \dfrac{9\times8\times7\times6\times5\times4}{3\times2\times3\times2} = 1680$.

71. (c) बस में 5 सीटें रिक्त हैं। एक व्यक्ति 5 में से किसी एक सीट पर 5 तरीकों से बैठ सकता है। व्यक्ति के बैठनें के पश्चात् उसकी पत्नी किसी एक सीट पर 4 तरीकों से बैठ सकती है।

अतः उनके बैठने के अभीष्ट प्रकार = $5\times4 = 20$.

72. (c) A, C, H, I, N प्रत्येक अक्षर से प्रारम्भ होने वाले शब्दों की संख्या = 5!

$\therefore$ कुल शब्द = 5×5! =600

S से प्रारम्भ होने वाला प्रथम शब्द 'SACHIN' है।

$\therefore$ शब्दकोश में 'SACHIN' शब्द का क्रम 601 होगा।

73. (c) दी गई संख्याओं के समुच्चय {1, 2,....11} में 5 सम तथा 6 विषम संख्यायें हैं, अतः दिये गये गुणनफल में यह संभव नहीं है, कि विषम संख्याओं में से केवल सम संख्याओं को ही घटाया जाये। यहाँ कम से कम एक ऐसा गुणनखण्ड भी सम्मिलित है, जिसमें एक विषम संख्या में से दूसरी विषम संख्या को घटाया गया है। अतः कम से कम एक गुणनखण्ड सम है। अतः अभीष्ट गुणनफल सदैव सम होगा।

74. (c) सौ रुपये के एक नोट तथा अन्य पाँच नोटों को वितरित करने के अभीष्ट प्रकार = 3^6 .

75. (c) 999 तथा 10000 के मध्य चार अंकों की संख्यायें होंगी।

अंकों 0, 2, 3, 6, 7, 8 से निर्मित चार अंकों की संख्याओं की संख्या = $^6P_4 = 360$, किंतु इनमें वे संख्यायें भी सम्मिलित हैं, जो 0 से प्रारम्भ होती हैं, अतः इन संख्याओं को तीन अंकों की संख्यायें मानते हैं।

प्रारम्भिक अंक शून्य लेने पर, शेष तीन स्थानों को पाँच अंकों 2, 3, 6, 7, 8 से भरने के प्रकार = $^5P_3 = 60$

अतः अभीष्ट संख्यायें = 360-60 = 300.

वृत्तीय या चक्रीय क्रमचय

1. (c) अभीष्ट प्रकार = $9! \times 2$

{वृत्तीय क्रमचयों की आधारभूत संकल्पना से}

2. (a) अभीष्ट प्रकार = $\dfrac{1}{2}(5-1)! = \dfrac{4!}{2}$ हैं

{चूँकि अँगूठी की स्थिति में वामावर्त व दक्षिणावर्त एक जैसा होता है}

3. (b) लड़के $(5-1)! = 4!$ प्रकार से, और इसी तरह लड़कियाँ $5!$ प्रकार से चुनी जा सकती हैं।

अतः अभीष्ट प्रकार $4! \times 5!$ हैं।

4. (d) यह वृत्तीय क्रमचय के आधारभूत गुण से स्पष्ट है।

5. (a) चूँकि कुल सदस्य 15 हैं परन्तु वृत्तीय क्रमचय के कारण एक छोड़ना है। अब शेष 14 में से 3 विशिष्ट सदस्य एक साथ रहते हैं। अतः अभीष्ट क्रमचय $12! \times 2!$ हैं क्योंकि अध्यक्ष को उन दोनों के बीच में रहना है तथा दो विशिष्ट व्यक्ति 2! प्रकार से बैठ सकते हैं।

6. (d) 10 फूलों से एक हार $\dfrac{1}{2}(9!)$ प्रकारों से गूँथा जा सकता है।

{$\because$ n फूलों से एक हार $\dfrac{1}{2}(n-1)!$ प्रकार से गूंथा जा सकता है।}

7. (b) कुल 20 + 1 = 21 व्यक्ति हैं। दो विशेष व्यक्तियों तथा 1 मेजबान को इकाई मानकर कुल 21 – 3 + 1 = 19 इकाईयों को गोल मेज पर 18 ! प्रकार से विन्यासित किया जा सकता है। किन्तु दो विशेष व्यक्तियों को परस्पर 2! प्रकार से विन्यासित किया जा सकता है। इसलिये कुल 2! . 18! = $2.18!$ प्रकार हैं।

8. (a) विभिन्न रंगों की 5 मणिकाओं को वृत्त में एक हार बनाने हेतु $(5-1)! = 4!$ प्रकार से गूँथा जा सकता है।

किन्तु हार में वामावर्ती तथा दक्षिणावर्ती दिशाएँ एक ही मान्य होती हैं।

अतः कुल विन्यासों की संख्या $= \dfrac{1}{2}(4!) = 12$.

9. (b) यह आधारभूत गुण है।

10. (a) एक पुरुष का स्थान सुनिश्चित करने के बाद शेष 4 पुरूषों को गोल मेज के चारों ओर बैठाने के प्रकार = 4!

चूँकि दो महिलाओं को एक साथ नहीं बैठाना है, अतः पांच खाली स्थानों पर दो महिलाओं के बैठने के प्रकार = $^5P_2$

अतः कुल प्रकार = $4! \times {}^5P_2$

= 24 × 20 = 480.

11. (b) एक पुरुष का स्थान निश्चित करने पर 6 पुरूषों को बैठाने के प्रकार = 6!. अब कोई भी दो महिलायें एक साथ नहीं बैठ सकती अतः महिलाओं को 7 रिक्त स्थानों में दो क्रमागत पुरूषों के मध्य बैठाने के प्रकार =7 !

अतः, कुल प्रकार = 7! × 6!.

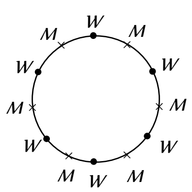
12. (d) अभीष्ट क्रमचयों की संख्या = $(n-1)!$.

13. (a) विभिन्न प्रकार के आठ मोतियों को वृत्तीय क्रम में व्यवस्थित करने के प्रकार = (8 – 1)! = 7!

चूँकि वामावर्ती तथा दक्षिणावर्ती क्रमचय समान हैं

अतः, कुल प्रकार = $\dfrac{7!}{2} = 2520$.

14. (a) वृत्ताकार मेज के चारों ओर 6 पुरूषों को बैठाने के प्रकार = (6 – 1)!



अब, महिलाओं को 6 ! तरीके से बैठाया जा सकता है

अतः, कुल प्रकार = 6 ! × 5 !.

संचय की परिभाषा, प्रतिबंधित संचय, समूहों में विभाजन, व्यतिक्रम

1. (a) यह स्पष्ट है।

2. (c) अभीष्ट प्रकार $= 2^7 - 1 = 127$
{चूँकि वह स्थिति जिसमें कोई मित्र नहीं बुलाया गया हो, अर्थात् ${}^7C_0$ निकाल दी गयी है}.

3. (d) अभीष्ट प्रकार ${}^{11}C_8 = 165$
{चूँकि कप्तान पहले ही चुन लिया गया है, अतः अब 11 खिलाड़ियों में से 8 चुनने हैं}

4. (a) अभीष्ट प्रकार$= {}^{15}C_1 \times {}^8C_1 = 15 \times 8$.

5. (a) ${}^{15}C_{3r} = {}^{15}C_{r+3} \Rightarrow {}^{15}C_{15-3r} = {}^{15}C_{r+3}$
$\Rightarrow 15 - 3r = r + 3 \Rightarrow r = 3$.

6. (c) ${}^{47}C_4 + \sum_{r=1}^{5} {}^{52-r}C_3 = {}^{51}C_3 + {}^{50}C_3 + {}^{49}C_3 + {}^{48}C_3 + {}^{47}C_3 + {}^{47}C_4$
$= {}^{51}C_3 + {}^{50}C_3 + {}^{49}C_3 + {}^{48}C_3 + {}^{48}C_4$
$= {}^{51}C_3 + {}^{50}C_3 + {}^{49}C_3 + {}^{49}C_4$
$= {}^{51}C_3 + {}^{50}C_3 + {}^{50}C_4 + {}^{51}C_3 + {}^{51}C_4 = {}^{52}C_4$.

7. (c) हल करने पर, $\frac{n-r+1}{r}$ प्राप्त होता है।

8. (b) $\frac{(2n)!}{(2n-3)!\,.\,3!} \times \frac{2! \times (n-2)!}{n!} = \frac{44}{3}$
$\Rightarrow \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)}{3n\,(n-1)} = \frac{44}{3}$
$\Rightarrow 4(2n-1) = 44 \Rightarrow 2n = 12 \Rightarrow n = 6$
अब ${}^6C_r = 15 \Rightarrow {}^6C_r = {}^6C_2$ या ${}^6C_4 \Rightarrow r = 2, 4$.

9. (b) निरीक्षण से, $n = 10$.

10. (d) ${}^{n^2-n}C_2 = {}^{n^2-n}C_{10} \Rightarrow {}^{n^2-n}C_{n^2-n-2} = {}^{n^2-n}C_{10}$
$\Rightarrow n^2 - n - 2 = 10$ या $n = 4, -3$.

11. (c) यहाँ $\frac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_r} = \frac{36}{84}$ व $\frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r+1}} = \frac{84}{126}$.
$\Rightarrow 3n - 10r = -3$ व $4n - 10r = 6$
हल करने पर, $n = 9$, $r = 3$.

12. (c) ${}^nC_r + 2\,{}^nC_{r-1} + {}^nC_{r-2} = {}^nC_r + {}^nC_{r-1} + {}^nC_{r-1} + {}^nC_{r-2}$
$= {}^{n+1}C_r + {}^{n+1}C_{r-1} = {}^{n+2}C_r$.

13. (d) जब प्रत्येक व्यक्ति दूसरे से मात्र एक बार हाथ मिलाता है, तब हस्त मिलनों (Shake hands) की कुल संख्या $= {}^8C_2 = 28$ है।

14. (a) यह आधारभूत गुणधर्म है।

15. (b) ${}^8C_r = {}^8C_{r+2} \Rightarrow 8 - r = r + 2 \Rightarrow r = 3$
अतः ${}^3C_2 = 3$.

16. (d) कोई मान संतुष्ट नहीं करता है।

17. (a) ${}^{15}C_3 + {}^{15}C_{13} = {}^{15}C_3 + {}^{15}C_2 = {}^{16}C_3$.

18. (b) ${}^nC_2 = 66 \Rightarrow n(n-1) = 132 \Rightarrow n = 12$.

19. (c) यह स्पष्ट है एवं मानों को रखकर परीक्षण किया जा सकता है। चूँकि अन्य तीन विकल्प संतुष्ट नहीं होते हैं।

20. (a) चूँकि ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ तथा ${}^nC_{r-1} + {}^nC_r = {}^{n+1}C_r$
$\therefore \sum_{r=0}^{m} {}^{n+r}C_n = \sum_{r=0}^{m} {}^{n+r}C_r = {}^nC_0 + {}^{n+1}C_1 + {}^{n+2}C_2 + ... + {}^{n+m}C_m$
$= [1 + (n+1)] + {}^{n+2}C_2 + {}^{n+3}C_3 + ... + {}^{n+m}C_m$
$= {}^{n+m+1}C_{n+1}$, $[\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r}]$.

21. (b) ${}^nC_2 = 153 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 153 \Rightarrow n = 18$.

22. (d) प्रत्येक प्रश्न का 4 प्रकार से उत्तर दे सकते हैं व सभी प्रश्नों का उत्तर केवल एक तरीके से सही होगा, अतः अभीष्ट प्रकार $= 4^3 - 1 = 63$.

23. (d) $\alpha = {}^mC_2 \Rightarrow \alpha = \frac{m(m-1)}{2}$
$\therefore {}^{\alpha}C_2 = {}^{m(m-1)/2}C_2 = \frac{1}{2}.\frac{m(m-1)}{2}\left\{\frac{m(m-1)}{2} - 1\right\}$
$= \frac{1}{8}m(m-1)(m-2)(m+1)$
$= \frac{1}{8}(m+1)\,m(m-1)(m-2) = 3\,.\,{}^{m+1}C_4$

24. (b) $2\,.\,{}^{20}C_2$, {चूँकि दो विद्यार्थी एक-दूसरे से पत्रों का आदान-प्रदान दो प्रकार से कर सकते हैं}.

25. (c) हम दांतों के लिए 32 स्थान रखते हैं। प्रत्येक स्थान के लिए दो परिस्थितियाँ होती हैं- या तो यहाँ एक दाँत है या नहीं। इसलिए इन स्थानों को भरने के कुल प्रकार 2^{32} हैं। चूँकि यहाँ कोई व्यक्ति बिना दाँतों वाला नहीं है, इसलिए अधिकतम जनसंख्या $= 2^{32} - 1$.

26. (b) $\left(\frac{(2n)!}{2!\,(2n-2)!}\right)2 = \left(\frac{n!}{2!\,(n-2)!}\right)9$
$\Rightarrow (2n)(2n-1)2 = 9n(n-1) \Rightarrow n = 5$
अब ${}^5C_r = 10 \Rightarrow r = 2$.

27. (d) ${}^{10}C_r = {}^{10}C_{r+2} \Rightarrow r + r + 2 = 10 \Rightarrow r = 4$
$\therefore {}^5C_r = {}^5C_4 = \frac{5!}{1!\,4!} = 5$.

28. (b) $\frac{n-r+1}{r} = \frac{84}{36} = \frac{7}{3}$ तथा $\frac{n-r}{r+1} = \frac{126}{84} = \frac{3}{2}$
$\therefore \frac{7}{3}r - 1 = n - r = \frac{3}{2}(r+1)$
$\Rightarrow 14r - 6 = 9r + 9$ या $r = 3$. अतः $n = 9$.

29. (a) ${}^nC_3 + {}^nC_4 > {}^{n+1}C_3$
$\Rightarrow {}^{n+1}C_4 > {}^{n+1}C_3$, $(\because {}^nC_r + {}^nC_{r+1} = {}^{n+1}C_{r+1})$
$\Rightarrow \frac{{}^{n+1}C_4}{{}^{n+1}C_3} > 1 \Rightarrow \frac{n-2}{4} > 1 \Rightarrow n > 6$.

30. (c) या तो $r + 3 = 2r - 6$
या $r + 3 + 2r - 6 = 15$, $(\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$
$\Rightarrow r = 9$ या $r = 6$.

31. (c) ${}^{n+1}C_3 = 2.{}^nC_2$

$\Rightarrow \frac{(n+1)!}{3!.(n-2)!} = 2.\frac{n!}{2!.(n-2)!} \Rightarrow \frac{n+1}{3.2!} = \frac{2}{2!}$

$\Rightarrow n+1 = 6 \Rightarrow n = 5$.

32. (d) $\binom{n}{n-r} + \binom{n}{r+1} = {}^nC_{n-r} + {}^nC_{r+1}$

$\Rightarrow {}^nC_r + {}^nC_{r+1} = {}^{n+1}C_{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$.

33. (a) ${}^nC_5 + {}^nC_6 > {}^{n+1}C_5 \Rightarrow {}^{n+1}C_6 > {}^{n+1}C_5$

$\Rightarrow \frac{(n+1)!}{6!.(n-5)!}.\frac{5!.(n-4)!}{(n+1)!} > 1 \Rightarrow \frac{(n-4)}{6} > 1$

$\Rightarrow n-4 > 6 \Rightarrow n > 10$

अतः प्रश्न के विकल्पानुसार, $n = 11$.

34. (b) कुल हस्त-मिलनों की संख्या $= {}^{15}C_2$.

35. (d) ${}^nC_{r-1} + {}^nC_r = {}^{n+1}C_r$, जो कि मानक सूत्र है।

36. (a) दिया है, ${}^{43}C_{r-6} = {}^{43}C_{3r+1}$

$\Rightarrow r-6 = 3r+1$ या $r-6+3r+1 = 43$

$\Rightarrow r = -\frac{7}{2}$ (असंभव) या $r = 12$. अतः $r = 12$.

37. (c) अभीष्ट प्रकार $= \frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$.

38. (c) अभीष्ट प्रकार $= {}^8C_1 + {}^8C_2 + {}^8C_3 + {}^8C_4 + {}^8C_5$

$= 8 + 28 + 56 + 70 + 56 = 218$

{चूँकि मतदाता एक, दो, तीन, चार या सभी उम्मीदवारों को मत दे सकता है।}.

39. (c) माना n उम्मीदवार हैं, तो

${}^nC_1 + {}^nC_2 + ... + {}^nC_{n-1} = 254 \Rightarrow 2^n - 2 = 254$

$\Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow n = 8$.

40. (a) $\bullet E \bullet E \bullet E \bullet ...... \bullet E \bullet$

प्रश्नानुसार, कुल खाली स्थान 22 हैं जिन पर हिन्दी की किताबें रखना हैं। अतः अभीष्ट प्रकार $= {}^{22}C_{19} = 1540$ हैं। {चूँकि किताबें एक जैसी हैं}

41. (b) ${}^rC_r + {}^{r+1}C_r + {}^{r+2}C_r ...... + {}^{n-1}C_r + {}^nC_r$

$= {}^{r+1}C_{r+1} + {}^{r+1}C_r + {}^{r+2}C_r + ... + {}^{n-1}C_r + {}^nC_r$

$= {}^{r+2}C_{r+1} + {}^{r+2}C_r + ... + {}^{n-1}C_r + {}^nC_r$

$= {}^{r+3}C_{r+1} + ... + {}^{n-1}C_r + {}^nC_r$

इसी प्रकार हल करने पर,

${}^{n-1}C_{r+1} + {}^nC_r + {}^nC_r = {}^nC_{r+1} + {}^nC_r = {}^{n+1}C_{r+1}$.

42. (d) अक्षरों के चुनने के तरीके $= {}^5C_3 \times {}^4C_2$

अतः अभीष्ट क्रमचय $= ({}^5C_3 \times {}^4C_2)\,5\,!$.

43. (b) चूँकि 5 को हमेशा बाहर रखना है एवं 6 हमेशा सम्मिलित करना है। अतः 14 में से 5 खिलाड़ियों को चुनना है। अतः अभीष्ट प्रकार ${}^{14}C_5 = 2002$ हैं।

44. (a) अभीष्ट प्रकार

$= {}^{12}C_1 + {}^{12}C_2 + {}^{12}C_3 + ... + {}^{12}C_{12} = 2^{12} - 1$

$= 4096 - 1 = 4095$.

45. (c) अभीष्ट प्रकार

$= (10+1)(9+1)(7+1) - 1 = 11 \times 10 \times 8 - 1 = 879$.

46. (c) चूँकि संचयों की संख्या ${}^{n-p}C_{r-p}$ है। अब r वस्तुओं को r ! प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है। अतः अभीष्ट क्रमचय ${}^{n-p}C_{r-p}\,r\,!$ हैं।

47. (a) 52 पत्तों में से 26 पत्ते ${}^{52}C_{26}$ प्रकार से चयन किये जा सकते हैं। अब प्रत्येक पत्ते के बंटन में 2 प्रकार हैं, क्योंकि एक पत्ता प्रथम गड्डी (First pack) से अथवा द्वितीय गड्डी से हो सकता है। अतः 26 पत्तों के बंटन के कुल प्रकार $= {}^{52}C_{26}\,.\,2^{26}$.

48. (b) अभीष्ट प्रकार

$= {}^5C_3 \times {}^2C_1 \times {}^9C_7 = 10 \times 2 \times 36 = 720$.

49. (b) अभीष्ट प्रकार

$= {}^6C_1 + {}^6C_2 + {}^6C_3 + {}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6 = 2^6 - 1 = 63$.

50. (a) यह आधारभूत संकल्पना है।

51. (a) अभीष्ट प्रकार

$= {}^{52}C_{13} \times {}^{39}C_{13} \times {}^{26}C_{13} \times {}^{13}C_{13}$

$= \frac{52\,!}{39\,! \times 13\,!} \times \frac{39\,!}{26\,! \times 13\,!} \times \frac{26\,!}{13\,! \times 13\,!} \times \frac{13\,!}{13\,!} = \frac{52\,!}{(13\,!)^4}$.

52. (b) अभीष्ट प्रकार $= {}^6C_4 \times {}^5C_3 \times 7\,! = 756000$

{संचय ${}^6C_4 \times {}^5C_3$ प्रकार से किया जा सकता है जबकि 7 अक्षरों को 7 ! प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है}.

53. (c) निम्न प्रकार से कुल तरीके प्राप्त किये जा सकते हैं

2 गेंदबाज व 9 अन्य खिलाड़ी $= {}^4C_2 \times {}^9C_9$

3 गेंदबाज व 8 अन्य खिलाड़ी $= {}^4C_3 \times {}^9C_8$

4 गेंदबाज व 7 अन्य खिलाड़ी $= {}^4C_4 \times {}^9C_7$

अभीष्ट प्रकार $= 6 \times 1 + 4 \times 9 + 1 \times 36 = 78$.

54. (c) क्रमचय निम्न प्रकार बनायें जा सकते हैं .+.+.+.+.+.+. अर्थात् (–) चिन्ह को 7 रिक्त स्थानों पर भरा जाना है। अतः अभीष्ट प्रकार $= {}^7C_4 = 35$.

55. (b) पाँच हरी गेंदों में से कम से कम एक हरी गेंद $2^5 - 1$ तरीकों से खींची जा सकती है। इसी प्रकार 4 नीली गेंदों में कम से कम एक नीली गेंद $2^4 - 1 = 15$ प्रकार से चुनी जा सकती है एवं कम से कम एक लाल या लाल नहीं, $2^3 = 8$ प्रकार से चुनी जा सकती है।

अतः अभीष्ट तरीके $= 31 \times 15 \times 8 = 3720$ हैं।

56. (c) अभीष्ट प्रकार

$= {}^4C_1 \times {}^8C_5 + {}^4C_2 \times {}^8C_4 + {}^4C_3 \times {}^8C_3 + {}^4C_4 \times {}^8C_2$

$= 4 \times 56 + 6 \times 70 + 4 \times 56 + 1 \times 28 = 896$

57. (a) चुनाव ${}^5C_3 \times {}^{22}C_9$ प्रकार से कर सकते हैं।
{चूँकि 5 उम्मीदवारों से तीन जगह ${}^5C_3$ प्रकार से एवं तीन स्थान भरने के बाद शेष स्थान 9 हैं जिन्हें 22 उम्मीदवारों से ${}^{22}C_9$ प्रकार से भर सकते हैं}

58. (d) मतदाता ${}^5C_1 + {}^5C_2 + {}^5C_3 = 25$ प्रकार से मत दे सकता है।

59. (a) 5 व्यक्तियों को 8 कुर्सियों पर ${}^8C_3 \times 5\,!$ प्रकार से अर्थात् 6720 प्रकार बैठाया जा सकता है।
{चूँकि 5 कुर्सियों को ${}^8C_5$ प्रकार से चुना जा सकता है एवं उन पर 5 व्यक्तियों को $5\,!$ प्रकार से बैठाया जा सकता है}

60. (c) 1 लड़की व 6 लड़के $= {}^4C_1 \times {}^6C_6 = 4$
2 लड़कियाँ व 5 लड़के $= {}^4C_2 \times {}^6C_5 = 36$
3 लड़कियाँ व 4 लड़के $= {}^4C_3 \times {}^6C_4 = 60$
अतः कुल तरीके $= 60 + 36 + 4 = 100$.

61. (b) सर्वप्रथम दो विशेष व्यक्तियों को हटा देते हैं तो शेष 8 व्यक्ति दोनों नावों पर 4, 4 बैठ सकते हैं। यह ${}^8C_4$ प्रकार से किया जा सकता है। दो विशेष व्यक्तियों को दो प्रकार से (प्रत्येक में एक) बिठाया जा सकता है। अतः कुल प्रकार $= 2 \times {}^8C_4$ हैं।

62. (b) अभीष्ट प्रकारों की संख्या $= {}^{30}C_3 - {}^{15}C_3 = 3605$.

63. (c) अभीष्ट शब्दों की संख्या$= ({}^2C_1 \times {}^4C_2 + {}^2C_2 \times {}^4C_1)3\,! = 96$.

64. (c) चार अक्षर निम्नलिखित प्रकार से चुने जा सकते हैं
(i) सभी भिन्न अर्थात् C, O, R, G .
(ii) 2 समान तथा 2 भिन्न अर्थात् दो O, एक R, तथा एक G.
(iii) 3 समान तथा 1 भिन्न अर्थात् तीन O तथा R, G, C में से कोई एक।
(i) में कुल प्रकारों की संख्या ${}^4C_4 = 1$ है
(ii) में कुल प्रकारों की संख्या $1 . {}^3C_2 = 3$ है
(iii) में कुल प्रकारों की संख्या $1 \times {}^3C_1 = 3$ है
इसलिए, अभीष्ट प्रकारों की संख्या $= 1 + 3 + 3 = 7$.

65. (a) यहाँ दो प्रकार की संख्याएँ हो सकती हैं :
(i) 1, 2, 3, 4 अंकों में से किसी भी अंक की तीन बार पुनरावृत्ति हो तथा शेष अंक एक बार आये अर्थात् 1, 2, 3, 4, 4, (4 प्रकार से)।
(ii) 1, 2, 3, 4 में से कोई भी दो अंक दो बार आये तथा शेष दो केवल एक बार आये अर्थात् 1, 2, 3, 3, 4, (4 प्रकार से)।
अब (i) प्रकार की संख्याओं की कुल संख्या
$$= \frac{6\,!}{3\,!} \times {}^4C_1 = 480$$
तथा (ii) प्रकार की संख्याओं की कुल संख्या
$$= \frac{6\,!}{2\,!\,2\,!} \times {}^4C_2 = 1080$$
अतः अभीष्ट संख्याओं की संख्या $= 480 + 1080 = 1560$.

66. (b) द्विखण्ड गुणनफलों की कुल संख्या $= {}^{200}C_2$ हैं। 1 से 200 के बीच की वह संख्याएँ जो 5 की गुणज नहीं हैं, की कुल संख्या 160 है।
अतः ऐसे द्विखण्ड गुणनफलों की कुल संख्या ${}^{160}C_2$ है जो कि 5 के गुणज नहीं हैं।
अतः अभीष्ट खण्डों की संख्या $= {}^{200}C_2 - {}^{160}C_2 = 7180$.

67. (a) चूँकि n वस्तुओं में से r वस्तुओं के चयन की कुल संख्या ${}^{n+r-1}C_r$ है, जहाँ प्रत्येक वस्तु की कितनी भी बार पुनरावृत्ति हो सकती है।
अतः अभीष्ट प्रकार $= {}^{3+6-1}C_6 = 28$.

68. (b) अभीष्ट प्रकार $= {}^{3+35-1}C_{3-1} = {}^{37}C_2 = 666$
वैकल्पिक : अभीष्ट प्रकार $= (1 + x + x^2 + ... + x^{35})^3$ में x^{35} का गुणांक।

69. (c) व्यक्ति के उद्यान जाने के प्रकारों की संख्या, 8 बच्चों में से 3 बच्चों के चयन करने की संख्या के बराबर है।
इसलिए अभीष्ट प्रकार $= {}^8C_3 = 56$.

70. (b) अभीष्ट प्रकार $= {}^{10}C_5 \times {}^8C_4$.

71. (b) ${}^{14}C_4 + {}^{14}C_3 + {}^{15}C_3 + {}^{16}C_3 + {}^{17}C_3 = {}^{18}C_4$.

72. (d) शब्द 'MATHEMATICS' में $2M, 2T, 2A, H, E, I, C, S$ हैं। अतः 4 अक्षरों को निम्न प्रकार से चुन सकते हैं :
स्थिति I : 2 एक प्रकार के तथा 2 दूसरे प्रकार के, अर्थात् ${}^3C_2 \Rightarrow$ शब्दों की संख्या $= {}^3C_2 \dfrac{4\,!}{2\,!\,2\,!} = 18$
स्थिति II : 2 एक प्रकार के तथा 2 भिन्न प्रकार के
अर्थात् ${}^3C_1 \times {}^7C_2 \Rightarrow$ शब्दों की संख्या $= {}^3C_1 \times {}^7C_2 \times \dfrac{4\,!}{2\,!} = 756$
स्थिति III : सभी भिन्न अर्थात्
${}^8C_4 \Rightarrow$ शब्दों की संख्या $= {}^8C_4 \times 4\,! = 1680$.
अतः कुल शब्द 2454 हैं।

73. (a) 5 अक्षरों के उन शब्दों की संख्या, जिनमें अक्षरों की पुनरावृत्ति हो $= 10^5$
10 में से 5 विभिन्न अक्षरों को लेकर बनने वाले शब्दों की संख्या $= {}^{10}C_5 = 252$
$\therefore$ अभीष्ट शब्दों की संख्या $= 10^5 - 252 = 99748$.

74. (a) समिति दो प्रकार से बन सकती है
(i) 3 पुरूष और 3 महिलायें
(ii) 2 पुरूष और 4 महिलायें
$\therefore$ अभीष्ट प्रकार$= ({}^8C_3 \times {}^4C_3) + ({}^8C_2 \times {}^4C_4) = 252$.

75. (a) $\because$ व्यक्ति $(2n+1)$ सिक्कों में से एक से लेकर n तक सिक्के चुन सकता है
यदि एक सिक्का चुनने के कुल प्रकार T हैं, तो
$$T = {}^{2n+1}C_1 + {}^{2n+1}C_2 + ... + {}^{2n+1}C_n = 255 \qquad .....(i)$$
द्विपद गुणांकों का योग
$$= {}^{2n+1}C_0 + {}^{2n+1}C_1 + {}^{2n+1}C_2 + ... + {}^{2n+1}C_n + {}^{2n+1}C_{n+1}$$
$$+ {}^{2n+1}C_{n+2} + ... + {}^{2n+1}C_{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1}$$
$$\Rightarrow {}^{2n+1}C_0 + 2\left({}^{2n+1}C_1 + {}^{2n+1}C_2 + ... + {}^{2n+1}C_n\right)$$
$$+ {}^{2n+1}C_{2n+1} = 2^{2n+1}$$
$$\Rightarrow 1 + 2(T) + 1 = 2^{2n+1} \Rightarrow 1 + T = \frac{2^{2n+1}}{2} = 2^{2n}$$
$$\Rightarrow 1 + 255 = 2^{2n} \Rightarrow 2^{2n} = 2^8 \Rightarrow n = 4 .$$

76. (d) अभीष्ट प्रकार = $2^{10}-1$

($\because$ जब किसी भी मित्र को न बुलाया जाये अर्थात् $^{10}C_0$ को नहीं रखते हैं।)

77. (b) दिये हुये प्रश्न के दो संभावित हल हो सकते हैं।

(i) प्रथम पांच प्रश्नों से 4 चुनने के प्रकार तथा शेष 8 में से 6 प्रश्नों के चुनने के प्रकार $= {}^5C_4 \times {}^8C_6 = 140$.

(ii) प्रथम पांच प्रश्नों से 5 चुनने के प्रकार तथा शेष 8 में से 5 प्रश्नों के चुनने के प्रकार $= {}^5C_5 \times {}^8C_5 = 56$.

$\therefore$ प्रश्नों के चुनने के कुल प्रकार = 140 + 56 = 196.

78. (b) व्यंजक = ${}^nC_{r+1} + {}^nC_{r-1} + {}^nC_r + {}^nC_r$

$= {}^nC_{r+1} + {}^{n+1}C_r + {}^nC_r = {}^{n+1}C_{r+1} + {}^{n+1}C_r = {}^{n+2}C_{r+1}$.

79. (b) चूँकि $(2n+1)$ पुस्तकों में से विद्यार्थी अधिकतम n पुस्तकों का चयन कर सकता है, इसलिये एक पुस्तक के चयन हेतु, वह अपनी स्वेच्छा से एक, दो, तीन, ..., n पुस्तकों का चयन कर सकता है, और यदि एक पुस्तक के चयन के कुल प्रकार T हैं तब $T = {}^{2n+1}C_1 + {}^{2n+1}C_2 + ... + {}^{2n+1}C_n = 63$

पुनः द्विपद गुणांकों का योग =

$${}^{2n+1}C_0 + {}^{2n+1}C_1 + {}^{2n+1}C_2 + ... + {}^{2n+1}C_n + {}^{2n+1}C_{n+1}$$

$$+ {}^{2n+1}C_{n+2} + ... + {}^{2n+1}C_{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1}$$

या ${}^{2n+1}C_0 + 2({}^{2n+1}C_1 + {}^{2n+1}C_2 + .. + {}^{2n+1}C_n) + {}^{2n+1}C_{2n+1} = 2^{2n+1}$

$$\Rightarrow 1 + 2(T) + 1 = 2^{2n+1} \Rightarrow 1 + T = \frac{2^{2n+1}}{2} = 2^{2n}$$

$$\Rightarrow 1 + 63 = 2^{2n} \Rightarrow 2^6 = 2^{2n} \Rightarrow n = 3.$$

80. (d) $\dfrac{(n-1)!}{(n-r-1)!r!} = \dfrac{(k^2-3)n!}{(n-r-1)!(r+1)!}$, $0 \le r \le n-1$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{r+1}{n} + 3, \frac{1}{n} \le \frac{r+1}{n} \le 1 \Rightarrow k^2 \in \left[\frac{1}{n} + 3, 4\right], n \ge 2$$

$$\Rightarrow k \in \left[-2, -\sqrt{\frac{1}{n} + 3}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{1}{n} + 3}, 2\right]; n \ge 2.$$

81. (b) $\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} \frac{{}^nC_r}{{}^nC_r + {}^nC_{r+1}} = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r}} = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{n-r}{r+1}}$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{r+1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{r=0}^{n-1} (r+1) = \frac{1}{(n+1)}[1 + 2 + ... + n] = \frac{n}{2}.$$

82. (a) तरीकों की संख्या =

$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2 + ... + x^{10})$

$(1 + x + x^2 + ... + x^{15})$ में x^{15} का गुणांक

= $(1-x^6)(1-x^{11})(1-x^{16})(1-x)^{-3}$ में x^{15} का गुणांक

$= (1 - x^6 - x^{11})(1 + {}^3C_1x + {}^4C_2x^2$

$+ ...... + {}^6C_4x^4 + {}^{11}C_9x^9 + {}^{17}C_{15}x^{15} + ...)$ में x^{15} का गुणांक

$= (-{}^{11}C_9 - {}^6C_4 + {}^{17}C_{15})$ में x^{15} का गुणांक

$\therefore$ x^{15} का गुणांक $= 66$.

83. (b) ${}^{50}C_4 + \left({}^{50}C_3 + {}^{51}C_3 + {}^{52}C_3 + ... {}^{55}C_3\right)$.प्रथम दो पदों को एक साथ लेने पर एवं जोड़ने पर ${}^{56}C_4$ प्राप्त होता है। ($\because {}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$).

84. (b) दिया है, ${}^nC_{12} = {}^nC_6$

$\therefore 12 + 6 = n \Rightarrow n = 18$

$$\therefore {}^{18}C_2 = \frac{18 \times 17}{2} = 9 \times 17 = 153.$$

85. (a) 5 प्रश्नों में से 4 प्रश्नों को चुनना है।

चुनने के प्रकार $= {}^5C_4 = 5$

शेष प्रश्न = 8

हल करने के लिए शेष प्रश्न = 6

$\therefore$ चुनने के प्रकार = ${}^8C_6 = 28$

चुनने के कुल अभीष्ट प्रकार $= {}^5C_4 \times {}^8C_6 = 5 \times 28 = 140$.

ज्यामितीय प्रश्न

1. (c) अभीष्ट प्रकार = ${}^8C_3 - {}^5C_3 - {}^3C_3$

{चूँकि कुल बिन्दु 8 हैं, परन्तु 5 समरेखीय हैं एवं दूसरे तीन भी समरेखीय हैं।}.

2. (b) अभीष्ट प्रकार = ${}^8C_2 - 8 = 20$.

3. (b) चूँकि ${}^nC_2 - n = 44 \Rightarrow n = 11$.

4. (a) अभीष्ट प्रकार = ${}^4C_3 = 4$.

5. (a) त्रिभुजों की अभीष्ट संख्या = ${}^9C_3 = 84$.

6. (c) अभीष्ट विकर्णों की संख्या = ${}^mC_2 - m$

$$= \frac{m(m-1)}{2!} - m = \frac{m}{2!}(m-3).$$

7. (d) अभीष्ट प्रकार = ${}^8C_2 = 28$.

8. (a) अभीष्ट प्रकार $= {}^{12}C_3 - {}^7C_3 = 220 - 35 = 185$.

9. (b) त्रिभुजों की अभीष्ट संख्या $= {}^{10}C_3 - {}^4C_3 = 120 - 4 = 116$.

10. (a) अभीष्ट रेखाओं की संख्या

$= {}^{16}C_2 - {}^6C_2 + 1 = 120 - 15 + 1 = 106$.

11. (b) बिन्दुओं की कुल संख्या $m + n + k$ है, इन बिन्दुओं से बनने वाले त्रिभुज $= {}^{m+n+k}C_3$

तीनों बिन्दुओं को एक ही रेखा पर मिलाने से कोई त्रिभुज नहीं बनेगा। अतः इस प्रकार के कुल त्रिभुज $= {}^mC_3 + {}^nC_3 + {}^kC_3$ हैं।

$\therefore$ अभीष्ट त्रिभुजों की संख्या

$= {}^{m+n+k}C_3 - {}^mC_3 - {}^nC_3 - {}^kC_3$.

12. (b) अभीष्ट प्रकारों की संख्या $= {}^4C_2 \times {}^3C_2 = 18$.

13. (c) 6 बिन्दुओं से प्राप्त रेखाओं की संख्या $= {}^6C_2 = 15$ है। इन रेखाओं से प्राप्त प्रतिच्छेद बिन्दु $= {}^{15}C_2 = 105$ हैं। अब हमें यह ज्ञात करना है कि वास्तविक 6 बिन्दु कितनी बार आते हैं। एक बिन्दु, माना A_1 पर विचार करते हैं। A_1 को शेष 5 बिन्दुओं से जोड़ने पर, हमें 5 रेखायें प्राप्त होती हैं एवं इन 5 रेखाओं में से कोई दो रेखायें A_1 देती हैं जो कि प्रतिच्छेद बिन्दु हैं।

$\therefore$ 105 प्रतिच्छेद बिन्दुओं में से A_1, ${}^5C_2 = 10$ बार आता है। इसी प्रकार अन्य पाँच बिन्दुओं की स्थिति में होता है।

$\therefore$ प्रतिच्छेद बिन्दुओं में वास्तविक 6 बिन्दु, $6 \times 10 = 60$ बार आते हैं।

अतः भिन्न प्रतिच्छेद बिन्दुओं की संख्या $= 105 - 60 + 6 = 51$.

14. (a) **स्थिति I :** जब A को सम्मिलित नहीं किया जाना है

त्रिभुजों की संख्या = AB से 2 बिन्दुओं व AC से एक बिन्दु का चयन + AB से एक बिन्दु व AC से दो बिन्दुओं का चयन

$$= {}^mC_2\,{}^nC_1 + {}^mC_1\,{}^nC_2 = \frac{1}{2}(m+n-2)mn \quad .....(i)$$

स्थिति II : जब A को शामिल किया जाना है

त्रिभुजों की संख्या जिनका एक शीर्ष A पर है = AB से एक बिन्दु एवं AC से एक बिन्दु का चयन $= mn$

$\therefore$ त्रिभुजों की संख्या

$$= mn + \frac{1}{2}mn(m+n-2) = \frac{1}{2}mn(m+n) \quad .....(ii)$$

$\therefore$ अभीष्ट अनुपात $= \dfrac{(m+n-2)}{(m+n)}$.

15. (c) चूँकि न तो दो रेखाएँ समान्तर हैं तथा न ही तीन संगामी हैं। इसलिए n सरल रेखाएँ ${}^nC_2 = N$ (माना) बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करेंगी। चूँकि एक रेखा को बनाने के लिए दो बिन्दुओं की आवश्यकता होती है, इसलिए N बिन्दुओं को जोड़ने पर ${}^NC_2$ रेखाएँ प्राप्त होंगी। लेकिन इस स्थिति में पुरानी रेखाएँ ${}^{n-1}C_2$ बार गिनी जाती हैं, चूँकि प्रत्येक पुरानी रेखा पर शेष $(n-1)$ रेखाओं द्वारा $(n-1)$ प्रतिच्छेद बिन्दु बनाए जाते हैं। अतः नई रेखाओं की अभीष्ट संख्या

$$= {}^NC_2 - n\,.\,{}^{n-1}C_2 = \frac{N(N-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$$

$$= \frac{{}^nC_2({}^nC_2 - 1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}.$$

16. (c) प्रत्येक समुच्चय $(m+2)$ समान्तर रेखाएँ रखता है तथा प्रत्येक समान्तर चतुर्भुज प्रथम और द्वितीय समुच्चय से दो रेखाएँ चुनने पर बनता है। प्रथम तथा द्वितीय समुच्चय में से दो रेखाएँ ${}^{m+2}C_2$ प्रकार से चुनी जा सकती हैं।

अतः बनने वाले समान्तर चतुर्भुजों की संख्या

$$= {}^{m+2}C_2\,.\,{}^{m+2}C_2 = \left({}^{m+2}C_2\right)^2.$$

17. (a) 37 सरल रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दुओं की संख्या ${}^{37}C_2$ है। लेकिन उनमें से बिन्दु A से 13 गुजरती हैं। इसलिए ${}^{13}C_2$ बिन्दुओं को प्राप्त करने के स्थान पर हम केवल एक बिन्दु प्राप्त करते हैं। इसी प्रकार 37 रेखाओं में से 11 रेखाएँ B पर प्रतिच्छेद करती हैं। इसलिए ${}^{11}C_2$ बिन्दुओं को प्राप्त करने के स्थान पर हम केवल एक बिन्दु प्राप्त करते हैं।

अतः रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दुओं की संख्या

$$= {}^{37}C_2 - {}^{13}C_2 - {}^{11}C_2 + 2 = 535.$$

18. (d) अभीष्ट बिन्दुओं की संख्या

$$= {}^8C_2 \times 1 + {}^4C_2 \times 2 + \left({}^8C_1 \times {}^4C_1\right) \times 2$$

$$= 28 + 12 + 32 \times 2 = 104.$$

19. (c,b) 18 बिन्दु हैं, जिनमें 5 समरेखीय हैं :

(i) अभीष्ट रेखाओं की संख्या

$$= {}^{18}C_2 - {}^5C_2 + 1 = 153 - 10 + 1 = 144$$

(ii) अभीष्ट त्रिभुजों की संख्या

$$= {}^{18}C_3 - {}^5C_3 = 816 - 10 = 806.$$

20. (a) ${}^{16}C_3 - {}^8C_3 = 504$.

21. (b) स्पष्टतः, ${}^nC_3 = T_n$.

अतः ${}^{n+1}C_3 - {}^nC_3 = 21 \Rightarrow ({}^nC_3 + {}^nC_2) - {}^nC_3 = 21$

$\therefore {}^nC_2 = 21$ या $n(n-1) = 42 = 7.6$, $\therefore n = 7$.

22. (a) त्रिभुजों की संख्या $= {}^{10}C_3 - {}^6C_3 = 120 - 20 = 100$.

23. (c) दिया है, बिन्दुओं की कुल संख्या = n तथा समरेखीय बिन्दुओं की संख्या = p. हम जानते हैं कि एक रेखा दो बिन्दुओं से मिलकर बनती है, अतः कुल रेखाओं की संख्या = ${}^nC_2$. चूँकि p बिन्दु समरेखीय हैं, अतः समरेखीय बिन्दुओं को मिलाकर बनने वाली रेखाओं की संख्या = ${}^pC_2$. हम जानते हैं कि समरेखीय बिन्दुओं की एक रेखा योग में प्रयोग की जानी चाहिए।

अतः कुल सरल रेखाओं की संख्या = ${}^nC_2 - {}^pC_2 + 1$.

24. (a) अभीष्ट त्रिभुजों की संख्या = ${}^6C_3 - 7$.

25. (c) चूँकि ${}^nC_2 - n = 35 \Rightarrow \dfrac{n!}{2!\,(n-2)!} - n = 35$

$\Rightarrow n(n-1) - 2n = 70 \Rightarrow n^2 - 3n = 70$

$\Rightarrow n^2 - 3n - 70 = 0 \Rightarrow (n+7)(n-10) = 0 \Rightarrow n = 10$.

26. (d) अभीष्ट सरल रेखाओं की संख्या $= {}^{20}C_2 - {}^4C_2 + 1$

$$= \frac{20 \times 19}{2} - \frac{4 \times 3}{2} + 1 = 190 - 6 + 1 = 185.$$

बहुपद प्रमेय, विभाजकों की संख्या, विविध प्रश्न

1. (a) प्रश्नानुसार, $n - r = r - 1 \Rightarrow r = \dfrac{n+1}{2}$.

अतः $n = 3$ रखने पर, $r = 2$ प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करता है।

2. (d) हल करने पर अभीष्ट परिणाम प्राप्त होता है।

3. (a) 4 अंकों की कुल संख्यायें = $9999 - 999 = 9000$.

5 से विभाजित 4 अंकों की संख्यायें $= 90 \times 20 = 1800$. अतः अभीष्ट प्रकार $9000 - 1800 = 7200$ हैं।

{चूँकि प्रत्येक सैकड़े में 20 संख्यायें 5 से विभाजित होती हैं एवं 999 से 9999 तक 90 सैकड़े होंगे।}

4. (d) $\dfrac{{}^nP_r}{{}^nC_r} = 24 \Rightarrow r! = 24 \Rightarrow r = 4$

$\therefore {}^nC_4 = 35 \Rightarrow n = 7$.

5. (a) निरीक्षण से, $n = 5$.

6. (b) अभीष्ट प्रकार

= $(x^3 + x^4 + x^5 + ... + x^7)^4$ मे x^{16} का गुणांक

= $x^{12}\,(1 + x + x^2 + ... x^4)^4$ मे x^{16} का गुणांक

= $x^{12}(1 - x^5)^4(1 - x)^{-4}$ मे x^{16} का गुणांक

$= (1-x^5)^4(1-x)^{-4}$ मे x^4 का गुणांक

$= (1-4x^5+...)$ मे x^4 का गुणांक $\left[1+4x+....+\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3!}x^r\right]$

$= \frac{(4+1)(4+2)(4+3)}{3!} = 35$.

वैकल्पिक : शेष 4 रुपयों का वितरण ${}^{4+4-1}C_{4-1}$, अर्थात् 35 प्रकार से हो सकता है।

7. (d) अधिकतम n अवयवों वाले समुच्चय के उपसमुच्चयों की संख्या

$= {}^{2n+1}C_0 + {}^{2n+1}C_1 + ... + {}^{2n+1}C_n = S$, (माना)

तब, $2S = 2({}^{2n+1}C_0 + {}^{2n+1}C_1 + ... + {}^{2n+1}C_n)$

$= ({}^{2n+1}C_0 + {}^{2n+1}C_{2n+1}) + ({}^{2n+1}C_1 + {}^{2n+1}C_{2n}) + ...$

$.... + ({}^{2n+1}C_n + {}^{2n+1}C_{n+1})$, $\{\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r}\}$

$= {}^{2n+1}C_0 + {}^{2n+1}C_1 + ... + {}^{2n+1}C_{2n+1} = 2^{2n+1}$

$\Rightarrow \quad S = 2^{2n}$.

8. (c) चूँकि $9600 = 2^7 \times 3 \times 5^2$

अतः विभाजकों की संख्या $= (7+1)(1+1)(2+1) = 48$.

9. (c) चयन के प्रकारों की संख्या

$= (1+x+x^2+.........+x^8)(1+x+x^2+......+x^8).(1+x)^8$

में x^8 का गुणांक

$= \frac{(1-x^9)^2}{(1-x)^2}(1+x)^8$ में x^8 का गुणांक

$= (1+x)^8(1-x)^{-2}$ में x^8 का गुणांक

$= ({}^8C_0 + {}^8C_1x + {}^8C_2x^2 + ... + {}^8C_8x^8)$

$\times(1+2x+3x^2+4x^3+......+9x^8+.....)$

में x^8 का गुणांक

$= 9 \,.\, {}^8C_0 + 8 \,.\, {}^8C_1 + 7 \,.\, {}^8C_2 + ... + 1 \,.\, {}^8C_8$

$= C_0 + 2C_1 + 3C_2 + ... + 9C_8 \qquad [C_r = {}^8C_r]$

अब $C_0x + C_1x^2 + ... + C_8x^9 = x(1+x)^8$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$C_0 + 2C_1x + 3C_2x^2 + ...9C_8x^8 = (1+x)^8 + 8x(1+x)^7$

$x = 1$ रखने पर,

$C_0 + 2C_1 + 3C_2 + ... + 9C_8$

$= 2^8 + 8 \,.\, 2^7 = 2^7.(2+8) = 10 \,.\, 2^7$.

10. (c) $\frac{{}^nP_4}{{}^nC_5} = 30 \Rightarrow \frac{n!}{(n-4)!} \times \frac{5!.(n-5)!}{n!} = 30$

$\Rightarrow (n-4) = 4 \Rightarrow n = 8$.

11. (b) $x+y+z = 100$ के हल धनात्मक पूर्णांकों के त्रिकों (Triplets) की संख्या

$= (x+x^2+x^3+.....)^3$ में x^{100} का गुणांक

$= x^3(1-x)^{-3}$ में x^{100} का गुणांक

$= x^3\left(1+3x+6x^2+....+\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n+.....\right)$

में x^{100} का गुणांक $= \frac{(97+1)(97+2)}{2} = 49 \times 99 = 4851$.

12. (d) विभाजकों की संख्याएँ

$= (1+1)(2+1)(2+1)(1+1)(1+1) - 1 = 71$.

13. (b) चूँकि किसी भी स्थान पर, 2, 5 एवं 7 में से किसी भी संख्या का प्रयोग कर सकते हैं, अतः धनात्मक n अंक वाली संख्याओं की कुल संख्या $= 3^n$. चूँकि हमें 900 अलग-अलग संख्यायें बनानी हैं, अतः $3^n \ge 900 \Rightarrow n = 7$.

14. (a) चूँकि $38808 = 8 \times 4851$

$= 8 \times 9 \times 539 = 8 \times 9 \times 7 \times 7 \times 11 = 2^3 \times 3^2 \times 7^2 \times 11$

अतः विभाजकों की संख्या

$= (3+1)(2+1)(2+1)(1+1) = 72.$

इसमें (विभाजकों में) 1 व 38808 भी शामिल हैं,

$\therefore$ अभीष्ट प्रकार $= 72 - 2 = 70.$

15. (c) दिया है, ${}^nP_4 = 24 \,.\, {}^nC_5$.

अतः $n(n-1)(n-2)(n-3)$

$= 24 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5.4.3.2.1}$

$\Rightarrow 1 = \frac{(n-4)}{5} \Rightarrow n-4 = 5 \Rightarrow n = 9$.

16. (a) ${}^nP_r = 720 \,.\, {}^nC_r$

$\Rightarrow {}^nP_r \div {}^nC_r = 720 \Rightarrow r! = 720 = 6! \Rightarrow r = 6$.

17. (b) $m = 5$ के लिए, $\sum_{i=0}^{5}\binom{10}{i}\binom{20}{5-i}$

$= \binom{10}{0}\binom{20}{5} + \binom{10}{1}\binom{20}{4} + ... + \binom{10}{5}\binom{20}{0}$

$m = 10$ के लिए, $\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}\binom{20}{10-i}$

$= \binom{10}{0}\binom{20}{10} + \binom{10}{1}\binom{20}{9} + \binom{10}{2}\binom{20}{8} + ... + \binom{10}{10}\binom{20}{0}$

$m = 15$ के लिए, $\sum_{i=0}^{15}\binom{10}{i}\binom{20}{15-i}$

$= \binom{10}{0}\binom{20}{15} + \binom{10}{1}\binom{20}{14} + \binom{10}{2}\binom{20}{13} + .. + \binom{10}{10}\binom{20}{5}$

$m = 20$ के लिए, $\sum_{i=0}^{20}\binom{10}{i}\binom{20}{20-i}$

$= \binom{10}{0}\binom{20}{20} + \binom{10}{1}\binom{20}{19} + ... + \binom{10}{10}\binom{20}{10}$

स्पष्टतः, $m = 15$ के लिए योग अधिकतम है।

$r = 5$ के लिए ${}^{10}C_r$ अधिकतम है, तथा $r = 10$ के लिए ${}^{20}C_r$ अधिकतम है। ध्यान दें कि $m = 15$ के लिए एकल पद ${}^{10}C_5 \times {}^{20}C_{10}$ का मान, योगफल

${}^{10}C_0\ {}^{20}C_{10} + {}^{10}C_1\ {}^{20}C_9 + {}^{10}C_2\ {}^{20}C_8 + ...$

$+ {}^{10}C_8\ {}^{20}C_2 + {}^{10}C_9\ {}^{20}C_1 + {}^{10}C_{10}\ {}^{20}C_0$ (m=10 के लिये) से अधिक है।

साथ ही, $m = 10$ के लिए तथा $m = 20$ के लिए योग एक समान है।

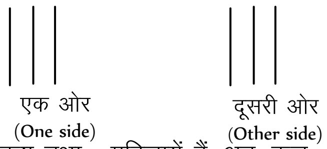
18. (a) दी गयी संख्या 960 है। हम जानते हैं कि $960 = 2^6 \times 3^1 \times 5^1$

$\therefore p_1 = 2, p_2 = 3$ और $p_3 = 5$ एवं घात $a_1 = 6, a_2 = 1$ और $a_3 = 1$. अतः 960 के सभी धनात्मक विभाजकों का योग

$$= \left(\frac{p_1^{a_1+1} - 1}{p_1 - 1}\right)\left(\frac{p_2^{a_2+1} - 1}{p_2 - 1}\right)\left(\frac{p_3^{a_3+1} - 1}{p_3 - 1}\right)$$

$$= \left(\frac{2^{6+1} - 1}{2 - 1}\right)\left(\frac{3^{1+1} - 1}{3 - 1}\right)\left(\frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1}\right) = (127)(4)(6) = 3048.$$

19. (b)



3 पुरुष तथा 2 महिलायें हैं, अतः कुल 5 सदस्य हैं।

5 सदस्यों का एक समूह परस्पर 5 ! क्रमचय बनाता है, अतः 5 सदस्यों के बैठने के प्रकार = 5 !

$\because$ 5 सदस्यों द्वारा 6 स्थान $^6C_5$ तरीकों से भरे जा सकते हैं

$\therefore$ बस की 6 सीटों पर 5 सदस्यों के बैठने के अभीष्ट प्रकार = $^6C_5 \times 5!$.

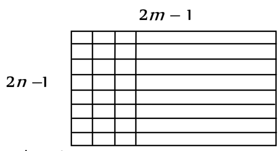
20. (d) क्षैतिज भुजा के अनुदिश एक इकाई भुजा $(2m - 1)$ प्रकार से तथा 3 इकाई भुजा $(2m - 3)$ प्रकार से ले सकते हैं।

$\therefore$ क्षैतिज रेखा के अनुदिश चयन के प्रकार

$= (2m - 1 + 2m - 3 + 2m - 5 + ... + 3 + 1)$

इसी प्रकार, ऊर्ध्वाधर भुजा के अनुदिश चयन के प्रकार

$= (2n - 1 + 2n - 3 + ... + 5 + 3 + 1)$.



$\therefore$ अभीष्ट आयतों की कुल संख्या

$= [1 + 3 + 5 + ... + (2m - 1)] \times [1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)]$

$$= \frac{m(1 + 2m - 1)}{2} \times \frac{n(1 + 2n - 1)}{2} = m^2 n^2.$$

21. (b) $P(n, r) = 1680 \Rightarrow \frac{n!}{(n - r)!} = 1680$ .....(i)

$C(n, r) = 70 \Rightarrow \frac{n!}{r!(n - r)!} = 70$ .....(ii)

$\frac{1680}{r!} = 70$, [(i) व (ii) से]

$r! = \frac{1680}{70} = 24 \Rightarrow r = 4$

$\because P(n, 4) = 1680$

$\therefore n(n - 1)(n - 2)(n - 3) = 1680 \Rightarrow n = 8$

अतः $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$

इस प्रकार, $69n + r! = 69 \times 8 + 4!$

$= 552 + 24 = 576$.

Critical Thinking Questions

1. (a) $1 . 3 . 5......(2n - 1) 2^n = \frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6....(2n - 1)(2n) 2^n}{2 . 4 . 6..... 2n}$

$$= \frac{(2n)!\, 2^n}{2^n (1 . 2 . 3......n)} = \frac{(2n)!}{n!}.$$

2. (c) परीक्षार्थी द्वारा A में से 2 व B में से 4 प्रश्न चुनने के प्रकार $= {}^5C_2 \times {}^5C_4$

3 प्रश्न A में से व 3 प्रश्न B में से चुनने के प्रकार $= {}^5C_3 \times {}^5C_3$

4 प्रश्न A में से व 2 प्रश्न B में से चुनने के प्रकार $= {}^5C_4 \times {}^5C_2$

अतः कुल प्रकार 200 हैं।

3. (b) 10 व 1000 के बीच में कुल संख्यायें 989 हैं परन्तु हमें वे संख्यायें लिखनी हैं जिनमें '0' नहीं है।

अतः अभीष्ट प्रकार

$$= 989 - \left\{\begin{array}{l} 20, 30, 40, ...\ .... 100 = 9 \\ 101, 102, ...\ .... 200 = 19 \\ 201, ...\ ....\ ..... 300 = 19 \\ ....\ ....\ ....\ ....\ ..... \\ ....\ ....\ ....\ ....\ ..... \\ 901, ...\ ....\ .... 990 = 18 \end{array}\right\}$$

$= 989 - (9 + 18 + 19 \times 8) = 810$.

वैकल्पिक : 10 व 1000 के बीच में संख्यायें दो अंकों व तीन अंकों की होंगी। अतः दो अंकों की संख्यायें $= 9 \times 9 = 81$ तथा तीन अंकों की संख्यायें $= 9 \times 9 \times 9 = 729$

अतः कुल संख्यायें $= 81 + 729 = 810$.

4. (c) $\bullet T \bullet R \bullet N \bullet G \bullet L$

तीन स्वर 6 स्थानों पर $^6P_3 = 120$ प्रकार से व्यवस्थित किये जा सकते हैं। अतः अभीष्ट प्रकार $= 120 \times 5! = 14400$ हैं।

5. (c) चूँकि ऐसी समस्याओं के व्यतिक्रम $n!\left\{1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - ....(-1)^n \frac{1}{n!}\right\}$ द्वारा दिये जाते हैं।

$\therefore$ व्यतिक्रम $= 4!\left\{\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right\} = 12 - 4 + 1 = 9$.

6. (b) $\frac{56!}{(50 - r)!} \times \frac{(51 - r)!}{54!}$

$= \frac{30800}{1} \Rightarrow 56 \times 55 \times (51 - r) = 30800 \Rightarrow r = 41$.

7. (a) उन शब्दों की संख्या जिनमें अक्षरों की पुनरावृत्ति हो सकती है $= 10^5 = 100000$ एवं उन शब्दों की संख्या जिनमें किसी अक्षर की पुनरावृत्ति न हो $= {}^{10}P_5 = 30240$

अतः अभीष्ट प्रकार $= 100000 - 30240 = 69760$.

8. (a) प्रथम व्यक्ति को पत्ते बाँटने के तरीके $^{52}C_{17}$ हैं। अब 35 पत्तों में से दूसरे व्यक्ति को 17 पत्ते $^{35}C_{17}$ तरीके से दिये जा सकते हैं। इसी प्रकार तृतीय व्यक्ति को $^{18}C_{17}$ तरीके से 17 पत्ते दिये जा सकते हैं। अब अन्तिम व्यक्ति को एक पत्ता एक तरीके से दिया जा सकता है। अतः उपर्युक्त बंटन के अभीष्ट प्रकार

$$= \frac{52!}{35!\,17!} \times \frac{35!}{18!\,17!} \times \frac{18!}{17!\,1!} \times 1! = \frac{52!}{(17!)^3}.$$

9. (b) शब्द ARRANGE के अक्षरों AA, RR, NGE में क्रमशः दो A, दो R तथा एक-एक N, G, E हैं। अब कुल विन्यासों की संख्या

$= \frac{7!}{2!2!1!1!1!} = 1260$

किन्तु ऐसे विन्यासों की संख्या जिनमें दोनों RR एक इकाई के रूप में एक साथ आयें $= \frac{6!}{2!1!1!1!1!} = 360$

अतः, ऐसे विन्यासों की संख्या जिनमें दोनों RR एक साथ न आते हों = 1260 – 360 = 900.

10. (a) कम से कम एक काली गेंद सम्मिलित करते हुए 3 गेंदों का चयन निम्नलिखित 3 परस्पर अपवर्जी प्रकारों से किया जा सकता है

(i) 1 काली गेंद तथा 2 अन्य गेंदें $= {}^3C_1 \times {}^6C_2 = 3 \times 15 = 45$

(ii) 2 काली गेंदें तथा 1 अन्य गेंद $= {}^3C_2 \times {}^6C_1 = 3 \times 6 = 18$

(iii) 3 काली गेंदें तथा अन्य कोई नहीं $= {}^3C_3 = 1$

$\therefore$ कुल विन्यासों की संख्या = 45 + 18 + 1 = 64.

11. (a) प्रथमतः m पुरुषों को एक सरल रेखा में, $m\,!$ प्रकार से व्यवस्थित करते हैं। चूँकि $n < m$ तथा दो महिलाएँ एक साथ नहीं बैठ सकती हैं। $m\,!$ विन्यासों में से किसी एक में, $(m+1)$ स्थानों पर n महिलाओं को ${}^{m+1}P_n$ प्रकार से विन्यासित किया जा सकता है।

अतः आधारभूत प्रमेय से, m पुरुष तथा n महिलाएँ विन्यासित किये जा सकते हैं $(n < m)$

$= m\,!.{}^{m+1}P_n = \frac{m\,!.(m+1)!}{\{(m+1)-n\}\,!} = \frac{m!(m+1)!}{(m-n+1)\,!}$.

12. (a) हम जानते हैं कि एक 5 अंकों की संख्या 3 से विभाज्य है, यदि और केवल यदि उसके अंकों का योग (15=0+1+2+3+4+5) 3 से विभाज्य है। अतः 5 अंकों की संख्या की रचना में 0 अथवा 3 के अंक का उपयोग नहीं करना है। अब

(i) यदि 0 का उपयोग न करें तो 5 अंकों (1, 2, 3, 4 तथा 5) से निर्मित संख्याओं की संख्या $= {}^5P_5 = 120$

(ii) यदि 3 का उपयोग न करें तब 5 अंकों (0, 1, 2, 4 तथा 5) से निर्मित संख्याओं की संख्या

$= {}^5P_5 - {}^4P_4 = 5\,! - 4\,! = 120 - 24 = 96$

$\therefore$ अभीष्ट 5 अंकों की संख्याओं की संख्या

$= 120 + 96 = 216$.

13. (b) चूँकि कम से कम i (अर्थात् i या i से अधिक) प्रश्नों के त्रुटिपूर्ण उत्तर देने वाले विद्यार्थियों की संख्या (जबकि $i=1, 2, \ldots\ldots, n$) $= 2^{n-i}$ दी है। अतः ठीक i (जबकि $1 \le i \le n-1$) प्रश्नों के त्रुटिपूर्ण उत्तर देने वाले विद्यार्थियों की संख्या = (कम से कम i प्रश्नों के त्रुटिपूर्ण उत्तर देने वाले विद्यार्थी, जबकि $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$) – (कम से कम $(i+1)$ प्रश्नों के त्रुटिपूर्ण उत्तर देने वाले विद्यार्थी, जबकि $2 \le i+1 \le n$)

$= 2^{n-i} - 2^{n-(i+1)}, (1 \le i \le n-1)$

किन्तु, सभी n प्रश्नों के त्रुटिपूर्ण उत्तर देने वाले विद्यार्थियों की संख्या $= 2^{n-n} = 2^0$, $(\because i = n)$

अतः कुल त्रुटिपूर्ण उत्तरों की संख्या

$= 1(2^{n-1} - 2^{n-2}) + 2(2^{n-2} - 2^{n-3}) + 3(2^{n-3} - 2^{n-4})$

$+ \ldots\ldots\ldots + (n-1)(2^1 - 2^0) + n(2^0)$

$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + 2^0 = 2^n - 1$

($\because$ यह गुणोत्तर श्रेणी है)

$\therefore$ दिये अनुसार,

$2^n - 1 = 2047 \Rightarrow 2^n = 2048 = 2^{11} \Rightarrow n = 11$.

14. (b) पूर्णांकों 1 से 999 तक लिखने में अंक 3 की पुनरावृत्ति (बार-बार आने) की संख्या ज्ञात करनी है। (चूँकि 1000 में अंक 3 नहीं है) अब 1 से 999 तक की कोई भी पूर्णांक संख्या 3 अंकों वाली संख्या $x\,y\,z$ होती है, जहाँ अंक x, y, z कोई भी अंक 0, 1, 2, 3,............,8,9 में से एक अंक होता है।

प्रथमतः हम उन पूर्णांकों की गणना करें जिनमें 3 मात्र एक बार आता है। चूँकि 3 एक स्थान पर ${}^3C_1$ प्रकार से आ सकता है, ऐसी संख्याओं की संख्या $= {}^3C_1 \,.\, (9 \times 9) = 3 \,.\, 9^2$

पुनः 3 ठीक दो स्थानों पर ${}^3C_1.9$ संख्याओं में आ सकता है अन्ततः एक 3 सभी तीन स्थानों पर आ सकता है, मात्र एक संख्या 333 में।

$\therefore$ अंक 3 की पुनरावृत्ति होने की संख्या

$1 \times (3 \times 9^2) + 2 \times (3 \times 9) + 3 \times 1 = 300$.

15. (a) तीन व्यक्तियों *A, B, C* को इन्हीं अक्षरों के क्रम में (बोलने) भाषण देने के लिये, प्रथम 10 स्थानों में से 3 स्थानों का चयन ${}^{10}C_3$ प्रकार से किया जा सकता है। शेष 7 स्थानों के लिये 7 व्यक्ति $7\,!$ प्रकार से विन्यासित किये जा सकते हैं।

$\therefore$ सभी 10 व्यक्तियों के भाषण देने के विभिन्न क्रमों की संख्या

${}^{10}C_3 \,.\, 7\,! = \frac{10\,!}{3\,!} = \frac{10\,!}{6}$ है।

16. (a) चूँकि किसी भी प्रश्न के कम से कम अंक (निर्धारित) दो हैं, अतः किसी एक प्रश्न हेतु अधिकतम अंक $16 = (30 - 2 \times 7)$ निर्धारित हो सकते हैं। यदि किसी i वें प्रश्न के निर्धारित अंक n_i हों तब $n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_8 = 30$, (जहाँ $2 \le n_i \le 16$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, 8$ के लिये)

अतः, अभीष्ट प्रकारों की संख्या

$= (x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{16})^8$ के विस्तार में x^{30} का गुणांक

$= x^{16}(1 + x + \ldots\ldots\ldots x^{14})^8$ के विस्तार में x^{30} का गुणांक

$= x^{16}\left(\frac{1 - x^{15}}{1 - x}\right)^8$ के विस्तार में x^{30} का गुणांक

$= (1-x)^{-8} \,.\, (1 - x^{15})^8$ के विस्तार में x^{14} का गुणांक

$= \left\{1 + \frac{8}{1\,!}x + \frac{8.9}{2\,!}x^2 + \frac{8.9.10}{3\,!}x^3 + \ldots\ldots\right\}(1 - {}^8C_1 x^{15} + \ldots\ldots)$

के विस्तार में x^{14} का गुणांक

$= \{1 + {}^8C_1 x + {}^9C_2 x^2 + {}^{10}C_3 x^3 + \ldots.\}$ में x^{14} का गुणांक

($\because$ दूसरे कोष्ठक में x^0, x^{15} इत्यादि की घातें हैं)

$= {}^{21}C_{14} = {}^{21}C_7$.

17. (a) अभीष्ट प्रकार $= \frac{8\,!}{2\,!\,3\,!} \times \frac{5\,!}{4\,!} = 16800$.

{चूँकि IEEEENDPNDNC में 8 अक्षर हैं}

18. (c) माना संदूकों पर A, B, C अंकित है। हमें देखना है कि कोई भी संदूक खाली न रहे एवं सभी 5 गेंदें अन्दर रखनी हैं। अतः दो सम्भावनायें हैं।

(i) किसी भी एक में 3 गेंदे एवं शेष में एक-एक

A (1), B (1), C (3)$= {}^5C_1.{}^4C_1.{}^3C_3 = 5.4.1 = 20$

यह कार्य तीन प्रकार से किया जा सकता है,

$\therefore$ कुल तरीके $= 20 \times 3 = 60$

(ii) किन्हीं दो में दो-दो एवं शेष में एक A (2), B (2), C (1)

$= {}^5C_2.{}^3C_2.{}^1C_1 = 10 \times 3 \times 1 = 30$

यह भी तीन प्रकार से किया जा सकता है।

$\therefore$ कुल प्रकार $= 30 \times 3 = 90$.

अतः, अभीष्ट कुल तरीके $= 60 + 90 = 150$.

19. (b) 1 औरत व 4 आदमी $= {}^4C_1 \times {}^6C_4 = 60$

2 औरत व 3 आदमी $= {}^4C_2 \times {}^6C_3 = 120$

3 औरत व 2 आदमी $= {}^4C_3 \times {}^6C_2 = 60$

4 औरत व 1 आदमी $= {}^4C_4 \times {}^6C_1 = 6$

अभीष्ट प्रकार $= 60 + 120 + 60 + 6 = 246$.

20. (c) कुल शब्दों की संख्या $= \frac{6!}{2!} = 360$

उन शब्दों की संख्या जिनमें 'B' व 'H' एक साथ हैं

$= \frac{5!}{2!} \times 2! = 120$

अतः उन शब्दों की संख्या जिनमें 'B' व 'H' एक साथ नहीं हैं $= 360 - 120 = 240$.

21. (d) 10 व्यक्तियों में से A को टीम में रखना ही है तथा G व H को बाहर करना है। अब हमें 7 में से 4 व्यक्ति चुनने हैं। यह चयन ${}^7C_4$ प्रकार से किया जा सकता है तथा इन पाँच व्यक्तियों को एक पंक्ति में $5!$ प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है। अतः कुल सम्भव तरीके $= {}^7C_4.5! = {}^7C_3.(5!)$.

22. (c) चूँकि संख्या 1000 में अंक 5 नहीं आता है। अतः हमें 1 से लेकर 999 तक की संख्याओं में अंक 5 की पुनरावृत्ति संख्या ज्ञात करनी है। 1 से 999 के बीच की संख्यायें $xyz, 0 \le x, y, z \le 9$ प्रकार की होंगी। उन संख्याओं, जिनमें 5 सिर्फ एक बार आया है, की संख्या $= ({}^3C_1).9 \times 9 = 243$

उन संख्याओं, जिनमें 5 दो बार आया है, की संख्या

$= ({}^3C_2).9 = 27$

उन संख्याओं, जिनमें 5 तीन बार आया है, की संख्या = 1

अतः 5 आने की कुल संख्या

$= 1 \times 243 + 2 \times 27 + 3 \times 1 = 300$.

23. (c) यदि n में 3 के घातांक को $E(n)$ प्रदर्शित करता है तब 3 से विभाजित होने वाली तथा 100 से कम सबसे बड़ी संख्या 99 है।

$E(100!) = E(1.2.3.4....99.100)$

$= E(3.6.9....99) = E[(3.1)(3.2)(3.3)........(3.33)]$

$= 33 + E(1.2.3......33)$

अब $E(1.2.3......33) = E(3.6.9....33)$

$= E[(3.1)(3.2)(3.3)........(3.11)]$

$= 11 + E(1.2.3.....11)$

एवं $E(1.2.3....11) = E(3.6.9) = E[(3.1)(3.2)(3.3)]$

$3 + E(1.2.3) = 3 + 1 = 4$

अतः, $E(100!) = 33 + 11 + 4 = 48$.

24. (c) यहाँ $1M, 4I, 4S$ तथा $2P$ हैं

अतः एक या अधिक अक्षरों के चयन की कुल संख्या $= (1+1)(4+1)(4+1)(2+1) - 1 = 149$.

25. (c) अभीष्ट संख्या $= (x^0 + x^1 + ... + x^m)^4$ में x^{2m} का गुणांक

$= \left(\frac{1-x^{m+1}}{1-x}\right)^4$ में x^{2m} का गुणांक

$= (1-x^{m+1})^4(1-x)^{-4}$ में x^{2m} का गुणांक

$= (1 - 4x^{m+1} + 6x^{2m+2} + ...)$

$\left(1 + 4x + ... + \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3!}x^r + ...\right)$ में x^{2m} का गुणांक

$= \frac{(2m+1)(2m+2)(2m+3)}{6} - 4m\frac{(m+1)(m+2)}{6}$

$= \frac{(m+1)(2m^2+4m+3)}{3}$.

26. (c) माना n पुरुष प्रतियोगी हैं तब पुरुषों के बीच खेले गये मैचों की संख्या $2.{}^nC_2$ है तथा पुरुषों द्वारा महिलाओं के साथ खेले गए मैचों की संख्या $2.(2n)$ है।

$\therefore 2.{}^nC_2 - 2.2n = 66$, (संकल्पना से)

$\Rightarrow n^2 - 5n - 66 = 0 \Rightarrow n = 11$

अतः, प्रतियोगियों की संख्या = 11 पुरुष + 2 महिलाएँ = 13.

27. (b) प्रत्येक बच्चा अन्य दो बच्चों के साथ जितनी बार चाहे जा सकता है।

अतः, अभीष्ट प्रकारों की संख्या $= {}^7C_2 = 21$.

28. (b) कुल पुस्तकों की संख्या $= a + 2b + 3c + d$

चूँकि दो पुस्तकों में से प्रत्येक की b प्रतियाँ, तीन पुस्तकों में से प्रत्येक की c प्रतियाँ तथा d पुस्तकों की एक-एक प्रति है, अतः कुल व्यवस्थाओं की संख्या $\frac{(a+2b+3c+d)!}{a!(b!)^2(c!)^3}$ है।

29. (b) चूँकि 2 व्यक्ति कार चला सकते हैं, इसलिए हम इन दो में से एक का चयन करते हैं। यह $^2C_1$ प्रकार से हो सकता है। अब बचे हुए 5 व्यक्तियों में से 2 व्यक्तियों का चयन $^5C_2$ प्रकार से करते हैं। इसलिए कार के भरने के कुल प्रकार $^5C_2 \times {}^2C_1 = 20$ हैं।

30. (d) चूँकि गेंदों को एक पंक्ति में व्यवस्थित करना है जिससे निकटवर्ती गेंदें भिन्न रंग की हों। इसलिए हम एक सफेद गेंद या काली गेंद से प्रारम्भ कर सकते हैं। यदि हम सफेद गेंद से प्रारम्भ करते हैं, तब हम पाते हैं कि 1 से $(n+1)$ तक अंकित $(n+1)$ सफेद गेंदें $(n+1)!$ प्रकार से व्यवस्थित की जा सकती हैं। अब $(n+1)$ सफेद गेंदों के बीच में $(n+2)$ स्थान प्राप्त होंगे जो कि $(n+1)$ काली गेंदों के द्वारा $(n+1)!$ प्रकार से भरे जा सकते हैं। इसलिए निकटवर्ती गेंदों के भिन्न रंग होने तथा प्रथम गेंद के सफेद होने की कुल व्यवस्थाओं की संख्या $(n+1)! \times (n+1)! = [(n+1)!]^2$ है। लेकिन हम एक काली गेंद से भी प्रारम्भ कर सकते है। अतः अभीष्ट व्यवस्थाओं की संख्या $2[(n+1)!]^2$ है।

31. (a) 12 व्यक्ति एक गोल मेज के चारों ओर $11!$ प्रकार से बैठ सकते हैं। 2 विशेष व्यक्तियों के एक के बाद एक बैठने के कुल प्रकार $10! \times 2!$ हैं।

अतः अभीष्ट व्यवस्थाएँ $= 11! - 10! \times 2! = 9 \times 10!$.

32. (a) 5000 से 10,000 के बीच की कोई संख्या हजारवें स्थान पर 5, 6, 7, 8, 9 में से कोई भी अंक रख सकती है। इसलिए हजारवां स्थान 5 प्रकार से भर सकता है। शेष 3 स्थान शेष 8 अंकों से $^8P_3$ प्रकार से भर सकते हैं।

अतः अभीष्ट संख्यायें = $5 \times {}^8P_3$.

33. (c) परिणाम $r = 1, 2$ के लिए सही है। यह आसानी से गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सिद्ध किया जा सकता है कि परिणाम r के लिए भी सही है।

34. (c) यहाँ दो P, दो R, तीन O, एक I, एक T, एक N अर्थात् 6 प्रकार के अक्षर हैं। हमें 4 अक्षरों के शब्द बनाने हैं। हम चार स्थितियों पर विचार करते हैं

(i) सभी 4 अक्षर भिन्न हों : चयन $^6C_4 = 15$ प्रकार से हो सकता है तथा व्यवस्थाएँ $= 15 \,.\, 4! = 15 \times 24 = 360$ हो सकती हैं।

(ii) दो भिन्न तथा दो एकसमान हों : $^3C_1 = 3$ प्रकार से P, R तथा O चुने जा सकते हैं। एक युग्म चुनने के बाद हम 5 भिन्न अक्षरों में से 2 अक्षर $^5C_2 = 10$ प्रकार से चुन सकते हैं। अतः चयन के प्रकारों की संख्या $10 \times 3 = 30$ है एवं प्रत्येक चयन, 4 अक्षरों में से 2 एकसमान अक्षर रखते हैं तथा वे $\frac{4!}{2!} = 12$ प्रकार से व्यवस्थित किए जा सकते हैं। अतः व्यवस्थाओं की संख्या $12 \times 30 = 360$ होगी।

(iii) दो एक प्रकार के तथा अन्य दो एक प्रकार के हों : इन तीन एकसमान अक्षरों के समूहों में से हम दो समूह $^3C_2 = 3$ प्रकार से चुन सकते हैं। इस प्रकार का प्रत्येक चयन 4 अक्षर रखेगा जिसमें से 2 एक प्रकार के एकसमान तथा दो अन्य एकसमान होंगे। यह $\frac{4!}{2!2!} = 6$ प्रकार से व्यवस्थित किए जा सकते हैं।

अतः अभीष्ट संख्या $3 \times 6 = 18$ है।

(iv) **तीन एकसमान तथा एक भिन्न हों** : यहाँ केवल एक समूह 3 एक समान अक्षर रखता है तथा यह 1 प्रकार से चुना जा सकता है। शेष एक अक्षर शेष 5 अक्षरों में से 5 प्रकार से चुना जा सकता है।

अतः चयनों की संख्या =5 एवं इन चार अक्षरों की व्यवस्थाओं की संख्या = $\frac{4!}{3!} = 4$

$\therefore$ इस स्थिति में व्यवस्थायें $= 5 \times 4 = 20$ होंगी

अब (i), (ii), (iii) व (iv) से,

अभीष्ट व्यवस्थाओं की संख्या $= 360 + 360 + 18 + 20 = 758$.

35. (d) 'MORADABAD' में तीन A, दो D तथा अन्य चार भिन्न अर्थात् 6 भिन्न प्रकार के अक्षर हैं। हमें चार अक्षरों के शब्द निर्मित करना है, तब

(i) सभी भिन्न हों: $^6P_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.

(ii) दो एकसमान तथा एक भिन्न हों: $^2C_1 \times {}^5C_2 \times \frac{4!}{2!} = 240$

(iii) तीन एकसमान तथा एक भिन्न हों: $^1C_1 \times {}^5C_1 \times \frac{4!}{3!} = 20$

(iv) दो एकसमान तथा अन्य दो एकसमान हों:

$^2C_2 \times \frac{4!}{2!2!} = 6$

इसलिए अभीष्ट शब्दों की कुल संख्या
$= 360 + 240 + 20 + 6 = 626$.

36. (b) सात लड़कों को एक पंक्ति में बैठाने के कुल प्रकार $= 7!$, अतः कुल प्रकार जिससे दो लड़कियाँ एक साथ न बैठें $= 7! \times {}^8P_3$.

37. (d) व्यंजक $= {}^nC_r + 2 \,.\, {}^nC_{r-1} + {}^nC_{r-2}$

$$= ({}^nC_r + {}^nC_{r-1}) + ({}^nC_{r-1} + {}^nC_{r-2})$$

$$= {}^{n+1}C_r + {}^{n+1}C_{r-1} = {}^{n+2}C_r.$$

38. (b) $\because$ $30 = 2 \times 3 \times 5$. अतः $a=2$ या $b = 2$ या $c=2$ (3 प्रकार)। इसी प्रकार 3 और 5 को भी 3 – 3 प्रकार से लिख सकते हैं अतः हलों की संख्या $= 3 \times 3 \times 3 = 27$.

39. (c) यहाँ 4 विषम अंकों 3, 3, 5, 5 के लिये 4 सम स्थान हैं

अतः अभीष्ट प्रकार $= \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{5!}{2!\,3!} = 60$.

40. (a) "CRICKET" शब्द से पहले आने वाले कुल शब्दों की संख्या $= 4 \times 5! + 2 \times 4! + 2! = 530$.

s

1. 5 एकसमान गेंदों को 10 एकसमान बॉक्सों में कितने प्रकार से रखा जा सकता है, ताकि किसी भी बॉक्स में एक से अधिक गेंद न हो

(a) 10 !
(b) $\frac{10!}{5!}$
(c) $\frac{10!}{(5!)^2}$
(d) इनमें से कोई नहीं

2. 8 कुर्सियों पर 1 से 8 तक के अंक अंकित हैं। 2 महिलाओं तथा 3 पुरुषों में से प्रत्येक एक कुर्सी पर बैठना चाहता है। पहले 1 से 4 तक के अंकों वाली कुर्सियों में से महिलायें कुर्सियाँ चुनती हैं तथा शेष कुर्सियों में से पुरुष कुर्सियाँ चुनते हैं, तो कितने प्रकार से इन्हें बिठाया जा सकता है [IIT 1982, 89; Pb. CET 2000]

(a) $^6C_3 \times {^4C_2}$
(b) $^4C_2 \times {^4P_3}$
(c) $^4P_2 \times {^4P_3}$
(d) इनमें से कोई नहीं

3. एक त्रिभुज ABC की भुजाओं AB, BC, CA पर क्रमशः 3, 4 तथा 5 बिन्दु स्थित हैं। इन बिन्दुओं से निर्मित कुल त्रिभुजों की संख्या है [IIT 1984]

(a) 205
(b) 220
(c) 210
(d) इनमें से कोई नहीं

4. P, Q, R व S को व्याख्यान (lectures) देना है तो व्यवस्था करने वाला इन्हें कितने क्रमों में व्यवस्थित कर सकता है [BIT Ranchi 1991; Pb. CET 1991]

(a) 4
(b) 12
(c) 256
(d) 24

5. माना A एक समुच्चय है जिसमें 10 अवयव हैं, तो A से A पर कुल कितने फलन होंगे [MNR 1992]

(a) $10!$
(b) 10^{10}
(c) 2^{10}
(d) $2^{10}-1$

6. अंकों 0, 1, 2, 3, 4, 5 की सहायता से, 3000 से बड़ी कुल कितनी संख्यायें बनायी जा सकती हैं, जबकि अंकों की पुनरावृत्ति न हों [IIT 1976]

(a) 180
(b) 360
(c) 1380
(d) 1500

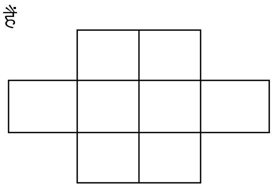
7. शब्द 'INSURANCE' के अक्षरों से कुल कितने शब्द बनाये जा सकते हैं, यदि सभी स्वर एक साथ रहें [Dhanbad Engg. 1971]

(a) 18270
(b) 17280
(c) 12780
(d) इनमें से कोई नहीं

8. किसी परीक्षा में a_i विद्यार्थियों ने कम से कम i प्रश्नों के गलत उत्तर दिये, जहाँ $i = 1, 2, 3, ...k$. किसी भी विद्यार्थी ने k से ज्यादा उत्तर गलत नहीं दिये, तो दिये गये कुल गलत उत्तरों की संख्या है [IIT 1973] [IIT 1982]

(a) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + ... ka_k$
(b) $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k$
(c) शून्य
(d) इनमें से कोई नहीं

9. छः 'X' को सम्मुख आकृति के वर्गों में इस प्रकार रखना है कि प्रत्येक पंक्ति में कम से कम एक 'X' अवश्य आता हो, तो इसके कुल प्रकार हैं [IIT 1978, 89]



(a) 28
(b) 27
(c) 26
(d) इनमें से कोई नहीं

10. 9 स्त्रियों व 8 पुरुषों से 12 सदस्यों की एक समिति बनानी है जिसमें कम से कम 5 स्त्रियों का होना आवश्यक है तो उन समितियों की संख्यायें जिनमें स्त्रियाँ बहुमत में हैं एवं पुरुष बहुमत में हैं, क्रमशः हैं [IIT 1994]

(a) 4784, 1008
(b) 2702, 3360
(c) 6062, 2702
(d) 2702, 1008

11. एक हॉल में 10 बल्ब हैं। प्रत्येक को स्वतंत्र रूप से ऑन (on) किया जा सकता है, तो हॉल को कुल कितने प्रकार से प्रकाशित किया जा सकता है [Roorkee 1990]

(a) 10^2
(b) 1023
(c) 2^{10}
(d) 10 !

12. यदि 'KRISNA' शब्द के अक्षरों को सभी सम्भव तरीकों से लिखा जायें तथा इस प्रकार प्राप्त शब्दों को शब्द कोष (Dictionary) के अनुसार लिखा जाये तो शब्द 'KRISNA' की श्रेणी (Rank) होगी

(a) 324
(b) 341
(c) 359
(d) इनमें से कोई नहीं

13. सात अंकों की उन संख्याओं की कुल संख्या, जिनके अंकों का योगफल सम है, है

(a) 9000000
(b) 4500000
(c) 8100000
(d) इनमें से कोई नहीं

14. एक कक्षा के 20 लड़कों को प्रथम तथा द्वितीय श्रेणी गणित, प्रथम तथा द्वितीय श्रेणी भौतिकी, प्रथम श्रेणी रसायन तथा प्रथम श्रेणी अंग्रेजी के पुरस्कार कितने प्रकार से दिए जा सकते हैं

(a) $20^4 \times 19^2$
(b) $20^3 \times 19^3$
(c) $20^2 \times 19^4$
(d) इनमें से कोई नहीं

15. यदि $a_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{^nC_r}$ है, तो $\sum_{r=0}^{n} \frac{r}{^nC_r} =$ [IIT 1998]

(a) $(n-1)\, a_n$
(b) na_n

(c) $\frac{1}{2}na_n$ (d) इनमें से कोई नहीं

16. यदि ${}^{n-1}C_3 + {}^{n-1}C_4 > {}^nC_{3,}$ तब n का मान होगा [RPET 2000]

(a) 7 (b) < 7

(c) > 7 (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

17. शब्द "INTEGER" के अक्षरों से विभिन्न प्रकार के शब्द बनाये जाते हैं। यदि m_1 उन शब्दों की संख्या है, जिनमें I व N साथ-साथ नहीं हैं तथा m_2 उन शब्दों की संख्या है, जिनमें I प्रथम अक्षर तथा R अंतिम अक्षर है, तब m_1/m_2 का मान होगा

[AMU 2000]

(a) 30 (b) 60

(c) 90 (d) 180

18. एक महिला अपने 6 अतिथियों को रात्रिभोज पर आमंत्रित करती है, वह 10 मित्रों में से उन अतिथियों को कुल कितने प्रकार से आमंत्रित कर सकती है, जबकि कोई दो मित्र एक साथ रात्रिभोज में न आयें [DCE 2001]

(a) 112 (b) 140

(c) 164 (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

19. 22 खिलाड़ियों में से 10 खिलाड़ियों की एक टीम कितने प्रकार से बनाई जा सकती है, जबकि 6 विशेष खिलाड़ी सदैव टीम में सम्मिलित रहें तथा 4 विशेष खिलाड़ी सदैव टीम से बाहर रहें

[RPET 2002]

(a) ${}^{22}C_{10}$ (b) ${}^{18}C_3$

(c) ${}^{12}C_4$ (d) ${}^{18}C_4$

20. किसी वृत्त की परिधि पर n विभिन्न बिन्दु हैं। यदि इन बिन्दुओं को शीर्ष लेकर बनने वाले पंचभुजों की संख्या, बनने वाले त्रिभुजों की संख्या के बराबर हो, तो n का मान होगा [AMU 2002]

(a) 7 (b) 8

(c) 15 (d) 30

AS Answers and Solutions

(SET - 6)

1. (c) 10 सन्दूकों में से 5 चुनने हैं, चूँकि गेंदें व सन्दूक एकसमान हैं (परन्तु वे भिन्न-भिन्न स्थान प्राप्त कर सकते हैं)

अतः अभीष्ट प्रकार $= {}^{10}C_5 = \frac{10\,!}{(5\,!)^2}$.

2. (d) अभीष्ट प्रकार = ${}^4P_2 \times {}^6P_3$

{महिलाओं द्वारा कुर्सियों का चयन करने के बाद 6 कुर्सियाँ शेष बचेंगी}.

3. (a) समतल में कुल 3 + 4+ 5 = 12 बिन्दु हैं।

अभीष्ट त्रिभुजों की संख्या = (12 बिन्दुओं से बने त्रिभुजों की संख्या) – (समरेख बिन्दुओं से बने त्रिभुजों की संख्या)

$= {}^{12}C_3 - ({}^3C_3 + {}^4C_3 + {}^5C_3) = 220 - (1+4+10) = 205$.

4. (d) अभीष्ट विन्यासों के प्रकार $= {}^4P_4 = 24$

5. (b) A से A पर भिन्न फलनों की कुल संख्या n^r अर्थात् 10^{10} है।

6. (c) सभी 5 अंकों व 6 अंकों की संख्यायें 3000 से बड़ी होंगी। अतः 5 अंकों की संख्यायें $= {}^6P_5 - {}^5P_5 = 600$

{चूँकि वह स्थिति जिसमें '0' दस हजार के स्थान पर हो, हटाना है}

इसी प्रकार 6 अंकों की संख्यायें = $6\,! - 5\,! = 600$

अब 4 अंकों की वे संख्यायें जो 3000 से बड़ी हैं, के प्रथम स्थान पर 3, 4 या 5 होना चाहिये। यह तीन प्रकार से किया जा सकता है एवं शेष तीन अंक पांच अंकों से ${}^5P_3$ प्रकार से भरे जा सकते हैं, अर्थात् चार अंकों की कुल संख्यायें $= {}^5P_3 \times 3 = 180$

अतः अभीष्ट संख्यायें $= 600 + 600 + 180 = 1380$.

7. (d) IUAENSRNC

स्पष्टतः, अभीष्ट शब्दों की संख्या $= \frac{6\,!}{2\,!} \times 4\,! = 8640$.

8. (b) कुल गलत उत्तरों की संख्या

$= 1(a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + \ldots\ldots + (k-1)(a_{k-1} - a_k) + ka_k$

$= a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_k$.

9. (c) 8 वर्गों में से 6 'X' को ${}^8C_6 = 28$ प्रकार से रख सकते हैं। परन्तु इसमें वे दो तरीके भी सम्मिलित हैं, जिसमें ऊपर वाली पंक्ति में एक भी X न हो या सबसे नीचे वाली पंक्ति में एक भी X न हो, अतः अभीष्ट तरीके = $28 - 2 = 26$.

10. (d) वह तरीके जिनमें कम से कम 5 महिलाओं को समिति में रखा जा सकता है

$= {}^9C_5 \times {}^8C_7 + {}^9C_6 \times {}^8C_6 + {}^9C_7 \times {}^8C_5 + {}^9C_8 \times {}^8C_4 + {}^9C_9 \times {}^8C_3$

$= 1008 + 2352 + 2016 + 630 + 56 = 6062$

(i) महिलायें बहुसंख्यक हों,

$(2016 + 630 + 56) = 2702$.

(ii) पुरुष 1008 स्थितियों में बहुसंख्यक हैं।

11. (b) $2^{10} - 1 = 1023, -1$ (एक स्थिति जब कोई भी लेम्प न जलाया जाए, अग्राहय है)

12. (a) A से शुरू होने वाले शब्द $= 5\,! = 120$

I से शुरू होने वाले शब्द = 5 ! = 120

KA से शुरू होने वाले शब्द = 4 ! = 24

KI से शुरू होने वाले शब्द = 4 ! = 24

KN से शुरू होने वाले शब्द = 4 ! = 24

KRA से शुरू होने वाले शब्द = 3 ! = 6

KRIA से शुरू होने वाले शब्द = 2 ! = 2

KRIN से शुरू होने वाले शब्द = 2 ! = 2

KRISA से शुरू होने वाले शब्द = 1 ! = 1

KRISNA से शुरू होने वाले शब्द = 1 ! = 1

अतः शब्द KRISNA की श्रेणी (Rank) 324 है।

13. (b) माना $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ एक सात अंकों की संख्या को प्रदर्शित करता है। तब x_1; 1, 2, 3, ..., 9 मान रखता है तथा $x_2, x_3, \ldots x_7$ सभी 0, 1, 2, 3, ..., 9 मान रखते हैं। यदि हम $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_6$ को स्थिर लें, तब योगफल $x_1 + x_2 + \ldots.. + x_6$ या तो सम है या विषम है। चूँकि x_7 का मान 0, 1, 2, ...,9 कुछ भी हो सकता है। अतः बनने वाली 5 संख्याएँ सम तथा 5 विषम होंगी। अतः संख्याओं की अभीष्ट संख्या $= 9\,.\,10\,.\,10\,.\,10\,.\,10\,.\,10\,.\,5 = 4500000$.

14. (a) चार प्रथम पुरस्कार 20^4 प्रकार से दिए जा सकते हैं, चूँकि गणित का प्रथम पुरस्कार 20 प्रकार से दिया जा सकता है, भौतिकी का प्रथम पुरस्कार भी 20 प्रकार से दिया जा सकता है। इसी प्रकार रसायन तथा अंग्रेजी का प्रथम पुरस्कार भी 20 – 20 प्रकार से दिया जा सकता है। (याद रहे कि एक लड़का चारों विषयों में प्रथम आ सकता है)। दो द्वितीय पुरस्कार 19^2 प्रकार से दिए जा सकते हैं, चूँकि एक लड़का दोनों प्रथम तथा द्वितीय पुरस्कार नहीं ले सकता है।

अतः अभीष्ट प्रकारों की संख्या $= 20^4 \times 19^2$.

15. (c) दिया है, $a_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{^nC_r}$

माना कि $b_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{r}{^nC_r}$

तो $b_n = \frac{0}{^nC_0} + \frac{1}{^nC_1} + \frac{2}{^nC_2} + ... + \frac{n}{^nC_n}$

और $b_n = \frac{n}{^nC_0} + \frac{n-1}{^nC_1} + \frac{n-2}{^nC_2} + ... + \frac{0}{^nC_n}$

[$\because {}^nC_0 = {}^nC_n, {}^nC_1 = {}^nC_{n-1}$..... क्योंकि ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$]

जोड़ने पर, $2b_n = \frac{n}{^nC_0} + \frac{n}{^nC_1} + ... + \frac{n}{^nC_n}$

$= n\left[\frac{1}{^nC_0} + \frac{1}{^nC_1} + \frac{1}{^nC_2} + ... + \frac{1}{^nC_n}\right] \Rightarrow 2b_n = na_n$

$\therefore b_n = \frac{1}{2}na_n$

16. (c) ${}^{n-1}C_3 + {}^{n-1}C_4 > {}^nC_3 \Rightarrow {}^nC_4 > {}^nC_3$

$\frac{^nC_4}{^nC_3} > 1 \Rightarrow \frac{n-3}{4} > 1 \Rightarrow n > 7$.

17. (a) 5 अक्षरो में से 'I' व 'N' को छोड़कर दो एक जैसे (E) हैं। इन अक्षरों को एक रेखा में $\frac{5!}{2!}$ तरीके से व्यवस्थित कर सकते हैं। इस प्रकार की व्यवस्था में 'I' और 'N' को 6 रिक्त स्थानों में ${}^6P_2$ प्रकार से व्यवस्थित कर सकते हैं। अतः अभीष्ट प्रकार $= \frac{5!}{2!}.{}^6P_2 = m_1$. अब, यदि शब्द 'I' से प्रारम्भ होकर 'R' से समाप्त होता है तो शेष 5 अक्षरों की व्यवस्थाओं के प्रकार $= \frac{5!}{2!} = m_2$

$\therefore \frac{m_1}{m_2} = \frac{5!}{2!}.\frac{6!}{4!}.\frac{2!}{5!} = 30$.

18. (b) या तो 8 में से 6 अतिथि चुने जायें या 2 में से 1 और 8 में से 5 अतिथि चुने जायें।

अतः अभीष्ट प्रकार $= {}^8C_6 + {}^2C_1 + {}^8C_5 = 140$.

19. (c) चूँकि 6 विशेष खिलाड़ी अवश्य सम्मिलित करना हैं, जबकि 4 अन्य खिलाड़ी कभी सम्मिलित न हों अतः केवल 4 खिलाड़ियों का चयन 12 में से करना है।

$\therefore$ अभीष्ट प्रकार = ${}^{12}C_4$.

20. (b) ${}^nC_5 = {}^nC_3 \Rightarrow n = 8$.

* * *