Chapter

8

चरघातांकी तथा लघुगणकीय श्रेणियाँ

चरघातांकी श्रेणी

परिभाषा (संख्या e) (Definition (The number e))

जब n अनन्त की ओर अग्रसर हो, तो $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ की सीमा के मान को e से प्रदर्शित करते हैं,

अर्थात् $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+......... \infty$

$= 2.71$ (सन्निकट)

e के गुणधर्म (Properties of e)

(1) e का मान 2.7 तथा 2.8 के मध्य स्थित होता है, अर्थात् $2.7 < e < 2.8$ (चूँकि $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$, $n \ge 2$ के लिए)।

(2) e का दशमलव के बाद दस स्थानों तक सही मान 2.7182818284 होता है।

(3) e एक अपरिमेय संख्या है।

(4) e प्राकृतिक लघुगणक (नेपियर लघुगणक) का आधार होता है, अर्थात् $\ln x = \log_e x$ तथा $\log_{10} e$ को नेपियर स्थिरांक कहते हैं। $\log_{10} e = 0.43429448$, $\ln x = 2.303 \log_{10} x$

$\left(\because \ln x = \log_{10} x . \log_e 10 \text{ तथा} = \frac{1}{\log_{10} e} = 2.30258509\right)$

चरघातांकी श्रेणी का प्रसार (Expansion of exponential series)

$x \in R$ के लिए, $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+......+\frac{x^r}{r!}+......\infty$

अथवा $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$\therefore T_{n+1} = e^x$ के प्रसार में व्यापक पद $= \frac{x^n}{n!}$ तथा e^x के प्रसार में x^n का गुणांक $= \frac{1}{n!}$.

उपरोक्त श्रेणी को चरघातांकी श्रेणी कहते हैं तथा e^x को चरघातांकी फलन कहते हैं। चरघातांकी फलन को exp से भी निरूपित करते हैं, अर्थात् $\exp A = e^A$; $\therefore \exp x = e^x$

x के स्थान पर $-x$ रखने पर,

$$e^{-x} = 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+........+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+........\infty$$

$\therefore T_{n+1} = e^{-x}$ के प्रसार में व्यापक पद $= (-1)^n\frac{x^n}{n!}$ तथा e^{-x} के प्रसार में x^n का गुणांक $e^{-x} = \frac{(-1)^n}{n!}$.

चरघातांकी फलन a, (जहाँ $a > 0$)

(Exponential function a, where $a > 0$)

$\because a^x = e^{\log_e a^x} = e^{x \log_e a}$

$\therefore a^x = e^{\alpha x}$ ....(i) , जहाँ $\alpha = \log_e a$,

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}........+\frac{x^r}{r!}+........\infty$$

x के स्थान पर αx रखने पर,

$$e^{\alpha x} = 1+\frac{\alpha x}{1!}+\frac{\alpha^2 x^2}{2!}+\frac{\alpha^3 x^3}{3!}+.....+\frac{\alpha^r x^r}{r!}+.....\infty$$

अतः समीकरण (i) से,

$$a^x = 1+\frac{\log_e a}{1!}x+\frac{(\log_e a)^2}{2!}x^2+.......+\frac{(\log_e a)^r x^r}{r!}+........\infty$$

चरघातांकी श्रेणी के कुछ महत्वपूर्ण परिणाम
(Some standard results from exponential series)

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-k)!}=e$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.........\infty=e-1$

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+.........\infty=e-2$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.........\infty=e-1$

(5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}=\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+.........\infty=e-2$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+.........\infty=e-2$

(7) $\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+.......\infty=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

(8) $\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+.......\infty=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(9) $e^{ax}=1+\frac{(ax)}{1!}+\frac{(ax)^2}{2!}+\frac{(ax)^3}{3!}+......+\frac{(ax)^n}{n!}+......\infty$

$\therefore T_{n+1}=e^{ax}$ के प्रसार में व्यापक पद $=\frac{(ax)^n}{n!}$ तथा e^{ax} में x^n का गुणांक $=\frac{a^n}{n!}$.

लघुगणकीय श्रेणी

परिभाषा (Definition)

$\log_e(1+x)$ का प्रसार x की घातों में वह श्रेणी है, जो कि तभी संभव है जब $|x|<1$ हो।

लघुगणकीय श्रेणी का प्रसार (Expansion of logarithmic series)

यदि $|x|<1$ हो, तब $\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+........\infty$

लघुगणकीय श्रेणी में x के स्थान पर $-x$ रखने पर,

$$\log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-........\infty$$

या $-\log_e(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+........\infty$

लघुगणकीय श्रेणी के महत्वपूर्ण परिणाम
(Some important results from logarithmic series)

(1) (i) $\log_e(1+x)+\log_e(1-x)=\log_e(1-x^2)$

$$=-2\left\{\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+........\infty\right\},(-1<x<1)$$

(ii) $\log_e(1+x)-\log_e(1-x)=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+........\infty\right]$

या $\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+........\infty\right]$

(2) यदि $|x|$ का मान 1 से कम नहीं है, तो $\log_e(1+x)$ का प्रसार असंभव है। लघुगणकीय श्रेणी में $x=1$ रखने पर,

$$\log_e 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+........\infty$$

$$=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+........\infty$$

(3) जब $x=-1$, तब लघुगणकीय श्रेणी का योग ज्ञात नहीं कर सकते हैं, क्योंकि $\log(1-1)$ का मान संभव नहीं है।

चरघातांकी तथा लघुगणकीय श्रेणी में अंतर
(Difference between the exponential and logarithmic series)

(1) चरघातांकी श्रेणी $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+..........\infty$, में सभी पद धनात्मक होते हैं, जबकि लघुगणकीय श्रेणी $\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+........\infty$ के पद एकान्तर क्रम में धनात्मक तथा ऋणात्मक होते हैं।

(2) चरघातांकी श्रेणी में सभी पदों के हर (denominator) प्राकृत संख्याओं के क्रमगुणित (factorial) होते हैं, जबकि लघुगणकीय श्रेणी में क्रमगुणित (factorial) पद नहीं होते हैं।

(3) चरघातांकी श्रेणी x के सभी मानों के लिए वैध है, जबकि लघुगणकीय श्रेणी, $|x|<1$ के लिए ही वैध है।

Tips & Tricks

- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+.........\infty$

  $=\frac{e+e^{-1}}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-2)!}$.

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}=\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+.........\infty=\frac{e-e^{-1}}{2}$

  $=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$.

- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}=e=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}$.

- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=2e=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$.

- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{n!}=5e=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$.

- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^4}{n!}=15e=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!}$.

Ordinary Thinking

Objective Questions

चरघातांकी श्रेणी

1. यदि $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\infty$, तब $x =$

(a) $\log_e y$ (b) $\log_e \frac{1}{y}$

(c) e^y (d) e^{-y}

2. $1 + \frac{1+3}{2!} + \frac{1+3+5}{3!} + \frac{1+3+5+7}{4!} + ...\infty =$

(a) $e/2$ (b) e

(c) $2e$ (d) $3e$

3. $\frac{1.2}{1!} + \frac{2.3}{2!} + \frac{3.4}{3!} + \frac{4.5}{4!} + ...\infty =$

(a) $2e$ (b) $3e$

(c) $3e - 1$ (d) e

4. $1 + \frac{a+bx}{1!} + \frac{(a+bx)^2}{2!} + ... + \frac{(a+bx)^n}{n!} + ...$ के प्रसार में x^r का गुणांक है [MP PET 1989]

(a) $\frac{(a+b)^r}{r!}$ (b) $\frac{b^r}{r!}$

(c) $\frac{e^a b^r}{r!}$ (d) e^{a+b^r}

5. यदि $y = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + ...$, तब $x =$

(a) $\log_e(1-y)$ (b) $\frac{1}{\log_e(1-y)}$

(c) $\log_e \frac{1}{1-y}$ (d) $\log_e(1+y)$

6. $\frac{e^{5x} + e^x}{e^{3x}}$ के प्रसार में x^4 का गुणांक है

(a) $-6/5$ (b) 4/3

(c) $-4/3$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. $(1 + x + x^2)e^{-x}$ के प्रसार में x^2 का गुणांक है

(a) 1 (b) -1

(c) 1/2 (d) $-1/2$

8. $\frac{e^{7x} + e^{3x}}{e^{5x}}$ के प्रसार में अचर पद है

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

9. $\frac{2}{1!} + \frac{2+4}{2!} + \frac{2+4+6}{3!} + ...\infty =$ [MNR 1985]

(a) e (b) $2e$

(c) $3e$ (d) इनमें से कोई नहीं

10. $\left[1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + ...\infty\right]^2 - \left[1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + ...\infty\right]^2 =$

(a) 0 (b) 1

(c) -1 (d) 2

11. $1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + ...\infty =$ [MP PET 1991]

(a) e^{-1} (b) e

(c) $\frac{e + e^{-1}}{2}$ (d) $\frac{e - e^{-1}}{2}$

12. $(e^x - 1)^2$ के प्रसार में x^4 का गुणांक है

(a) 1/12 (b) 7/12

(c) 5/12 (d) इनमें से कोई नहीं

13. $1 + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^3}{4!} + ...\infty =$ [MNR 1976; MP PET 1997]

(a) $2e$ (b) $3e$

(c) $4e$ (d) $5e$

14. $\frac{2}{3!} + \frac{4}{5!} + \frac{6}{7!} + ...\infty =$

[MNR 1979; MP PET 1995, 2002; Pb. CET 2002]

(a) e (b) $2e$

(c) e^2 (d) $1/e$

15. $\frac{x^2 - y^2}{1!} + \frac{x^4 - y^4}{2!} + \frac{x^6 - y^6}{3!} + ...\infty =$

(a) $e^x - e^y$ (b) $e^{x^2} - e^{y^2}$

(c) $2 + e^{x^2} - e^{y^2}$ (d) $\frac{e^x - e^y}{2}$

16. $1 + \frac{a-b}{a} + \frac{1}{2!}\left(\frac{a-b}{a}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{a-b}{a}\right)^3 + ...\infty =$

(a) e^{b-a} (b) e^a

(c) $\frac{e}{e^{b/a}}$ (d) $\frac{e}{e^{a/b}}$

17. $3 + \frac{5}{1!} + \frac{7}{2!} + \frac{9}{3!} + ...\infty =$

(a) $3e$ (b) $5e$

(c) $5e - 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

18. $\frac{e^{4x} - 1}{e^{2x}}$ के प्रसार में x^2 का गुणांक है

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

19. $1 + \frac{a-bx}{1!} + \frac{(a-bx)^2}{2!} + \frac{(a-bx)^3}{3!} + ...\infty =$

(a) e^{a-bx} (b) $e^{a-bx} - 1$

(c) $1 + a\log_e(a-bx)$ (d) e^{-bx}

20. यदि $y = -\left(x^3 + \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + ...\right)$, तब $x =$ [MNR 1975]

(a) $\frac{1+e^y}{3}$ (b) $\frac{1-e^y}{3}$

(c) $(1-e^y)^{1/3}$ (d) $(1-e^y)^3$

21. $\frac{e^2+1}{2e} =$

(a) $1 + \frac{2}{2!} + \frac{2^2}{3!} + \frac{2^3}{4!} + ...\infty$

(b) $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + ...\infty$

(c) $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + ...\infty\right)$

(d) $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...\infty\right)$

22. $\left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + ...\right)\left(1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + ...\right) =$

(a) e^4 (b) $\frac{e^2-1}{e^2}$

(c) $\frac{e^4-1}{4e^2}$ (d) $\frac{e^4+1}{4e^2}$

23. $\frac{1^2.2}{1!} + \frac{2^2.3}{2!} + \frac{3^2.4}{3!} + ...\infty =$ [UPSEAT 1999]

(a) $6e$ (b) $7e$

(c) $8e$ (d) $9e$

24. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8(2)!} + \frac{1}{16(3)!} + \frac{1}{32(4)!} + ...\infty =$

(a) e (b) $\sqrt{e}$

(c) $\frac{\sqrt{e}}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

25. $\frac{2\frac{1}{2}}{1!} + \frac{3\frac{1}{2}}{2!} + \frac{4\frac{1}{2}}{3!} + \frac{5\frac{1}{2}}{4!} + ...\infty$ का मान है

(a) $1+e$ (b) $\frac{1+e}{e}$

(c) $\frac{e-1}{e}$ (d) इनमें से कोई नहीं

26. e^{e^x} के प्रसार में x^r का गुणांक है

(a) $\frac{1^r}{1!} + \frac{2^r}{2!} + \frac{3^r}{3!} + ...$ (b) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{r!}$

(c) $\frac{1}{r!}\left[\frac{1^r}{1!} + \frac{2^r}{2!} + \frac{3^r}{3!} + ...\right]$ (d) $\frac{e^r}{r!}$

27. यदि $T_n = \frac{3^n}{2(n!)} - \frac{1}{2(n!)}$, तब $S_\infty =$

(a) $\frac{e^3-1}{2}$ (b) $\frac{e^3-e}{2}$

(c) $\frac{e-3}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

28. श्रेणी $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...$ के अनन्त पदों तक का योग होगा [MP PET 1994]

(a) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (b) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(c) $\frac{e^{-x} - e^x}{2}$ (d) $\frac{-(e^x + e^{-x})}{2}$

29. निम्न में से कौन सत्य नही है [Kurukshetra CEE 1996]

(a) $\log(1+x) < x$, $x > 0$ के लिए

(b) $\frac{x}{1+x} < \log(1+x)$, $x > 0$ के लिए

(c) $e^x > 1 + x$, $x > 0$ के लिए

(d) $e^{-x} < 1 - x$, $x > 0$ के लिए

30. $1 + \frac{(\log_e n)^2}{2!} + \frac{(\log_e n)^4}{4!} + ... =$ [MP PET 1996]

(a) n (b) $1/n$

(c) $\frac{1}{2}(n + n^{-1})$ (d) $\frac{1}{2}(e^n + e^{-n})$

31. $1 + \frac{1+2}{2!} + \frac{1+2+3}{3!} + \frac{1+2+3+4}{4!} + ...\infty =$

[Roorkee 1999; MP PET 2003]

(a) e (b) $3e$

(c) $e/2$ (d) $3e/2$

32. $1 - \log 2 + \frac{(\log 2)^2}{2!} - \frac{(\log 2)^3}{3!} + ...$ का मान है

[MP PET 1998; Pb. CET 2000]

(a) 2 (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\log 3$ (d) इनमें से कोई नहीं

33. $\frac{e^{7x} + e^x}{e^{3x}}$ के प्रसार में x^n का गुणांक है [MP PET 1999]

(a) $\frac{4^{n-1} + (-2)^n}{n!}$ (b) $\frac{4^{n-1} + 2^n}{n!}$

(c) $\frac{4^{n-1} + (-2)^{n-1}}{n!}$ (d) $\frac{4^n + (-2)^n}{n!}$

34. यदि $S = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + ... + \infty$, तब $e^S =$

[MP PET 1999]

(a) $\log_e\left(\frac{4}{e}\right)$ (b) $\frac{4}{e}$

(c) $\log_e\left(\frac{e}{4}\right)$ (d) $\frac{e}{4}$

35. $\sqrt{e}$ का मान है [UPSEAT 1999]

(a) 1.648 (b) 1.547

(c) 1.447 (d) 1.348

36. $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + ...\ \infty =$ [AMU 1999]

(a) $e - 2$ (b) $\frac{2}{3}e - 1$

(c) 1 (d) 3/2

37. $1+2+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{2}{5!}+.....\infty=$ [Roorkee 2000]

(a) e^2 (b) $e+e^{-1}$

(c) $\frac{e-e^{-1}}{2}$ (d) $\frac{3e-e^{-1}}{2}$

38. $\frac{2}{1!}+\frac{6}{2!}+\frac{12}{3!}+\frac{20}{4!}+.......$का योग है [UPSEAT 2000]

(a) $\frac{3e}{2}$ (b) e

(c) $2e$ (d) $3e$

39. $\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-.....$ का योग है [DCE 2002]

(a) e (b) $e^{-\frac{1}{2}}$

(c) e^{-2} (d) इनमें से कोई नहीं

40. $\frac{1}{1.2}+\frac{1.3}{1.2.3.4}+\frac{1.3.5}{1.2.3.4.5.6}+.....\infty=$

[Kurukshetra CEE 2002]

(a) $15e$ (b) $e^{1/2}+e$

(c) $e^{1/2}-1$ (d) $e^{1/2}-e$

41. $1+x\log_e a+\frac{x^2}{2!}(\log_e a)^2+\frac{x^3}{3!}(\log_e a)^3+...=$

[EAMCET 2002]

(a) a^x (b) x

(c) $a^{\log_e x}$ (d) a

42. $\dfrac{1+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^4}{3!}+\frac{2^6}{4!}+.....\infty}{1+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{2^2}{4!}+....\infty}=$

(a) e^2 (b) e^2-1

(c) $e^{3/2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

43. $1+\frac{2^4}{2!}+\frac{3^4}{3!}+\frac{4^4}{4!}+.....\infty=$

(a) $5e$ (b) e

(c) $15e$ (d) $2e$

44. $(e^x-1)(e^{-x}+1)$ के प्रसार में x^3 का गुणांक है

(a) 0 (b) 1/3

(c) 2/3 (d) 1/6

45. $\frac{2}{1!}+\frac{4}{3!}+\frac{6}{5!}+\frac{8}{7!}+......\infty=$ [JMI CET 2000]

(a) $1/e$ (b) e

(c) $2e$ (d) $3e$

46. $1+\frac{3}{1!}+\frac{5}{2!}+\frac{7}{3!}+....\infty=$

(a) e (b) $2e$

(c) $3e$ (d) $4e$

47. $1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+....\infty=$ [MP PET 1986]

(a) e^x (b) e^{-x}

(c) e (d) e^{x^2}

48. $1+\frac{1+x}{2!}+\frac{1+x+x^2}{3!}+\frac{1+x+x^2+x^3}{4!}+.....\infty=$

(a) $\frac{e^x+1}{x+1}$ (b) $\frac{e^x+1}{x-1}$

(c) $\frac{e^x-e}{x+1}$ (d) $\frac{e^x-e}{x-1}$

49. $\frac{a+bx}{e^x}$ के प्रसार में x^r का गुणांक है

(a) $\frac{a-b}{r!}$ (b) $\frac{a-br}{r!}$

(c) $(-1)^r\frac{a-br}{r!}$ (d) इनमें से कोई नहीं

50. $1+\frac{4^2}{3!}+\frac{4^4}{5!}+......\infty=$

(a) $\frac{e^4+e^{-4}}{4}$ (b) $\frac{e^4-e^{-4}}{4}$

(c) $\frac{e^4+e^{-4}}{8}$ (d) $\frac{e^4-e^{-4}}{8}$

51. $1+\frac{2^2}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{4^2}{3!}+......\infty=$

(a) $2e$ (b) $3e$

(c) $4e$ (d) $5e$

52. $\frac{1-2x+3x^2}{e^x}$ के प्रसार में x^5 का गुणांक है

(a) $\frac{71}{120}$ (b) $-\frac{71}{120}$

(c) $\frac{31}{40}$ (d) $-\frac{31}{40}$

53. $1+\frac{2}{3!}+\frac{3}{5!}+\frac{4}{7!}+......\infty=$

(a) e (b) $2e$

(c) $e/2$ (d) $e/3$

54. $\frac{1}{2!}+\frac{1+2}{3!}+\frac{1+2+3}{4!}+......\infty=$ [EAMCET 2003]

(a) e (b) $2e$

(c) $e/2$ (d) इनमें से कोई नहीं

55. यदि $i=\sqrt{-1}$, तब $\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}=$

(a) $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+.....\infty$ (b) $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-.....\infty$

(c) $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+....\infty$ (d) $i\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-.....\infty\right]$

56. श्रेणी

$$\frac{1^2}{1\cdot 2!}+\frac{1^2+2^2}{2\cdot 3!}+\frac{1^2+2^2+3^2}{3\cdot 4!}+..+\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n\cdot(n+1)!}+...\infty$$

का योग है [AMU 2002]

(a) e^2 (b) $\frac{1}{2}(e+e^{-1})^2$

(c) $\frac{3e-1}{6}$ (d) $\frac{4e+1}{6}$

57. $\frac{2}{1!}\log_e 2+\frac{2^2}{2!}(\log_e 2)^2+\frac{2^3}{3!}(\log_e 2)^3+.....\infty=$

(a) 2
(b) 3
(c) 4
(d) इनमें से कोई नहीं

58. $1+\frac{\log_e x}{1!}+\frac{(\log_e x)^2}{2!}+\frac{(\log_e x)^3}{3!}+.....\infty=$

[Kurukshetra CEE 1998; JMI CET 2000]

(a) $\log_e x$
(b) x
(c) x^{-1}
(d) $-\log_e(1+x)$

59. $(1+3)\log_e 3+\frac{1+3^2}{2!}(\log_e 3)^2+\frac{1+3^3}{3!}(\log_e 3)^3+.....\infty=$

[Roorkee 1989]

(a) 28
(b) 30
(c) 25
(d) 0

60. 3^x के प्रसार में x^3 का गुणांक है

[Kerala (Engg.) 2005]

(a) $\frac{3^3}{6}$
(b) $\frac{(\log 3)^3}{3}$
(c) $\frac{\log(3^3)}{6}$
(d) $\frac{(\log 3)^3}{6}$
(e) $\frac{3}{3!}$

लघुगणकीय श्रेणी

1. $\frac{2}{1}.\frac{1}{3}+\frac{3}{2}.\frac{1}{9}+\frac{4}{3}.\frac{1}{27}+\frac{5}{4}.\frac{1}{81}+......\infty=$

(a) $\frac{1}{2}-\log_e\frac{2}{3}$
(b) $-\log_e\frac{2}{3}$
(c) $\frac{1}{2}+\log_e\left(\frac{2}{3}\right)$
(d) इनमें से कोई नहीं

2. $\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+......\infty=$

(a) $\frac{x}{1+x}-\log_e(1-x)$
(b) $\frac{x}{1+x}+\log_e(1-x)$
(c) $\frac{x}{1-x}-\log_e(1-x)$
(d) $\frac{x}{1-x}+\log_e(1-x)$

3. $\frac{x-1}{(x+1)}+\frac{1}{2}.\frac{x^2-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}.\frac{x^3-1}{(x+1)^3}+......\infty=$

(a) $\log_e x$
(b) $\log_e(1+x)$
(c) $\log_e(1-x)$
(d) $\log_e\frac{x}{1+x}$

4. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+.....\infty=$

(a) $\log_e\sqrt{2}$
(b) $\log_e 2-\frac{1}{2}$
(c) $\log_e 2$
(d) $\log_e 4$

5. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}.\frac{1}{4}+\frac{5}{3}.\frac{1}{8}+\frac{7}{4}.\frac{1}{16}+.....\infty=$

(a) $2-\log_e 2$
(b) $2+\log_e 2$
(c) $\log_e 4$
(d) इनमें से कोई नहीं

6. $\log_e\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=$

(a) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+.....\infty$
(b) $2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+.....\infty\right]$
(c) $2\left[x^2+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+.....\infty\right]$
(d) इनमें से कोई नहीं

7. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{1}{3(x+1)^3}+....\infty=$

(a) $\log_e\left(1+\frac{1}{x}\right)$
(b) $\log_e\left(1-\frac{1}{x}\right)$
(c) $\log_e\left(\frac{x}{x+1}\right)$
(d) इनमें से कोई नहीं

8. $\log_e(x+1)-\log_e(x-1)=$

(a) $2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+......\infty\right]$
(b) $\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+......\infty\right]$
(c) $2\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+...\infty\right]$
(d) $\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+...\infty\right]$

9. $\left(\frac{a-b}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a}\right)^3+.....=$

[MNR 1979; MP PET 1990; UPSEAT 2001, 02; AMU 2005]

(a) $\log_e(a-b)$
(b) $\log_e\left(\frac{a}{b}\right)$
(c) $\log_e\left(\frac{b}{a}\right)$
(d) $e^{\left(\frac{a-b}{a}\right)}$

10. $\dfrac{(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-....\infty}{(b-1)-\frac{(b-1)^2}{2}+\frac{(b-1)^3}{3}-.....\infty}=$

(a) $\log_b a$
(b) $\log_a b$
(c) $\log_e a-\log_e b$
(d) $\log_e a+\log_e b$

11. $\frac{1}{5}+\frac{1}{2}.\frac{1}{5^2}+\frac{1}{3}.\frac{1}{5^3}+.....\infty=$

(a) $\log_e\frac{4}{5}$
(b) $\log_e\frac{\sqrt{5}}{2}$
(c) $2\log_e\frac{\sqrt{5}}{2}$
(d) इनमें से कोई नहीं

12. $\log_e[(1+x)^{1+x}(1-x)^{1-x}]=$

(a) $\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+....\infty$
(b) $\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^6}{5.6}+....\infty$
(c) $2\left[\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^6}{5.6}+..\infty\right]$
(d) इनमें से कोई नहीं

13. $2\log_e x-\log_e(x+1)-\log_e(x-1)$ के प्रसार में x^{-4} का गुणांक है

(a) 1/2
(b) -1
(c) 1
(d) इनमें से कोई नहीं

14. $\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+...=$

[MP PET 1998]

(a) $\log(2/e)$
(b) $\log(e/2)$
(c) $2/e$
(d) e/2

15. यदि $b = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + ..$,तब $b + \frac{b^2}{2!} + \frac{b^3}{3!} + \frac{b^4}{4!} + ...\infty =$

(a) $\log_e a$ (b) $\log_e b$

(c) a (d) e^a

16. $\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + ...\infty =$

[Roorkee 1992; AIEEE 2003]

(a) $\log_e \frac{4}{e}$ (b) $\log_e \frac{e}{4}$

(c) $\log_e 4$ (d) $\log_e 2$

17. $1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\frac{1}{4^2} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)\frac{1}{4^3} + ...\infty =$

(a) $\log_e(2\sqrt{3})$ (b) $2\ \log_e 2$

(c) $\log_e 2$ (d) $\log_e\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

18. $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2}.\frac{1}{3.5} + \frac{1}{3}.\frac{1}{5.7} + ...\infty =$

(a) $2\log_e 2 - 1$ (b) $\log_e 2 - 1$

(c) $\log_e 2$ (d) इनमें से कोई नहीं

19. $\frac{4}{1.3} - \frac{6}{2.4} + \frac{12}{5.7} - \frac{14}{6.8} + ...\infty =$

(a) $\log_e 3$ (b) $\log_e 2$

(c) $2\log_e 2$ (d) इनमें से कोई नहीं

20. $\log_e x - \log_e(x-1) =$

(a) $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - .....\infty$ (b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + ...\infty$

(c) $2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + ...\infty\right)$ (d) $2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - ...\infty\right)$

21. $\log_e \frac{4}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + ...$

(a) $2\log_e \frac{4}{5}$ (b) $\log_e \frac{5}{4}$

(c) 1 (d) 0

22. $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^4} + \frac{1}{3n^6} + ...\infty =$

(a) $\log_e\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)$ (b) $\log_e\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$

(c) $\log_e\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

23. $\frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 + ...\infty =$

(a) $\log_e\left(\frac{m}{n}\right)$ (b) $\log_e\left(\frac{n}{m}\right)$

(c) $\log_e\left(\frac{m-n}{m+n}\right)$ (d) $\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{m}{n}\right)$

24. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}.\frac{1}{2^5} + ...\infty =$ [MP PET 1991]

(a) $\log_e\sqrt{\frac{3}{2}}$ (b) $\log_e\sqrt{3}$

(c) $\log_e\sqrt{\frac{1}{2}}$ (d) $\log_e 3$

25. यदि $4\left[x^2 + \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} + ...\right] = y^2 + \frac{y^4}{2} + \frac{y^6}{3} + ...$, तब

(a) $x^2y = 2x - y$ (b) $x^2y = 2x + y$

(c) $x = 2y^2 - 1$ (d) $x^2y = 2x + y^2$

26. $\log_a x$, $(a > 0)$ निम्न के लिए परिभाषित है [Roorkee 1990]

(a) सभी वास्तविक x के लिए

(b) सभी ऋणात्मक वास्तविक $x\ (x \neq 1)$ के लिए

(c) सभी धनात्मक वास्तविक $x\ (x \neq 0)$ के लिए

(d) $a \geq e$ के लिए

27. $\log_e 2 + \log_e\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_e\left(1 + \frac{1}{3}\right) + ... + \log_e\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) =$

(a) $\log_e 1$ (b) $\log_e n$

(c) $\log_e(1+n)$ (d) $\log_e(1-n)$

28. दी गयी श्रेणी $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + ...$ के अनन्त पदों तक का योग है [MP PET 1994]

(a) $\log_e\left(\frac{n+1}{n}\right)$ (b) $\log_e\left(\frac{n}{n+1}\right)$

(c) $\log_e\left(\frac{n-1}{n}\right)$ (d) $\log_e\left(\frac{n}{n-1}\right)$

29. $\log_4 2 - \log_8 2 + \log_{16} 2....$ का योग है

[MNR 1994; Roorkee 1994; MP PET 2000]

(a) e^2 (b) $\log_e 2$

(c) $\log_e 3 - 2$ (d) $1 - \log_e 2$

30. $\log_3 e - \log_9 e + \log_{27} e....$ का मान है

(a) $\log_3 2$ (b) $\log_2 3$

(c) $2\log_3 2$ (d) इनमें से कोई नहीं

31. $(0.5) - \frac{(0.5)^2}{2} + \frac{(0.5)^3}{3} - \frac{(0.5)^4}{4} + ...$ [MP PET 1995]

(a) $\log_e \frac{3}{2}$ (b) $\log_{10} \frac{1}{2}$

(c) $\log_e n!$ (d) $\log_e \frac{1}{2}$

32. $\log_a(1+x)$ के प्रसार मे x^n का गुणांक है

(a) $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (b) $\frac{(-1)^{n-1}}{n}\log_a e$

(c) $\frac{(-1)^{n-1}}{n}\log_e a$ (d) $\frac{(-1)^n}{n}\log_a e$

33. $\log_{10}\left(\frac{n}{n-1}\right)$ के प्रसार मे n^{-r} का गुणांक है

(a) $\frac{1}{r\log_e 10}$ (b) $-\frac{1}{r\log_e 10}$

(c) $-\frac{1}{r!\log_e 10}$ (d) इनमें से कोई नहीं

34. $\log_e(1+3x+2x^2)$ के प्रसार मे x^n का गुणांक है [UPSEAT 2001]

(a) $(-1)^n\left[\frac{2^n+1}{n}\right]$ (b) $\frac{(-1)^{n+1}}{n}[2^n+1]$

(c) $\frac{2^n+1}{n}$ (d) इनमें से कोई नहीं

35. यदि $n=(1999)!$, तब $\sum_{x=1}^{1999}\log_n x=$ [AMU 2002]

(a) 1 (b) 0

(c) $\sqrt[1999]{1999}$ (d) -1

36. $e^{\left(x-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+.......\right)}=$ [DCE 2001]

(a) $\log x$ (b) $\log(x-1)$

(c) x (d) इनमें से कोई नहीं

Critical Thinking

Objective Questions

1. $\dfrac{\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+.....\infty}{1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+.....\infty}=$

(a) $\frac{e+1}{e-1}$ (b) $\frac{e-1}{e+1}$

(c) $\frac{e^2+1}{e^2-1}$ (d) $\frac{e^2-1}{e^2+1}$

2. $\frac{1}{1!}+\frac{4}{2!}+\frac{7}{3!}+\frac{10}{4!}+.....\infty=$

(a) $e+4$ (b) $2+e$

(c) $3+e$ (d) e

3. $\frac{1+x}{1!}+\frac{(1+x)^2}{2!}+\frac{(1+x)^3}{3!}+.....$ के प्रसार में x^n का गुणांक है

(a) $\frac{1}{n!}$ (b) $\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}$

(c) $\frac{e}{n!}$ (d) $e\left[\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\right]$

4. यदि n सम है, तब $\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+......\right)^2$ के प्रसार मे x^n का गुणांक है

(a) $\frac{2^n}{n!}$ (b) $\frac{2^n-2}{n!}$

(c) $\frac{2^{n-1}-1}{n!}$ (d) $\frac{2^{n-1}}{n!}$

5. $1+\frac{1+2}{1!}+\frac{1+2+3}{2!}+\frac{1+2+3+4}{3!}+....\infty=$

(a) 0 (b) 1

(c) $\frac{7e}{2}$ (d) $2e$

6. $1.5+\frac{2.6}{1!}+\frac{3.7}{2!}+\frac{4.8}{3!}+.....\infty=$

(a) $13\,e$ (b) $15\,e$

(c) $9\,e+1$ (d) $5\,e$

7. यदि $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\log x)^{2n}}{(2n)!}$, तब $S=$

(a) $x+x^{-1}$ (b) $x-x^{-1}$

(c) $\frac{1}{2}(x+x^{-1})$ (d) इनमें से कोई नहीं

8. $\frac{4}{1!}+\frac{11}{2!}+\frac{22}{3!}+\frac{37}{4!}+\frac{56}{5!}+....\infty$ का योग है [Kurukshetra CEE 2002]

(a) $6\,e$ (b) $6\,e-1$

(c) $5\,e$ (d) $5\,e+1$

9. $\frac{a+bx+cx^2}{e^x}$ के प्रसार मे x^n का गुणांक है

(a) $\frac{a(-1)^n}{n!}+\frac{b(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{c(-1)^{n-2}}{(n-2)!}$

(b) $\frac{a}{n!}+\frac{b}{(n-1)!}+\frac{c}{(n-2)!}$

(c) $\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}$

(d) इनमें से कोई नहीं

10. $1+\frac{1}{4.2!}+\frac{1}{16.4!}+\frac{1}{64.6!}+.....\infty=$ [AIEEE 2005]

(a) $\frac{e-1}{2\sqrt{e}}$ (b) $\frac{e+1}{2\sqrt{e}}$

(c) $\frac{e-1}{\sqrt{e}}$ (d) $\frac{e+1}{\sqrt{e}}$

11. यदि m,n समीकरण $x^2-x-1=0$ के मूल हैं, तब

$$\frac{\left(1+m\log_e 3+\frac{(m\log_e 3)^2}{2!}+...\infty\right)\left(1+n\log_e 3+\frac{(n\log_e 3)^2}{2!}+..\infty\right)}{\left(1+mn\log_e 3+\frac{(mn\log_e 3)^2}{2!}+.....\infty\right)}$$

का मान है

(a) 9 (b) 3

(c) 0 (d) 1

12. $\frac{1}{3}+\frac{1}{2.3^2}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{4.3^4}+.....\infty=$ [MNR 1975]

(a) $\log_e 2-\log_e 3$

(b) $\log_e 3-\log_e 2$

(c) $\log_e 6$

(d) इनमें से कोई नहीं

13. यदि $|x|<1$, तब $(1-x)\log_e(1-x)$ के प्रसार मे x^5 का गुणांक है

(a) 1/2 (b) 1/4

(c) 1/20 (d) 1/10

14. $\log_e \dfrac{1}{1-x-x^2+x^3}$ के प्रसार मे x का गुणांक है

(a) 0 (b) 1

(c) – 1 (d) 1/2

15. $1+\dfrac{3}{2!}+\dfrac{7}{3!}+\dfrac{15}{4!}+.....\infty$ का योग है [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $e(e+1)$ (b) $e(1-e)$

(c) $3e-1$ (d) $3e$

(e) $e(e-1)$

16. $1+\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{4}+\dfrac{2}{5}-......\infty =$

(a) $\log_e 3$

(b) $\log_e 4$

(c) $\log_e\left(\dfrac{e}{2}\right)$

(d) $\log_e\left(\dfrac{2}{3}\right)$

17. $\log_e\left(1+ax^2+a^2+\dfrac{a}{x^2}\right)$ का योग है

(a) $a\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)-\dfrac{a^2}{2}\left(x^4-\dfrac{1}{x^4}\right)+\dfrac{a^3}{3}\left(x^6-\dfrac{1}{x^6}\right)-.....$

(b) $a\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\dfrac{a^2}{2}\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}\right)+\dfrac{a^3}{3}\left(x^6+\dfrac{1}{x^6}\right)-.....$

(c) $a\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+\dfrac{a^2}{2}\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}\right)+\dfrac{a^3}{3}\left(x^6+\dfrac{1}{x^6}\right)+.....$

(d) $a\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)+\dfrac{a^2}{2}\left(x^4-\dfrac{1}{x^4}\right)+\dfrac{a^3}{3}\left(x^6-\dfrac{1}{x^6}\right)+.....$

18. $\log_e(1+x)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^{i+1}x^i}{i}\right]$ परिभाषित है [Roorkee 1990]

(a) $x\in(-1,1)$ के लिये

(b) किसी भी धनात्मक वास्तविक x के लिये

(c) $x\in(-1,1]$ के लिये

(d) किसी भी धनात्मक वास्तविक $x(x\neq 1)$ के लिये

19. यदि $y=2x^2-1$, तब $\left[\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{3y^3}+\dfrac{1}{5y^5}+....\right]=$

(a) $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2x^4}+\dfrac{1}{3x^6}-.....\right]$

(b) $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2x^4}+\dfrac{1}{3x^6}+.....\right]$

(c) $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{3x^6}+\dfrac{1}{5x^{10}}+.....\right]$

(d) $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{3x^6}+\dfrac{1}{5x^{10}}-.....\right]$

20. यदि x,y,z तीन क्रमागत धनात्मक पूर्णांक हैं, तब

$$\frac{1}{2}\log_e x+\frac{1}{2}\log_e z+\frac{1}{2xz+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2xz+1}\right)^3+....=$$

(a) $\log_e x$ (b) $\log_e y$

(c) $\log_e z$ (d) इनमें से कोई नहीं

Answers

चरघातांकी श्रेणी

1	a	2	c	3	b	4	c	5	c
6	b	7	c	8	c	9	c	10	b
11	d	12	b	13	d	14	d	15	b
16	c	17	b	18	c	19	a	20	c
21	b	22	c	23	b	24	c	25	d
26	c	27	b	28	b	29	b,d	30	c
31	d	32	b	33	d	34	b	35	a
36	c	37	d	38	d	39	d	40	c
41	a	42	b	43	c	44	b	45	b
46	c	47	b	48	d	49	c	50	d
51	d	52	b	53	c	54	c	55	b
56	c	57	b	58	b	59	a	60	d

लघुगणकीय श्रेणी

1	a	2	d	3	a	4	b	5	a
6	a	7	a	8	c	9	b	10	a
11	c	12	c	13	a	14	b	15	c
16	a	17	a	18	a	19	b	20	b
21	d	22	c	23	d	24	b	25	a
26	c	27	b	28	a	29	d	30	a
31	a	32	b	33	a	34	b	35	a
36	d								

Critical Thinking Questions

1	b	2	b	3	c	4	d	5	c
6	a	7	c	8	b	9	a	10	b
11	a	12	b	13	c	14	b	15	e
16	b	17	b	18	c	19	b	20	b

Answers and Solutions

चरघातांकी श्रेणी

1. (a) $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = e^x \Rightarrow x = \log_e y$.

2. (c) $T_n = \frac{1+3+5+.......+(2n-1)}{n!} = \frac{\frac{n}{2}[2.1+(n-1)2]}{n!}$

$= \frac{n-1+1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$

$\Rightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = e + e = 2e$.

3. (b) $\frac{1.2}{1!} + \frac{2.3}{2!} + \frac{3.4}{3!} + \frac{4.5}{4!} + ... \infty$,

यहाँ $T_n = \frac{n(n+1)}{n!} = \frac{n+1}{(n-1)!} = \frac{(n-1)+2}{(n-1)!}$

$= \frac{1}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!}$

$\Rightarrow S = \Sigma T_n = e + 2e = 3e$.

4. (c) $S = e^{a+bx} = e^a . e^{bx} = e^a \left\{1 + \frac{bx}{1!} + \frac{(bx)^2}{2!} + ...\right\}$

x^r का गुणांक $= e^a . \frac{b^r}{r!}$.

5. (c) $y = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + ... = 1 - e^{-x}$

$\Rightarrow e^{-x} = 1 - y \Rightarrow -x = \log_e(1-y) \Rightarrow x = \log_e \frac{1}{1-y}$.

6. (b) $\frac{e^{5x}+e^x}{e^{3x}} = e^{2x} + e^{-2x} = 2\left\{1 + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + ...\right\}$

x^4 का गुणांक $= 2.\frac{2^4}{4!} = \frac{4}{3}$.

7. (c) $(1+x+x^2)e^{-x} = (1+x+x^2)$

$\left\{1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ...\right\}$

x^2 का गुणांक $= 1.\frac{1}{2!} + 1.\left(-\frac{1}{1!}\right) + 1.1 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$.

8. (c) $\frac{e^{7x}+e^{3x}}{e^{5x}} = e^{2x} + e^{-2x}$

हम जानते हैं कि,

$e^{2x} = 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + ... \infty$ ......(i)

$e^{-2x} = 1 - \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} - .... \infty$ ......(ii)

(i) व (ii) को जोड़ने पर,

$e^{2x} + e^{-2x} = 2\left[1 + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + ...\infty\right]$

अतः अचर पद 2 है।

9. (c) $S = \frac{2}{1!} + \frac{2+4}{2!} + \frac{2+4+6}{3!} + ... + \frac{\frac{n}{2}(2+2n)}{n!} + ...\infty$

यहाँ $T_n = \frac{n(n+1)}{n!} = \frac{n-1+2}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!}$

$\Rightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$

$= e + 2e = 3e$.

10. (b) $\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\{4.e.e^{-1}\} = 1$.

11. (d) $1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + ...\infty = \frac{e-e^{-1}}{2}$.

12. (b) $e^{2x} - 2e^x + 1 = 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + ...$

$-2\left\{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...\right\} + 1$

$\therefore$ x^4 का गुणांक $= \frac{2^4}{4!} - 2.\frac{1}{4!} = \frac{2}{4!}(2^3 - 1) = \frac{7}{12}$.

13. (d) $S = \frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + ... + \frac{n^3}{n!} + ...$

यहाँ $T_n = \frac{n^3}{n!} = \frac{n^2}{(n-1)!} = \frac{n^2-1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}$

$= \frac{n+1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{n}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$

$= \frac{n-2}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$

$= \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$

अतः योग $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$

$= e + 3e + e = 5e$.

14. (d) $S = \frac{2}{3!} + \frac{4}{5!} + \frac{6}{7!} + ... + \frac{2n}{(2n+1)!} + ...$

यहाँ $T_n = \frac{(2n+1)-1}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!}$

$\Rightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + ...\right) - \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + ...\right)$

$= \left(\frac{e+e^{-1}}{2} - 1\right) - \left(\frac{e-e^{-1}}{2} - 1\right) = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

15. (b) $S = (e^{x^2} - 1) - (e^{y^2} - 1) = e^{x^2} - e^{y^2}$.

16. (c) $1+\frac{a-b}{a}+\frac{1}{2!}\left(\frac{a-b}{a}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{a-b}{a}\right)^3+........$

$$=1+\frac{\left(\frac{a-b}{a}\right)}{1!}+\frac{\left(\frac{a-b}{a}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{a-b}{a}\right)^3}{3!}+.......$$

$$=e^{(a-b)/a}=e^{1-(b/a)}=e^1.e^{-b/a}=\frac{e}{e^{b/a}}.$$

17. (b) $3+\frac{5}{1!}+\frac{7}{2!}+\frac{9}{3!}+......\infty$

$$T_n=\frac{2n+1}{(n-1)!}=\frac{2(n-1)}{(n-1)!}+\frac{3}{(n-1)!}=\frac{2}{(n-2)!}+\frac{3}{(n-1)!}$$

अब, योग $S_n=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$

$$=2e+3e=5e.$$

18. (c) $\frac{e^{4x}-1}{e^{2x}}=e^{2x}-e^{-2x}=2\left\{2x+\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+.....\right\}$

अतः, x^2 का गुणांक $=0$.

19. (a) $1+\frac{(a-bx)}{1!}+\frac{(a-bx)^2}{2!}+\frac{(a-bx)^3}{3!}+......=e^{a-bx}$.

20. (c) $y=-\left\{x^3+\frac{(x^3)^2}{2}+\frac{(x^3)^3}{3}+......\right\}=\log(1-x^3)$

$$\Rightarrow e^y=1-x^3\Rightarrow x=(1-e^y)^{1/3}.$$

21. (b) $\frac{e^2+1}{2e}=\frac{e+e^{-1}}{2}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+......\infty$

22. (c) $\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+.....\right)\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+.......\right)$

$$=\frac{e+e^{-1}}{2}.\frac{e-e^{-1}}{2}=\frac{e^2-e^{-2}}{4}=\frac{e^4-1}{4e^2}.$$

23. (b) $S=\frac{1^2.2}{1!}+\frac{2^2.3}{2!}+\frac{3^2.4}{3!}+....$

यहाँ $T_n=\frac{n^2.(n+1)}{n!}=\frac{n(n+1)}{(n-1)!}$

$$=\frac{(n-1)(n-2)+4n-2}{(n-1)!}=\frac{1}{(n-3)!}+\frac{4(n-1)+2}{(n-1)!}$$

$$T_n=\frac{1}{(n-3)!}+\frac{4}{(n-2)!}+\frac{2}{(n-1)!}$$

$$\Rightarrow S=\sum T_n=e+4e+2e=7e.$$

24. (c) $S=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1!}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2!}+....\right\}=\frac{1}{2}e^{1/2}=\frac{\sqrt{e}}{2}.$

25. (d) दी गयी श्रेणी है, $\frac{\left(2+\frac{1}{2}\right)}{1!}+\frac{\left(3+\frac{1}{2}\right)}{2!}+......\infty$

$$=\left\{\frac{2}{1!}+\frac{3}{2!}+....+\frac{n+1}{n!}+....\infty\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+....\frac{1}{n!}+...\infty\right\}$$

$$=e+(e-1)+\frac{1}{2}(e-1)=\frac{5e}{2}-\frac{3}{2}.$$

26. (c) e^{e^x} का प्रसार

$$=1+\frac{e^x}{1!}+\frac{e^{2x}}{2!}+\frac{e^{3x}}{3!}+\frac{e^{4x}}{4!}+....+\frac{e^{rx}}{r!}+....$$

$$=1+\frac{1}{1!}\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+....+\frac{x^r}{r!}+.....\right]$$

$$+\frac{1}{2!}\left[1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+....+\frac{(2x)^r}{r!}+.....\right]+........$$

अतः x^r का गुणांक $=\frac{1}{r!}\left[\frac{1^r}{1!}+\frac{2^r}{2!}+\frac{3^r}{3!}+\frac{4^r}{4!}+....\right].$

27. (b) दिया है, $T_n=\frac{1}{2}\left[\frac{3^n}{n!}-\frac{1}{n!}\right]$

अतः श्रेणी का योग $=\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\left\{1+\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}+....\right\}-\left\{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+....\right\}\right]=\frac{1}{2}(e^3-e).$$

28. (b) यह स्पष्ट है।

29. (b,d) विकल्पों में $x>0$ के भिन्न-भिन्न मान रखने पर हमें ज्ञात होता है कि, विकल्प (b) एवं (d) सत्य नहीं हैं।

30. (c) $1+\frac{(\log_e n)^2}{2!}+\frac{(\log_e n)^4}{4!}+....=\frac{e^{\log_e n}+e^{-\log_e n}}{2}$

$$=\frac{n+n^{-1}}{2}.$$

31. (d) $T_n=\frac{\Sigma n}{n!}=\frac{n(n+1)}{2(n)!}$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(n+1)}{(n-1)!}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{n-1}{(n-1)!}+\frac{2}{(n-1)!}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-2)!}+\frac{2}{(n-1)!}\right]=\frac{(e+2e)}{2}=\frac{3e}{2}.$$

32. (b) दी गयी श्रेणी है,

$$1-\log 2+\frac{(\log 2)^2}{2!}-\frac{(\log 3)^3}{3!}+....$$

$$=e^{-\log 2}=e^{\log\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}.$$

33. (d) $\frac{e^{7x}+e^x}{e^{3x}}=e^{4x}+e^{-2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4x)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2x)^n}{n!}$

$\therefore\left(\frac{e^{7x}+e^x}{e^{3x}}\right)$ में x^n का गुणांक $=\frac{4^n+(-2)^n}{n!}.$

34. (b) $S=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+.....\infty$

$$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+.....\infty$$

$$=1+2\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+.....\infty\right]$$

$$=1+2[\log_e 2-1]=1+2\log_e 2-2$$

$$=\log_e 4-1=\log_e 4-\log_e e=\log_e\left(\frac{4}{e}\right);\ \therefore e^S=\frac{4}{e}.$$

35. (a) $\because \ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$

दोनो पक्षों में $x = \frac{1}{2}$ रखने पर,

$\sqrt{e} = e^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} + ...$

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2} + \frac{1}{2^3 6} + \frac{1}{2^4.24} + ...$

$= 1 + 0.5 + 0.1250 + 0.0208 + 0.0026$

$= 1.648$, (लगभग) ।

36. (c) $T_n = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!}$

$= \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n)!} - \frac{1}{(n+1)!}$

$\therefore T_1 + T_2 + T_3 + ...$

$= \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + ...$

$= \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...\right) - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...\right)$

$= \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... - 1\right) - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... - 1 - 1\right)$

$= (e-1) - (e-2) = 1.$

37. (d) श्रेणी का योग $= 1 + 2 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{2}{5!} + ...$

$= \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + ...\right) + 2\left(1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + ...\right)$

$= \frac{e + e^{-1}}{2} + 2.\frac{e - e^{-1}}{2} = \frac{3e - e^{-1}}{2}.$

38. (d) माना $S = \frac{2}{1!} + \frac{6}{2!} + \frac{12}{3!} + \frac{20}{4!} + ...$ एवं

$S_1 = 2 + 6 + 12 + 20 + ... + T_n$, (माना)

$S_1 = \quad 2 + 6 + 12 + ... T_{n-1} + T_n$

$0 = 2 + 4 + 6 + 8 + ...$ n पदों तक $-T_n$

$T_n = 2 + 4 + 6 + 8 + ...$ n पदों तक

$\Rightarrow T_n = \frac{n}{2}[2 \times 2 + (n-1)2] = n(2 + n - 1) = n(n+1)$

$\therefore$ दी गयी श्रेणी का nवां पद $= T_n = \frac{n(n+1)}{n!}$

या $T_n = \frac{n(n+1)}{n(n-1)!}$ या $T_n = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!}$

अब, योग $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e + 2e = 3e.$

39. (d) हम जानते हैं, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$

$x = -1$ रखने पर, $e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + ...$

$\Rightarrow e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + ...$

40. (c) दी गयी श्रेणी का n वाँ पद $= T_n = \frac{1.3.5.7.....(2n-1)}{1.2.3.4.........(2n)}$

$T_n = \frac{1.2.3.4.....(2n-2)(2n-1)(2n)}{1.2.3.4...(2n-1)(2n)} \times \frac{1}{2.4.6...(2n-2)(2n)}$

$T_n = \frac{1}{(2^n n!)}, \therefore S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!} = e^{\frac{1}{2}} - 1.$

41. (a) श्रेणी $= 1 + x \log_e a + \frac{x^2}{2!}[\log_e a]^2 + \frac{x^3}{3!}[\log_e a]^3 + ...$

$= e^{x \log_e a} = e^{\log_e a^x} = a^x.$

42. (b) $\frac{1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{3!} + \frac{2^6}{4!} + ...\infty}{1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{2^2}{4!} + ...\infty}$

$= \frac{\frac{1}{2^2}\left\{\frac{2^2}{1!} + \frac{(2^2)^2}{2!} + \frac{(2^2)^3}{3!} + ...\right\}}{\frac{1}{2^2}\left\{2 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + ...\right\}} = \frac{e^{(2^2)} - 1}{1 + e^2} = e^2 - 1.$

43. (c) $1 + \frac{2^4}{2!} + \frac{3^4}{3!} + \frac{4^4}{4!} + ...\infty$

$T_n = \frac{n^4}{n!} = \frac{n^3}{(n-1)!} = \frac{n^3 - 1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}$

$= \frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{n^2+n+1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$

$= \frac{n^2-4}{(n-2)!} + \frac{(n-2)}{(n-2)!} + \frac{7}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$

$= \frac{n+2}{(n-3)!} + \frac{1}{(n-3)!} + \frac{7}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$

$= \frac{1}{(n-4)!} + \frac{6}{(n-3)!} + \frac{7}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$

$= e + 6e + 7e + e = 15e.$

44. (b) $(e^x - 1)(e^{-x} + 1) = (e^x - 1)\left(\frac{1 + e^x}{e^x}\right)$

$= \frac{e^{2x} - 1}{e^x} = e^x - e^{-x} = 2\left\{x + \frac{x^3}{3!} + ...\right\}$

$\therefore x^3$ का गुणांक $= 2.\frac{1}{3!} = \frac{1}{3}.$

45. (b) $\frac{2}{1!} + \frac{4}{3!} + \frac{6}{5!} + \frac{8}{7!} + ...\infty$

$= \frac{(1+1)}{1!} + \frac{(1+3)}{3!} + \frac{(5+1)}{5!} + \frac{(7+1)}{7!} + ...\infty$

$= \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + ...\infty\right) + \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + ...\infty\right)$

$= \frac{e - e^{-1}}{2} + \frac{e + e^{-1}}{2} = e.$

46. (c) दी गई श्रेणी है, $1+\frac{3}{1!}+\frac{5}{2!}+\frac{7}{3!}+....\infty$

$$T_n=\frac{2n-1}{(n-1)!}=\frac{2(n-1)}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!}$$

$$=\frac{2}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}=2e+e=3e.$$

47. (b) $1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^2}{3!}+....\infty=e^{-x}$.

48. (d) $T_n=\frac{1+x+x^2+....+x^{n-1}}{n!}=\frac{1-x^n}{1-x}.\frac{1}{n!}$

$$=\frac{1}{x-1}\left\{\frac{1}{n!}x^n-\frac{1}{n!}\right\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{1}{x-1}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\right\}=\frac{1}{x-1}(e^x-e).$$

49. (c) $(a+bx)e^{-x}$

$$=(a+bx)\left\{1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+.......+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+......\right\}$$

x^r का गुणांक $=a\frac{(-1)^r}{r!}+b\frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}=\frac{(-1)^r}{r!}(a-br)$.

50. (d) $S=1+\frac{4^2}{3!}+\frac{4^4}{5!}+........\infty$

$$=\frac{1}{4}\left\{4+\frac{4^3}{3!}+\frac{4^5}{5!}+......\right\}=\frac{1}{4}\left(\frac{e^4-e^{-4}}{2}\right).$$

51. (d) $S=1+\frac{2^2}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{4^2}{3!}+.......+\frac{n^2}{(n-1)!}+.......\infty$

यहाँ, $T_n=\frac{n^2}{(n-1)!}=\frac{(n-1)(n-2)}{(n-1)!}+\frac{3(n-1)+1}{(n-1)!}$

$$=\frac{1}{(n-3)!}+\frac{3}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}$$

$$\Rightarrow S=\Sigma T_n=e+3e+e=5e.$$

52. (b) $(1-2x+3x^2)e^{-x}$

$$=(1-2x+3x^2)\left\{1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+.......\right\}$$

$\therefore$ x^5 का गुणांक

$$=1\left(-\frac{1}{5!}\right)+(-2)\left(\frac{1}{4!}\right)+3\left(-\frac{1}{3!}\right)$$

$$=-\frac{1}{120}-\frac{1}{12}-\frac{1}{2}=-\frac{71}{120}.$$

53. (c) $S=\frac{1}{1!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{5!}+\frac{4}{7!}+.......+\frac{n}{(2n-1)!}+.....$

यहाँ, $T_n=\frac{1}{2}.\frac{2n}{(2n-1)!}=\frac{1}{2}\frac{(2n-1)+1}{(2n-1)!}$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(2n-2)!}+\frac{1}{(2n-1)!}\right\}$$

$$\Rightarrow S=\sum T_n=\frac{1}{2}\left\{\frac{e+e^{-1}}{2}+\frac{e-e^{-1}}{2}\right\}=\frac{e}{2}.$$

ट्रिक : श्रेणी का 4 पदों तक का योगफल 1.359 ......, जो कि e/2 का लगभग मान है।

54. (c) $S=\frac{1}{2!}+\frac{1+2}{3!}+\frac{1+2+3}{4!}+....\infty$

यहाँ, $T_n=\frac{1+2+......+n}{(n+1)!}=\frac{\frac{n}{2}(n+1)}{(n+1)!}=\frac{1}{2(n-1)!}$

$$\Rightarrow S=\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=\frac{1}{2}e.$$

55. (b) हम जानते हैं, $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+.....\infty$

$$e^{ix}=1+\frac{(ix)}{1!}+\frac{(xi)^2}{2!}+\frac{x^3i^3}{3!}+.......$$

$$=1+\frac{ix}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{ix^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}+......\infty \quad ......(i)$$

एवं $e^{-ix}=1-\frac{ix}{1!}+\frac{x^2i^2}{2!}-\frac{x^3i^3}{3!}+\frac{x^4i^4}{4!}-\frac{x^5i^5}{5!}+\frac{x^6i^6}{6!}+.......$

$$=1-\frac{xi}{1!}-\frac{x^2}{2!}+\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{ix^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}+......\infty \quad ......(ii)$$

अब (i) व (ii) से,

$$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+....\right).$$

56. (c) $T_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n(n+1)!}$

$$\therefore S=\frac{1}{6}\sum\left[\frac{2n+1}{(n)!}\right]=\frac{1}{6}\sum\left[2.\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n)!}\right]$$

$$=\frac{1}{6}[2.e+e-1]=\frac{1}{6}[3e-1].$$

57. (b) योगफल $=(e^{2\log_e 2}-1)=4-1=3$.

58. (b) $1+\frac{\log_e x}{1!}+\frac{(\log_e x)^2}{2!}+\frac{(\log_e x)^3}{3!}+......+\frac{(\log_e x)^n}{n!}+....$

$$=e^{(\log_e x)}=x.$$

59. (a) $S=\log_e 3+\frac{(\log_e 3)^2}{2!}+\frac{(\log_e 3)^3}{3!}+....$

$$....+3\log_e 3+\frac{(3\log_e 3)^2}{2!}+\frac{(3\log_e 3)^3}{3!}+....$$

$$=(e^{\log_e 3}-1)+(e^{3\log_e 3}-1)=(3-1)+(3^3-1)=28.$$

60. (d) $3^x=e^{\log 3^x}=e^{x\log 3}$

$$=1+\frac{x\log 3}{1!}+\frac{x^2(\log 3)^2}{2!}+\frac{x^3(\log 3)^3}{3!}+....$$

x^3 का गुणांक $=\frac{(\log 3)^3}{3!}=\frac{(\log 3)^3}{6}$ ए

लघुगणकीय श्रेणी

1. (a) $S=\frac{2}{1}.\frac{1}{3}+\frac{3}{2}.\frac{1}{9}+\frac{4}{3}.\frac{1}{27}+.......+\frac{n+1}{n}.\frac{1}{3^n}+........\infty$,

जहाँ $T_n=\frac{n+1}{n}.\frac{1}{3^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3^n}+\frac{1}{n.3^n}$

$$\Rightarrow S=\Sigma T_n=\Sigma\frac{1}{3^n}+\Sigma\frac{1}{n.3^n}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\left\{-\log_e\left(1-\frac{1}{3}\right)\right\}=\frac{1}{2}-\log_e\left(\frac{2}{3}\right).$$

ट्रिक : चूँकि श्रेणी के 3 या 4 पदों तक का योग लगभग 0.9 है।
स्पष्टत : विकल्प (a) 0.9 के सन्निकट मान देता है।

2. (d) $S=\left(1-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)x^3+\left(1-\frac{1}{4}\right)x^4+..........\,..$

$$+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1}+........\infty$$

$$=\{x^2+x^3+x^4+.........\}-\left\{\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+..........\right\}$$

$$=\frac{x^2}{1-x}-\{-\log_e(1-x)-x\}=\frac{x}{1-x}+\log_e(1-x).$$

3. (a) $S=\left\{\frac{x}{x+1}+\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)^3}{3}+.........\infty\right\}$

$$-\left\{\frac{1}{x+1}+\frac{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{x+1}\right)^3}{3}+........\infty\right\}$$

$$=-\log_e\left(1-\frac{x}{x+1}\right)-\left\{-\log_e\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\right\}$$

$$=-\log_e\frac{1}{x+1}+\log_e\frac{x}{x+1}=\log_e x\,.$$

ट्रिक : $x=2$ रखकर जाँच करें।

4. (b) हम जानते हैं,

$$\log_e 2=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+........ \quad .....(i)$$

$$=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+........ \quad .....(ii)$$

पुनः $\log_e 2=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-..........$

$$=1-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{4.5}-........ \quad .....(iii)$$

(ii) व (iii) को जोड़ने पर,

$$2.\log_e 2=1+\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)+\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}\right)+......$$

$$2.\log_e 2-1=\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{3.4.5}+......... \quad .....(iv)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+......=\frac{1}{2}\{2\log_e 2-1\}=\log_e 2-\frac{1}{2}\,.$$

वैकल्पिक : $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+.......$

$$T_n=\frac{1}{(2n-1)(2n)(2n+1)}=\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right]$$

$n=1,2,3,........$ रखने पर,

$$T_1=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right],\ T_2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right],$$

$$T_3=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right]$$

....

....

$$T_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right]$$

सभी पदों को जोड़ने पर,

$$S_n=T_1+T_2+T_3+.........+T_n+........$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+......\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+......\right]$$

$$=\frac{1}{2}\log_e(1+1)+\frac{1}{2}\left[-1+\left\{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.......\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\log_e 2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_e(1+1)=\log_e 2-\frac{1}{2}.$$

5. (a) $\frac{1}{1}.\frac{1}{2}+\frac{3}{2}.\frac{1}{2^2}+\frac{5}{3}.\frac{1}{2^3}+\frac{7}{4}.\frac{1}{2^4}+.........$

$$=\left(2-\frac{1}{1}\right)\frac{1}{2}+\left(2-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2^2}+\left(2-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2^3}+\left(2-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2^4}+..$$

$$=2\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+.......\right\}-\left\{\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{\frac{1}{2^2}}{2}+\frac{\frac{1}{2^3}}{3}+.......\right\}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\left\{-\log_e\left(1-\frac{1}{2}\right)\right\}=2-\log_e 2\,.$$

6. (a) $\log_e\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\log_e\frac{1+x}{1-x}$

$$=\frac{1}{2}.2\left\{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+......\right\}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+......$$

7. (a) दी गयी श्रेणी है, $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{1}{3(x+1)^3}+.......\infty$

$$=-\log_e\left(1-\frac{1}{x+1}\right)=-\log_e\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$=\log_e\left(\frac{x+1}{x}\right)=\log_e\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

8. (c) $\log_e(x+1)-\log_e(x-1)=\log_e\frac{x+1}{x-1}$

$$= \log_e\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right) = 2\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+.......\right\}.$$

9. (b) $\left(\frac{a-b}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a}\right)^3+......$

$$= -\log_e\left(1-\frac{a-b}{a}\right) = -\log_e\left(\frac{b}{a}\right) = \log_e\left(\frac{a}{b}\right).$$

10. (a) $\dfrac{(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-.......\infty}{(b-1)-\frac{(b-1)^2}{2}+\frac{(b-1)^3}{3}-......\infty}$

$$= \frac{\log_e(1+\overline{a-1})}{\log_e(1+\overline{b-1})} = \frac{\log_e a}{\log_e b} = \log_b a.$$

11. (c) $\frac{1}{5}+\frac{1}{2}.\frac{1}{5^2}+\frac{1}{3}.\frac{1}{5^3}+.....$

$$= -\log_e\left(1-\frac{1}{5}\right) = \log_e\left(\frac{5}{4}\right) = \log_e\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2\log_e\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

12. (c) $\log_e\{(1+x)^{1+x}(1-x)^{1-x}\}$

$$= (1+x)\log_e(1+x)+(1-x)\log_e(1-x)$$

$$= (1+x)\left\{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+......\right\}$$

$$+(1-x)\left\{-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-.......\right\}$$

$$= 2\left\{-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}-.....\right\}+2\left\{x^2+\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{5}+......\right\}$$

$$= 2\left[x^2\left(1-\frac{1}{2}\right)+x^4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+x^6\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+......\right]$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^6}{5.6}+.......\right].$$

13. (a) $2\log_e x - \log_e\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)x\right\} - \log_e\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)x\right\}$

$$= 2\log_e x - \left\{\log_e\left(1+\frac{1}{x}\right)+\log_e x\right\}$$

$$-\left\{\log_e\left(1-\frac{1}{x}\right)+\log_e x\right\}$$

$$= -\left\{\log_e\left(1+\frac{1}{x}\right)+\log_e\left(1-\frac{1}{x}\right)\right\} = 2\left\{\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x^4}+.......\right\}$$

अतः x^{-4} का गुणांक $= 2.\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

14. (b) $\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+.....$

$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+......\infty = 1-\log_e 2$$

$$= \log_e e - \log_e 2 = \log\left(\frac{e}{2}\right).$$

15. (c) दिया है, $b = \log_e(1+a) \Rightarrow 1+a = e^b$

$$\Rightarrow 1+a = 1+\frac{b}{1!}+\frac{b^2}{2!}+.... \Rightarrow a = b+\frac{b^2}{2!}+.....$$

16. (a) हम जानते हैं, $\log_e 2 = \frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+.....$ .....(i)

(जब $\log_e(1+x)$ में $x=1$ रखते हैं)

तथा $\log_e 2 = 1-\left(\frac{1}{2.3}\right)-\left(\frac{1}{4.5}\right)-\left(\frac{1}{6.7}\right)-.......$ .....(ii)

(जब $\log_e(1-x)$ में $x=-1$ रखते हैं)

(i) व (ii) को जोड़ने पर,

$$2\log_e 2 = 1+\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)+\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}\right)+......$$

$$\Rightarrow 2\log_2 2 - 1 = \frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+........$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+........$$

$$= \log_e 4 - \log_e e = \log_e\left(\frac{4}{e}\right).$$

17. (a) $S = \left\{1+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4}+.....\right\}$

$$+2\left\{\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5}+.....\right\}-1$$

$$= 1-\frac{1}{2}\log_e\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)+\log_e\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)-1$$

$$= -\frac{1}{2}\log_e\frac{3}{4}+\log_e 3 = \log_e 2\sqrt{3}.$$

18. (a) $S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+....$

$$= \left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)+\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}\right)+.... = 2\log_e 2-1.$$

19. (b) $S = \frac{4}{1.3}-\frac{6}{2.4}+\frac{12}{5.7}-\frac{14}{6.8}+....$

$$= \frac{1+3}{1.3}-\frac{2+4}{2.4}+\frac{5+7}{5.7}-\frac{6+8}{6.8}+....$$

$$= \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)+....$$

$$= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+.... = \log_e 2.$$

20. (b) $\log_e x - \log_e(x-1)$

$$= \log_e\left(\frac{x}{x-1}\right) = \log_e\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right) = -\log_e\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + ...$$

21. (d) $\log_e \frac{4}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + ...$

$$= \log_e \frac{4}{5} + \log_e\left(1+\frac{1}{4}\right) = \log_e \frac{4}{5} + \log_e \frac{5}{4} = 0.$$

22. (c) $S = \dfrac{\frac{1}{n^2}}{1} + \dfrac{\left(\frac{1}{n^2}\right)^2}{2} + \dfrac{\left(\frac{1}{n^2}\right)^3}{3} + ...$

$$= -\log_e\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \log_e \frac{n^2}{n^2-1}.$$

ट्रिक: $n=2$ रखने पर श्रेणी का 4 पदों तक योग

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{192} + \frac{1}{1024} = 0.2874 ...$$

एवं विकल्प (a) = – 0.223...., विकल्प (b) = 0.223.....,
विकल्प (c) = 0.2876.....
अतः विकल्प (c) सही है।

23. (d) $\frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + ...$

$$= \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+\frac{m-n}{m+n}}{1-\frac{m-n}{m+n}}\right) = \frac{1}{2}\log_e \frac{2m}{2n} = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{m}{n}\right).$$

24. (b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}.\frac{1}{2^5} + ...\infty$ का योग

$$= \frac{1}{2}.\log_e\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}.\log_e\left(\frac{3/2}{1/2}\right) = \frac{1}{2}.\log_e(3) = \log_e \sqrt{3}.$$

25. (a) दिया गया समीकरण है,

$$4\left[x^2 + \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} + ...\right] = y^2 + \frac{y^4}{2} + \frac{y^6}{3} + ...$$

$$\Rightarrow \frac{4}{2}\log_e\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) = -\log_e(1-y^2)$$

$$\Rightarrow \log_e\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2 = \log_e\left(\frac{1}{1-y^2}\right) \Rightarrow \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2 = \frac{1}{1-y^2}$$

हल करने पर, $x^2y = 2x - y$.

26. (c) $\log_a x$ सभी धनात्मक वास्तविक $x\,(x \ne 0)$ के लिए परिभाषित है।

27. (b) दी गयी श्रेणी को इस प्रकार लिखा जा सकता है,

$$\log_e 2 + \log_e\left(\frac{3}{2}\right) + \log_e\left(\frac{4}{3}\right) + ... + \log_e\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$= \log_e 2 + \log_e 3 - \log_e 2 + \log_e 4 - \log_e 3 + ...$$

$$+ \log_e(n) - \log_e(n-1) = \log_e n.$$

28. (a) $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + ...$

$$= \frac{1}{n} - \frac{(1/n)^2}{2} + \frac{(1/n)^3}{3} - \frac{(1/n)^4}{4} + ...$$

$$= \log_e\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log_e\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

29. (d) चूँकि, $\log_{y^n} x^m = \frac{m}{n}\log_y x$ तथा $\log_x x = 1$.

$$\therefore S = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + ...$$

$$\because \log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

अतः $x=1$ रखने पर, $S = 1 - \log_e 2$.

30. (a) $\log_3 e - \log_9 e + \log_{27} e - ....$

$$= \frac{1}{\log_e 3}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ....\infty\right]$$

$$= \frac{\log_e 2}{\log_e 3} = \log_3 2.$$

31. (a) स्पष्टतः,

$$0.5 - \frac{(0.5)^2}{2} + \frac{(0.5)^3}{3} - .... = \log_e(1+0.5) = \log_e\left(\frac{3}{2}\right).$$

32. (b) यहाँ $\log_a(1+x) = \log_e(1+x).\log_a e$

$$= \log_a e\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)$$

अतः $\log_a(1+x)$ में x^n का गुणांक $\frac{(-1)^{n-1}}{n}\log_a e$ है।

33. (a) यहाँ, $\log_{10}\left(\frac{n}{n-1}\right) = \log_e\left(\frac{n}{n-1}\right).\log_{10} e$

$$= -\log_e\left(\frac{n-1}{n}\right).\log_{10} e = -\log_{10} e.\log_e\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

अतः $\frac{1}{r}\log_{10} e$ में n^{-r} का गुणांक $= \frac{1}{r\log_e 10}$.

34. (b) यहाँ, $\log(1+3x+2x^2) = \log(1+x) + \log(1+2x)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n} + \frac{2^n}{n}\right)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1+2^n}{n}\right)x^n$$

अतः x^n का गुणांक $= (-1)^{n-1}\left(\frac{2^n+1}{n}\right)$

$$\Rightarrow \frac{(-1)^{n+1}(2^n+1)}{n},\ [\because (-1)^n = (-1)^{n+2} = ...].$$

35. (a) $\sum_{x=1}^{1999}\log_n x$

$$= \log_{(1999)!} 1 + \log_{(1999)!} 2 + ... + \log_{(1999)!} 1999$$

$= \log_{(1999)!}(1.2.3.......1999) = \log_{(1999)!}(1999)! = 1$.

36. (d) $e^{\left(x - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - ....\right)}$

$= e^{\left((x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - ......\right) + 1}$

$= e^{\log(1+x-1)} e = e^{\log x}.e = xe$.

Critical Thinking Questions

1. (b) $\dfrac{\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + ...\infty}{1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + ...\infty}$

$= \dfrac{2\left[\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + ...\infty\right]}{2\left[1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + ...\infty\right]}$

$= \dfrac{(e + e^{-1}) - 2}{(e - e^{-1})} = \dfrac{e + \frac{1}{e} - 2}{e - \frac{1}{e}} = \dfrac{e^2 + 1 - 2e}{e^2 - 1}$

$= \dfrac{(e-1)^2}{(e-1)(e+1)} = \dfrac{e-1}{e+1}$.

2. (b) $S = \dfrac{1}{1!} + \dfrac{4}{2!} + \dfrac{7}{3!} + \dfrac{10}{4!} + ... + \dfrac{3n-2}{n!} + ...\infty$

यहाँ, $T_n = \dfrac{3}{(n-1)!} - \dfrac{2}{n!}$

$\therefore \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = 3\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n-1)!} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$

$\Rightarrow \; S = 3e - 2(e-1) = e + 2$.

3. (c) $\dfrac{1+x}{1!} + \dfrac{(1+x)^2}{2!} + \dfrac{(1+x)^3}{3!} + ...\infty$

$= e^{1+x} - 1 = e.\, e^x - 1 \;= -1 + e\left\{1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ...\right\}$

$\therefore \; x^n$ का गुणांक $= e\dfrac{1}{n!}$.

4. (d) $\left(1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + ...\right)^2 = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2$

$= \dfrac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2)$

$= \dfrac{1}{4}\left\{2\left(1 + \dfrac{(2x)^2}{2!} + \dfrac{(2x)^4}{4!} + ...\right) + 2\right\}$

$\therefore x^n$ का गुणांक (जबकि n सम हो) $= \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\} = \dfrac{2^{n-1}}{n!}$.

5. (c) दी गई श्रेणी है, $\dfrac{1}{0!} + \dfrac{1+2}{1!} + \dfrac{1+2+3}{2!} + ...\infty$

nवाँ पद $= T_n = \dfrac{1+2+3+4+.....+n}{(n-1)!} = \dfrac{n(n+1)}{2(n-1)!}$

$T_n = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{(n-3)!} + \dfrac{4}{(n-2)!} + \dfrac{2}{(n-1)!}\right]$

अतः, योगफल $= S_\infty = \dfrac{7e}{2}$.

6. (a) $1.5 + \dfrac{2.6}{1!} + \dfrac{3.7}{2!} + \dfrac{4.8}{3!} + ...$

$T_n = \dfrac{n(n+4)}{(n-1)!} = \dfrac{(n-1)(n+4)}{(n-1)!} + \dfrac{(n+4)}{(n-1)!}$

$= \dfrac{n+4}{(n-2)!} + \dfrac{1}{(n-2)!} + \dfrac{5}{(n-1)!}$

$= \dfrac{1}{(n-3)!} + \dfrac{7}{(n-2)!} + \dfrac{5}{(n-1)!}$

$S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n-3)!} + 7\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n-2)!} + 5\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n-1)!}$

$= e + 7e + 5e = 13e$.

7. (c) यहाँ, $S = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\log x)^{2n}}{(2n)!} = \left(\dfrac{e^{\log x} + e^{-\log x}}{2}\right) = \dfrac{x + x^{-1}}{2}$.

8. (b) माना $\quad S = 4 + 11 + 22 + 37 + ... + T_{n-1} + T_n$

या $\quad S = \quad 4 + 11 + 22 + 37 + ... + T_{n-1} + T_n$

$\therefore$ घटाने पर,

$0 = 4 + [7 + 11 + 15 + 19 + ... + (T_n - T_{n-1})] - T_n$

$0 = 4 + \dfrac{n-1}{2}[14 + (n-2)4] - T_n$

$\therefore T_n = 2n^2 + n + 1$

अतः दी गई श्रेणी का n वाँ पद है,

$T_n = \dfrac{2n^2 + n + 1}{(n)!} = \dfrac{2n}{(n-1)!} + \dfrac{1}{(n-1)!} + \dfrac{1}{n!}$

$= \dfrac{2(n-1+1)}{(n-1)!} + \dfrac{1}{(n-1)!} + \dfrac{1}{n!} = \dfrac{2}{(n-2)!} + \dfrac{3}{(n-1)!} + \dfrac{1}{n!}$

$\therefore$ योग $= \sum_{n=1}^{\infty} T_n = 2e + 3e + e - 1 = 6e - 1$.

9. (a) $(a + bx + cx^2)e^{-x} = (a + bx + cx^2)\left\{1 - \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + ...\right\}$

अतः xका गुणांक $= a.\dfrac{(-1)^n}{n!} + b\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + c\dfrac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}$.

10. (b) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + ...\infty$

$x = \dfrac{1}{2}$ रखने पर, $1 + \dfrac{1}{4.2!} + \dfrac{1}{16.4!} + \dfrac{1}{64.6!} + ...\infty$

$= \dfrac{e^{1/2} + e^{-1/2}}{2} = \dfrac{e+1}{2\sqrt{e}}$.

11. (a) यहाँ, अंश $= N = e^{m \log_e 3} \times e^{n \log_e 3}$

$= e^{\log_e 3^m} \times e^{\log_e 3^n} = 3^m \times 3^n = 3^{m+n}$

तथा हर $= D = e^{mn \log_e 3} = 3^{mn}$

दिया है, $m + n = 1,\; mn = -1$

$\therefore \; \dfrac{N}{D} = \dfrac{3^{m+n}}{3^{mn}} = \dfrac{3^1}{3^{-1}} = 3^2 = 9$.

12. (b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{2.3^2}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{4.3^4}+......\infty$

$=\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{(1/3)^2}{2}+\frac{(1/3)^3}{3}+\frac{(1/3)^4}{4}+......\infty$

$=-\log_e\left(1-\frac{1}{3}\right)=-\log_e\left(\frac{2}{3}\right)=\log_e\left(\frac{3}{2}\right)=\log_e 3-\log_e 2$.

13. (c) $(1-x)\log_e(1-x)$

$=(1-x)\left[-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-......\infty\right]$

अतः x^5 का गुणांक $=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$.

14. (b) $\log_e\left[\frac{1}{1-x-x^2+x^3}\right]=\log_e\left[\frac{1}{(1-x)-x^2(1-x)}\right]$

$=\log_e\left[\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}\right]=\log_e\left[\frac{1}{(1-x)^2(1+x)}\right]$

$=\log_e\{(1-x)^{-2}(1+x)^{-1}\}$ ......(i)

$=\log_e(1-x)^{-2}+\log_e(1+x)^{-1}$

$=-2\log_e(1-x)-\log_e(1+x)$

$=-2\left[-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-.......\infty\right]$

$-\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+.....\infty\right]$,

$(\because -1<x\le 1)$

अतः x का गुणांक $=2-1=1$.

15. (e) $1+\frac{3}{2!}+\frac{7}{3!}+\frac{15}{4!}+....$

$=(1-1)+\left(\frac{2}{1!}-\frac{1}{1!}\right)+\left(\frac{2^2}{2!}-\frac{1^2}{2!}\right)+\left(\frac{2^3}{3!}-\frac{1^3}{3!}\right)+...$

$=\left(1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+....\right)-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1^2}{2!}+\frac{1^3}{3!}+...\right)$

$=e^2-e=e(e-1)$.

16. (b) $S=1+2\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+....\right\}$

$=\left(2-\frac{2}{2}\right)+2\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+....\right\}$

$=2\left\{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...\right\}=2\log_e 2$

$=\log_e 4$.

17. (b) $\log_e\left[1+ax^2+a^2+\frac{a}{x^2}\right]$

$=\log_e(1+ax^2)\left(1+\frac{a}{x^2}\right)$

$=\log_e(1+ax^2)+\log_e\left(1+\frac{a}{x^2}\right)$

$=\left[ax^2-\frac{1}{2}a^2x^4+\frac{1}{3}a^3x^6-..........\right]$

$+\left[\frac{a}{x^2}-\frac{1}{2}a^2\left(\frac{1}{x^4}\right)+\frac{1}{3}a^3\left(\frac{1}{x^6}\right)-.....\right]$

$=a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{2}.a^2\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+\frac{1}{3}a^3\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)-...$

18. (c) $\log_e(1+x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}x^i}{i}$, $x\in(-1,1]$ के लिये परिभाषित है क्योंकि $\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+....\infty$,

$(-1<x\le 1)$ के लिए परिभाषित है।

19. (b) दिया है, $y=2x-1$

तब $\left[\frac{1}{y}+\frac{1}{3y^3}+\frac{1}{5y^5}+....\right]=\frac{1}{2}\left[\log_e\left(\frac{1+\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{y}}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{y+1}{y-1}\right)=-\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{y-1}{y+1}\right)$

$=-\frac{1}{2}\log_e\left(1-\frac{2}{1+y}\right)=-\frac{1}{2}\log_e\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3x^6}+....\right]$.

20. (b) चूँकि x,y,z तीन क्रमागत धनात्मक पूर्णांक हैं

अतः $2y=x+z$

$\Rightarrow 4y^2=(x+z)^2\Rightarrow 4y^2=(x-z)^2+4xz$

$\Rightarrow 4y^2=(-2)^2+4xz,\ (\because z-x=-2)$

$\Rightarrow y^2=1+xz$ ....(i)

अब $\frac{1}{2}\log_e x+\frac{1}{2}\log_e z+\frac{1}{1+2xz}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+2xz}\right)^3+....$

$=\frac{1}{2}\Big[\log_e x+\log_e z$

$+2\left\{\left(\frac{1}{1+2xz}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+2xz}\right)^3+....\right\}\Big]$

$$= \frac{1}{2}\left[\log_e xz + \log_e\left(\frac{1+\frac{1}{1+2xz}}{1-\frac{1}{1+2xz}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log_e xz + \log_e\left(\frac{1+xz}{xz}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\log_e(1+xz) = \frac{1}{2}\log_e y^2 = \log_e y .$$

चरघातांकी तथा लघुगणकीय श्रेणियाँ

SET Self Evaluation Test -8

1. यदि $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - .....\infty$, तब $x =$

[MNR 1973]

(a) $y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - .....\infty$

(b) $y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + ...\infty$

(c) $1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + ...$

(d) इनमें से कोई नहीं

2. $\frac{1}{1!} + \frac{1+2}{2!} + \frac{1+2+2^2}{3!} + ...\infty =$

[AMU 1992; Kurukshetra CEE 1999; EAMCET 2002]

(a) e^2 (b) $e^2 - 1$

(c) $e^2 - e$ (d) $e^3 - e^2$

3. यदि $a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$, $b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$ एवं $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$, तब $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ का मान है

(a) 1 (b) 0

(c) – 1 (d) – 2

4. यदि n प्राकृत संख्याओं के गुणनफल (दो एक बार में ली गई हैं) का योगफल S_n द्वारा प्रदर्शित है, तब $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n}{(n+1)!} =$

(a) $\frac{11\,e}{24}$ (b) $\frac{11\,e}{12}$

(c) $\frac{13\,e}{24}$ (d) इनमें से कोई नहीं

5. श्रेणी $C = 1 + \frac{\cos x}{1!} + \frac{\cos 2x}{2!} + \frac{\cos 3x}{3!} + ...$

और $S = \frac{\sin x}{1!} + \frac{\sin 2x}{2!} + \frac{\sin 3x}{3!} + ...$ का योगफल होगा

[AMU 2001]

(a) $\exp\,(ix)$

(b) $\exp[\cos(\sin x) + i\sin(\sin x)]$

(c) $\exp\,[\exp(ix)]$

(d) $\exp(\cos\,x)[\exp(ix)]$

6. श्रेणी $\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + ...$ का योग है [AIEEE 2004]

(a) $\frac{(e^2 - 2)}{e}$ (b) $\frac{(e-1)^2}{2e}$

(c) $\frac{(e^2 - 1)}{2e}$ (d) $\frac{(e^2 - 1)}{2}$

7. यदि समीकरण $x^2 - px + q = 0$ के मूल α व β हैं, तब $\log_e(1 + px + qx^2) =$

(a) $(\alpha + \beta)x - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}x^2 + \frac{\alpha^3 + \beta^3}{3}x^3 - ......\infty$

(b) $(\alpha + \beta)x - \frac{(\alpha + \beta)^2}{2}x^2 + \frac{(\alpha + \beta)^3}{3}x^3 - ......\infty$

(c) $(\alpha + \beta)x + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}x^2 + \frac{\alpha^3 + \beta^3}{3}x^3 + ...\infty$

(d) इनमें से कोई नहीं

8. यदि $0 < y < 2^{1/3}$ एवं $x(y^3 - 1) = 1$, तब $\frac{2}{x} + \frac{2}{3x^3} + \frac{2}{5x^5} + ... =$ [EAMCET 2003]

(a) $\log\left[\frac{y^3}{y^3 - 2}\right]$

(b) $\log\left[\frac{y^3}{1 - y^3}\right]$

(c) $\log\left[\frac{2y^3}{1 - y^3}\right]$

(d) $\log\left[\frac{y^3}{1 - 2y^3}\right]$

9. यदि $\log(1 - x + x^2) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$, तब $a_3 + a_6 + a_9 + ... =$ [Kurukshetra CEE 2002]

(a) $\log 2$ (b) $\frac{2}{3}\log 2$

(c) $\frac{1}{3}\log 2$ (d) $2\log 2$

10. $1 + \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{3.4.5} + \frac{2}{5.6.7} + ...$ का योग है

[Roorkee 1980; MP PET 2002, 03]

(a) $2\log_e 2$ (b) $\log_e 2$

(c) $3\log_e 3$ (d) $3\log_e 2$

AS Answers and Solutions

(SET - 8)

1. (b) $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... = \log_e(1+x)$

$\Rightarrow e^y = 1 + x \Rightarrow x = -1 + e^y$

$\Rightarrow x = -1 + \left\{1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + ...\right\} = \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + ...$

2. (c) $\frac{1}{1!} + \frac{1+2}{2!} + \frac{1+2+2^2}{3!} + ...\infty$

अब, श्रेणी का nवाँ पद है,

$T_n = \frac{1+2+2^2+....+2^{n-1}}{n!} = \frac{2^n - 1}{(2-1)n!} = \frac{2^n}{n!} - \frac{1}{n!}$

$n = 1, 2, 3, ...$रखने पर,

$T_1 = \frac{2}{1!} - \frac{1}{1!}$; $T_2 = \frac{2^2}{2!} - \frac{1}{2!}$; $T_3 = \frac{2^3}{3!} - \frac{1}{3!}$

....

....

जोड़ने पर, $\left(\frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + ...\right) - \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...\right)$

$= (e^2 - 1) - (e - 1) = (e^2 - e)$.

3. (a) $a + b + c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$

$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = e^x$

$a + b\omega + c\omega^2 = 1 + \omega x + \frac{\omega^2 x^2}{2!} + \frac{\omega^2 x^3}{3!} + ... = e^{\omega x}$

(ω इकाई का अधिकल्पित मूल है)

एवं $a + b\omega^2 + c\omega = e^{\omega^2 x}$

अब $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a + b\omega + c\omega^2)$

$(a + b\omega^2 + c\omega)$

$= e^x e^{\omega x} e^{\omega^2 x} = e^{x(1+\omega+\omega^2)} = e^{0.x} = e^0 = 1$.

4. (a) चूँकि $\sum ab = \frac{1}{2}[(\Sigma a)^2 - (\Sigma a^2)]$

$\therefore S_n =$ प्रथम n प्राकृत संख्याओं के गुणनफल का योगफल (जबकि दो संख्यायें एक बार में ली गई हैं)

$= \frac{1}{2}[(\Sigma n)^2 - (\Sigma n^2)]$

$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

$= \frac{1}{24} n(n-1)(n+1)(3n+2)$

$\Rightarrow \frac{S_n}{(n+1)!} = \frac{1}{24}\left(\frac{3n+2}{(n-2)!}\right) = \frac{3(n-2)+8}{24(n-2)!}$

$= \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n}{(n+1)!} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!}$

$= \frac{e}{8} + \frac{e}{3} = \frac{11e}{24}$.

5. (c) $C + iS = 1 + \frac{(\cos x + i\sin x)}{1!} + \frac{(\cos 2x + i\sin 2x)}{2!} + ...$

$= 1 + \frac{e^{ix}}{1!} + \frac{(e^{ix})^2}{2!} + \frac{(e^{ix})^3}{3!} + ... = e^{e^{ix}} = \exp[\exp(ix)]$.

6. (b) यहाँ, $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...$

$x = 1$ रखने पर,

$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + ... = \frac{e + e^{-1}}{2}$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + ... = \frac{e^2 + 1}{2e}$

$\Rightarrow \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + ... = \frac{e^2 + 1}{2e} - 1$

अतः, $\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + ... = \frac{(e-1)^2}{2e}$.

7. (a) दिया है, $\alpha + \beta = p;\ \alpha.\beta = q$

$\therefore \log_e(1 + px + qx^2) = \log_e\{1 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta x^2\}$

$= \log_e(1 + \alpha x)(1 + \beta x)$

$\left\{\alpha x - \frac{(\alpha x)^2}{2} + \frac{(\alpha x)^3}{3} - .....\right\} + \left\{\beta x - \frac{(\beta x)^2}{2} + \frac{(\beta x)^3}{3} - ....\right\}$

$= (\alpha + \beta)x - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}x^2 + \frac{\alpha^3 + \beta^3}{3}x^3 - ......\infty$.

8. (a) दिया है $x = \frac{1}{y^3 - 1}$

तब, $2\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{5x^5}+.....\right]$

$$=\log\left(\frac{1+(1/x)}{1-(1/x))}\right)=\log\left(\frac{1+\frac{1}{y^3-1}}{1-\frac{1}{y^3-1}}\right)=\log\left(\frac{y^3}{y^3-2}\right).$$

9. (b) $\log(1-x+x^2) = \log\frac{(1+x^3)}{(1+x)} = \log(1+x^3)-\log(1+x)$

$$=\left(x^3-\frac{x^6}{2}+\frac{x^9}{3}-\frac{x^{12}}{4}+....\right)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}....\right)$$

$$=\left(x^3-\frac{x^6}{2}+\frac{x^9}{3}-\frac{x^{12}}{4}+....\right)+\left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+....\right)$$

$$= -x+\frac{x^2}{2}+x^3\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+x^6\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)$$

$$-\frac{x^7}{7}+\frac{x^8}{8}+x^9\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)+...$$

$$\therefore \log(1-x+x^2)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+...$$

$$\Rightarrow a_3=1-\frac{1}{3}, a_6=-\frac{1}{2}+\frac{1}{6},\ a_9=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}$$

$$\therefore\ a_3+a_6+a_9+....=1-\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)+...$$

$$=\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{6}\right)+\frac{2}{9}+\left(\frac{-2}{12}\right)+....$$

$$=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+....\right)=\frac{2}{3}\log 2.$$

10. (a) यहाँ, $\frac{2}{1.2.3}=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}, \frac{2}{3.4.5}=\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}$ ......

$\therefore$ योगफल $=1+\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)+\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}\right)+....$

$$=1+\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+....\right)-\left(\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+....\right)$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-...\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...\right)=2\log_e 2.$$

* * *