Chapter
9
सारणिक तथा आव्यूह

सारणिक

परिभाषा (Definition)

माना तीन समघातीय रैखिक समीकरण

$$a_1x+b_1y+c_1z=0\ ,\ a_2x+b_2y+c_2z=0$$

तथा $a_3x+b_3y+c_3z=0$ हैं।

उपर्युक्त तीनों समीकरणों से *x, y, z* का विलोपन करने पर,

$$a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0 \quad .....(i)$$

समीकरण (i) के बाँयें पक्ष को $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

= $a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ से प्रदर्शित किया जा सकता है। इस सारणिक में तीन पंक्तियाँ व तीन स्तम्भ हैं, अतः इसे तृतीय कोटि का सारणिक कहते हैं।

द्वितीय कोटि के सारणिक में अवयवों की संख्या = $2^2=4$ व तृतीय कोटि के सारणिक में अवयवों की संख्या = $3^2=9$ होती है।

सारणिक की पंक्तियाँ व स्तम्भ (Rows and columns of a determinant) : किसी सारणिक में प्रथम, द्वितीय व तृतीय क्षैतिज रेखाओं को सारणिक की पंक्तियाँ कहते हैं, इन्हें क्रमशः R_1, R_2 व R_3 से प्रदर्शित करते हैं तथा पहली, दूसरी व तीसरी ऊर्ध्वाधर रेखाओं को सारणिक के स्तम्भ कहते हैं। इन्हें क्रमशः C_1, C_2 व C_3 से प्रदर्शित करते हैं।

सारणिक के गुणधर्म (Properties of determinants)

P-1 : यदि किसी सारणिक की पंक्तियों तथा स्तम्भों को परस्पर परिवर्तित किया जाये तो सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

चूँकि पंक्तियों तथा स्तम्भों को परस्पर परिवर्तित करने पर सारणिक अपरिवर्तित रहता है, इसलिए कोई भी प्रमेय (Theorem) यदि पंक्तियों के लिए सत्य है, तो स्तम्भों के लिए भी सत्य होगी।

P-2 : यदि किसी सारणिक की किन्हीं दो पंक्तियों (या स्तम्भों) को परस्पर परिवर्तित किया जाये, तो सारणिक का आंकिक मान अपरिवर्तित रहता है, किन्तु चिन्ह परिवर्तित हो जाता है।

P-3 : यदि किसी सारणिक की दो पांक्तियाँ (या स्तम्भ) सर्वसम हों, तो इसका मान शून्य होगा।

P-4 : यदि किसी सारणिक की किसी पंक्ति (या स्तम्भ) के सभी अवयवों को किसी संख्या से गुणा किया जाये, तो सारणिक के मान में भी उस संख्या से गुणा हो जाता है।

P-5 : यदि किसी पंक्ति (या स्तम्भ) के प्रत्येक अवयव को दो पदों के योग के रूप में व्यक्त किया जाये, तो सारणिक को दो सारणिक के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरणार्थ: $\begin{vmatrix} a_1+x & b_1+y & c_1+z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

P-6 : यदि सारणिक की किसी पंक्ति (स्तम्भ) के प्रत्येक अवयव में किसी दूसरी पंक्ति (स्तम्भ) के संगत अवयवों को किसी एक ही राशि से गुणा करके जोड़ें या घटायें, तो सारणिक का मान नहीं बदलता है।

उदाहरणार्थ: $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

तथा $D'=\begin{vmatrix} a_1+ma_2 & b_1+mb_2 & c_1+mc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3-na_1 & b_3-nb_1 & c_3-nc_1 \end{vmatrix}$, तो $D'=D$.

P-7 : यदि किसी सारणिक में मुख्य विकर्ण के नीचे या मुख्य विकर्ण के ऊपर या मुख्य विकर्ण के अवयवों को छोड़कर सभी अवयव शून्य हों, तो सारणिक का मान मुख्य विकर्ण के अवयवों के गुणनफल के बराबर होता है।

P-8 : यदि किसी सारणिक में $x=\alpha$ रखने पर सारणिक का मान शून्य हो जाता है, तो $(x-\alpha)$, सारणिक का एक गुणनखण्ड होगा।

P-9 : सारणिकों की संक्रियाओं में यह ध्यान दिया जाये कि कम से कम एक पंक्ति (या स्तम्भ) अपरिवर्तित रहे, या अधिकतम संक्रियाओं की संख्या = सारणिक की कोटि –1.

P-10 : यह ध्यान देने की आवश्यकता है, कि जब किसी पंक्ति (या स्तम्भ) को किसी अशून्य राशि से गुणा कर परिवर्तित किया जाता है, तो सारणिक उस संख्या से विभाजित होता है।

उपसारणिक तथा सहखण्ड (Minors and Cofactors)

(1) **अवयव का उपसारणिक** (Minor of an element) **:** किसी सारणिक के किसी अवयव पर प्रतिच्छेदित होने वाले स्तम्भ तथा पंक्ति का विलोपन करने पर प्राप्त सारणिक, दिए गए अवयव का उपसारणिक कहलाता है। इसे M_{ij} से निरूपित करते हैं।

यदि सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, तो उपसारणिकों का सारणिक

$M = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix}$ होगा।

जहाँ $M_{11} = a_{11}$ का उपसारणिक $= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{12} = a_{12}$ का उपसारणिक $= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{13} = a_{13}$ का उपसारणिक $= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

इसी प्रकार दूसरे अवयवों के उपसारणिक ज्ञात किये जा सकते हैं। इनका उपयोग करने पर सारणिक का मान

$$\Delta = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

या $\Delta = -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23}$

या $\Delta = a_{31}M_{31} - a_{32}M_{32} + a_{33}M_{33}$.

(2) **अवयव का सहखण्ड** (Cofactor of an element) **:** किसी अवयव a_{ij} (अर्थात् i वीं पंक्ति व j वें स्तम्भ का अवयव) का सहखण्ड उस अवयव के उपसारणिक का $(-1)^{i+j}$ गुना होता है। इसे C_{ij} या A_{ij} या F_{ij} द्वारा व्यक्त करते हैं तथा $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, तो सहखण्डों का सारणिक

$C = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix}$ होगा

जहाँ, $C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = +M_{11}$, $C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$

तथा $C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = +M_{13}$

इसी प्रकार हम दूसरे अवयवों के सहखण्ड प्राप्त कर सकते हैं।

दो सारणिकों का गुणनफल (Product of two determinants)

माना तृतीय कोटि के दो सारणिक $D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ तथा

$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$ हैं। माना इनका गुणनफल D है।

तब $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

हम पंक्ति को स्तम्भ से या स्तम्भ को पंक्ति से या स्तम्भ को स्तम्भ से भी गुणा कर सकते हैं।

सारणिकों का अवकलन व समाकलन (Differentiation and Integration of determinants)

(1) **सारणिक का अवकलन** (Differentiation of a determinant) **:** (i) माना $\Delta(x)$, कोटि 2 का एक सारणिक है। यदि $\Delta(x) = |C_1 \quad C_2|$, जहाँ C_1 व C_2 प्रथम व द्वितीय स्तम्भ को व्यक्त करते हैं, तो $\Delta'(x) = |C'_1 \quad C_2| + |C_1 \quad C'_2|$

जहाँ C'_i, i वें स्तम्भ में स्थित सभी फलनों का अवकलज प्रदर्शित करता है। इसी प्रकार, यदि $\Delta(x) = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \end{vmatrix}$, तो $\Delta'(x) = \begin{vmatrix} R'_1 \\ R_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_1 \\ R'_2 \end{vmatrix}$

(ii) माना $\Delta(x)$ एक तृतीय कोटि का सारणिक है तथा $\Delta(x) = |C_1 \quad C_2 \quad C_3|$, तो

$$\Delta'(x) = |C'_1 \quad C_2 \quad C_3| + |C_1 \quad C'_2 \quad C_3| + |C_1 \quad C_2 \quad C'_3|$$

इसी प्रकार, यदि $\Delta(x) = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{vmatrix}$, तो $\Delta'(x) = \begin{vmatrix} R'_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_1 \\ R'_2 \\ R_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R'_3 \end{vmatrix}$

(iii) यदि केवल एक पंक्ति (या स्तम्भ) के अवयव x के फलन हैं तथा अन्य पंक्तियों (या स्तम्भों) के अवयव नियतांक हों, अर्थात् यदि

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

तब $\Delta'(x) = \begin{vmatrix} f'_1(x) & f'_2(x) & f'_3(x) \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ एवं व्यापक रूप में,

$$\Delta^n(x) = \begin{vmatrix} f_1^n(x) & f_2^n(x) & f_3^n(x) \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

जहाँ n कोई धनात्मक पूर्णांक है और $f^n(x)$ का अर्थ है, $f(x)$ का n वां अवकलज।

(2) **सारणिक का समाकलन** (Integration of a determinant) माना $\Delta(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ a & b & c \\ l & m & n \end{vmatrix}$, जहाँ a, b, c, l, m तथा n नियतांक हैं

$$\Rightarrow \int_a^b \Delta(x)dx = \begin{vmatrix} \int_a^b f(x)dx & \int_a^b g(x)dx & \int_a^b h(x)dx \\ a & b & c \\ l & m & n \end{vmatrix}$$

• यदि एक से अधिक पंक्तियों या स्तम्भों के अवयव x के फलन हों, तो समाकलन के लिए सारणिक का मान ज्ञात करना/विस्तार आवश्यक है।

रैखिक समीकरणों के निकाय के हल के लिए सारणिकों का अनुप्रयोग (Application of determinants in solving a system of linear equations)

(1) **तीन चरों में रैखिक समीकरणों के निकाय का क्रैमर नियम से हल :** युगपत् रैखिक समीकरणों के निकाय

$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ .....(i)

$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ .....(ii)

$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$ .....(iii)

का हल $x=\dfrac{D_1}{D}$, $y=\dfrac{D_2}{D}$ तथा $z=\dfrac{D_3}{D}$ होगा,

जहाँ $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $D_1=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$,

$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ तथा $D_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$, जबकि $D\neq 0$

(2) **समीकरणों के संगत होने के लिए प्रतिबन्ध** (Conditions for consistency) **:** तीन अज्ञात राशियों में 3 युगपत् रैखिक समीकरणों के निकाय के लिए, (i) यदि $D\neq 0$, तो दिए गए समीकरणों का निकाय संगत होगा तथा इसका एक अद्वितीय हल, $x=\dfrac{D_1}{D}$, $y=\dfrac{D_2}{D}$ तथा $z=\dfrac{D_3}{D}$ होगा।

(ii) यदि $D=0$ तथा $D_1=D_2=D_3=0$, तो दिए गए समीकरणों का निकाय संगत होगा, जिसके अनन्त हल होंगे।

(iii) यदि $D=0$ तथा D_1, D_2, D_3 में से कम से कम एक अशून्य है, तो दिए गए समीकरणों का निकाय असंगत होगा।

• समघातीय समीकरणों का निकाय $a_1x+b_1y+c_1z=0$, $a_2x+b_2y+c_2z=0$, $a_3x+b_3y+c_3z=0$ सदैव संगत होता है। यदि $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$, तो इस निकाय का अद्वितीय हल $x=y=z=0$ होगा, जिसे तुच्छ (trivial) हल कहते हैं। किन्तु यदि $\Delta=0$, तो इन निकाय के अनन्त हल होंगे। अतः अतुच्छ (non-trivial) हल के लिए, $\Delta=0$.

कुछ विशेष सारणिक (Some special determinants)

(1) **सममित सारणिक** (Symmetric determinant) **:** एक सारणिक सममित सारणिक होगा, यदि इसके सभी अवयवों के लिए, $a_{ij}=a_{ji}, \forall\, i, j$.

उदाहरणार्थ : $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$

(2) **विषम–सममित सारणिक** (Skew-symmetric determinant) **:** एक सारणिक विषम-सममित सारणिक होगा, यदि इसके सभी अवयवों के लिए, $a_{ij}=-a_{ji}, \forall\, i, j$ ***उदाहरणार्थ*** : $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

• किसी विषम-सममित सारणिक का प्रत्येक विकर्ण-अवयव शून्य होता है।

• सम कोटि के प्रत्येक विषम-सममित सारणिक का मान सदैव एक पूर्ण वर्ग होता है तथा विषम कोटि के प्रत्येक विषम-सममित सारणिक का मान सदैव शून्य होता है।

(3) **चक्रीय क्रम** (Cyclic order) **:** यदि पंक्तियों (या स्तम्भों) के अवयव चक्रीय क्रम में हों। अर्थात्,

(i) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$

(ii) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

$=(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$.

(iii) $\begin{vmatrix} a & bc & abc \\ b & ca & abc \\ c & ab & abc \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}=abc(a-b)(b-c)(c-a)$

(iv) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(v) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=-(a^3+b^3+c^3-3abc)$

आव्यूह

परिभाषा (Definition)

यदि संख्याओं (जो कि वास्तविक या अधिकल्पित हो सकती हैं) के एक निकाय को पंक्तियों (rows) और स्तंभों (columns) की आयताकार सारणी में व्यवस्थित किया जाये, तो इस आयताकार सारणी को आव्यूह (Matrix) कहते हैं। आव्यूह को लघुकोष्ठक ( ) अथवा दीर्घकोष्ठक [ ] द्वारा निरूपित करते हैं। आव्यूह में उपस्थित संख्याओं को आव्यूह के अवयव (element) कहते हैं।

आव्यूह की कोटि (Order of a matrix)

एक आव्यूह, जिसमें m पंक्तियाँ (rows) तथा n स्तंभ (columns) हों, को $m\times n$ कोटि का आव्यूह कहते हैं, जिसे साधारणतः $m\times n$ आव्यूह से निरूपित करते हैं;

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ...a_{1j} & ...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ...a_{2j} & ...a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & ...a_{ij} & ...a_{in} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ...a_{mj} & ...a_{mn} \end{bmatrix}$$

या $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, जहाँ $\begin{matrix} i=1,\ 2, ...m \\ j=1,\ 2, ...n \end{matrix}$

यहाँ a_{ij}, i वीं पंक्ति तथा j वें स्तंभ के अवयव को प्रदर्शित करता है।

उदाहरणार्थ : आव्यूह $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 6 & 2 & -7 \end{bmatrix}$ की कोटि 2×3 है।

एक $m\times n$ कोटि के आव्यूह में mn अवयव होते हैं। ऐसे आव्यूह की प्रत्येक पंक्ति में n अवयव तथा प्रत्येक स्तंभ में m अवयव होते हैं।

आव्यूहों की समानता (Equality of matrices)

दो आव्यूह A व B समान कहलाते हैं, यदि वे समान कोटि के हैं तथा उनके संगत अवयव समान हैं।

आव्यूह के प्रकार (Types of matrices)

(1) **पंक्ति आव्यूह** (Row matrix) : वह आव्यूह (matrix) जिसमें केवल एक ही पंक्ति हो, उसे पंक्ति आव्यूह (Row matrix) या पंक्ति सदिश कहते हैं। इसमें स्तंभों की संख्या एक से अधिक हो सकती है। *उदाहरणार्थ* : $[5\ \ 0\ \ 3]$ एक 1×3 कोटि का पंक्ति आव्यूह है तथा $[2]$ एक 1×1 कोटि का पंक्ति आव्यूह है।

(2) **स्तंभ आव्यूह** (Column matrix) : वह आव्यूह (matrix) जिसमें केवल एक ही स्तंभ हो, उसे स्तंभ आव्यूह (Column matrix) या स्तंभ सदिश कहते हैं। इसमें पंक्तियों की संख्या एक से अधिक हो सकती है।

उदाहरणार्थ: $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ एक 3×1 कोटि का स्तंभ आव्यूह है तथा $[2]$ एक 1×1 कोटि का स्तंभ आव्यूह है। स्पष्टतः $[2]$ पंक्ति तथा स्तम्भ आव्यूह दोनों ही है।

(3) **एकल आव्यूह** (Singleton matrix) : यदि किसी आव्यूह में केवल एक अवयव हो, तो उसे एकल आव्यूह (Singleton matrix) कहते हैं।

अतः $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ एक एकल आव्यूह है, यदि $m=n=1$

उदाहरणार्थ: $[2]$, $[3]$, $[a]$, $[-3]$ एकल आव्यूह हैं।

(4) **शून्य आव्यूह** (Null or zero matrix) : यदि किसी आव्यूह (matrix) के सभी अवयव शून्य हों, तो आव्यूह शून्य आव्यूह (Zero matrix) कहलाता है तथा इसे सामान्यतः O से प्रदर्शित करते हैं। अतः $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ एक शून्य आव्यूह है, यदि $a_{ij}=0$, (सभी i तथा j के लिए)।

उदाहरणार्थ: $[0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [0\ \ 0]$ सभी विभिन्न कोटियों के शून्य आव्यूह हैं।

(5) **वर्ग आव्यूह** (Square matrix) : यदि किसी आव्यूह में पंक्तियों तथा स्तम्भों की संख्या समान हो, तो वह आव्यूह वर्ग आव्यूह (Square matrix) कहलाता है। अतः $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ एक वर्ग आव्यूह है, यदि $m=n$.

उदाहरणार्थ: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह है।

(i) यदि $m\neq n$ हो, तो आव्यूह, आयताकार आव्यूह (Rectangular matrix) कहलाता है।

(ii) वर्ग आव्यूह A के अवयव, जिसमें $i=j$ हो, अर्थात् $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... a_{nn}$ आदि विकर्ण अवयव कहलाते हैं तथा वह रेखा जिस पर ऐसे सभी अवयव स्थित होते हैं, आव्यूह A का मुख्य विकर्ण (Principal diagonal) कहलाता है।

(6) **विकर्ण आव्यूह** (Diagonal matrix) : वह आव्यूह, जिसके मुख्य विकर्ण के अवयवों के अतिरिक्त सभी अवयव शून्य हों, विकर्ण आव्यूह (Diagonal matrix) कहलाता है। अतः एक वर्ग आव्यूह $A=[a_{ij}]$ एक विकर्ण आव्यूह होगा, यदि $a_{ij}=0$, जबकि $i\neq j$

उदाहरणार्थ: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, 3×3 कोटि का विकर्ण आव्यूह है, जिसे diag $[2, 3, 4]$ से निरूपित करते हैं।

(7) **इकाई या तत्समक आव्यूह** (Identity matrix) : वह वर्ग आव्यूह, जिसके मुख्य विकर्ण के सभी अवयव '1' हों तथा अन्य सभी अवयव शून्य हों, तत्समक या इकाई आव्यूह (Identity matrix or unit matrix) कहलाता है। अतः वर्ग आव्यूह $A=[a_{ij}]$ एक तत्समक आव्यूह होगा यदि

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ यदि } i=j \\ 0, \text{ यदि } i\neq j \end{cases}.$$

n कोटि के तत्समक आव्यूह (Identity matrix) को I_n से निरूपित करते हैं।

उदाहरणार्थ : $[1], \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ आदि, क्रमशः 1, 2 तथा 3 कोटि के तत्समक आव्यूह हैं।

(8) **अदिश आव्यूह** (Scalar matrix) : वह वर्ग आव्यूह, जिसके मुख्य विकर्ण के सभी अवयव समान हो, तथा मुख्य विकर्ण के अतिरिक्त सभी अवयव शून्य हों, अदिश आव्यूह कहलाता है। अतः $A=[a_{ij}]$ एक वर्ग आव्यूह है तथा $a_{ij}=\begin{cases} \alpha, \text{ यदि } i=j \\ 0, \text{ यदि } i\neq j \end{cases}$ हो, तो A एक अदिश आव्यूह होगा।

इकाई आव्यूह तथा शून्य वर्ग आव्यूह भी अदिश आव्यूह होते हैं।

(9) **त्रिभुजीय आव्यूह** (Triangular Matrix) : एक वर्ग आव्यूह $[a_{ij}]$ एक त्रिभुजाकार आव्यूह कहलाता है, यदि मुख्य विकर्ण (Principal diagonal) के ऊपर या नीचे के सभी अवयव शून्य हों। यह दो प्रकार के होते हैं

(i) **उपरित्रिभुजीय आव्यूह** (Upper Triangular matrix) : एक वर्ग आव्यूह उपरित्रिभुजीय आव्यूह कहलाता है, यदि $a_{ij}=0$, जबकि $i>j$.

उदाहरणार्थ : $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, एक 3×3 कोटि का उपरित्रिभुजीय आव्यूह है।

(ii) **निम्नत्रिभुजीय आव्यूह** (Lower Triangular matrix) : एक वर्ग आव्यूह निम्नत्रिभुजीय आव्यूह कहलाता है, यदि $a_{ij}=0$, जबकि $i<j$.

उदाहरणार्थ: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ एक 3×3 कोटि का निम्नत्रिभुजीय आव्यूह है।

आव्यूह का ट्रेस (Trace of a matrix)

एक वर्ग आव्यूह A के मुख्य विकर्ण के अवयवों का योग आव्यूह A का ट्रेस (Trace) कहलाता है जिसे $tr\,A$ से प्रदर्शित करते हैं।

$$tr\ A=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}=a_{11}+a_{22}+...a_{nn}$$

आव्यूह के ट्रेस के गुणधर्म

माना $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ तथा $B=[b_{ij}]_{n\times n}$ तथा λ एक अदिश है, तब

(i) $tr(\lambda A)=\lambda\, tr(A)$ (ii) $tr(A-B)=tr(A)-tr(B)$

(iii) $tr(AB)=tr(BA)$ (iv) $tr(A)=tr(A')$ या $tr\,(A^T)$

(v) $tr(I_n)=n$ (vi) $tr\,(0)=0$

(vii) $tr(AB)\neq tr\,A\,.\,tr\,B$

आव्यूहों का योग तथा व्यवकलन (Addition and Subtraction of Matrices)

यदि $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ दो समान कोटि के आव्यूह हों, तो इनका योग $A+B$ एक ऐसा आव्यूह होगा जिसकी कोटि आव्यूह A तथा B की कोटि के बराबर होगी तथा जिसके अवयव A तथा B के संगत अवयवों (corresponding elements) के योग के बराबर होंगे,

अर्थात् $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$

इसी प्रकार, इनका व्यवकलन (Subtraction) $A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$ द्वारा परिभाषित होता है।

आव्यूहों का योग तथा अन्तर (व्यवकलन) तभी संभव है, जब आव्यूहों की कोटि समान हो।

आव्यूह के योग के गुणधर्म (Properties of matrix addition) : यदि A, B तथा C तीन समान कोटि के आव्यूह हैं, तो

(i) $A+B=B+A$, (क्रमविनिमेय नियम)

(ii) $(A+B)+C=A+(B+C)$, (साहचर्य नियम)

(iii) $A+O=O+A=A$, जहाँ O एक शून्य आव्यूह है जो कि आव्यूह का योज्य तत्समक है।

(iv) $A+(-A)=0=(-A)+A$, जहाँ $(-A)$, A के प्रत्येक अवयव के चिन्ह को परिवर्तित करने पर प्राप्त होता है, जो कि आव्यूह का योज्य प्रतिलोम है।

(v) $\left.\begin{matrix} A+B=A+C \\ B+A=C+A \end{matrix}\right\} \Rightarrow B=C$, (निरसन नियम)

आव्यूह का अदिश गुणन (Scalar multiplication of matrices)

माना $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ एक आव्यूह है तथा k एक संख्या है, तब A के प्रत्येक अवयव को k से गुणा करने पर प्राप्त आव्यूह को A का k से अदिश गुणन कहते हैं, जिसे kA से निरूपित करते हैं। अतः यदि $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, तब $kA=Ak=[ka_{ij}]_{m\times n}$.

अदिश गुणन के गुणधर्म (Properties of scalar multiplication) :

यदि A, B समान कोटि के आव्यूह हों तथा λ, μ दो अदिश हों, तो

(i) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ (ii) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

(iii) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu A)=\mu(\lambda A)$ (iv) $(-\lambda A)=-(\lambda A)=\lambda(-A)$

• साधारण बीजगणित के सभी नियम आव्यूह के योग, व्यवकलन तथा अदिश गुणन को संतुष्ट करते हैं।

आव्यूहों का गुणन (Multiplication of matrices)

दो आव्यूह A तथा B गुणनफल AB के लिए तभी अनुकूलनीय है, यदि A में स्तम्भों की संख्या, B में पंक्तियों की संख्या के बराबर हो। यदि $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ क्रमशः $m\times n$ तथा $n\times p$ कोटि के दो आव्यूह हों, तो उनके गुणनफल AB की कोटि $m\times p$ होगी तथा यह $(AB)_{ij}=\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rj}$ द्वारा परिभाषित होता है।

$=[a_{i1}a_{i2}...a_{in}]\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$ = (A की iवीं पंक्ति) (B का jवाँ स्तम्भ) .....(i),

जहाँ $i=1, 2, ..., m$ तथा $j=1, 2, ...p$

अब एक पंक्ति आव्यूह तथा एक स्तम्भ आव्यूह के गुणनफल को परिभाषित करते हैं।

माना $A=[a_1 a_2 ....a_n]$ एक पंक्ति आव्यूह है तथा $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ एक स्तम्भ आव्यूह है तब, $AB=[a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n]$ ....(ii)

अतः (i) से, $(AB)_{ij}=A$ की iवीं पंक्ति के अवयवों का B के jवें स्तम्भ के अवयवों से गुणनफलों का योग।

आव्यूह गुणन के गुणधर्म (Properties of matrix multiplication)

यदि A, B तथा C तीन आव्यूह इस प्रकार हैं, कि उनका गुणनफल परिभाषित हो, तो

(i) $AB\neq BA$, (सामान्यतः क्रमविनिमेय नहीं है)

(ii) $(AB)C=A(BC)$, (साहचर्य नियम)

(iii) $IA=A=AI$, (जहाँ I, आव्यूह गुणन के लिए एक तत्समक आव्यूह है)

(iv) $A(B+C)=AB+AC$, (वितरण नियम)

(v) यदि $AB=AC \not\Rightarrow B=C$, (निरसन नियम सत्य नहीं है)

(vi) यदि $AB=0$, इसका अर्थ यह नहीं है कि $A=0$ या $B=0$, अर्थात दो अशून्य आव्यूहों का गुणनफल एक शून्य आव्यूह हो सकता है।

एक आव्यूह की धनात्मक पूर्णांक घात (Positive integral powers of a matrix)

आव्यूह A की धनात्मक पूर्णांक घात तभी परिभाषित है जब A एक वर्ग आव्यूह हो, तब $A^2=A.A$, $A^3=A.A.A=A^2A$,

धनात्मक पूर्णांक m, n के लिए,

(i) $A^m A^n=A^{m+n}$ (ii) $(A^m)^n=A^{mn}=(A^n)^m$

(iii) $I^n=I, I^m=I$

(iv) $A^0=I_n$; जहाँ A, n कोटि का वर्ग आव्यूह है।

आव्यूह का परिवर्त (Transpose of a matrix)

आव्यूह A की सभी पंक्तियों को स्तम्भों में एवं स्तम्भों को पंक्तियों में परिवर्तित करने पर प्राप्त आव्यूह, A का परिवर्त आव्यूह (Transpose of a matrix) कहलाता है, जिसे A^T या A' से निरूपित करते हैं।

परिभाषा से स्पष्ट है कि यदि A की कोटि $m\times n$ हो, तो A^T की कोटि $n\times m$ होगी।

उदाहरणार्थ : आव्यूह $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ का परिवर्त आव्यूह $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ होगा।

परिवर्त के गुणधर्म (Properties of transpose) : माना A तथा B दो आव्यूह हों, तब

(i) $(A^T)^T=A$

(ii) $(A+B)^T=A^T+B^T$, जहाँ A तथा B समान कोटि के हैं।

(iii) $(kA)^T=kA^T$, जहाँ k कोई अदिश है,(वास्तविक या अधिकल्पित)

(iv) $(AB)^T=B^TA^T$, A तथा B गुणन AB के लिए अनुकूलनीय हैं।

(v) $(A_1A_2A_3.....A_{n-1}A_n)^T=A_n{}^TA_{n-1}{}^T.......A_3{}^TA_2{}^TA_1{}^T$

(vi) $I^T=I$

विशेष प्रकार के आव्यूह (Special types of matrices)

(1) **सममित आव्यूह** (Symmetric matrix) : एक वर्ग आव्यूह $A=[a_{ij}]$ सममित आव्यूह (Symmetric matrix) कहलाता है, यदि $a_{ij}=a_{ji}\ \forall\ i, j$ अथवा $A^T=A$. ***उदाहरणार्थ***: $\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$.

(2) **विषम–सममित आव्यूह** (Skew-symmetric matrix) : एक वर्ग आव्यूह $A=[a_{ij}]$ विषम-सममित आव्यूह (Skew- symmetric matrix) कहलाता है, यदि $a_{ij}=-a_{ji}\ \forall\ i, j$ अथवा $A^T=-A$.

उदाहरणार्थ: $\begin{bmatrix} 0 & h & g \\ -h & 0 & f \\ -g & -f & 0 \end{bmatrix}$

सममित तथा विषम सममित आव्यूहों के गुणधर्म (Properties of symmetric and skew-symmetric matrices)

(i) यदि A एक वर्ग आव्यूह हो, तो $A+A^T, AA^T, A^TA$ सममित आव्यूह होंगे, जबकि $A-A^T$ विषम-सममित आव्यूह होगा।

(ii) यदि A एक सममित आव्यूह हो, तो $-A, KA, A^T, A^n, A^{-1}$, B^TAB भी सममित आव्यूह होंगे, जहाँ $n \in N$, $K \in R$ तथा B एक वर्ग आव्यूह है, जिसकी कोटि A के समान है।

(iii) यदि A एक विषम-सममित आव्यूह हो, तो

(a) A^{2n} एक सममित आव्यूह होगा, जहाँ $n \in N$

(b) A^{2n+1} एक विषम-सममित आव्यूह होगा, जहाँ $n \in N$

(c) kA भी विषम-सममित आव्यूह होगा, जहाँ $k \in R$

(d) B^TAB भी विषम-सममित आव्यूह होगा, जहाँ B एक वर्ग आव्यूह है, जिसकी कोटि A की कोटि के बराबर है।

(iv) यदि A, B दो सममित आव्यूह हों, तो

(a) $A \pm B,\ AB + BA$ भी सममित आव्यूह होंगे।

(b) $AB - BA$ एक विषम-सममित आव्यूह होगा।

(c) AB एक सममित आव्यूह होगा, जबकि $AB = BA$.

(v) यदि A, B दो विषम-सममित आव्यूह हों, तो

(a) $A \pm B,\ AB - BA$ विषम-सममित आव्यूह होंगे

(b) $AB + BA$ सममित आव्यूह होगा।

(vi) यदि A एक विषम-सममित आव्यूह हो तथा C एक स्तम्भ आव्यूह हो, तो C^TAC, कोटि 1 का शून्य आव्यूह होगा।

(vii) प्रत्येक वर्ग आव्यूह को स्वंय के सममित तथा विषम-सममित आव्यूह के योग के रूप में लिख सकते हैं, अर्थात्

$$A = \left[\frac{1}{2}(A + A^T)\right] + \left[\frac{1}{2}(A - A^T)\right].$$

(3) **अव्युत्क्रमणीय तथा व्युत्क्रमणीय आव्यूह** (Singular and Non-singular matrix) : कोई वर्ग आव्यूह A व्युत्क्रमणीय आव्यूह होगा, यदि $|A| \neq 0$ तथा अव्युत्क्रमणीय आव्यूह होगा, यदि $|A| = 0$. यहाँ $|A|$ या det(A) और det $|A|$ का अर्थ आव्यूह A की सारणिक से है।

उदाहरणार्थ: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, तब $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2 \Rightarrow A$ एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

(4) **हरमीशियन आव्यूह तथा विषम हरमीशियन आव्यूह** (Hermitian and skew-Hermitian matrix) : एक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ हरमीशियन आव्यूह (Hermitian matrix) कहलाता है, यदि $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, $\forall i, j$ अर्थात् $A = A^\theta$.

उदाहरणार्थ : $\begin{bmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3-4i & 5+2i \\ 3+4i & 5 & -2+i \\ 5-2i & -2-i & 2 \end{bmatrix}$

हरमीशियन आव्यूह हैं।

(5) **लाम्बिक आव्यूह** (Orthogonal matrix) : एक वर्ग आव्यूह A लाम्बिक आव्यूह कहलाता है, यदि $AA^T = I = A^TA$ अर्थात् $A^{-1} = A^T$.

***उदाहरणार्थ*:** $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ लाम्बिक है,

क्योंकि $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = A^T$.

प्रत्येक इकाई आव्यूह लाम्बिक होता है। किसी लाम्बिक आव्यूह के सारणिक का मान –1 या 1 होता है।

(5) **वर्गसम आव्यूह** (Idempotent matrix) : एक वर्ग आव्यूह A को वर्गसम आव्यूह कहा जाता है, यदि $A^2 = A$ हो।

उदाहरणार्थ: $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ एक वर्गसम आव्यूह है, क्योंकि

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1/4+1/4 & 1/4+1/4 \\ 1/4+1/4 & 1/4+1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = A$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ भी वर्गसम आव्यूह हैं, क्योंकि $A^2 = A$ तथा $B^2 = B$. प्रत्येक इकाई आव्यूह वर्गसम आव्यूह होते हैं।

(6) **अन्तर्वलनीय आव्यूह** (Involutory matrix) : एक वर्ग आव्यूह A अन्तर्वलनीय आव्यूह कहलाता है, यदि $A^2 = I$ या $A^{-1} = A$.

उदाहरणार्थ : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ एक अन्तर्वलनीय (Involutory) आव्यूह है

क्योंकि $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$. प्रत्येक इकाई आव्यूह अन्तर्वलनीय (Involutory) आव्यूह होता है।

(7) **शून्यभावी आव्यूह** (Nilpotent matrix) : एक वर्ग आव्यूह A शून्यभावी आव्यूह कहलाता है, यदि $p \in N$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि $A^p = 0$.

उदाहरणार्थ : $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ एक शून्यभावी आव्यूह है, क्योंकि

$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$, (यहाँ $p = 2$).

प्रत्येक शून्यभावी आव्यूह के सारणिक का मान शून्य होता है।

(8) **ऐकिक आव्यूह** (Unitary matrix) : एक वर्ग आव्यूह A ऐकिक आव्यूह कहलाता है, यदि $\bar{A}'A = I$. चूँकि $|\bar{A}'| = |A|$ तथा $|\bar{A}'A| = |\bar{A}'||A|$, इसलिए यदि $\bar{A}'A = I$, तो $|\bar{A}'||A| = 1$

अतः ऐकिक आव्यूह के सारणिक का मान इकाई होता है। एक ऐकिक आव्यूह (Unitary matrix) व्युत्क्रमणीय आव्यूह होता है।

अतः $\bar{A}'A = I \Rightarrow A\bar{A}' = I$.

(9) **आवर्ती आव्यूह** (Periodic matrix) : एक आव्यूह A आवर्ती आव्यूह कहलाता है, यदि $A^{k+1} = A$, जहाँ k एक धनात्मक पूर्णांक है। यदि $A^{k+1} = A$ के लिए k एक न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक हो, तो k, A का आवर्तनांक होता है।

(10) **आव्यूह का अवकलन** (Differentiation of a matrix) : यदि $A = \begin{bmatrix} f(x) & g(x) \\ h(x) & l(x) \end{bmatrix}$ हो, तो $\frac{dA}{dx} = \begin{bmatrix} f'(x) & g'(x) \\ h'(x) & l'(x) \end{bmatrix}$, A का अवकलज होता है।

उदाहरणार्थ: यदि $A = \begin{bmatrix} x^2 & \sin x \\ 2x & 2 \end{bmatrix}$, तब $\frac{dA}{dx} = \begin{bmatrix} 2x & \cos x \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ होगा।

(12) **आव्यूह का संयुग्मी** (Conjugate of a matrix) : एक आव्यूह A, जिसके अवयवों में सम्मिश्र संख्यायें हों, तो इन अवयवों के स्थान पर उनकी संयुग्मी सम्मिश्र संख्याओं को लिखने पर प्राप्त आव्यूह को आव्यूह का संयुग्मी कहते हैं तथा इसे $\bar{A}$ से प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरणार्थ: $A = \begin{bmatrix} 1+2i & 2-3i & 3+4i \\ 4-5i & 5+6i & 6-7i \\ 8 & 7+8i & 7 \end{bmatrix}$

तब $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & 2+3i & 3-4i \\ 4+5i & 5-6i & 6+7i \\ 8 & 7-8i & 7 \end{bmatrix}$

संयुग्मी आव्यूह के गुणधर्म (Properties of conjugates) :

(i) $\overline{(\overline{A})} = A$ (ii) $\overline{(A+B)} = \overline{A} + \overline{B}$

(iii) $\overline{(\alpha A)} = \overline{\alpha}\overline{A}$, α कोई संख्या है

(iv) $\overline{(AB)} = \overline{A}\,\overline{B}$, A तथा B गुणन के लिए अनुकूलनीय हैं।

(13) **संयुग्मी परिवर्त आव्यूह** (Transpose conjugate of a matrix): किसी आव्यूह A के संगत संयुग्मी आव्यूह $\overline{A}$ का परिवर्त आव्यूह $(\overline{A})^T$, A का संयुग्मी परिवर्त आव्यूह कहलाता है। इसे प्रतीक रूप में A^{θ} से व्यक्त करते हैं। A के परिवर्त का संयुग्मी आव्यूह A के संयुग्मी के परिवर्त आव्यूह के समान होता है, अर्थात् $\overline{(A')} = (\overline{A})' = A^{\theta}$.

यदि $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ तो $A^{\theta} = [b_{ji}]_{n \times m}$ जहाँ $b_{ji} = \overline{a}_{ij}$ अर्थात् A^{θ} के (j, i) वें अवयव = A के (i, j) वें अवयव का संयुग्मी

उदाहरणार्थः यदि $A = \begin{bmatrix} 1+2i & 2-3i & 3+4i \\ 4-5i & 5+6i & 6-7i \\ 8 & 7+8i & 7 \end{bmatrix}$,

तो $A^{\theta} = \begin{bmatrix} 1-2i & 4+5i & 8 \\ 2+3i & 5-6i & 7-8i \\ 3-4i & 6+7i & 7 \end{bmatrix}$

संयुग्मी परिवर्त आव्यूह के गुणधर्म (Properties of transpose conjugate)

(i) $(A^{\theta})^{\theta} = A$ (ii) $(A+B)^{\theta} = A^{\theta} + B^{\theta}$

(iii) $(kA)^{\theta} = k\,A^{\theta}$, k कोई संख्या है (iv) $(AB)^{\theta} = B^{\theta}A^{\theta}$

आव्यूह का सहखण्डज (Adjoint of a square matrix)

माना $A = [a_{ij}]$ एक n कोटि का वर्ग आव्यूह है तथा C_{ij}, A में a_{ij} का सहखण्ड है, तो आव्यूह, जो कि A के प्रत्येक अवयव को उसके सहखण्ड से प्रतिस्थापित करके प्राप्त किया गया हो, के परिवर्त को A का सहखण्डज कहते हैं, जिसे $adj\,A$ से प्रदर्शित करते हैं।

अतः $adj\;A = [C_{ij}]^T \Rightarrow (adj\,A)_{ij} = C_{ji} = A$ में a_{ji} का सहखण्ड

यदि $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$,

तब $adj\,A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$;

जहाँ C_{ij}, A में a_{ij} के सहखण्ड को प्रदर्शित करता है।

उदाहरणार्थ: $A = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}, C_{11} = s, C_{12} = -r, C_{21} = -q, C_{22} = p$

$\therefore adj\,A = \begin{bmatrix} s & -r \\ -q & p \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} s & -q \\ -r & p \end{bmatrix}$

सहखण्डज आव्यूह के गुणधर्म (Properties of adjoint matrix) : यदि A और B, n कोटि के वर्ग आव्यूह हों तथा I_n संगत इकाई आव्यूह हो, तो (i) $A(adj\,A) = |A|\,I_n = (adj\,A)A$ (अतः A ($adj\ A$) सदैव एक अदिश आव्यूह है)

(ii) $|adj\,A| = |A|^{n-1}$ (iii) $adj(adj\,A) = |A|^{n-2}\,A$

(iv) $|adj(adj\,A)| = |A|^{(n-1)^2}$ (v) $adj(A^T) = (adj\,A)^T$

(vi) $adj(AB) = (adj\,B)(adj\,A)$

(vii) $adj(A^m) = (adj\,A)^m, m \in N$

(viii) $adj(kA) = k^{n-1}(adj\,A), k \in R$

(ix) $adj(I_n) = I_n$

(x) $adj(O) = O$

(xi) A सममित है $\Rightarrow$ $adj\,A$ भी सममित होगा।

(xii) A विकर्ण आव्यूह है $\Rightarrow$ $adj\,A$ भी विकर्ण आव्यूह होगा।

(xiii) A त्रिभुजाकार आव्यूह है $\Rightarrow$ $adj\,A$ भी त्रिभुजाकार आव्यूह होगा।

(xiv) A अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है $\Rightarrow |adj\,A| = 0$

आव्यूह का व्युत्क्रम (प्रतिलोम आव्यूह) (Inverse of a Matrix)

एक n कोटि का व्युत्क्रमणीय आव्यूह, व्युत्क्रमणीय होता है, यदि एक समान कोटि के आव्यूह B का अस्तित्व इस प्रकार हो, कि $AB = I_n = BA$। इस स्थिति में, हम कह सकते हैं कि B, A का प्रतिलोम है अर्थात् $A^{-1} = B$ तथा $A^{-1} = \frac{1}{|A|}.adj\,A$

A के प्रतिलोम का अस्तित्व होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध $|A| \neq 0$ है।

प्रतिलोम आव्यूह के गुणधर्म (Properties of inverse matrix):

यदि A तथा B दो समान कोटि के प्रतिलोम या व्युत्क्रमणीय आव्यूह हों, तो (i) $(A^{-1})^{-1} = A$ (ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(iii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(iv) $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k, k \in N$ [विशेषतः $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$]

(v) $adj(A^{-1}) = (adj\,A)^{-1}$ (vi) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$

(vii) A = diag $(a_1 a_2 ... a_n) \Rightarrow A^{-1} = diag(a_1^{-1} a_2^{-1} ... a_n^{-1})$.

(viii) A सममित है $\Rightarrow A^{-1}$ भी सममित होगा।

(ix) A विकर्ण आव्यूह है, $|A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ भी विकर्ण आव्यूह होगा।

(x) A अदिश आव्यूह है $\Rightarrow A^{-1}$ भी अदिश आव्यूह होगा।

(xi) A त्रिभुजाकार आव्यूह है, $|A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ भी त्रिभुजाकार आव्यूह होगा।

(xii) प्रत्येक व्युत्क्रमणीय आव्यूह का एक अद्वितीय व्युत्क्रम आव्यूह होता है।

(xiii) **गुणन के सापेक्ष निरसन का नियम**

यदि A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह हो, अर्थात् यदि $|A| \neq 0$, तो A^{-1} का अस्तित्व होगा तथा $AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$

$\Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$

$\Rightarrow IB = IC \Rightarrow B = C$, $\therefore AB = AC \Rightarrow B = C \Leftrightarrow |A| \neq 0$.

आव्यूह की जाति (Rank of a matrix)

माना A एक $m \times n$ कोटि का आव्यूह है, यदि A के r पंक्तियों (rows) तथा r स्तंभों (columns) को लेते हैं, तब r कोटि का उप-वर्ग आव्यूह प्राप्त होता है। r कोटि के उप-वर्ग आव्यूह के सारणिक को A का r कोटि का उपसारणिक (minor)कहते हैं।

माना 3×4 कोटि का आव्यूह $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ है। यह 3×4 कोटि का आव्यूह है अतः हम 3, 2 या 1 कोटि का सारणिक ले सकते हैं। किन्ही तीन पंक्ति तथा तीन स्तंभ लेने पर कोटि 3 का उपसारणिक (minor) बनता है। अतः कोटि 3 का उपसारणिक (minor) $= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

दो शून्य बनाने पर उपरोक्त उपसारणिक का मान शून्य हो जाता है। इसी प्रकार कोटि 3 के अन्य उपसारणिकों (Minor) को भी शून्य प्रदर्शित

कर सकते हैं। कोटि 2 का उपसारणिक (Minor) दो पंक्तियों और दो स्तंभों को लेने पर प्राप्त होता है।

कोटि 2 का उपसारणिक (Minor) $= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$ आव्यूह का प्रत्येक अवयव कोटि 1 का उपसारणिक होता है।

आव्यूह की रैंक (Rank of a matrix) : किसी दिये गये आव्यूह A की रैंक r होगी, यदि

(1) A का, कोटि (r+1) का प्रत्येक उपसारणिक शून्य हो।

(2) A का, r कोटि का कम से कम एक उपसारणिक होगा, जो कि शून्य नहीं है।

यहाँ हम कह सकते हैं, कि आव्यूह A की रैंक r होगी, यदि

(i) (r+1) कोटि का प्रत्येक वर्ग उपआव्यूह अव्युत्क्रमणीय होता है।

(ii) यहाँ r कोटि का कम से कम एक वर्ग उपआव्यूह, व्युत्क्रमणीय होगा। आव्यूह A की रैंक r को $\rho(A) = r$ लिखते हैं।

आव्यूह का आइक्लान रूप (Echelon form of a matrix)

एक आव्यूह A आइक्लान (Echelon) रूप में होता है, यदि A शून्य आव्यूह हो अथवा A निम्न प्रतिबंधों को संतुष्ट करता हो :

(1) A में प्रत्येक शून्य पंक्ति के पूर्व अशून्य पंक्ति हो।

(2) एक पंक्ति में प्रथम अशून्य अवयव से पहले शून्य की संख्या अगली पंक्ति में शून्य की संख्या से कम हो।

यह आसानी से सिद्ध किया जा सकता है, कि आइक्लान रूप में आव्यूह की रैंक, आव्यूह में अशून्य पंक्तियों की संख्या के बराबर होती है।

आइक्लान रूप में आव्यूह की रैंक (Rank of a matrix in Echelon form) : आइक्लान रूप में आव्यूह की रैंक, उस अवस्था में उपस्थित अशून्य पंक्तियों की संख्या होती है।

समघातीय व असमघातीय रैखिक समीकरणों के निकाय (Homogeneous, Non-homogeneous systems of linear equations)

समीकरणों का निकाय $AX = B$ समघातीय निकाय कहलाता है, यदि $B = O$. यदि $B \neq O$ तब इस निकाय को असमघातीय समीकरणों का निकाय कहते हैं।

उदाहरणार्थ : $2x + 5y = 0$

$3x - 2y = 0$

समघातीय रैखिक समीकरणों का निकाय है जबकि समीकरण

$2x + 3y = 5$ व $x + y = 2$

असमघातीय रैखिक समीकरणों का निकाय है।

(1) **असमघातीय रैखिक समीकरणों के निकाय का हल**

(i) **आव्यूह विधि** (Matrix method) : यदि $AX = B$, तब $X = A^{-1}B$ अद्वितीय हल देता है, जबकि A व्युत्क्रमणीय आव्यूह हो, किन्तु यदि A अव्युत्क्रमणीय आव्यूह हो अर्थात् $|A| = 0$, तब समीकरणों $AX = B$ का निकाय अनन्त हलों का संगत निकाय हो सकता है या असंगत भी हो सकता है।

(ii) **असमघातीय निकाय $AX = B$ के हल के लिए रैंक विधि**

(a) A, B को लिखते हैं।

(b) ऑगमेंटेड आव्यूह $[A : B]$ को लिखते हैं।

(c) प्रारम्भिक पंक्ति संक्रिया द्वारा ऑगमेंटेड आव्यूह को आइक्लान रुप में परिवर्तित करते हैं।

(d) A तथा $[A : B]$ की रैंक को निकालने के लिये क्रमशः A और $[A : B]$ में अशून्य पंक्तियों की संख्या ज्ञात करते हैं।

(e) यदि $\rho(A) \neq \rho(A : B)$, तब निकाय असंगत है।

(f) यदि $\rho(A) = \rho(A : B) =$ अज्ञात राशियों की संख्या, तब निकाय का अद्वितीय हल है।

(g) यदि $\rho(A) = \rho(A : B) <$ अज्ञात राशियों की संख्या, तब निकाय के अनन्त हल हैं।

(2) **समघातीय रैखिक समीकरणों के निकाय का हल** (Solutions of a homogeneous system of linear equations) : माना तीन अज्ञात राशियों में तीन समघातीय रैखिक समीकरणों का निकाय $AX = O$ है।

(a) दी गयी समीकरणों को $AX = O$ के रूप में लिखिये और A को लिखते हैं।

(b) $|A|$ का मान ज्ञात करते हैं।

(c) यदि $|A| \neq 0$ तो निकाय संगत है तथा $x = y = z = 0$ इसके अद्वितीय हल हैं।

(d) यदि $|A| = 0$ तो निकाय के अनन्त हल हैं। इनको ज्ञात करने के लिये $z = K$ (कोई वास्तविक संख्या) रख कर, किन्हीं भी दो समीकरणों को x और y के लिये हल करते हैं। इस प्रकार प्राप्त समीकरणों के निकाय, $z = K$ के साथ, इनका हल देते हैं।

रैखिक समीकरण के निकाय की संगतता, जहाँ *A* वर्ग आव्यूह है (Consistency of a system of linear equation *AX* = *B*, where *A* is a square matrix)

रैखिक समीकरणों का निकाय, $AX = B, A = [a_{ij}]_{n \times n}$

(i) संगत (अद्वितीय हल के साथ) कहलाता है, यदि $|A| \neq 0$ अर्थात् A व्युत्क्रमणीय आव्यूह हो।

(ii) असंगत (इसका कोई हल नहीं है) यदि $|A| = 0$ और $(adjA)B$ अशून्य आव्यूह हो।

(iii) संगत (अनन्त m हलों के साथ) यदि $|A| = 0$ व $(adj\,A)B$ शून्य आव्यूह हो।

कैले–हेमिल्टन प्रमेय (Cayley-Hamilton theorem)

प्रत्येक आव्यूह अपने अभिलाक्षणिक (Characteristic) समीकरण को संतुष्ट करता है। ***उदाहरणार्थ:*** माना A एक वर्ग आव्यूह हो, तो $|A - xI| = 0$, A का अभिलाक्षणिक समीकरण है। यदि $x^3 - 4x^2 - 5x - 7 = 0$, A के लिए अभिलाक्षणिक समीकरण है, तब $A^3 - 4A^2 + 5A - 7I = 0$ | A के लिए अभिलाक्षणिक समीकरण के मूल A के आइगन मान या A के अभिलाक्षणिक मूल या A के गुप्त मूल (latent roots) कहलाते हैं। यदि A का अभिलाक्षणिक मूल λ है, तब A^{-1} का अभिलाक्षणिक मूल λ^{-1} होगा।

ज्यामितीय रूपान्तरण (Geometrical transformations)

(1) **x-अक्ष में परावर्तन** (Reflexion in the x-axis) : यदि $P'(x', y')$; बिन्दु $P(x, y)$ का x-अक्ष पर परावर्तन हो, तो आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ एक बिन्दु $P(x, y)$ का x-अक्ष में परावर्तन दर्शाता है।

(2) **y-अक्ष में परावर्तन** (Reflexion in the y-axis) : यहाँ आव्यूह $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

(3) **मूलबिन्दु द्वारा परावर्तन** (Reflexion through the origin) :

यहाँ आव्यूह $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ है।

(4) **रेखा $y = x$ में परावर्तन** (Reflexion in the line $y = x$):

यहाँ आव्यूह $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ है।

(5) **रेखा $y = -x$ में परावर्तन** (Reflexion in the line $y = -x$):

यहाँ आव्यूह $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ है।

(6) **$y = x \tan\theta$ में परावर्तन** (Reflexion in $y = x\tan\theta$) :

यहाँ आव्यूह $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$ है।

(7) **θ कोण से घूर्णन** (Rotation through an angle θ):

यहाँ आव्यूह $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ है।

अक्षों के घूर्णन का आव्यूह (Matrices of rotation of axes)

हम जानते हैं कि, यदि x तथा y-अक्षों को मूलबिन्दु के परितः कोण θ से घुमाने पर नए निर्देशांक $x = X\cos\theta - Y\sin\theta$

तथा $y = X\sin\theta + Y\cos\theta$ होते हैं।

अतः $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, θ कोण से घूर्णन का आव्यूह है।

Tips & Tricks

✍ किसी पंक्ति के अवयवों तथा उनके संगत सहखण्डों के गुणनफल का योग सारणिक के मान के बराबर होता है, अर्थात

$\Delta = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$

जहाँ बड़े अक्षर C_{11}, C_{12}, C_{13} इत्यादि, a_{11}, a_{12}, a_{13} के सहखण्डों को व्यक्त करते हैं।

व्यापक तौर पर, ध्यान दें कि $a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + a_{i3}C_{j3} = 0$, यदि $i \neq j$

या $a_{1i}C_{1j} + a_{2i}C_{2j} + a_{3i}C_{3j} = 0$, यदि $i \neq j$.

✍ यदि Δ' सारणिक Δ के अवयवों को उनके संगत सहखण्डों द्वारा स्थानान्तरित करने पर प्राप्त सारणिक है, तब यदि $\Delta = 0$, तो $\Delta^C = 0$, $\Delta' = \Delta^{n-1}$, जहाँ n सारणिक की कोटि है।

✍ निम्न समघातीय समीकरणों का निकाय $a_1x + b_1y + c_1z = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z = 0$, $a_3x + b_3y + c_3z = 0$ सदैव संगत होगा, यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$, तब इस निकाय का अद्वितीय हल, जो कि तुच्छ (Trivial) हल कहलाता है, $x = y = z = 0$ होगा। किन्तु यदि $\Delta = 0$, तब इस निकाय के अनन्त हल होंगे। अतः अतुच्छ (Non-trivial) हल के लिये $\Delta = 0$ ।

✍ विकर्ण आव्यूह में मुख्य विकर्ण का कोई भी अवयव शून्य नहीं होता है।

✍ विकर्ण आव्यूह में शून्यों की संख्या $n^2 - n$ होती है, जहाँ n आव्यूह की कोटि है।

✍ एक $n \times n$ कोटि का विकर्ण आव्यूह, जिसमें $d_1, d_2, ..., d_n$ विकर्ण के अवयव हों, उसे diag $[d_1, d_2, ..., d_n]$ से प्रदर्शित करते हैं।

✍ विकर्ण आव्यूह, उपरित्रिभुजीय तथा निम्नत्रिभुजीय दोनों प्रकार का त्रिभुजीय आव्यूह है।

✍ दो विकर्ण आव्यूहों का गुणन भी विकर्ण आव्यूह होता है, तथा diag $(a_1, a_2, ... a_n) \times$ diag $(b_1, b_2, ... b_n) =$ diag $(a_1b_1, a_2b_2, ... a_nb_n)$.

✍ दो अदिश आव्यूहों का गुणनफल भी अदिश आव्यूह होता है।

✍ यदि A तथा B दो आव्यूह इस प्रकार हों, कि AB का अस्तित्व हो, तब BA का अस्तित्व हो भी सकता है अथवा नहीं भी हो सकता है।

✍ त्रिभुजाकार आव्यूह में शून्यों की न्यूनतम संख्या $\frac{n(n-1)}{2}$ होती है, जहाँ n आव्यूह की कोटि है।

✍ एक त्रिभुजाकार आव्यूह $a = [a_{ij}]_{n \times n}$ पूर्णतः त्रिभुजाकार आव्यूह कहलाता है, यदि $a_{ij} = 0$, जबकि $1 \le i \le n$.

✍ दो त्रिभुजाकार आव्यूहों का गुणनफल त्रिभुजाकार आव्यूह होता है।

✍ यदि A अन्तर्वलनीय आव्यूह है, तब $\frac{1}{2}(I + A)$ व $\frac{1}{2}(I - A)$ वर्गसम हैं, तथा $\frac{1}{2}(I + A).(I - A) = 0$.

✍ विषम-सममित आव्यूह का ट्रेस सदैव शून्य होता है।

✍ **आव्यूह के सारणिक के गुणधर्म**

(i) $|A|$ का अस्तित्व है $\Leftrightarrow$ A वर्ग आव्यूह है।

(ii) $|AB| = |A||B|$

(iii) $|A^T| = |A|$

(iv) $|kA| = k^n|A|$, यदि A, n कोटि का वर्ग आव्यूह है।

(v) यदि A व B समान कोटि के वर्ग आव्यूह हैं, तो

$|AB| = |BA|$

(vi) यदि A, विषम कोटि का विषम सममित आव्यूह है, तो

$|A| = 0$

(vii) यदि $A = \text{diag}(a_1, a_2, ... a_n)$, तब $|A| = a_1 a_2 ... a_n$

(viii) $|A|^n = |A^n|$, $n \in N$.

✍ यदि A का एक उपसारणिक शून्य हो, तो उसके संगत उप-आव्यूह (Submatrix) अव्युत्क्रमणीय होगा तथा यदि A का उपसारणिक (Minor) शून्य नहीं है, तो संगत उप-आव्यूह व्युत्क्रमणीय होगा।

✍ कोटि 2 के वर्ग आव्यूह का सहखण्डज, आव्यूह के विकर्ण अवयवों को परस्पर परिवर्तित करके तथा अविकर्णीय अवयवों के चिन्ह परिवर्तित करके प्राप्त किया जाता है।

✍ शून्य आव्यूह (Null matrix) की रैंक परिभाषित नहीं होती है तथा प्रत्येक अशून्य आव्यूह की रैंक 1 या 1 से अधिक होती है।

✍ n कोटि के अव्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह की कोटि n नहीं हो सकती है।

✍ समघातीय समीकरणों का निकाय कभी भी असंगत नहीं होता है।

Ordinary Thinking

Objective Questions

सारणिक का प्रसार, सारणिक के रूप में समीकरण का हल एवं सारणिक के गुणधर्म

1. $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ x-y & y-z & z-x \\ p-q & q-r & r-p \end{vmatrix} =$ [MNR 1987]

(a) $a(x+y+z)+b(p+q+r)+c$
(b) 0
(c) $abc+xyz+pqr$
(d) इनमें से कोई नहीं

2. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ac \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} =$ [IIT 1988; MP PET 1990, 91; RPET 2002]

(a) 0 (b) $a^3+b^3+c^3-3abc$
(c) $3abc$ (d) $(a+b+c)^3$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} =$ [RPET 1996]

(a) 1 (b) 0
(c) x (d) xy

4. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} =$ [Pb. CET 1997; DCE 2002]

(a) $a^2+b^2+c^2$ (b) $(a+b)(b+c)(c+a)$
(c) $(a-b)(b-c)(c-a)$ (d) इनमें से कोई नहीं

5. समीकरण $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2x & 5x^2 \end{vmatrix} = 0$ के मूल हैं

[IIT 1987; MP PET 2002]

(a) $-1,-2$ (b) $-1, 2$
(c) $1,-2$ (d) $1, 2$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & \pi \\ \log_e e & 5 & \sqrt{5} \\ \log_{10} 10 & 5 & e \end{vmatrix} =$

(a) $\sqrt{\pi}$ (b) e
(c) 1 (d) 0

7. यदि $a \ne b \ne c$, तो x का वह मान, जो समीकरण $\begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix} = 0$ को संतुष्ट करता है, है

[EAMCET 1988; Karnataka CET 1991; MNR 1980; MP PET 1988, 99, 2001; DCE 2001]

(a) $x=0$ (b) $x=a$
(c) $x=b$ (d) $x=c$

8. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ निम्न में से किसके बराबर नहीं है

[MP PET 1988]

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 9 & 6 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 10 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

9. यदि ω इकाई का एक घनमूल हो, तो $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} =$

[RPET 1985, 93, 94; MP PET 1990, 2002; Karnataka CET 1992; 93, 02, 05]

(a) 1 (b) 0
(c) ω (d) ω^2

10. यदि $a+b+c=0$, तो समीकरण $\begin{vmatrix} a-x & c & b \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0$ के मूल हैं [UPSEAT 2001]

(a) 0 (b) $\pm\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)$

(c) $0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)}$ (d) $0, \pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

11. $\begin{vmatrix} 1+i & 1-i & i \\ 1-i & i & 1+i \\ i & 1+i & 1-i \end{vmatrix} =$

(a) $-4-7i$ (b) $4+7i$
(c) $3+7i$ (d) $7+4i$

12. यदि $\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0$, तो $x =$ [MP PET 1991]

(a) 1, 9 (b) – 1, 9
(c) – 1, – 9 (d) 1, – 9

13. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} =$ [RPET 1990, 95]

(a) $(a+b+c)^2$ (b) $(a+b+c)^3$
(c) $(a+b+c)(ab+bc+ca)$ (d) इनमें से कोई नहीं

14. $\begin{vmatrix} a+b & a+2b & a+3b \\ a+2b & a+3b & a+4b \\ a+4b & a+5b & a+6b \end{vmatrix} =$

[IIT 1986; MNR 1985; MP PET 1998; Pb. CET 2003]

(a) $a^2+b^2+c^2-3abc$ (b) $3ab$
(c) $3a+5b$ (d) 0

15. $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} =$

[Roorkee 1980; RPET 1997, 99; KCET 1999; MP PET 2001]

(a) abc (b) $2abc$
(c) $3abc$ (d) $4abc$

16. समीकरण $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$ के मूल हैं

[MP PET 1989; Roorkee Qualifying 1998]

(a) 0, – 3 (b) 0, 0, – 3
(c) 0, 0, 0, – 3 (d) इनमें से कोई नहीं

17. समीकरण $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ b & x+c & a \\ c & a & x+b \end{vmatrix} = 0$ का एक मूल है

[MP PET 1988, 2002; RPET 1996]

(a) $-(a+b)$ (b) $-(b+c)$
(c) $-a$ (d) $-(a+b+c)$

18. $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+4 \\ x+3 & x+5 & x+8 \\ x+7 & x+10 & x+14 \end{vmatrix} =$ [MNR 1985; UPSEAT 2000]

(a) 2 (b) – 2
(c) $x^2 - 2$ (d) इनमें से कोई नहीं

19. $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{vmatrix} =$ [MP PET 1991]

(a) $1+a^2+b^2+c^2$ (b) $1-a^2+b^2+c^2$
(c) $1+a^2+b^2-c^2$ (d) $1+a^2-b^2+c^2$

20. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} =$ [AMU 1979; RPET 1990; DCE 1999]

(a) $a^3+b^3+c^3-3abc$ (b) $a^3+b^3+c^3+3abc$
(c) $(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. $\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{vmatrix} =$ [MP PET 1992]

(a) $-2abc$ (b) abc
(c) 0 (d) $a^2+b^2+c^2$

22. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} =$ [MP PET 1991]

(a) $3abc+a^3+b^3+c^3$ (b) $3abc-a^3-b^3-c^3$
(c) $abc-a^3+b^3+c^3$ (d) $abc+a^3-b^3-c^3$

23. $\begin{vmatrix} b^2-ab & b-c & bc-ac \\ ab-a^2 & a-b & b^2-ab \\ bc-ac & c-a & ab-a^2 \end{vmatrix} =$ [MNR 1988]

(a) $abc(a+b+c)$ (b) $3a^2b^2c^2$
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

24. $\begin{vmatrix} 1/a & a^2 & bc \\ 1/b & b^2 & ca \\ 1/c & c^2 & ab \end{vmatrix} =$ [RPET 1990, 99]

(a) abc (b) $\frac{1}{abc}$
(c) $ab+bc+ca$ (d) 0

25. $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & c^2+a^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} =$ [IIT 1980]

(a) abc (b) $4abc$
(c) $4a^2b^2c^2$ (d) $a^2b^2c^2$

26. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} =$ [RPET 1992; Kerala (Engg.) 2002]

(a) $xyz\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ (b) xyz
(c) $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ (d) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

27. यदि ω इकाई का एक घनमूल हो, तो

$\begin{vmatrix} x+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & x+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} =$ [MNR 1990; MP PET 1999]

(a) x^3+1 (b) $x^3+\omega$
(c) $x^3+\omega^2$ (d) x^3

28. यदि $\begin{vmatrix} y+z & x & y \\ z+x & z & x \\ x+y & y & z \end{vmatrix} = k(x+y+z)(x-z)^2$, तब $k =$

(a) $2xyz$ (b) 1
(c) xyz (d) $x^2y^2z^2$

29. यदि समीकरण $\begin{vmatrix} x & 3 & 7 \\ 2 & x & 2 \\ 7 & 6 & x \end{vmatrix} = 0$ का एक मूल – 9 हो, तो अन्य दो मूल होंगे

[IIT 1983; MNR 1992; MP PET 1995; DCE 1997; UPSEAT 2001]

(a) 2, 7 (b) – 2, 7
(c) 2, –7 (d) – 2, –7

30. यदि $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$,

तो निम्न में से कौन सा सम्बन्ध सत्य है

(a) $A = B$ (b) $A = C$
(c) $B = C$ (d) इनमें से कोई नहीं

31. $\begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} =$ [MP PET 1990]

(a) $a^3+b^3+c^3-3abc$
(b) $3abc-a^3-b^3-c^3$
(c) $a^3+b^3+c^3-a^2b-b^2c-c^2a$
(d) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

32. यदि a, b, c असमान हों, तो इस बात का प्रतिबंध कि सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3+1 \\ b & b^2 & b^3+1 \\ c & c^2 & c^3+1 \end{vmatrix}$ का मान शून्य होगा [IIT 1985; DCE 1999]

(a) $1+abc=0$
(b) $a+b+c+1=0$
(c) $(a-b)(b-c)(c-a)=0$
(d) इनमें से कोई नहीं

33. यदि ω इकाई का सम्मिश्र घनमूल हो, तो $\begin{vmatrix} 2 & 2\omega & -\omega^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$

(a) 0 (b) 1
(c) – 1 (d) इनमें से कोई नहीं

34. $\begin{vmatrix} 19 & 17 & 15 \\ 9 & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ [MP PET 1990]

(a) 0 (b) 187
(c) 354 (d) 54

35. यदि $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 \\ x+2 & x+3 & x+4 \\ x+a & x+b & x+c \end{vmatrix} = 0$, तो a, b, c हैं [Pb. CET 1998]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

36. यदि ω इकाई का सम्मिश्र घनमूल हो, तो

$\begin{vmatrix} 1 & \omega & -\omega^2/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$

(a) 0 (b) 1
(c) ω (d) ω^2

37. यदि $p\lambda^4 + q\lambda^3 + r\lambda^2 + s\lambda + t = \begin{vmatrix} \lambda^2+3\lambda & \lambda-1 & \lambda+3 \\ \lambda+1 & 2-\lambda & \lambda-4 \\ \lambda-3 & \lambda+4 & 3\lambda \end{vmatrix}$, तो t का मान है [IIT 1981]

(a) 16 (b) 18
(c) 17 (d) 19

38. सारणिक $\begin{vmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & 11 & -1 \end{vmatrix}$ का मान है [RPET 1992]

(a) – 75 (b) 25
(c) 0 (d) – 25

39. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ का मान है

[MP PET 1993; Karnataka CET 1994; Pb. CET 2004]

(a) $a+b+c$ (b) $(a+b+c)^2$
(c) 0 (d) $1+a+b+c$

40. यदि a, b और c तीन अशून्य वास्तविक संख्यायें हैं, तो $\Delta = \begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix} =$

[AMU 1992; Karnataka CET 2000; 03]

(a) abc (b) $a^2b^2c^2$
(c) $ab+bc+ca$ (d) इनमें से कोई नहीं

41. सारणिक $\begin{vmatrix} a & b & a\alpha+b \\ b & c & b\alpha+c \\ a\alpha+b & b\alpha+c & 0 \end{vmatrix} = 0$, यदि a, b, c हैं

[IIT 1986, 97; MNR 1992; DCE 2000, 01; UPSEAT 2002]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

42. सारणिक $\begin{vmatrix} 31 & 37 & 92 \\ 31 & 58 & 71 \\ 31 & 105 & 24 \end{vmatrix}$ का मान है

[MP PET 1992]

(a) – 2 (b) 0
(c) 81 (d) इनमें से कोई नहीं

43. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 14 & 20 \end{vmatrix}$ का मान है [MNR 1991]

(a) 20 (b) 10
(c) 0 (d) 250

44. यदि $\begin{vmatrix} 1 & k & 3 \\ 3 & k & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$, तो k का मान है [IIT 1979]

(a) – 1 (b) 0
(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

45. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ b+c-a & c+a-b & a+b-c \end{vmatrix}$ का मान है

[RPET 1986]

(a) abc (b) $a+b+c$
(c) $ab+bc+ca$ (d) इनमें से कोई नहीं

46. यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}$, तो $\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ kx & ky & kz \\ kp & kq & kr \end{vmatrix} =$ [RPET 1986]

(a) Δ (b) $k\Delta$
(c) $3k\Delta$ (d) $k^3\Delta$

47. $\begin{vmatrix} a-1 & a & bc \\ b-1 & b & ca \\ c-1 & c & ab \end{vmatrix} =$ [RPET 1988]

(a) 0 (b) $(a-b)(b-c)(c-a)$
(c) $a^3+b^3+c^3-3abc$ (d) इनमें से कोई नहीं

48. $\begin{vmatrix} a_1 & ma_1 & b_1 \\ a_2 & ma_2 & b_2 \\ a_3 & ma_3 & b_3 \end{vmatrix} =$ [RPET 1989]

(a) 0 (b) $ma_1a_2a_3$
(c) $ma_1a_2b_3$ (d) $mb_1a_2a_3$

49. सारणिक $\begin{vmatrix} 265 & 240 & 219 \\ 240 & 225 & 198 \\ 219 & 198 & 181 \end{vmatrix}$ का मान है [RPET 1989]

(a) 0 (b) 679
(c) 779 (d) 1000

50. यदि $\begin{vmatrix} x^2+x & x+1 & x-2 \\ 2x^2+3x-1 & 3x & 3x-3 \\ x^2+2x+3 & 2x-1 & 2x-1 \end{vmatrix} = Ax-12$, तो A का मान है [IIT 1982]

(a) 12 (b) 24
(c) –12 (d) – 24

51. यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 3a & 4a+3b & 5a+4b+3c \\ 6a & 9a+6b & 11a+9b+6c \end{vmatrix}$

जहाँ $a=i, b=\omega, c=\omega^2$, तब Δ का मान होगा

(a) i (b) $-\omega^2$
(c) ω (d) $-i$

52. सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ -5 & 6 & -10 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ का मान है [MP PET 1994]

(a) – 440 (b) 0
(c) 328 (d) 488

53. माना $\begin{vmatrix} 6i & -3i & 1 \\ 4 & 3i & -1 \\ 20 & 3 & i \end{vmatrix} = x+iy$, तो [IIT 1998]

(a) $x=3, y=1$ (b) $x=0, y=0$
(c) $x=0, y=3$ (d) $x=1, y=3$

54. यदि a,b,c धनात्मक पूर्णांक हैं, तो सारणिक

$\Delta = \begin{vmatrix} a^2+x & ab & ac \\ ab & b^2+x & bc \\ ac & bc & c^2+x \end{vmatrix}$ विभाज्य है

(a) x^3 द्वारा (b) x^2 द्वारा
(c) $(a^2+b^2+c^2)$ द्वारा (d) इनमें से कोई नहीं

55. यदि $p+q+r=0=a+b+c$, तो सारणिक $\begin{vmatrix} pa & qb & rc \\ qc & ra & pb \\ rb & pc & qa \end{vmatrix}$ का मान है

(a) 0 (b) $pa+qb+rc$
(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

56. माना $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

तथा $D' = \begin{vmatrix} a_1+pb_1 & b_1+qc_1 & c_1+ra_1 \\ a_2+pb_2 & b_2+qc_2 & c_2+ra_2 \\ a_3+pb_3 & b_3+qc_3 & c_3+ra_3 \end{vmatrix}$, तो

[Karnataka CET 1993; Pb. CET 1993]

(a) $D'=D$ (b) $D'=D(1-pqr)$
(c) $D'=D(1+p+q+r)$ (d) $D'=D(1+pqr)$

57. समीकरण $\begin{vmatrix} 0 & x & 16 \\ x & 5 & 7 \\ 0 & 9 & x \end{vmatrix} = 0$ के मूल हैं

[Pb. CET 2001; Karnataka CET 1994]

(a) 0, 12, 12 (b) 0, 12, –12
(c) 0, 12, 16 (d) 0, 9, 16

58. यदि $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$, तो $x=$ [Karnataka CET 1994]

(a) – 5/2 (b) –2/5
(c) 5/2 (d) 2/5

59. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = K\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$, तो $K=$

[EAMCET 1992; DCE 2000]

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

60. $\begin{vmatrix} 0 & p-q & p-r \\ q-p & 0 & q-r \\ r-p & r-q & 0 \end{vmatrix} =$ [EAMCET 1993]

(a) 0 (b) $(p-q)(q-r)(r-p)$
(c) pqr (d) $3pqr$

61. $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ (a-1)^2 & (b-1)^2 & (c-1)^2 \end{vmatrix} =$

(a) $4\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $3\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(c) $2\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं

62. $\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & 14 \\ 13 & 14 & 15 \end{vmatrix} =$ [Karnataka CET 1991]

(a) 1 (b) 0
(c) –1 (d) 67

63. $\begin{vmatrix} x & 4 & y+z \\ y & 4 & z+x \\ z & 4 & x+y \end{vmatrix} =$ [Karnataka CET 1991]

(a) 4 (b) $x+y+z$
(c) xyz (d) 0

64. सारणिक $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ का मान है

[Roorkee 1992]

(a) – 4 (b) 0
(c) 1 (d) 4

65. समीकरण $\begin{vmatrix} 3-x & -6 & 3 \\ -6 & 3-x & 3 \\ 3 & 3 & -6-x \end{vmatrix} = 0$ का मूल है

[Roorkee 1991; RPET 2001; J & K 2005]

(a) 6 (b) 3
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

66. $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \cos^2 x & \sin^2 x & 1 \\ -10 & 12 & 2 \end{vmatrix} =$ [EAMCET 1994]

(a) 0 (b) $12\cos^2 x - 10\sin^2 x$
(c) $12\sin^2 x - 10\cos^2 x - 2$ (d) $10\sin 2x$

67. समीकरण $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$ के मूल हैं

[Karnataka CET 1992]

(a) 1, 2 (b) – 1, 2
(c) 1, – 2 (d) –1, – 2

68. $\begin{vmatrix} bc & bc'+b'c & b'c' \\ ca & ca'+c'a & c'a' \\ ab & ab'+a'b & a'b' \end{vmatrix} =$

(a) $(ab-a'b')(bc-b'c')(ca-c'a')$
(b) $(ab+a'b')(bc+b'c')(ca+c'a')$
(c) $(ab'-a'b)(bc'-b'c)(ca'-c'a)$
(d) $(ab'+a'b)(bc'+b'c)(ca'+c'a)$

69. समीकरण $\begin{vmatrix} a & a & x \\ m & m & m \\ b & x & b \end{vmatrix} = 0$ के मूल हैं

[EAMCET 1993]

(a) $x = a, b$ (b) $x = -a, -b$
(c) $x = -a, b$ (d) $x = a, -b$

70. $2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ac & c^2-ab \end{vmatrix} =$

[EAMCET 1991; UPSEAT 1999]

(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) $3abc$

71. यदि $D_p = \begin{vmatrix} p & 15 & 8 \\ p^2 & 35 & 9 \\ p^3 & 25 & 10 \end{vmatrix}$, तो $D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 =$

[Kurukshetra CEE 1998]

(a) 0 (b) 25
(c) 625 (d) इनमें से कोई नहीं

72. $\begin{vmatrix} a & a+b & a+2b \\ a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \end{vmatrix}$ का मान होगा

[Kerala (Engg.) 2001]

(a) $9a^2(a+b)$ (b) $9b^2(a+b)$
(c) $a^2(a+b)$ (d) $b^2(a+b)$

73. यदि a, b, c भिन्न हैं तथा $\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3-1 \\ b & b^2 & b^3-1 \\ c & c^2 & c^3-1 \end{vmatrix} = 0$, तब

[EAMCET 1989]

(a) $a+b+c=0$ (b) $abc=1$
(c) $a+b+c=1$ (c) $ab+bc+ca=0$

74. यदि $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = Ka^2b^2c^2$, तो $K =$

[Kurukshetra CEE 1996, 98, 2002; RPET 1997; MP PET 1998, 99; Tamilnadu (Engg.) 2002]

(a) – 4 (b) 2
(c) 4 (d) 8

75. $\begin{vmatrix} 1 & 1+ac & 1+bc \\ 1 & 1+ad & 1+bd \\ 1 & 1+ae & 1+be \end{vmatrix} =$ [MP PET 1996]

(a) 1 (b) 0
(c) 3 (d) $a+b+c$

76. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$ का मान है [Pb. CET 2003]

(a) $3-x+y$ (b) $(1-x)(1+y)$
(c) xy (d) $-xy$

77. $\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix} =$ [MP PET 1996]

(a) 0 (b) – 39
(c) 96 (d) 57

78. यदि $\begin{vmatrix} a & b & a\alpha-b \\ b & c & b\alpha-c \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ तथा $\alpha \neq \frac{1}{2}$, तो [MP PET 1998]

(a) a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं (b) a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हैं
(c) a, b, c हरात्मक श्रेणी में हैं (d) इनमें से कोई नहीं

79. यदि $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$, तो x का मान होगा

[RPET 1996]

(a) – 14 (b) 2
(c) 6 (d) 7

80. यदि $\begin{vmatrix} 3x-8 & 3 & 3 \\ 3 & 3x-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0$, तो x का मान होगा

[RPET 1997]

(a) 0, 2/3 (b) 2/3, 11/3
(c) 1/2, 1 (d) 11/3, 1

81. यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में हों, तो $\begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+a \\ x+4 & x+5 & x+b \\ x+6 & x+7 & x+c \end{vmatrix}$ का मान होगा

[RPET 1999]

(a) $x-(a+b+c)$ (b) $9x^2+a+b+c$
(c) $a+b+c$ (d) 0

82. यदि $\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix}$, तो $\begin{vmatrix} x & 2y & z \\ 2p & 4q & 2r \\ a & 2b & c \end{vmatrix}$ का मान होगा [RPET 1999]

(a) Δ^2 (b) 4Δ
(c) 3Δ (d) इनमें से कोई नहीं

83. यदि $a \neq 6, b, c$ सारणिक $\begin{vmatrix} a & 2b & 2c \\ 3 & b & c \\ 4 & a & b \end{vmatrix} = 0$ को संतुष्ट करता है, तो $abc =$ [EAMCET 2000]

(a) $a+b+c$ (b) 0
(c) b^3 (d) $ab+bc$

84. यदि $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=0$ इस प्रकार है कि $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = \lambda$, तो λ का मान होगा [RPET 2000]

(a) 0 (b) abc
(c) $-abc$ (d) इनमें से कोई नहीं

85. $\begin{vmatrix} a^2+x^2 & ab & ca \\ ab & b^2+x^2 & bc \\ ca & bc & c^2+x^2 \end{vmatrix}$ का भाजक है [RPET 2000]

(a) a^2 (b) b^2
(c) c^2 (d) x^2

86. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(nx) & \cos(n+1)x & \cos(n+2)x \\ \sin(nx) & \sin(n+1)x & \sin(n+2)x \end{vmatrix}$ निर्भर नहीं करता है [RPET 2000]

(a) x पर (b) n पर
(c) x तथा n दोनों पर (d) इनमें से कोई नहीं

87. सारणिक A के किसी पंक्ति के अवयवों का उसी पंक्ति के अवयवों से गुणन करने पर योगफल सदैव प्राप्त होता है [Karnataka CET 2000]

(a) 1 (b) 0
(c) $|A|$ (d) $\frac{1}{2}|A|$

88. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 14 & 20 \end{vmatrix}$ का मान होगा [UPSEAT 2000]

(a) 20 (b) 10
(c) 0 (d) 5

89. यदि $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & c & b+c \\ a+b & b+c & 0 \end{vmatrix} = 0$; तो a, b, c होंगे [AMU 2000]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

90. यदि $ab+bc+ca=0$ और $\begin{vmatrix} a-x & c & b \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0$, तो x का एक मान होगा [AMU 2000]

(a) $(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}$ (b) $\left[\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)\right]^{\frac{1}{2}}$
(c) $\left[\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\right]^{\frac{1}{2}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

91. यदि $\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = k$, तो $\begin{vmatrix} 6a & 2b & 2c \\ 3m & n & p \\ 3x & y & z \end{vmatrix} =$ [Tamilnadu (Engg.) 2002]

(a) $k/6$ (b) $2k$
(c) $3k$ (d) $6k$

92. यदि $A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ व $B = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$, तो B का मान होगा [Tamilnadu (Engg.) 2002]

(a) $B = 4A$ (b) $B = -4A$
(c) $B = -A$ (d) $B = 6A$

93. यदि $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 5$, तो $\begin{vmatrix} b_2c_3-b_3c_2 & c_2a_3-c_3a_2 & a_2b_3-a_3b_2 \\ b_3c_1-b_1c_3 & c_3a_1-c_1a_3 & a_3b_1-a_1b_3 \\ b_1c_2-b_2c_1 & c_1a_2-c_2a_1 & a_1b_2-a_2b_1 \end{vmatrix}$ का मान है [Tamilnadu (Engg.) 2002]

(a) 5 (b) 25
(c) 125 (d) 0

94. सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} a+x & b & c \\ b & x+c & a \\ c & a & x+b \end{vmatrix}$ का गुणनखण्ड होगा [Tamilnadu (Engg.) 2002]

(a) $x-(a+b+c)$ (b) $x+(a+b+c)$
(c) $a+b+c$ (d) $-(a+b+c)$

95. $\begin{vmatrix} 5^2 & 5^3 & 5^4 \\ 5^3 & 5^4 & 5^5 \\ 5^4 & 5^5 & 5^7 \end{vmatrix}$ का मान है

(a) 5^2 (b) 0
(c) 5^{13} (d) 5^9

96. x के किस मान के लिये $\begin{vmatrix} x+\omega^2 & \omega & 1 \\ \omega & \omega^2 & 1+x \\ 1 & x+\omega & \omega^2 \end{vmatrix} = 0$ है [DCE 2000, 01]

(a) $x = 0$ (b) $x = 1$
(c) $x = -1$ (d) इनमें से कोई नहीं

97. यदि $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, तब सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-\omega^2 & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{vmatrix}$ का मान होगा [IIT Screening 2002]

(a) 3ω (b) $3\omega(\omega - 1)$

(c) $3\omega^2$ (d) $3\omega(1-\omega)$

98. यदि $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = k\,abc(a+b+c)^3$, तो k का मान है [Tamilnadu (Engg.) 2001]

(a) – 1 (b) 1

(c) 2 (d) –2

99. $\begin{vmatrix} 41 & 42 & 43 \\ 44 & 45 & 46 \\ 47 & 48 & 49 \end{vmatrix} =$ [Karnataka CET 2001]

(a) 2 (b) 4

(c) 0 (d) 1

100. यदि *A*, *B*, *C* किसी त्रिभुज के कोण हों, तो $\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} =$

(a) 1 (b) 0

(c) $\cos A \cos B \cos C$ (d) $\cos A + \cos B \cos C$

101. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix} =$ [RPET 2002]

(a) $3\sqrt{3}i$ (b) $-3\sqrt{3}i$

(c) $i\sqrt{3}$ (d) 3

102. $\begin{vmatrix} 1/a & 1 & bc \\ 1/b & 1 & ca \\ 1/c & 1 & ab \end{vmatrix} =$ [RPET 2002]

(a) 0 (b) *abc*

(c) 1/*abc* (d) इनमें से कोई नहीं

103. $\begin{vmatrix} (a^x + a^{-x})^2 & (a^x - a^{-x})^2 & 1 \\ (b^x + b^{-x})^2 & (b^x - b^{-x})^2 & 1 \\ (c^x + c^{-x})^2 & (c^x - c^{-x})^2 & 1 \end{vmatrix} =$ [UPSEAT 2002; AMU 2005]

(a) 0 (b) $2abc$

(c) $a^2b^2c^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

104. सारणिक $\begin{vmatrix} a & b & a-b \\ b & c & b-c \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ का मान शून्य होगा यदि a, b, c होंगे [UPSEAT 2002]

(a) गुणोत्तर श्रेणी में

(b) समान्तर श्रेणी में

(c) हरात्मक श्रेणी में

(d) इनमें से कोई नहीं

105. यदि $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 2 & x+2 & 2 \\ 3 & 3 & x+3 \end{vmatrix} = 0$, तो x का मान होगा [Kerala (Engg.) 2002]

(a) 0, – 6 (b) 0, 6

(c) 6 (d) – 6

106. समीकरण $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ p+1 & p+1 & p+x \\ 3 & x+1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$ के हल हैं [AMU 2002]

(a) $x = 1, 2$ (b) $x = 2, 3$

(c) $x = 1, p, 2$ (d) $x = 1, 2, -p$

107. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha-\beta) & \cos\alpha \\ \cos(\alpha-\beta) & 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix}$ का मान होगा [UPSEAT 2003]

(a) $\alpha^2 + \beta^2$ (b) $\alpha^2 - \beta^2$

(c) 1 (d) 0

108. $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix} =$ [Kerala (Engg.) 2001] [Karnataka CET 2002]

(a) 8 (b) – 8

(c) 400 (d) 1

109. यदि $\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$, तो x के मान होंगे [MP PET 2003]

(a) $x = 0, x = 4a$ (b) $x = 0, x = a$

(c) $x = 0, x = 2a$ (d) $x = 0, x = 3a$

110. यदि $\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ 2 & x-3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$, तो $x =$ [RPET 2003]

(a) 0 (b) 2

(c) 3 (d) 1

111. समीकरण $\begin{vmatrix} x & 0 & 8 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ के मूल हैं [Pb. CET 2000]

(a) $(-4, 4)$ (b) $(2, -4)$

(c) $(2, 4)$ (d) $(2, 8)$

112. यदि $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$, तो x का मान होगा [Pb. CET 2002]

(a) $\pm\sqrt{6}$ (b) $\pm\sqrt{2}$

(c) $\pm\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{2}, \sqrt{3}$

113. यदि $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -7 & x & -3 \\ 9 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0$, तो x का मान होगा [Pb. CET 2002]

(a) 3 (b) 5

(c) 7 (d) 9

114. यदि ω इकाई का काल्पनिक मूल हो, तो $\begin{vmatrix} a & b\omega^2 & a\omega \\ b\omega & c & b\omega^2 \\ c\omega^2 & a\omega & c \end{vmatrix}$ का मान होगा [MP PET 2004]

(a) $a^3+b^3+c^3-3abc$
(b) a^2b-b^2c
(c) 0
(d) $a^2+b^2+c^2$

115. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ca & ab \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$ का मान है [Karnataka CET 2004]

(a) 1 (b) 0
(c) $(a-b)(b-c)(c-a)$ (d) $(a+b)(b+c)(c+a)$

116. $\begin{vmatrix} 441 & 442 & 443 \\ 445 & 446 & 447 \\ 449 & 450 & 451 \end{vmatrix}$ का मान है [Karnataka CET 2004]

(a) $441 \times 446 \times 451$ (b) 0
(c) -1 (d) 1

117. यदि a, b, c सभी भिन्न-भिन्न हैं और $\begin{vmatrix} a & a^3 & a^4-1 \\ b & b^3 & b^4-1 \\ c & c^3 & c^4-1 \end{vmatrix} = 0$, तो $abc(ab+bc+ca)$ का मान है [Kurukshetra CEE 2002]

(a) $a+b+c$ (b) 0
(c) $a^2+b^2+c^2$ (d) $a^2-b^2+c^2$

118. यदि $a^2+b^2+c^2=-2$

तथा $f(x)=\begin{vmatrix} 1+a^2x & (1+b^2)x & (1+c^2)x \\ (1+a^2)x & 1+b^2x & (1+c^2)x \\ (1+a^2)x & (1+b^2)x & 1+c^2x \end{vmatrix}$, तो बहुपद $f(x)$ की घात होगी [AIEEE 2005]

(a) 3 (b) 2
(c) 1 (d) 0

119. सारणिक $\begin{vmatrix} 4+x^2 & -6 & -2 \\ -6 & 9+x^2 & 3 \\ -2 & 3 & 1+x^2 \end{vmatrix}$ निम्न के द्वारा विभाज्य नहीं है [J & K 2005]

(a) x (b) x^3
(c) $14+x^2$ (d) x^5

120. सारणिक $\begin{vmatrix} 0 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \\ a^3-b^3 & 0 & c^3-b^3 \\ a^3-c^3 & b^3-c^3 & 0 \end{vmatrix}$ का मान है [J & K 2005]

(a) $a^3+b^3+c^3$ (b) $a^3-b^3-c^3$
(c) 0 (d) $-a^3+b^3+c^3$

121. समीकरण $\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 2 & 5 & x \\ -1 & 2 & x \end{vmatrix}=0$ के हल होंगे [Karnataka CET 2005]

(a) $3, -1$ (b) $-3, 1$
(c) 3, 1 (d) $-3, -1$

122. यदि $\begin{vmatrix} 1+\sin^2\theta & \sin^2\theta & \sin^2\theta \\ \cos^2\theta & 1+\cos^2\theta & \cos^2\theta \\ 4\sin 4\theta & 4\sin 4\theta & 1+4\sin 4\theta \end{vmatrix}=0$, तो $\sin 4\theta$ का मान है [Orissa JEE 2005]

(a) 1/2 (b) 1
(c) –1/2 (d) –1

123. यदि $f(x)=\begin{vmatrix} x-3 & 2x^2-18 & 3x^3-81 \\ x-5 & 2x^2-50 & 4x^3-500 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, तो $f(1).f(3)+f(3).f(5)+f(5).f(1)=$ [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $f(1)$ (b) $f(3)$
(c) $f(1)+f(3)$ (d) $f(1)+f(5)$
(e) $f(1)+f(3)+f(5)$

124. यदि $\begin{vmatrix} y+z & x-z & x-y \\ y-z & z+x & y-x \\ z-y & z-x & x+y \end{vmatrix}=k\,xyz$, तो k का मान है [AMU 2005]

(a) 2 (b) 4
(c) 6 (d) 8

उपसारणिक और सहखण्ड, सारणिक गुणन

1. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 8 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ में अवयव 4 का सहखण्ड होगा [MP PET 1987]

(a) 4 (b) 10
(c) – 10 (d) – 4

2. यदि $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ और A_1, B_1, C_1 आदि क्रमशः a_1, b_1, c_1 आदि के सहखण्डज हों, तो सारणिक $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$ का मान है [MP PET 1989]

(a) Δ (b) Δ^2
(c) Δ^3 (d) 0

3. यदि सारणिक $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, A_1, B_1, C_1 आदि क्रमशः a_1, b_1, c_1 आदि के सहखण्ड हों, तो निम्न में से कौन सा सम्बन्ध असत्य है

(a) $a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1=\Delta$
(b) $a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2=\Delta$
(c) $a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3=\Delta$
(d) $a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2=\Delta$

4. यदि ω इकाई का घनमूल हो व $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2\omega \\ \omega & \omega^2 \end{vmatrix}$, तो $\Delta^2 =$ [RPET 1984]

(a) $-\omega$ (b) ω

(c) 1 (d) ω^2

5. यदि $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{vmatrix}$ और $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{vmatrix}$, तो $\Delta_2 \Delta_1 =$ [RPET 1984]

(a) ac (b) bd

(c) $(b-a)(d-c)$ (d) इनमें से कोई नहीं

6. यदि सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ के अवयवों a_1, b_1, c_1, के सहखण्ड क्रमशः $A_1, B_1, C_1.....$ हों, तो $\begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} =$

(a) $a_1 \Delta$ (b) $a_1 a_3 \Delta$

(c) $(a_1 + b_1)\Delta$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. यदि $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ एक वर्ग आव्यूह है तथा A में a_{ij} का सहखण्ड c_{ij} है। यदि $C = [c_{ij}]$,तो

(a) $|C| = |A|$ (b) $|C| = |A|^{n-1}$

(c) $|C| = |A|^{n-2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

8. $\begin{vmatrix} \log_2 512 & \log_4 3 \\ \log_3 8 & \log_4 9 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \log_2 3 & \log_8 3 \\ \log_3 4 & \log_3 4 \end{vmatrix} =$ [Tamilnadu (Engg.) 2002]

(a) 7 (b) 10

(c) 13 (d) 17

9. यदि $A = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -4 & 3 & 2 \\ -4 & -7 & 3 \end{vmatrix}$, तो द्वितीय पंक्ति के अवयवों के सहखण्ड होंगे

(a) $39, -3, 11$ (b) $-39, 3, 11$

(c) $-39, 27, 11$ (d) $-39, -3, 11$

10. सारणिक $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ में अवयव -4 और 9 के उपसारणिक एवं अवयव -4 और 9 के सहखण्ड क्रमशः हैं [J & K 2005]

(a) 42, 3 ; – 42, 3

(b) – 42, – 3 ; 42, –3

(c) 42, 3 ; – 42, – 3

(d) 42, 3; 42, 3

रैखिक समीकरणों का निकाय, कुछ विशेष सारणिक, सारणिक का अवकलन तथा समाकलन

1. λ के किस मान के लिए समीकरण निकाय $3x - 2y + z = 0$, $\lambda x - 14y + 15z = 0$, $x + 2y - 3z = 0$ का $x = y = z = 0$ के अतिरिक्त कोई हल है [MP PET 1990]

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 5

2. यदि $2x + 3y - 5z = 7, x + y + z = 6, 3x - 4y + 2z = 1$, तो $x =$ [MP PET 1987]

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} -7 & 3 & -5 \\ -6 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$

(d) इनमें से कोई नहीं

3. k के किस मान के लिये समीकरण निकाय $x + ky - z = 0, 3x - ky - z = 0$ व $x - 3y + z = 0$ का एक अशून्य हल होगा [IIT 1988]

(a) – 1 (b) 0

(c) 1 (d) 2

4. समीकरण निकाय $x + y - z = 0$, $3x - y - z = 0$, $x - 3y + z = 0$ के हलों की संख्या होगी [MP PET 1992]

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) अनन्त

5. यदि $x + y - z = 0, 3x - \alpha y - 3z = 0, x - 3y + z = 0$ का अशून्य हल हो, तो $\alpha =$ [MP PET 1990]

(a) – 1 (b) 0

(c) 1 (d) – 3

6. समीकरण के निकाय $x + 4y - z = 0$, $3x - 4y - z = 0$ $x - 3y + z = 0$ के हलों की संख्या होगी [MP PET 1992]

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) अनन्त

7. यदि $\Delta(x) = \begin{vmatrix} x^n & \sin x & \cos x \\ n! & \sin\frac{n\pi}{2} & \cos\frac{n\pi}{2} \\ a & a^2 & a^3 \end{vmatrix}$, तो $x = 0$ पर $\frac{d^n}{dx^n}[\Delta(x)]$ का मान है [RPET 2002]

(a) – 1 (b) 0

(c) 1 (d) a पर निर्भर

8. a का वह मान जिसके लिये समीकरण निकाय $a^3 x + (a+1)^3 y + (a+2)^3 z = 0, \ ax + (a+1)y + (a+2)z = 0,$ $x + y + z = 0$ का एक अशून्य हल है [Pb. CET 2000]

(a) – 1 (b) 0

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि $a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$, $a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0$ व $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$, तो दिये गये निकाय का है [Roorkee 1990]

(a) एक अशून्य व एक अशून्य हल (b) कोई हल नहीं

(c) एक हल (d) अनन्त हल

10. k का वह मान जिसके लिये समीकरण निकाय $x+ky+3z=0,$ $3x+ky-2z=0,$ $2x+3y-4z=0$ का परिमेय संख्याओं के समुच्चय में अशून्य हल है [Kurukshetra CEE 1996]

(a) 15 (b) 31/2
(c) 16 (d) 33/2

11. यदि समीकरणों, $x+2y-3z=1$, $(k+3)z=3,$ $(2k+1)x+z=0$ के निकाय का असंगत हल है, तो k का मान होगा [Roorkee 2000]

(a) – 3 (b) 1/2
(c) 0 (d) 2

12. यदि निकाय के समीकरणों $x-ky-z=0$, $kx-y-z=0$ तथा $x+y-z=0$ का एक अशून्य हल है, तो k के संभावित मान होंगे [IIT Screening 2000]

(a) – 1, 2 (b) 1, 2
(c) 0, 1 (d) – 1, 1

13. ऽ के किस मान के लिए समीकरणों $a+b-2c=0$ $2a-3b+c=0$ और $a-5b+4c=\alpha$ का हल समुच्चय संगत है [Orissa JEE 2004]

(a) 1 (b) 0
(c) –1 (d) 2

14. समीकरण के निकाय $x_1+2x_2+3x_3=a2x_1+3x_2+x_3=$ $b3x_1+x_2+2x_3=c$ का हल होगा [Orissa JEE 2004]

(a) अनन्त हल
(b) कोई हल नहीं
(c) अद्वितीय हल
(d) इनमें से कोई नहीं

15. समीकरण निकाय $\lambda x+y+z=0,$ $-x+\lambda y+z=0,$ $-x-y+\lambda z=0$ का एक अशून्य हल होगा, यदि λ का वास्तविक मान है [IIT 1984]

(a) 0 (b) 1
(c) 3 (d) $\sqrt{3}$

16. यदि $U_n=\begin{vmatrix} n & 1 & 5 \\ n^2 & 2N+1 & 2N+1 \\ n^3 & 3N^2 & 3N \end{vmatrix}$, तब $\sum_{n=1}^{N} U_n$ का मान है [MNR 1994]

(a) 0 (b) 1
(c) – 1 (d) इनमें से कोई नहीं

17. यदि $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ गुणोत्तर श्रेणी में हों और $a_i>0$, (i के प्रत्येक मान के लिये) तब सारणिक

$$\Delta=\begin{vmatrix} \log a_n & \log a_{n+2} & \log a_{n+4} \\ \log a_{n+6} & \log a_{n+8} & \log a_{n+10} \\ \log a_{n+12} & \log a_{n+14} & \log a_{n+16} \end{vmatrix}$$ का मान होगा

(a) 1 (b) 2
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

18. यदि $D_r=\begin{vmatrix} 2^{r-1} & 2.3^{r-1} & 4.5^{r-1} \\ x & y & z \\ 2^n-1 & 3^n-1 & 5^n-1 \end{vmatrix}$, तो $\sum_{r=1}^{n} D_r$ का मान है

(a) 1 (b) – 1
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

19. यदि $a_i^2+b_i^2+c_i^2=1,\ (i=1,2,3)$ और $a_ia_j+b_ib_j+c_ic_j=0$ $(i\neq j, i, j=1,2,3)$ तब $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2$ का मान है [AMU 1994; DCE 2001]

(a) 0 (b) 1/2
(c) 1 (d) 2

20. यदि समीकरण निकाय $3x-2y+z=0$, $\lambda x-14y+15z=0$, $x+2y+3z=0$ अशून्य हल रखता है, तब $\lambda=$ [EAMCET 1993]

(a) 5 (b) – 5
(c) – 29 (d) 29

21. रेखीय समीकरण निकाय $x+y+z=2$, $2x+y-z=3,$ $3x+2y+kz=4$ अद्वितीय हल रखता है, यदि [EAMCET 1994; DCE 2000]

(a) $k\neq 0$ (b) $-1<k<1$
(c) $-2<k<2$ (d) $k=0$

22. निकाय $x_1-x_2+x_3=2,$ $3x_1-x_2+2x_3=-6$ व $3x_1+x_2+x_3=-18$ के हलों की संख्या होगी [AMU 2001]

(a) कोई हल नहीं (b) केवल एक हल
(c) अनन्त हल (d) इनमें से कोई नहीं

23. निकाय $(k+1)x+8y=4k,$ $kx+(k+3)y=3k-1$ के अनन्त हलों के लिये k के मानों की संख्या होगी [IIT Screening 2002]

(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) अनन्त

24. यदि $\begin{vmatrix} 1+ax & 1+bx & 1+cx \\ 1+a_1x & 1+b_1x & 1+c_1x \\ 1+a_2x & 1+b_2x & 1+c_2x \end{vmatrix}=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3$, तब A_1 का मान होगा [AMU 2002]

(a) abc (b) 0
(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

25. निकाय $x+y+z=\lambda,$ $5x-y+\mu z=10$, $2x+3y-z=6$ के अद्वितीय हल का अस्तित्व निर्भर करता है [Kurukshetra CEE 2002]

(a) केवल μ पर (b) केवल λ पर
(c) λ और μ दोनों पर (d) न तो λ और न ही μ पर

26. निकाय $x+y+z=2$, $3x-y+2z=6$ और $3x+y+z=-18$ के लिये होगा [Kurukshetra CEE 2002]

(a) एक अद्वितीय हल
(b) कोई हल नहीं
(c) अनन्त हल
(d) केवल शून्य ही एक हल है

27. यदि $a>0$ और $ax^2+2bx+c$ का विविक्तिकर ऋणात्मक है, तब $\begin{vmatrix} a & b & ax+b \\ b & c & bx+c \\ ax+b & bx+c & 0 \end{vmatrix}$ का मान होगा [AIEEE 2002]

(a) धनात्मक (b) $(ac-b^2)(ax^2+2bx+c)$
(c) ऋणात्मक (d) 0

28. λ के किस मान के लिये निकाय $x+y+z=6$, $x+2y+3z=10$, $x+2y+\lambda z=12$ के असंगत हल होंगे [AIEEE 2002]

(a) $\lambda=1$ (b) $\lambda=2$

(c) $\lambda=-2$ (d) $\lambda=3$

29. यदि x एक धनात्मक पूर्णांक हो, तो

$$\Delta=\begin{vmatrix} x! & (x+1)! & (x+2)! \\ (x+1)! & (x+2)! & (x+3)! \\ (x+2)! & (x+3)! & (x+4)! \end{vmatrix}$$ का मान है

(a) $2(x!)(x+1)!$ (b) $2(x!)(x+1)!(x+2)!$

(c) $2(x!)(x+3)!$ (d) इनमें से कोई नहीं

30. समीकरणों $x+ay=0$, $az+y=0$ और $ax+z=0$ के अनन्त हल हों, तो a का मान होगा [IIT Screening 2003]

(a) –1 (b) 1

(c) 0 (d) कोई वास्तविक मान नहीं

31. समीकरणों के निकाय $3x+y+2z=3$, $2x-3y-z=-3$, $x+2y+z=4$ के लिये x, y, z के मान होंगे [MP PET 2003]

(a) 2, 1, 5 (b) 1, 1, 1

(c) 1, –2, –1 (d) 1, 2, –1

32. λ के किस मान के लिये समीकरण के निकाय $2x-y-z=12$, $x-2y+z=-4$, $x+y+\lambda z=4$ का कोई हल नहीं होगा [IIT Screening 2004]

(a) 3 (b) – 3

(c) 2 (d) – 2

33. यदि $2x+3y+4z=9$, $4x+9y+3z=10$, $5x+10y+5z=1$, तो x का मान है [UPSEAT 2002]

(a) $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 10 & 9 & 3 \\ 11 & 10 & 5 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 3 \\ 5 & 10 & 5 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 10 & 3 & 9 \\ 11 & 5 & 10 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 3 \\ 5 & 10 & 5 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 9 & 4 & 9 \\ 10 & 3 & 3 \\ 11 & 5 & 10 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

(d) इनमें से कोई नहीं

34. यदि समीकरणों के निकाय $x+y+z=6$, $x+2y+3z=10$, $x+2y+\lambda z=\mu$ का कोई हल नहीं है, तब [Orissa JEE 2003]

(a) $\lambda\neq 3, \mu=10$ (b) $\lambda=3, \mu\neq 10$

(c) $\lambda\neq 3, \mu\neq 10$ (d) इनमें से कोई नहीं

35. यदि किसी समान्तर श्रेणी के p वें, q वें तथा r वें पद क्रमशः a, b, c हों, तो $\begin{vmatrix} a & p & 1 \\ b & q & 1 \\ c & r & 1 \end{vmatrix}=$ [Kerala (Engg.) 2002]

(a) 1 (b) –1

(c) 0 (d) pqr

36. यदि रैखिक समीकरणों के निकाय $x+2ay+az=0$, $x+3by+bz=0$, $x+4cy+cz=0$ का अशून्य हल हो तो a, b, c हैं [AIEEE 2003]

(a) समान्तर श्रेणी में

(b) गुणोत्तर श्रेणी में

(c) हरात्मक श्रेणी में

(d) $a+2b+3c=0$ को संतुष्ट करते हैं

37. यदि समीकरणों के निकाय
$$\alpha x+y+z=\alpha-1$$
$$x+\alpha y+z=\alpha-1$$
$$x+y+\alpha z=\alpha-1$$
का कोई हल नहीं है, तब α का मान है [AIEEE 2005]

(a) – 2 नही (b) 1

(c) – 2 (d) या तो – 2 या तो 1

38. α के किस मान के लिए समीकरण निकाय $(\alpha+1)^3x+(\alpha+2)^3y-(\alpha+3)^3=0$, $(\alpha+1)x+(\alpha+2)y-(\alpha+3)=0$, $x+y-1=0$ संगत है [Orissa JEE 2005]

(a) 1 (b) 0

(c) – 3 (d) – 2

आव्यूह के प्रकार, आव्यूह का बीजगणित

1. विषम सममित आव्यूह में विकर्ण के सभी अवयव होते हैं [MP PET 1987]

(a) एक दूसरे से भिन्न (b) शून्य

(c) एक (d) इनमें से कोई नहीं

2. यदि $M=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ और $M^2-\lambda M-I_2=0$, तब $\lambda=$ [MP PET 1990, 2001]

(a) – 2 (b) 2

(c) – 4 (d) 4

3. यदि $A=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$, तो कौन सा सम्बन्ध सत्य है

(a) $A^2=B^2$ (b) $A+B=B-A$

(c) $AB=BA$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. यदि $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, तब A है [MP PET 1991]

(a) सममित (b) विषम सममित

(c) व्युत्क्रमणीय (d) अव्युत्क्रमणीय

5. यदि $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & -1 \end{bmatrix}$, तब $A^2=$ [MNR 1980; Pb. CET 1990; DCE 2001]

(a) इकाई आव्यूह (b) शून्य आव्यूह

(c) A (d) – A

6. यदि $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, तो $A^n=$ [RPET 1995]

(a) $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} n & n \\ 0 & n \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} n & 1 \\ 0 & n \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & n \end{bmatrix}$

7. $AB=0$, यदि और केवल यदि [MNR 1981; Karnataka CET 1993]

(a) $A \neq O, B = O$ (b) $A = O, B \neq O$
(c) $A = O$ या $B = O$ (d) इनमें से कोई नहीं

8. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ a & b \end{bmatrix}$ और $A^2 = O$, तो $(a, b) =$
(a) $(-2, -2)$ (b) $(2, -2)$
(c) $(-2, 2)$ (d) $(2, 2)$

9. यदि $[m \ n]\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = [25]$ और $m < n$, तो $(m, n) =$
(a) (2, 3) (b) (3, 4)
(c) (4, 3) (d) इनमें से कोई नहीं

10. यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$,
तो निम्न में से कौन सा व्यंजक परिभाषित नहीं है [MP PET 1987]
(a) $A^2 + 2B - 2A$ (b) CC'
(c) $B'C$ (d) AB

11. यदि $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, जहाँ $i = \sqrt{-1}$, तो सत्य सम्बन्ध है
(a) $A + B = O$ (b) $A^2 = B^2$
(c) $A - B = O$ (d) $A^2 + B^2 = O$

12. यदि आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 3 & \lambda + 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 10 \end{bmatrix}$ अव्युत्क्रमणीय है, तब $\lambda =$
[MP PET 1990; Pb. CET 2000]
(a) – 2 (b) 4
(c) 2 (d) – 4

13. यदि $A = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}$ और $A^n = O$, तो n का न्यूनतम मान है
(a) 2 (b) 3
(c) 4 (d) 5

14. यदि $A = \begin{bmatrix} 1/3 & 2 \\ 0 & 2x - 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ और $AB = I$, तो $x =$
[MP PET 1987]
(a) –1 (b) 1
(c) 0 (d) 2

15. यदि $AB = C$, तो आव्यूह A, B, C हैं [MP PET 1991]
(a) $A_{2\times3}, B_{3\times2}, C_{2\times3}$ (b) $A_{3\times2}, B_{2\times3}, C_{3\times2}$
(c) $A_{3\times3}, B_{2\times3}, C_{3\times3}$ (d) $A_{3\times2}, B_{2\times3}, C_{3\times3}$

16. यदि $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$, तो λ के किस मान के लिये $A^2 = 0$ है
[MP PET 1992]
(a) 0 (b) ± 1
(c) – 1 (d) 1

17. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$, तो [MNR 1982]
(a) $A' = A$ (b) $A' = -A$
(c) $A' = 2A$ (d) इनमें से कोई नहीं

18. यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ और $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, तो $A^2 - 6A =$
[MP PET 1987]
(a) $3I$ (b) $5I$
(c) $-5I$ (d) इनमें से कोई नहीं

19. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, तो निम्न में कौन परिभाषित है
(a) AB (b) $A + B$
(c) $A'B'$ (d) $B'A'$

20. यदि $A = [1 \ 2 \ 3]$ और $B = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, तो $AB =$
[MP PET 1988]
(a) $\begin{bmatrix} -5 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & -9 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -5 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & -6 & 6 \end{bmatrix}$

21. यदि A एक $m \times n$ कोटि का आव्यूह हो और B एक ऐसा आव्यूह है कि AB तथा BA दोनों परिभाषित हैं, तो B की कोटि है
(a) $m \times n$ (b) $n \times m$
(c) $m \times m$ (d) $n \times n$

22. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, तो $AA' =$ [MP PET 1992]
(a) [14] (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं

23. यदि $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$, तो $(a, b, c, d) =$
(a) $(1, 6, 2, 5)$ (b) (1, 2, 7, 5)
(c) (1, 2, –7, 5) (d) (–1, –2, 7, –5)

24. यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, तो A^2 है [MNR 1980]
(a) शून्य आव्यूह (b) इकाई आव्यूह
(c) A (d) $2A$

25. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, तो AB की तीसरी पंक्ति तथा तीसरे स्तम्भ का अवयव होगा
(a) – 18 (b) 4
(c) – 12 (d) इनमें से कोई नहीं

26. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, तो $A^5 =$
[MP PET 1995, 99; Pb. CET 2000]

(a) 5A (b) 10A
(c) 16A (d) 32A

27. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ और $AB = O$, तो $B =$ [MP PET 1989]

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

28. यदि A और B कोटि 2 के वर्ग आव्यूह हों, तो $(A+B)^2 =$ [MP PET 1992]

(a) $A^2 + 2AB + B^2$ (b) $A^2 + AB + BA + B^2$
(c) $A^2 + 2BA + B^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

29. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$, तो A है

(a) एक उपरित्रिभुजीय आव्यूह (b) एक शून्य आव्यूह
(c) एक निम्नत्रिभुजीय आव्यूह (d) इनमें से कोई नहीं

30. वर्ग आव्यूह $[a_{ij}]_{n \times n}$ एक उपरित्रिभुजीय आव्यूह होगा, यदि

(a) $a_{ij} \neq 0$, $i > j$ के लिये (b) $a_{ij} = 0$, $i > j$ के लिये
(c) $a_{ij} = 0$, $i < j$ के लिये (d) इनमें से कोई नहीं

31. यदि $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ \lambda & -3 & 0 \end{bmatrix}$ अव्युत्क्रमणीय आव्यूह हो, तो $\lambda =$ [MP PET 1989]

(a) – 2 (b) – 1
(c) 1 (d) 2

32. निम्न में से कौन सा सम्बन्ध असत्य है

(a) $(A + B + ... + l)' = A' + B' + ... + l'$
(b) $(AB....l)' = A'B'....l'$
(c) $(kA)' = kA'$
(d) $(A')' = A$

33. यदि A, n कोटि का वर्ग आव्यूह हो और $A = k\,B$, जहाँ k अदिश है, तो $|A| =$ [Karnataka CET 1992]

(a) $|B|$ (b) $k|B|$
(c) $k^n|B|$ (d) $n|B|$

34. यदि $A = diag(2, -1, 3), B = diag(-1, 3, 2)$, तो $A^2B =$

(a) $diag$ (5, 4, 11) (b) $diag$ (–4, 3, 18)
(c) $diag$ (3, 1, 8) (d) B

35. $\cos\theta \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} =$

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

36. यदि I एक मात्रक आव्यूह हो, तो $3I$ होगा

(a) एक मात्रक आव्यूह (b) एक त्रिभुजीय आव्यूह
(c) एक अदिश आव्यूह (d) इनमें से कोई नहीं

37. यदि $A = [a\ b], B = [-b\ \ -a]$ और $C = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$, तब सही कथन है [AMU 1987]

(a) $A = -B$ (b) $A + B = A - B$
(c) $AC = BC$ (d) $CA = CB$

38. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, तो A^4 बराबर है [MP PET 1993; Pb. CET 2001]

(a) $\begin{bmatrix} 1 & a^4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 4a \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 4 & a^4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

39. यदि $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ है, तो $X =$ [MP PET 1994]

(a) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 14 & -13 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -14 & 13 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 14 & 13 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -14 & 13 \end{bmatrix}$

40. निम्नलिखित कथनों में असत्य है

(a) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$
(b) $(A^T)^T = A$
(c) $(AB)^n = A^nB^n$, जहाँ A, B क्रमविनिमेय नियम का पालन करते हैं
(d) $(A - I)(I + A) = O \Leftrightarrow A^2 = I$

41. A और B दो वर्ग आव्यूह इस प्रकार हैं कि $AB = O$ और B व्युत्क्रमणीय है, तब

(a) $A \neq O$ (b) $A = O$
(c) $A = I$ (d) इनमें से कोई नहीं

42. $[x\ y\ z] \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ की कोटि है [EAMCET 1994]

(a) 3×1 (b) 1×1
(c) 1×3 (d) 3×3

43. यदि A और B दो आव्यूह इस प्रकार हैं कि $AB = B$ और $BA = A$, तो $A^2 + B^2 =$ [EAMCET 1994]

(a) $2AB$ (b) $2BA$
(c) $A + B$ (d) AB

44. यदि A और B दो आव्यूह हैं तथा $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$, तो [RPET 1995]

(a) $AB = BA$ (b) $A^2 + B^2 = A^2 - B^2$
(c) $A'B' = AB$ (d) इनमें से कोई नहीं

45. $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, तो $A - B =$ [RPET 1995]

(a) $\begin{bmatrix} 11 & -7 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 12 & -7 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$

46. यदि $X = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, तो X^n का मान है [EAMCET 1991]

(a) $\begin{bmatrix} 3n & -4n \\ n & -n \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2+n & 5-n \\ n & -n \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3^n & (-4)^n \\ 1^n & (-1)^n \end{bmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं

47. यदि $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, तो $A^2 =$ [EAMCET 1983]

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

48. यदि A और B समान कोटि के वर्ग आव्यूह हों, तो [Roorkee 1995]

(a) $A+B=B+A$ (b) $A+B=A-B$

(c) $A-B=B-A$ (d) $AB=BA$

49. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, तो $A^4 =$ [EAMCET 1994]

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

50. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, तो $A^2 =$ [Karnataka CET 1994]

(a) $\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

51. यदि A और B दो आव्यूह इस प्रकार हैं कि $A+B$ और AB दोनों परिभाषित हैं, तब [Pb. CET 1990]

(a) A और B आवश्यक रुप से समान कोटि के दो आव्यूह नहीं हैं

(b) A और B समान कोटि के वर्ग आव्यूह हैं

(c) A के स्तम्भों की संख्या = B की पंक्तियों की संख्या

(d) इनमें से कोई नहीं

52. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, तो $AB =$ [EAMCET 1987]

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 9 & 13 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 5 & 9 & 13 \\ -1 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं

53. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, तो $AB =$ [EAMCET 1984]

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

54. यदि $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$, तो $(A+B)(A-B) =$ [RPET 1994]

(a) $A^2 - B^2$ (b) $A^2 + B^2$

(c) $A^2 - B^2 + BA + AB$ (d) इनमें से कोई नहीं

55. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, तो $5A - 3B - 2C =$ [RPET 1992, 94]

(a) $\begin{bmatrix} 8 & 20 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 8 & -20 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -8 & 20 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -20 & -9 \end{bmatrix}$

56. यदि $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, तो [RPET 1994]

(a) $x=-3, y=-2$ (b) $x=3, y=-2$

(c) $x=3, y=2$ (d) $x=-3, y=2$

57. यदि $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ और A^2 तत्समक आव्यूह हैं, तो $x =$ [EAMCET 1993]

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 0

58. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, तो $(A+B)^2 =$ [RPET 1994]

(a) $A^2 + B^2$ (b) $A^2 + B^2 + 2AB$

(c) $A^2 + B^2 + AB - BA$ (d) इनमें से कोई नहीं

59. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, I कोटि 2 का तत्समक आव्यूह है और a, b स्वेच्छ नियतांक हैं, तो $(aI + bA)^2 =$ [RPET 1992]

(a) $a^2 I + abA$ (b) $a^2 I + 2abA$

(c) $a^2 I + b^2 A$ (d) इनमें से कोई नहीं

60. निम्न में से किसने आव्यूह सिद्धान्त का प्रतिपादन किया था

(a) न्यूटन (Newton) ने (b) कैले–हैमिल्टन ने

(c) कौशी (Cauchy) ने (d) यूक्लिड (Euclid) ने

61. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, तो [MP PET 1996]

(a) $A^2 = A$ (b) $B^2 = B$

(c) $AB \neq BA$ (d) $AB = BA$

62. निम्न में से कौन सा कथन सत्य नहीं है [Kurukshetra CEE 1998]

(a) आव्यूहों का योग क्रमविनिमेय नियम का पालन करता है

(b) आव्यूहों का योग साहचर्य नियम का पालन करता है

(c) आव्यूहों का गुणन क्रमविनिमेय नियम का पालन करता है

(d) आव्यूहों का गुणन साहचर्य नियम का पालन करता है

63. यदि आव्यूह $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\3 & \lambda & 5\end{bmatrix}$ एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह हो, तो λ का मान नहीं हो सकता है [Kurukshetra CEE 1998]

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

64. यदि $U = [2 - 3\ 4], X = [0\ 2\ 3]$, $V = \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$ और $Y = \begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix}$, तो $UV + XY =$ [MP PET 1997]

(a) 20 (b) [– 20]
(c) – 20 (d) [20]

65. यदि $A = \begin{bmatrix}0 & i\\-i & 0\end{bmatrix}$, तो A^{40} का मान होगा [RPET 1999]

(a) $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}$

66. यदि $A = \begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\2 & 1 & 3\end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$, तो $(AB)^T =$ [RPET 1996]

(a) $\begin{bmatrix}-3 & -2\\10 & 7\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}-3 & 10\\-2 & 7\end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix}-3 & 10\\7 & -2\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}3 & 10\\2 & 7\end{bmatrix}$

67. यदि $A = [1\ 2\ 3], B = \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$ और $C = \begin{bmatrix}1 & 5\\0 & 2\end{bmatrix}$, तब निम्न में कौन सा परिभाषित होगा [RPET 1996]

(a) AB (b) BA
(c) $(AB).C$ (d) $(AC).B$

68. यदि A और B का आव्यूह गुणन $AB = O$ हो, तो [Kurukshetra CEE 1998; RPET 2001]

(a) $A = O$ और $B = O$ (b) $A = O$ या $B = O$
(c) A शून्य आव्यूह है (d) इनमें से कोई नहीं

69. यदि A और B, $n \times n$ कोटि के दो वर्ग आव्यूह हैं, तो $(A - B)^2$ का मान होगा [Karnataka CET 1999; Kerala (Engg.) 2002]

(a) $A^2 - B^2$ (b) $A^2 - 2AB + B^2$
(c) $A^2 + 2AB + B^2$ (d) $A^2 - AB - BA + B^2$

70. सही कथन चुनिये [Karnataka CET 1999]

(a) प्रत्येक इकाई आव्यूह एक अदिश आव्यूह है
(b) प्रत्येक अदिश आव्यूह एक इकाई आव्यूह है
(c) प्रत्येक विकर्ण आव्यूह एक इकाई आव्यूह है
(d) एक वर्ग आव्यूह, जिसका प्रत्येक अवयव 1 है, एक इकाई आव्यूह है

71. यदि $A = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 12\end{bmatrix}$, तो [DCE 1999]

(a) $AB = O, BA = O$ (b) $AB = O, BA \neq O$
(c) $AB \neq O, BA = O$ (d) $AB \neq O, BA \neq O$

72. आव्यूह $\begin{bmatrix}2 & 5 & -7\\0 & 3 & 11\\0 & 0 & 9\end{bmatrix}$ है [Karnataka CET 1999; Pb. CET 2001]

(a) सममित आव्यूह (b) विकर्ण आव्यूह
(c) उपरित्रिभुजीय आव्यूह (d) विषम सममित आव्यूह

73. यदि $A = \begin{pmatrix}i & 1\\0 & i\end{pmatrix}$, तो A^4 का मान होगा [AMU 1999]

(a) $\begin{pmatrix}1 & -4i\\0 & 1\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}-1 & -4i\\0 & -1\end{pmatrix}$
(c) $\begin{pmatrix}-i & 4\\0 & i\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{pmatrix}$

74. $\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}[2\ \ 1\ \ -1] =$ [MP PET 2000]

(a) [–1] (b) $\begin{bmatrix}2\\-1\\-2\end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\-2 & -1 & 1\\4 & 2 & -2\end{bmatrix}$ (d) परिभाषित नहीं है

75. $p \times q$ और $r \times s$ कोटि के दो आव्यूह A और B को घटाया जा सकता है, यदि [RPET 2000]

(a) $p = q$ (b) $p = q, r = s$
(c) $p = r, q = s$ (d) इनमें से कोई नहीं

76. यदि $A = \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}$, तो $A^2 - 2A$ के सारणिक का मान होगा [EAMCET 2000]

(a) 5 (b) 25
(c) –5 (d) –25

77. यदि आव्यूह $AB = O$, तो [Pb. CET 2000]

(a) $A = O$ या $B = O$
(b) $A = O$ और $B = O$
(c) यह आवश्यक नहीं है कि $A = O$ अथवा $B = O$
(d) $A \neq O, B \neq O$

78. यदि $a_{ij} = \frac{1}{2}(3i - 2j)$ और $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$, तो A का मान होगा [RPET 2001]

(a) $\begin{bmatrix}1/2 & 2\\-1/2 & 1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\2 & 1\end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix}2 & 2\\1/2 & -1/2\end{bmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं

79. यदि $2X - \begin{bmatrix}1 & 2\\7 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 2\\0 & -2\end{bmatrix}$, तो X का मान होगा [RPET 2001]

(a) $\begin{bmatrix}2 & 2\\7 & 4\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1 & 2\\7/2 & 2\end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix}2 & 2\\7/2 & 1\end{bmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं

80. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, तो $A^n=$ [Kerala (Engg.) 2001]

(a) $\begin{bmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}2 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}1 & 2n\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

81. यदि $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}$ और $kA=\begin{bmatrix}0 & 3a\\ 2b & 24\end{bmatrix}$, तो k, a, b के मान क्रमशः होंगे [EAMCET 2001]

(a) $-6,-12,-18$ (b) $-6, 4, 9$

(c) $-6,-4,-9$ (d) $-6, 12, 18$

82. यदि $\begin{bmatrix}2+x & 3 & 4\\ 1 & -1 & 2\\ x & 1 & -5\end{bmatrix}$ अव्युत्क्रमणीय आव्यूह हो, तो x का मान होगा [Kerala (Engg.) 2001]

(a) $\frac{13}{25}$ (b) $-\frac{25}{13}$

(c) $\frac{5}{13}$ (d) $\frac{25}{13}$

83. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ के लिये सत्य कथन होगा [Kerala (Engg.)2001]

(a) $A^3+3A^2-I=O$ (b) $A^3-3A^2-I=O$

(c) $A^3+2A^2-I=O$ (d) $A^3-A^2+I=O$

84. आव्यूह $\begin{bmatrix}2 & \lambda & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$ व्युत्क्रमणीय होगा, यदि [Kurukshetra CEE 2002]

(a) $\lambda\ne -2$ (b) $\lambda\ne 2$

(c) $\lambda\ne 3$ (d) $\lambda\ne -3$

85. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}a & 1\\ b & -1\end{bmatrix}$ और $(A+B)^2=A^2+B^2$, तो a और b के मान होंगे [Kurukshetra CEE 2002]

(a) $a=4, b=1$ (b) $a=1, b=4$

(c) $a=0, b=4$ (d) $a=2, b=4$

86. माना A, B कोटि 3 के वर्ग आव्यूह हैं। यदि A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है और $AB=O$, तो B होगा [EAMCET 2002]

(a) शून्य आव्यूह (b) अव्युत्क्रमणीय आव्यूह

(c) इकाई आव्यूह (d) व्युत्क्रमणीय आव्यूह

87. यदि $A=\begin{bmatrix}3 & -5\\ -4 & 2\end{bmatrix}$, तो $A^2-5A=$ [RPET 2002]

(a) I (b) 14 I

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

88. यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, तो $A^{16}=$ [Karnataka CET 2002]

(a) $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

89. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, तो $A^{100}=$ [UPSEAT 2002; MP PET 2004]

(a) $2^{100}A$ (b) $2^{99}A$

(c) $2^{101}A$ (d) इनमें से कोई नहीं

90. आव्यूह गुणन के लिये सत्य है [UPSEAT 2002]

(a) क्रमविनिमेय नियम (b) साहचर्य नियम

(c) दोनों (a) और (b) (d) इनमें से कोई नहीं

91. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -k\\ 2 & 1 & 3\\ k & 0 & 1\end{bmatrix}$ व्युत्क्रमणीय होगा [UPSEAT 2002]

(a) $k=1$ के लिये

(b) $k=-1$ के लिये

(c) $k=0$ के लिये

(d) k के सभी वास्तविक मानों के लिये

92. यदि $\begin{bmatrix}x+y & 2x+z\\ x-y & 2z+w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 7\\ 0 & 10\end{bmatrix}$, तो x, y, z, w के मान क्रमशः होंगे [RPET 2002]

(a) 2, 2, 3, 4 (b) 2, 3, 1, 2

(c) 3, 3, 0, 1 (d) इनमें से कोई नहीं

93. आव्यूह $A=\begin{pmatrix}a & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ अव्युत्क्रमणीय होगा, यदि [Kerala (Engg.)2002]

(a) $a\ne 1$ (b) $a=1$

(c) $a=0$ (d) $a=-1$

94. यदि $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ और I, कोटि 2 का इकाई आव्यूह हो, तो A^2 का मान होगा [Kerala (Engg.) 2002]

(a) $4A-3I$ (b) $3A-AI$

(c) $A-I$ (d) $A+I$

95. यदि $P=\begin{pmatrix}i & 0 & -i\\ 0 & -i & i\\ -i & i & 0\end{pmatrix}$ और $Q=\begin{pmatrix}-i & i\\ 0 & 0\\ i & -i\end{pmatrix}$, तो PQ का मान होगा [Kerala (Engg.) 2002]

(a) $\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

96. यदि I, कोटि 10 का इकाई आव्यूह हो, तो I के सारणिक का मान होगा [Kerala (Engg.) 2002]

(a) 10 (b) 1

(c) 1/10 (d) 9

97. यदि नीचे दिये गये योग और गुणन परिभाषित हैं, तब आव्यूह के संदर्भ में निम्न कथन सत्य नहीं है [Karnataka CET 2003]

(a) $A+B=B+A$

(b) $AB=AC$ यह प्रदर्शित नहीं करता है कि $B=C$

(c) $AB=O$ प्रदर्शित करता है $A=O$ अथवा $B=O$

(d) $(AB)'=B'A'$

98. यदि $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&0&2\\4&5&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&1&3\end{bmatrix}$, तो AB का मान होगा [MP PET 2003]

(a) $\begin{bmatrix}5&1&-3\\3&2&6\\14&5&0\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}11&4&3\\1&2&3\\0&3&3\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}1&8&4\\2&9&6\\0&2&0\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}0&1&2\\5&4&3\\1&8&2\end{bmatrix}$

99. यदि A और B, 3×3 कोटि के दो आव्यूह इस प्रकार हैं कि $AB=A$ और $BA=B$, तो [Orissa JEE 2003]

(a) $A^2=A$ और $B^2\ne B$ (b) $A^2\ne A$ और $B^2=B$

(c) $A^2=A$ और $B^2=B$ (d) $A^2\ne A$ और $B^2\ne B$

100. यदि $A=\begin{bmatrix}\alpha&0\\1&1\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}1&0\\5&1\end{bmatrix}$, तो α के किस मान के लिये $A^2=B$ होगा [IIT Screening 2003]

(a) 1 (b) –1

(c) 4 (d) कोई वास्तविक मान नहीं

101. $\begin{bmatrix}7&1&2\\9&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$ का मान होगा [DCE 2002]

(a) $\begin{bmatrix}43\\44\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}43\\45\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}45\\44\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}44\\45\end{bmatrix}$

102. माना $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$, तो A के लिये सही कथन है [AIEEE 2004]

(a) $A^2=I$

(b) $A=(-1)I$, जहाँ I इकाई आव्यूह है

(c) A^{-1} अस्तित्व में नहीं है

(d) A एक शून्य आव्यूह है

103. यदि $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}$ और $B=\begin{pmatrix}-5&7&1\\1&-5&7\\7&1&-5\end{pmatrix}$, तो AB का मान है [Pb. CET 2002]

(a) I_3 (b) $2I_3$

(c) $4I_3$ (d) $18I_3$

104. आव्यूह X का मान क्या होना चाहिये, यदि $2X+\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&8\\7&2\end{bmatrix}$ [Karnataka CET 2004]

(a) $\begin{bmatrix}1&3\\2&-1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1&-3\\2&-1\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}2&6\\4&-2\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}2&-6\\4&-2\end{bmatrix}$

105. यदि $A+B=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$ और $A-2B=\begin{bmatrix}-1&1\\0&-1\end{bmatrix}$, तो $A=$ [Karnataka CET 1994]

(a) $\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}2/3&1/3\\1/3&2/3\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}1/3&1/3\\2/3&1/3\end{bmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं

106. आव्यूह गुणन के सापेक्ष में समूह $M=\left\{\begin{pmatrix}x&x\\x&x\end{pmatrix}\middle|\, x\in R; x\ne 0\right\}$ का तत्समक अवयव है [Karnataka CET 2005]

(a) $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ (b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

107. यदि $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$ और $I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, तब निम्न में से $n\ge1$ के लिए कौन सा कथन सत्य है (गणितीय आगमन के सिद्धांत द्वारा) [AIEEE 2005]

(a) $A^n=nA+(n-1)I$ (b) $A^n=2^{n-1}A+(n-1)I$

(c) $A^n=nA-(n-1)I$ (d) $A^n=2^{n-1}A-(n-1)I$

विशेष प्रकार के आव्यूह, परिवर्त आव्यूह, सहखण्डज व व्युत्क्रम आव्यूह

1. आव्यूह $\begin{bmatrix}3&-2&-1\\-4&1&-1\\2&0&1\end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम है [MP PET 1990]

(a) $\begin{bmatrix}1&2&3\\3&3&7\\-2&-4&-5\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1&-3&5\\7&4&6\\4&2&7\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&7\\-2&-4&-5\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}1&2&-4\\8&-4&-5\\3&5&2\end{bmatrix}$

2. यदि A और B व्युत्क्रमणीय आव्यूह हों, तो [MP PET 1991; Kurukshetra CEE 1998]

(a) $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$ (b) $AB=BA$

(c) $(AB)'=A'B'$ (d) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

3. आव्यूह $N=\begin{bmatrix}-4&-3&-3\\1&0&1\\4&4&3\end{bmatrix}$ का सहखण्डज है [MP PET 1989]

(a) N (b) $2N$

(c) $-N$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. निम्न में से सही सम्बन्ध है [MP PET 1990]

(a) $(AB)'=A'B'$ (b) $(AB)'=B'A'$

(c) $A^{-1}=\frac{adj\,A}{A}$ (d) $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

5. यदि A एक अन्तर्वलनीय (Involutory) आव्यूह है तथा I, उसी कोटि का इकाई आव्यूह हो, तो $(I-A)(I+A)$ है
(a) शून्य आव्यूह (b) A
(c) I (d) $2A$

6. यदि k एक अदिश राशि है तथा I, कोटि तीन का इकाई आव्यूह है, तो $adj(k\,I)=$ [MP PET 1991; Pb. CET 2003]
(a) k^3I (b) k^2I
(c) $-k^3I$ (d) $-k^2I$

7. यदि A, $n\times n$ आव्यूह हो, तो $adj(adj\,A)=$
(a) $|A|^{n-1}A$ (b) $|A|^{n-2}A$
(c) $|A|^n\,n$ (d) इनमें से कोई नहीं

8. यदि $A=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i/2 \end{bmatrix}$ $(i=\sqrt{-1})$, तो $A^{-1}=$ [MP PET 1992]
(a) $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i/2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 2i \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & i \\ 2i & 0 \end{bmatrix}$

9. यदि A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह हो, तो $A(adj\,A)=$
(a) A (b) I
(c) $|A|I$ (d) $|A|^2\,I$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ के प्रतिलोम में दूसरी पंक्ति तथा तीसरे स्तम्भ के अवयव का क्या मान है [MP PET 1992]
(a) – 2 (b) – 1
(c) 1 (d) 2

11. यदि $R(t)=\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$, तो $R(s).R(t)=$ [Roorkee 1981]
(a) $R(s)+R(t)$ (b) $R(st)$
(c) $R(s+t)$ (d) इनमें से कोई नहीं

12. यदि A और B समान क्रम के सममित आव्यूह हों, तो $AB-BA$ होगा
(a) सममित आव्यूह (b) विषम सममित आव्यूह
(c) शून्य आव्यूह (d) इनमें से कोई नहीं

13. यदि A सममित आव्यूह है, तो $M'AM$ है [MP PET 1990]
(a) सममित (b) विषम सममित
(c) हरमीशियन (d) विषम हरमीशियन

14. एक लाम्बिक आव्यूह है
(a) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & 2\sin\alpha \\ -2\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

15. यदि $A=\begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix}$, तो $A^{-1}=$ [MP PET 1988]
(a) $\frac{1}{ab-cd}\begin{bmatrix} b & -c \\ -d & a \end{bmatrix}$ (b) $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} b & -c \\ -d & a \end{bmatrix}$
(c) $\frac{1}{ab-cd}\begin{bmatrix} b & d \\ c & a \end{bmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं

16. आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम है [MP PET 1989; Pb. CET 1989, 1993]
(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम है [MP PET 1993; Pb. CET 2000]
(a) $\frac{-1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\frac{-1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
(c) $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

18. माना $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, तो A का सहखण्डज है [MNR 1982]
(a) $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 32 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \\ 1 & -6 & 1 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \\ 1 & -6 & -1 \end{bmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं

19. यदि $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, तो $A(adj\,A)=$ [MP PET 1995; RPET 1997]
(a) $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं

20. यदि A एक वर्ग आव्यूह हो, तो निम्न में से कौन सा आव्यूह सममित नहीं है
(a) $A+A'$ (b) AA'
(c) $A'A$ (d) $A-A'$

21. यदि $A=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ और $A\ adj\ A=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, तो k का मान है [MP PET 1993; Pb. CET 2001]
(a) 0 (b) 1
(c) $\sin\alpha\cos\alpha$ (d) $\cos 2\alpha$

22. यदि आव्यूह A इस प्रकार हो कि $3A^3+2A^2+5A+I=0$, तो इसका व्युत्क्रम होगा
(a) $-(3A^2+2A+5I)$ (b) $3A^2+2A+5I$
(c) $3A^2-2A-5I$ (d) इनमें से कोई नहीं

23. यदि A और B दो समान कोटि के वर्ग आव्यूह हों, तो निम्न में से सत्य है [Pb. CET 1992; Roorkee 1995]
(a) $(AB)' = A'B'$
(b) $(AB)' = B'A'$
(c) $AB = O$; यदि $|A| = 0$ या $|B| = 0$
(d) $AB = O$; यदि $A = I$ अथवा $B = I$

24. निम्नलिखित कथनों में से कौन सा असत्य है / हैं
(i) एक सममित आव्यूह का सहखण्डज सममित होता है
(ii) तत्समक आव्यूह का सहखण्डज तत्समक आव्यूह होता है
(iii) $A(adj\,A) = (adj\,A)\,A = |A|\,I$
(iv) एक विकर्ण आव्यूह का सहखण्डज विकर्ण आव्यूह होता है
(a) (i) (b) (ii)
(c) (iii) और (iv) (d) इनमें से कोई नहीं

25. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}^{-1} =$ [EAMCET 1994; DCE 1999]
(a) $\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}$

26. एक सममित आव्यूह का व्युत्क्रम है
(a) सममित (b) विषम सममित
(c) एक विकर्ण आव्यूह (d) इनमें से कोई नहीं

27. यदि A एक विषम सममित आव्यूह है और $n \in N$, तो A^n है
(a) सममित (b) विषम सममित
(c) एक विकर्ण आव्यूह (d) इनमें से कोई नहीं

28. यदि A एक विषम सममित आव्यूह और n एक धनात्मक पूर्णांक है, तो A^n है
(a) एक सममित आव्यूह (b) विषम सममित आव्यूह
(c) एक विकर्ण आव्यूह (d) इनमें से कोई नहीं

29. $\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}^{-1} =$ [Karnataka CET 1994]
(a) $\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ का सहखण्डज है [RPET 1993]
(a) $\begin{bmatrix} 3 & -9 & -5 \\ -4 & 1 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं

31. यदि $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, तो $A^{-1} =$ [EAMCET 1988]
(a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

32. यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & x+2 \\ 2x-3 & x+1 \end{bmatrix}$ सममित है, तो $x =$ [Karnataka CET 1994]
(a) 3 (b) 5
(c) 2 (d) 4

33. आव्यूह $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम है [MP PET 1994]
(a) $\begin{bmatrix} \frac{4}{14} & \frac{2}{14} \\ \frac{-1}{14} & \frac{3}{14} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{-2}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{4}{14} \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} \frac{4}{14} & \frac{-2}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{2}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{4}{14} \end{bmatrix}$

34. आव्यूह $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ है
(a) लाम्बिक (b) वर्गसम
(c) विषम सममित (d) सममित

35. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, तो $A + A^T =$ [RPET 1994]
(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं

36. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम है [Karnataka CET 1993]
(a) A (b) A^T
(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

37. यदि A एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है, तो $adj\,A$ है [Karnataka CET 1993]
(a) अव्युत्क्रमणीय (b) व्युत्क्रमणीय
(c) सममित (d) अपरिभाषित

38. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह है [EAMCET 1990]
(a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं

39. निम्नलिखित में से कौन सा एक कथन सत्य है [MP PET 1996]
(a) व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह का व्युत्क्रम अद्वितीय नहीं होता है
(b) व्युत्क्रमणीय आव्यूह का सारणिक शून्य होता है
(c) यदि $A' = A$, तो A वर्ग आव्यूह है
(d) यदि $|A| \neq 0$, तो $|A.adj\,A| = |A|^{(n-1)}$, जहाँ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$

40. यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, तो [MP PET 1996]

(a) $A'=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

(b) $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

(c) $A.\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=2I$

(d) $\lambda A=\begin{bmatrix}\lambda & -\lambda\\ 1 & -1\end{bmatrix}$, जहाँ λ एक अशून्य अदिश है

41. निम्नलिखित में से कौन सा एक कथन असत्य है [Kurukshetra CEE 1996]

(a) प्रत्येक विषम कोटि का विषम सममित आव्यूह व्युत्क्रमणीय होता है

(b) यदि वर्ग आव्यूह का सारणिक अशून्य है, तब आव्यूह व्युत्क्रमणीय होता है

(c) सममित आव्यूह का सहखण्डज सममित होता है

(d) विकर्ण आव्यूह का सहखण्डज विकर्ण होता है

42. यदि $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, तो $adj\,A=$ [RPET 1996]

(a) $\begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\ -2 & 1 & 4\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 4 & 1 & -2\\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -4 & 1 & 2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं

43. निम्न में से कौन सा कथन सत्य है [Kurukshetra CEE 1998]

(a) विषम कोटि का विषम सममित आव्यूह व्युत्क्रमणीय आव्यूह होता है

(b) विषम कोटि का विषम सममित आव्यूह अव्युत्क्रमणीय आव्यूह होता है

(c) सम कोटि का विषम सममित आव्यूह हमेशा अव्युत्क्रमणीय आव्यूह होता है

(d) इनमें से कोई नहीं

44. $Adj.\,(AB)-(Adj.\,B)(Adj.\,A)=$ [MP PET 1997]

(a) $Adj.A-Adj\,B$ (b) I

(c) O (d) इनमें से कोई नहीं

45. यदि $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, तो $(A^{-1})^3=$ [MP PET 1997; Pb. CET 2003]

(a) $\frac{1}{27}\begin{pmatrix}1 & -26\\ 0 & 27\end{pmatrix}$ (b) $\frac{1}{27}\begin{pmatrix}-1 & 26\\ 0 & 27\end{pmatrix}$

(c) $\frac{1}{27}\begin{pmatrix}1 & -26\\ 0 & -27\end{pmatrix}$ (d) $\frac{1}{27}\begin{pmatrix}-1 & -26\\ 0 & -27\end{pmatrix}$

46. आव्यूह $\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 1 & 2 & 5\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ व्युत्क्रमणीय नहीं है, यदि 'a' का मान है [MP PET 1998]

(a) 2 (b) 1

(c) 0 (d) –1

47. किसी 2×2 आव्यूह A के लिये, यदि $A(adj.\ A)=\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}$, तो $|A|=$ [MP PET 1999]

(a) 0 (b) 10

(c) 20 (d) 100

48. यदि A एक वर्ग आव्यूह है जहाँ $a_{ij}=i^2-j^2$, तो A होगा [RPET 1999]

(a) शून्य आव्यूह (b) इकाई आव्यूह

(c) सममित आव्यूह (d) विषम सममित आव्यूह

49. $\begin{bmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ का प्रतिलोम आव्यूह होगा [RPET 1996, 2001]

(a) $\begin{bmatrix}2 & -7\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ -7 & 4\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}-2 & 7\\ 1 & -4\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 7 & -4\end{bmatrix}$

50. यदि $A=\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$, तो $A^{-1}=$ [DCE 1999]

(a) A (b) A^2

(c) A^3 (d) A^4

51. यदि n कोटि के वर्ग आव्यूह A का सारणिक d हो, तो इसके सहखण्डज का सारणिक होगा [EAMCET 2000]

(a) d^n (b) d^{n-1}

(c) d^{n+1} (d) d

52. यदि A और B एक ही कोटि के व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह हों, तो $adj(AB)$ का मान होगा [AMU 1999]

(a) $(adj\,A)(adj\,B)$ (b) $(adj\,B)(adj\,A)$

(c) $(adj\,B^{-1})(adj\,A^{-1})$ (d) $(adj\,A^{-1})(adj\,B^{-1})$

53. आव्यूह $\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ के व्युत्क्रम आव्यूह की प्रथम पंक्ति तथा तृतीय स्तम्भ का अवयव होगा [MP PET 2000]

(a) – 2 (b) 0

(c) 1 (d) 7

54. किसी वर्ग आव्यूह A के लिये AA^T होगा [RPET 2000]

(a) इकाई आव्यूह (b) सममित आव्यूह

(c) विषम सममित आव्यूह (d) एक विकर्ण आव्यूह

55. आव्यूह $\begin{bmatrix}\lambda & -1 & 4\\ -3 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ व्युत्क्रमणीय होगा, यदि [Kurukshetra CEE 1996]

(a) $\lambda\neq -15$ (b) $\lambda\neq -17$

(c) $\lambda\neq -16$ (d) $\lambda\neq -18$

56. किसी आव्यूह A के लिए $AI=A$ और $AA^T=I$ सत्य होगा [RPET 2000]

(a) यदि A एक वर्ग आव्यूह है

(b) यदि A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है

(c) यदि A एक सममित आव्यूह है

(d) यदि A कोई भी आव्यूह है

57. यदि I_3 कोटि 3 का इकाई आव्यूह है, तो I_3^{-1} होगा

[Pb. CET 2000]

(a) 0 (b) $3I_3$

(c) I_3 (d) अस्तित्व नहीं है

58. आव्यूह $\begin{bmatrix} 0 & 5 & -7 \\ -5 & 0 & 11 \\ 7 & -11 & 0 \end{bmatrix}$ है [Karnataka CET 2000]

(a) उपरित्रिभुजीय आव्यूह (b) विषम सममित आव्यूह

(c) सममित आव्यूह (d) एक विकर्ण आव्यूह

59. यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ और $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, तो $(AB)^T$ का मान होगा [RPET 2001]

(a) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं

60. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, तो $adj\,A$ का मान होगा [RPET 2001]

(a) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

61. यदि A वर्ग आव्यूह है, तो $A + A^T$ होगा [RPET 2001]

(a) व्युत्क्रमणीय आव्यूह (b) सममित आव्यूह

(c) विषम सममित आव्यूह (d) इकाई आव्यूह

62. आव्यूह $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ का व्युत्क्रम होगा [AMU 2001]

(a) $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (b) $\frac{1}{(ad-bc)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

(c) $\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$

63. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, तो निम्न में से कौन सा कथन सत्य नहीं है [DCE 2001]

(a) A एक लाम्बिक आव्यूह है (b) A' एक लाम्बिक आव्यूह है

(c) $|A| = 1$ (d) A व्युत्क्रमणीय आव्यूह नहीं है

64. यदि $A^2 - A + I = 0$, तो $A^{-1} =$

[Kerala (Engg.) 2001; AIEEE 2005]

(a) A^{-2} (b) $A + I$

(c) $I - A$ (d) $A - I$

65. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, तो $(B^{-1}A^{-1})^{-1} =$

[EAMCET 2001]

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

66. एक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ इस प्रकार है, कि $a_{ij} = 0$ (जबकि $i \ne j$) और $a_{ij} = k$ (स्थिरांक), (जबकि $i = j$) तब वर्ग आव्यूह A होगा [EAMCET 2001]

(a) इकाई आव्यूह (b) अदिश आव्यूह

(c) शून्य आव्यूह (d) एक विकर्ण आव्यूह

67. अनुकूल कोटि के दो व्युत्क्रमणीय आव्यूहों A और B के लिये $(AB)^{-1}$ का मान होगा

[Pb. CET 2000, RPET 2000, 02; Karnataka CET 2001]

(a) $(BA)^{-1}$ (b) $B^{-1}A^{-1}$

(c) $A^{-1}B^{-1}$ (d) $(AB')^{-1}$

68. यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $AX = B$, तो $X =$

[MP PET 2002]

(a) $[5\ \ 7]$ (b) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

(c) $\frac{1}{3}[5\ \ 7]$ (d) $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

69. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, तो $A^{-1} =$ [MP PET 2002]

(a) $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{5}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -\frac{5}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

70. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, तो $A^{-1} =$ [Karnataka CET 2001]

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3/2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ (d) अस्तित्व नहीं है

71. यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, तो $|adj\ A|$ का मान है [UPSEAT 2003]

(a) 16 (b) 10

(c) 6 (d) इनमें से कोई नहीं

72. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ निम्न कोटि का शून्यभावी (Nilpotent) आव्यूह होगा [Kurukshetra CEE 2002]

(a) 2 (b) 3

(c) 4 (d) 6

73. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} i & 1-2i \\ -1-2i & 0 \end{bmatrix}$ होगा [Kurukshetra CEE 2002]

(a) सममित (b) विषम सममित

(c) हरमीशियन (d) विषम हरमीशियन

74. आव्यूह $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ का सहखण्डज आव्यूह होगा [MP PET 2003]

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 11 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 8 \\ 6 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

75. $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ और $A^{-1} = \lambda(adj(A))$, तो $\lambda =$ [UPSEAT 2002]

(a) $\frac{-1}{6}$ (b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{-1}{3}$ (d) $\frac{1}{6}$

76. आव्यूह AB के लिये सत्य है [RPET 2003]

(a) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ (b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(c) $AB = BA$ (d) सभी विकल्प सही हैं

77. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$, तो $A.\,(adj(A)) =$ [RPET 2003]

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

78. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह होगा [MP PET 2003]

(a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -4 & \frac{5}{2} \\ 1 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -8 & 6 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

79. आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ का गुणन प्रतिलोम होगा [DCE 2002]

(a) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

80. यदि $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$, तो adj (A) [UPSEAT 2002]

(a) $\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं

81. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ और $A^{-1} = \frac{1}{K} adj(A)$, तो $K =$ [UPSEAT 2002]

(a) 7 (b) −7

(c) $\frac{1}{7}$ (d) 11

82. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, तो $A\,(adj\,A) =$ [RPET 2002]

(a) I (b) $|A|$

(c) $|A|\,I$ (d) इनमें से कोई नहीं

83. किसी आव्यूह A के लिये $A^3 = I$, तो $A^{-1} =$ [RPET 2002]

(a) A^2 (b) A^3

(c) A (d) इनमें से कोई नहीं

84. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, तो $A^{-1} =$ [MP PET 2004]

(a) I (b) $-I$

(c) $-A$ (d) A

85. आव्यूह $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ का व्युत्क्रम होगा [Karnataka CET 2003]

(a) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

86. आव्यूह $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम होगा [Karnataka CET 2004]

(a) $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$

87. माना $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ और $(10)B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. यदि B, A का व्युत्क्रम है, तो α है [AIEEE 2004]

(a) 5 (b) − 1

(c) 2 (d) − 2

88. किसी 2×2 कोटि के आव्यूह A के लिये, यदि $A(adj\,A) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, तो $|A|$ का मान है [Pb. CET 2002]

(a) 0 (b) 10

(c) 20 (d) 100

89. यदि A, B, C तीन $n \times n$ क्रम के आव्यूह हों, तो $(ABC)' =$ [MP PET 1988]

(a) $A'B'C'$ (b) $C'B'A'$

(c) $B'C'A'$ (d) $B'A'C'$

90. यदि X एक 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह है और λ अदिश है, तो $adj(\lambda X)$ का मान है [J & K 2005]

(a) $\lambda \, adj X$ (b) $\lambda^3 adj\, X$
(c) $\lambda^2 adj\, X$ (d) $\lambda^4 adj\, X$

91. यदि $X = \begin{bmatrix} -x & -y \\ z & t \end{bmatrix}$, तो $adj\, X$ का परिवर्त आव्यूह है [J & K 2005]

(a) $\begin{bmatrix} t & z \\ -y & -x \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} t & y \\ -z & -x \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} t & -z \\ y & -x \end{bmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं

92. आव्यूह $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम है [Karnataka CET 2005]

(a) $\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$
(c) $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

93. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}; I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा

$A^{-1} = \frac{1}{6}[A^2 + cA + dI]$ जहाँ $c, d \in R$, तो (c, d) का मान है [IIT Screening 2005]

(a) (6, 11) (b) (6, –11)
(c) (–6, 11) (d) (–6, –11)

94. यदि $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ और $Q = PAP^T$, तो

$P(Q^{2005})P^T$ का मान है [IIT Screening 2005]

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2005 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 2005 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2005 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 2005 \end{bmatrix}$

95. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = (adj\, A)$ और $C = 5A$, तो

$\frac{|adjB|}{|C|} =$ [Kerala (Engg.) 2005]

(a) 5 (b) 25
(c) –1 (d) 1
(e) 125

96. यदि A, n कोटि का इकाई आव्यूह है, तब $A(adj\, A)$ है [DCE 2005]

(a) शून्य आव्यूह (b) पंक्ति आव्यूह
(c) इकाई आव्यूह (d) इनमें से कोई नहीं

97. यदि A, n कोटि का विषम-सममित आव्यूह है और C एक $n \times 1$ कोटि का स्तम्भ आव्यूह है, तब $C^T AC$ है [AMU 2005]

(a) कोटि n का इकाई आव्यूह (b) कोटि एक का इकाई आव्यूह
(c) कोटि एक का शून्य आव्यूह (d) इनमें से कोई नहीं

सारणिक व आव्यूह के बीच सम्बन्ध, आव्यूह की जाति (रैंक) तथा समीकरणों का हल

1. यदि A, कोटि 3 घात का वर्ग आव्यूह हो, तो कौन सा कथन सही है (जहाँ I मात्रक आव्यूह है) [MP PET 1992]

(a) $\det(-A) = -\det A$ (b) $\det A = 0$
(c) $\det(A + I) = 1 + \det A$ (d) $\det 2A = 2 \det A$

2. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, तब

(a) $|AB| = |A||B|$ (b) $|AB| = |A|$
(c) $|AB| = |B|$ (d) $|AB| = -|A||B|$

3. यदि $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, तो $(x, y, z) =$

(a) $(-4, 2, 2)$ (b) $(4, -2, -2)$
(c) $(4, 2, 2)$ (d) $(-4, -2, -2)$

4. समीकरण $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ का हल है, $(x, y, z) =$ [MP PET 1991]

(a) (1, 1, 1) (b) (0, –1 2)
(c) (–1, 2, 2) (d) (–1, 0, 2)

5. यदि A एक विषम कोटि का विषम-सममित आव्यूह है, तो $|A| =$

(a) 0 (b) 1
(c) – 1 (d) इनमें से कोई नहीं

6. समीकरण $x + 2y + 3z = 1$, $2x + y + 3z = 2$, $5x + 5y + 9z = 4$ रखता है [EMACET 1987]

(a) अद्वितीय हल (b) अनन्त हल
(c) असंगत हल (d) इनमें से कोई नहीं

7. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, तो $|AB| =$ [RPET 1995]

(a) 4 (b) 8
(c) 16 (d) 32

8. यदि कोटि 3 के वर्ग आव्यूह A और B इस प्रकार हैं कि $|A| = -1$, $|B| = 3$, तो $|3AB| =$ [IIT 1988; MP PET 1995, 99]

(a) – 9 (b) – 81
(c) – 27 (d) 81

9. समीकरणों $x + y = 2$, $2x + 2y = 3$ के लिये होगा [UPSEAT 1999]

(a) केवल एक हल (b) अनेक परिमित हल
(c) कोई हल नहीं (d) इनमें से कोई नहीं

10. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{bmatrix}$, तो $|adj\ A|$ का मान होगा [RPET 1999]

(a) 36 (b) 72
(c) 144 (d) इनमें से कोई नहीं

11. यदि A, n कोटि का वर्ग आव्यूह है तथा $|A| = D$ और $|adj\, A| = D'$, तब [RPET 2000]

(a) $DD' = D^2$ (b) $DD' = D^{n-1}$
(c) $DD' = D^n$ (d) इनमें से कोई नहीं

12. समीकरणों $x_2 - x_3 = 1,\ -x_1 + 2x_3 = -2,\ x_1 - 2x_2 = 3$ के हलों की संख्या है [MP PET 2000]

(a) शून्य (b) एक
(c) दो (d) अनन्त

13. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, तो $\det A =$ [EAMCET 2002]

(a) 2 (b) 3
(c) 4 (d) 5

14. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ की जाति (Rank) होगी [Kurukshetra CEE 2002]

(a) 2 (b) 3
(c) 1 (d) अपरिभाषित

15. समीकरणों के निकाय $2x + y - z = 7,\ x - 3y + 2z = 1$ तथा $x + 4y - 3z = 5$ के हलों की संख्या होगी [EAMCET 2003]

(a) 3 (b) 2
(c) 1 (d) 0

16. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 10 \\ -6 & -12 & -15 \end{bmatrix}$, तब A की जाति (Rank) है [UPSEAT 2004]

(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

17. यदि $A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix}$ और $|A^3| = 125$, तो $\alpha =$ [IIT Screening 2004]

(a) ± 3 (b) ± 2
(c) ± 5 (d) 0

18. यदि $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, तो $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$ [MP PET 2004]

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

19. यदि $A \neq O$ और $B \neq O$, $n \times n$ कोटि के आव्यूह इस प्रकार हैं कि $AB = O$, तो [Orissa JEE 2002]

(a) $Det(A) = 0$ अथवा $Det(B) = 0$
(b) $Det(A) = 0$ और $Det(B) = 0$
(c) $Det(A) = Det(B) \neq 0$
(d) $A^{-1} = B^{-1}$

20. यदि a, b, c धनात्मक वास्तविक संख्यायें हैं, तो x, y और z में निम्नलिखित समीकरण निकाय

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

का/के [IIT 1995]

(a) कोई हल नहीं है
(b) अद्वितीय हल है
(c) अनन्त हल हैं
(d) सीमित हल हैं

21. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$, तो $|AB| =$ [Karnataka CET 2005]

(a) 80 (b) 100
(c) –110 (d) 92

22. माना 3×3 कोटि के आव्यूह A का मान 6 है तथा B एक आव्यूह है, जो $B = 5A^2$ द्वारा परिभाषित है। तब $\det B =$ [Orissa JEE 2005]

(a) 180 (b) 100
(c) 80 (d) इनमें से कोई नहीं

23. यदि $A_i = \begin{bmatrix} a^i & b^i \\ b^i & a^i \end{bmatrix}$ तथा $|a| < 1, |b| < 1$, तो $\sum_{i=1}^{\infty} \det(A_i)$ का मान है [Kerala (Engg.)2005]

(a) $\frac{a^2}{(1-a)^2} - \frac{b^2}{(1-b)^2}$
(b) $\frac{a^2 - b^2}{(1-a^2)(1-b^2)}$
(c) $\frac{a^2}{(1-a)^2} + \frac{b^2}{(1-b)^2}$
(d) $\frac{a^2}{(1+a)^2} - \frac{b^2}{(1+b)^2}$
(e) $\frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b}$

24. आव्यूह $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ की जाति (Rank) है [AMU 2005]

(a) 4 (b) 3
(c) 2 (d) 1

25. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ और $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, तो प्रत्येक $n \geq 1$ के लिये मान रखता है

(a) $A^n = nA + (n-1)I$ (b) $A^n = 2^{n-1}A + (n-1)I$
(c) $A^n = nA - (n-1)I$ (d) $A^n = 2^{n-1}A - (n-1)I$

Critical Thinking

Objective Questions

1. यदि $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ और $A^2=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, तो [AIEEE 2003]

(a) $\alpha=a^2+b^2, \beta=ab$ (b) $\alpha=a^2+b^2, \beta=2ab$

(c) $\alpha=a^2+b^2, \beta=a^2-b^2$ (d) $\alpha=2ab, \beta=a^2+b^2$

2. यदि अशून्य a,b,c के लिये $\Delta=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}=0$, तो $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=$ [Kerala 2002]

(a) abc (b) $\frac{1}{abc}$

(c) $-(a+b+c)$ (d) इनमें से कोई नहीं

3. यदि $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=k(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$, तो $k=$ [RPET 2003]

(a) 1 (b) 2

(c) – 1 (d) – 2

4. यदि $a\neq p, b\neq q, c\neq r$ और $\begin{vmatrix} p & b & c \\ p+a & q+b & 2c \\ a & b & r \end{vmatrix}=0$, तो $\frac{p}{p-a}+\frac{q}{q-b}+\frac{r}{r-c}=$ [EAMCET 2003]

(a) 3 (b) 2

(c) 1 (d) 0

5. $\begin{vmatrix} 1 & \cos(\beta-\alpha) & \cos(\gamma-\alpha) \\ \cos(\alpha-\beta) & 1 & \cos(\gamma-\beta) \\ \cos(\alpha-\gamma) & \cos(\beta-\gamma) & 1 \end{vmatrix}$ का मान होगा [Pb. CET 1992; RPET 2000]

(a) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 1 \\ \cos\beta & \sin\beta & 1 \\ \cos\gamma & \sin\gamma & 1 \end{vmatrix}^2$ (b) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}^2$

(c) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

6. समीकरण $\begin{vmatrix} x+\alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & x+\beta & \alpha \\ \alpha & \beta & x+\gamma \end{vmatrix}=0$ से प्राप्त x के मान होंगे [UPSEAT 1999]

(a) 0 और $-(\alpha+\beta+\gamma)$ (b) 0 और $(\alpha+\beta+\gamma)$

(c) 1 और $(\alpha-\beta-\gamma)$ (d) 0 और $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

7. यदि समीकरण $\begin{vmatrix} x & 3 & 7 \\ 2 & x & -2 \\ 7 & 8 & x \end{vmatrix}=0$ का एक मूल 5 हो, तो समीकरण के अन्य दो मूल होंगे [Karnataka CET 2002]

(a) – 2 और 7 (b) – 2 और –7

(c) 2 और 7 (d) 2 और –7

8. यदि a, b, c तथा d सम्मिश्र संख्याएँ हैं, तब सारणिक

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & a+b+c+d & ab+cd \\ a+b+c+d & 2(a+b)(c+d) & ab(c+d)+cd(a+b) \\ ab+cd & ab(c+d)+cd(a+d) & 2abcd \end{vmatrix}$$

(a) a, b, c तथा d से परतंत्र है

(b) a,b,c तथा d से स्वतंत्र है

(c) a व c से परतंत्र है तथा b व d से स्वतंत्र है

(d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि $n\neq 3k$ और $1,\omega,\omega^2$ इकाई के घनमूल हैं, तो $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \omega^n & \omega^{2n} \\ \omega^{2n} & 1 & \omega^n \\ \omega^n & \omega^{2n} & 1 \end{vmatrix}$ का मान है [Pb. CET 1991; RPET 2001]

(a) 0 (b) ω

(c) ω^2 (d) 1

10. यदि $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{vmatrix}=0$, तब [Karnataka CET 1999]

(a) a, इकाई का एक घनमूल है

(b) b, इकाई का एक घनमूल है

(c) $\left(\frac{a}{b}\right)$, इकाई का एक घनमूल है

(d) $\left(\frac{a}{b}\right)$, –1 का एक घनमूल है

11. किसी ΔABC में, यदि $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & c & a \\ 1 & b & c \end{vmatrix}=0$, तो $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=$ [Karnataka CET 2003]

(a) $\frac{9}{4}$ (b) $\frac{4}{9}$

(c) 1 (d) $3\sqrt{3}$

12. धनात्मक संख्यायें x,y और z के लिये सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & \log_x y & \log_x z \\ \log_y x & 1 & \log_y z \\ \log_z x & \log_z y & 1 \end{vmatrix}$ का आंकिक मान है [IIT 1993; UPSEAT 2002]

(a) 0 (b) 1

(c) $\log_e xyz$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. किसी गुणोत्तर श्रेणी के pवें, qवें तथा rवें पद क्रमशः l,m,n हों, तो $\begin{vmatrix} \log l & p & 1 \\ \log m & q & 1 \\ \log n & r & 1 \end{vmatrix}$ का मान होगा [AIEEE 2002]

(a) –1 (b) 2

(c) 1 (d) 0

14. यदि $x^a y^b = e^m, x^c y^d = e^n, \Delta_1 = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}$ और $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ हो, तब x और y के मान क्रमशः होंगे [Tamilnadu (Engg.) 2002]

(a) Δ_1/Δ_3 और Δ_2/Δ_3

(b) Δ_2/Δ_1 और Δ_3/Δ_1

(c) $\log(\Delta_1/\Delta_3)$ और $\log(\Delta_2/\Delta_3)$

(d) e^{Δ_1/Δ_3} और e^{Δ_2/Δ_3}

15. यदि a,b,c धनात्मक हैं तथा सभी बराबर नहीं हैं, तब सारणिक $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ का मान है [IIT 1982]

(a) ऋणात्मक (b) धनात्मक

(c) a,b,c पर निर्भर (d) इनमें से कोई नहीं

16. यदि $x = cy + bz$, $y = az + cx$, $z = bx + ay$ (जहाँ x, y, z सभी शून्य नहीं हैं) का $x = 0, y = 0, z = 0$ के अतिरिक्त भी कोई हल है, तो a, b और c में सम्बन्ध है [IIT 1978; MP PET 1998]

(a) $a^2 + b^2 + c^2 + 3abc = 0$

(b) $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 0$

(c) $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$

(d) $a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab = 1$

17. यदि $|A|$ तीसरे क्रम के वर्ग आव्यूह A के सारणिक के मान को निरुपित करता हो, तो $|-2A| =$ [MP PET 1987, 89, 92, 2000]

(a) $-8|A|$ (b) $8|A|$

(c) $-2|A|$ (d) इनमें से कोई नहीं

18. यदि समीकरण निकाय $ax + y + z = 0$, $x + by + z = 0$ और $x + y + cz = 0$, जहाँ $a,b,c \neq 1$ का एक अशून्य हल है, तो $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c}$ का मान है [Orissa JEE 2005]

(a) −1 (b) 0

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

19. यदि A कोटि 3 का एक आव्यूह है और $|A| = 8$, तो $|adj\ A| =$ [DCE 1999; Karnataka CET 2002]

(a) 1 (b) 2

(c) 2^3 (d) 2^6

20. आव्यूह $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & a-4 \\ 1 & -2 & a+1 \end{bmatrix}$ की जाति (Rank) होगी [Roorkee Qualifying 1998]

(a) 1, यदि $a = 6$ (b) 2, यदि $a = 1$

(c) 3, यदि $a = 2$ (d) 1, यदि $a = -6$

21. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, तो $A^2 =$ [RPET 2001]

(a) $\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -\cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}$

22. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ और I, कोटि 3 का इकाई आव्यूह है, तो $(A^2 + 9I)$ का मान होगा [RPET 1999]

(a) $2A$ (b) $4A$

(c) $6A$ (d) इनमें से कोई नहीं

23. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta/2 \\ -\tan\theta/2 & 1 \end{bmatrix}$ और $AB = I$, तो $B =$ [MP PET 1995, 98]

(a) $\cos^2\frac{\theta}{2}.A$ (b) $\cos^2\frac{\theta}{2}.A^T$

(c) $\cos^2\frac{\theta}{2}.I$ (d) इनमें से कोई नहीं

24. यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ और I, कोटि 2 का तत्समक आव्यूह हो, तो $(A-2I)(A-3I) =$ [RPET 2002]

(a) I (b) O

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

25. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, तो [Kurukshetra CEE 2002]

(a) $A^3 + 3A^2 + A - 9I_3 = O$ (b) $A^3 - 3A^2 + A + 9I_3 = O$

(c) $A^3 + 3A^2 - A + 9I_3 = O$ (d) $A^3 - 3A^2 - A + 9I_3 = O$

26. यदि $3X + 2Y = I$ और $2X - Y = O$, जहाँ I और O क्रमशः कोटि 3 के इकाई तथा शून्य आव्यूह हैं, तो [MP PET 1995]

(a) $X = \frac{1}{7}, Y = \frac{2}{7}$ (b) $X = \frac{2}{7}, Y = \frac{1}{7}$

(c) $X = \frac{1}{7}I, Y = \frac{2}{7}I$ (d) $X = \frac{2}{7}I, Y = \frac{1}{7}I$

27. माना $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ और $C = [3\ 1\ 2]$, तो निम्न में से कौन सा परिभाषित नहीं है [MP PET 1992]

(a) $B'B$ (b) CAB

(c) $A + B'$ (d) $A^2 + A$

28. यदि A, 3 × 4 कोटि का आव्यूह है और B एक आव्यूह इस प्रकार है कि $A'B$ और BA' दोनों परिभाषित हैं, तब B की कोटि है [Himanchal Pradesh PET 1986]

(a) 3 × 4 (b) 3 × 3

(c) 4 × 4 (d) 4 × 3

29. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, तो $AA' =$ [MP PET 1992]

(a) [14] (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं

30. यदि वर्ग आव्यूह A तथा B के परिवर्त आव्यूह क्रमशः A' तथा B हों, तो $(AB)' =$ [RPET 1992, 94]

(a) $A'B'$ (b) $B'A'$
(c) AB' (d) BA'

31. यदि $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, तो $A^n =$

(a) $\begin{bmatrix} na & 0 & 0 \\ 0 & nb & 0 \\ 0 & 0 & nc \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं

32. $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम है [EAMCET 1989]

(a) $\begin{bmatrix} 7 & 3 & -26 \\ 3 & 1 & -11 \\ -5 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 7 & 3 & -26 \\ 3 & 1 & 11 \\ -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 7 & 3 & -26 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं

33. प्रत्येक वास्तविक संख्या $-1 < x < 1$ के लिये माना $A(x)$ एक आव्यूह $(1-x)^{-1}\begin{bmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{bmatrix}$ है और $z = \frac{x+y}{1+xy}$ हो, तो

(a) $A(z) = A(x) + A(y)$ (b) $A(z) = A(x)[A(y)]^{-1}$
(c) $A(z) = A(x)\,A(y)$ (d) $A(z) = A(x) - A(y)$

34. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ और उसका प्रतिलोम $A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ हो, तो a_{23} का मान है

(a) $\frac{21}{20}$ (b) $\frac{1}{5}$
(c) $-\frac{2}{5}$ (d) $\frac{2}{5}$

35. यदि $F(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, जहाँ $\alpha \in R$.

तब $[F(\alpha)]^{-1} =$ [AMU 2000; J & K 2005]

(a) $F(-\alpha)$ (b) $F(\alpha^{-1})$
(c) $F(2\alpha)$ (d) इनमें से कोई नहीं

36. यदि A और B दो वर्ग आव्यूह इस प्रकार हैं कि $B = -A^{-1}BA$, तो $(A+B)^2 =$ [EAMCET 2000]

(a) 0 (b) $A^2 + B^2$
(c) $A^2 + 2AB + B^2$ (d) $A + B$

37. सभी 2×2 आव्यूहों का समुच्चय वास्तविक संख्याओं के लिये आव्यूह गुणन के अंतर्गत एक समूह नहीं है, क्योंकि [Karnataka CET 2000]

(a) तत्समक अवयव का कोई अस्तित्व नहीं होता है
(b) संवरक नियम संतुष्ट होता है
(c) साहचर्य नियम संतुष्ट नहीं होता है
(d) व्युत्क्रम अभिगृहीत संतुष्ट नहीं होता है

38. यदि A, B, C तीन वर्ग आव्यूह इस प्रकार हैं कि $AB = AC \Rightarrow B = C$, तो आव्यूह A सदैव है [MP PET 1989; Karnataka CET 1992]

(a) एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह (b) एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह
(c) एक लाम्बिक आव्यूह (d) एक विकर्ण आव्यूह

39. निम्न में से कौन सा आव्यूह विषम-सममित है [MP PET 1992]

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -6 \\ -5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -4 & 1 & -6 \\ -5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & -6 \\ -5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} i+1 & 4 & 5 \\ -4 & i & -6 \\ -5 & 6 & i \end{bmatrix}$

40. यदि A एक वर्ग आव्यूह हो तथा $A + A^T$ एक सममित आव्यूह हो, तो $A - A^T =$ [RPET 1996, 97]

(a) इकाई आव्यूह (b) सममित आव्यूह
(c) विषम सममित आव्यूह (d) शून्य आव्यूह

41. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ है [MP PET 1988]

(a) ऐकिक (Unitary) (b) लाम्बिक (Orthogonal)
(c) शून्यभावी (Nilpotent) (d) अन्तर्वलनीय (Involutory)

42. आव्यूह $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ है [Kurukshetra CEE 2002]

(a) लाम्बिक (Orthogonal) (b) अन्तर्वलनीय (Involutory)
(c) वर्गसम (Idempotent) (d) शून्यभावी (Nilpotent)

43. $n \times n$ के उपरित्रिभुजीय आव्यूह में न्यूनतम शून्यों की संख्या होगी [RPET 1999]

(a) $n(n-1)/2$ (b) $n(n+1)/2$
(c) $2n(n-1)/2$ (d) इनमें से कोई नहीं

44. यदि किसी आव्यूह तथा उसके परिवर्त आव्यूह का गुणनफल इकाई आव्यूह हो, तो आव्यूह के सारणिक का मान होगा [AMU 2001]

(a) –1 (b) 0
(c) ± 1 (d) 1

45. एक तृतीय कोटि के सारणिक में, प्रथम स्तम्भ के प्रत्येक अवयव को दो पदों के योग के रुप में, द्वितीय स्तम्भ के प्रत्येक अवयव को तीन पदों के योग के रुप में तथा तृतीय स्तम्भ के प्रत्येक अवयव को चार पदों के योग के रुप में लिखा गया है, तब इस सारणिक को n विभिन्न सारणिकों के योग के रुप में लिख सकते हैं, जहाँ n का मान है [Roorkee 1993]

(a) 1 (b) 9
(c) 16 (d) 24

Answers

सारणिक का प्रसार, सारणिक के रूप में समीकरण का हल एवं सारणिक के गुणधर्म

1	b	2	a	3	d	4	c	5	b
6	d	7	a	8	a	9	b	10	c
11	b	12	d	13	b	14	d	15	d
16	b	17	d	18	b	19	a	20	c
21	c	22	b	23	c	24	d	25	c
26	a	27	d	28	b	29	a	30	d
31	b	32	a	33	a	34	a	35	a
36	a	37	b	38	d	39	c	40	d
41	b	42	b	43	c	44	d	45	d
46	d	47	d	48	a	49	a	50	b
51	a	52	b	53	b	54	b	55	a
56	d	57	b	58	c	59	b	60	a
61	a	62	b	63	d	64	d	65	c
66	a	67	b	68	c	69	a	70	a
71	d	72	b	73	b	74	c	75	b
76	d	77	a	78	b	79	c	80	b
81	d	82	b	83	c	84	b	85	d
86	b	87	c	88	c	89	b	90	a
91	d	92	b	93	b	94	b	95	b
96	a	97	b	98	c	99	c	100	b
101	a	102	a	103	a	104	a	105	a
106	a	107	d	108	b	109	d	110	d
111	a	112	b	113	d	114	c	115	c
116	b	117	a	118	b	119	d	120	c
121	a	122	c	123	b	124	d		

उपसारणिक और सहखण्ड, सारणिक गुणन

1	b	2	b	3	d	4	b	5	b
6	a	7	b	8	b	9	c	10	b

रैखिक समीकरणों का निकाय, कुछ विशेष सारणिक, सारणिक का अवकलन तथा समाकलन

1	d	2	c	3	c	4	d	5	d
6	b	7	b	8	a	9	d	10	d
11	a	12	d	13	b	14	c	15	a
16	a	17	c	18	c	19	c	20	d
21	a	22	c	23	b	24	b	25	a
26	a	27	c	28	d	29	b	30	a
31	d	32	d	33	a	34	b	35	c
36	c	37	c	38	d				

आव्यूह के प्रकार, आव्यूह का बीजगणित

1	b	2	d	3	c	4	c	5	a
6	a	7	d	8	a	9	b	10	a
11	b	12	b	13	a	14	b	15	d
16	b	17	b	18	c	19	c	20	c
21	b	22	c	23	c	24	b	25	b
26	c	27	d	28	b	29	c	30	b
31	d	32	b	33	c	34	b	35	d
36	c	37	c	38	d	39	a	40	a
41	b	42	b	43	c	44	a	45	b
46	d	47	b	48	a	49	a	50	d
51	b	52	b	53	b	54	a	55	b
56	b	57	d	58	a	59	b	60	b
61	c	62	c	63	d	64	d	65	b
66	b	67	a, b	68	d	69	d	70	a
71	b	72	c	73	a	74	c	75	c
76	b	77	c	78	b	79	c	80	a
81	c	82	b	83	b	84	a	85	b
86	a	87	b	88	d	89	b	90	b
91	d	92	a	93	b	94	a	95	b
96	b	97	c	98	a	99	c	100	d
101	a	102	a	103	d	104	a	105	c
106	b	107	c						

विशेष प्रकार के आव्यूह, परिवर्त आव्यूह, सहखण्डज व व्युत्क्रम **आव्यूह**

1	c	2	d	3	a	4	b	5	a
6	b	7	b	8	b	9	c	10	b
11	c	12	b	13	a	14	b	15	a
16	b	17	a	18	d	19	a	20	d
21	b	22	a	23	b	24	d	25	b
26	a	27	a	28	d	29	a	30	b
31	b	32	b	33	a	34	c	35	a
36	a	37	a	38	b	39	c	40	c
41	a	42	b	43	b	44	c	45	a
46	b	47	b	48	d	49	a	50	c
51	b	52	b	53	d	54	b	55	b
56	a	57	c	58	b	59	b	60	b
61	b	62	b	63	d	64	c	65	a
66	b	67	b	68	b	69	b	70	d
71	b	72	a	73	d	74	b	75	a
76	b	77	a	78	a	79	d	80	a
81	d	82	c	83	a	84	d	85	a
86	d	87	a	88	b	89	b	90	c
91	c	92	a	93	c	94	a	95	d
96	a	97	c						

सारणिक व आव्यूह के बीच सम्बन्ध, आव्यूह की जाति (रैंक) तथा समीकरणों का हल

1	a	2	a	3	a	4	d	5	a
6	a	7	c	8	b	9	c	10	c
11	c	12	a	13	a	14	a	15	d
16	b	17	a	18	d	19	a	20	b
21	b	22	a	23	b	24	c	25	a

Critical Thinking Questions

1	b	2	d	3	c	4	b	5	b
6	a	7	d	8	b	9	a	10	d
11	a	12	a	13	d	14	d	15	a
16	c	17	a	18	c	19	d	20	b, d
21	c	22	d	23	b	24	b	25	d
26	c	27	c	28	a	29	c	30	b
31	c	32	d	33	c	34	c	35	a
36	b	37	d	38	b	39	a	40	c
41	c	42	a	43	a	44	c	45	d

Answers and Solutions

सारणिक का प्रसार, सारणिक के रूप में समीकरण का हल एवं सारणिक के गुणधर्म

1. (b) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ x-y & y-z & z-x \\ p-q & q-r & r-p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & y-z & z-x \\ 0 & q-r & r-p \end{vmatrix} = 0$

[$C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ के द्वारा]

2. (a) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ac \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-b & (a-b)(a+b+c) \\ 0 & b-c & (b-c)(a+b+c) \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix}$

$\begin{Bmatrix} R_1 \to R_1 - R_2 \\ R_2 \to R_2 - R_3 \end{Bmatrix}$ के द्वारा

$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & a+b+c \\ 0 & 1 & a+b+c \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = 0$, $\{\because R_1 \equiv R_2\}$.

3. (d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -x & x & 1 \\ 0 & -y & 1+y \end{vmatrix} = xy$,

$\begin{pmatrix} C_1 \to C_1 - C_2 \\ C_2 \to C_2 - C_3 \end{pmatrix}$.

4. (c) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$, $\begin{pmatrix} R_1 \to R_1 - R_2 \\ R_2 \to R_2 - R_3 \end{pmatrix}$ के द्वारा

$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & a-c \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$, $(R_1 \to R_1 - R_2$ के द्वारा$)$

$= (a-b)(b-c)(a-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

$= (a-b)(b-c)(a-c).(-1) = (a-b)(b-c)(c-a)$.

5. (b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2x & 5x^2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 0 & -2-2x & 5(1-x^2) \\ 1 & 2x & 5x^2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{pmatrix} R_1 \to R_1 - R_2 \\ R_2 \to R_2 - R_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 3.2.5.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -(1+x) & 1-x^2 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (1+x)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1-x \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow x+1=0$ या $x-2=0 \Rightarrow x=-1, 2$.

ट्रिक: जाँच द्वारा स्पष्ट है $x=-1, 2$ समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं।

$x=-1$ पर, $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0$, (चूँकि $R_2 \equiv R_3$)

$x=2$ पर, $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 20 \end{vmatrix} = 0$, (चूँकि $R_1 \equiv R_3$).

6. (d) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & \pi \\ 1 & 5 & \sqrt{5} \\ 1 & 5 & e \end{vmatrix} = 0$, ($\because \log_a a = 1$ और $5C_1 \equiv C_2$).

7. (a) स्पष्टतः $x=0$ रखने पर,

$\Delta_{x=0} = \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = a(bc) - b(ac) = 0$

$\therefore$ $x=0$ दिए गए समीकरण का मूल है।

वैकल्पिक: सारणिक का प्रसार करने पर,

$\Delta \equiv -(x-a)[-(x+b)(x-c)] + (x-b)[(x+a)(x+c)] = 0$

$\Rightarrow 2x^3 - (2\Sigma ab)x = 0$

$\Rightarrow$ या तो $x=0$ या $x^2 = \sum ab$, (अर्थात् $x = \pm\sqrt{\sum ab}$)

पुनः $x=0$ दिये गये समीकरण को सन्तुष्ट करता है।

8. (a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$, ($C_1 \to C_1 + C_2$ के द्वारा)

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 9 & 6 \end{vmatrix}$, ($C_2 \to C_2 + C_3$ के द्वारा)

$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 10 & 3 & 6 \end{vmatrix}$, ($C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ के द्वारा)

लेकिन $\neq \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

9. (b) $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\omega+\omega^2 & \omega & \omega^2 \\ 1+\omega+\omega^2 & \omega^2 & 1 \\ 1+\omega+\omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & \omega & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & 1 \\ 0 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0$.

10. (c) $\begin{vmatrix} a-x & c & b \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} a+b+c-x & c & b \\ a+b+c-x & b-x & a \\ a+b+c-x & a & c-x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x-\sum a)\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & b-x & a \\ 1 & a & c-x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow x = \sum a = 0$, (संकल्पना से)

या $1\{(b-x)(c-x)-a^2\} - c\{c-x-a\} + b\{a-b+x\} = 0,$
(सारणिक का प्रसार करने पर)

या $x^2 - (a^2+b^2+c^2) + (ab+bc+ca) = 0$

या $x^2 - \left(\sum a^2\right) - \frac{1}{2}\left(\sum a^2\right) = 0$

$\left\{\because a+b+c=0 \Rightarrow (a+b+c)^2 = 0\right.$

$\left.\Rightarrow \sum a^2 + 2\sum ab = 0 \Rightarrow \sum ab = -\frac{1}{2}\sum a^2\right\}$

या $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}\sum a^2}$

$\therefore$ अतः हल है, $x = 0$ या $\pm\sqrt{\frac{3}{2}\sum a^2}$.

ट्रिक: $a=1, b=-1$ और $c=0$ रखने पर ये प्रतिबन्ध $a+b+c=0$ को सन्तुष्ट करते हैं।

अब, $\begin{vmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ 0 & -1-x & 1 \\ -1 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (1-x)\{x(1+x)-1\} + 1(1+x) = 0$

$\Rightarrow (1-x)\{x^2+x-1\} + x + 1 = 0 \Rightarrow x(x^2-3) = 0$

अब इन्हें विकल्पों में रखने पर विकल्प (c) प्राप्त होता है, जिससे समान मान अर्थात् 0, $\pm\sqrt{3}$ प्राप्त होता है।

11. (b) $\Delta = (2+i)\begin{vmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 1+2i & 1+i \\ 1 & 2 & 1-i \end{vmatrix}$

$= (2+i)\begin{vmatrix} 0 & -2i & -1 \\ 0 & -1+2i & 2i \\ 1 & 2 & 1-i \end{vmatrix}, \begin{pmatrix} R_1 \to R_1 - R_2 \\ R_2 \to R_2 - R_3 \end{pmatrix}$ के द्वारा

$= (2+i)\{-4i^2 + (-1+2i)\} = (2+i)(4-1+2i)$

$= (2+i)(3+2i) = 4+7i$.

12. (d) $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ द्वारा,

$(9+x)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & x+2 & 5 \\ 1 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x+9)\begin{vmatrix} 0 & 1-x & 0 \\ 0 & -(1-x) & 1-x \\ 1 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x+9)\ (1-x)^2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow x = 1, 1, -9$.

13. (b) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -\Sigma a & 0 & 2a \\ \Sigma a & -\Sigma a & 2b \\ 0 & \Sigma a & c-a-b \end{vmatrix}, \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 - C_2 \\ C_2 \to C_2 - C_3 \end{pmatrix}$

$= (\Sigma a)^2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 1 & -1 & 2b \\ 1 & 1 & c-a-b \end{vmatrix} = (\Sigma a)^3$, (प्रसार करने पर)

$= (a+b+c)^3$.

14. (d) $\begin{vmatrix} a+b & a+2b & a+3b \\ a+2b & a+3b & a+4b \\ a+4b & a+5b & a+6b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & a+2b & a+3b \\ b & b & b \\ 2b & 2b & 2b \end{vmatrix} = 0,$

$\left\{\begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_2 \end{matrix}\right.$ के द्वारा$\Big\}$

ट्रिक: $a=1, b=1$ रखने पर, सारणिक

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$. स्पष्टतः उत्तर (d) है।

नोट : $a, b, c,$....... का मान लेते समय विद्यार्थी इस बात का ध्यान रखें कि इन मानों के लिए विकल्प (a), (b), (c) व (d) के मान समान नहीं होने चाहिए।

15. (d) $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2c & -2b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$

$\{R_1 \to R_1 - (R_2 + R_3)$ के द्वारा $\}$

$= 2c.b(a+b-c) - 2b.c(b-c-a) = 4abc$.

16. (b) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3+x & 0 & 1 \\ 3+x & x & 1 \\ 3+x & -x & 1+x \end{vmatrix} = 0, \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 + C_2 + C_3 \\ C_2 \to C_2 - C_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & -x & 1+x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & -x & x \end{vmatrix} = 0, \begin{pmatrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (x+3)x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, 0, -3$.

ट्रिक : स्पष्टतः समीकरण 3 घात का है। अतः इसके तीन हल अवश्य होने चाहिये इसलिए (b) के लिए निरीक्षण करेंगें।

17. (d) $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ b & x+c & a \\ c & a & x+b \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x+c & a \\ 1 & a & x+b \end{vmatrix} = 0$,

$(C_1 \to C_1 + C_2 + C_3)$

$\Rightarrow x = -(a+b+c)$ समीकरण का एक मूल है।

18. (b) $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 & x+4 \\ -2 & -3 & x+8 \\ -3 & -4 & x+14 \end{vmatrix}$, $\left(\begin{matrix} C_1 \to C_1 - C_2 \\ C_2 \to C_2 - C_3 \end{matrix} \text{ के द्वारा}\right)$

$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & x \\ -2 & -1 & x \\ -3 & -1 & x+2 \end{vmatrix}$, $\left(\begin{matrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 + 4C_1 \end{matrix} \text{ के द्वारा}\right)$

$= -(-x-2+x) + 1.(-2x-4+3x) + x(2-3)$

$= 2 + x - 4 - x = -2$.

ट्रिक : $x = 1$ रखने पर, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \\ 8 & 11 & 15 \end{vmatrix} = -2$.

नोट : चूँकि इसमें एक विकल्प ''इनमें से कोई नहीं'' है। इसलिए x के एक से अधिक विभिन्न मानों के लिए हमें निरीक्षण करना चाहिए। अब $x = -1$ रखने पर,

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 6 & 9 & 13 \end{vmatrix} = -1(26-42) + 3(18-24) = -2$

अतः उत्तर (b) है।

19. (a) $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{vmatrix} = 1(1+c^2) - a(-a+bc) + b(ac+b)$

$= 1 + a^2 + b^2 + c^2$.

20. (c) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$, जबकि $a = b, b = c, c = a$

अतः $(a-b), (b-c), (c-a)$ समीकरण के गुणनखण्ड हैं। चूँकि सारणिक a, b, c में सममित है एवं चतुर्थ घात का है अतः $(a+b+c)$ भी इसका गुणनखण्ड है।

अतः, $\Delta = k(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ ......(i)

समीकरण (i) में bc^3 की दोनों पक्षों में तुलना करने पर, $1 = k(-1)(-1) \Rightarrow k = 1$

$\therefore \Delta = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

ट्रिक: $a = 1, b = 2, c = 3$ रखने पर,

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} = 1(30) - 1(24) + 1(8-2) = 12$, जो विकल्प (c) द्वारा प्राप्त होता है।

अर्थात्, $(1+2+3)(1-2)(2-3)(3-1) = 12$.

21. (c) $\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$, (चूंकि विषम कोटि के विषम सममित सारणिक का मान 0 होता है।).

22. (b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$,

$(R_1 \to R_1 + R_2 + R_3)$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & b-c & c-a \\ c & c-a & a-b \end{vmatrix}$

$= 3abc - a^3 - b^3 - c^3$, (हल करने के पश्चात्)।

23. (c) $\Delta = (b-a)(b-a).\begin{vmatrix} b & b-c & c \\ a & a-b & b \\ c & c-a & a \end{vmatrix}$

$= (a-b)^2\begin{vmatrix} b & b & c \\ a & a & b \\ c & c & a \end{vmatrix} = 0$, $[C_2 \to C_2 + C_3$ द्वारा$]$

24. (d) $\begin{vmatrix} 1/a & a^2 & bc \\ 1/b & b^2 & ca \\ 1/c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 1 & a^3 & abc \\ 1 & b^3 & abc \\ 1 & c^3 & abc \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} 1 & a^3 & 1 \\ 1 & b^3 & 1 \\ 1 & c^3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

25. (c) $\Delta = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & c^2+a^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ b^2 & c^2+a^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

{संक्रिया $R_1 \to R_1 - (R_2 + R_3)$ के द्वारा}

$= -2\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \\ c^2 & 0 & a^2 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix}$ के द्वारा

$= -2\{-c^2(b^2a^2) + b^2(-c^2a^2)\} = 4a^2b^2c^2$.

ट्रिक : $a = 1, b = 2, c = 3$ रखकर सही विकल्प की जाँच कर सकते हैं।

26. (a) $\Delta = xyz\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{x} & \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} & 1+\frac{1}{y} & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{z} & 1+\frac{1}{z} \end{vmatrix}$

$= xyz\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{y} & 1+\frac{1}{y} & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{z} & 1+\frac{1}{z} \end{vmatrix}$,

$(R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ के द्वारा$)$

$= xyz\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/y & 1 & 0 \\ 1/z & 0 & 1 \end{vmatrix}$,

$\left(\begin{matrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \end{matrix} \text{ के द्वारा}\right)$

$= xyz\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix} = xyz\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$

ट्रिक: $x=1, y=2$ और $z=3$ रखने पर,

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 3 & 1\\1 & 1 & 4\end{vmatrix} = 2(11)-1(3)+1(1-3) = 17$$

विकल्प (a) से, $1\times 2\times 3\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = 17$ प्राप्त होता है।

27. (d) $\Delta = \begin{vmatrix}x+1 & \omega & \omega^2\\ \omega & x+\omega^2 & 1\\ \omega^2 & 1 & x+\omega\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x+1+\omega+\omega^2 & \omega & \omega^2\\ x+1+\omega+\omega^2 & x+\omega^2 & 1\\ x+1+\omega+\omega^2 & 1 & x+\omega\end{vmatrix}$

$(C_1 \to C_1 + C_2 + C_3)$

$= x\begin{vmatrix}1 & \omega & \omega^2\\1 & x+\omega^2 & 1\\1 & 1 & x+\omega\end{vmatrix}, \quad (\because 1+\omega+\omega^2=0)$

$= x[1\{(x+\omega^2)(x+\omega)-1\}+\omega\{1-(x+\omega)\}$
$+\omega^2\{1-(x+\omega^2)\}]$

$= x(x^2+\omega x+\omega^2 x+\omega^3-1+\omega-\omega x-\omega^2$
$+\omega^2-\omega^2 x-\omega^4)$

$= x^3, \quad (\because \omega^3=1).$

28. (b) $\begin{vmatrix}y+z & x & y\\z+x & z & x\\x+y & y & z\end{vmatrix} = (x+y+z)\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\z+x & z & x\\x+y & y & z\end{vmatrix}$

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ द्वारा

$= (x+y+z)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\x & z & x\\x & y & z\end{vmatrix}$; $C_1 \to C_1 - C_2$ द्वारा

$= (x+y+z).\{(z^2-xy)-(xz-x^2)+(xy-xz)\}$

$= (x+y+z)(x-z)^2 \Rightarrow k=1.$

ट्रिक: $x=1, y=2, z=3$ रखने पर,

$$\begin{vmatrix}5 & 1 & 2\\4 & 3 & 1\\3 & 2 & 3\end{vmatrix} = 5(7)-1(12-3)+2(8-9)$$

$= 35-9-2 = 24$ और $(x+y+z)(x-z)^2$

$=(6)(-2)^2 = 24, \therefore k = \frac{24}{24} = 1.$

29. (a) $\begin{vmatrix}x & 3 & 7\\2 & x & 2\\7 & 6 & x\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x+9)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\2 & x & 2\\7 & 6 & x\end{vmatrix} = 0,$

$(R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ के द्वारा)

$\Rightarrow (x+9)\{(x^2-12)-(2x-14)+(12-7x)\} = 0$

$\Rightarrow (x+9)(x^2-9x+14) = 0 \Rightarrow (x+9)(x-2)(x-7) = 0$

अतः अन्य दो मूल हैं, $x = 2, 7$.

30. (d) यह स्पष्ट है।

31. (b) $\Delta = \begin{vmatrix}2(a+b+c) & 0 & a+b+c\\c+a & b-c & b\\a+b & c-a & c\end{vmatrix},$

$(R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ द्वारा)

$\Delta = (a+b+c).\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\c+a & b-c & b\\a+b & c-a & c\end{vmatrix}$ का प्रसार करने पर,

$\Delta = -(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\Delta = -(a^3+b^3+c^3-3abc) = 3abc-a^3-b^3-c^3.$

ट्रिक: $a=1, b=2, c=3$ रखकर परीक्षण करें।

32. (a) दिए सारणिक को दो सारणिकों में विभाजित करने पर,

$\Delta = \begin{vmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{vmatrix} + abc\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{vmatrix} = 0$

$= (1+abc)[(a-b)(b-c)(c-a)] = 0$

क्योंकि *a, b, c* भिन्न भिन्न हैं, अतः दूसरा गुणनफल शून्य नही हो सकता हैं। अतः विकल्प (a), $1+abc=0$ सही है।

33. (a) $\Delta \equiv \begin{vmatrix}2 & 2\omega & -\omega^2\\1 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2+2\omega+2\omega^2 & 2\omega & -\omega^2\\1+1-2 & 1 & 1\\1-1-0 & -1 & 0\end{vmatrix},$

$(C_1 \to C_1 + C_2 - 2C_3)$

$= \begin{vmatrix}0 & 2\omega & -\omega^2\\0 & 1 & 1\\0 & -1 & 0\end{vmatrix} = 0.$

34. (a) $\begin{vmatrix}19 & 17 & 15\\9 & 8 & 7\\1 & 1 & 1\end{vmatrix} = 19-34+15 = 0.$

35. (a) दिये अनुसार, $\begin{vmatrix}x+1 & x+2 & x+3\\x+2 & x+3 & x+4\\x+a & x+b & x+c\end{vmatrix} = 0$

$= \begin{vmatrix}-1 & -1 & x+3\\-1 & -1 & x+4\\a-b & b-c & x+c\end{vmatrix} = 0, \left(\begin{matrix}C_1 \to C_1 - C_2\\C_2 \to C_2 - C_3\end{matrix}\text{ के द्वारा}\right)$

$\Rightarrow \begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\-1 & -1 & x+4\\a-b & b-c & x+c\end{vmatrix} = 0, (R_1 \to R_1 - R_2$ के द्वारा)

$\Rightarrow (-1)(-b+c+a-b) = 0$

$\Rightarrow 2b-a-c = 0 \Rightarrow a+c = 2b$, अर्थात् a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं।

ट्रिक: इस प्रकार के प्रश्न में *x* का उपयुक्त मान अर्थात् $x=0$ रखने पर, $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\\a & b & c\end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 1(3c-4b)-2(2c-4a)+3(2b-3a) = 0$

$\Rightarrow -c+2b-a = 0 \Rightarrow 2b = a+c$

अतः अभीष्ट परिणाम प्राप्त होता है।

36. (a) $\begin{vmatrix} 1 & \omega & -\omega^2/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

$= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \omega & \omega^2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, ($C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ से)

37. (b) चूँकि यह λ में सर्वसमिका है। अतः यह λ के प्रत्येक मान के लिए सन्तुष्ट होगी अब दिए गए समीकरण में $\lambda = 0$ रखने पर, $t = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -12 + 30 = 18$.

38. (d) $\begin{vmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & 11 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & 11 & -1 \end{vmatrix}$, { $R_1 \to R_1 + R_3$ के द्वारा}

$= -5(1+4) = -25$.

39. (c) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}$,

$(C_2 \to C_2 + C_3)$

$= 0$, $(\because C_1 \equiv C_2)$.

40. (d) R_1 को a से, R_2 को b से तथा R_3 को c से गुणा करने पर,

$\Delta = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} ab^2c^2 & abc & ab+ac \\ a^2bc^2 & abc & bc+ab \\ a^2b^2c & abc & ac+bc \end{vmatrix}$

$= \frac{a^2b^2c^2}{abc}\begin{vmatrix} bc & 1 & ab+ac \\ ac & 1 & bc+ab \\ ab & 1 & ac+bc \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} bc & 1 & \Sigma ab \\ ac & 1 & \Sigma ab \\ ab & 1 & \Sigma ab \end{vmatrix}$,

{चूँकि $C_3 \to C_3 + C_1$ }

$= abc.\Sigma ab\begin{vmatrix} bc & 1 & 1 \\ ca & 1 & 1 \\ ab & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, [चूंकि $C_2 \equiv C_3$].

ट्रिक: $a = 1, b = 2, c = 3$ रखकर परीक्षण करें।

41. (b) $\Delta \equiv \begin{vmatrix} a & b & a\alpha+b \\ b & c & b\alpha+c \\ a\alpha+b & b\alpha+c & 0 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a & b & a\alpha+b \\ b & c & b\alpha+c \\ 0 & 0 & -(a\alpha^2+2b\alpha+c) \end{vmatrix}$, $R_3 \to R_3 - \alpha R_1 - R_2$ द्वारा

$= a\{-c(a\alpha^2+2b\alpha+c)-0\} - b\{-b(a\alpha^2+2b\alpha+c)-0\}$,

(C_1 के अनुदिश प्रसार करने पर)

$= (b^2-ac)(a\alpha^2+2b\alpha+c)$

अतः, $\Delta = 0$, यदि या तो $b^2 - ac = 0$

या $a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0$

अर्थात्, या तो a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हैं

या $a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0$.

ट्रिक: $\alpha = 0$ रखने पर,

$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & c & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ b & c & -c \end{vmatrix} = -c(ac-b^2) = 0$

अतः अभीष्ट परिणाम प्राप्त होता है।

42. (b) $\begin{vmatrix} 31 & 37 & 92 \\ 31 & 58 & 71 \\ 31 & 105 & 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 31 & 37 & 92 \\ 0 & 21 & -21 \\ 0 & 47 & -47 \end{vmatrix}$; $R_3 \to R_3 - R_2$, $R_2 \to R_2 - R_1$ के द्वारा

$= \begin{vmatrix} 31 & 129 & 92 \\ 0 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & -47 \end{vmatrix} = 0$; { $C_2 \to C_2 + C_3$ के द्वारा}.

43. (c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 14 & 20 \end{vmatrix} = 2 - 8 + 6 = 0$.

44. (d) $\begin{vmatrix} 1 & k & 3 \\ 3 & k & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = \frac{33}{8}$.

45. (d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ b+c-a & c+a-b & a+b-c \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b-a & c-b & a+b \\ 2(b-a) & 2(c-b) & a+b-c \end{vmatrix} = 0$.

46. (d) $\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ kx & ky & kz \\ kp & kq & kr \end{vmatrix} = k^3\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = k^3\Delta$.

47. (d) $\begin{vmatrix} a-1 & a & bc \\ b-1 & b & ca \\ c-1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & bc \\ b & b & ca \\ c & c & ab \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b-a & b^2-a^2 & 0 \\ c-a & c^2-a^2 & 0 \end{vmatrix}$,

{ $R_2 \to R_2 - R_1; R_3 \to R_3 - R_1$ द्वारा}

$= -(a-b)(b-c)(c-a)$.

48. (a) $\begin{vmatrix} a_1 & ma_1 & b_1 \\ a_2 & ma_2 & b_2 \\ a_3 & ma_3 & b_3 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$, $\{\because C_1 \equiv C_2\}$.

49. (a) $\begin{vmatrix} 265 & 240 & 219 \\ 240 & 225 & 198 \\ 219 & 198 & 181 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 25 & 21 & 219 \\ 15 & 27 & 198 \\ 21 & 17 & 181 \end{vmatrix}$,

{ $C_1 \to C_1 - C_2; C_2 \to C_2 - C_3$ से}

$= \begin{vmatrix} 4 & 21 & 9 \\ -12 & 27 & -72 \\ 4 & 17 & 11 \end{vmatrix}$, { $C_1 \to C_1 - C_2; C_3 \to C_3 - 10C_2$ से}

$= \begin{vmatrix} 4 & 21 & 9 \\ -12 & 27 & -72 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}$, { $R_3 \to R_3 - R_1$ के द्वारा}

$$= 4\begin{vmatrix} 1 & 21 & 9 \\ -3 & 27 & -72 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 21 & 9 \\ 0 & 90 & -45 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix},$$

($R_2 \to 3R_1 + R_2$ के द्वारा)

$= 4(90 \times 2 - 45 \times 4) = 0.$

50. (b) **ट्रिक:** $x = 1$ रखने पर,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = A - 12 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = A - 12$$

{$C_1 \to C_1 - C_2$ के द्वारा}

$\Rightarrow -2 + (-1)(-14) = A - 12 \Rightarrow A = 24$.

51. (a) दी गई सारणिक में संक्रियाओं $R_3 \to R_3 - 2R_2$ और $R_2 \to R_2 - 3R_1$ से, $a[a^2 + ab - 2a^2 - ab] = -a^3 = i$.

52. (b) $$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ -5 & 6 & -10 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 8 & 2 \\ -5 & 6 & -5 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(C_3 से 2 उभयनिष्ठ लेने पर)

53. (b) $$\begin{vmatrix} 6i & -3i & 1 \\ 4 & 3i & -1 \\ 20 & 3 & i \end{vmatrix} = x + iy$$

$\Rightarrow 6i(-3+3) + 3i(4i + 20) + 1(12 - 60i) = x + iy$

$\Rightarrow 0 + 60i - 12 + 12 - 60i = x + iy \Rightarrow x = 0, y = 0$.

54. (b) $$\Delta = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^3 + ax & a^2b & a^2c \\ ab^2 & b^3 + bx & b^2c \\ c^2a & c^2b & c^3 + cx \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 + x & a^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 + x & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2 + x \end{vmatrix}$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2 + x) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b^2 & b^2 + x & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2 + x \end{vmatrix},$$

{$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ द्वारा}

$$= (a^2 + b^2 + c^2 + x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^2 & x & 0 \\ c^2 & 0 & x \end{vmatrix},$$

$\left\{\begin{matrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \end{matrix} \text{ द्वारा}\right\}$

$= x^2(a^2 + b^2 + c^2 + x)$

अतः Δ , x^2 व x द्वारा विभाज्य है।

55. (a) $$\begin{vmatrix} pa & qb & rc \\ qc & ra & pb \\ rb & pc & qa \end{vmatrix} = pqr(a^3 + b^3 + c^3) - abc(p^3 + q^3 + r^3)$$

$= pqr(3abc) - abc(3pqr) = 0$,

$$\begin{pmatrix} \because p + q + r = 0, \therefore p^3 + q^3 + r^3 = 3pqr \\ \because a + b + c = 0, \therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \end{pmatrix}.$$

56. (d) $D' = D + pqr\, D = D(1 + pqr)$.

ट्रिक : $a_1 = b_2 = c_3 = 1$ तथा अन्य सभी को '0' रखकर जाँच करें।

57. (b) $$\begin{vmatrix} 0 & x & 16 \\ x & 5 & 7 \\ 0 & 9 & x \end{vmatrix} = 0$$

प्रसार करने पर, $-x(x^2 - 144) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ या $x^2 = 144 \Rightarrow x = \pm 12$

$\therefore x = 0, 12, -12$.

58. (c) चूंकि $x = \frac{5}{2}$ दिये गये सारणिक को सन्तुष्ट करता है।

59. (b) यह सारणिक $2 \times 2 \times 2 = 8$ सारणिकों के योगफल के रूप में लिखा जा सकता है, जिनमें से 6 शून्य हो जाते हैं। क्योंकि उनकी दो पंक्तियाँ एक समान हैं।

60. (a) चूँकि विषम कोटि के विषम सममित आव्यूह के सारिणक का मान शून्य होता है।

61. (a) $R_2 - R_3$ के द्वारा और याद रखे कि $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

$$\therefore \Delta = 4\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ (a-1)^2 & (b-1)^2 & (c-1)^2 \end{vmatrix}$$

$$= 4\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$ {$R_3 - (R_1 - 2R_2)$ के द्वारा}

62. (b) $C_3 \to C_3 - C_2$ और $C_2 \to C_2 - C_1$ का उपयोग करें।

63. (d) $C_1 \to C_1 + C_3$ तथा C_1 से $(x + y + z)$ तथा C_2 से 4 उभयनिष्ठ लेने पर हम देखतें है कि प्रथम दो स्तम्भ एक समान हैं।

64. (d) संक्रिया $R_1 \to R_1 + R_2$ के उपयोग के पश्चात् R_1 के अनुदिश प्रसार करने पर ।

65. (c) $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ के द्वारा,

$$-x\begin{vmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 3 & -6-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -x\begin{vmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & 9-x & 0 \\ 0 & 9 & -9-x \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow -x(9-x)(-9-x) = 0 \Rightarrow x = 0, 9, -9$.

ट्रिक : दिए गए विकल्पों से x के मान लेकर निरीक्षण करें ।

66. (a) $C_1 \to C_1 + C_2$ के द्वारा, $$\begin{vmatrix} 1 & \cos^2 x & 1 \\ 1 & \sin^2 x & 1 \\ 2 & 12 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

67. (b) $$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ x+1 & x-1 & 1 \\ x+1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0,$$

{$C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ के द्वारा}

$$\Rightarrow (x+1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & x-1 & 1\\ 1 & 1 & x-1\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (x+1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & x-2 & 0\\ 0 & 0 & x-2\end{vmatrix}=0$$

{$R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - R_1$ के द्वारा}

$\Rightarrow (x+1)(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = -1, 2$.

68. (c) **ट्रिक :** $a=1, b=-1, c=0$, $a'=2, b'=2, c'=1$ रखने पर,

$$\begin{vmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 4\end{vmatrix}=4$$. विकल्प (c) भी यही मान देता है।

69. (a) स्पष्टतः, $x = a, b$ सारणिक को संतुष्ट करता है।

70. (a) $2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2-bc & b^2-ac & c^2-ab\end{vmatrix}$

$$=2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ bc & ac & ab\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}-\frac{2}{abc}\begin{vmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ abc & abc & abc\end{vmatrix}$$

{$C_1(a), C_2(b), C_3(c)$ के द्वारा}

$$=2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}-\frac{2}{abc}(abc)\begin{vmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0.$$

71. (d) $D_1=\begin{vmatrix}1 & 15 & 8\\ 1 & 35 & 9\\ 1 & 25 & 10\end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix}2 & 15 & 8\\ 4 & 35 & 9\\ 8 & 25 & 10\end{vmatrix}$

$$D_3=\begin{vmatrix}3 & 15 & 8\\ 9 & 35 & 9\\ 27 & 25 & 10\end{vmatrix}, D_4=\begin{vmatrix}4 & 15 & 8\\ 16 & 35 & 9\\ 64 & 25 & 10\end{vmatrix}$$

$$D_5=\begin{vmatrix}5 & 15 & 8\\ 25 & 35 & 9\\ 125 & 25 & 10\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow D_1+D_2+D_3+D_4+D_5=\begin{vmatrix}15 & 75 & 40\\ 55 & 175 & 45\\ 225 & 125 & 50\end{vmatrix}$$

$= 15(3125) - 75(-7375) + 40(-32500)$

$= 46875 + 553125 - 1300000 = -700000$.

72. (b) संक्रिया $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ से,

$$\begin{vmatrix}3a+3b & a+b & a+2b\\ 3a+3b & a & a+b\\ 3a+3b & a+2b & a\end{vmatrix}$$

$$=3(a+b)\begin{vmatrix}1 & a+b & a+2b\\ 1 & a & a+b\\ 1 & a+2b & a\end{vmatrix}$$

अब संक्रिया $R_3 \to R_3 - R_1$, $R_2 \to R_2 - R_1$ से

$$3(a+b)\begin{vmatrix}1 & a+b & a+2b\\ 0 & -b & -b\\ 0 & b & -2b\end{vmatrix}$$

$= 3(a+b)(2b^2+b^2) = 9b^2(a+b)$.

73. (b) $\begin{vmatrix}a & a^2 & a^3-1\\ b & b^2 & b^3-1\\ c & c^2 & c^3-1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}a & a^2 & a^3\\ b & b^2 & b^3\\ c & c^2 & c^3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\\ c & c^2 & 1\end{vmatrix}=0$

$$\Rightarrow abc\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (abc-1)\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=0$$

चूँकि a, b, c भिन्न-भिन्न हैं, इसलिए $\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}\neq 0$

अतः $abc - 1 = 0$ अर्थात्, $abc = 1$.

74. (c) $\begin{vmatrix}-a^2 & ab & ac\\ ab & -b^2 & bc\\ ac & bc & -c^2\end{vmatrix}=abc\begin{vmatrix}-a & b & c\\ a & -b & c\\ a & b & -c\end{vmatrix}$

$$=(abc)(abc)\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=a^2b^2c^2(-1)(-4)$$

$= 4a^2b^2c^2 = Ka^2b^2c^2$, (दिया है) $\Rightarrow K = 4$.

75. (b) $C_3 \to C_3 - C_1$ और $C_2 \to C_2 - C_1$ के द्वारा,

$$\begin{vmatrix}1 & ac & bc\\ 1 & ad & bd\\ 1 & ae & be\end{vmatrix}=ab\begin{vmatrix}1 & c & c\\ 1 & d & d\\ 1 & e & e\end{vmatrix}=0, \{\because C_2 \equiv C_3\}.$$

76. (d) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1\\ 1 & 1 & 1+y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -x & x\\ 1 & 0 & y\end{vmatrix}=-xy$.

77. (a) $C_3 \to C_3 - C_2$ और $C_2 \to C_2 - C_1$ के द्वारा,

$$\begin{vmatrix}13 & 3 & 3\\ 14 & 3 & 3\\ 15 & 3 & 3\end{vmatrix}=0, \{\because C_2 \equiv C_3\}.$$

78. (b) $\begin{vmatrix}a & b & a\alpha-b\\ b & c & b\alpha-c\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow a[-(b\alpha-c)] - b[-2(b\alpha-c)] + [a\alpha-b)(b-2c)] = 0$

$\Rightarrow -ab\alpha + ac + 2b^2\alpha - 2bc + ab\alpha - 2ac\alpha - b^2 + 2bc = 0$

$\Rightarrow ac + 2b^2\alpha - 2ac\alpha - b^2 = 0$

$\Rightarrow (ac - b^2) - 2\alpha(ac - b^2) = 0$

$\Rightarrow ac - b^2 = 0$ या $1 - 2\alpha = 0 \Rightarrow b^2 = ac$ या $\alpha = 1/2$

$\because \alpha \neq 1/2$, (प्रश्नानुसार)

या $b^2 = ac$, अर्थात् a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

79. (c) $\begin{vmatrix}4 & 1\\2 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}4 & 1\\2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 2\\1 & x\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x & 3\\-2 & 1\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}17 & 9\\9 & 5\end{vmatrix}=(3x-2)-(x+6)$

$\Rightarrow 85-81=2x-8 \Rightarrow 4+8=2x \Rightarrow x=6$.

80. (b) $\begin{vmatrix}3x-8 & 3 & 3\\3 & 3x-8 & 3\\3 & 3 & 3x-8\end{vmatrix}=0$

$C_1 \to C_1+C_2+C_3$ से,

$(3x-2)\begin{vmatrix}1 & 3 & 3\\1 & 3x-8 & 3\\1 & 3 & 3x-8\end{vmatrix}=0$

संक्रिया $R_1 \to R_1-R_2$ और $R_2 \to R_2-R_3$ के प्रयोग से,

$(3x-2)\begin{vmatrix}0 & -3x+11 & 0\\0 & 3x-11 & -3x+11\\1 & 3 & 3x-8\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow (3x-2)[(-3x+11)^2]=0$

$\Rightarrow x=\frac{2}{3}$ या $x=\frac{11}{3} \Rightarrow x=\frac{2}{3},\frac{11}{3}$.

81. (d) माना $A=\begin{vmatrix}x+2 & x+3 & x+a\\x+4 & x+5 & x+b\\x+6 & x+7 & x+c\end{vmatrix}$

$C_2 \to C_2-C_1$ के द्वारा,

$A=\begin{vmatrix}x+2 & 1 & x+a\\x+4 & 1 & x+b\\x+6 & 1 & x+c\end{vmatrix}$

$R_2 \to R_2-R_1$ और $R_3 \to R_3-R_1$ के द्वारा,

$A=\begin{vmatrix}x+2 & 1 & x+a\\2 & 0 & b-a\\4 & 0 & c-a\end{vmatrix}=-1(2c-2a-4b+4a)$

$=2(2b-c-a)$

$\because$ a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं, अतः $A=0$.

82. (b) माना $\Delta_1=\begin{vmatrix}x & 2y & z\\2p & 4q & 2r\\a & 2b & c\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}x & y & z\\p & q & r\\a & b & c\end{vmatrix}=4\Delta$,

(R_2 तथा C_2 से '2' उभयनिष्ठ लेने पर).

83. (c) $\begin{vmatrix}a & 2b & 2c\\3 & b & c\\4 & a & b\end{vmatrix}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix}a-6 & 0 & 0\\3 & b & c\\4 & a & b\end{vmatrix}=0$, $[R_1 \to R_1-2R_2]$

$\Rightarrow (a-6)(b^2-ac)=0 \Rightarrow b^2-ac=0$, $(\because a\neq 6)$

$\therefore ac=b^2 \Rightarrow abc=b^3$.

84. (b) $\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1\\1 & 1+b & 1\\1 & 1 & 1+c\end{vmatrix}=\lambda$

$C_2 \to C_2-C_1$ और $C_3 \to C_3-C_1$ के द्वारा,

$\begin{vmatrix}1+a & -a & -a\\1 & b & 0\\1 & 0 & c\end{vmatrix}$

R_3 के सापेक्ष विस्तार करने पर,

$ab+bc+ca+abc=\lambda$ ....(i)

दिया है, $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=0$

$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0 \Rightarrow ab+bc+ca=0$

$\Rightarrow \lambda=abc$, (समी. (i) से).

85. (d) $\begin{vmatrix}a^2+x^2 & ab & ca\\ab & b^2+x^2 & bc\\ca & bc & c^2+x^2\end{vmatrix}$

C_1, C_2, C_3 को क्रमशः a, b, c से गुणा तथा abc से भाग देने पर,

$\therefore \Delta=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix}a(a^2+x^2) & ab^2 & c^2a\\a^2b & b(b^2+x^2) & bc^2\\ca^2 & b^2c & c(c^2+x^2)\end{vmatrix}$

अब R_1, R_2 और R_3 से क्रमशः a, b, c उभयनिष्ठ निकालने पर,

$\Delta=\begin{vmatrix}a^2+x^2 & b^2 & c^2\\a^2 & b^2+x^2 & c^2\\a^2 & b^2 & c^2+x^2\end{vmatrix}$

अब $C_1 \to C_1+C_2+C_3$ के द्वारा,

$\Delta=(a^2+b^2+c^2+x^2)\begin{vmatrix}1 & b^2 & c^2\\1 & b^2+x^2 & c^2\\1 & b^2 & c^2+x^2\end{vmatrix}$

$\Rightarrow \Delta=x^4(a^2+b^2+c^2+x^2)$

अतः, x^2 से विभाज्य है।

86. (b) $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\\cos nx & \cos(n+1)x & \cos(n+2)x\\\sin nx & \sin(n+1)x & \sin(n+2)x\end{vmatrix}$

$C_1 \to C_1+C_3-(2\cos x)C_2$ के प्रयोग से,

$\Delta=\begin{vmatrix}2(1-\cos x) & 1 & 1\\0 & \cos(n+1)x & \cos(n+2)x\\0 & \sin(n+1)x & \sin(n+2)x\end{vmatrix}$

$\Delta=2(1-\cos x)[\cos(n+1)x\sin(n+2)x$
$-\cos(n+2)x\sin(n+1)x]$

$\Delta=2(1-\cos x)[\sin(n+2-n-1)x]=2\sin x(1-\cos x)$

अर्थात् Δ, n से स्वतंत्र है।

87. (c) हम जानते हैं, कि सारणिक A के किसी पंक्ति के अवयवों का उसी पंक्ति के अवयवों से गुणन करने पर सारणिक का मान प्राप्त होता है, अर्थात् $|A|$.

88. (c) $\Delta = 1[100-98]+2[56-60]+3[42-40]$

$\Delta = 2-8+6=0$.

89. (b) माना a,b,c गुणोत्तर श्रेणी में हैं तथा $a=1, b=2, c=4$

$\therefore \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

90. (a) संक्रिया $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ के प्रयोग से,

$$(a+b+c-x)\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & b-x & a \\ 1 & a & c-x \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (a+b+c-x)[\{(b-x)(c-x)-a^2\}+c(a-c+x)\} + \{b(a-b+x)\}]=0$

$\Rightarrow (a+b+c-x)[bc-cx-bx+x^2-a^2+ca-c^2+cx + ab-b^2+bx]=0$

$\Rightarrow (a+b+c-x)[x^2-(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca]=0$

$\Rightarrow (a+b+c-x)[x^2-(a^2+b^2+c^2)]=0$, $[\because ab+bc+ca=0]$

$\therefore \; x = a+b+c$ और $(a^2+b^2+c^2)^{1/2}$.

91. (d) $\begin{vmatrix} 6a & 2b & 2c \\ 3m & n & p \\ 3x & y & z \end{vmatrix} = 2 \times 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6k$.

92. (b) B, A से संक्रिया $R_1 \leftrightarrow R_3$, $R_3 \to 2R_3$ और $R_2 \to 2R_2$ से प्राप्त होता है। अतः $B=(-1)4A=-4A$.

93. (b) अभीष्ट सारणिक

$|\,adj\, A| = |A|^{3-1}$,जहाँ $A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$= 5^2 = 25$, $(\because |\,adj\, A| = |a|^{n-1})$.

94. (b) संक्रिया $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ से हम पाते हैं, कि $x+a+b+c$ गुणनखण्ड है।

95. (b) R_2 में से 5 उभयनिष्ठ लेने पर $R_2 = R_1$ हो जाता है।

96. (a) $\begin{vmatrix} x+\omega^2 & \omega & 1 \\ \omega & \omega^2 & 1+x \\ 1 & x+\omega & \omega^2 \end{vmatrix} = 0$

$x=0$ पर जाँच करने पर, $\begin{vmatrix} \omega^2 & \omega & 1 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}$

$= \omega^2(\omega^4-\omega)-\omega(\omega^3-1)+1(\omega^2-\omega^2)$

$= \omega^2(\omega-\omega)-\omega(1-1)+0=0$ या

$\Delta = \begin{vmatrix} 1+\omega+\omega^2+x & \omega & 1 \\ 1+\omega+\omega^2+x & \omega^2 & 1+x \\ 1+\omega+\omega^2+x & x+\omega & \omega^2 \end{vmatrix}$,

($C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ द्वारा)

$= \begin{vmatrix} x & \omega & 1 \\ x & \omega^2 & 1+x \\ x & x+\omega & \omega^2 \end{vmatrix}$, $(\because 1+\omega+\omega^2=0)$

$= 0$, यदि $x=0$.

97. (b) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1-\omega^2 & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$, (संक्रिया $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ से)

$(\because 1+\omega+\omega^2=0)$

$= 3[\omega.\omega-\omega^4] = 3(\omega^2-\omega) = 3\omega(\omega-1)$.

98. (c) संक्रिया $C_2 \to C_2 - C_1, C_3 \to C_3 - C_1$ से तथा C_2 या C_3 से $a+b+c$ को उभयनिष्ठ लेने पर,

$\Delta = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a-b-c & a-b-c \\ b^2 & c+a-b & 0 \\ c^2 & 0 & a+b-c \end{vmatrix}$,

(संक्रिया $R_1 \to R_1 - R_2 - R_3$)

$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 2bc & -2c & -2b \\ b^2 & c+a-b & 0 \\ c^2 & 0 & a+b-c \end{vmatrix}$,

(संक्रिया $C_2 \to C_2 + \frac{1}{b}C_1$ तथा $C_3 \to C_3 + \frac{1}{c}C_1$)

$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 2bc & 0 & 0 \\ b^2 & c+a & \frac{b^2}{c} \\ c^2 & \frac{c^2}{b} & a+b \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)^2[2bc\{(a+b)(c+a)-bc\}] = 2abc(a+b+c)^3$.

99. (c) दिया है, $\Delta = \begin{vmatrix} 41 & 42 & 43 \\ 44 & 45 & 46 \\ 47 & 48 & 49 \end{vmatrix}$

संक्रिया $C_2 \to C_2 - C_1, C_3 \to C_3 - C_2$ से,

$\Delta = \begin{vmatrix} 41 & 1 & 1 \\ 44 & 1 & 1 \\ 47 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

चूँकि दो स्तम्भ C_2 और C_3 सर्वसम हैं। अतः $\Delta = 0$.

100. (b) दिया है, त्रिभुज के कोण A, B तथा C हैं। हम जानते हैं, कि $A+B+C=\pi$, अतः $A+B=\pi-C$

या $\quad \cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$

या $\quad \cos A\cos B - \sin A \sin B = -\cos C$

$\quad \cos A \cos B + \cos C = \sin A \sin B$

और $\quad \sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$.

दिए गए सारणिक का प्रसार करने पर हम पाते हैं, कि

$\Delta = -(1-\cos^2 A)+\cos C(\cos C+\cos A\cos B) + \cos B(\cos B+\cos A\cos C)$

$= -\sin^2 A + \cos C(\sin A \sin B) + \cos B(\sin A \sin C)$

$= -\sin^2 A + \sin A(\sin B\cos C + \cos B \sin C)$

$= -\sin^2 A + \sin A \sin(B+C) = -\sin^2 A + \sin^2 A = 0$.

101. (a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix} = 3(\omega-\omega^2)$

$= 3\left[\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right] = 3\sqrt{3}\,i$.

102. (a) $\Delta = \frac{1}{a}[ab-ca] + 1\left[ca.\frac{1}{c} - \frac{1}{b}.ab\right] + bc\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right]$

$\Rightarrow \Delta = (b-c) + 1(a-a) + (c-b) \Rightarrow \Delta = 0$.

103. (a) $x = 0$ रखने पर, विकल्प (a) प्राप्त होता है।

104. (a) प्रसार करने पर, $-a(b-c) + 2b(b-c) + (a-b)(b-2c) = 0$

$\Rightarrow -ab + ac + 2b^2 - 2bc + ab - 2ac - b^2 + 2bc = 0$

$\Rightarrow b^2 - ac = 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 = ac$.

105. (a) विकल्पों से $x = 0, 6$ तथा -6 रखने पर, केवल विकल्प (a) समीकरण को सन्तुष्ट करता है।

106. (a) $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ p+1 & p+1 & p+x \\ 3 & x+1 & x+2 \end{vmatrix}$

$x = 1, 2$ के लिये, $|A| = 0$. अतः विकल्प (a) सही है।

107. (d) सारणिक को हल करने पर,

$1(1-\cos^2\beta) - \cos(\alpha-\beta)\,[\cos(\alpha-\beta) - \cos\alpha\cos\beta]$
$+\cos\alpha[\cos\beta\cos(\alpha-\beta) - \cos\alpha]$

$= 1 - \cos^2\beta - \cos^2\alpha - \cos^2(\alpha-\beta)$
$+2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)$

$= 1 - \cos^2\beta - \cos^2\alpha + \cos(\alpha-\beta)$
$(2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha-\beta))$

$= 1 - \cos^2\beta - \cos^2\alpha + \cos(\alpha-\beta)$
$[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$

$= 1 - \cos^2\beta - \cos^2\alpha + \cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$

$= 1 - \cos^2\beta - \cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta$

$= 1 - \cos^2\beta - \cos^2\alpha(1-\cos^2\beta) - \sin^2\alpha\sin^2\beta$

$= 1 - \cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta$

$= 1 - \cos^2\beta - \sin^2\beta = 0$.

108. (b) $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix}$, {संक्रिया $R_3 \to R_3 - R_2$, $R_2 \to R_2 - R_1$ }

$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 1(45-49) - 4(27-35) + 9(21-25)$

$= -4 + 32 - 36 = -8$.

109. (d) **ट्रिक :** $x = 0$ तथा $x = 3a$ रखने पर सारणिक का मान शून्य हो जाता है।

110. (d) $\because$ दिया गया समीकरण है, $(x-1)(6x-38) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 22x + 19 = 0 \Rightarrow (x-1)(3x-19) = 0$

$\Rightarrow x = 1, 19/3$.

111. (a) दिया है, $\begin{vmatrix} x & 0 & 8 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \quad \Delta = x(x-0) - 0(4x-6) + 8(0-2)$

या $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = 4, -4$.

112. (b) दिया है, $\Delta = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$

$\Delta = -x(x^2-1) - 1(-x-0) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

113. (d) $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -7 & x & -3 \\ 9 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \; -10x + 90 - 42 - 81 + 42 + 9x = 0$ या $x = 9$.

114. (c) $\begin{vmatrix} a & b\omega^2 & a\omega \\ b\omega & c & b\omega^2 \\ c\omega^2 & a\omega & c \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a(1+\omega) & b\omega^2 & a\omega \\ b(\omega+\omega^2) & c & b\omega^2 \\ c(\omega^2+1) & a\omega & c \end{vmatrix}$, {संक्रिया $C_1 \to C_1 + C_3$ से}

$= \begin{vmatrix} -a\omega^2 & b\omega^2 & a\omega \\ -b & c & b\omega^2 \\ -c\omega & a\omega & c \end{vmatrix} = \omega^2\omega \begin{vmatrix} -a & b & a\omega^2 \\ -b & c & b\omega^2 \\ -c & a & c\omega^2 \end{vmatrix}$

$= \omega^2 \begin{vmatrix} -a & b & a \\ -b & c & b \\ -c & a & c \end{vmatrix} = -\omega^2 \begin{vmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ c & a & c \end{vmatrix} = 0$.

115. (c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ca & ab \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c(b-a) & a(c-b) & ab \\ b-a & c+a & a+b \end{vmatrix}$,

$\{C_1 \to C_1 - C_2, C_2 \to C_2 - C_3\}$

$= (b-a)\,(c-b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c & a & ab \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix} = (b-a)(c-b)\,(c-a)$

$= (a-b)\,(b-c)\,(c-a)$.

116. (b) $\begin{vmatrix} 441 & 442 & 443 \\ 445 & 446 & 447 \\ 449 & 450 & 451 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 443 \\ -1 & -1 & 447 \\ -1 & -1 & 451 \end{vmatrix} = 0$,

$\{C_1 \to C_1 - C_2, C_2 \to C_2 - C_3\}$.

117. (a) $\begin{vmatrix} a & a^3 & a^4-1 \\ b & b^3 & b^4-1 \\ c & c^3 & c^4-1 \end{vmatrix} = 0$

या $\begin{vmatrix} a & a^3 & a^4 \\ b & b^3 & b^4 \\ c & c^3 & c^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^3 & -1 \\ b & b^3 & -1 \\ c & c^3 & -1 \end{vmatrix} = 0$

या $abc \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^3 & -1 \\ a-b & a^3-b^3 & 0 \\ a-c & a^3-c^3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

या $abc\begin{vmatrix}1 & a^2 & a^3\\0 & a^2-b^2 & a^3-b^3\\0 & a^2-c^2 & a^3-c^3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & a^3 & -1\\a-b & a^3-b^3 & 0\\(a-c) & (a^3-c^3) & 0\end{vmatrix}=0$

या $(abc)(a-b)(a-c)\begin{vmatrix}1 & a^2 & a^3\\0 & a+b & a^2+b^2+ab\\0 & a+c & a^2+c^2+ac\end{vmatrix}+$

$(a-b)(a-c)\begin{vmatrix}a & a^3 & -1\\1 & a^2+b^2+ab & 0\\1 & a^2+c^2+ac & 0\end{vmatrix}$

या $(a-b)(a-c)[(abc)[(a+b)(a^2+c^2+ac)-$

$(a+c)(a^2+b^2+ab)]]+(-1)(a-b)(a-c)$

$[a^2+c^2+ac-a^2-b^2-ab]=0$

$\Rightarrow (abc)[(a-b)(a-c)(c-b)(ac+ab+bc)]$

$+(-1)(a-b)(a-c)(c-b)(a+b+c)=0$

$\Rightarrow (abc)(ac+ab+bc)=a+b+c$.

118. (b) संक्रिया $C_1\to C_1+C_2+C_3$ के प्रयोग से,

$f(x)=\begin{vmatrix}1 & (1+b^2)x & (1+c^2)x\\1 & 1+b^2x & (1+c^2)x\\1 & (1+b^2)x & 1+c^2x\end{vmatrix}$, $(\because a^2+b^2+c^2+2=0)$

संक्रिया $R_2\to R_2-R_1, R_3\to R_3-R_1$ के प्रयोग से,

$f(x)=\begin{vmatrix}1 & (1+b^2)x & (1+c^2)x\\0 & 1-x & 0\\0 & 0 & 1-x\end{vmatrix}=(1-x)^2$.

अतः $f(x)$की घात = 2.

119. (d) $\begin{vmatrix}4+x^2 & -6 & -2\\-6 & 9+x^2 & 3\\-2 & 3 & 1+x^2\end{vmatrix}=x^4(14+x^2)=x.x^3(14+x^2)$

अतः सारणिक, x, x^3 तथा $(14+x^2)$ के द्वारा विभाज्य है किन्तु x^5 के द्वारा विभाज्य नही है।

120. (c) $\begin{vmatrix}0 & b^3-a^3 & c^3-a^3\\a^3-b^3 & 0 & c^3-b^3\\a^3-c^3 & b^3-c^3 & 0\end{vmatrix}$

$(b^3-a^3)(c^3-a^3)\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\a^3-b^3 & 1 & 1\\a^3-c^3 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$

$[C_2\to C_2-C_1$ तथा $C_3\to C_3-C_1$ से और C_2 से (b^3-a^3) और C_3 से (c^3-a^3) उभयनिष्ठ लेने पर].

ट्रिक : विषम कोटि के विषम सममित आव्यूह के सारणिक का मान शून्य होता है।

121. (a) $\begin{vmatrix}x & 2 & -1\\2 & 5 & x\\-1 & 2 & x\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow x(5x-2x)-2(2x+x)-1(4+5)=0$

$\Rightarrow 3x^2-6x-9=0$

$\Rightarrow x^2-2x-3=0$

$\Rightarrow (x+1)(x-3)=0$

$\Rightarrow x=-1,3$.

122. (c) $\begin{vmatrix}1+\sin^2\theta & \sin^2\theta & \sin^2\theta\\\cos^2\theta & 1+\cos^2\theta & \cos^2\theta\\4\sin 4\theta & 4\sin 4\theta & 1+4\sin 4\theta\end{vmatrix}=0$

संक्रिया $C_1\to C_1-C_2, C_2\to C_2-C_3$ के प्रयोग से,

$\begin{vmatrix}1 & 0 & \sin^2\theta\\-1 & 1 & \cos^2\theta\\0 & -1 & 1+4\sin 4\theta\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow 2(1+2\sin 4\theta)=0 \Rightarrow \sin 4\theta=\frac{-1}{2}$.

123. (b) $f(x)=2(x-3)(x-5);\begin{vmatrix}1 & x+3 & 3(x^2+3x+9)\\1 & x+5 & 4(x^2+5x+25)\\1 & 1 & 3\end{vmatrix}$

R_1, R_2 तथा R_3 से क्रमशः $(x-3),(x-5)$ और 2 उभयनिष्ठ लेने पर,

$f(x)=2(x-3)(x-5)\begin{vmatrix}0 & (x+2) & 3(x^2+3x+8)\\0 & 2 & x^2+11x+73\\1 & 1 & 3\end{vmatrix}$,

($R_1\to R_1-R_3$ और $R_2\to R_2-R_1$ से)

$=2(x-3)(x-5)[1(x+2)\ (x^2+11x+73)-6(x^2+3x+8)]$

$=2(x^2-8x+15)(x^3+13x^2+95x+146-6x^2-18x-48)$

$=2(x^2-8x+15)(x^3+7x^2+77x+98)$

$=2(x^5-x^4+36x^3-413x^2+371x+1470)$

$f(1)=2928$, $f(3)=0$, $f(5)=0$

$\therefore f(1).f(3)+f(3).f(5)+f(5).f(1)=0+0+0=0=f(3)$.

124. (d) $\begin{vmatrix}y+z & x-z & x-y\\y-z & z+x & y-x\\z-y & z-x & x+y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y+z & x-z & x-y\\2y & 2x & 0\\2z & 0 & 2x\end{vmatrix}$,

($R_2\to R_2+R_1$ और $R_3\to R_3+R_1$ से)

$=4\begin{vmatrix}y+z & x-z & x-y\\y & x & 0\\z & 0 & x\end{vmatrix}$

$=4[(y+z)(x^2)-(x-z)(xy)+(x-y)(-zx)]$

$=4[x^2y+zx^2-x^2y+xyz-zx^2+xyz]=8xyz$

अतः $k=8$.

उपसारणिक और सहखण्ड, सारणिक गुणन

1. (b) दूसरी पंक्ति व तीसरे स्तम्भ में अवयव 4 का सहखण्ड

$$= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 8 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix} = -\{1(-2) - 3(8-0) + 1.16\}$$

= 10.

2. (b) हम जानते हैं, $\Delta\Delta' = \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} . \begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix}\Sigma a_1A_1 & 0 & 0\\ 0 & \Sigma a_2A_2 & 0\\ 0 & 0 & \Sigma a_3A_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\Delta & 0 & 0\\ 0 & \Delta & 0\\ 0 & 0 & \Delta\end{vmatrix} = \Delta^3 \Rightarrow \Delta' = \Delta^2.$$

3. (d) यह एक आधारभूत संकल्पना है।

4. (b) चूँकि $\Delta = \omega^2 - 2\omega^2 = -\omega^2$. अतः $\Delta^2 = \omega^4 = \omega$.

5. (b) $\Delta_2\Delta_1 = \begin{vmatrix}1 & 0\\ c & d\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0\\ a & b\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0\\ c+ad & bd\end{vmatrix} = bd$.

6. (a) $B_2 = \begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_3 & c_3\end{vmatrix} = a_1c_3 - c_1a_3$

$C_2 = -\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix} = -(a_1b_3 - a_3b_1)$

$B_3 = -\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix} = -(a_1c_2 - a_2c_1)$

$C_3 = \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

$$\begin{vmatrix}B_2 & C_2\\ B_3 & C_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_1c_3 - a_3c_1 & -(a_1b_3 - a_3b_1)\\ -(a_1c_2 - a_2c_1) & a_1b_2 - a_2b_1\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}a_1c_3 & -a_1b_3\\ -a_1c_2 & a_1b_2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_1c_3 & a_3b_1\\ -a_1c_2 & -a_2b_1\end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix}-a_3c_1 & -a_1b_3\\ a_2c_1 & a_1b_2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-a_3c_1 & a_3b_1\\ a_2c_1 & -a_2b_1\end{vmatrix}$$

$$= a_1^2(b_2c_3 - b_3c_2) + a_1b_1(-c_3a_2 + a_3c_2)$$
$$+ a_1c_1(-a_3b_2 + a_2b_3) + c_1b_1(a_3a_2 - a_2a_3) = a_1\Delta.$$

7. (b) यह एक आधारभूत संकल्पना है।

8. (b) $\begin{vmatrix}\log_3 512 & \log_4 3\\ \log_3 8 & \log_4 9\end{vmatrix} \times \begin{vmatrix}\log_2 3 & \log_8 3\\ \log_3 4 & \log_3 4\end{vmatrix}$

$$= \left(\frac{\log 512}{\log 3} \times \frac{\log 9}{\log 4} - \frac{\log 3}{\log 4} \times \frac{\log 8}{\log 3}\right)$$
$$\times \left(\frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 4}{\log 3} - \frac{\log 3}{\log 8} \times \frac{\log 4}{\log 3}\right)$$

$$= \left(\frac{\log 2^9}{\log 3} \times \frac{\log 3^2}{\log 2^2} - \frac{\log 2^3}{\log 2^2}\right) \times \left(\frac{\log 2^2}{\log 2} - \frac{\log 2^2}{\log 2^3}\right)$$

$$= \left(\frac{9 \times 2}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{15}{2} \times \frac{4}{3} = 10.$$

9. (c) $C_{21} = (-1)^{2+1}(18 + 21) = -39$

$C_{22} = (-1)^{2+2}(15 + 12) = 27$

$C_{23} = (-1)^{2+3}(-35 + 24) = 11$.

10. (b) -4 का उपसारणिक $= \begin{vmatrix}-2 & 3\\ 8 & 9\end{vmatrix} = -42$,

9 का उपसारणिक $= \begin{vmatrix}-1 & -2\\ -4 & -5\end{vmatrix} = -3$,

-4 का सहखण्ड $= (-1)^{2+1}(-42) = 42$,

9 का सहखण्ड $= (-1)^{3+3}(-3) = -3$.

रैखिक समीकरणों का निकाय, कुछ विशेष सारणिक, सारणिक का अवकलन तथा समाकलन

1. (d) निकाय के अनन्त अशून्य हल होंगे, यदि

$\Delta = 0$, अर्थात् यदि $\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ \lambda & -14 & 15\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 3(42 - 30) - \lambda(6 - 2) + 1(-30 + 14) = 0 \Rightarrow \lambda = 5$.

2. (c) दिए गए समीकरण में क्रेमर नियम के द्वारा

$$x = \frac{D_x}{D} = \begin{vmatrix}7 & 3 & -5\\ 6 & 1 & 1\\ 1 & -4 & 2\end{vmatrix} \div \begin{vmatrix}2 & 3 & -5\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & -4 & 2\end{vmatrix}.$$

3. (c) इसका एक अशून्य हल होगा, यदि

$\begin{vmatrix}1 & k & -1\\ 3 & -k & -1\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6k + 6 = 0 \Rightarrow k = 1$.

4. (d) दिए गए समघातीय समीकरणों के निकाय के लिए,

$\Delta = \begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & -1\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix} = 1(-1-3) - 1(3+1) - 1(-9+1)$

$= -4 - 4 + 8 = 0$, $\therefore$ इसलिए अनन्त हल हैं।

5. (d) दिए गए समघातीय समीकरणों के निकाय का अशून्य हल होगा, यदि $\Delta = 0$

अर्थात्, $\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & -\alpha & -3\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix} = -2\alpha - 6 = 0$, अर्थात् यदि $\alpha = -3$.

6. (b) दिए गए समघातीय समीकरणों के निकाय के लिये,

$\Delta = \begin{vmatrix}1 & 4 & -1\\ 3 & -4 & -1\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix} = 1(-4-3) - 4(3+1) - 1(-9+4)$

$= -7 - 16 + 5 \neq 0$.

अतः केवल एक तुच्छ (Trivial) हल होगा।

7. (b) $$\frac{d^n}{dx^n}[\Delta(x)] = \begin{vmatrix}\frac{d^n}{dx^n}x^n & \frac{d^n}{dx^n}\sin x & \frac{d^n}{dx^n}\cos x\\ n! & \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\\ a & a^2 & a^3\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}n! & \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) & \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\\ n! & \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\\ a & a^2 & a^3\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad [\Delta^n(x)]_{x=0} = \begin{vmatrix} n! & \sin\left(0+\frac{n\pi}{2}\right) & \cos\left(0+\frac{n\pi}{2}\right) \\ n! & \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ a & a^2 & a^3 \end{vmatrix} = 0$$

{चूँकि $R_1 \equiv R_2$ }.

8. (a) निकाय का अशून्य हल होगा, यदि

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a^3 & (a+1)^3 & (a+2)^3 \\ a & a+1 & a+2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a^3 & 3a^2+3a+1 & 3(a+1)^2+3(a+1)+1 \\ a^2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_2 \end{pmatrix} \text{द्वारा}$$

$\Rightarrow 3a^2 + 3a + 1 - \{3(a+1)^2 + 3(a+1) + 1\} = 0,$

(R_3 के अनुदिश प्रसार करने पर)

$\Rightarrow -6(a+1) = 0 \Rightarrow a = -1$.

9. (d) यह आधारभूत तथ्य पर आधारित है।

10. (d) दिए गए समीकरण के निकाय का अशून्य हल होगा यदि x, y, z के गुणांकों के सारणिक का मान शून्य हो, अर्थात्

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 3 \\ 3 & k & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2k - 33 = 0 \text{ या } k = \frac{33}{2}.$$

11. (a) समीकरण के असंगत होने के लिए, $D = 0$

$$\therefore D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & k+3 \\ 2k+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = -3$$

और $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

अतः $k = -3$ के लिए निकाय असंगत है।

12. (d) अशून्य हल के लिए, $\Delta = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -k & -1 \\ k & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = 1, -1.$$

13. (b) $a + b - 2c = 0$

$2a - 3b + c = 0$

$a - 5b + 4c = \alpha$

निकाय असंगत है, यदि $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$

तथा $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ \alpha & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$ और D_2 भी शून्य है।

अतः, α का मान 0 है।

14. (c) दिया है, $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = c$

$2ax_1 + 3x_2 + x_3 = c$

$3bx_1 + x_2 + 2x_3 = c$

माना $a = b = c = 1$

तब $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(5) - 2(1) + 3(-7) = -18 \neq 0$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

इसी प्रकार $D_y = D_z = -3$. अब, $x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{6}, \; y = z = \frac{1}{6}$

अतः $D \neq 0$, $x = y = z$, अर्थात् अद्वितीय हल है।

15. (a) प्रश्नानुसार, $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & \lambda & 1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 + 3\lambda = 0$

अतः $\lambda = 0$,चूँकि $\lambda = i\sqrt{3}$ का अस्तित्व नहीं है।

16. (a) $$\sum_{n=1}^{N} U_n = \begin{vmatrix} \frac{N(N+1)}{2} & 1 & 5 \\ \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} & 2N+1 & 2N+1 \\ \left\{\frac{N(N+1)}{2}\right\}^2 & 3N^2 & 3N \end{vmatrix}$$

$$= \frac{N(N+1)}{12} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 4N+2 & 2N+1 & 2N+1 \\ 3N(N+1) & 3N^2 & 3N \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & 1 & 6 \\ 4N+2 & 2N+1 & 4N+2 \\ 3N(N+1) & 3N^2 & 3N(N+1) \end{vmatrix} = 0,$$

{संक्रिया $C_3 \to C_3 + C_2$ के प्रयोग से}.

17. (c) यदि r सार्व-अनुपात हो, तो $a_n = a_1 r^{n-1}$, ($n \geq 1$ के सभी मानों के लिए) $\Rightarrow \log a_n = \log a_1 + (n-1)\log r$

$= A + (n-1)R$, जहाँ $\log a_1 = A$ और $\log r = R$.

अतः Δ में, $C_2 \to C_2 - C_1$ व $C_3 \to C_3 - C_2$ से C_2 व C_3 सर्वसम प्राप्त होते हैं। अतः $\Delta = 0$.

18. (c) $$D_r = \begin{vmatrix} 2^{r-1} & 2.3^{r-1} & 4.5^{r-1} \\ x & y & z \\ 2^n - 1 & 3^n - 1 & 5^n - 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{n} D_r = \begin{vmatrix} \sum_{r=1}^{n} 2^{r-1} & \sum_{r=1}^{n} 2.3^{r-1} & \sum_{r=1}^{n} 4.5^{r-1} \\ x & y & z \\ 2^n - 1 & 3^n - 1 & 5^n - 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{n} D_r = \begin{vmatrix} 2^n - 1 & 3^n - 1 & 5^n - 1 \\ x & y & z \\ 2^n - 1 & 3^n - 1 & 5^n - 1 \end{vmatrix}$$

चूँकि हम जानते हैं, $\sum_{r=1}^{n} 2^{r-1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1,$

$$2\sum_{r=1}^{n} 3^{r-1} = 2\frac{3^n - 1}{3-1} = 3^n - 1$$

और $4\sum_{r=1}^{n} 5^{r-1} = 4\frac{5^n - 1}{5-1} = 5^n - 1$

$\Rightarrow \sum_{r=1}^{n} D_r = 0$, $(\because R_1 \equiv R_3)$.

19. (c) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$,

$[\because |A| = |A'|]$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

20. (d) यदि दिए गये समीकरणों का निकाय अशून्य हल रखता है, तब $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ \lambda & -14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 29$.

21. (a) दिए गए समीकरणों के निकाय का हल अद्वितीय है, यदि $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k \neq 0$.

22. (c) $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1[-1-2] - 1[6-3] + 1[3+3] = 0$

$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 2 \\ -18 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1-2) - 1(-36+6) + 1(-6-18)$

$D_1 = -6 + 30 - 24 = 0$

तथा $D_2 = 0; D_3 = 0$

इसलिए निकाय संगत है, $(D = D_1 = D_2 = D_3 = 0)$

अर्थात् निकाय के अनन्त हल हैं।

23. (b) अनन्त हलों के लिए दोनों समीकरण एक समान होना चाहिए

$\Rightarrow \frac{k+1}{k} = \frac{8}{k+3} = \frac{4k}{3k-1}$

$\Rightarrow (k+1)(k+3) = 8k$ और $8(3k-1) = 4k(k+3)$

$\Rightarrow k^2 - 4k + 3 = 0$ तथा $k^2 - 3k + 2 = 0$.

वज्रगुणन से, $\frac{k^2}{-8+9} = \frac{k}{3-2} = \frac{1}{-3+4}$

$k^2 = 1$ तथा $k = 1$; $\therefore k = 1$.

24. (b) $(1+ax)[(1+b_1x)(1+c_2x) - (1+b_2x)(1+c_1x)]$

$+ (1+bx)[(1+c_1x)(1+a_2x) - (1+a_1x)(1+c_2x)]$

$+ (1+cx)[(1+a_1x)(1+b_2x) - (1+b_1x)(1+a_2x)]$

$= A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3$

अतः हल करने के बाद x का गुणांक 0 होगा।

25. (a) दिये गये निकाय के अद्वितीय हल के लिए, $D \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & \mu \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

अतः यह केवल μ पर निर्भर करता है।

26. (a) दिए गए समीकरणों का निकाय निम्न प्रकार लिख सकते हैं

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -18 \end{bmatrix}$$

उपरोक्त निकाय को हल करने पर अद्वितीय हल प्राप्त करते हैं अतः $x = -10, y = -4, z = 16$.

27. (c) माना $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & ax+b \\ b & c & bx+c \\ ax+b & bx+c & 0 \end{vmatrix}$

संक्रिया $R_3 \to R_3 - xR_1 - R_2$ के प्रयोग से,

$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & ax+b \\ b & c & bx+c \\ 0 & 0 & -(ax^2+2bx+c) \end{vmatrix}$

$\Delta = (b^2 - ac)(ax^2 + 2bx + c)$

अब, $b^2 - ac < 0$ तथा $a > 0$

$\Rightarrow$ $ax^2 + 2bx + c$ का विविक्तकर ऋणात्मक है तथा $a > 0$

$\Rightarrow (ax^2 + 2bx + c) > 0$, $x \in R$ के सभी मानों के लिये

$\Rightarrow \Delta = (b^2 - ac)(ax^2 + 2bx + c) < 0$, अर्थात् ऋणात्मक।

28. (d) दिया गया निकाय असंगत होगा, जब $D = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$

संक्रिया $C_1 \to C_1 - C_2$ तथा $C_2 \to C_2 - C_3$ से,

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2-\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -1(2-\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$.

29. (b) $\Delta = \begin{vmatrix} x! & (x+1)! & (x+2)! \\ (x+1)! & (x+2)! & (x+3)! \\ (x+2)! & (x+3)! & (x+4)! \end{vmatrix}$

$= x!(x+1)!(x+2)! \begin{vmatrix} 1 & (x+1) & (x+2)(x+1) \\ 1 & (x+2) & (x+3)(x+2) \\ 1 & (x+3) & (x+4)(x+3) \end{vmatrix}$

संक्रिया $R_1 \to R_2 - R_1, R_2 \to (R_3 - R_2)$ के प्रयोग से,

$= x!(x+1)!(x+2)! \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2(x+2) \\ 0 & 1 & 2(x+3) \\ 1 & (x+3) & (x+4)(x+3) \end{vmatrix}$

$= 2x!(x+1)!(x+2)!$,(हल करने पर).

ट्रिक : $x = 1$ रखकर विकल्पों का परीक्षण कीजिए।

30. (a) $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1 + a(a^2) = 0 \Rightarrow a^3 = -1 \Rightarrow a = -1$.

31. (d) $(x, y, z) = (1, 2, -1)$ रखने पर, जो कि समीकरण को सन्तुष्ट करता है। अतः विकल्प (d) सही है।

32. (d) $D=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\1 & -2 & 1\\1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=3\lambda-6$

"कोई हल नहीं" के लिये आवश्यक प्रतिबंध $D=0$ है,

अर्थात् $-3\lambda-6=0\Rightarrow\lambda=-2$

अतः $\lambda=-2$ के लिए निकाय का कोई हल नहीं है।

33. (a) क्रेमर नियम के द्वारा, $x=\frac{D_1}{D}$

$\therefore$ विकल्प (a) सही है।

34. (b) सारणिक का मान शून्य होगा, यदि $\lambda=3$ तथा $\Delta_1\neq 0$, $\therefore \mu\neq 10$.

35. (c) माना प्रथम पद $=A$ तथा सार्वान्तर $=D$

$\therefore a=A+(p-1)D,\ b=A+(q-1)D,\ c=A+(r-1)D$

$$\begin{vmatrix}a & p & 1\\b & q & 1\\c & r & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A+(p-1)D & p & 1\\A+(q-1)D & q & 1\\A+(r-1)D & r & 1\end{vmatrix},$$

(संक्रिया $C_1\to C_1-DC_2+DC_3$ से)

$$=\begin{vmatrix}A & p & 1\\A & q & 1\\A & r & 1\end{vmatrix}=A\begin{vmatrix}1 & p & 1\\1 & q & 1\\1 & r & 1\end{vmatrix}=0.$$

36. (c) $\begin{vmatrix}1 & 2a & a\\1 & 3b & b\\1 & 4c & c\end{vmatrix}=0,\quad [C_2\to C_2-2C_3]$

$\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 0 & a\\1 & b & b\\1 & 2c & c\end{vmatrix}=0,\ [R_3\to R_3-R_2, R_2\to R_2-R_1]$

$\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 0 & a\\0 & b & b-a\\0 & 2c-b & c-b\end{vmatrix}=0\ ;\ b(c-b)-(b-a)(2c-b)=0$

हल करने पर, $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$

$\therefore$ *a, b, c* हरात्मक श्रेणी में हैं।

37. (c) $\begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\1 & \alpha & 1\\1 & 1 & \alpha\end{vmatrix}=0\Rightarrow\alpha=1,\alpha=-2$ के लिए कोई हल नहीं या अनन्त हल हैं।

लेकिन $\alpha=1$ लिए अनन्त हल हैं और जब $\alpha=-2$ रखते हैं तथा दिए गए समीकरण निकाय को एक दूसरे से जोड़ते हैं, तब L.H.S $\neq$ R.H.S. अर्थात कोई हल नहीं है।

38. (d) संगत हल के लिए, $|A|=0$

अर्थात्, $\begin{vmatrix}(\alpha+1)^3 & (\alpha+2)^3 & -(\alpha+3)^3\\\alpha+1 & \alpha+2 & -(\alpha+3)\\1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow 6\alpha+12=0\Rightarrow\alpha=-2$.

आव्यूह के प्रकार, आव्यूह का बीजगणित

1. (b) यह स्पष्ट है।

2. (d) $M^2-\lambda M-I_2=0$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 2\lambda\\2\lambda & 3\lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=O$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}5 & 8\\8 & 13\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 2\lambda\\2\lambda & 3\lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=O$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}5-\lambda & 8-2\lambda\\8-2\lambda & 13-3\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow 5-\lambda=1,\ 8-2\lambda=0,\ 13-3\lambda=1$

$\Rightarrow\lambda=4$, जो तीनों समीकरणों को सन्तुष्ट करता है।

3. (c) स्पष्टतः, $AB=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix}=BA$ (सत्यापित).

4. (c) $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0$, अतः आव्यूह व्युत्क्रमणीय है।

5. (a) $A^2=A.A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\a & b & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\a & b & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I$

6. (a) $A^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$,

और $A^3=A^2.A=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^n=A^{n-1}.A=\begin{bmatrix}1 & n-1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & n\\0 & 1\end{bmatrix}$.

7. (d) चूँकि $AB=O$, यदि $A\neq O$ तथा $B\neq O$.

8. (a) $A^2=\begin{bmatrix}2 & 2\\a & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\a & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+2a & 4+2b\\2a+ab & 2a+b^2\end{bmatrix}=0=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow 4+2a=0, 4+2b=0,\ 2a+ab=0,$

$2a+b^2=0$ असंगत होना चाहिए

$\Rightarrow\ a=-2,\ b=-2$.

9. (b) यह स्पष्ट है कि $(m,n)=(3,4)$.

10. (a) निरीक्षण से A^2 व A का क्रम 3×3 है जबकि B की कोटि 3×2 है। अतः $A^2+2B-2A$ परिभाषित नहीं होगा।

11. (b) सम्बन्ध $A^2=B^2$ सत्य है, क्योंकि $A^2=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$ व

$B^2=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$ एक ही आव्यूह है।

12. (b) आव्यूह $\begin{bmatrix}1 & 3 & \lambda+2\\2 & 4 & 8\\3 & 5 & 10\end{bmatrix}$ अव्युत्क्रमणीय है,

यदि $\begin{vmatrix} 1 & 3 & \lambda+2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 1(40-40) - 3(20-24) + (\lambda+2)(10-12) = 0$

$\Rightarrow 2(\lambda+2) = 12 \Rightarrow \lambda = 4.$

13. (a) $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a^2b^2 - a^2b^2 & ab^3 - ab^3 \\ -a^3b + a^3b & -a^2b^2 + a^2b^2 \end{bmatrix} = O$

$\Rightarrow A^3 = A.A^2 = 0$ व $A^n = 0, n \ge 2$ के प्रत्येक मान के लिए।

14. (b) $AB = \begin{bmatrix} 1/3 & 2 \\ 0 & 2x-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3-2x \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(दिये गए अनुसार)

$\Leftrightarrow 3 - 2x = 1$ या $x = 1$.

15. (d) यह स्पष्ट है।

16. (b) $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 \\ 0 & -1+\lambda^2 \end{bmatrix} = 0$,

(दिये गए अनुसार)

$\Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

17. (b) $A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = -A$.

18. (c) $A^2 - 6A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 19 & 6 \\ 18 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 & 6 \\ 18 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = -5I$.

19. (c) निरीक्षण से A' की कोटि 3×3 व B' की कोटि 3×2 है अतः इन आव्यूहों का गुणन परिभाषित है।

20. (c) $AB = [1\ 2\ 3]\begin{bmatrix} -5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = [-2\ -1\ 4]$.

21. (b) यह स्पष्ट है।

22. (c) $A' = [1\ 2\ 3]$, अतः $AA' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}[1\ 2\ 3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$.

23. (c) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (a, b, c, d) = (1,\ 2,\ -7,\ 5)$.

24. (b) $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$.

25. (b) AB के गुणन में अभीष्ट अवयव

$= C_{33} = (-2)3 + 2.5 + 0.0 = -6 + 10 = 4$.

26. (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^5 = \begin{bmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2^5 \end{bmatrix} = 2^4\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$= 16A$.

27. (d) चूँकि $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O = AB$

$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

28. (b) यह स्पष्ट है।

29. (c) चूँकि वर्ग आव्यूह A जिसके अवयव $a_{ij} = 0$ के लिए $i < j$, तब A एक निम्न त्रिभुजाकार आव्यूह है।

30. (b) वर्ग आव्यूह $[a_{ij}]_{n \times n}$ एक उपरित्रिभुजीय आव्यूह होगा, यदि $a_{ij} = 0, i > j$.

31. (d) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ \lambda & -3 & 0 \end{bmatrix}$ अव्युत्क्रमणीय है, यदि

$|A| = 0 \Rightarrow 0 - 1(-3\lambda) + (-2)(3) = 0$

$\Rightarrow 3\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$.

32. (b) यह एक आधारभूत संकल्पना है।

33. (c) आधारभूत संकल्पना के द्वारा, $|A| = k^n |B|$.

34. (b) $A^2B = (A.A)B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$.

35. (d) $\cos\theta\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + \sin\theta\begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

36. (c) यह एक आधारभूत संकल्पना है।

37. (c) $AC = [a\ b]\begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} = [a^2 - ab]$

$BC = [-b\ -a]\begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} = [a^2 - ab]$

$\therefore AC = BC$.

38. (d) $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^3 = A.A^2 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^4 = A.A^3 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

39. (a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}X = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 14 & -13 \end{bmatrix}$

चूंकि $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 14 & -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

40. (a) $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$

$\therefore$ विकल्प (a) सत्य नहीं है।

41. (b) चूंकि $|B| \neq 0 \Rightarrow B^{-1}$ अस्तित्व रखता है, अतः $AB = 0$

$\Rightarrow (AB)B^{-1} = OB^{-1} \Rightarrow A(BB^{-1}) = O$

$\Rightarrow AI = O \Rightarrow A = O$.

42. (b) कोटि $(1\times 3)(3\times 3)(3\times 1) = (1\times 1)$ होगी।

43. (c) दिया गया है, $AB = B$ तथा $BA = A$

इसलिये $A^2 + B^2 = AA + BB = A(BA) + B(AB)$

$= (AB)A + (BA)B = BA + AB = A + B$,

($\because AB = B$ और $BA = A$).

44. (a) चूँकि $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

आव्यूह के बंटन नियम से,

$\Rightarrow A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$

$\Rightarrow BA - AB = 0 \Rightarrow BA = AB$.

45. (b) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$,

$\therefore A - B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

46. (d) $X = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow X^2 = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

स्पष्टतः $n = 2$ के लिए विकल्प (a), (b), (c) में दिये गए आव्यूह, $\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ से मेल नहीं खाते हैं।

47. (b) $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$; $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $[\because i^2 = -1]$.

48. (a) यह स्पष्ट है।

49. (a) दिया है, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

$\therefore A^4 = A^2.A^2 = I_2.I_2 = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

50. (d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$.

51. (b) $A + B$ परिभाषित हैं $\Rightarrow A$ तथा B समान कोटि के हैं। साथ ही AB भी परिभाषित है $\Rightarrow A$ में स्तम्भों की संख्या = B में पंक्तियों की संख्या। स्पष्टतः, दोनों का एक साथ अर्थ यह है कि A तथा B समान कोटि के वर्ग आव्यूह हैं।

52. (b) $AB = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 13 \\ -1 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

53. (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

54. (a) यहाँ $AB = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

तथा $BA = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

चूँकि $AB = BA$, अतः $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

55. (b) $5A - 3B + 2C = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 15 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 15 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -20 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$.

56. (b) चूँकि $x - 2 = 3 - 2 \Rightarrow x = 3$

तथा $y + 4 = 3 - 1 \Rightarrow y = -2$.

57. (d) $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \therefore A^2 = I \Rightarrow \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x^2+1 & x \\ x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$.

58. (a) $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

तथा $BA = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = -AB$

$\therefore AB + BA = O$, अतः $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

59. (b) $(aI + bA)^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} = a^2 I + 2abA$.

60. (b) विद्यार्थी अवश्य याद रखें।

61. (c) चूँकि $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \neq A$

$B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \neq B$

अब, $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

तथा $BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$

स्पष्टतः $AB \neq BA$.

62. (c) यह आव्यूह गुणन के गुणधर्म हैं।

63. (d) आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & \lambda & 5 \end{bmatrix}$ व्युत्क्रमणीय आव्यूह होगा,

यदि $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & \lambda & 5 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow 1(25 - 6\lambda) - 2(20 - 18) + 3(4\lambda - 15) \neq 0$

$\Rightarrow \; 25 - 6\lambda - 4 + 12\lambda - 45 \neq 0$

$\Rightarrow 6\lambda - 24 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 4$.

64. (d) $UV = [4]$ तथा $XY = [16]; \therefore UV + XY = [20]$.

65. (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

$\Rightarrow (A^2)^{20} = A^{40} = (I)^{20} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

66. (b) $AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow (AB)^T = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$.

67. (b) $BA = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times1} [1\ 2\ 3]_{1\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}_{3\times3}$

$AB = [1\,2\,3]_{1\times3} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times1} = [20]_{1\times1}$.

इसलिए AB तथा BA परिभाषित है।

68. (d) यह गुणधर्म है।

69. (d) A तथा B, $n\times n$ कोटि के दो वर्ग आव्यूह हैं, हम जानते हैं कि,
$(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - AB - BA + B^2$
(सामान्यतः $AB \ne BA$).

70. (a) हम जानते हैं कि प्रत्येक इकाई आव्यूह अदिश आव्यूह होता है।

71. (b) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$

जबकि $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 25 & 0 \end{bmatrix} \ne O$.

72. (c) हम जानते हैं, कि यदि आव्यूह के विकर्ण के नीचे के सभी अवयव शून्य हों, तब यह उपरित्रिभुजीय आव्यूह होता है। चूँकि दिया गया आव्यूह इस शर्त को पूर्ण करता है। अतः यह उपरित्रिभुजीय आव्यूह है।

73. (a) $A.A = \begin{bmatrix} -1 & 2i \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\therefore\ A^4 = \begin{bmatrix} 1 & -4i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

74. (c) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} [2\ \ 1\ \ -1] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

75. (c) दो आव्यूहों के व्यवकलन के लिए उन्हें समान कोटि का होना चाहिए, अर्थात् $p = r,\ q = s$.

76. (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore\ A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

तथा $A^2 - 2A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\det(A^2 - 2A) = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 25$.

77. (c) $AB = O \Rightarrow |AB| = 0$

$\Rightarrow |A|.|B| = 0 \Rightarrow |A| = 0$ या $|B| = 0$

जब $AB = O$, तब न तो A न ही B शून्य हो सकता है।

उदाहरणतः, यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, तो

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

78. (b) $a_{ij} = \frac{1}{2}(3i - 2j)$

$\Rightarrow a_{11} = 1/2,\ a_{12} = -1/2$ तथा $a_{21} = 2,\ a_{22} = 1$

$\therefore\ A = [a_{ij}]_{2\times2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$\therefore\ A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

79. (c) $2X - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow 2X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow 2X = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 7/2 & 1 \end{bmatrix}$.

80. (a) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $A^3 = A^2A$

$\Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

अतः इसी प्रकार से, $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

81. (c) दिया है, $kA = \begin{bmatrix} 0 & 3a \\ 2b & 24 \end{bmatrix} \Rightarrow k\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3a \\ 2b & 24 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow 2k = 3a, 3k = 2b, -4k = 24$

$\Rightarrow a = \frac{2k}{3},\ b = \frac{3k}{2}, k = -6$

$\Rightarrow k = -6,\ a = -4, b = -9$.

82. (b) दिया है , $\begin{vmatrix} 2+x & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ x & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (2+x)(5-2) - 3(-5-2x) + 4(1+x) = 0$

$\Rightarrow 6 + 3x + 15 + 6x + 4 + 4x = 0$

$\Rightarrow 13x = -25 \Rightarrow x = -\frac{25}{13}$.

83. (b) $A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 3 \\ 15 & 19 & 6 \\ 9 & 12 & 4 \end{bmatrix}$

अतः, $A^3 - 3A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow A^3 - 3A^2 - I = 0$.

84. (a) दिया गया आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & \lambda & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है, यदि $|A| \ne 0$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda+3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}, \{R_1 \to R_2 + R_1\}$

$= \begin{vmatrix} 1 & \lambda+3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda-5 & -3 \end{vmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} R_2 \to R_2 + R_3 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{Bmatrix}$

$= 1(-3 + \lambda + 5) \ne 0$

$\Rightarrow \lambda + 2 \ne 0 \Rightarrow \lambda \ne -2$.

85. (b) दिया है, $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}a & 1\\b & -1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}1+a & 0\\2+b & -2\end{bmatrix}$

$A^2=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$

$B^2=\begin{bmatrix}a & 1\\b & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & 1\\b & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+b & a-1\\ab-b & b+1\end{bmatrix}$

अब, $A^2+B^2=\begin{bmatrix}a^2+b-1 & a-1\\ab-b & b\end{bmatrix}$

$\Rightarrow (A+B)^2=\begin{bmatrix}1+a & 0\\2+b & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+a & 0\\2+b & -2\end{bmatrix}$

अब, $(A+B)^2=\begin{bmatrix}(1+a)^2 & 0\\(2+b)(1+a)-2(2+b) & 4\end{bmatrix}$

अब, $(A+B)^2=A^2+B^2$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}(1+a)^2 & 0\\(2+b)(a-1) & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+b-1 & a-1\\ab-b & b\end{bmatrix}$

तुलना करने पर, $a-1=0\Rightarrow a=1$ तथा $b=4$.

86. (a) यह स्पष्ट है।

87. (b) $A^2=A.A=\begin{bmatrix}3 & -5\\-4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -5\\-4 & 2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}29 & -25\\-20 & 24\end{bmatrix}$ तथा $5A=\begin{bmatrix}15 & -25\\-20 & 10\end{bmatrix}$

$\therefore A^2-5A=14\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=14I$.

88. (d) दिया गया आव्यूह है, $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$

हम जानते हैं, $A^2=A.A=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$.

इसलिए

$A^{16}=(A^2)^8=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}^8=\begin{bmatrix}(-1)^8 & 0\\0 & (-1)^8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$.

89. (b) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$

$A^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$

$A^3=2\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}=2^2\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$

$A^n=2^{n-1}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow A^{100}=2^{99}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$.

90. (b) आव्यूह गुणन साहचर्य नियम तथा वितरण नियम का पालन करता है किन्तु क्रम विनियम नियम का पालन नहीं करता है।

91. (d) चूँकि प्रसार करने पर, $|A|=k^2+1$ जो कि कभी शून्य नहीं हो सकता है। अतः k के समस्त वास्तविक मानों के लिये आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है।

92. (a) दिया है , $x+y=4$ .....(i)

तथा $x-y=0$ ....(ii)

समी. (i) व (ii) को हल करने पर $x=2, y=2$

$\therefore 2x+z=7\Rightarrow z=3$ तथा $2z+w=10\Rightarrow w=4$.

93. (b) $a=1$ रखने पर, $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{vmatrix}=4-4=0$

अतः, $a=1$ के लिये A एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

94. (a) $A^2=A.A=\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -4\\-4 & 5\end{bmatrix}$

$\Rightarrow 4A-3I=\begin{bmatrix}8 & -4\\-4 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -4\\-4 & 5\end{bmatrix}$.

95. (b) ध्यान दें कि PQ, 3×2 कोटि का आव्यूह होगा तथा इसका (1, 1)वाँ अवयव $i(-i)+0-i(i)=2$ होगा।

96. (b) किसी भी कोटि के इकाई आव्यूह के सारणिक का मान $=1$.

97. (c) यह स्पष्ट है।

98. (a) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\3 & 0 & 2\\4 & 5 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\0 & 1 & 3\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}1\times1+2\times2+(-1)(0) & 1\times0+2\times1+(-1)(1) & 1\times0+2\times0+(-1)(3)\\3\times1+0\times2+2\times0 & 3\times0+0\times1+2\times1 & 3\times0+0\times0+2\times3\\4\times1+5\times2+0\times0 & 4\times0+5\times1+0\times1 & 4\times0+5\times0+0\times3\end{bmatrix}$$

$\therefore AB=\begin{bmatrix}5 & 1 & -3\\3 & 2 & 6\\14 & 5 & 0\end{bmatrix}$.

99. (c) दिया है $AB=A$, $\therefore B=I\Rightarrow BA=B$, $\therefore A=I$

अतः $A^2=A$ तथा $B^2=B$.

100. (d) $A^2=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & 0\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha^2 & 0\\\alpha+1 & 1\end{bmatrix}$

स्पष्टतः α का कोई वास्तविक मान नहीं है।

101. (a) $\begin{bmatrix}7 & 1 & 2\\9 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}35\\40\end{bmatrix}$; $\therefore \begin{bmatrix}35\\40\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}43\\44\end{bmatrix}$.

102. (a) माना $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\0 & -1 & 0\\-1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

विकल्पों द्वारा जाँच करते हैं। तब विकल्प (a) से,

$A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\0 & -1 & 0\\-1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\0 & -1 & 0\\-1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$

विकल्प (b) से, $(-1)I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \neq A$.

विकल्प (c) से, $|A| = 1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है

विकल्प (d) से, स्पष्टतः A, शून्य आव्यूह नहीं है

अतः केवल विकल्प (a) सही है।

103. (d) दिया है, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} = 18\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$AB = 18\, I_3$.

104. (a) $2X = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$2X = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

105. (c) $2A + 2B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $A - 2B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

जोड़ने पर, $3A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

106. (b) माना $\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$ तत्समक अवयव है, तब

$$\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}$$

अर्थात $2ax = x \Rightarrow a = \frac{1}{2}$, $(\because x \neq 0)$

अतः तत्समक अवयव $= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

107. (c) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$$

$$nA = \begin{bmatrix} n & 0 \\ n & n \end{bmatrix}, (n-1)I = \begin{bmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & n-1 \end{bmatrix}$$

$$nA - (n-1)I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix} = A^n.$$

विशेष प्रकार के आव्यूह, परिवर्त आव्यूह, सहखण्डज व व्युत्क्रम आव्यूह

1. (c) माना $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, तब $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

आव्यूह A के सहखण्डज

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

अतः, $adj(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}.adjA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}, \quad (\because |A| = 1).$$

2. (d) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. (a) आव्यूह $N = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ के सहखण्ड हैं,

$c_{11} = -4, c_{12} = 1, c_{13} = 4$

$c_{21} = -3, c_{22} = 0, c_{23} = 4$

$c_{31} = -3, c_{32} = 1, c_{33} = 3$

$$\therefore\ adj\ N = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} = N.$$

4. (b) यह स्पष्ट है।

5. (a) $(I - A)(I + A) = I - A^2 = O$,

{चूँकि A अन्तर्वलनीय (Involutory) आव्यूह है, अतः $A^2 = I$}.

6. (b) माना $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, तब $kI = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\ adj\,(kI) = \begin{bmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix} = k^2 I.$$

7. (b) मूलभूत तथ्यों से, $adj\,(adj\ A) = |A|^{n-2} A$.

8. (b) $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i/2 \end{bmatrix}$,

$adj\,(A) = \begin{bmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ तथा $|A| = -\frac{1}{2}$.

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{\Delta}(adj\ A) = \frac{1}{-1/2}\begin{bmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}.$$

9. (c) $A(adj\ A) = A.A^{-1}|A| = |A|\,I$.

10. (b) A^{-1} में द्वितीय पंक्ति व तृतीय स्तम्भ का अवयव A के अवयवों के सहखण्डों के आव्यूह के c_{32} अवयव को $\Delta = |A| = -2$ से विभाजित करने पर प्राप्त होता है।

अतः अभीष्ट अवयव $= \dfrac{(-1)^{3+2}M_{32}}{-2} = \dfrac{-(-2)}{-2} = -1$,

जहाँ $M_{32} = A$ में c_{32} का उपसारणिक

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 0 - 2 = -2.$$

11. (c) $R(s)R(t) = \begin{bmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos(s+t) & \sin(t+s) \\ -\sin(s+t) & \cos(t+s) \end{bmatrix} = R(s+t).$$

12. (b) चूंकि A, B सममित आव्यूह हैं $\Rightarrow A = A'$ व $B = B'$

$\therefore (AB - BA)' = (AB)' - (BA)' = B'A' - A'B'$

$= -(A'B' - B'A') = -(AB - BA)$

$\Rightarrow (AB - BA)$ विषम सममित आव्यूह हैं।

13. (a) $(M'AM)' = M'A'M = M'AM$

(A सममित है अतः $M'AM$ सममित आव्यूह है).

14. (b) एक वर्ग आव्यूह, लाम्बिक आव्यूह होगा यदि $A'A = I = AA'$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$\Rightarrow AA' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A'A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore AA' = A'A = I.$

15. (a) $A^{-1} = \dfrac{adj\,A}{|A|}$

लेकिन $|A| = \begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix} = ab - cd$ और $adj\,A = \begin{bmatrix} b & -c \\ -d & a \end{bmatrix}$

अतः $A^{-1} = \dfrac{1}{ab-cd}\begin{bmatrix} b & -c \\ -d & a \end{bmatrix}$.

16. (b) यह स्पष्ट है।

17. (a) माना $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$, $\therefore |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 12 = -8$

A के अवयवों के सहखण्डों का आव्यूह

अर्थात्, $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -(-4) \\ -(-3) & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore adjA = A$ के अवयवों के सहखण्डो के आव्यूह का परिवर्त

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta} adjA = \dfrac{1}{-8}.\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

18. (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 32 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 32 & -6 & 2 \end{bmatrix}$.

19. (a) $A(adj\,A) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$.

वैकल्पिक : $A(adj\,A) = |A|\,I = 10\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$.

20. (d) चूंकि $(A + A')' = A' + A = A + A'$, $\therefore$ यह सममित है

$(AA')' = (A')'A' = AA'$, $\therefore$ यह सममित है

$(A'A)' = A'(A')' = A'A$, $\therefore$ यह सममित है

लेकिन $(A - A')' = A' - A \ne A - A'$.

अतः यह सममित नहीं है।

21. (b) माना $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

A के अवयवों के सहखण्डों का आव्यूह

$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -(-\sin\alpha) \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$\therefore adjA = A$ के सहखण्डों के आव्यूह का परिवर्त

$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$\therefore A\,adjA = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, (दिया है) $\Rightarrow k = 1$.

22. (a) $3A^3 + 2A^2 + 5A + I = 0 \Rightarrow I = -3A^3 - 2A^2 - 5A$

$\Rightarrow IA^{-1} = -3A^2 - 2A - 5I \Rightarrow A^{-1} = -(3A^2 + 2A + 5I)$.

23. (b) यह स्पष्ट है।

24. (d) दिये गये कथन सत्य हैं।

25. (b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

26. (a) माना A एक सममित आव्यूह है, तब $AA^{-1} = I \Rightarrow (AA^{-1})^T = I$

$\Rightarrow (A^{-1})^T A^T = I \Rightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

$\Rightarrow (A^{-1})^T = (A)^{-1}$, $(\because A^T = A)$

$\Rightarrow A^{-1}$ एक सममित आव्यूह है।

27. (a) चूँकि A सममित है, अतः $A^T = A$

अब $(A^n)^T = (A^T)^n = (A)^n$

$\therefore A^n$ भी एक सममित आव्यूह है।

28. (d) चूँकि A एक विषम सममित आव्यूह है, अतः

$A^T = -A \Rightarrow (A^T)^n = (-A)^n$

$\Rightarrow (A^n)^T = \begin{cases} A^n, \text{ यदि } n \text{ सम है} \\ -A^n, \text{ यदि } n \text{ विषम है} \end{cases}$

29. (a) चूँकि $\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

30. (b) माना, $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & -3\\2 & -1 & 3\end{bmatrix}$; $adj(A)=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\A_{12} & A_{22} & A_{32}\\A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A_{11}=3, A_{12}=-9, A_{13}=-5$

$A_{21}=-4, A_{22}=1, A_{23}=3$

$A_{31}=-5, A_{32}=4, A_{33}=1$

$\Rightarrow Adj(A)=\begin{bmatrix}3 & -4 & -5\\-9 & 1 & 4\\-5 & 3 & 1\end{bmatrix}$.

31. (b) चूँकि $\begin{bmatrix}5 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\3 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$.

32. (b) चूँकि दिया गया आव्यूह सममित है, इसलिए $a_{12}=a_{21}\Rightarrow x+2=2x-3\Rightarrow x=5$.

33. (a) माना $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\1 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=14$

$\therefore\ adj\,A=\begin{bmatrix}4 & 2\\-1 & 3\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{14} & \frac{2}{14}\\\frac{-1}{14} & \frac{3}{14}\end{bmatrix}$.

34. (c) यह एक विषम सममित आव्यूह है।

35. (a) $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\5 & 3\end{bmatrix}$, $A^T=\begin{bmatrix}1 & 5\\-2 & 3\end{bmatrix}$, $A+A^T=\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 6\end{bmatrix}$.

36. (a) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=-1(1+0)=-1$

$adj(A)=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\A_{12} & A_{22} & A_{32}\\A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\ A_{11}=0, A_{12}=-1, A_{13}=0$

$A_{21}=-1, A_{22}=0, A_{23}=0$

$A_{31}=0$, $A_{32}=0, A_{33}=-1$

$\Rightarrow\ A^{-1}=\frac{adj(A)}{|A|}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}=A$.

37. (a) चूँकि $|adj\,A|=|A|^{n-2}$, $\therefore |A|=0$

$\Rightarrow |adj\,A|=0\Rightarrow adj\,A$ भी अव्युत्क्रमणीय है।

38. (b) माना $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=1(1+0)=1$

$Adj(A)=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\A_{12} & A_{22} & A_{32}\\A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}$

$Adj(A)=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^{-1}=\frac{Adj(A)}{|A|}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

39. (c) यदि $A'=A$, तब A' की कोटि A के बराबर होगी, अतः यह एक वर्ग आव्यूह है।

40. (c) $A.\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=2I$.

41. (a) चूँकि यह विषम कोटि के विषम सममित आव्यूह का सारणिक है। अतः विकल्प (a) सही है।

42. (b) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 2\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}$,

$A_{11}=1, A_{21}=-2, A_{31}=4$

$A_{12}=4, A_{22}=1, A_{32}=-2$

$A_{13}=-2, A_{23}=4, A_{33}=1$

$Adj(A)=\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\4 & 1 & -2\\-2 & 4 & 1\end{bmatrix}$.

43. (b) यह एक आधारभूत तथ्य है।

44. (c) यह स्पष्ट है।

45. (a) $|A|=3, AdjA=\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 3\end{pmatrix}$; $\therefore\ A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\ (A^{-1})^3=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 3\end{pmatrix}^3=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}1 & -26\\0 & 27\end{pmatrix}$.

46. (b) दिया गया आव्यूह व्युत्क्रमणीय नहीं है, यदि $\begin{vmatrix}1 & a & 2\\1 & 2 & 5\\2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow\ 1(2-5)-a(1-10)+2(1-4)=0$

$\Rightarrow\ -3+9a-6=0\Rightarrow a=1$.

47. (b) $A(adj.A)=|A|I\Rightarrow\begin{vmatrix}10 & 0\\0 & 10\end{vmatrix}=10.\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}$.

48. (d) $a_{ij}=i^2-j^2$ एक वर्ग आव्यूह है।

विषम सममित आव्यूह के लिए $a_{ij}=-a_{ji}$

$\Rightarrow a_{ij}=i^2-j^2$ तथा $a_{ji}=j^2-i^2$

$\Rightarrow a_{ij}+a_{ji}=0\Rightarrow a_{ij}=-a_{ji}$.

अतः a_{ij} विषम सममित आव्यूह है।

49. (a) $A^{-1}=\frac{Adj(A)}{|A|}$; $A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -7\\-1 & 4\end{bmatrix}$

50. (c) यहाँ $C_{11}=1, C_{12}=-2, C_{13}=-2$

$C_{21}=-1, C_{22}=3, C_{23}=3$

$C_{31}=0, C_{32}=-4, C_{33}=-3$

$\Rightarrow\ \det A=|A|=\begin{vmatrix}3 & -3 & 4\\2 & -3 & 4\\0 & -1 & 1\end{vmatrix}=1$

$\Rightarrow\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}.(Adj\,A)=\frac{1}{1}.\begin{bmatrix}C_{11} & C_{21} & C_{31}\\C_{12} & C_{22} & C_{32}\\C_{13} & C_{23} & C_{33}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\-2 & 3 & -4\\-2 & 3 & -3\end{bmatrix}$

अब, $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

और $A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} = A^{-1}$.

51. (b) $|Adj\ A| = |A|^{n-1} = d^{n-1}$.

52. (b) यह स्पष्ट हैं।

53. (d) माना $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 1$

$adj(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$.

अतः $A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$

$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. अतः अवयव $A_{13} = 7$.

54. (b) हम जानते हैं, कि $(AA^T) = (A^T)^T A^T = AA^T$ (पुनरावृत्ति नियम द्वारा)

$\therefore$ AA^T सममित आव्यूह है।

55. (b) $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \ne 0 \Rightarrow \lambda \ne -17$.

56. (a) यह स्पष्ट है।

57. (c) $\because I_3 I_3 = I_3$, इसलिए $I_3^{-1} = I_3$.

58. (b) दिया गया आव्यूह विषम सममित है, $[\because A' = -A]$.

59. (b) $AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$

$(AB)^T = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

60. (b) दिये गए आव्यूह A के लिए $adj\ (A)$ विकर्णों के अवयवों को आपस में बदलकर तथा अविकर्णीय अवयवों के चिन्हों को आपस में बदलकर प्राप्त कर सकते हैं, यहाँ $adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

61. (b) $A + A^T$ वर्ग आव्यूह है

$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A$

अतः A एक सममित आव्यूह है।

62. (b) $|A| = (ad - bc)$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

63. (d) $|A| = 1 \ne 0$, इसलिए A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है, अतः विकल्प (d) सही नहीं है।

64. (c) $A^2 - A + I = 0$

$\Rightarrow I = A - A^2 \Rightarrow I = A(I - A)$

$\Rightarrow A^{-1}I = A^{-1}(A(I-A)) \Rightarrow A^{-1} = I - A$.

65. (a) $(B^{-1}A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}(B^{-1})^{-1} = AB$

(व्युत्क्रम के पुनरावृत्ति नियम से)

$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

66. (b) जब $a_{ij} = 0$, ($i \ne j$ के लिए) तथा a_{ij} अचर है, ($i = j$ के लिए), तब आव्यूह $[a_{ij}]_{n \times n}$ को अदिश आव्यूह कहा जाता है।

67. (b) दिया है, A व B एक ही कोटि के वर्ग आव्यूह हैं। हम जानते है कि यदि A व B एक ही कोटि के व्युत्क्रमणीय आव्यूह हों, तब $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

68. (b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|}$

$A^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

और $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$; $X = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$.

69. (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

$adj\ A = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & +1 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -11$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/11 & 2/11 \\ 3/11 & -1/11 \end{bmatrix}$.

70. (d) दिया है, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$. हम जानते हैं, कि $A^{-1} = \frac{adj.A}{|A|}$.

इसलिए, $|A| = [12 - 12] = 0$. चूँकि $|A|$ शून्य है,

$\therefore$ A के लिए व्युत्क्रम का कोई अस्तित्व नहीं है।

71. (b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $adj\ A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

$|adj\ A| = (4 \times 4) - (-3 \times -2) = 16 - 6$

$|adj\ A| = 10$.

72. (a) $A^2 = O$ (शून्य आव्यूह) तथा 2 न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक है, जिसके लिए $A^2 = O$. अतः A घातांक (Index) 2 का शून्यभावी (Nilpotent) आव्यूह है।

73. (d) चूँकि A के लिए, $\begin{bmatrix} i & 1-2i \\ -1-2i & 0 \end{bmatrix}(\overline{A})^T = -A$.

अतः A विषम हरमीशियन (Hermitian) आव्यूह है।

74. (b) माना $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

तब, $A_{11} = 1, A_{12} = -2, A_{13} = -2$

$A_{21} = -1\ , A_{22} = 3\ , A_{23} = 3$

$A_{31} = 0\ ,\ A_{32} = -4\ , A_{33} = -3$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

75. (a) $K = [|A|]^{-1} = \frac{-1}{6}$.

76. (b) यह स्पष्ट है।

77. (a) $A.(adj(A)) = |A|I$

यहाँ $|A| = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

अतः, $A.(adj(A)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

78. (a) $A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{1}{|A|}.adj(A)$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $|A| = 0 - 1(1-9) + 2(1-6) = 8 - 10$

$|A| = -2 \neq 0$

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$A_{11} = (-1)^{1+1}[(2)(1) - (3)(1)] = -1$

$A_{12} = 8,\ \ A_{13} = -5\ ,\ A_{21} = 1\ ,\ A_{22} = -6$

$A_{23} = 3\ , A_{31} = -1\ ,\ A_{32} = 2\ ,\ A_{33} = -1$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

79. (d) विकल्पों के निरीक्षण से, $AA^{-1} = I$.

80. (a) यह स्पष्ट है।

81. (d) $K = |A|\ ; |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 11$.

82. (c) $A[adj(A)] = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|\ I$

$[\because\ |A| = 21 - 20 = 1]$.

83. (a) $A^{-1} = A^2$, क्योंकि $A^3 = I$.

84. (d) चूँकि $A.A = I$, इसलिए $A^{-1} = A$.

85. (a) माना $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$|A| = 4 + 6 = 10 \neq 0$

अब, $A_{11} = 4\ ,\ A_{12} = -3\ ,\ A_{21} = -(-2) = 2\ ,\ A_{22} = 1$

$\therefore\ adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore\ A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

ट्रिक : विकल्प के निरीक्षण से, $AA^{-1} = I$

$$\Rightarrow AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{10} & 0 \\ 0 & \frac{10}{10} \end{bmatrix}$$

$$= AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

86. (d) माना $A = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$, $|A| = 1$

$adj(A) = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$.

87. (a) दिया है, $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 10A^{-1}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow\ -5 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 5$

(R_2 और C_1 के अवयव की समानता से).

88. (b) $A(adj\ A) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

या $A(adj\ A) = 10\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 10I$ .....(i)

और $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj\ A)$

$A(adj\ A) = |A|\ I$ .....(ii)

$\therefore$ समीकरण (i) व (ii) से, $|A| = 10$.

89. (b) स्पष्ट है, कि $(ABC)' = C'B'A'$.

90. (c) आधारभूत गुणधर्म से, $adj(\lambda X) = \lambda^{n-1}(adj\ X)$.

यहाँ $n = 3$

$\therefore adj(\lambda X) = \lambda^{3-1}(adj\ X)$

$adj(\lambda X) = \lambda^2(adj\ X)$.

91. (c) $X = \begin{bmatrix} -x & -y \\ z & t \end{bmatrix}$; $adj\ X = \begin{bmatrix} t & y \\ -z & -x \end{bmatrix}$

$\therefore$ $(adj\ (X))$ का परिवर्त आव्यूह $= \begin{bmatrix} t & -z \\ y & -x \end{bmatrix}$.

92. (a) $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$|A| = 11, A_{11} = 1, A_{12} = -3, A_{21} = 2, A_{22} = 5$

$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

93. (c) दिया है, $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&-2&4\end{bmatrix}$, $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6&0&0\\0&4&-1\\0&2&1\end{bmatrix}$

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&-2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&5\\0&-10&14\end{bmatrix}$$

$$cA=\begin{bmatrix}c&0&0\\0&c&c\\0&-2c&4c\end{bmatrix};\ dI=\begin{bmatrix}d&0&0\\0&d&0\\0&0&d\end{bmatrix}$$

$\therefore\ A^{-1}=\frac{1}{6}[A^2+cA+dI]$ द्वारा,

$6=1+c+d$,(आव्यूहों की समानता से)

$\therefore$ (–6,11) सम्बंध को संतुष्ट करता है।

94. (a) यदि $Q=PAP^T$

$P^TQ=AP^T$, $(\because PP^T=I)$

$P^TQ^{2005}P=AP^TQ^{2004}P$

$=A^2P^TQ^{2003}P=A^3P^TQ^{2002}P=A^{2004}P^T(QP)$

$=A^{2004}P^T(PA)\ (Q=PAP^T\Rightarrow QP=PA)=A^{2005}$

$\Rightarrow A^{2005}=\begin{bmatrix}1&2005\\0&1\end{bmatrix}$.

95. (d) $|A|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&2&-3\\2&1&0\end{vmatrix}=1[3]+1[6]+1[-4]=5$

$$B=adj\ A=\begin{bmatrix}3&1&1\\-6&-2&3\\-4&-3&2\end{bmatrix}$$

$$adj\ B=\begin{bmatrix}5&-5&5\\0&10&-15\\10&5&0\end{bmatrix}=5A \text{ और } C=5A$$

$C=adj\ B; |C|=|adj\ B|;\ \therefore \frac{|adj\ B|}{|C|}=1.$

96. (a) यदि आव्यूह A, n कोटि का अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है, तब $A(adj\ A)=(adj\ A)A=O$ अर्थात् शून्य आव्यूह है।

97. (c) यह स्पष्ट है।

सारणिक व आव्यूह के बीच सम्बन्ध, आव्यूह की जाति (रैंक) तथा समीकरणों का हल

1. (a) चूँकि $(-A)=(-1)^3\det A=-\det A$.

2. (a) हम जानते हैं, कि यदि A, B n कोटि के वर्ग आव्यूह हैं, तो $|AB|=|A||B|$.

3. (a) $\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-2\\0&-6\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}x+2y+3z=6\\3x+y+2z=-6\\2x+3y+z=0\end{matrix}$

समीकरणों को हल करने पर,

$x=-4, y=2, z=2$.

4. (d) माना $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}&-1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$$\therefore\ AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}&-1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}.$$

वैकल्पिक : $\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}x+0y+z\\-x+y+0z\\0x-y+z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}x+z=1\\-x+y=1\\z-y=2\end{matrix}$

$\Rightarrow (x,y,z)=(-1,0,2)$.

5. (a) A एक विषम कोटि $(2n+1)$ का विषम सममित आव्यूह है इसलिए $A^T=-A$.

$\Rightarrow |A^T|=|-A|\Rightarrow |A^T|=(-1)^{2n+1}|A|$

$\Rightarrow |A^T|=-|A|\Rightarrow |A|=-|A|$

$\Rightarrow 2|A|=0\Rightarrow |A|=0$.

6. (a) यहाँ $|A|\neq 0$, अतः अद्वितीय हल है।

7. (c) $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=2I$

$$\therefore\ AB=2IB=2B=\begin{bmatrix}2&4&6\\0&2&6\\0&0&4\end{bmatrix}$$

इसलिए $|AB|=\begin{vmatrix}2&4&6\\0&2&6\\0&0&4\end{vmatrix}=2(8)=16$.

वैकल्पिक : $|A|=2\times2\times2=8$, $|B|=1\times1\times2=2$

$\therefore |AB|=|A||B|=2\times8=16$.

8. (b) $|A|=-1, |B|=3\Rightarrow |AB|=-3$

$\Rightarrow |3AB|=(3)^3(-3)=-81$.

9. (c) समीकरण (ii) से, $2(x+y)=3$ या $2.2=3$ या $4=3$ जो कि संगत नहीं हैं।
अतः दिये गये समीकरण का कोई हल नहीं है।

10. (c) $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&4&9\\1&8&27\end{bmatrix}$

माना A में अवयव a_{ij} का सहखण्ड c_{ij} है, तब
दिए गए आव्यूह A के सहखण्ड के अवयव

$C_{11}=\begin{vmatrix}4&9\\8&27\end{vmatrix}=36, C_{21}=\begin{vmatrix}2&3\\8&27\end{vmatrix}=-30,\ C_{31}=\begin{vmatrix}2&3\\4&9\end{vmatrix}=6$

$C_{12}=\begin{vmatrix}1&9\\1&27\end{vmatrix}=-18, C_{22}=\begin{vmatrix}1&3\\1&27\end{vmatrix}=24,\ C_{32}=\begin{vmatrix}1&3\\1&9\end{vmatrix}=-6$

$C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 4, C_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -6,\ C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2$

$\Rightarrow Adj(A) = \begin{bmatrix} 36 & -30 & 6 \\ -18 & 24 & -6 \\ 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow |Adj(A)| = 36(48-36) + 30(-36+24) + 6(108-96)$

$\Rightarrow |Adj(A)| = 144$.

11. (c) कोटि n के लिये, $|A|.adj(A) = |A|^3$, अतः $DD' = D^n$.

12. (a) $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 14 \Rightarrow D_1 \neq 0$

$\because D = 0$ तथा $D_1 \neq 0$, $\therefore$ निकाय असंगत है।

अतः इसका कोई हल नहीं है।

13. (a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-0) + 0 + 1(4-3) = 2.$

14. (a) दिया है, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$, $(R_2 \to 2R_2 + R_3)$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

$\because$ A में कोटि 3 का प्रत्येक उपसारणिक शून्य है तथा कोटि 2 का उपसारणिक अर्थात $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ अस्तित्व रखता है।

अतः जाति (Rank) = 2.

15. (d) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2(9-8) - 1(-3-2) - 1(4+3) = 7 - 7 = 0$

अतः हलों की संख्या शून्य है।

16. (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 10 \\ -6 & -12 & -15 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ $|A| = 0$, जाति (rank) 3 नहीं हो सकती है 2×2 का उपसारणिक, $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ जिसका सारणिक शून्य है। इसी प्रकार से

$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -12 & 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -6 & -15 \end{bmatrix}$

इन सभी का सारणिक शून्य है, अतः जाति (rank) 2 नहीं हो सकती है। अतः जाति (rank) 1 है।

17. (a) $|A^3| = 125$; $|A|^3 = 125 = 5^3$

$\Rightarrow |A| = 5 \Rightarrow \alpha^2 - 4 = 5 \Rightarrow \alpha = \pm 3$.

18. (d) हम जानते हैं कि, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

अब $x + y + z = 0$ ......(i), $x - 2y - 2z = 3$ ......(ii)

एवं $x + 3y + z = 4$ .....(iii)

हल करने पर, $x = 1, y = 2, z = -3$ अर्थात्, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

19. (a) $A \neq O$ व $B \neq O$; $\therefore AB = 0$

अतः $\det(A) = 0$ या $\det(B) = 0$.

20. (b) माना $\frac{x^2}{a^2} = X, \frac{y^2}{b^2} = Y$ तथा $\frac{z^2}{c^2} = Z$, तब दिए गए समीकरणों के निकाय $X + Y - Z = 1$, $X - Y + Z = 1$, $-X + Y + Z = 1$ हैं। आव्यूह गुणांक $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

स्पष्टतः, $|A| \neq 0$. इसलिए दिए गए समीकरणों के निकाय का अद्वितीय हल है।

21. (b) चूँकि A व B वर्ग आव्यूह है।

$\therefore |AB| = |A||B|$; $|A| = -10$;$|B| = -10$

$\therefore |AB| = 100$.

22. (a) दिया है, $|A| = 6$ तथा $B = 5A^2$

$\Rightarrow |B| = 5|A|^2 = 5 \times 36 = 180$.

23. (b) $|A_i| = \begin{vmatrix} a^i & b^i \\ b^i & a^i \end{vmatrix} = (a^i)^2 - (b^i)^2$, $|a| < 1, |b| < 1$

$\sum_{i=1}^{\infty} |A_i| = (a^2 - b^2) + (a^4 - b^4) + (a^6 - b^6) + ...$

$= (a^2 + a^4 + a^6 + ...) - (b^2 + b^4 + b^6 + ...)$

$= \frac{a^2}{1-a^2} - \frac{b^2}{1-b^2} = \frac{a^2 - a^2b^2 - b^2 + a^2b^2}{(1-a^2)(1-b^2)}$

$= \frac{a^2 - b^2}{(1-a^2)(1-b^2)}$.

24. (c) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $(R_3 \to R_3 - 2R_2$ के द्वारा)

$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $(C_1 \to C_1 - 4C_2 - 3C_3$ के द्वारा)

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

(C_1 को C_2 से बदलने पर तथा C_2 को C_3 से बदलने पर)

अतः आव्यूह की जाति 2 है।

25. (c) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$; $nA = \begin{bmatrix} n & 0 \\ n & n \end{bmatrix}, (n-1)I = \begin{bmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & n-1 \end{bmatrix}$

$nA - (n-1)I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix} = A^n$.

Critical Thinking Questions

1. (b) $A^2 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$; $\alpha = a^2 + b^2; \beta = 2ab.$

2. (d) $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$

$= abc \begin{vmatrix} \frac{1}{a}+1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$, $C_1 \to \frac{1}{a}C_1$, $C_2 \to \frac{1}{b}C_2$ द्वारा $C_3 \to \frac{1}{c}C_3$

$= abc \begin{vmatrix} \left(1+\Sigma\frac{1}{a}\right) & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \left(1+\Sigma\frac{1}{a}\right) & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{c} \\ \left(1+\Sigma\frac{1}{a}\right) & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$,

$\{C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ द्वारा$\}$

$= abc\left(1+\Sigma\frac{1}{a}\right) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ 1 & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{c} \\ 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$,

$\left\{\left(\Sigma\frac{1}{a}+1\right)\right.$ उभयनिष्ठ लेने पर$\left.\right\}$

$\Delta = abc\left(1+\Sigma\frac{1}{a}\right) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $R_2 \to R_2 - R_1$, $R_3 \to R_3 - R_1$ द्वारा

$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).1$, $\{C_1$ के अनुदिश प्रसार करने पर$\}$

इसलिए $\Delta = 0 \Rightarrow$ या तो $abc = 0$ या $1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

परन्तु a, b, c अशून्य हैं, अतः गुणन abc शून्य नहीं हो सकता है। अतः $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = -1$.

3. (c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = a(bc-a^2) - b(b^2-ca) + c(ab-c^2)$

$= -a^3 - b^3 - c^3 + 3abc = -1[a^3 + b^3 + c^3 - 3abc]$

$= -[(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)]$

$\Rightarrow k = -1$.

4. (b) $\Delta = \begin{vmatrix} p & b & c \\ p+a & q+b & 2c \\ a & b & r \end{vmatrix} = 0$

$= \begin{vmatrix} p & b & c \\ a & q & c \\ a & b & r \end{vmatrix} = 0$, $\{R_2 \to R_2 - R_1$ के प्रयोग से$\}$

$\begin{vmatrix} p & b & c \\ a-p & q-b & 0 \\ a-p & 0 & r-c \end{vmatrix} = 0$,

$\{R_2 \to R_2 - R_1$ व $R_3 \to R_3 - R_1$ से$\}$

सारणिक का प्रसार करने पर,

$p(q-b)(r-c) - b(a-p)(r-c) - c(q-b)(a-p) = 0$

$\Rightarrow (p-a)(q-b)(r-c)\left[\frac{p}{(p-a)} + \frac{b}{(q-b)} + \frac{c}{(r-c)}\right] = 0$

$\Rightarrow (p-a)(q-b)(r-c)\left[\frac{p}{(p-a)} + \frac{q}{(q-b)} - 1 + \frac{r}{(r-c)} - 1\right] = 0$

$\because\ p \ne a, q \ne b, r \ne c$

$\therefore\ \frac{p}{p-a} + \frac{q}{q-b} + \frac{r}{r-c} = 2$.

5. (b) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\beta-\alpha) & \cos(\gamma-\alpha) \\ \cos(\alpha-\beta) & 1 & \cos(\gamma-\beta) \\ \cos(\alpha-\gamma) & \cos(\beta-\gamma) & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \cos^2\alpha+\sin^2\alpha & \cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha & \cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma \\ \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta & \cos^2\beta+\sin^2\beta & \cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma \\ \cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma & \cos^2\beta+\sin^2\beta \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}^2$.

6. (a) दिया गया समीकरण है, $\begin{vmatrix} x+\alpha+\beta+\gamma & \beta & \gamma \\ x+\alpha+\beta+\gamma & x+\beta & \alpha \\ x+\alpha+\beta+\gamma & \beta & x+\gamma \end{vmatrix} = 0$,

$\{C_1 \to C_1 + (C_2 + C_3)\}$

या $(x+\alpha+\beta+\gamma)\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 1 & x+\beta & \alpha \\ 1 & \beta & x+\gamma \end{vmatrix} = 0$

या $(x+\alpha+\beta+\gamma)\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & x & \alpha-\gamma \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$, $\left\{\begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix}\right\}$

या $(x+\alpha+\beta+\gamma)[x^2 - 0] = 0$

या $x^2(x+\alpha+\beta+\gamma) = 0$

$\therefore\ x = 0$ या $x = -(\alpha+\beta+\gamma)$.

7. (d) दी गई समीकरण $\begin{vmatrix} x & 3 & 7 \\ 2 & x & -2 \\ 7 & 8 & x \end{vmatrix} = 0$ का एक मूल 5 है।

दिये गये समीकरण का प्रसार करने पर,

$x[x^2 - (-16)] - 3[2x - (-14)] + 7[16 - 7x] = 0$

$\Rightarrow x^3 + 16x - 6x - 42 + 112 - 49x = 0$

$\Rightarrow x^3 - 39x + 70 = 0$

चूँकि 5 दिये गये समीकरण का एक मूल है, इसलिए

$x^3 - 5x^2 + 5x^2 - 25x - 14x + 70 = 0$

$\Rightarrow x^2(x-5) + 5x(x-5) - 14(x-5) = 0$

$\Rightarrow (x-5)(x^2 + 5x - 14) = 0$

$\Rightarrow (x-5)(x-2)(x+7) = 0$ या $x = 5, 2$ और -7.

8. (b) हम दिये गये सारणिक को दो सारणिकों के गुणन के रूप में $\Delta = 0.0 = 0$ इस प्रकार से लिख सकते हैं, (हल करने पर)।

अतः यह a, b, c व d से स्वतंत्र है।

9. (a) $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ के द्वारा,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+\omega^n+\omega^{2n} & \omega^n & \omega^{2n} \\ 1+\omega^n+\omega^{2n} & 1 & \omega^n \\ 1+\omega^n+\omega^{2n} & \omega^{2n} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \omega^n & \omega^{2n} \\ 0 & 1 & \omega^n \\ 0 & \omega^{2n} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

($\because 1 + \omega^n + \omega^{2n} = 0$; यदि n, 3 का गुणज नहीं है)।

10. (d) दिया है, $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = 0.$

दिये गये सारणिक के प्रसार से,

$a(a^2 - 0) - b(0 - b^2) = 0$ या $a^3 + b^3 = 0$

अर्थात् $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = -1$

इसलिए -1 का एक घनमूल $\left(\frac{a}{b}\right)$ है।

11. (a) ΔABC में, दिया है $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & c & a \\ 1 & b & c \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 1(c^2 - ab) - a(c-a) + b(b-c) = 0$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$

$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0$

$\Rightarrow (a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (c^2 + a^2 - 2ca) = 0$

$\Rightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$

यहाँ तीनों अवयवों के वर्गों का योग शून्य हो सकता है, यदि और केवल यदि $a = b = c$

$\Rightarrow \Delta ABC$ एक समबाहु त्रिभुज है

$\Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C = 60^o$

$\therefore \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = (\sin^2 60^o + \sin^2 60^o + \sin^2 60^o)$

$$= 3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

12. (a) $\begin{vmatrix} 1 & \log_x y & \log_x z \\ \log_y x & 1 & \log_y z \\ \log_z x & \log_z y & 1 \end{vmatrix}$

$= (1 - \log_z y \log_y z) - \log_x y(\log_y x - \log_z x \log_y z)$

$+ \log_x z(\log_y x \log_z y - \log_z x)$

$= (1-1) - (1 - \log_x y \log_y x) + (\log_x z \log_z x - 1) = 0$

{चूँकि $\log_x y . \log_y x = 1$}.

13. (d) माना गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद A तथा सार्वानुपात R हो, तब

$l = AR^{p-1} \Rightarrow \log l = \log A + (p-1)\log R$ .....(i)

$m = AR^{q-1} \Rightarrow \log m = \log A + (q-1)\log R$ .....(ii)

$n = AR^{r-1} \Rightarrow \log n = \log A + (r-1)\log R$ .....(iii)

(i), (ii) तथा (iii) को क्रमशः $(q-r), (r-p)$ तथा $(p-q)$ से गुणा करके जोड़ने पर हम पाते हैं कि

$\log l(q-r) + \log m(r-p) + \log n(p-q) = 0$

$\therefore \Delta = 0$.

14. (d) दिया है, $x^a y^b = e^m, x^c y^d = e^n$

$\Rightarrow a \log x + b \log y = m$ तथा $c \log x + d \log y = n$

क्रेमर नियम के द्वारा, $\log x = \frac{\Delta_1}{\Delta_3}$ तथा $\log y = \frac{\Delta_2}{\Delta_3}$

$\Rightarrow x = e^{\Delta_1/\Delta_3}$ तथा $y = e^{\Delta_2/\Delta_3}$.

15. (a) $\Delta = -(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$

$= -(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$= -\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$,

दी गई शर्तो के अनुसार उपरोक्त सम्बन्ध स्पष्टतः ऋणात्मक है।

16. (c) समघातीय समीकरणों के निकाय

$x - cy - bz = 0$

$cx - y + az = 0$

$bx + ay - z = 0$

का एक अशून्य हल होगा (चूँकि x, y, z सभी अशून्य हैं),

यदि $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ c & -1 & a \\ b & a & -1 \end{vmatrix} = 0$

अर्थात्, यदि $(1 - a^2) + c(-c - ab) - b(ac + b) = 0$

अर्थात्, यदि $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$.

17. (a) यदि A, कोटि 3 का वर्ग आव्यूह है, तो

$|-2A| = (-2)^3 |A| = -8|A|$.

18. (c) चूँकि समीकरण निकाय का अशून्य हल है,

$\therefore \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & b-1 & 0 \\ 1-a & 0 & c-1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} R_2 \to R_2 - R_1 \text{ द्वारा} \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a(b-1)(c-1) - 1.(1-a)(c-1) - 1.(1-a)(b-1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-a} - 1 + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} = 1.$$

19. (d) हम जानते हैं, $A.adj(A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$

$$\therefore |A|.|adj(A)| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix}$$

$\therefore |A|.adj|A| = |A|^3$

दिया है, $|A| = 8$

$\therefore 8.adj|A| = 8^3$ या $adj|A| = 8^2 = (2^3)^2 = 2^6$.

20. (b,d) $A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & a-4 \\ 1 & -2 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a+6 \\ 0 & 0 & -a-6 \\ 1 & -2 & a+1 \end{vmatrix}$,

(संक्रिया $R_1 \to R_1 + R_3$ और $R_2 \to R_2 - 2R_3$)

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a-6 \\ 1 & -2 & a+1 \end{vmatrix}$, (संक्रिया $R_1 \to R_1 + R_2$)

जब $a = -6, A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix}$, $\therefore \rho(A) = 1$

जहाँ $\rho(A) =$ अशून्य पंक्तियों की संख्या

जब $a = 6, A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix}$, $\therefore \rho(A) = 2$

जब $a = 1, A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$, $\therefore \rho(A) = 2$

जब $a = 2, A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$, $\therefore \rho(A) = 2$.

21. (c) चूँकि $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}.$$

22. (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A.A = A^2 = \begin{bmatrix} 6 & 11 & 7 \\ -11 & 4 & -11 \\ 7 & 11 & 12 \end{bmatrix}$,

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, तब $A^2 + 9I = \begin{bmatrix} 15 & 11 & 7 \\ -11 & 13 & -11 \\ 7 & 11 & 21 \end{bmatrix}$.

23. (b) $|A| = 1 + \tan^2\frac{\theta}{2} = \sec^2\frac{\theta}{2}$

$AB = I \Rightarrow B = IA^{-1}$

$$\frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\tan\frac{\theta}{2} \\ \tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix}}{\sec^2\frac{\theta}{2}} = \cos^2\frac{\theta}{2}.A^T.$$

24. (b) $(A-2I)(A-3I) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$.

25. (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A.A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 1 \\ -9 & -2 & -7 \\ 21 & 11 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3 - 3A^2 - A + 9I_3 = 0.$$

26. (c) $\begin{matrix} 3X + 2Y = I \\ 2X - Y = O \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3X + 2Y = I \\ 4X - 2Y = O \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 7X = I \\ X = \frac{1}{7}I \end{matrix}$

(एक साथ हल करने पर)

अतः समीकरण (i) से, $2Y = I - \frac{3}{7}I = \frac{4}{7}I \Rightarrow Y = \frac{2}{7}I$.

27. (c) यह स्पष्ट है।

28. (a) $A_{3\times4} \Rightarrow A'_{4\times3}$; अब $A'B$ परिभाषित है

$\Rightarrow B$ की कोटि $3\times p$ है

पुनः $B_{3\times p}A'_{4\times3}$ परिभाषित है $\Rightarrow p = 4$

अतः B की कोटि 3×4 है।

29. (c) $A' = [1\ 2\ 3]$, अतः $AA' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [1\ 2\ 3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$.

30. (b) यह एक आधारभूत तथ्य है।

31. (c) चूँकि $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}$

और $A^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{bmatrix}$,.....

$$\Rightarrow A^n = A^{n-1}.A = \begin{bmatrix} a^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}.$$

नोट : विद्यार्थी इस प्रश्न को एक सूत्र की तरह याद रखें।

32. (d) माना $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $|A| = 3(-7) - 5(3) + 7(5) = -1$

$$Adj\,(A) = \begin{bmatrix} -7 & -3 & 26 \\ -3 & -1 & 11 \\ 5 & 5 & -19 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\,(A)}{|A|}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -26 \\ 3 & 1 & -11 \\ -5 & -5 & 19 \end{bmatrix}.$$

33. (c) $A(z) = A\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = \left[\frac{1+xy}{(1-x)(1-y)}\right]$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \\ -\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ A(x).A(y) = A(z).$

34. (c) $|A| = -20$

$\therefore a_{23} = \dfrac{6 \text{ का सहखण्ड}}{-20} = \dfrac{-8}{20} = \dfrac{-2}{5}.$

35. (a) हम जानते हैं, कि

$$F(\alpha)F(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$\therefore\ F(-\alpha) = [F(\alpha)]^{-1}.$

36. (b) दिया है, $B = -A^{-1}BA$

$\therefore\quad AB = -AA^{-1}BA = -IBA = -BA$

$\therefore\quad AB = -BA$

अब $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

$= A^2 + B^2$, $[\because BA = -AB]$

अतः $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

37. (d) दिया है, सभी वास्तविक सख्याओं के लिए 2×2 कोटि के वर्ग आव्यूह हैं। हम जानते हैं, कि सभी 2×2 आव्यूहों के लिए व्युत्क्रम अभिगृहित का अस्तित्व नहीं है इसलिए सभी 2×2 आव्यूहों का समुच्चय सभी वास्तविक संख्याओं के लिए समूह नहीं है।

38. (b) $AB = AC \Rightarrow B = C$

यदि A^{-1} का अस्तित्व है $\Leftrightarrow$ A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

39. (a) विषम सममित आव्यूह में, $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j = 1, 2, 3$ एवं $j = i$ के लिये, $a_{ii} = -a_{ji} \Rightarrow$ प्रत्येक $a_{ii} = 0$.

अतः आव्यूह $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -6 \\ -5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ विषम सममित है।

40. (c) $(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T$

$= A^T - A$, $[\because (A^T)^T = A]$

$= -(A - A^T)$

$\therefore\ A - A^T$ विषम सममित आव्यूह है।

41. (c) $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

अतः आव्यूह, कोटि 2 का शून्यभावी (Nilpotent) आव्यूह है।

42. (a) चूँकि दिया गया आव्यूह, $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$AA^T = A^TA = I_{(3\times3)}$. अतः A लाम्बिक आव्यूह है

43. (a) हम जानते हैं कि एक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ उपरित्रिभुजीय आव्यूह होगा, यदि $a_{ij} = 0$ जबकि $i > j$.

जहाँ, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{4\times4}$

कुल शून्यों की संख्या $= \dfrac{4(4-1)}{2} = 6 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

44. (c) माना $A = \begin{bmatrix} \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \end{bmatrix}$

और $A^T = \begin{bmatrix} \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \end{bmatrix}$ और $AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$\therefore |A| = \pm1$.

45. (d) $n = 2 \times 3 \times 4 = 24$.

सारणिक एवं आव्यूह

SET Self Evaluation Test -9

1. यदि $A=\begin{vmatrix}\sin(\theta+\alpha) & \cos(\theta+\alpha) & 1\\ \sin(\theta+\beta) & \cos(\theta+\beta) & 1\\ \sin(\theta+\gamma) & \cos(\theta+\gamma) & 1\end{vmatrix}$,तब [Orissa JEE 2003]
   (a) $A=0$, θ के सभी मानों के लिये
   (b) A , θ का एक विषम फलन है
   (c) $A=0$, $\theta=\alpha+\beta+\gamma$ के लिये
   (d) A , θ से स्वतंत्र है

2. यदि $f(x)=\begin{vmatrix}1 & x & x+1\\ 2x & x(x-1) & (x+1)x\\ 3x(x-1) & x(x-1)(x-2) & (x+1)x(x-1)\end{vmatrix}$, तो $f(100)=$
   [IIT 1999; MP PET 2000; Kerala (Engg.) 2005; DCE 2005]
   (a) 0 (b) 1
   (c) 100 (d) –100

3. सारणिक $\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ \cos(p-d)x & \cos px & \cos(p+d)x\\ \sin(p-d)x & \sin px & \sin(p+d)x\end{vmatrix}$ का मान किस प्राचल पर निर्भर नहीं करता है
   [IIT (Re-Exam) 1997; Pb. CET 2000]
   (a) a (b) p
   (c) d (d) x

4. यदि $1,\omega,\omega^2$ इकाई के घनमूल हैं, तब $\Delta=\begin{vmatrix}1 & \omega^n & \omega^{2n}\\ \omega^n & \omega^{2n} & 1\\ \omega^{2n} & 1 & \omega^n\end{vmatrix}$ का मान होगा [AIEEE 2003]
   (a) 0 (b) 1
   (c) ω (d) ω^2

5. सारणिक $\begin{vmatrix}10! & 11! & 12!\\ 11! & 12! & 13!\\ 12! & 13! & 14!\end{vmatrix}$ का मान होगा [Orissa JEE 2003]
   (a) $2(10!\,11!)$ (b) $2(10!\,13!)$
   (c) $2(10!\,11!\,12!)$ (d) $2(11!\,12!\,13!)$

6. A,B,C तथा P,Q,R के प्रत्येक मान के लिए $\begin{vmatrix}\cos(A-P) & \cos(A-Q) & \cos(A-R)\\ \cos(B-P) & \cos(B-Q) & \cos(B-R)\\ \cos(C-P) & \cos(C-Q) & \cos(C-R)\end{vmatrix}$ का मान है [IIT 1994]
   (a) 0 (b) $\cos A\cos B\cos C$
   (c) $\sin A\sin B\sin C$ (d) $\cos P\cos Q\cos R$

7. $\begin{vmatrix}\sin x & \cos x & \cos x\\ \cos x & \sin x & \cos x\\ \cos x & \cos x & \sin x\end{vmatrix}=0$ के विभिन्न वास्तविक हलों की संख्या होगी $\left(\text{जबकि } -\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$ [IIT Screening 2001]
   (a) 0 (b) 2
   (c) 1 (d) 3

8. माना $\Delta_1=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ और $\Delta_2=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}$,तब $\Delta_1\times\Delta_2$ को कितने सारणिकों के योग के रूप में प्रदर्शित कर सकते हैं
   [Tamilnadu (Engg.)2001]
   (a) 9 (b) 3
   (c) 27 (d) 2

9. यदि $A=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}\cos^2\phi & \sin\phi\cos\phi\\ \sin\phi\cos\phi & \sin^2\phi\end{bmatrix}$ तथा θ व ϕ में $\frac{\pi}{2}$ का अन्तर है, तो $AB=$
   (a) I (b) O
   (c) $-I$ (d) इनमें से कोई नहीं

10. यदि 2×2 कोटि के सारणिक का गुणन समूह $\begin{pmatrix}a & a\\ a & a\end{pmatrix}$ रूप में है, जिसके लिये $a\ne 0$ तथा $a\in R$, तो $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ का प्रतिलोम होगा
    [Karnataka CET 1999]
    (a) $\begin{pmatrix}\frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$
    (c) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ (d) अस्तित्व नहीं है

11. यदि $AX=B$ के लिये, $B=\begin{bmatrix}9\\52\\0\end{bmatrix}$ तथा $A^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -4 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4}\\ 2 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\end{bmatrix}$, तो $X=$
    [MP PET 1996]
    (a) $\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 2\end{bmatrix}$
    (c) $\begin{bmatrix}-4\\2\\3\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}3\\ \frac{3}{4}\\ -\frac{3}{4}\end{bmatrix}$

12. आव्यूह A इस प्रकार है कि $A^2 = 2A - I$, जहाँ I तत्समक आव्यूह है, तब $n \ge 2$ के लिये A^n का मान है [EAMCET 1992]

(a) $nA-(n-1)I$ (b) $nA-I$

(c) $2^{n-1}A-(n-1)I$ (d) $2^{n-1}A-I$

13. माना p एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तथा $1+p+p^2+....+p^n = O$ (O एक शून्य आव्यूह प्रदर्शित करता है), तब $p^{-1} =$ [Orissa JEE 2002]

(a) p^n (b) $-p^n$

(c) $-(1+p+....+p^n)$ (d) इनमें से कोई नहीं

14. यदि $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, तब $P_{22} =$ [Orissa JEE 2004]

(a) 40 (b) – 40

(c) – 20 (d) 20

15. यदि $C = 2\cos\theta$, तब सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} C & 1 & 0 \\ 1 & C & 1 \\ 6 & 1 & C \end{vmatrix}$ का मान होगा [Orissa JEE 2002]

(a) $\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta}$ (b) $\frac{2\sin^2 2\theta}{\sin\theta}$

(c) $4\cos^2\theta(2\cos\theta - 1)$ (d) इनमें से कोई नहीं

16. यदि $\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & b & b \\ a & x & b \\ a & a & x \end{vmatrix}$ और $\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & b \\ a & x \end{vmatrix}$ हो, तब [MNR 1986; Kurukshetra CEE 1998; UPSEAT 2000]

(a) $\Delta_1 = 3(\Delta_2)^2$ (b) $\frac{d}{dx}(\Delta_1) = 3\Delta_2$

(c) $\frac{d}{dx}(\Delta_1) = 2(\Delta_2)^2$ (d) $\Delta_1 = 3\Delta_2^{3/2}$

17. यदि $a_1, a_2, a_3 ..... a_n ....$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तब सारणिक $\begin{vmatrix} \log a_n & \log a_{n+1} & \log a_{n+2} \\ \log a_{n+3} & \log a_{n+4} & \log a_{n+5} \\ \log a_{n+6} & \log a_{n+7} & \log a_{n+8} \end{vmatrix}$ का मान होगा [AIEEE 2004, 05]

(a) – 2 (b) 1

(c) 2 (d) 0

18. सारणिक $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ में संख्या –3 के सहखण्ड व उपसारणिक का अनुपात क्या होगा [MP PET 1992]

(a) –1 (b) 0

(c) 1 (d) 2

19. यदि तृतीय कोटि के सारणिक का मान 11 हो, तो इसके अवयवों के सहखण्डों द्वारा बने सारणिक के वर्ग का मान होगा [Roorkee 1990; DCE 2000]

(a) 11 (b) 121

(c) 1331 (d) 14641

20. रैखिक समीकरणों का निकाय $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ तथा $a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$ पर विचार करते है। माना सारणिक $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta(a,b,c)$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं यदि $\Delta(a,b,c) \ne 0$, तब समीकरणों के अद्वितीय हल के लिये x का मान है [Pb. CET 2004]

(a) $\frac{\Delta(bcd)}{\Delta(abc)}$ (b) $\frac{-\Delta(bcd)}{\Delta(abc)}$

(c) $\frac{\Delta(acd)}{\Delta(abc)}$ (d) $-\frac{\Delta(abd)}{\Delta(abc)}$

21. यदि आव्यूह A इस प्रकार है कि $4A^3 + 2A^2 + 7A + I = O$, तब A^{-1} का मान होगा [MP PET 2001]

(a) $(4A^2 + 2A + 7I)$

(b) $-(4A^2 + 2A + 7I)$

(c) $-(4A^2 - 2A + 7I)$

(d) $(4A^2 + 2A - 7I)$

22. यदि $F(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ और $G(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$, तब $[F(\alpha)G(\beta)]^{-1} =$

(a) $F(\alpha) - G(\beta)$ (b) $-F(\alpha) - G(\beta)$

(c) $[F(\alpha)]^{-1}[G(\beta)]^{-1}$ (d) $[G(\beta)]^{-1}[F(\alpha)]^{-1}$

23. यदि बिन्दु $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ और (x_3, y_3) समरेखीय हों, तो आव्यूह $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$ की जाति (rank) सदैव निम्न से कम होगी [Orissa JEE 2003]

(a) 3 (b) 2

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

24. x के कितने मानों के लिये आव्यूह $\begin{bmatrix} 3 & -1+x & 2 \\ 3 & -1 & x+2 \\ x+3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ अंतराल $[-4, -1]$ में अव्युत्क्रमणीय होगा [Karnataka CET 2002]

(a) 2 (b) 0

(c) 3 (d) 1

25. यदि किसी व्युत्क्रमणीय आव्यूह A के आइगन 3, – 2 मान हैं तथा $|A| = 4$, तब $adj(A)$ के आइगन मान होंगे [Kurukshetra CEE 2002]

(a) $\frac{3}{4}, \frac{-1}{2}$ (b) $\frac{4}{3}, -2$

(c) 12, – 8 (d) – 12, 8

Answers and Solutions

(SET - 9)

1. (d) दिया है $A = \begin{vmatrix} \sin(\theta+\alpha) & \cos(\theta+\alpha) & 1 \\ \sin(\theta+\beta) & \cos(\theta+\beta) & 1 \\ \sin(\theta+\gamma) & \cos(\theta+\gamma) & 1 \end{vmatrix}$

संक्रिया $R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - R_1$ से,

$$\therefore A = \{\cos(\theta+\gamma) - \cos(\theta+\alpha)\}$$
$$\{\sin(\theta+\beta) - \sin(\theta+\alpha)\} - \{\cos(\theta+\beta)$$
$$-\cos(\theta+\alpha)\}\{\sin(\theta+\gamma) - \sin(\theta+\alpha)\}$$
$$= \sin(\beta-\gamma) - \sin(\beta-\alpha) - \sin(\alpha-\gamma),$$

जो कि θ से स्वतंत्र है।

2. (a) दिया गया सारणिक है,

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x+1 \\ 2x & x(x-1) & (x+1)x \\ 3x(x-1) & x(x-1)(x-2) & (x+1)x(x-1) \end{vmatrix}$$

$$= x(x+1)\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2x & x-1 & x \\ 3x(x-1) & (x-1)(x-2) & x(x-1) \end{vmatrix}$$

$$= x(x+1)(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & x-1 & x \\ 3x & x-2 & x \end{vmatrix},$$

($C_1 - C_3$ तथा $C_2 - C_3$ द्वारा)

$$= x(x+1)(x-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & -1 & x \\ 2x & -2 & x \end{vmatrix}$$

$$= x(x+1)(x-1)[-2x+2x] = 0$$

$\therefore\ f(x) = 0 \Rightarrow f(100) = 0$.

3. (b) $C_1 \to C_1 + C_3 - 2C_2 \cos dx$ से

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+a^2-2a\cos dx & a & a^2 \\ 0 & \cos px & \cos(p+d)x \\ 0 & \sin px & \sin(p+d)x \end{vmatrix}$$

$= (1+a^2-2a\cos dx)\sin dx$,(जो कि p से स्वतंत्र है)।

4. (a) $\Delta = 1(\omega^{3n}-1) + \omega^n(\omega^{2n}-\omega^{2n}) + \omega^{2n}(\omega^n - \omega^{4n})$

$\Delta = [(\omega^3)^n - 1] + 0 + \omega^{2n}[\omega^n - (\omega^3)^n.\omega^n]$

$\Delta = 1 - 1 + 0 + \omega^{2n}[\omega^n - \omega^n] = 0$.

5. (c) $\begin{vmatrix} 10! & 11! & 12! \\ 11! & 12! & 13! \\ 12! & 13! & 14! \end{vmatrix} = 10!\ 11!\ 12! \begin{vmatrix} 1 & 11 & 11\times12 \\ 1 & 12 & 12\times13 \\ 1 & 13 & 13\times14 \end{vmatrix}$

संक्रिया $R_2 \to R_2 - R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - R_1$ से,

$$10!11!12!\begin{vmatrix} 1 & 11 & 11\times12 \\ 0 & 1 & 24 \\ 0 & 2 & 50 \end{vmatrix} = 2(10!\ 11!\ 12!).$$

6. (a) दिये गये सारणिक का प्रसार करने पर,

$$\begin{vmatrix} \cos A\cos P+\sin A\sin P & \cos A\cos Q+\sin A\sin Q & \cos A\cos R+\sin A\sin R \\ \cos B\cos P+\sin B\sin P & \cos B\cos Q+\sin B\sin Q & \cos B\cos R+\sin B\sin R \\ \cos C\cos P+\sin C\sin P & \cos C\cos Q+\sin C\sin Q & \cos C\cos R+\sin C\sin R \end{vmatrix}$$

इस सारणिक को 8 सारणिकों के योग के रूप में लिखा जा सकता है जिनमें से प्रत्येक का मान 0 है।

जैसे, $\cos P\cos Q\cos R\begin{vmatrix} \cos A & \cos A & \cos A \\ \cos B & \cos B & \cos B \\ \cos C & \cos C & \cos C \end{vmatrix} = 0$

इसी प्रकार दूसरे सारणिकों को दिखाया जा सकता है

7. (c) यहाँ, $(2\cos x+\sin x)\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos x \\ 1 & \sin x & \cos x \\ 1 & \cos x & \sin x \end{vmatrix} = 0$

या $(2\cos x+\sin x)\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos x \\ 0 & \sin x-\cos x & 0 \\ 0 & 0 & \sin x-\cos x \end{vmatrix} = 0$

या $(2\cos x+\sin x)(\sin x-\cos x)^2 = 0$

$\therefore\ \tan x = -2, 1.$ लेकिन $\tan x \ne -2$ में $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

$\therefore\ \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

8. (c) $\Delta_1 \times \Delta_2$ में प्रत्येक पद तीन पदों का योग है अतः $\Delta_1\times\Delta_2$ के C_1, C_2 या C_3 में तीन पदों का योग है अतः $\Delta_1\times\Delta_2$ को $3\times3\times3 = 27$ सारणिकों के योग के रूप में लिख सकते हैं।

9. (b) $AB = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos^2\phi & \sin\phi\cos\phi \\ \sin\phi\cos\phi & \sin^2\phi \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi\cos(\theta-\phi) & \cos\theta\sin\phi\cos(\theta-\phi) \\ \cos\theta\sin\phi\cos(\theta-\phi) & \sin\theta\sin\phi\cos(\theta-\phi) \end{bmatrix}$$

$$= \cos(\theta-\phi)\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi \end{bmatrix}$$

$$= O,\ \left(\because \theta-\phi = \frac{\pi}{2}\right).$$

10. (d) 2×2 कोटि के सारणिक का गुणन समूह $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ के रूप में है। माना $A = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ चूँकि $|A| = 0$, इसलिये A के प्रतिलोम का कोई अस्तित्व नहीं है।

11. (a) $AX = B \Rightarrow A^{-1}.AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

12. (a) चूँकि $A^2 = 2A - I \Rightarrow A^2.A = (2A-I)A$

$\Rightarrow A^3 = 2A^2 - IA = 2(2A-I) - A \Rightarrow A^3 = 3A - 2I$

$\{\because IA = A$ और $A^2 = 2A - I\}$

इसी प्रकार , $A^4 = 4A-3I, A^5 = 5A-4I$

अतः, $A^n = nA-(n-1)I$.

13. (a) $1+p+p^2+.........+p^n = O$

दोनों पक्षों को p^{-1} से गुणा करने पर,

$\Rightarrow p^{-1}+I+Ip+..........+p^{n-1}I = O.p^{-1}$

$\Rightarrow p^{-1}+I(1+p+p^2+.........+p^{n-1}) = O$

$\Rightarrow p^{-1} = -(1+p+p^2+.........+p^{n-1})I$

$\Rightarrow p^{-1} = -(-p^n) = p^n$.

14. (a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{3\times3} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}_{3\times2} \begin{bmatrix} -4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$

$P = \begin{bmatrix} -3 & -14 \\ -8 & -20 \\ -11 & -26 \end{bmatrix}_{3\times2} \begin{bmatrix} -4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$

$P = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 4 \\ 32 & 40 & 28 \\ 44 & 55 & 40 \end{bmatrix}_{3\times3} \Rightarrow P_{22} = 40$.

15. (d) $\Delta = \begin{vmatrix} C & 1 & 0 \\ 1 & C & 1 \\ 6 & 1 & C \end{vmatrix} = C[C^2-1]-1[C-6]$

$\because C = 2\cos\theta$

$\Rightarrow \Delta = 2\cos\theta(4\cos^2\theta-1)-(2\cos\theta-6)$

$\Rightarrow \Delta = 8\cos^3\theta-4\cos\theta+6$.

16. (b) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & b & b \\ a & x & b \\ a & a & x \end{vmatrix} = x^3-3abx \Rightarrow \frac{d}{dx}\Delta_1 = 3(x^2-ab)$

तथा $\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & b \\ a & x \end{vmatrix} = x^2-ab \Rightarrow \frac{d}{dx}(\Delta_1) = 3(x^2-ab) = 3\Delta_2$.

17. (d) दिया है, $a_1, a_2, a_3 ..... a$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं

तब $r = \frac{a_2}{a_1}$ अर्थात् $r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = ...$

अतः $\log r = \log(a_{n+1})-\log(a_n) = \log(a_{n+2})-\log(a_{n+1}) = ...$

अब $\begin{vmatrix} \log a_n & \log a_{n+1} & \log a_{n+2} \\ \log a_{n+3} & \log a_{n+4} & \log a_{n+5} \\ \log a_{n+6} & \log a_{n+7} & \log a_{n+8} \end{vmatrix}$

संक्रिया $C_2 \to C_2-C_1$ और $C_3 \to C_3-C_2$

$= \begin{vmatrix} \log a_n & (\log a_{n+1}-\log a_n) & (\log a_{n+2}-\log a_{n+1}) \\ \log a_{n+3} & (\log a_{n+4}-\log a_{n+3}) & (\log a_{n+5}-\log a_{n+4}) \\ \log a_{n+6} & (\log a_{n+7}-\log a_{n+6}) & (\log a_{n+8}-\log a_{n+7}) \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \log a_n & \log r & \log r \\ \log a_{n+3} & \log r & \log r \\ \log a_{n+6} & \log r & \log r \end{vmatrix} = 0$.

18. (a) तीसरी पंक्ति व दूसरे स्तम्भ के अवयव के सहखण्ड का इसके उपसारणिक से अनुपात $= (-1)^{3+2} = -1$.

19. (d) $\Delta^c = \Delta^{n-1} = \Delta^{3-1} = \Delta^2 = (11)^2 = 121$.

लेकिन हमें सारणिक के वर्ग का मान ज्ञात करना है। अतः अभीष्ट मान $= (121)^2 = 14641$.

20. (b) क्रेमर नियम से, $x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{bmatrix} -d_1 & b_1 & c_1 \\ -d_2 & b_2 & c_2 \\ -d_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}}$

$x = \frac{-\Delta(bcd)}{\Delta(abc)}$.

21. (b) दिया है, $4A^3+2A^2+7A+I = O$

A^{-1} से गुणा करने पर,

$A^{-1}[4A^3+2A^2+7A+I] = O$

$\Rightarrow 4IA^2+2IA+7I+A^{-1}I = O.A^{-1}$

$\Rightarrow I(4A^2+2A+7)+A^{-1}I = O$

$\Rightarrow A^{-1} = -(4A^2+2A+7I)$.

22. (d) चूँकि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

23. (b) दिया गया आव्यूह है, $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix},$

{$R_2 \to R_2-R_1, R_3 \to R_3-R_1$ के उपयोग से}

$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\therefore$ आव्यूह की जाति (rank) सदैव 2 से कम है।

24. (d) आव्यूह के अव्युत्क्रमणीय होने के लिए,

$\begin{vmatrix} 3 & -1+x & 2 \\ 3 & -1 & x+2 \\ x+3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1+x & 2 \\ 0 & -x & x \\ x & -x & 0 \end{vmatrix} = 0$, $[R_2 \to R_2-R_1, R_3 \to R_3-R_1]$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+4 & -1+x & 2 \\ 0 & -x & x \\ 0 & -x & 0 \end{vmatrix} = 0$, $[C_1 \to C_1+C_2+C_3]$

$\Rightarrow (x+4)(0+x^2) = 0 \Rightarrow x = -4, 0$.

ध्यान दें $-4 \in [-4, -1]$.

25. (b) चूँकि $A^{-1} = \frac{adj\,A}{|A|}$ तथा यदि आव्यूह A का आइगन मान λ है, तब A^{-1} का आइगन मान λ^{-1} होगा।

अतः $adj(A)X = (A^{-1}X)|A| = |A|\lambda^{-1}I$.

अतः $\lambda = 3$ के संगत आइगन मान 4/3 है तथा $\lambda = -2$ के संगत आइगन मान $\frac{4}{-2} = -2$ है।

* * *