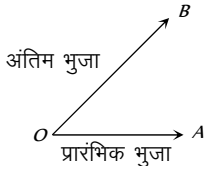
Chapter-10
Trigonometry

प्रस्तावना (Introduction)

त्रिभुज और इसके कोणों का मापन त्रिकोणमिति कहलाता है अर्थात् त्रिकोणमिति में हम त्रिभुज के गुणधर्मों का अध्ययन करते हैं, जिसमें भुजाओं की लम्बाईयाँ तथा कोण इत्यादि सम्मिलित हैं।



किसी तल में घूर्णित रेखा की प्रारंभिक स्थिति (प्रांरभिक भुजा) से अन्तिम स्थिति (अन्तिम भुजा) तक की गति को कोण कहते हैं। अन्तिम बिन्दु O जिसके परितः रेखा घूर्णन करती है, कोण का शीर्ष कहलाता है।

कोण मापन की पद्धतियाँ (System of measurement of angles)

कोण मापन की मुख्यतः तीन पद्धतियाँ हैं :

(1) **षष्टिक या ब्रिटिश पद्धति** (Sexagesimal or English system) :

1 समकोण = 90 अंश $(= 90^o)$

$1^o = 60$ मिनट $(= 60')$

$1' = 60$ सैकण्ड $(= 60'')$

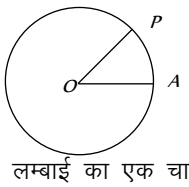
(2) **शतिक पद्धति या फ्रान्सीसी पद्धति** (Centesimal or French system)

1 समकोण = 100 ग्रेड $(= 100^g)$

1 ग्रेड = 100 मिनट $(= 100')$

1 मिनट = 100 सैकेण्ड $(= 100'')$

(3) **वृत्तीय पद्धति** (Circular system) : इस पद्धति में कोण मापन की इकाई रेडियन है। एक रेडियन (अर्थात् 1^c) कोण की वह माप होता है, जो कि वृत्त की त्रिज्या के बराबर लम्बाई के चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित होता है।



माना r त्रिज्या का वृत्त जिसका केन्द्र O है, पर कोई बिन्दु A है। अब वृत्त की त्रिज्या के बराबर लम्बाई का एक चाप AP काटा, तब परिभाषा से, $\angle AOP = 1^c$

कोण मापन की तीनों पद्धतियों के मध्य सम्बन्ध
(Relation between three systems of measurement of an angle)

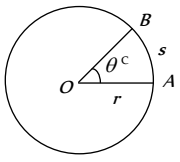
माना किसी कोण θ में अंशों की संख्या D, रेडियनों की संख्या R तथा ग्रेडों की संख्या G है, तब $\frac{D}{90} = \frac{G}{100} = \frac{2R}{\pi}$

जो कि तीनों पद्धतियों के मध्य अभीष्ट सम्बन्ध है।

एक रेडियन $= \frac{180^o}{\pi} \Rightarrow \pi$ रेडियन $= 180^o \Rightarrow 1$ रेडियन $= 57^o 17'44.8'' \approx 57^o 17'45''$.

(Relation between an arc and an angle)

यदि किसी r त्रिज्या के वृत्त की s लम्बाई के चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण θ है, तब चाप की लम्बाई $s = r\theta$ अर्थात्, चाप = त्रिज्या × कोण (रेडियन में)



वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल : माना OAB एक खण्ड है, जिसका केन्द्रीय कोण θ^C है तथा त्रिज्या r है, तब वृत्त खण्ड OAB का क्षेत्रफल $\frac{1}{2}r^2\theta$

त्रिकोणमितीय फलनों के प्रान्त एवं परिसर
(Domain and range of a trigonometrical function)

यदि $f : X \to Y$ एक फलन है, जो समुच्चय X पर परिभाषित है, तब फलन f का प्रान्त (Domain), समस्त स्वतंत्र चरों x का समुच्चय होता है, इसके लिए प्रतिबिम्ब $f(x)$, Y का सुपरिभाषित अवयव है, तो यह f का सह प्रान्त (Co-domain) कहलाता है।

$f : X \to Y$ का परिसर (Range) सभी प्रतिबिम्बों $f(x)$ का समुच्चय होता है, जोकि Y से सम्बन्धित है अर्थात् परिसर $f = \{f(x) \in Y : x \in X\} \subseteq Y$

त्रिकोणमितीय फलनों के प्रान्त (Domain) तथा परिसर (Range) निम्नलिखित हैं :

सारणी : 10.1

त्रिकोणमितीय फलन	प्रान्त (Domain)	परिसर (Range)
$\sin x$	R	$-1 \le \sin x \le 1$
$\cos x$	R	$-1 \le \cos x \le 1$
$\tan x$	$R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in I\right\}$	R
$\text{cosec } x$	$R - \{n\pi, n \in I\}$	$R - \{x : -1 < x < 1\}$
$\sec x$	$R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in I\right\}$	$R - \{x : -1 < x < 1\}$
$\cot x$	$R - \{n\pi, n \in I\}$	R

त्रिकोणमितीय अनुपात या फलन
(Trigonometrical ratios or functions)

समकोण त्रिभुज OMP में, आधार = $OM = x$, लम्ब = $PM = y$ तथा कर्ण = $OP = r$.

$$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{y}{r},$$

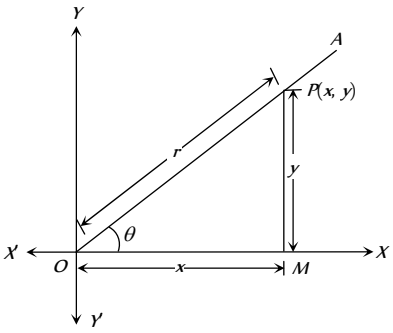
$$\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{x}{r};$$

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{y}{x},$$

$$\cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{r}{x},$$

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{r}{y}$$



(1) त्रिकोणमितीय अनुपातों (फलन) के मध्य सम्बन्ध

(i) $\sin\theta.\text{cosec}\,\theta = 1$ (ii) $\tan\theta.\cot\theta = 1$

(iii) $\cos\theta.\sec\theta = 1$ (iv) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(v) $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

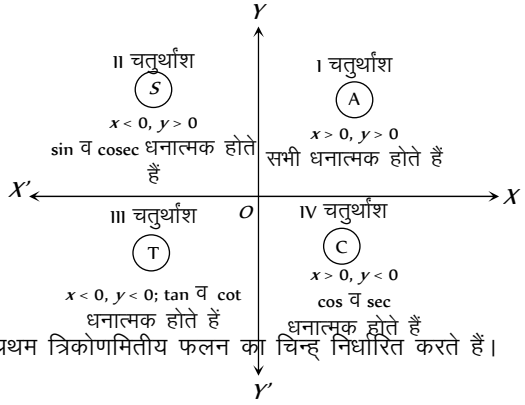
(2) आधारभूत त्रिकोणमितीय सर्वसमिकायें

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (ii) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

(iii) $1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

(3) त्रिकोणमितीय अनुपातों (फलनों) के चिन्ह : इनके चिन्ह इस पर निर्भर करते हैं कि वह अनुपात किस चतुर्थांश में स्थित हैं।

संक्षिप्त में : विभिन्न चतुर्थांशों में त्रिकोणमितीय अनुपातों के चिन्ह के लिए स्मरणीय तथ्य "**Add Sugar To Coffee**".



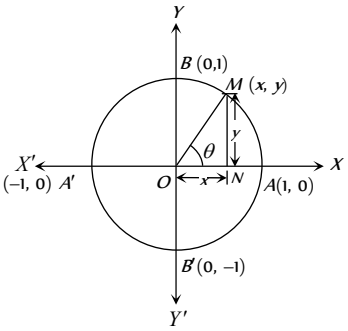
सर्वप्रथम त्रिकोणमितीय फलन का चिन्ह निर्धारित करते हैं।

यदि θ को $X'OX$ अक्ष, (अर्थात् $\pi \pm \theta, 2\pi - \theta$) से मापते हैं, तब त्रिकोणमितीय फलन परिवर्तित नहीं होता है।

यदि θ को $Y'OY$ अक्ष, $\left\{\text{अर्थात्, } \frac{\pi}{2} \pm \theta, \frac{3\pi}{2} \pm \theta\right\}$ से मापते हैं, तब sine; cosine में, cosine; sine में, tangent; cotangent में, cotangent; tangent में, sec; cosec में तथा cosec; sec में परिवर्तित हो जाता हैं।

(4) विभिन्न चतुर्थांशों में त्रिकोणमितीय फलनों के मानों में परिवर्तन : माना XOX' तथा YOY' निर्देशांक अक्ष है। मूल बिन्दु को केन्द्र मानते हुए इकाई त्रिज्या के वृत्त की रचना की।

माना कोई बिन्दु $M(x,y)$ वृत्त पर इस प्रकार है, कि $\angle AOM = \theta$; तब $x = \cos\theta$ तथा $y = \sin\theta$; तथा θ के सभी मानों के लिए $-1 \le \cos\theta \le 1$ तथा $-1 \le \sin\theta \le 1$.



सारणी : 10.2

II-चतुर्थांश (S)	I-चतुर्थांश (A)
$\sin\theta \to 1$ से 0 तक घटता है	$\sin\theta \to 0$ से 1 तक बढ़ता है
$\cos\theta \to 0$ से -1 तक घटता है	$\cos\theta \to 1$ से 0 तक घटता है
$\tan\theta \to -\infty$ से 0 तक बढ़ता है	$\tan\theta \to 0$ से ∞ तक बढ़ता है
$\cot\theta \to 0$ से $-\infty$ तक घटता है	$\cot\theta \to \infty$ से 0 तक घटता है
$\sec\theta \to -1$ से 0 तक बढ़ता है	$\sec\theta \to 1$ से ∞ तक बढ़ता है
$\text{cosec}\,\theta \to 1$ से ∞ तक बढ़ता है	$\text{cosec}\,\theta \to \infty$ से 1 तक घटता है
III-चतुर्थांश (T)	**IV-चतुर्थांश (C)**
$\sin\theta \to 0$ से -1 तक घटता है	$\sin\theta \to -1$ से 0 तक बढ़ता है
$\cos\theta \to -1$ से 0 तक बढ़ता है	$\cos\theta \to 0$ से 1 तक बढ़ता है
$\tan\theta \to 0$ से ∞ तक बढ़ता है	$\tan\theta \to -\infty$ से 0 तक बढ़ता है
$\cot\theta \to \infty$ से 0 तक घटता है	$\cot\theta \to 0$ से $-\infty$ तक घटता है
$\sec\theta \to -1$ से $-\infty$ तक घटता है	$\sec\theta \to \infty$ से 1 तक घटता है
$\text{cosec}\,\theta \to -\infty$ से -1 तक बढ़ता है	$\text{cosec}\,\theta \to -1$ से $-\infty$ तक घटता है

सम्बन्धित कोणों (Allied Angles) के त्रिकोणमितीय अनुपात

दो कोण सम्बन्धित (Allied) कहलाते हैं, जब उनका योग अथवा अन्तर या तो शून्य हो या 90^o का गुणज हो।

सारणी : 10.3

त्रिकोणमितीय अनुपात → / सम्बन्धित कोण ↓	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$(-\theta)$	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$-\tan\theta$
$(90 - \theta)$ या $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\cot\theta$
$(90 + \theta)$ या $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	$-\cot\theta$
$(180 - \theta)$ या $(\pi - \theta)$	$\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\tan\theta$
$(180 + \theta)$ या $(\pi + \theta)$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$\tan\theta$
$(270 - \theta)$ या $\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\cot\theta$
$(270 + \theta)$ या $\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$	$-\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\cot\theta$
$(360 - \theta)$ या $(2\pi - \theta)$	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$-\tan\theta$

त्रिकोणमितीय अनुपातों के कोणों के मान

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin\theta$	0	1/2	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0	–1	0
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	1/2	0	–1	0	1
$\tan\theta$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

(Trigonometrical ratios for various angles)

कुछ महत्वपूर्ण कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात
(Trigonometrical ratios for some special angles)

θ	$7\frac{1}{2}^o$	15^o	$22\frac{1}{2}^o$	18^o	36^o
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
$\tan\theta$	$(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{15}}}{5}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

एक दूसरे के पदों में त्रिकोणमितीय अनुपात
(Trigonometrical ratios in terms of each other)

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$
$\sin\theta$	$\sin\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$
$\cos\theta$	$\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}{\operatorname{cosec}\theta}$
$\tan\theta$	$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}$
$\cot\theta$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}$
$\sec\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\frac{\operatorname{cosec}\theta}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}$
$\operatorname{cosec}\theta$	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\operatorname{cosec}\theta$

दो कोणों के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातों के योग तथा अन्तर के सूत्रा **(Formulae to the trigonometric ratios of sum and difference of two angles)**

(1) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

(2) $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

(3) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

(4) $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

(5) $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

(6) $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

(7) $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$

(8) $\cot(A-B)=\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$

(9) $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2A-\sin^2B=\cos^2B-\cos^2A$

(10) $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2A-\sin^2B=\cos^2B-\sin^2A$

(11) $\tan A\pm\tan B=\dfrac{\sin A}{\cos A}\pm\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{\sin A\cos B\pm\cos A\sin B}{\cos A\cos B}$

$=\dfrac{\sin(A\pm B)}{\cos A.\cos B}$, $\left(A\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2},B\neq m\pi\right)$

(12) $\cot A\pm\cot B=\dfrac{\sin(B\pm A)}{\sin A\sin B}$, $\left(A\neq n\pi,B\neq m\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$

तीन कोणों के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातों के योग तथा अंतर के सूत्र **(Formulae for the trigonometric ratios of sum and differences of three angles)**

(1) $\sin(A+B+C)=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C$
$+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C$

या $\sin(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C(\tan A+\tan B$
$+\tan C-\tan A.\tan B.\tan C)$

(2) $\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\sin A\sin B\cos C$
$-\sin A\cos B\sin C-\cos A\sin B\sin C$

या $\cos(A+B+C)=$
$\cos A\cos B\cos C(1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A)$

(3) $\tan(A+B+C)=\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}$

(4) $\cot(A+B+C)=\dfrac{\cot A\cot B\cot C-\cot A-\cot B-\cot C}{\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C.\cot A-1}$

व्यापक रूप में,

(5) $\sin(A_1+A_2+.....+A_n)$
$=\cos A_1\cos A_2.....\cos A_n(S_1-S_3+S_5-S_7+...)$

(6) $\cos(A_1+A_2+..+A_n)=\cos A_1\cos A_2..\cos A_n(1-S_2+S_4-S_6..)$

(7) $\tan(A_1+A_2+.....+A_n)=\dfrac{S_1-S_3+S_5-S_7+....}{1-S_2+S_4-S_6+....}$

जहाँ, $S_1=\tan A_1+\tan A_2+....+\tan A_n$ =कोणों की स्पर्शज्याओं (tangents) का योग

$S_2=\tan A_1\tan A_2+\tan A_1\tan A_3+....$ = दो कोणों के एक साथ लेने पर स्पर्शज्याओं का योग

$S_3=\tan A_1\tan A_2\tan A_3+\tan A_2\tan A_3\tan A_4+...$ =
तीन कोणों को एक साथ लेने पर स्पर्शज्याओं का योग
यदि $A_1=A_2=....=A_n=A$ हो, तब

$S_1=n\tan A$, $S_2={}^nC_2\tan^2A$, $S_3={}^nC_3\tan^3A$,....

(8) $\sin nA=\cos^nA({}^nC_1\tan A-{}^nC_3\tan^3A+{}^nC_5\tan^5A-....)$

(9) $\cos nA=\cos^nA(1-{}^nC_2\tan^2A+{}^nC_4\tan^4A-...)$

(10) $\tan nA=\dfrac{{}^nC_1\tan A-{}^nC_3\tan^3A+{}^nC_5\tan^5A-....}{1-{}^nC_2\tan^2A+{}^nC_4\tan^4A-{}^nC_6\tan^6A+...}$

(11) $\sin nA+\cos nA=\cos^nA(1+{}^nC_1\tan A-{}^nC_2\tan^2A$
$-{}^nC_3\tan^3A+{}^nC_4\tan^4A+{}^nC_5\tan^5A-{}^nC_6\tan^6A-.....)$

(12) $\sin nA-\cos nA=\cos^nA(-1+{}^nC_1\tan A)$
$+{}^nC_2\tan^2A-{}^nC_3\tan^3A-{}^nC_4\tan^4A+{}^nC_5\tan^5A+{}^nC_6\tan^6A+.....)$

(13) $\sin(\alpha)+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+.....+\sin(\alpha+(n-1)\beta)$

$= \dfrac{\sin\{\alpha+(n-1)(\beta/2)\}.\sin(n\beta/2)}{\sin(\beta/2)}$

(14) $\cos(\alpha)+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+....+\cos(\alpha+(n-1)\beta)$

$= \dfrac{\cos\left\{\alpha+(n-1)\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\right\}.\sin\left\{n\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\right\}}{\sin\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}$

गुणन का योग व अन्तर के रूप में परिवर्तन सूत्रा
(Formulae to transform the product into sum or difference)

(1) $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$

(2) $2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$

(3) $2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$

(4) $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$

माना $A+B=C$ और $A-B=D$, तब, $A=\dfrac{C+D}{2}$ और $B=\dfrac{C-D}{2}$

अतः योग व अन्तर का गुणन रूप में परिवर्तन सूत्र,

(1) $\sin C+\sin D=2\sin\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$

(2) $\sin C-\sin D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}$

(3) $\cos C+\cos D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$

(4) $\cos C-\cos D=2\sin\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{D-C}{2}=-2\sin\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}$.

अपवर्त्य कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात
(Trigonometric ratio of multiple of an angle)

(1) $\sin 2A=2\sin A\cos A=\dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

(2) $\cos 2A=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A$

$=\cos^2 A-\sin^2 A=\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$; जहाँ $A\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{4}$.

(3) $\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

(4) $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A=4\sin(60^o-A).\sin A.\sin(60^o+A)$

(5) $\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$

$=4\cos(60^o-A).\cos A.\cos(60^o+A)$

(6) $\tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}=\tan(60^o-A).\tan A.\tan(60^o+A)$,

जहाँ $A\neq n\pi+\pi/6$

(7) $\sin 4\theta=4\sin\theta.\cos^3\theta-4\cos\theta\sin^3\theta$

(8) $\cos 4\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$

(9) $\tan 4\theta=\dfrac{4\tan\theta-4\tan^3\theta}{1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta}$

(10) $\sin 5A=16\sin^5 A-20\sin^3 A+5\sin A$

(11) $\cos 5A=16\cos^5 A-20\cos^3 A+5\cos A$

उप अपवर्त्य कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात
(Trigonometric ratio of sub-multiple of an angle)

(1) $\left|\sin\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{A}{2}\right|=\sqrt{1+\sin A}$

या $\sin\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}$

अर्थात् $\begin{cases}+, \text{यदि } 2n\pi-\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{A}{2}\le 2n\pi+\dfrac{3\pi}{4}\\ -, \text{अन्यथा}\end{cases}$

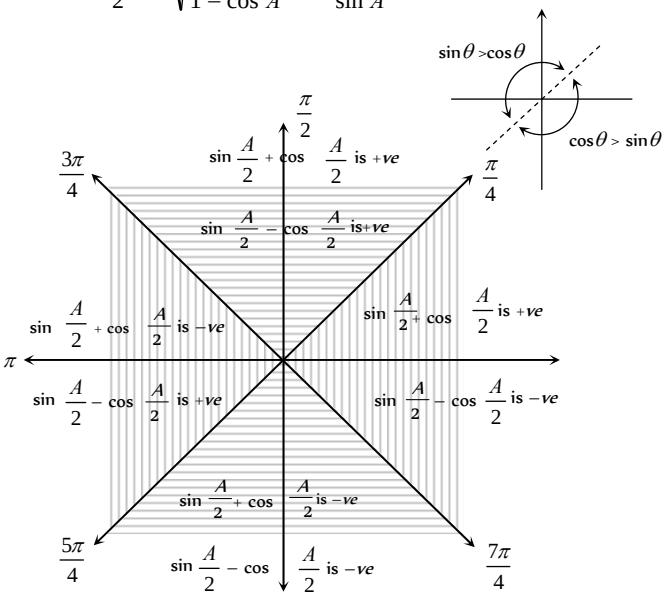
(2) $\left|\sin\dfrac{A}{2}-\cos\dfrac{A}{2}\right|=\sqrt{1-\sin A}$ या $(\sin\dfrac{A}{2}-\cos\dfrac{A}{2})=\pm\sqrt{1-\sin A}$

अर्थात् $\begin{cases}+, \text{यदि } 2n\pi+\pi/4\le A/2\le 2n\pi+\dfrac{5\pi}{4}\\ -, \text{अन्यथा}\end{cases}$

(3) (i) $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{\pm\sqrt{\tan^2 A+1}-1}{\tan A}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\dfrac{1-\cos A}{\sin A}$,

जहाँ $A\neq(2n+1)\pi$

(ii) $\cot\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}}=\dfrac{1+\cos A}{\sin A}$, जहाँ $A\neq 2n\pi$



(4) $\tan^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}$; $\dfrac{3\pi}{2}$ जहाँ $A\neq(2n+1)\pi$

(5) $\cot^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}$; जहाँ $A\neq 2n\pi$

$a\cos\theta+b\sin\theta$ का महत्तम तथा न्यूनतम मान
(Maximum and minimum value of $a\cos\theta+b\sin\theta$)

माना $a=r\cos\alpha$ .....(i) तथा $b=r\sin\alpha$ .....(ii)

(i) तथा (ii) का वर्ग करके जोडने पर, $a^2+b^2=r^2$

$\Rightarrow r=\sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore a\sin\theta+b\cos\theta=r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$

$=r\sin(\theta+\alpha)$

किन्तु $-1\le\sin\theta\le 1$ अतः, $-1\le\sin(\theta+\alpha)\le 1$;

तब $-r\le r\sin(\theta+\alpha)\le r$

$\therefore$ अतः $-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin\theta + b\cos\theta \le \sqrt{a^2+b^2}$

इस प्रकार $a\sin\theta + b\cos\theta$ के महत्तम तथा न्यूनतम मान क्रमशः $\sqrt{a^2+b^2}$ तथा $-\sqrt{a^2+b^2}$ होंगे।

नोट : $\sin^2 x + \text{cosec}^2 x \ge 2$, x के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए।

$\cos^2 x + \sec^2 x \ge 2$, x के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए।

$\tan^2 x + \cot^2 x \ge 2$, x के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए।

प्रतिबन्धित त्रिकोणमितीय सर्वसमिकायें
(Conditional trigonometrical identities)

हम कुछ निश्चित सर्वसमिकाओं के बारे में जानते हैं, जैसे $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ तथा $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ इत्यादि। इस प्रकार की सर्वसमिकायें कोण के सभी मानों के लिए सत्य होती है, किन्तु जो सर्वसमिकायें एक निश्चित प्रतिबन्ध के लिए सत्य होती है, प्रतिबन्धित त्रिकोणमितीय सर्वसमिकायें कहलाती हैं।

यदि A, B, C किसी ΔABC के कोण हैं, तब सम्बन्ध $A + B + C = \pi$ द्वारा अनेक महत्वपूर्ण सर्वसमिकायें प्राप्त होती हैं।

(1) यदि $A + B + C = 180^o$, तब

(i) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$

(ii) $\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4\cos A \cos B \sin C$

(iii) $\sin(B + C - A) + \sin(C + A - B) + \sin(A + B - C)$
$= 4\sin A \sin B \sin C$

(iv) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C$

(v) $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 1 - 4\sin A \sin B \cos C$

(2) यदि $A + B + C = 180^o$, तब

(i) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(ii) $\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(iii) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(iv) $\cos A + \cos B - \cos C = -1 + 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(v) $\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2$

(3) यदि $A + B + C = \pi$, तब

(i) $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2\sin A \sin B \cos C$

(ii) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$

(iii) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1 - 2\sin A \sin B \cos C$

(4) यदि $A + B + C = \pi$, तब

(i) $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(ii) $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 2 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(iii) $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(iv) $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} - \cos^2\frac{C}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(5) यदि $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, तब

(i) $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 1 - 2\sin x \sin y \sin z$

(ii) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 2 + 2\sin x \sin y \sin z$

(iii) $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 4\cos x \cos y \cos z$

(6) यदि $A + B + C = \pi$, तब

(i) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

(ii) $\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1$

(iii) $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1$

(iv) $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

Tips & Tricks

- घड़ी में दो क्रमिक अंकों के मध्य 30^o ($= \pi/6$ रेडियन) का कोण होता है। घंटे की सुई (hour hand) एक घंटे में 30^o घूम जाती है।
- मिनट की सुई (minute hand) एक मिनट में 6^o घूम जाती है।
- $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$
- $\sin(n\pi + \theta) = (-1)^n \sin\theta$, $\cos(n\pi + \theta) = (-1)^n \cos\theta$

  $\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \theta\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\theta$, यदि n विषम है।

  $= (-1)^{n/2}\sin\theta$, यदि n सम है।

  $\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \theta\right) = (-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin\theta$, यदि n विषम है।

  $= (-1)^{n/2}\cos\theta$, यदि n सम है।

  यदि $x = \sec\theta + \tan\theta$, तब $\frac{1}{x} = \sec\theta - \tan\theta$.

  यदि $x = \text{cosec}\,\theta + \cot\theta$, तब $\frac{1}{x} = \text{cosec}\,\theta - \cot\theta$.
- $\sin(60^o - \theta).\sin\theta\sin(60^o + \theta) = \frac{1}{4}\sin 3\theta$.
- $\cos(60 - \theta).\cos\theta.\cos(60^o + \theta) = \frac{1}{4}\cos 3\theta$.
- $\tan(60° - \theta).\tan\theta.\tan(60° + \theta) = \tan 3\theta$
- $\cos A.\cos 2A.\cos 2^2.A\cos 2^3 A..... \cos 2^{n-1}A$

  $= \frac{\sin 2^n A}{2^n \sin A}$, यदि $A \ne n\pi$

  $= 1$, यदि $A = 2n\pi$

  $= -1$, यदि $A = (2n+1)\pi$
- यदि कोई सूत्र $\sin\frac{A}{2}$ का मान $\sin A$ के पदों में देता है, तब वह $\sin\left(\frac{n\pi + (-1)^n A}{2}\right)$ का मान भी देता है।

✍ यदि कोई सूत्र $\cos\frac{A}{2}$ का मान cos A के पदों में देता है, तब वह $\cos\left(\frac{2n\pi \pm A}{2}\right)$ का मान भी देता है।

✍ यदि कोई सूत्र $\tan\frac{A}{2}$ का मान tan A के पदों में देता है, तब वह $\tan\left(\frac{n\pi \pm A}{2}\right)$ का मान भी देता है।

✍ **Σ (Sigma) और ∏ (Pie) का उपयोग**

$\sin(A+B+C) = \Sigma \sin A \cos B \cos C - \Pi \sin A$,

$\cos(A+B+C) = \Pi \cos A - \Sigma \cos A \sin B \sin C$,

(∵ ∏ गुणनफल प्रदर्शित करता हैं)

$$\tan(A+B+C) = \frac{\Sigma \tan A - \Pi \tan A}{1 - \Sigma \tan A \tan B}$$

(∵ Σ योगफल प्रदर्शित करता है)

✍ $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots n$ पदों तक

$$= \frac{\sin[\alpha + (n-1)\beta/2]\sin[n\beta/2]}{\sin(\beta/2)}$$

या $$\sum_{r=1}^{n} \sin(A + \overline{r-1}B) = \frac{\sin\left(A + \frac{n-1}{2}B\right)\sin\frac{nB}{2}}{\sin\frac{B}{2}}.$$

✍ $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots n$ पदों तक

$$= \frac{\cos\left[\alpha + (n-1)\frac{\beta}{2}\right]\sin\left[\frac{n\beta}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\beta}{2}\right]}$$

या $$\sum_{r=1}^{n} \cos(A + \overline{r-1}B) = \frac{\cos\left(A + \frac{n-1}{2}B\right)\sin\frac{nB}{2}}{\sin\frac{B}{2}}.$$

✍ $$\sin\frac{A}{2} \pm \cos\frac{A}{2} = \sqrt{2}\sin\left[\frac{\pi}{4} \pm A\right] = \sqrt{2}\cos\left[A \mp \frac{\pi}{4}\right]$$

✍ $$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma) = 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}$$

✍ $$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma) = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}$$

✍ $\tan\alpha + 2\tan 2\alpha + 4\tan 4\alpha + 8\cot 8\alpha = \cot\alpha$

✍ यदि $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$, तब योगान्तरानुपात नियम से,

$$\frac{p+q}{p-q} = \frac{a+b}{a-b} \text{ या } \frac{q+p}{q-p} = \frac{b+a}{b-a}$$

$$\text{या } \frac{p-q}{p+q} = \frac{a-b}{a+b} \text{ या } \frac{q-p}{q+p} = \frac{b-a}{b+a}.$$

त्रिकोणमितीय अनुपात व फलन, सम्बन्धित कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

1. यदि वृत्त की त्रिज्या 13 मीटर तथा चाप की लम्बाई 1 मीटर है, तो वृत्त के केन्द्र पर बना कोण होगा **[MNR 1973]**

(a) 20° (b) 60°

(c) $\frac{1}{3}$ रेडियन (d) 3 रेडियन

2. 7 सेमी त्रिज्या के एक वृत्तीय तार को काटकर, 12 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की परिधि पर रखा गया है, तो इस तार द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अंतरित कोण होगा **[Kerala (Engg.) 2002]**

(a) 50° (b) 210°

(c) 100° (d) 60°

3. उस वृत्त की त्रिज्या जिसका 15 सेमी का चाप केन्द्र पर 3/4 रेडियन का कोण बनाता है, है **[Karnataka CET 2002]**

(a) 10 सेमी (b) 20 सेमी

(c) $11\frac{1}{4}$ सेमी (d) $22\frac{1}{2}$ सेमी

4. यदि x के वास्तविक मान के लिये $\cos\theta = x + \frac{1}{x}$ है, तब **[MP PET 1996]**

(a) θ एक न्यूनकोण है

(b) θ एक समकोण है

(c) θ एक अधिककोण है

(d) θ का कोई मान सम्भव नहीं है

5. निम्न में असत्य कथन है **[MNR 1993]**

(a) $\sin\theta = -\frac{1}{5}$ (b) $\cos\theta = 1$

(c) $\sec\theta = \frac{1}{2}$ (d) $\tan\theta = 20$

6. निम्न में से कौन सा सम्बन्ध सम्भव है

(a) $\sin\theta = \frac{5}{3}$ (b) $\tan\theta = 1002$

(c) $\cos\theta = \frac{1+p^2}{1-p^2}, (p \neq \pm 1)$ (d) $\sec\theta = \frac{1}{2}$

7. समीकरण $(a+b)^2 = 4ab\sin^2\theta$ तभी सम्भव है जब

(a) $2a = b$ (b) $a = b$

(c) $a = 2b$ (d) इनमें से कोई नहीं

8. समीकरण $\sec^2\theta = \frac{4xy}{(x+y)^2}$ तभी सम्भव है जब **[MP PET 1986; IIT 1996]**

(a) $x = y$ (b) $x < y$

(c) $x > y$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. निम्न में कौन सा सही है

(a) $\tan 1 > \tan 2$ (b) $\tan 1 = \tan 2$

(c) $\tan 1 < \tan 2$ (d) $\tan 1 = 1$

10. निम्न में से कौन सा सम्बन्ध सत्य है **[WB JEE 1991]**

(a) $\sin 1 < \sin 1°$ (b) $\sin 1 > \sin 1°$

(c) $\sin 1 = \sin 1°$ (d) $\frac{\pi}{180}\sin 1 = \sin 1^o$

11. $\tan 1° \tan 2° \tan 3° \tan 4°..... \tan 89° =$ **[MP PET 1998, 2001; AMU 1999; Pb. CET 1994]**

(a) 1 (b) 0

(c) ∞ (d) 1/2

12. यदि $\sin\theta + \text{cosec}\,\theta = 2$, तो $\sin^{10}\theta + \text{cosec}^{10}\theta$ का मान होगा **[MP PET 2004]**

(a) 10 (b) 2^{10}

(c) 2^{20} (d) 2

13. यदि $\sin\theta + \text{cosec}\,\theta = 2$, तो $\sin^2\theta + \text{cosec}^2\theta =$ **[MP PET 1992; MNR 1990; UPSEAT 2002]**

(a) 1 (b) 4

(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

14. यदि $\sin\theta + \cos\theta = m$ तथा $\sec\theta + \text{cosec}\,\theta = n$, तो $n(m+1)(m-1) =$ **[MP PET 1986]**

(a) m (b) n

(c) $2m$ (d) $2n$

15. यदि $\sin\theta + \cos\theta = 1$, तब $\sin\theta\cos\theta =$ **[Karnataka CET 1998]**

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 1/2

16. यदि $\sin\theta = \frac{24}{25}$ हो और θ द्वितीय चतुर्थांश में है, तब $\sec\theta + \tan\theta =$ **[MP PET 1997]**

(a) -3 (b) -5

(c) -7 (d) -9

17. यदि $\text{cosec}\ A + \cot A = \frac{11}{2}$, तो $\tan A =$ **[Roorkee 1995]**

(a) $\frac{21}{22}$ (b) $\frac{15}{16}$

(c) $\frac{44}{117}$ (d) $\frac{117}{43}$

18. यदि $5\tan\theta = 4$, तब $\frac{5\sin\theta - 3\cos\theta}{5\sin\theta + 2\cos\theta} =$ **[Karnataka CET 1998]**

(a) 0 (b) 1

(c) 1/6 (d) 6

19. यदि $\tan\theta = \frac{20}{21}$, तो $\cos\theta =$ **[MP PET 1994]**

(a) $\pm\frac{20}{41}$ (b) $\pm\frac{1}{21}$

(c) $\pm\frac{21}{29}$ (d) $\pm\frac{20}{21}$

20. यदि $\sin x = \frac{-24}{25}$, तब $\tan x$ का मान होगा **[UPSEAT 2003]**

(a) $\frac{24}{25}$ (b) $\frac{-24}{7}$

(c) $\frac{25}{24}$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. यदि $\tan\theta = \frac{-4}{3}$, तो $\sin\theta =$ **[IIT 1979; Pb. CET 1995; Orissa JEE 2002]**

(a) $-4/5$ पर $4/5$ नहीं (b) $-4/5$ या $4/5$

(c) $4/5$ पर $-4/5$ नहीं (d) इनमें से कोई नहीं

22. यदि $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ तथा $\tan\theta = 1$, तो θ कौन से चतुर्थांश में है

(a) प्रथम (b) द्वितीय

(c) तृतीय (d) चतुर्थ

23. यदि $\sin\theta = \frac{-4}{5}$ तथा θ तीसरे चतुर्थांश में हो, तो $\cos\frac{\theta}{2} =$

(a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$

(c) $\sqrt{\frac{2}{5}}$ (d) $-\sqrt{\frac{2}{5}}$

24. यदि $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$ तथा $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$, जहाँ α, β धनात्मक न्यूनकोण हैं, तो

(a) $\alpha = 45°, \beta = 15°$ (b) $\alpha = 15°, \beta = 45°$

(c) $\alpha = 60°, \beta = 15°$ (d) इनमें से कोई नहीं

25. यदि $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ तथा θ चतुर्थ चतुर्थांश में हो, तो $\cos\theta =$

(a) $1/\sqrt{11}$ (b) $-1/\sqrt{11}$

(c) $\sqrt{\frac{10}{11}}$ (d) $-\sqrt{\frac{10}{11}}$

26. $(m+2)\sin\theta + (2m-1)\cos\theta = 2m+1$ है यदि

(a) $\tan\theta = \frac{3}{4}$ (b) $\tan\theta = \frac{4}{3}$

(c) $\tan\theta = \frac{2m}{m^2+1}$ (d) इनमें से कोई नहीं

27. यदि A द्वितीय चतुर्थांश में हो और $3\tan A + 4 = 0$, तो $2\cot A - 5\cos A + \sin A$ का मान है **[Pb. CET 2000]**

(a) $\frac{-53}{10}$ (b) $\frac{-7}{10}$

(c) $\frac{7}{10}$ (d) $\frac{23}{10}$

28. यदि $\sin x + \sin y = 3(\cos y - \cos x)$, तब $\frac{\sin 3x}{\sin 3y}$ का मान है

(a) 1 (b) -1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

29. यदि $\sin A, \cos A$ तथा $\tan A$ गुणोत्तर श्रेणी में हों, तब $\cos^3 A + \cos^2 A$ का मान है

(a) 1 (b) 2

(c) 4 (d) इनमें से कोई नहीं

30. यदि θ द्वितीय चतुर्थांश में हो, तो $\sqrt{\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)} + \sqrt{\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)} =$

(a) $2\sec\theta$ (b) $-2\sec\theta$

(c) $2\text{cosec}\,\theta$ (d) इनमें से कोई नहीं

31. $\frac{\sin\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\tan\theta} =$ **[Karnataka CET 1998]**

(a) 0 (b) 1

(c) $\cos\theta - \sin\theta$ (d) $\cos\theta + \sin\theta$

32. यदि $\tan\theta + \sec\theta = e^x$, तो $\cos\theta$ का मान होगा **[AMU 2002]**

(a) $\frac{(e^x + e^{-x})}{2}$ (b) $\frac{2}{(e^x + e^{-x})}$

(c) $\frac{(e^x - e^{-x})}{2}$ (d) $\frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})}$

33. यदि $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$, तो $\cos\theta + \sin\theta$ बराबर होगा **[WB JEE 1988]**

(a) $\sqrt{2}\cos\theta$ (b) $\sqrt{2}\sin\theta$

(c) $2\cos\theta$ (d) $-\sqrt{2}\cos\theta$

34. यदि $\sec\theta + \tan\theta = p$, तब $\tan\theta$ बराबर है **[MP PET 1994]**

(a) $\frac{2p}{p^2 - 1}$ (b) $\frac{p^2 - 1}{2p}$

(c) $\frac{p^2 + 1}{2p}$ (d) $\frac{2p}{p^2 + 1}$

35. यदि $x = \sec\theta + \tan\theta$, तो $x + \frac{1}{x} =$ **[MP PET 1986]**

(a) 1 (b) $2\sec\theta$

(c) 2 (d) $2\tan\theta$

36. यदि $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$, तो $x^n + \frac{1}{x^n} =$ **[Karnataka CET 2004]**

(a) $2^n\cos\alpha$ (b) $2^n\cos n\alpha$

(c) $2i\sin n\alpha$ (d) $2\cos n\alpha$

37. यदि $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$, तो $\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) =$ **[AMU 1998]**

(a) $\sin 2\theta$ (b) $\cos 2\theta$

(c) $\tan 2\theta$ (d) $\sec 2\theta$

38. $e^{\log_{10}\tan 1° + \log_{10}\tan 2° + \log_{10}\tan 3° + \ldots\ldots\ldots + \log_{10}\tan 89°}$ का मान है

(a) 0 (b) e

(c) $1/e$ (d) इनमें से कोई नहीं

39. $\cot x - \tan x =$ **[MP PET 1986]**

(a) $\cot 2x$ (b) $2\cot^2 x$

(c) $2\cot 2x$ (d) $\cot^2 2x$

40. $\frac{1 + \sin A - \cos A}{1 + \sin A + \cos A} =$

(a) $\sin\frac{A}{2}$ (b) $\cos\frac{A}{2}$

(c) $\tan\frac{A}{2}$ (d) $\cot\frac{A}{2}$

41. $\frac{2\sin\theta\tan\theta(1 - \tan\theta) + 2\sin\theta\sec^2\theta}{(1 + \tan\theta)^2} =$ **[Roorkee 1975]**

(a) $\frac{\sin\theta}{1 + \tan\theta}$ (b) $\frac{2\sin\theta}{1 + \tan\theta}$

(c) $\frac{2\sin\theta}{(1 + \tan\theta)^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

42. व्यंजक $1 - \frac{\sin^2 y}{1 + \cos y} + \frac{1 + \cos y}{\sin y} - \frac{\sin y}{1 - \cos y}$ का मान है

(a) 0 (b) 1

(c) $\sin y$ (d) $\cos y$

43. यदि $2y\cos\theta = x\sin\theta$ व $2x\sec\theta - y\,\text{cosec}\,\theta = 3$, तो $x^2 + 4y^2 =$ **[WB JEE 1988]**

(a) 4 (b) -4

(c) ± 4 (d) इनमें से कोई नहीं

44. यदि $\tan A + \cot A = 4$, तब $\tan^4 A + \cot^4 A$ का मान होगा **[Kerala (Engg.) 2002]**

(a) 110 (b) 191

(c) 80 (d) 194

45. यदि $x = \sec\phi - \tan\phi, y = \text{cosec}\,\phi + \cot\phi$ हो, तब

(a) $x = \frac{y + 1}{y - 1}$ (b) $x = \frac{y - 1}{y + 1}$

(c) $y = \frac{1 - x}{1 + x}$ (d) इनमें से कोई नहीं

46. यदि $\tan\theta = \frac{x\sin\phi}{1 - x\cos\phi}$ तथा $\tan\phi = \frac{y\sin\theta}{1 - y\cos\theta}$, तो $\frac{x}{y} =$ **[MP PET 1991]**

(a) $\frac{\sin\phi}{\sin\theta}$ (b) $\frac{\sin\theta}{\sin\phi}$

(c) $\frac{\sin\phi}{1 - \cos\theta}$ (d) $\frac{\sin\theta}{1 - \cos\phi}$

47. यदि $p = \frac{2\sin\theta}{1 + \cos\theta + \sin\theta}$ तथा $q = \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta}$, तो **[MP PET 2001]**

(a) $pq = 1$ (b) $\frac{q}{p} = 1$

(c) $q - p = 1$ (d) $q + p = 1$

48. यदि $\tan\theta + \sin\theta = m$ तथा $\tan\theta - \sin\theta = n$, तब **[IIT 1970]**

(a) $m^2 - n^2 = 4mn$ (b) $m^2 + n^2 = 4mn$

(c) $m^2 - n^2 = m^2 + n^2$ (d) $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$

49. यदि $\tan\theta = \frac{a}{b}$, तो $\frac{\sin\theta}{\cos^8\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin^8\theta} =$ **[WB JEE 1986]**

(a) $\pm\frac{(a^2 + b^2)^4}{\sqrt{a^2 + b^2}}\left(\frac{a}{b^8} + \frac{b}{a^8}\right)$ (b) $\pm\frac{(a^2 + b^2)^4}{\sqrt{a^2 + b^2}}\left(\frac{a}{b^8} - \frac{b}{a^8}\right)$

(c) $\pm\frac{(a^2 - b^2)^4}{\sqrt{a^2 + b^2}}\left(\frac{a}{b^8} + \frac{b}{a^8}\right)$ (d) $\pm\frac{(a^2 - b^2)^4}{\sqrt{a^2 - b^2}}\left(\frac{a}{b^8} - \frac{b}{a^8}\right)$

50. यदि $a\cos\theta + b\sin\theta = m$ तथा $a\sin\theta - b\cos\theta = n$, तब $a^2 + b^2 =$

(a) $m + n$ (b) $m^2 - n^2$

(c) $m^2 + n^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

51. यदि $x = a\cos^3\theta$ व $y = b\sin^3\theta$ तब

(a) $\left(\frac{a}{x}\right)^{2/3} + \left(\frac{b}{y}\right)^{2/3} = 1$ (b) $\left(\frac{b}{x}\right)^{2/3} + \left(\frac{a}{y}\right)^{2/3} = 1$

(c) $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ (d) $\left(\frac{x}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = 1$

52. यदि $\cot\theta + \tan\theta = m$ तथा $\sec\theta - \cos\theta = n$, तब निम्नलिखित में से कौन सा सही है

(a) $m(mn^2)^{1/3} - n(nm^2)^{1/3} = 1$

(b) $m(m^2n)^{1/3} - n(mn^2)^{1/3} = 1$

(c) $n(mn^2)^{1/3} - m(nm^2)^{1/3} = 1$

(d) $n(m^2n)^{1/3} - m(mn^2)^{1/3} = 1$

53. $\sin^6\theta + \cos^6\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta =$ **[MP PET 1995, 2002; DCE 2005]**

(a) 0 (b) –1

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

54. $2(\sin^6\theta + \cos^6\theta) - 3(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + 1$ का मान है **[MP PET 1997; UPSEAT 2002]**

(a) 2 (b) 0

(c) 4 (d) 6

55. यदि $\sin x + \sin^2 x = 1$, तो $\cos^{12} x + 3\cos^{10} x + 3\cos^8 x + \cos^6 x - 2$ बराबर है **[Pb. CET 2002]**

(a) 0 (b) 1

(c) – 1 (d) 2

56. यदि $\cos x + \cos^2 x = 1$, तब $\sin^2 x + \sin^4 x$ का मान है

(a) 1 (b) – 1

(c) 0 (d) 2

57. यदि $\sin x + \sin^2 x = 1$, तब $\cos^8 x + 2\cos^6 x + \cos^4 x =$

(a) 0 (b) – 1

(c) 2 (d) 1

58. यदि $x\sin^3\alpha + y\cos^3\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$ व $x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$, तो $x^2 + y^2 =$ **[WB JEE 1984]**

(a) – 1 (b) ±1

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

59. यदि $(1+\sin A)(1+\sin B)(1+\sin C) = (1-\sin A)(1-\sin B)(1-\sin C)$, तब प्रत्येक पक्ष बराबर है

(a) $\pm\sin A\sin B\sin C$ (b) $\pm\cos A\cos B\cos C$

(c) $\pm\sin A\cos B\cos C$ (d) $\pm\cos A\sin B\sin C$

60. यदि $(\sec\alpha + \tan\alpha)(\sec\beta + \tan\beta)(\sec\gamma + \tan\gamma) = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$, तब $(\sec\alpha - \tan\alpha)(\sec\beta - \tan\beta)(\sec\gamma - \tan\gamma) =$ **[Kurukshetra CEE 1998]**

(a) $\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma$ (b) $\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$

(c) $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma$ (d) $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma$

61. यदि $\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 = 3$, तब $\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 =$ **[EAMCET 1994]**

(a) 3 (b) 2

(c) 1 (d) 0

62. यदि $\sin^2\theta = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2x}$, तो x का मान है **[UPSEAT 2004]**

(a) – 3 (b) – 2

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

63. यदि $\tan\theta - \cot\theta = a$ व $\sin\theta + \cos\theta = b$, तो $(b^2-1)^2(a^2+4)$ बराबर होगा **[WB JEE 1979]**

(a) 2 (b) – 4

(c) ± 4 (d) 4

64. यदि $\tan^2\alpha\tan^2\beta + \tan^2\beta\tan^2\gamma + \tan^2\gamma\tan^2\alpha + 2\tan^2\alpha\tan^2\beta\tan^2\gamma = 1$, तब $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$ का मान है

(a) 0 (b) – 1

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

65. $\cos 1°.\cos 2°.\cos 3°..... \cos 179° =$ **[Karnataka CET 1999; DCE 2005]**

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

66. $\frac{\cot 54°}{\tan 36°} + \frac{\tan 20°}{\cot 70°}$ का मान होगा **[Karnataka CET 1999]**

(a) 2 (b) 3

(c) 1 (d) 0

67. $\sin 10° + \sin 20° + \sin 30° + ... + \sin 360°$ का मान है **[Pb. CET 2003]**

(a) 1 (b) 0

(c) – 1 (d) इनमें से कोई नहीं

68. $\cos 1° + \cos 2° + \cos 3° + ... + \cos 180° =$ **[Karnataka CET 2003]**

(a) 0 (b) 1

(c) – 1 (d) 2

69. यदि $\alpha = 22°30'$, तब $(1+\cos\alpha)(1+\cos 3\alpha)(1+\cos 5\alpha)(1+\cos 7\alpha) =$ **[AMU 1999]**

(a) 1/8 (b) 1/4

(c) $\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

70. $6(\sin^6\theta + \cos^6\theta) - 9(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + 4$ का मान होगा **[MP PET 2001]**

(a) –3 (b) 0

(c) 1 (d) 3

71. $\sin 15° + \cos 105° =$ **[MP PET 1992]**

(a) 0 (b) $2\sin 15°$

(c) $\cos 15° + \sin 15°$ (d) $\sin 15° - \cos 15°$

72. $\cos 105° + \sin 105°$ का मान है **[MNR 1975, 76]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1

(c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

73. $\cos y\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\cos x + \sin y\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ का मान शून्य होगा यदि

(a) $x = 0$ (b) $y = 0$

(c) $x = y$ (d) $x = n\pi - \frac{\pi}{4} + y,\ (n \in I)$

74. $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) =$ **[MNR 1984]**

(a) 1/2 (b) – 1/2

(c) 1/4 (d) 1

75. यदि $x\sin 45°\cos^2 60° = \frac{\tan^2 60°\operatorname{cosec} 30°}{\sec 45°\cot^2 30°}$, तब $x =$ **[Kerala (Engg.) 2002]**

(a) 2 (b) 4

(c) 8 (d) 16

76. यदि $A = 130°$ तथा $x = \sin A + \cos A$, तब **[CET 1989]**

(a) $x > 0$ (b) $x < 0$

(c) $x = 0$ (d) $x \le 0$

77. $\cos A + \sin(270° + A) - \sin(270° - A) + \cos(180° + A) =$ **[MP PET 1990]**

(a) -1 (b) 0
(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

78. यदि $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, तो $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} =$

(a) $\frac{2}{\sin\alpha}$ (b) $-\frac{2}{\sin\alpha}$
(c) $\frac{1}{\sin\alpha}$ (d) $-\frac{1}{\sin\alpha}$

79. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) =$

(a) $2\tan 2\theta$ (b) $2\cot 2\theta$
(c) $\tan 2\theta$ (d) $\cot 2\theta$

80. $\sin(\pi+\theta)\sin(\pi-\theta)\ \text{cosec}^2\theta =$ **[EAMCET 1980]**

(a) 1 (b) -1
(c) $\sin\theta$ (d) $-\sin\theta$

81. $\cot(45° + \theta)\cot(45° - \theta) =$ **[MNR 1973]**

(a) -1 (b) 0
(c) 1 (d) ∞

82. $\tan A + \cot(180° + A) + \cot(90° + A) + \cot(360° - A) =$ **[MP PET 1992]**

(a) 0 (b) $2\tan A$
(c) $2\cot A$ (d) $2(\tan A - \cot A)$

83. $\tan\theta \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) =$ **[EAMCET 1981]**

(a) 1 (b) 0
(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

84. यदि कोण θ को दो भागों में इस प्रकार विभाजित किया जाए कि एक भाग की स्पर्शज्या (tangent) दूसरे की स्पर्शज्या की k गुनी है तथा ϕ उनका अंतर है, तब $\sin\theta =$

(a) $\frac{k+1}{k-1}\sin\phi$ (b) $\frac{k-1}{k+1}\sin\phi$
(c) $\frac{2k-1}{2k+1}\sin\phi$ (d) इनमें से कोई नहीं

85. यदि $x = y\cos\frac{2\pi}{3} = z\cos\frac{4\pi}{3}$, तब $xy + yz + zx =$ **[EAMCET 1994]**

(a) -1 (b) 0
(c) 1 (d) 2

86. दिया है $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, तो व्यंजक

$\sqrt{(4\sin^4\alpha + \sin^2 2\alpha)} + 4\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ बराबर होगा

(a) 2 (b) $2 + 4\sin\alpha$
(c) $2 - 4\sin\alpha$ (d) इनमें से कोई नहीं

87. $\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8} =$

(a) 1 (b) -1
(c) 0 (d) 2

88. $(\sec A + \tan A - 1)(\sec A - \tan A + 1) - 2\tan A =$ **[Roorkee 1972]**

(a) $\sec A$ (b) $2\sec A$
(c) 0 (d) 1

89. $\tan(-945°)$ का मान है **[MP PET 1997]**

(a) -1 (b) -2
(c) -3 (d) -4

90. यदि $\tan A = \frac{1}{2}, \tan B = \frac{1}{3}$, तब $\cos 2A =$ **[CET 1989]**

(a) $\sin B$ (b) $\sin 2B$
(c) $\sin 3B$ (d) इनमें से कोई नहीं

91. $\cos A - \sin A$ का मान जब $A = \frac{5\pi}{4}$, है **[MP PET 1990]**

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(c) 0 (d) 1

92. $\cos(270° + \theta)\cos(90° - \theta) - \sin(270° - \theta)\cos\theta$ का मान होगा **[Karnataka CET 2005]**

(a) 0 (b) –1
(c) 1/2 (d) 1

93. यदि $\cos(\alpha - \beta) = 1$ तथा $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{e}$, $-\pi < \alpha, \beta < \pi$, तो युग्म (α, β) के कुल मान हैं **[IIT Screening 2005]**

(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 4

दो एवं तीन कोणों के योग व अन्तर के त्रिकोणमितीय अनुपात

1. यदि $\sin A = \frac{1}{\sqrt{10}}$ तथा $\sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$, जहाँ A तथा B धनात्मक न्यून कोण हैं, तो $A + B =$ **[MP PET 1986]**

(a) π (b) $\pi/2$
(c) $\pi/3$ (d) $\pi/4$

2. यदि $\tan A = 2\tan B + \cot B$, तो $2\tan(A - B) =$

(a) $\tan B$ (b) $2\tan B$
(c) $\cot B$ (d) $2\cot B$

3. यदि $\sin A + \sin B = C$ तथा $\cos A + \cos B = D$, तो $\sin(A + B) =$ **[MP PET 1986]**

(a) CD (b) $\frac{CD}{C^2 + D^2}$
(c) $\frac{C^2 + D^2}{2CD}$ (d) $\frac{2CD}{C^2 + D^2}$

4. यदि $\sin A = \sin B$ तथा $\cos A = \cos B$, तब **[EAMCET 1994]**

(a) $\sin\frac{A-B}{2} = 0$ (b) $\sin\frac{A+B}{2} = 0$
(c) $\cos\frac{A-B}{2} = 0$ (d) $\cos(A + B) = 0$

5. $\sin 50° - \sin 70° + \sin 10° =$ **[MNR 1979]**

(a) 1 (b) 0
(c) 1/2 (d) 2

6. $\cos^2 48° - \sin^2 12° =$ **[MNR 1977]**

(a) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (b) $\frac{\sqrt{5}+1}{8}$
(c) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ (d) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

7. यदि $y=(1+\tan A)(1-\tan B)$ जहाँ $A-B=\frac{\pi}{4}$, तो $(y+1)^{y+1}$ का मान है **[J & K 2005]**

(a) 9 (b) 4
(c) 27 (d) 81

8. $\sin 75°=$ **[MNR 1979]**

(a) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
(c) $\frac{\sqrt{3}-1}{-2\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

9. यदि $\tan\alpha=\frac{m}{m+1}$ तथा $\tan\beta=\frac{1}{2m+1}$, तो $\alpha+\beta=$ **[IIT 1978; EAMCET 1992; Roorkee 1998; JMI EEE 2001]**

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{6}$ (d) इनमें से कोई नहीं

10. $\tan 20°+\tan 40°+\sqrt{3}\tan 20°\tan 40°=$

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\sqrt{3}$
(c) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $-\sqrt{3}$

11. $\frac{1}{4}\left[\sqrt{3}\cos 23°-\sin 23°\right]=$

(a) $\cos 43°$ (b) $\cos 7°$
(c) $\cos 53°$ (d) इनमें से कोई नहीं

12. $\tan 75°-\cot 75°=$ **[MNR 1982; Pb. CET 1990, 2000]**

(a) $2\sqrt{3}$ (b) $2+\sqrt{3}$
(c) $2-\sqrt{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. यदि $\tan A=-\frac{1}{2}$ तथा $\tan B=-\frac{1}{3}$, तो $A+B=$ **[IIT 1967; MNR 1987; MP PET 1989]**

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{3\pi}{4}$
(c) $\frac{5\pi}{4}$ (d) इनमें से कोई नहीं

14. यदि $A+B=225°$, तो $\frac{\cot A}{1+\cot A}.\frac{\cot B}{1+\cot B}=$ **[MNR 1974]**

(a) 1 (b) – 1
(c) 0 (d) 1/2

15. यदि $\sin A=\frac{4}{5}$ तथा $\cos B=-\frac{12}{13}$, जहाँ A तथा B क्रमशः प्रथम तथा तृतीय चतुर्थांश में हैं, तो $\cos(A+B)=$

(a) $\frac{56}{65}$ (b) $-\frac{56}{65}$
(c) $\frac{16}{65}$ (d) – $\frac{16}{65}$

16. यदि $A+B=\frac{\pi}{4}$, तो $(1+\tan A)(1+\tan B)=$

(a) 1 (b) 2
(c) ∞ (d) – 2

17. $\frac{1}{\sin 10°}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10°}=$ **[IIT 1974]**

(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 4

18. यदि $\cos(A+B)=\alpha\cos A\cos B+\beta\sin A\sin B$, तो $(\alpha,\beta)=$ **[MP PET 1992]**

(a) (– 1, – 1) (b) (– 1, 1)
(c) (1, – 1) (d) (1, 1)

19. $\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}=$ **[MP PET 1993]**

(a) $\tan(A-B)$ (b) $\tan(A+B)$
(c) $\cot(A-B)$ (d) $\cot(A+B)$

20. यदि $\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$ तथा $\sin(\alpha-\beta)=\frac{5}{13}$ और α तथा β,0 तथा $\frac{\pi}{4}$ के बीच में हों, तो $\tan 2\alpha=$ **[IIT 1979; EAMCET 2002]**

(a) $\frac{16}{63}$ (b) $\frac{56}{33}$
(c) $\frac{28}{33}$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. यदि $\cos\theta=\frac{8}{17}$ तथा θ प्रथम चतुर्थांश में हो, तब $\cos(30°+\theta)+\cos(45°-\theta)+\cos(120°-\theta)$ का मान है

(a) $\frac{23}{17}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (b) $\frac{23}{17}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
(c) $\frac{23}{17}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (d) $\frac{23}{17}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

22. यदि $\tan x+\tan\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\tan\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)=3$ हो, तब

(a) $\tan x=1$ (b) $\tan 2x=1$
(c) $\tan 3x=1$ (d) इनमें से कोई नहीं

23. $\sin 47^o+\sin 61°-\sin 11°-\sin 25°=$ **[MP PET 2001; EAMCET 2003]**

(a) $\sin 36°$ (b) $\cos 36°$
(c) $\sin 7°$ (d) $\cos 7°$

24. यदि $\sin(\theta+\alpha)=a$ तथा $\sin(\theta+\beta)=b$ हो, तब $\cos 2(\alpha-\beta)-4ab\cos(\alpha-\beta)$ का मान है

(a) $1-a^2-b^2$ (b) $1-2a^2-2b^2$
(c) $2+a^2+b^2$ (d) $2-a^2-b^2$

25. व्यंजक $\cos^2(A-B)+\cos^2 B-2\cos(A-B)\cos A\cos B$ है

(a) B पर आश्रित (b) A तथा B पर आश्रित
(c) A पर आश्रित (d) A तथा B से स्वतंत्र

26. $\cos 15°-\sin 15°$ का मान है **[MNR 1975; MP PET 1994, 2002]**

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{2}$
(c) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) शून्य

27. यदि $\tan\alpha, \tan\beta$ समीकरण $x^2 + px + q = 0$ $(p \neq 0)$ के मूल हों, तब

(a) $\sin^2(\alpha+\beta) + p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + q\cos^2(\alpha+\beta) = q$

(b) $\tan(\alpha+\beta) = \frac{p}{q-1}$

(c) $\cos(\alpha+\beta) = 1-q$

(d) $\sin(\alpha+\beta) = -p$

28. $\tan 5x \tan 3x \tan 2x =$ **[EAMCET 1991]**

(a) $\tan 5x - \tan 3x - \tan 2x$ (b) $\frac{\sin 5x - \sin 3x - \sin 2x}{\cos 5x - \cos 3x - \cos 2x}$

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

29. यदि असमिका $4x^2 - 16x + 15 < 0$ का पूर्णांक हल $\tan\alpha$ है तथा $\cos\beta$ प्रथम चतुर्थांश के समद्विभाजक की प्रवणता है, तब $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$ बराबर है **[Kerala (Engg.) 1993]**

(a) $\frac{3}{5}$ (b) $-\frac{3}{5}$

(c) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (d) $\frac{4}{5}$

30. $\tan\frac{2\pi}{5} - \tan\frac{\pi}{15} - \sqrt{3}\tan\frac{2\pi}{5}\tan\frac{\pi}{15}$ बराबर है

(a) $-\sqrt{3}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(c) 1 (d) $\sqrt{3}$

31. $\cos 12° + \cos 84° + \cos 156° + \cos 132°$ का मान है **[Kerala (Engg.) 1993]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1

(c) $-\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{8}$

32. $\cos 52° + \cos 68° + \cos 172°$ का मान है **[MP PET 1997; Pb. CET 1995, 99]**

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) $\frac{3}{2}$

33. $\frac{\cos 17° + \sin 17°}{\cos 17° - \sin 17°} =$ **[MP PET 1998]**

(a) $\tan 62°$ (b) $\tan 56°$

(c) $\tan 54°$ (d) $\tan 73°$

34. $\frac{\cos 9° + \sin 9°}{\cos 9° - \sin 9°} =$ **[EAMCET 1992; Kerala (Engg.) 2005]**

(a) $\tan 54°$ (b) $\tan 36°$

(c) $\tan 18°$ (d) इनमें से कोई नहीं

35. $\frac{\sin 70° + \cos 40°}{\cos 70° + \sin 40°} =$ **[Pb. CET 1986; MP PET 1999]**

(a) 1 (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(c) $\sqrt{3}$ (d) $\frac{1}{2}$

36. यदि $\cos(A-B) = \frac{3}{5}$ तथा $\tan A \tan B = 2$, तब **[MP PET 1997]**

(a) $\cos A \cos B = \frac{1}{5}$ (b) $\sin A \sin B = -\frac{2}{5}$

(c) $\cos A \cos B = -\frac{1}{5}$ (d) $\sin A \sin B = -\frac{1}{5}$

37. $\tan 100° + \tan 125° + \tan 100° \tan 125° =$ **[DCE 1999]**

(a) 0 (b) 1/2

(c) – 1 (d) 1

38. यदि $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi,\ \pi < \beta < \frac{3\pi}{2};\quad \sin\alpha = \frac{15}{17}$ तथा $\tan\beta = \frac{12}{5}$, तब $\sin(\beta-\alpha)$ का मान होगा **[Roorkee 2000]**

(a) – 171/221 (b) – 21/221

(c) 21/221 (d) 171/221

39. यदि $\cos x + \cos y + \cos\alpha = 0$ तथा $\sin x + \sin y + \sin\alpha = 0$, तब $\cot\left(\frac{x+y}{2}\right) =$ **[Karnataka CET 2001]**

(a) $\sin\alpha$ (b) $\cos\alpha$

(c) $\cot\alpha$ (d) $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$

40. यदि $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = \sin\alpha$ तथा $\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = \cos\alpha$, तब θ का मान होगा **[AMU 2001]**

(a) $\alpha/2$ (b) α

(c) 2α (d) $\alpha/6$

41. $\frac{\cos 10^o + \sin 10^o}{\cos 10^o - \sin 10^o} =$ **[MP PET 2002]**

(a) $\tan 55^o$ (b) $\cot 55^o$

(c) $-\tan 35^o$ (d) $-\cot 35^o$

42. यदि $\cos P = \frac{1}{7}$ तथा $\cos Q = \frac{13}{14}$, जबकि P व Q दोनों न्यूनकोण हैं, तब $P - Q$ का मान होगा **[Karnataka CET 2002]**

(a) 30^o (b) 60^o

(c) 45^o (d) 75^o

43. $\sec 50^o + \tan 50^o$ का मान होगा **[DCE 2002]**

(a) $\tan 20^o + \tan 50^o$ (b) $2\tan 20^o + \tan 50^o$

(c) $\tan 20^o + 2\tan 50^o$ (d) $2\tan 20^o + 2\tan 50^o$

44. यदि $\tan\alpha = (1+2^{-x})^{-1}$, $\tan\beta = (1+2^{x+1})^{-1}$, तब $\alpha + \beta =$ **[AMU 2002]**

(a) $\pi/6$ (b) $\pi/4$

(c) $\pi/3$ (d) $\pi/2$

45. $S = \sin\theta + \sin 2\theta + ... + \sin n\theta$ का योगफल होगा **[AMU 2002]**

(a) $\sin\frac{1}{2}(n+1)\theta \sin\frac{1}{2}n\theta / \sin\frac{\theta}{2}$

(b) $\cos\frac{1}{2}(n+1)\theta \sin\frac{1}{2}n\theta / \sin\frac{\theta}{2}$

(c) $\sin\frac{1}{2}(n+1)\theta\cos\frac{1}{2}n\theta/\sin\frac{\theta}{2}$

(d) $\cos\frac{1}{2}(n+1)\theta\cos\frac{1}{2}n\theta/\sin\frac{\theta}{2}$

46. $\cot 70^o + 4\cos 70^o$ का मान होगा **[Orissa JEE 2003]**

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\sqrt{3}$

(c) $2\sqrt{3}$ (d) $\frac{1}{2}$

47. $2\cos\frac{\pi}{13}.\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}$ का मान है **[UPSEAT 2004]**

(a) – 1 (b) 0

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

48. यदि $\sin\theta=\frac{12}{13},(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ तथा $\cos\phi=-\frac{3}{5},\left(\pi<\phi<\frac{3\pi}{2}\right)$, तो $\sin(\theta+\phi)$ का मान होगा **[Orissa JEE 2004]**

(a) $\frac{-56}{61}$ (b) $\frac{-56}{65}$

(c) $\frac{1}{65}$ (d) – 56

49. यदि $\tan A-\tan B=x$ तथा $\cot B-\cot A=y$, तो $\cot(A-B)=$

(a) $\frac{1}{x}+y$ (b) $\frac{1}{xy}$

(c) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ (d) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

50. $\sin 12^\circ\sin 48^\circ\sin 54^\circ=$ **[IIT 1982; Kerala (Engg.) 2001]**

(a) 1/16 (b) 1/32

(c) 1/8 (d) 1/4

51. $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{8\pi}{5}=$

(a) 1/16 (b) 0

(c) – 1/8 (d) –1/16

52. $\frac{\cos 12^\circ-\sin 12^\circ}{\cos 12^\circ+\sin 12^\circ}+\frac{\sin 147^\circ}{\cos 147^\circ}=$ **[MP PET 1991]**

(a) 1 (b) – 1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

53. $\tan 20^\circ\tan 40^\circ\tan 60^\circ\tan 80^\circ=$ **[IIT 1974]**

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) $\sqrt{3}/2$

54. $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=$ **[MP PET 1989]**

(a) 1/2 (b) 1/4

(c) 1/6 (d) 1/8

55. $\sin 36^\circ\sin 72^\circ\sin 108^\circ\sin 144^\circ=$ **[IIT 1965]**

(a) 1/4 (b) 1/16

(c) 3/4 (d) 5/16

56. यदि $\cos A=m\cos B$, तो **[MNR 1990]**

(a) $\cot\frac{A+B}{2}=\frac{m+1}{m-1}\tan\frac{B-A}{2}$

(b) $\tan\frac{A+B}{2}=\frac{m+1}{m-1}\cot\frac{B-A}{2}$

(c) $\cot\frac{A+B}{2}=\frac{m+1}{m-1}\tan\frac{A-B}{2}$

(d) इनमें से कोई नहीं

57. यदि $x=\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ$ हो, तो x का मान होगा **[Roorkee 1995]**

(a) $\frac{1}{4}\tan 10^\circ$ (b) $\frac{1}{8}\cot 10^\circ$

(c) $\frac{1}{8}\text{cosec}\,10^\circ$ (d) $\frac{1}{8}\sec 10^\circ$

58. $\sin 12^\circ\sin 24^\circ\sin 48^\circ\sin 84^\circ=$ **[EAMCET 1989]**

(a) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ$

(b) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ$

(c) $\frac{3}{15}$

(d) इनमें से कोई नहीं

59. $\tan 3A-\tan 2A-\tan A=$ **[MNR 1982; Pb. CET 1991]**

(a) $\tan 3A\tan 2A\tan A$

(b) $-\tan 3A\tan 2A\tan A$

(c) $\tan A\tan 2A-\tan 2A\tan 3A-\tan 3A\tan A$

(d) इनमें से कोई नहीं

60. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$

(a) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$ (b) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

(c) $\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$ (d) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

61. $\tan 9^\circ-\tan 27^\circ-\tan 63^\circ+\tan 81^\circ=$ **[Roorkee 1989]**

(a) 1/2 (b) 2

(c) 4 (d) 8

62. $\frac{\sin 3\theta+\sin 5\theta+\sin 7\theta+\sin 9\theta}{\cos 3\theta+\cos 5\theta+\cos 7\theta+\cos 9\theta}=$ **[Roorkee 1973]**

(a) $\tan 3\theta$ (b) $\cot 3\theta$

(c) $\tan 6\theta$ (d) $\cot 6\theta$

63. $\sin 163^o\cos 347^o+\sin 73^o\sin 167^o=$ **[MP PET 2000]**

(a) 0 (b) 1/2

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

64. $\sin 600^\circ\cos 330^\circ+\cos 120^\circ\sin 150^\circ$ का मान होगा **[MP PET 1994]**

(a) – 1 (b) 1

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

65. $\cos A+\cos(240^\circ+A)+\cos(240^\circ-A)=$ **[MP PET 1991]**

(a) $\cos A$ (b) 0

(c) $\sqrt{3}\sin A$ (d) $\sqrt{3}\cos A$

66. $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=$ **[EAMCET 2001]**

(a) $\frac{1}{2}\cos 2\theta$ (b) 0

(c) $-\frac{1}{2}\cos 2\theta$ (d) $\frac{1}{2}$

67. यदि $b\sin\alpha = a\sin(\alpha+2\beta)$, तो $\frac{a+b}{a-b} =$

(a) $\frac{\tan\beta}{\tan(\alpha+\beta)}$ (b) $\frac{\cot\beta}{\cot(\alpha-\beta)}$

(c) $\frac{-\cot\beta}{\cot(\alpha+\beta)}$ (d) $\frac{\cot\beta}{\cot(\alpha+\beta)}$

68. $\frac{\sin(B+A)+\cos(B-A)}{\sin(B-A)+\cos(B+A)} =$ **[Roorkee 1970; IIT 1966]**

(a) $\frac{\cos B+\sin B}{\cos B-\sin B}$ (b) $\frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}$

(c) $\frac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A}$ (d) इनमें से कोई नहीं

69. यदि $\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{a+b}{a-b}$, तब $\frac{\tan x}{\tan y}$ बराबर है

(a) $\frac{b}{a}$ (b) $\frac{a}{b}$

(c) ab (d) इनमें से कोई नहीं

70. यदि $\sin A+\sin 2A = x$ तथा $\cos A+\cos 2A = y$, तब $(x^2+y^2)(x^2+y^2-3) =$

(a) $2y$ (b) y

(c) $3y$ (d) इनमें से कोई नहीं

71. व्यंजक $\frac{\cos 6x+6\cos 4x+15\cos 2x+10}{\cos 5x+5\cos 3x+10\cos x}$ बराबर है

(a) $\cos 2x$ (b) $2\cos x$

(c) $\cos^2 x$ (d) $1+\cos x$

72. $\cos\alpha.\sin(\beta-\gamma)+\cos\beta.\sin(\gamma-\alpha)+\cos\gamma.\sin(\alpha-\beta) =$ **[EAMCET 2003]**

(a) 0 (b) 1/2

(c) 1 (d) $4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

73. $\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\alpha+\beta+\gamma) =$

(a) $2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ (b) $4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

(c) $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ (d) इनमें से कोई नहीं

74. यदि $m\tan(\theta-30°) = n\tan(\theta+120°)$, तो $\frac{m+n}{m-n} =$ **[IIT 1966]**

(a) $2\cos 2\theta$ (b) $\cos 2\theta$

(c) $2\sin 2\theta$ (d) $\sin 2\theta$

75. $2\cos x-\cos 3x-\cos 5x =$ **[Roorkee 1974]**

(a) $16\cos^3 x\sin^2 x$ (b) $16\sin^3 x\cos^2 x$

(c) $4\cos^3 x\sin^2 x$ (d) $4\sin^3 x\cos^2 x$

76. $1+\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x =$ **[Roorkee 1974]**

(a) $2\cos x\cos 2x\cos 3x$ (b) $4\sin x\cos 2x\cos 3x$

(c) $4\cos x\cos 2x\cos 3x$ (d) इनमें से कोई नहीं

77. यदि $\frac{\sin A-\sin C}{\cos C-\cos A} = \cot B$, तो A,B,C हैं

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में

(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

78. $\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{16\pi}{15} =$ **[IIT 1985]**

(a) 1/2 (b) 1/4

(c) 1/8 (d) 1/16

79. $\cos^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{5\pi}{12}$ का मान होगा **[Karnataka CET 2002]**

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{2}{3+\sqrt{3}}$

80. $\sin\frac{\pi}{16}\sin\frac{3\pi}{16}\sin\frac{5\pi}{16}\sin\frac{7\pi}{16}$ का मान है **[MP PET 2004]**

(a) $\frac{1}{16}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{16}$

(c) $\frac{1}{8}$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

81. $\cos^2 76^o+\cos^2 16^o-\cos 76^o\cos 16^o =$ **[EAMCET 2002]**

(a) $-1/4$ (b) 1/2

(c) 0 (d) 3/4

82. $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} =$ **[MP PET 1998]**

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{8}$

83. $\frac{\tan 70^o-\tan 20^o}{\tan 50^o}$ का मान होगा **[Karnataka CET 2003]**

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 0

84. $\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+120°)+\cos^2(\alpha-120°)$ बराबर है **[MP PET 1993]**

(a) 3/2 (b) 1

(c) 1/2 (d) 0

85. $\tan 20^o+2\tan 50^o-\tan 70^o$ का मान है **[AMU 2005]**

(a) 1 (b) 0

(c) $\tan 50^o$ (d) इनमें से कोई नहीं

अपवर्त्य और उप–अपवर्त्य कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

1. $\frac{\cot^2 15°-1}{\cot^2 15°+1} =$ **[MP PET 1998]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (d) $\sqrt{3}$

2. यदि $\cos\theta = \frac{3}{5}$ तथा $\cos\phi = \frac{4}{5}$, जहाँ θ तथा ϕ धनात्मक न्यूनकोण हैं, तो $\cos\frac{\theta-\phi}{2} =$ **[MP PET 1988]**

(a) $\frac{7}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{7}{5\sqrt{2}}$

(c) $\frac{7}{\sqrt{5}}$ (d) $\frac{7}{2\sqrt{5}}$

3. यदि $\sec\theta = 1\frac{1}{4}$, तो $\tan\frac{\theta}{2} =$

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{3}{4}$

(c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{5}{4}$

4. यदि $\tan\frac{A}{2} = \frac{3}{2}$, तो $\frac{1+\cos A}{1-\cos A} =$

(a) -5 (b) 5

(c) 9 / 4 (d) 4 / 9

5. यदि $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, तो $\tan 3A =$

(a) 0 (b) 1 / 2

(c) 1 (d) ∞

6. $\sin 4\theta$ को लिखा जा सकता है

(a) $4\sin\theta(1-2\sin^2\theta)\sqrt{1-\sin^2\theta}$

(b) $2\sin\theta\cos\theta\sin^2\theta$

(c) $4\sin\theta - 6\sin^3\theta$

(d) इनमें से कोई नहीं

7. यदि $\cos 2B = \frac{\cos(A+C)}{\cos(A-C)}$, तो $\tan A, \tan B, \tan C$ हैं

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में

(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

8. यदि $a\tan\theta = b$, तो $a\cos 2\theta + b\sin 2\theta =$ **[EAMCET 1981, 82; MP PET 1996; J & K 2005]**

(a) a (b) b

(c) $-a$ (d) $-b$

9. $\left(\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}\right)\left(\frac{\cos A}{1+\cos A}\right) =$

(a) $\tan\frac{A}{2}$ (b) $\cot\frac{A}{2}$

(c) $\sec\frac{A}{2}$ (d) $\text{cosec}\frac{A}{2}$

10. $\frac{1}{\tan 3A - \tan A} - \frac{1}{\cot 3A - \cot A} =$

(a) $\tan A$ (b) $\tan 2A$

(c) $\cot A$ (d) $\cot 2A$

11. $\text{cosec}\ A - 2\cot 2A\cos A =$

(a) $2\sin A$ (b) $\sec A$

(c) $2\cos A\cot A$ (d) इनमें से कोई नहीं

12. $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\theta}} =$

(a) $\cos\theta$ (b) $\sin\theta$

(c) $2\cos\theta$ (d) $2\sin\theta$

13. यदि $\cos 3\theta = \alpha\cos\theta + \beta\cos^3\theta$, तो $(\alpha, \beta) =$

(a) $(3, 4)$ (b) $(4, 3)$

(c) $(-3, 4)$ (d) $(3, -4)$

14. $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 =$

(a) $4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$ (b) $4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$

(c) $4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$ (d) $4\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}$

15. यदि $\tan x = \frac{b}{a}$, तो $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} =$ **[MP PET 1990, 2002]**

(a) $\frac{2\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}$ (b) $\frac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$

(c) $\frac{2\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$ (d) $\frac{2\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}$

16. $1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) =$

(a) $\cos 2\theta$ (b) $-\cos 2\theta$

(c) $\sin 2\theta$ (d) $-\sin 2\theta$

17. $\frac{\sin 3A - \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)}{\cos A + \cos(\pi + 3A)} =$

(a) $\tan A$ (b) $\cot A$

(c) $\tan 2A$ (d) $\cot 2A$

18. यदि $\tan A = \frac{1}{2}$, तब $\tan 3A =$

(a) $\frac{9}{2}$ (b) $\frac{11}{2}$

(c) $\frac{7}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

19. $\frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}$, (जब $x \in$ द्वितीय चतुर्थांश) =

(a) $\sin\frac{x}{2}$ (b) $\tan\frac{x}{2}$

(c) $\sec\frac{x}{2}$ (d) $\text{cosec}\frac{x}{2}$

20. $(\sec 2A + 1)\sec^2 A =$

(a) $\sec A$ (b) $2\sec A$

(c) $\sec 2A$ (d) $2\sec 2A$

21. $2\sin A\cos^3 A - 2\sin^3 A\cos A =$ **[Roorkee 1975; Kerala (Engg.) 2001]**

(a) $\sin 4A$ (b) $\frac{1}{2}\sin 4A$

(c) $\frac{1}{4}\sin 4A$ (d) इनमें से कोई नहीं

22. $\frac{\sin\theta + \sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta} =$ **[Roorkee 1971]**

(a) $\frac{1}{2}\tan\theta$ (b) $\frac{1}{2}\cot\theta$

(c) $\tan\theta$ (d) $\cot\theta$

23. यदि $\frac{2\sin\alpha}{\{1+\cos\alpha+\sin\alpha\}} = y$ हो, तो $\frac{\{1-\cos\alpha+\sin\alpha\}}{1+\sin\alpha}$ बराबर है **[BIT Ranchi 1996; Orissa JEE 2004]**

(a) $\frac{1}{y}$ (b) y

(c) $1-y$ (d) $1+y$

24. यदि $\tan\alpha = \frac{1}{7}$ तथा $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}\right)$, तब 2β बराबर है

(a) $\frac{\pi}{4}-\alpha$ (b) $\frac{3\pi}{4}-\alpha$

(c) $\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}$ (d) $\frac{3\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}$

25. यदि $\cos(\theta-\alpha), \cos\theta$ तथा $\cos(\theta+\alpha)$ हरात्मक श्रेणी में हों, तब $\cos\theta\sec\frac{\alpha}{2}$ बराबर है **[IIT 1997]**

(a) $\pm\sqrt{2}$ (b) $\pm\sqrt{3}$

(c) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

26. यदि $\sin\theta+\sin\phi = a$ व $\cos\theta+\cos\phi = b$, तो $\tan\frac{\theta-\phi}{2}$ बराबर है **[MP PET 1993]**

(a) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4-a^2-b^2}}$ (b) $\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$

(c) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4+a^2+b^2}}$ (d) $\sqrt{\frac{4+a^2+b^2}{a^2+b^2}}$

27. यदि $\tan A = \frac{1-\cos B}{\sin B}$, तो $\tan 2A$ को $\tan B$ के पदों में निकालिए और दिखलाइए कि **[IIT 1983; MP PET 1994]**

(a) $\tan 2A = \tan B$ (b) $\tan 2A = \tan^2 B$

(c) $\tan 2A = \tan^2 B + 2\tan B$ (d) इनमें से कोई नहीं

28. यदि $\sin\beta$, $\sin\alpha$ व $\cos\alpha$ के बीच का गुणोत्तर माध्य है, तब $\cos 2\beta$ का मान होगा

(a) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ (b) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

(c) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ (d) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

29. $\frac{\sec 8A-1}{\sec 4A-1} =$ **[MP PET 1995]**

(a) $\frac{\tan 2A}{\tan 8A}$ (b) $\frac{\tan 8A}{\tan 2A}$

(c) $\frac{\cot 8A}{\cot 2A}$ (d) इनमें से कोई नहीं

30. यदि $\cos A = \frac{3}{4}$, तब $32\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{5A}{2}\right) =$ **[DCE 1996]**

(a) 7 (b) 8

(c) 11 (d) इनमें से कोई नहीं

31. $\tan 15° =$ **[EAMCET 1981]**

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\sqrt{3}-2$

(c) $2-\sqrt{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

32. यदि $\tan\alpha = \frac{1}{7}$, $\tan\beta = \frac{1}{3}$, तब $\cos 2\alpha =$ **[CET 1986]**

(a) $\sin 2\beta$ (b) $\sin 4\beta$

(c) $\sin 3\beta$ (d) इनमें से कोई नहीं

33. यदि $\tan\beta = \cos\theta\tan\alpha$, तब $\tan^2\frac{\theta}{2} =$

(a) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$ (b) $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$

(c) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ (d) $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$

34. यदि $\cos A = \frac{3}{4}$, तब $32\sin\frac{A}{2}\cos\frac{5}{2}A =$ **[EAMCET 1982]**

(a) $\sqrt{7}$ (b) $-\sqrt{7}$

(c) 7 (d) –7

35. यदि θ तथा ϕ कोण प्रथम पाद में स्थित हों तथा $\tan\theta = \frac{1}{7}$ और $\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{10}}$, तब **[Kurukshetra CEE 1998; AMU 2001]**

(a) $\theta+2\phi = 90°$ (b) $\theta+2\phi = 60°$

(c) $\theta+2\phi = 30°$ (d) $\theta+2\phi = 45°$

36. $\frac{\cos A}{1-\sin A} =$

(a) $\sec A-\tan A$ (b) $\text{cosec } A+\cot A$

(c) $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)$ (d) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)$

37. $\tan\frac{A}{2}$ बराबर है

(a) $\pm\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}}$ (b) $\pm\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}$

(c) $\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$ (d) $\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}}$

38. यदि $\sin\alpha = \frac{-3}{5}$, जहाँ $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, तो $\cos\frac{1}{2}\alpha =$ **[MP PET 1998]**

(a) $\frac{-1}{\sqrt{10}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

(c) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ (d) $\frac{-3}{\sqrt{10}}$

39. यदि $0 < x < \frac{\pi}{4}$, तब $\sec 2x - \tan 2x$ का मान होगा **[IIT Screening 1994]**

(a) $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (b) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

(c) $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ (d) $\tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

40. यदि $\sin\theta + \cos\theta = x$, तब $\sin^6\theta + \cos^6\theta = \frac{1}{4}[4 - 3(x^2-1)^2]$ होगा

(a) सभी वास्तविक x के लिए (b) $x^2 \le 2$ के लिए

(c) $x^2 \ge 2$ (d) इनमें से कोई नहीं

41. यदि $\tan\theta = t$, तो $\tan 2\theta + \sec 2\theta =$ **[MP PET 1999]**

(a) $\frac{1+t}{1-t}$ (b) $\frac{1-t}{1+t}$

(c) $\frac{2t}{1-t}$ (d) $\frac{2t}{1+t}$

42. $\frac{\sqrt{2} - \sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} =$ **[AMU 1999]**

(a) $\sec\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$ (b) $\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right)$

(c) $\tan\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$ (d) $\cot\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$

43. यदि $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, तब $\cos 3\theta$ का मान होगा **[MP PET 2001; Pb. CET 2002]**

(a) $\frac{1}{8}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$ (b) $\frac{3}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$

(c) $\frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$ (d) $\frac{1}{3}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$

44. यदि α समीकरण $25\cos^2\theta + 5\cos\theta - 12 = 0$, $\pi/2 < \alpha < \pi$ का एक मूल हो, तो $\sin 2\alpha$ का मान होगा **[UPSEAT 2001]**

(a) 24 / 25 (b) –24 / 25

(c) 13 / 18 (d) –13 / 18

45. यदि $A = 133°$, तब $2\cos\frac{A}{2} =$ **[DCE 2001]**

(a) $-\sqrt{1+\sin A} - \sqrt{1-\sin A}$ (b) $-\sqrt{1+\sin A} + \sqrt{1-\sin A}$

(c) $\sqrt{1+\sin A} - \sqrt{1-\sin A}$ (d) $\sqrt{1+\sin A} + \sqrt{1-\sin A}$

46. यदि $90° < A < 180°$ तथा $\sin A = \frac{4}{5}$, तब $\tan\frac{A}{2}$ का मान होगा **[AMU 2001]**

(a) 1 / 2 (b) 3 / 5

(c) 3 / 2 (d) 2

47. यदि $2\tan A = 3\tan B$, तब $\frac{\sin 2B}{5 - \cos 2B}$ का मान होगा **[AMU 2001]**

(a) $\tan A - \tan B$ (b) $\tan(A - B)$

(c) $\tan(A + B)$ (d) $\tan(A + 2B)$

48. यदि $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, तो $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}$ का मान होगा **[AMU 2001]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{8}$

49. यदि $\tan\frac{\theta}{2} = t$, तब $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ का मान होगा **[Kerala (Engg.) 2002]**

(a) $\cos\theta$ (b) $\sin\theta$

(c) $\sec\theta$ (d) $\cos 2\theta$

50. यदि $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\cos\theta$, तब $x^6 + x^{-6} =$ **[Karnataka CET 2003]**

(a) $2\cos 6\theta$ (b) $2\cos 12\theta$

(c) $2\cos 3\theta$ (d) $2\sin 3\theta$

51. यदि $\sin 2\theta + \sin 2\phi = 1/2$ तथा $\cos 2\theta + \cos 2\phi = 3/2$, तब $\cos^2(\theta - \phi) =$ **[MP PET 2000; Pb. CET 2000]**

(a) 3 / 8 (b) 5 / 8

(c) 3 / 4 (d) 5 / 4

52. $\cos 2(\theta + \phi) - 4\cos(\theta + \phi)\sin\theta\sin\phi + 2\sin^2\phi$ का मान है **[Orissa JEE 2004]**

(a) $\cos 2\theta$ (b) $\cos 3\theta$

(c) $\sin 2\theta$ (d) $\sin 3\theta$

53. निम्न में से कौन सी संख्या परिमेय हैं/है **[IIT 1998]**

(a) $\sin 15°$ (b) $\cos 15°$

(c) $\sin 15°\cos 15°$ (d) $\sin 15°\cos 75°$

54. $\cos 15° =$ **[MP PET 1988; MNR 1978]**

(a) $\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}}$ (b) $\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}$

(c) $\pm\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}}$ (d) $\pm\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}$

55. यदि $\sin A + \cos A = \sqrt{2}$, तो $\cos^2 A =$

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{3}{2}$

56. $2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta = 1$, तो $\theta =$ **[Karnataka CET 1998]**

(a) 15° (b) 30°

(c) 45° (d) 60°

57. यदि $\sin\alpha = \frac{336}{625}$ तथा $450° < \alpha < 540°$ हो, तो $\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)$ बराबर है

(a) $\frac{1}{5\sqrt{2}}$ (b) $\frac{7}{25}$

(c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{3}{5}$

58. यदि $\tan^2\theta = 2\tan^2\phi + 1$, तब $\cos 2\theta + \sin^2\phi$ बराबर है

(a) –1 (b) 0

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

59. $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8} =$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$

(c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{3}{4}$

60. यदि $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$, तब $\tan 2x$ का मान होगा **[UPSEAT 2003]**

(a) $\frac{25}{17}$ (b) $\frac{7}{25}$

(c) $\frac{25}{7}$ (d) $\frac{24}{7}$

61. $\cos^2 A(3-4\cos^2 A)^2 + \sin^2 A(3-4\sin^2 A)^2 =$

(a) $\cos 4A$ (b) $\sin 4A$

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

62. $\frac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} =$

(a) $\frac{1-\sin A}{\cos A}$ (b) $\frac{1-\cos A}{\sin A}$

(c) $\frac{1+\sin A}{\cos A}$ (d) $\frac{1+\cos A}{\sin A}$

63. $\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}} =$

(a) $\sec A + \tan A$ (b) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - A\right)$

(c) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A}{2}\right)$ (d) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}\right)$

64. $\frac{\sin 3\theta - \cos 3\theta}{\sin\theta + \cos\theta} + 1 =$

(a) $2\sin 2\theta$ (b) $2\cos 2\theta$

(c) $\tan 2\theta$ (d) $\cot 2\theta$

65. $\tan 7\frac{1}{2}°$ का मान है **[J & K 2005]**

(a) $\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$ (b) $\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$

(c) $\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+2$ (d) $\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}-2$

66. यदि θ न्यून कोण है तथा $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{x-1}{2x}}$, तो $\tan\theta$ का मान है **[Orissa JEE 2005]**

(a) x^2-1 (b) $\sqrt{x^2-1}$

(c) $\sqrt{x^2+1}$ (d) x^2+1

त्रिकोणमितीय फलनों का उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ मान, प्रतिबन्धित त्रिकोणमितीय सर्वसमिकायें

1. $a\cos\theta + b\sin\theta$ का मान किसके बीच मे होगा

(a) $a-b$ और $a+b$

(b) a और b

(c) $-(a^2+b^2)$ और (a^2+b^2)

(d) $-\sqrt{a^2+b^2}$ और $\sqrt{a^2+b^2}$

2. $3\cos\theta + 4\sin\theta$ का महत्तम मान है **[Karnataka CET 2004]**

(a) 3 (b) 4

(c) 5 (d) इनमें से कोई नहीं

3. $5\sin^2\theta + 4\cos^2\theta$ का न्यूनतम मान है

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

4. $\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ का उच्चिष्ठ मान है

(a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{3}{2}$

5. $\tan^2\theta + \cot^2\theta =$

(a) ≥ 2 (b) ≤ 2

(c) ≥ -2 (d) इनमें से कोई नहीं

6. $\sqrt{3}\cos x + \sin x$ का मान महत्तम होगा, यदि $x =$

(a) 30° (b) 45°

(c) 60° (d) 90°

7. $a\cos x + b\sin x$ का उच्चिष्ठ मान होगा **[MNR 1991; MP PET 1999; UPSEAT 2000]**

(a) $a+b$ (b) $a-b$

(c) $|a|+|b|$ (d) $(a^2+b^2)^{1/2}$

8. $3\cos x + 4\sin x + 5$ का निम्निष्ठ मान होगा **[MNR 1991]**

(a) 5 (b) 9

(c) 7 (d) 0

9. $\sin x\cos x$ का अधिकतम व न्यूनतम मान है **[MNR 1975]**

(a) $1, -1$ (b) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$ (d) $2, -2$

10. $\cos\theta + \sin\theta$ का निम्निष्ठ मान है **[MNR 1976; Pb. CET 1996]**

(a) 0 (b) $-\sqrt{2}$

(c) $1/2$ (d) $\sqrt{2}$

11. $4\sin^2 x + 3\cos^2 x$ का अधिकतम मान होगा **[Karnataka CET 2003]**

(a) 3 (b) 4

(c) 5 (d) 7

12. अन्तराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ का अधिकतम मान है **[IIT 1992]**

(a) $x=\frac{\pi}{12}$ पर (b) $x=\frac{\pi}{6}$ पर

(c) $x=\frac{\pi}{3}$ पर (d) $x=\frac{\pi}{2}$ पर

13. $9\tan^2\theta+4\cot^2\theta$ का न्यूनतम मान है

(a) 13 (b) 9

(c) 6 (d) 12

14. यदि वास्तविक संख्यायें α, β तथा $\gamma, \alpha+\beta+\gamma=\pi$ को संतुष्ट करते हैं, तो व्यंजक $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ का न्यूनतम मान है **[IIT 1995]**

(a) शून्य (b) -3

(c) धनात्मक (d) ऋणात्मक

15. $3\sin\theta+4\cos\theta$ का निम्निष्ठ मान है **[UPSEAT 2004]**

(a) 5 (b) 1

(c) 3 (d) -5

16. $\sin x-\cos x$ का उच्चिष्ठ मान है **[UPSEAT 2004]**

(a) $\sqrt{2}$ (b) 1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

17. यदि $A=\cos^2\theta+\sin^4\theta$, तब θ के सभी मानों के लिए **[UPSEAT 2001]**

(a) $1\le A\le 2$ (b) $13/16\le A\le 1$

(c) $3/4\le A\le 13/16$ (d) $3/4\le A\le 1$

18. यदि $A=\sin^2\theta+\cos^4\theta$, तो θ के सभी वास्तविक मानों के लिए **[IIT 1980; Roorkee 1992; EAMCET 1994; Pb. CET 1999; DCE 1996, 2000, 01, MP PET 2004; Orissa JEE 2004]**

(a) $1\le A\le 2$ (b) $\frac{3}{4}\le A\le 1$

(c) $\frac{13}{16}\le A\le 1$ (d) $\frac{3}{4}\le A\le\frac{13}{16}$

19. $(\sqrt{3}\sin x+\cos x)$ के अधिकतम मान के लिये x का मान है

(a) 30° (b) 45°

(c) 60° (d) 90°

20. यदि $\alpha+\beta-\gamma=\pi$, तो $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma$ बराबर है **[IIT 1980; Pb. CET 2003]**

(a) $2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$ (b) $2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

(c) $2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. यदि A, B, C, D एक चक्रीय चतुर्भुज के कोण हों, तो $\cos A+\cos B+\cos C+\cos D=$ **[IIT 1970]**

(a) $2(\cos A+\cos C)$ (b) $2(\cos A+\cos B)$

(c) $2(\cos A+\cos D)$ (d) 0

22. यदि $A+B+C=\pi$, तो

$$\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin C\sin A}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B}=$$

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 3

23. यदि $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज हो, तो $\cos A-\cos B+\cos C-\cos D=$

(a) 0 (b) 1

(c) $2(\cos B-\cos D)$ (d) $2(\cos A-\cos C)$

24. त्रिभुज ABC में $\sin A+\sin B+\sin C$ का मान है

(a) $4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (b) $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(c) $4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (d) $4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

25. त्रिभुज ABC में $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$ बराबर है **[MP PET 2004]**

(a) $4\sin A.\sin B.\sin C$ (b) $4\cos A.\cos B.\cos C$

(c) $2\cos A.\cos B.\cos C$ (d) $2\sin A.\sin B.\sin C$

26. यदि $x+y+z=180^\circ$, तो $\cos 2x+\cos 2y-\cos 2z$ बराबर है

(a) $4\sin x.\sin y.\sin z$ (b) $1-4\sin x.\sin y.\cos z$

(c) $4\sin x.\sin y.\sin z-1$ (d) $\cos A.\cos B.\cos C$

27. यदि $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$, तो **[IIT 1979]**

(a) $\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}=\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}$

(b) $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}=1$

(c) $\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}=-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}$

(d) इनमें से कोई नहीं

28. यदि $A+B+C=\pi$, तब $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=$ **[EAMCET 1982]**

(a) $1+4\cos A\cos B\sin C$ (b) $-1+4\sin A\sin B\cos C$

(c) $-1-4\cos A\cos B\cos C$ (d) इनमें से कोई नहीं

29. यदि $A+B+C=180^\circ$, तब $\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\cos A+\cos B+\cos C-1}=$

(a) $8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (b) $8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(c) $8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ (d) $8\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

30. यदि A, B, C एक त्रिभुज के कोण हैं, तब $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2\cos A\cos B\cos C=$ **[CET 1989]**

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

31. एक त्रिभुज में $\tan A+\tan B+\tan C=6$ तथा $\tan A\tan B=2$, तब $\tan A, \tan B$ तथा $\tan C$ के मान हैं

(a) 1, 2, 3 (b) 2, 1, 3

(c) 1, 2, 0 (d) इनमें से कोई नहीं

32. यदि $A+B+C=\pi$, तो $\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}$ हमेशा है

(a) ≤ 1 (b) ≥ 1

(c) $=0$ (d) $=1$

33. यदि $A+B+C=180^\circ$, तब $\frac{\tan A+\tan B+\tan C}{\tan A.\tan B.\tan C}=$

[EAMCET 1989]

(a) 0 (b) 2
(c) 1 (d) –1

34. यदि A, B, C किसी त्रिभुज के कोण हों, तो $\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C$ का मान होगा **[MP PET 2003]**

(a) $4 \sin A \cos B \cos C$ (b) $4 \cos A$
(c) $4 \sin A \cos A$ (d) $4 \cos A \cos B \sin C$

35. किसी त्रिभुज ABC में, $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}$ का मान होगा **[MP PET 2003]**

(a) $1 - 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ (b) $1 - 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$
(c) $1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (d) $1 - 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

36. यदि $\cos A = \cos B \cos C$ और $A + B + C = \pi$, तो $\cot B \cot C$ का मान है **[Pb. CET 2000; 02]**

(a) 1 (b) 2
(c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$

37. यदि $A + B + C = 180^o$, तब $(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A)(\cot A + \cot B)$ का मान होगा **[UPSEAT 1999]**

(a) $\sec A \sec B \sec C$ (b) $\text{cosec } A \text{cosec } B \text{cosec } C$
(c) $\tan A \tan B \tan C$ (d) 1

38. यदि $A + B + C = 180^o$, तब $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}$ का मान होगा **[UPSEAT 1999]**

(a) $2\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ (b) $4\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$
(c) $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ (d) $8\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

39. यदि $A + B + C = 270^o$, तब

$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4 \sin A \sin B \sin C =$ **[EAMCET 2003]**

(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

40. यदि $A + B + C = 270^o$, तब $\sum \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} =$ **[Karnataka CET 2004]**

(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

41. यदि $A + B + C = \pi (A, B, C > 0)$ तथा C अधिककोण है, तब

(a) $\tan A \tan B > 1$ (b) $\tan A \tan B < 1$
(c) $\tan A \tan B = 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

42. यदि A, B, C धनात्मक न्यूनकोण इस प्रकार हैं कि $A + B + C = \pi$ तथा $\cot A \cot B \cot C = K$, तब

(a) $K \le \frac{1}{3\sqrt{3}}$ (b) $K \ge \frac{1}{3\sqrt{3}}$
(c) $K < \frac{1}{9}$ (d) $K > \frac{1}{3}$

43. यदि $A + B + C = \frac{3\pi}{2}$, तब $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C =$ **[EAMCET 1989]**

(a) $1 - 4\cos A \cos B \cos C$ (b) $4 \sin A \sin B \sin C$
(c) $1 + 2\cos A \cos B \cos C$ (d) $1 - 4 \sin A \sin B \sin C$

44. $f(x) = \sin x + \cos x$ का उच्चिष्ठ मान है **[MP PET 1996]**

(a) 1 (b) 2
(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\sqrt{2}$

45. फलन $\sqrt{3}\sin x + \cos x$ के ग्राफ में x-अक्ष से उच्चतम बिन्दु की दूरी है **[MP PET 1998]**

(a) 4 (b) 2
(c) 1 (d) $\sqrt{3}$

46. फलन $f(x) = 3 \sin x + 4 \cos x$ का महत्तम मान है **[RPET 1996]**

(a) 3 (b) 4
(c) 5 (d) 7

Critical Thinking

Objective Questions

1. 10 सेमी. व्यास के वृत्तीय तार को काटकर, 1 मीटर व्यास वाले वृत्त की परिधि पर रखा जाये, तो इस तार द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण होगा **[MNR 1974]**

(a) $\frac{\pi}{4}$ रेडियन (b) $\frac{\pi}{3}$ रेडियन
(c) $\frac{\pi}{5}$ रेडियन (d) $\frac{\pi}{10}$ रेडियन

2. $\sin^2 5^o + \sin^2 10^o + \sin^2 15^o + ... + \sin^2 85^o + \sin^2 90^o$ का मान होगा **[Karnataka CET 1999]**

(a) 7 (b) 8
(c) 9 (d) $9\frac{1}{2}$

3. यदि $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ हो, तब $\sqrt{\text{cosec}^2 \alpha + 2\cot\alpha}$ बराबर है **[Pb. CET 2000; AMU 2001; MP PET 2004]**

(a) $1 + \cot\alpha$ (b) $1 - \cot\alpha$
(c) $-1 - \cot\alpha$ (d) $-1 + \cot\alpha$

4. यदि $a\cos^3\alpha + 3a\cos\alpha\sin^2\alpha = m$ तथा

$a\sin^3\alpha + 3a\cos^2\alpha\sin\alpha = n$ हो, तब $(m+n)^{2/3} + (m-n)^{2/3}$ बराबर है

(a) $2a^2$ (b) $2a^{1/3}$
(c) $2a^{2/3}$ (d) $2a^3$

5. यदि $\cos(\theta-\alpha)=a,\ \sin(\theta-\beta)=b$ हो, तब $\cos^2(\alpha-\beta)+2ab\sin(\alpha-\beta)$ बराबर है

(a) $4a^2b^2$ (b) a^2-b^2

(c) a^2+b^2 (d) $-a^2b^2$

6. यदि $\sin A=n\sin B$, तो $\frac{n-1}{n+1}\tan\frac{A+B}{2}=$

(a) $\sin\frac{A-B}{2}$ (b) $\tan\frac{A-B}{2}$

(c) $\cot\frac{A-B}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. यदि $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$, तो $x^3+\frac{1}{x^3}=$ **[MP PET 2004]**

(a) $\cos\ 3\theta$ (b) $2\cos 3\theta$

(c) $\frac{1}{2}\cos 3\theta$ (d) $\frac{1}{3}\cos 3\theta$

8. यदि $\sin x+\text{cosec}\ x=2$, तो $\sin^n x+\text{cosec}^n x$ बराबर है **[UPSEAT 2002]**

(a) 2 (b) 2^n

(c) 2^{n-1} (d) 2^{n-2}

9. यदि $\tan\theta=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$, तो $\sin\alpha+\cos\alpha$ व $\sin\alpha-\cos\alpha$ बराबर होंगे **[WB JEE 1971]**

(a) $\sqrt{2}\cos\theta,\ \sqrt{2}\sin\theta$ (b) $\sqrt{2}\sin\theta,\ \sqrt{2}\cos\theta$

(c) $\sqrt{2}\sin\theta,\ \sqrt{2}\sin\theta$ (d) $\sqrt{2}\cos\theta,\ \sqrt{2}\cos\theta$

10. यदि $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha+K\sin^2 2\alpha=1$, हो तो K का मान होगा

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{3}{4}$

(c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

11. $\sin 20^o\sin 40^o\sin 60^o\sin 80^o=$ **[MNR 1976, 81]**

(a) $\frac{-3}{16}$ (b) $\frac{5}{16}$

(c) $\frac{3}{16}$ (d) $-\frac{5}{16}$

12. $\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}\sin\frac{7\pi}{14}\sin\frac{9\pi}{14}\sin\frac{11\pi}{14}\sin\frac{13\pi}{14}$ का मान होगा **[IIT 1991; MNR 1992]**

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{16}$

(c) $\frac{1}{32}$ (d) $\frac{1}{64}$

13. $\tan\alpha+2\tan 2\alpha+4\tan 4\alpha+8\cot 8\alpha=$ **[IIT 1988; MP PET 1991]**

(a) $\tan\alpha$ (b) $\tan 2\alpha$

(c) $\cot\alpha$ (d) $\cot 2\alpha$

14. $\sqrt{3}\ \text{cosec}\ 20^o-\sec 20^o=$ **[IIT 1988]**

(a) 2 (b) $\frac{2\sin 20^o}{\sin 40^o}$

(c) 4 (d) $\frac{4\sin 20^o}{\sin 40^o}$

15. $1+\cos 56^o+\cos 58^o-\cos 66^o=$ **[IIT 1964]**

(a) $2\cos 28^o\cos 29^o\cos 33^o$ (b) $4\cos 28^o\cos 29^o\cos 33^o$

(c) $4\cos 28^o\cos 29^o\sin 33^o$ (d) $2\cos 28^o\cos 29^o\sin 33^o$

16. यदि $x=\sin 130^o\cos 80^o,\ y=\sin 80^o\cos 130^o,\ z=1+xy$, तब निम्न में से कौन सा कथन सत्य है **[AMU 1999]**

(a) $x>0,\ y>0,\ z>0$ (b) $x>0,\ y<0,\ 0<z<1$

(c) $x>0,\ y<0,\ z>1$ (d) $x<0,\ y<0, 0<z<1$

17. यदि $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, तो $\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$ का मान होगा

(a) <1 (b) >1

(c) $=1$ (d) इनमें से कोई नहीं

18. यदि $a\cos 2\theta+b\sin 2\theta=c$ के दो हल α और β हों, तो $\tan\alpha+\tan\beta$ का मान होगा **[Kurukshetra CEE 1998]**

(a) $\frac{c+a}{2b}$ (b) $\frac{2b}{c+a}$

(c) $\frac{c-a}{2b}$ (d) $\frac{b}{c+a}$

19. यदि $\tan x=\frac{2b}{a-c}(a\neq c)$,

$y=a\cos^2 x+2b\sin x\cos x+c\sin^2 x$

तथा $z=a\sin^2 x-2b\sin x\cos x+c\cos^2 x$ हो, तब

(a) $y=z$ (b) $y+z=a+c$

(c) $y-z=a+c$ (d) $y-z=(a-c)^2+4b^2$

20. यदि $\text{cosec}\,\theta=\frac{p+q}{p-q}$, तब $\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=$ **[EAMCET 2001]**

(a) $\sqrt{\frac{p}{q}}$ (b) $\sqrt{\frac{q}{p}}$

(c) $\sqrt{pq}$ (d) pq

21. यदि $a\sin^2 x+b\cos^2 x=c,\ \ b\sin^2 y+a\cos^2 y=d$ तथा $a\tan x=b\tan y$, तब $\frac{a^2}{b^2}$ बराबर है

(a) $\frac{(b-c)(d-b)}{(a-d)(c-a)}$ (b) $\frac{(a-d)(c-a)}{(b-c)(d-b)}$

(c) $\frac{(d-a)(c-a)}{(b-c)(d-b)}$ (d) $\frac{(b-c)(b-d)}{(c-a)(a-d)}$

22. $\left(\frac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}\right)^n+\left(\frac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}\right)^n$ (n सम या विषम) =

(a) $2\tan^n\frac{A-B}{2}$ (b) $2\cot^n\frac{A-B}{2}$

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

23. यदि $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ और $\sin\beta = \frac{3}{5}$, तो $(\beta - \alpha)$ निम्न अन्तराल में उपस्थित होगा **[Roorkee Qualifying 1998]**

(a) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ (b) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$

(c) $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ (d) $\left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$

24. यदि $2\sec 2\alpha = \tan\beta + \cot\beta$, तब $\alpha + \beta$ का निम्न में से एक मान होगा **[Karnataka CET 2000]**

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) π (d) 2π

25. यदि $\frac{x}{\cos\theta} = \frac{y}{\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{z}{\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)}$, तब $x + y + z =$

(a) 1 (b) 0

(c) -1 (d) इनमें से कोई नहीं

26. यदि $\sin 6\theta = 32\cos^5\theta\sin\theta - 32\cos^3\theta\sin\theta + 3x$, तब $x =$ **[EAMCET 2003]**

(a) $\cos\theta$ (b) $\cos 2\theta$

(c) $\sin\theta$ (d) $\sin 2\theta$

27. $\sin^4\frac{\pi}{4} + \sin^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \sin^4\frac{7\pi}{8} =$ **[Roorkee 1980]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$

(c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{3}{4}$

28. $\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right) =$ **[IIT 1984; WB JEE 1992]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$

(c) $\frac{1}{8}$ (d) $\frac{1}{16}$

29. यदि A तृतीय चतुर्थांश में स्थित है तथा $3\tan A - 4 = 0$, तब $5\sin 2A + 3\sin A + 4\cos A =$ **[EAMCET 1994]**

(a) 0 (b) $\frac{-24}{5}$

(c) $\frac{24}{5}$ (d) $\frac{48}{5}$

30. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{6} =$ **[IIT 1966, 1975]**

(a) $\cot 7\frac{1^o}{2}$ (b) $\sin 7\frac{1^o}{2}$

(c) $\sin 15^o$ (d) $\cos 15^o$

31. यदि $\tan(A+B) = p$, $\tan(A-B) = q$, तो $\tan 2A$ का मान p तथा q के पदों में है **[MP PET 1995, 2002]**

(a) $\frac{p+q}{p-q}$ (b) $\frac{p-q}{1+pq}$

(c) $\frac{p+q}{1-pq}$ (d) $\frac{1+pq}{1-p}$

32. $2\sin^2\beta + 4\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta + \cos 2(\alpha+\beta) =$ **[MNR 1993; IIT 1977]**

(a) $\sin 2\alpha$ (b) $\cos 2\beta$

(c) $\cos 2\alpha$ (d) $\sin 2\beta$

33. $\sin\theta + \cos\theta$ का मान अधिकतम होगा जब **[MNR 1977, 1983; RPET 1995]**

(a) $\theta = 30^o$ (b) $\theta = 45^o$

(c) $\theta = 60^o$ (d) $\theta = 90^o$

34. यदि $f(x) = \cos^2 x + \sec^2 x$, तो **[MNR 1986]**

(a) $f(x) < 1$ (b) $f(x) = 1$

(c) $1 < f(x) < 2$ (d) $f(x) \geq 2$

35. $\frac{\tan x}{\tan 3x}$ का मान जब भी परिभाषित हो, तो वह निम्न अन्तराल में नहीं होगा **[Kurukshetra CEE 1998; IIT 1992]**

(a) $\frac{1}{3}$ एवं 3 (b) $\frac{1}{4}$ एवं 4

(c) $\frac{1}{5}$ एवं 5 (d) 5 एवं 6

36. $\cos 2\theta + 2\cos\theta$ हमेशा है

(a) $-\frac{3}{2}$ से बड़ा

(b) $\frac{3}{2}$ से कम या बराबर

(c) $-\frac{3}{2}$ से अधिक या बराबर तथा 3 से कम या बराबर

(d) इनमें से कोई नहीं

37. माना A, B तथा C त्रिभुज के कोण हैं तथा $\tan\frac{A}{2} = \frac{1}{3}$, $\tan\frac{B}{2} = \frac{2}{3}$ तब $\tan\frac{C}{2}$ का मान होगा **[Orissa JEE 2003]**

(a) $\frac{7}{9}$ (b) $\frac{2}{9}$

(c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{2}{3}$

38. यदि $A + B + C = \pi$ तथा $\cos A = \cos B\cos C$, तब $\tan B\tan C$ का मान होगा **[AMU 2001]**

(a) 1/2 (b) 2

(c) 1 (d) $-\frac{1}{2}$

39. यदि $A + C = B$, तब $\tan A\tan B\tan C =$ **[EAMCET 1986]**

(a) $\tan A\tan B + \tan C$ (b) $\tan B - \tan C - \tan A$

(c) $\tan A + \tan C - \tan B$ (d) $-(\tan A\tan B + \tan C)$

40. यदि $\left|\cos\theta\left\{\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + \sin^2\alpha}\right\}\right| \leq k$, तब k का मान है

(a) $\sqrt{1+\cos^2\alpha}$ (b) $\sqrt{1+\sin^2\alpha}$

(c) $\sqrt{2+\sin^2\alpha}$ (d) $\sqrt{2+\cos^2\alpha}$

UNIVERSAL SELF SCORER

Answers

त्रिकोणमितीय अनुपात व फलन, सम्बन्धित कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

1	c	2	b	3	b	4	d	5	c
6	b	7	b	8	a	9	a	10	b
11	a	12	d	13	c	14	c	15	a
16	c	17	c	18	c	19	c	20	b
21	b	22	c	23	b	24	a	25	c
26	b	27	d	28	b	29	a	30	b
31	d	32	b	33	a	34	b	35	b
36	d	37	b	38	d	39	c	40	c
41	b	42	d	43	a	44	d	45	b
46	b	47	d	48	d	49	a	50	c
51	c	52	a	53	c	54	b	55	c
56	a	57	d	58	c	59	b	60	a
61	d	62	d	63	d	64	c	65	a
66	a	67	b	68	c	69	a	70	c
71	a	72	d	73	d	74	c	75	c
76	a	77	b	78	b	79	a	80	b
81	c	82	a	83	d	84	a	85	b
86	a,c	87	d	88	c	89	a	90	b
91	c	92	d	93	d				

दो एवं तीन कोणों के योग व अन्तर के त्रिकोणमितीय अनुपात

1	d	2	c	3	d	4	a	5	b
6	b	7	c	8	b	9	b	10	b
11	d	12	a	13	b	14	d	15	d
16	b	17	d	18	c	19	b	20	b
21	a	22	c	23	d	24	b	25	c
26	a	27	a,b	28	a	29	d	30	d
31	c	32	a	33	a	34	a	35	c
36	a	37	d	38	d	39	c	40	a
41	a	42	b	43	c	44	b	45	a
46	b	47	b	48	b	49	d	50	c
51	d	52	c	53	c	54	d	55	d
56	a	57	b	58	a	59	a	60	d
61	c	62	c	63	b	64	a	65	b
66	a	67	c	68	b	69	b	70	a
71	b	72	a	73	b	74	a	75	a
76	c	77	a	78	d	79	a	80	b
81	d	82	d	83	b	84	a	85	b

अपवर्त्य और उप–अपवर्त्य कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

1	b	2	b	3	a	4	d	5	d
6	a	7	b	8	a	9	a	10	d
11	a	12	c	13	c	14	a	15	b
16	d	17	d	18	b	19	b	20	d
21	b	22	c	23	b	24	a	25	a
26	b	27	a	28	a,c	29	b	30	c
31	c	32	b	33	c	34	b	35	d
36	d	37	c	38	a	39	b	40	b
41	a	42	c	43	c	44	b	45	c
46	d	47	b	48	b	49	a	50	b
51	b	52	a	53	c	54	a	55	b
56	b	57	c	58	b	59	c	60	d
61	c	62	c	63	d	64	a	65	b
66	b								

त्रिकोणमितीय फलनों का उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ मान, प्रतिबन्धित त्रिकोणमितीय सर्वसमिकायें

1	d	2	c	3	d	4	c	5	a
6	a	7	d	8	d	9	b	10	b
11	b	12	a	13	d	14	c	15	d
16	a	17	d	18	b	19	c	20	a
21	d	22	c	23	a	24	b	25	a
26	b	27	a	28	c	29	b	30	b
31	a, b	32	b	33	c	34	d	35	c
36	d	37	b	38	c	39	b	40	b
41	b	42	a	43	d	44	d	45	b
46	c								

Critical Thinking Questions

1	c	2	d	3	c	4	c	5	c
6	b	7	b	8	a	9	a	10	b
11	c	12	d	13	c	14	c	15	c
16	b	17	a	18	b	19	b	20	b
21	b	22	b,c	23	a,c	24	a	25	b
26	d	27	c	28	c	29	a	30	a
31	c	32	c	33	b	34	d	35	a
36	c	37	a	38	b	39	b	40	b

AS Answers and Solutions

त्रिकोणमितीय अनुपात व फलन, सम्बन्धित कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

1. (c) दिया है त्रिज्या $(r) = 3$ मी एवं चाप $(d) = 1$ मी

हम जानते हैं कि कोण $= \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}} = \frac{1}{3}$ रेडियन.

2. (b) दिया है वृत्तीय तार का व्यास $= 14$ सेमी

अतः वृत्तीय तार की लम्बाई $= 14\pi$ सेमी

$\therefore$ अभीष्ट कोण $= \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}} = \frac{14\pi}{12} = \frac{7\pi}{6}$

$= \frac{7}{6}\pi.\frac{180^o}{\pi} = 210^o$.

3. (b) कोण $= \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}} = \frac{15}{(3/4)}$ सेमी

$\Rightarrow$ त्रिज्या $= 20$ सेमी

4. (d) वर्ग समीकरण $x^2 - x\cos\theta + 1 = 0$ है,

लेकिन x वास्तविक है। अतः $B^2 - 4AC \geq 0$

$\Rightarrow \cos^2\theta \geq 4(1)(1) \Rightarrow \cos^2\theta \geq 4$, जो कि असम्भव है।

5. (c) $\sec\theta = \frac{1}{2}$ असत्य तथ्य है, क्योंकि $\sec\theta$ हमेशा ≥ 1 होता है।

6. (b) विकल्प (a), (c), (d) असत्य है लेकिन (b) सत्य है अर्थात् $\tan\theta = 1002$ संभव है।

7. (b) $(a+b)^2 = 4ab\sin^2\theta$

$\Rightarrow \sin^2\theta = \frac{(a+b)^2}{4ab} \leq 1 \Rightarrow (a+b)^2 - 4ab \leq 0$

$\Rightarrow (a-b)^2 \leq 0 \Rightarrow a = b.$

8. (a) चूँकि $\cos^2\theta \leq 1$

$\sec^2\theta = \frac{4xy}{(x+y)^2} \geq 1 \Rightarrow 4xy \geq (x+y)^2 \Rightarrow (x-y)^2 \leq 0$

$x = y$, $(\because x, y \in R)$.

9. (a) यह स्पष्ट है।

10. (b) सही सम्बन्ध $\sin 1 > \sin 1°$ है

चूँकि $\sin\theta$ का मान $\left[0 \to \frac{\pi}{2}\right]$ में वर्धमान है।

11. (a) $\tan 1°\tan 2°....\tan 89°$

$= (\tan 1°\tan 89°)(\tan 2°\tan 88°)..... = 1\times1\times1.... = 1.$

12. (d) यहाँ $\sin\theta + \text{cosec}\,\theta = 2 \Rightarrow \sin^2\theta + 1 = 2\sin\theta$

$\Rightarrow \sin^2\theta - 2\sin\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow (\sin\theta - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin\theta = 1$

$\sin^{10}\theta + \text{cosec}^{10}\theta$ का अभीष्ट मान $= (1)^{10} + \frac{1}{(1)^{10}} = 2$.

13. (c) $\sin^2\theta + \text{cosec}^2\theta = (\sin\theta + \text{cosec}\,\theta)^2 - 2\sin\theta\,\text{cosec}\,\theta$

$= (2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$, चूँकि $(\sin\theta + \text{cosec}\,\theta) = 2$.

14. (c) $n(m^2 - 1) = (\sec\theta + \text{cosec}\,\theta).2\sin\theta\cos\theta$

$(\because m^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta)$

$= \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta.\cos\theta}.2\sin\theta\cos\theta = 2m$.

15. (a) $\sin\theta + \cos\theta = 1$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$\Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 1$

$\therefore \sin\theta\cos\theta = 0$.

16. (c) $\sin\theta = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos\theta = \frac{-7}{25}, \tan\theta = \frac{-24}{7}$

$\therefore \sec\theta + \tan\theta = \frac{-25}{7} + \frac{-24}{7} = -7$

17. (c) $\text{cosec}\,A + \cot A = \frac{11}{2} \Rightarrow \text{cosec}\,A - \cot A = \frac{2}{11}$

अतः $2\cot A = \frac{117}{22} \Rightarrow \tan A = \frac{44}{117}$.

18. (c) $5\tan\theta = 4 \Rightarrow \tan\theta = \frac{4}{5}$

$\therefore \sin\theta = \frac{4}{\sqrt{41}}$ एवं $\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{41}}$

$$\frac{5\sin\theta - 3\cos\theta}{5\sin\theta + 2\cos\theta} = \frac{5\times\frac{4}{\sqrt{41}} - 3\times\frac{5}{\sqrt{41}}}{5\times\frac{4}{\sqrt{41}} + 2\times\frac{5}{\sqrt{41}}}$$

$$= \frac{20-15}{20+10} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

19. (c) $\tan\theta = \frac{20}{21} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{21}{29}$.

20. (b) $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{-24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25}$

$\Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-24}{7}$.

21. (b) चूँकि $\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$

$\left(\because \tan\theta = -\frac{4}{3}\right)$

$\sin^2\theta = \frac{1}{\text{cosec}^2\theta} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin\theta = \pm\frac{4}{5}$,

दोनों मान हो सकते हैं, क्योंकि $\tan\theta = -\frac{4}{3}$

अर्थात् θ दूसरे व चौथे चतुर्थांश में है।

22. (c) $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ और $\tan\theta = 1$

$\Rightarrow \sin\theta = \sin 225° \Rightarrow \theta = 225°$

चूँकि तृतीय चतुर्थांश में $\sin\theta$ ऋणात्मक व $\tan\theta$ धनात्मक है।

23. (b) दिया है $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ एवं θ तृतीय चतुर्थांश में है

$\Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \pm\frac{3}{5}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-3/5}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$

लेकिन $\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ चूँकि $\frac{\theta}{2}$ द्वितीय चतुर्थांश में है।

अतः $\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

24. (a) $\sin(\alpha-\beta) = \frac{1}{2} = \sin 30° \Rightarrow \alpha-\beta = 30°$ .....(i)

एवं $\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha+\beta = 60°$ .....(ii)

(i) व (ii) को हल करने पर $\alpha = 45°$ एवं $\beta = 15°$.

ट्रिक : विद्यार्थी इस प्रकार के प्रश्नों में दिये गये प्रतिबंध को विकल्पों के मान द्वारा सन्तुष्ट कर सकते हैं, यहाँ $\alpha = 45°$, $\beta = 15°$ दोनों प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करते हैं ।

25. (c) $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, अतः θ, IV चतुर्थांश में है।

अतः $\cos\theta =$ धनात्मक.

अब $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta \Rightarrow 1+\frac{1}{10} = \sec^2\theta$

$\Rightarrow \sec^2\theta = \frac{11}{10} \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{\left(\frac{10}{11}\right)}$.

26. (b) दिये गये सम्बन्ध का वर्ग करके $\tan\theta = t$ रखने पर,

$(m+2)^2t^2 + 2(m+2)(2m-1)t + (2m-1)^2 = (2m+1)^2(1+t^2)$

$\Rightarrow 3(1-m^2)t^2 + (4m^2+6m-4)t - 8m = 0$

$\Rightarrow (3t-4)[(1-m^2)t + 2m] = 0$,

जो कि सत्य है यदि $t = \tan\theta = \frac{4}{3}$ या $\tan\theta = \frac{2m}{m^2-1}$.

27. (d) $3\tan A + 4 = 0 \Rightarrow \tan A = -\frac{4}{3}$

$\Rightarrow \sin A = \pm\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}} = \pm\frac{-4/3}{\sqrt{1+16/9}} = \frac{4}{5}$

(∵ A, द्वितीय चतुर्थांश में है)

एवं $\cos A = -\frac{3}{5}$. अतः $2\cot A - 5\cos A + \sin A$

$= 2\left(-\frac{3}{4}\right) - 5\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{4}{5} = \frac{23}{10}$.

28. (b) यहाँ $\sin x + \sin y = 3(\cos y - \cos x)$

$\Rightarrow \sin x + 3\cos x = 3\cos y - \sin y$ .....(i)

$\Rightarrow r\cos(x-\alpha) = r\cos(y+\alpha)$,

जहाँ $r = \sqrt{10}, \tan\alpha = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow x-\alpha = \pm(y+\alpha) \Rightarrow x = -y$ या $x+y = 2\alpha$

स्पष्टतः $x = -y$ (i) को सन्तुष्ट करता है

$\therefore \frac{\sin 3x}{\sin 3y} = \frac{-\sin 3y}{\sin 3y} = -1$

29. (a) यहाँ $\sin A, \cos A$ एवं $\tan A$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं

$\cos^2 A = \sin A \tan A = \frac{\sin^2 A}{\cos A} \Rightarrow \cos^3 A - \sin^2 A = 0$

अतः $\cos^3 A + \cos^2 A = \sin^2 A + \cos^2 A = 1$

30. (b) $\sqrt{\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)} + \sqrt{\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)}$ दो धनात्मक संख्याओं का योग है। अतः योग भी धनात्मक होगा, परन्तु $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ के लिए योग $\frac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{2}{\cos\theta}$; जो कि ऋणात्मक है।

(∵ $\cos\theta$ द्वितीय चतुर्थांश में ऋणात्मक होता है)

अतः अभीष्ट धनात्मक मान $= \frac{-2}{\cos\theta} = -2\sec\theta, \left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$.

31. (d) $\frac{\sin\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\tan\theta} = \frac{\sin\theta.\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta} + \frac{\cos\theta.\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

$= \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{(\cos\theta-\sin\theta)} = \cos\theta + \sin\theta$.

32. (b) $\tan\theta + \sec\theta = e^x$ .....(i)

$\therefore \sec\theta - \tan\theta = e^{-x}$ .....(ii)

(i) व (ii) से,

$2\sec\theta = e^x + e^{-x} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{e^x+e^{-x}}$.

33. (a) चूँकि $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = (\sqrt{2}+1)\sin\theta \Rightarrow (\sqrt{2}-1)\cos\theta = \sin\theta$

$\Rightarrow \sqrt{2}\cos\theta - \cos\theta = \sin\theta \Rightarrow \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\cos\theta$.

34. (b) $\sec\theta + \tan\theta = p$ .....(i)

$\Rightarrow \sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{p}$ .....(ii)

(ii) को (i) से घटाने पर, $2\tan\theta = p - \frac{1}{p}$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{p^2-1}{2p}$.

35. (b) दिया है $x = \sec\theta + \tan\theta$

$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = \sec\theta + \tan\theta + \frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}$

$= \sec\theta + \tan\theta + \sec\theta - \tan\theta = 2\sec\theta$

36. (d) यहाँ $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$

$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 4\cos^2\alpha$.

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 4\cos^2\alpha - 2$,

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 2(2\cos^2\alpha - 1) = 2\cos 2\alpha$

इसी प्रकार $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha$.

37. (b) दिया है $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$

हम जानते हैं कि, $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$

$= (2\cos\theta)^2 - 2 = 4\cos^2\theta - 2 = 2\cos 2\theta$

$\therefore \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2} \times 2\cos 2\theta = \cos 2\theta$

38. (d) $e^{\log_{10}\tan 1^o + \log_{10}\tan 2^o + \log_{10}\tan 3^o + \ldots\ldots\ldots + \log_{10}\tan 89^o}$

$= e^{\log_{10}(\tan 1^o \tan 2^o \tan 3^o \ldots\ldots \tan 89^o)} = e^{\log_{10} 1} = e^o = 1$

39. (c) $\cot x - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x}$

$= \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} = 2\cot 2x.$

40. (c) $\frac{1 + \sin A - \cos A}{1 + \sin A + \cos A}$

$= \frac{2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$

$= \frac{2\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2}\right)}{2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\right)} = \tan\frac{A}{2}.$

ट्रिक : $A = 60^o$ रखने पर,

$\frac{1 + (\sqrt{3}/2) - (1/2)}{1 + (\sqrt{3}/2) + (1/2)} = \frac{1 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

जो कि विकल्प (c) है अर्थात् $\tan\frac{60^o}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ है।

नोट : *A, B, θ, ...* के मान मानते समय विद्यार्थी इस बात का ध्यान रखें कि इन मानों के लिए विकल्पों के मान भिन्न भिन्न होने चाहिए।

41. (b) दिया गया व्यंजक $= \frac{2\sin\theta}{(1+\tan\theta)^2}\{\tan\theta(1 - \tan\theta) + \sec^2\theta\}$

$= \frac{2\sin\theta}{(1+\tan\theta)^2}\{\tan\theta - \tan^2\theta + 1 + \tan^2\theta\} = \frac{2\sin\theta}{1+\tan\theta}.$

42. (d) व्यंजक को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$\frac{1 + \cos y - \sin^2 y}{1 + \cos y} + \frac{(1 - \cos^2 y) - \sin^2 y}{\sin y(1 - \cos y)}$

$= \frac{\cos y(1 + \cos y)}{1 + \cos y} + 0 = \cos y.$

43. (a) दिया है $2y\cos\theta = x\sin\theta$ .....(i)

एवं $2x\sec\theta - y\,\text{cosec}\,\theta = 3$ .....(ii)

$\Rightarrow \frac{2x}{\cos\theta} - \frac{y}{\sin\theta} = 3$

$\Rightarrow 2x\sin\theta - y\cos\theta - 3\sin\theta\cos\theta = 0$ .....(iii)

(i) व (iii) को हल करने पर, $y = \sin\theta$ एवं $x = 2\cos\theta$

अब, $x^2 + 4y^2 = 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta$

$= 4(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 4.$

44. (d) $\tan A + \cot A = 4$

$\Rightarrow \tan^2 A + \cot^2 A + 2\tan A \cot A = 16$

$\Rightarrow \tan^2 A + \cot^2 A = 14 \Rightarrow \tan^4 A + \cot^4 A + 2 = 196$

$\Rightarrow \tan^4 A + \cot^4 A = 194.$

45. (b) दिया है $xy = (\sec\phi - \tan\phi)(\text{cosec}\ \phi + \cot\phi)$

$= \frac{1 - \sin\phi}{\cos\phi} \cdot \frac{1 + \cos\phi}{\sin\phi}$

$\Rightarrow xy + 1 = \frac{1 - \sin\phi + \cos\phi - \sin\phi\cos\phi + \sin\phi\cos\phi}{\cos\phi\sin\phi}$

$= \frac{1 - \sin\phi + \cos\phi}{\cos\phi\sin\phi}$ .....(i)

$x - y = (\sec\phi - \tan\phi) - (\text{cosec}\ \phi + \cot\phi)$

$= \frac{1 - \sin\phi}{\cos\phi} - \frac{1 + \cos\phi}{\sin\phi} = \frac{\sin\phi - \sin^2\phi - \cos\phi - \cos^2\phi}{\cos\phi\sin\phi}$

$= \frac{\sin\phi - \cos\phi - 1}{\cos\phi\sin\phi}$ .....(ii)

(i) व (ii) को जोड़ने पर, $xy + 1 + (x - y) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{y - 1}{y + 1}$

46. (b) चूँकि $\tan\theta = \frac{x\sin\phi}{1 - x\cos\phi}$

$\Rightarrow \frac{1}{x}\tan\theta - \tan\theta\cos\phi = \sin\phi$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{\sin\phi + \cos\phi\tan\theta}{\tan\theta}$ एवं $\tan\phi = \frac{y\sin\theta}{1 - y\cos\theta}$

$\Rightarrow \tan\phi = \frac{\sin\theta}{\frac{1}{y} - \cos\theta} \Rightarrow \frac{1}{y}\tan\phi - \tan\phi\cos\theta = \sin\theta$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\tan\phi = \sin\theta + \tan\phi\cos\theta$

$\therefore \frac{1}{y} = \frac{\sin\theta + \tan\phi\cos\theta}{\tan\phi}$

अब $\frac{x}{y} = \left[\frac{\tan\theta}{\sin\phi + \cos\phi\tan\theta}\right] \times \left[\frac{\sin\theta + \tan\phi\cos\theta}{\tan\phi}\right]$

$= \frac{\tan\theta}{\tan\phi}\left[\frac{\sin\theta + \cos\theta\frac{\sin\phi}{\cos\phi}}{\sin\phi + \cos\phi\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right] = \frac{\tan\theta\cos\theta}{\tan\phi\cos\phi} = \frac{\sin\theta}{\sin\phi}$

वैकल्पिक : $x\sin\phi = \tan\theta - x\cos\phi\tan\theta$

$\Rightarrow x = \frac{\tan\theta}{\sin\phi + \cos\phi\tan\theta}$

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta\sin\phi + \cos\phi\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{\sin(\theta + \phi)}$

इसी प्रकार, $y = \frac{\sin\phi}{\sin(\theta + \phi)}$; $\therefore \frac{x}{y} = \frac{\sin\theta}{\sin\phi}.$

47. (d) $p = \frac{2\sin\theta}{1 + \cos\theta + \sin\theta}$, $q = \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta}$

$\Rightarrow p + q = \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} + \frac{2\sin\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta} \Rightarrow p + q = 1.$

48. (d) $(m+n) = 2\tan\theta,\ m-n = 2\sin\theta$

$\therefore\ m^2 - n^2 = 4\tan\theta.\sin\theta$ .....(i)

$4\sqrt{mn} = 4\sqrt{\tan^2\theta - \sin^2\theta} = 4\sin\theta.\tan\theta$ .....(ii)

(i) व (ii) से, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$.

49. (a) दिया है $\tan\theta = \frac{a}{b}$

$\therefore\ \sin\theta = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\theta = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

अब, $\frac{\sin\theta}{\cos^8\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin^8\theta} = \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^8} + \frac{\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^8}$

$= \frac{a(a^2+b^2)^4}{b^8(a^2+b^2)^{1/2}} + \frac{b(a^2+b^2)^4}{a^8(a^2+b^2)^{1/2}}$

$= \pm\frac{(a^2+b^2)^4}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{a}{b^8} + \frac{b}{a^8}\right)$.

50. (c) दिया है $a\cos\theta + b\sin\theta = m$

एवं $a\sin\theta - b\cos\theta = n$.

वर्ग करके जोड़ने पर

$(a\cos\theta + b\sin\theta)^2 + (a\sin\theta - b\cos\theta)^2 = m^2 + n^2$

$\Rightarrow a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + b^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$+ 2ab(\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta) = m^2 + n^2$

अतः, $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$.

ट्रिक : यहाँ हम अनुमान लगा सकते हैं कि a^2+b^2 का मान θ से स्वतंत्र है। अतः θ का कोई भी मान रखने पर अर्थात् $\frac{\pi}{2}$, $b = m$ व $a = n$. अतः $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$

(θ के अन्य मान के लिए परीक्षण करें).

51. (c) $\left(\frac{x}{a}\right)^{1/3} = \cos\theta,\ \left(\frac{y}{b}\right)^{1/3} = \sin\theta$

वर्ग करके योग कीजिए।

52. (a) दिये गये अनुसार,

$\frac{1}{\tan\theta} + \tan\theta = m \Rightarrow 1 + \tan^2\theta = m\tan\theta$

$\Rightarrow \sec^2\theta = m\tan\theta$ .....(i)

व $\sec\theta - \cos\theta = n \Rightarrow \sec^2\theta - 1 = n\sec\theta$

$\Rightarrow \tan^2\theta = n\sec\theta$

$\Rightarrow \tan^4\theta = n^2\sec^2\theta = n^2.m\tan\theta$ {(i) द्वारा}

$\Rightarrow \tan^3\theta = n^2m,\ (\because \tan\theta \neq 0)$

$\Rightarrow \tan\theta = (n^2m)^{1/3}$ .....(ii)

तथा $\sec^2\theta = m\tan\theta = m(n^2m)^{1/3}$ {(i) व (ii) से}

$\therefore$ सर्वसमिका $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ से,

$\Rightarrow m(mn^2)^{1/3} - (n^2m)^{2/3} = 1$

$\Rightarrow m(mn^2)^{1/3} - n(nm^2)^{1/3} = 1$.

53. (c) $\sin^6\theta + \cos^6\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta = 1$.

ट्रिक : $\theta = 0^o$ रखने पर, व्यंजक का मान 1 है। पुनः $\theta = 45^o$ रखने पर मान 1 आता है, इसका अर्थ है कि व्यंजक θ से स्वतंत्र व 1 के बराबर है।

54. (b) $(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 = (1)^3$

$\Rightarrow \sin^6\theta + \cos^6\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta = 1$

तथा $\sin^4\theta + \cos^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta = 1$

$\therefore\ 2(\sin^6\theta + \cos^6\theta) - 3(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + 1 = 0$.

55. (c) दिया है , $\sin x + \sin^2 x = 1$

या $\sin x = 1 - \sin^2 x$ या $\sin x = \cos^2 x$

$\therefore\ \cos^{12}x + 3\cos^{10}x + 3\cos^8 x + \cos^6 x - 2$

$= \sin^6 x + 3\sin^5 x + 3\sin^4 x + \sin^3 x - 2$

$= (\sin^2 x)^3 + 3(\sin^2 x)^2\sin x$

$+ 3(\sin^2 x)(\sin x)^2 + (\sin x)^3 - 2$

$= (\sin^2 x + \sin x)^3 - 2 = (1)^3 - 2$

$[\because \sin x + \sin^2 x = 1$(दिया है)$]$

$= -1$.

56. (a) $\cos x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \sin^2 x$

$\therefore\ \sin^2 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x = 1$.

57. (d) दिया है $\sin x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \cos^2 x$

$\therefore\ \cos^8 x + 2\cos^6 x + \cos^4 x = \sin^4 x + 2\sin^3 x + \sin^2 x$

$= (\sin x + \sin^2 x)^2 = 1$.

58. (c) यहाँ $x\sin^3\alpha + y\cos^3\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$ .....(i)

एवं $x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$ .....(ii)

अब (ii) से, $x\sin\alpha = y\cos\alpha$

यह मान (i) में रखने पर,

$\Rightarrow y\cos\alpha\sin^2\alpha + y\cos^3\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$

$\Rightarrow y\cos\alpha\{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\} = \sin\alpha\cos\alpha$

$\Rightarrow y\cos\alpha = \sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow y = \sin\alpha$ एवं $x = \cos\alpha$

अतः, $x^2 + y^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

59. (b) $(1-\sin A)(1-\sin B)(1-\sin C)$ का दोनों पक्षों में गुणा करने पर,

$(1-\sin^2 A)(1-\sin^2 B)(1-\sin^2 C)$

$= (1-\sin A)^2(1-\sin B)^2(1-\sin C)^2$

$\Rightarrow (1-\sin A)(1-\sin B)(1-\sin C) = \pm\cos A\cos B\cos C$

इसी प्रकार,

$(1+\sin A)(1+\sin B)(1+\sin C) = \pm\cos A\cos B\cos C$.

60. (a) दिया है : $(\sec\alpha + \tan\alpha)(\sec\beta + \tan\beta)(\sec\gamma + \tan\gamma)$

$= \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$ ...(i)

माना $x = (\sec\alpha - \tan\alpha)(\sec\beta - \tan\beta)(\sec\gamma - \tan\gamma)$ ...(ii)

समी. (i) व (ii) को गुणा करने पर,

$(\sec^2\alpha - \tan^2\alpha)(\sec^2\beta - \tan^2\beta)(\sec^2\gamma - \tan^2\gamma)$

$= x.(\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma)$

$\Rightarrow x = \frac{1}{\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}$, $\therefore x = \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma$

61. (d) $\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 = 3$

$\Rightarrow \sin\theta_1 = \sin\theta_2 = \sin\theta_3 = 1$, $(\because -1 \le \sin x \le 1)$

$\Rightarrow \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 = 0$.

62. (d) $\sin^2\theta \le 1$

$\therefore \frac{x^2 + y^2 + 1}{2x} \le 1$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 1 \le 0$

$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 \le 0$

यह सम्भव है यदि $x = 1$ एवं $y = 0$, अर्थात् यह y के मान पर भी निर्भर है।

अतः विकल्प (d) सही है।

63. (d) दिया है $\tan\theta - \cot\theta = a$ .....(i)

एवं $\sin\theta + \cos\theta = b$ .....(ii)

अब $(b^2-1)^2(a^2+4)$

$= \{(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1\}^2\{(\tan\theta - \cot\theta)^2 + 4\}$

$= [1 + \sin 2\theta - 1]^2[\tan^2\theta + \cot^2\theta - 2 + 4]$

$= \sin^2 2\theta(\text{cosec}^2\theta + \sec^2\theta)$

$= 4\sin^2\theta\cos^2\theta\left[\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta}\right] = 4$.

ट्रिक : व्यंजक $(b^2-1)^2(a^2+4)$ का मान θ से स्वतंत्र है इसलिए θ का कोई उपयुक्त मान रखने पर, माना $\theta = 45°$, अतः $a = 0, b = \sqrt{2}$ ताकि $[(\sqrt{2})^2 - 1]^2 \ (0^2 + 4) = 4$.

64. (c) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$

$= \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} + \frac{\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta} + \frac{\tan^2\gamma}{1+\tan^2\gamma}$

$= \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \quad (x = \tan^2\alpha, y = \tan^2\beta, z = \tan^2\gamma)$

$= \frac{(x+y+z) + (xy+yz+zx+2xyz) + xy+yz+zx+xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)}$

$= \frac{1+x+y+z+xy+yz+zx+xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)} = 1$

$(\because xy + yz + zx + 2xyz = 1)$

65. (a) हम जानते हैं कि दिये गये व्यंजक का एक गुणांक $\cos 90° = 0$ है।

इसलिए $\cos 1°.\cos 2°.\cos 3°... \cos 179° = 0$.

66. (a) $\tan(90° - \theta) = \cot\theta, \cot(90° - \theta) = \tan\theta$.

इसलिए $\frac{\cot 54°}{\tan 36°} + \frac{\tan 20°}{\cot 70°}$

$= \frac{\cot 54°}{\tan(90°-54°)} + \frac{\tan 20°}{\cot(90°-20°)}$

$= \frac{\cot 54°}{\cot 54°} + \frac{\tan 20°}{\tan 20°} = 1 + 1 = 2$.

67. (b) चूँकि $\sin 190° = -\sin 10°, \sin 200° = -\sin 20°$,

$\sin 210° = -\sin 30°, \sin 360° = \sin 180° = 0$ इत्यादि।

68. (c) $(\cos 1° + \cos 179°) + (\cos 2° + \cos 178°) + ...$

$+(\cos 89° + \cos 91°) + \cos 90° + \cos 180° = -1$.

69. (a) हम जानते हैं कि, $\sin 22\frac{1^o}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

एवं $\cos 22\frac{1^o}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$\therefore \left(1+\cos 22\frac{1^o}{2}\right)\left(1+\cos 67\frac{1^o}{2}\right)\left(1+\cos 112\frac{1^o}{2}\right)$

$\left(1+\cos 157\frac{1^o}{2}\right)$

$= \left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$

$\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$

$= \left[1-\frac{1}{4}(2+\sqrt{2})\right]\left[1-\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})\right]$

$= \frac{(4-2-\sqrt{2})(4-2+\sqrt{2})}{16}$

$= \frac{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{16} = \frac{4-2}{16} = \frac{1}{8}$.

70. (c) $6(\sin^6\theta + \cos^6\theta) - 9(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + 4$

$= 6[(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)]$

$-9[(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2] + 4$

$= 6[1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta] - 9[1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta] + 4$

$= 6 - 9 + 4 = 1$.

71. (a) $\sin 15° + \cos 105°$

$= \sin 15° + \cos(90° + 15°) = \sin 15° - \sin 15° = 0$.

72. (d) $\cos 105° + \sin 105° = \cos(90° + 15°) + \sin(90° + 15°)$

$= \cos 15° - \sin 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

73. (d) व्यंजक $\sin(x-y) + \cos(x-y) = \sqrt{2}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x - y\right)\right\}$ है

जो कि शून्य होगा यदि $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x - y\right) = 0$

अर्थात्, $\frac{\pi}{4} + x - y = n\pi (n \in I) \Rightarrow x = n\pi - \frac{\pi}{4} + y$.

74. (c) $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10} = \sin 18°.\sin 54°$

$= \sin 18°.\cos 36° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{1}{4}$.

75. (c) $x.\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{4} = \frac{3.2}{\sqrt{2}.3} \Rightarrow \frac{x}{4\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow x = 8$.

76. (a) $x = \cos 40° + \cos 130° = 2\cos 85°\cos 45° > 0$.

77. (b) $\cos A + \sin(270° + A) - \sin(270° - A) + \cos(180° + A)$

$= \cos A - \cos A + \cos A - \cos A = 0$.

78. (b) $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha+1+\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$

$= \frac{2}{\pm\sin\alpha} = \frac{2}{-\sin\alpha}, \left(\text{चूँकि } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$.

79. (a) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}-\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

$=\frac{4\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=2\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)=2\tan 2\theta$.

80. (b) $\sin(\pi+\theta)\sin(\pi-\theta)\text{cosec}^2\theta=-\sin\theta\sin\theta\frac{1}{\sin^2\theta}=-1$.

81. (c) $\cot(45°+\theta)\cot(45°-\theta)=\tan(90°-45°-\theta)\cot(45°-\theta)$

$=\tan(45°-\theta)\cot(45°-\theta)=1$.

82. (a) $\tan A+\cot(180°+A)+\cot(90°+A)+\cot(360°-A)$

$=\tan A+\cot A-\tan A-\cot A=0$.

83. (d) $\tan\theta\cos\theta\sin\theta=\sin^2\theta$.

84. (a) माना $A+B=\theta$ एवं $A-B=\phi$.

तब $\tan A=k\tan B$ या $\frac{k}{1}=\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}$

योगन्तरानुपात से

$\Rightarrow\frac{k+1}{k-1}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\sin A\cos B-\cos A\sin B}$

$=\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}=\frac{\sin\theta}{\sin\phi}\Rightarrow\sin\theta=\frac{k+1}{k-1}\sin\phi$.

85. (b) यहाँ $x=y\cos\frac{2\pi}{3}=z\cos\frac{4\pi}{3}$

$\Rightarrow\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{-2}=\lambda$ (माना) $\Rightarrow x=\lambda, y=-2\lambda, z=-2\lambda$

$\therefore xy+yz+zx=-2\lambda^2+4\lambda^2-2\lambda^2=0$.

86. (a,c) दिया है $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ अर्थात् α तृतीय चतुर्थांश में है।

अब $\sqrt{(4\sin^4\alpha+\sin^2 2\alpha)}+4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

$=\sqrt{(4\sin^4\alpha+4\sin^2\alpha\cos^2\alpha)}+2.2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

$=\sqrt{4\sin^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}+2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]$

$=\pm 2\sin\alpha+2+2\sin\alpha$

(–) चिन्ह लेने पर उत्तर 2 और (+) चिन्ह लेने पर उत्तर $2+4\sin\alpha$ है।

लेकिन $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, अतः $2-4\sin\alpha$ उत्तर है क्योंकि यह तीसरे चतुर्थांश में ऋणात्मक होता है।

87. (d) $\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}$

$=\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}$

$=2\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}\right)=2\times 1=2$.

88. (c) $(\sec A+\tan A-1)(\sec A-\tan A+1)-2\tan A$

$=(\sec^2 A-\tan^2 A)+\sec A+\tan A-\sec A$

$+\tan A-1-2\tan A=0$

$(\because \sec^2 A-\tan^2 A=1)$

89. (a) $\tan(-945°)=\tan[-(945°)]$

$=-\tan[(2\times 360°+225°)]$

$=-\tan[225°]=-\tan 45°=-1$.

90. (b) $A+B=45°$, इसलिए $2A=90°-2B$

$\therefore\cos 2A=\sin 2B$.

91. (c) $\cos A-\sin A=\cos\frac{5\pi}{4}-\sin\frac{5\pi}{4},\left(\because A=\frac{5\pi}{4}\right)$

$=-\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=0$.

92. (d) $\cos(270+\theta)\cos(90-\theta)-\sin(270-\theta)\cos\theta$

$=\sin\theta.\sin\theta+\cos\theta.\cos\theta=1$.

93. (d) $-2\pi<\alpha-\beta<2\pi$

$\cos(\alpha-\beta)=1\Rightarrow\alpha-\beta=0\Rightarrow\alpha=\beta$

$\cos 2\alpha=\frac{1}{e}$ एवं $-2\pi<2\alpha<2\pi$

अतः इसके चार हल हैं।

दो एवं तीन कोणों के योग व अन्तर के त्रिकोणमितीय अनुपात

1. (d) हम जानते हैं, $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\frac{1}{\sqrt{10}}\sqrt{1-\frac{1}{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{1}{10}}$

$=\frac{1}{\sqrt{10}}\sqrt{\frac{4}{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{1}{\sqrt{50}}(2+3)=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow\sin(A+B)=\sin\frac{\pi}{4}$

अतः $A+B=\frac{\pi}{4}$

2. (c) $2\tan(A-B)=2\left(\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}\right)$

$=2\frac{(2\tan B+\cot B-\tan B)}{1+(2\tan B+\cot B)\tan B}=2\frac{\tan B+\cot B}{2(1+\tan^2 B)}$

$=\frac{\cot B(\tan^2 B+1)}{(1+\tan^2 B)}=\cot B$.

3. (d) दिया है $\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\frac{C}{D}$

$\Rightarrow\frac{2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{C}{D}\Rightarrow\tan\frac{A+B}{2}=\frac{C}{D}$

इस प्रकार, $\sin(A+B)=\frac{2\tan\frac{A+B}{2}}{1+\tan^2\frac{A+B}{2}}$

$=\frac{2\frac{C}{D}}{1+\frac{C^2}{D^2}}=\frac{2CD}{(C^2+D^2)}$.

4. (a) दिया है $\sin A=\sin B$ एवं $\cos A=\cos B$

$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\cos A}{\cos B}\Rightarrow\sin A\cos B-\cos A\sin B=0$

$\Rightarrow\sin(A-B)=0$, अतः $\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)=0$.

5. (b) $\sin 50^o-\sin 70^o+\sin 10^o$

$=-2\cos 60^o\sin 10^o+\sin 10^o$

$=\sin 10^o(1-2\cos 60^o)=0$.

6. (b) $\cos^2 A - \sin^2 B = \cos(A+B).\cos(A-B)$

$\therefore \cos^2 48^o - \sin^2 12^o = \cos 60^o . \cos 36^o$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{8}.$

7. (c) $A - B = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(A-B) = \tan\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B} = 1$

$\Rightarrow \tan A - \tan B - \tan A \tan B = 1$

$\Rightarrow \tan A - \tan B - \tan A \tan B + 1 = 2$

$\Rightarrow (1+\tan A)(1-\tan B) = 2 \Rightarrow y = 2$

अतः $(y+1)^{y+1} = (2+1)^{2+1} = (3)^3 = 27$.

ट्रिक : A व B को इस प्रकार रखें कि $A - B = \frac{\pi}{4}$

अर्थात् $A = \frac{\pi}{4}, B = 0 \quad \therefore \left(1+\tan\frac{\pi}{4}\right)(1-\tan 0^o) = 2(1) = 2$.

8. (b) $\sin 75^o = \sin(90^o - 15^o) = \cos 15^o = \cos(45^o - 30^o)$

$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

9. (b) यहाँ $\tan\alpha = \frac{m}{m+1}$ एवं $\tan\beta = \frac{1}{2m+1}$

हम जानते हैं, $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$= \frac{\frac{m}{m+1} + \frac{1}{2m+1}}{1 - \frac{m}{(m+1)}\frac{1}{(2m+1)}} = \frac{2m^2+m+m+1}{2m^2+m+2m+1-m}$

$= \frac{2m^2+2m+1}{2m^2+2m+1} = 1 \Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = \tan\frac{\pi}{4}$

अतः $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

ट्रिक : चूँकि $\alpha+\beta$, m से स्वतंत्र है।

अतः $m = 1$ रखने पर, $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ व $\tan\beta = \frac{1}{3}$, इसलिए

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{(1/2)+(1/3)}{1-(1/6)} = 1$ अतः $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$

(m के किसी और मान के लिए भी जाँच करें)

10. (b) हम जानते हैं, $\tan(20^o + 40^o) = \frac{\tan 20^o + \tan 40^o}{1 - \tan 20^o \tan 40^o}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\tan 20^o + \tan 40^o}{1 - \tan 20^o \tan 40^o}$

$\Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3}\tan 20^o \tan 40^o = \tan 20^o + \tan 40^o$

$\Rightarrow \tan 20^o + \tan 40^o + \sqrt{3}\tan 20^o \tan 40^o = \sqrt{3}$.

11. (d) $\frac{1}{4}\{\sqrt{3}\cos 23^o - \sin 23^o\}$

$= \frac{1}{2}\{\cos 30^o \cos 23^o - \sin 30^o \sin 23^o\}$

$= \frac{1}{2}\cos(30^o + 23^o) = \frac{1}{2}\cos 53^o$.

12. (a) $\tan 75^o - \cot 75^o = \cot 15^o - \cot 75^o$

$= (2+\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$.

13. (b) दिया है $\tan A = -\frac{1}{2}$ एवं $\tan B = -\frac{1}{3}$

अब, $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}.\frac{1}{3}} = -1$

$\Rightarrow \tan(A+B) = \tan\frac{3\pi}{4}$ अतः $A + B = \frac{3\pi}{4}$.

14. (d) $\frac{\cot A}{1+\cot A}.\frac{\cot B}{1+\cot B} = \frac{1}{(1+\tan A)(1+\tan B)}$

$= \frac{1}{\tan A + \tan B + 1 + \tan A \tan B}$

[$\because \tan(A+B) = \tan 225^o$]

$\Rightarrow \tan A + \tan B = 1 - \tan A \tan B$

$= \frac{1}{1 - \tan A \tan B + 1 + \tan A \tan B} = \frac{1}{2}$.

15. (d) यहाँ $\sin A = \frac{4}{5}$ एवं $\cos B = -\frac{12}{13}$

अब, $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$= \sqrt{1 - \frac{16}{25}}\left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{4}{5}\sqrt{1 - \frac{144}{169}}$

$= -\frac{3}{5} \times \frac{12}{13} - \frac{4}{5}\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{16}{65}$

(चूँकि A प्रथम व B तृतीय चतुर्थांश में हैं)

16. (b) दिया है $A + B = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(A+B) = \tan\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = 1$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan A \tan B = 1$

$\Rightarrow (1+\tan A)(1+\tan B) = 2$.

17. (d) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$

$= \frac{2\left(\frac{\cos 10^\circ}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{(2\sin 10^\circ \cos 10^\circ) \times \frac{1}{2}}$

$= \frac{4\sin(30^o - 10^o)}{\sin 20^o} = \frac{4\sin 20^o}{\sin 20^o} = 4$.

18. (c) दिया है $\cos(A+B) = \alpha\cos A\cos B + \beta\sin A\sin B$

लेकिन $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

$\Rightarrow \alpha = 1, \beta = -1$.

19. (b) $\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin A\cos A - \sin B\cos B} = \frac{2\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin 2A - \sin 2B}$

$= \frac{2\sin(A+B)\sin(A-B)}{2\cos(A+B)\sin(A-B)} = \tan(A+B)$.

20. (b) दिया है $\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$

एवं $\sin(\alpha-\beta)=\frac{5}{13}$

$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$ एवं $\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}$

$\Rightarrow 2\alpha=\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}$

$=\sin^{-1}\left[\frac{3}{5}\sqrt{1-\frac{25}{169}}+\frac{5}{13}\sqrt{1-\frac{9}{25}}\right]$

$\Rightarrow 2\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{56}{65}\right)\Rightarrow \sin 2\alpha=\frac{56}{65}$

अब, $\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{56/65}{33/65}=\frac{56}{33}$.

21. (a) चूँकि $\cos\theta=\frac{8}{17}$ एवं $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sin\theta=\sqrt{1-\frac{8^2}{17^2}}=\frac{15}{17}$

दिये गये व्यंजक का मान

$=\cos 30^o.\cos\theta-\sin 30^o\sin\theta+\cos 45^o\cos\theta$

$+\sin 45^o\sin\theta+\cos 120^o\cos\theta+\sin 120^o\sin\theta$

$=\cos\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)-\sin\theta\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\frac{8}{17}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)+\frac{15}{17}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{23}{17}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

22. (c) $\tan x+\tan\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\tan\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)$

$=\tan x+\frac{\tan x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan x}+\frac{\tan x-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan x}$

$=\tan x+\frac{8\tan x}{1-3\tan^2 x}=\frac{3(3\tan x-\tan^3 x)}{1-3\tan^2 x}=3\tan 3x$

अतः दिया गया समीकरण $3\tan 3x=3$

$\Rightarrow \tan 3x=1$ है।

23. (d) $\sin 47^o+\sin 61^o-(\sin 11^o+\sin 25^o)$

$=2\sin 54^o\cos 7^o-2\sin 18^o\cos 7^o$

$=2\cos 7^o(\sin 54^o-\sin 18^o)$

$=2\cos 7^o.2\cos 36^o.\sin 18^o$

$=4.\cos 7^o.\frac{\sqrt{5}+1}{4}.\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\cos 7^o$.

24. (b) दिया है $\sin(\theta+\alpha)=a$ .....(i)

एवं $\sin(\theta+\beta)=b$ .....(ii)

अब, $\cos(\theta+\alpha)=\sqrt{1-a^2}\Rightarrow \theta+\alpha=\cos^{-1}\sqrt{1-a^2}$

एवं $\alpha-\beta=(\theta+\alpha)-(\theta+\beta)$

$=\cos^{-1}\sqrt{1-a^2}-\cos^{-1}\sqrt{1-b^2}$

$\Rightarrow \alpha-\beta=\cos^{-1}(\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}+ab)$

$\Rightarrow \cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}+ab$

अब, $\cos 2(\alpha-\beta)-4ab\cos(\alpha-\beta)$

$=2\cos^2(\alpha-\beta)-1-4ab\cos(\alpha-\beta)$

$=2\left(\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}+ab\right)^2$

$-4ab\left(\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}+ab\right)-1$

$=2\{(1-a^2)(1-b^2)+a^2b^2+2ab\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}\}$

$-4ab(\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}+ab)$

$=2(1-b^2-a^2+a^2b^2)+2a^2b^2-4a^2b^2-1$

$=2(1-a^2-b^2)-1=1-2a^2-2b^2$.

25. (c) $\cos^2(A-B)+\cos^2 B-2\cos(A-B)\cos A\cos B$

$=\cos^2(A-B)+\cos^2 B$

$-\cos(A-B)\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}$

$=\cos^2 B-\cos(A-B)\cos(A+B)$

$=\cos^2 B-(\cos^2 A-\sin^2 B)=1-\cos^2 A$

अतः A पर निर्भर है।

ट्रिक : A के दो भिन्न मान रखने पर,

माना $A=90^o$, तब व्यंजक का मान $\sin^2 B+\cos^2 B=1$

अब $A=0^o$ रखने पर मान $\cos^2 B+\cos^2 B-2\cos^2 B=0$ है

इसका अर्थ है कि व्यंजक, A के भिन्न मानों के लिए भिन्न है अर्थात् यह A पर निर्भर है।

इसी प्रकार $B=90^o$ के लिए व्यंजक

$\sin^2 A+0-0=\sin^2 A$ व $B=0^o$ पर

$\cos^2 A+1-2\cos^2 A=\sin^2 A$ है।

अतः व्यंजक, B के भिन्न मानों के लिए समान मान देता है इसलिए यह B पर निर्भर नहीं करता है।

26. (a) $\cos 15^o-\sin 15^o=\sqrt{2}.\cos(45^o+15^o)=\sqrt{2}.\cos 60^o$

$=\sqrt{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

27. (a, b) चूँकि $\tan\alpha, \tan\beta$ समीकरण $x^2+px+q=0$ के मूल हैं।

$\therefore \tan\alpha+\tan\beta=-p, \quad \tan\alpha\tan\beta=q$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{p}{q-1}$,

जो (b) में दिया गया है।

एवं जब $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{p}{q-1}$.

तब (a) में व्यंजक का L.H.S.

$=\cos^2(\alpha+\beta)\,[\tan^2(\alpha+\beta)+p\tan(\alpha+\beta)+q]$

$=\dfrac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}\left[\dfrac{p^2}{(q-1)^2}+\dfrac{p^2}{q-1}+q\right]$

$=\dfrac{(q-1)^2}{(q-1)^2+p^2}\left[\dfrac{p^2+p^2(q-1)+q(q-1)^2}{(q-1)^2}\right]$

$=\dfrac{q\{p^2+(q-1)^2\}}{p^2+(q-1)^2}=q=$ (a) का R.H.S.

अर्थात् (a) में दिया गया सम्बन्ध सन्तुष्ट होता हैं।

28. (a) यहाँ $5x=3x+2x \Rightarrow \tan 5x=\tan(3x+2x)$

$\Rightarrow \tan 5x=\dfrac{\tan 3x+\tan 2x}{1-\tan 3x\tan 2x}$

$\Rightarrow \tan 5x-\tan 5x\tan 3x\tan 2x=\tan 3x+\tan 2x$

$\Rightarrow \tan 5x\tan 3x\tan 2x=\tan 5x-\tan 3x-\tan 2x$.

29. (d) यहाँ $4x^2-16x+15<0 \Rightarrow \dfrac{3}{2}<x<\dfrac{5}{2}$

$\therefore$ अतः $4x^2-16x+15<0$ का पूर्णांक हल $x=2$ है।

अतः $\tan\alpha=2$ यह दिया गया है कि $\cos\beta=\tan 45^o=1$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

$=\dfrac{1}{1+\cot^2\alpha}-(1-\cos^2\beta)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{4}}-0=\dfrac{4}{5}$.

30. (d) यहाँ $\dfrac{\tan\frac{6\pi}{15}-\tan\frac{\pi}{15}}{1+\tan\frac{6\pi}{15}\tan\frac{\pi}{15}}=\tan\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \tan\dfrac{6\pi}{15}-\tan\dfrac{\pi}{15}=\sqrt{3}+\sqrt{3}\tan\dfrac{6\pi}{15}\tan\dfrac{\pi}{15}$

$\Rightarrow \tan\dfrac{6\pi}{15}-\tan\dfrac{\pi}{15}-\sqrt{3}\tan\dfrac{6\pi}{15}\tan\dfrac{\pi}{15}=\sqrt{3}$.

31. (c) $\cos 12^o+\cos 84^o+\cos 156^o+\cos 132^o$

$=(\cos 12^o+\cos 132^o)+(\cos 84^o+\cos 156^o)$

$=2\cos 72^o\cos 60^o+2\cos 120^o\cos 36^o$

$=2\left[\cos 72^o\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\times\cos 36^o\right]$

$=[\cos 72^o-\cos 36^o]=\left[\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}-\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right]=\dfrac{-1}{2}$.

32. (a) $\cos 52^o+\cos 68^o+\cos 172^o$

$=(\cos 52^o+\cos 172^o)+\cos 68^o$

$=2\cos 112^o\cos 60^o+\cos 68^o$

$=\cos 112^o+\cos 68^o=2\cos(90^o)\cos 22^o=0$.

33. (a) अंश व हर में $\cos 17^o$ से भाग देने पर,

$\dfrac{\cos 17^o+\sin 17^o}{\cos 17^o-\sin 17^o}$

$=\dfrac{1+\tan 17^o}{1-\tan 17^o}=\dfrac{\tan 45^o+\tan 17^o}{1-\tan 45^o\tan 17^o}=\tan 62^o$.

34. (a) $\dfrac{1+\tan 9^o}{1-\tan 9^o}=\tan\left(45^o+9^o\right)=\tan 54^o$.

35. (c) $\dfrac{\sin 70^o+\cos 40^o}{\cos 70^o+\sin 40^o}$

$=\dfrac{\sin 70^\circ+\sin 50^\circ}{\sin 20^\circ+\sin 40^\circ}=\dfrac{2\sin 60^\circ\cos 10^\circ}{2\sin 30^\circ\cos(-10^\circ)}$

$=\dfrac{\sin 60^o}{\sin 30^o}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{2}{1}=\sqrt{3}$.

36. (a) $\cos(A-B)=\dfrac{3}{5}$

$\therefore 5\cos A\cos B+5\sin A\sin B=3$ .....(i)

द्वितीय सम्बन्ध से, $\sin A\sin B=2\cos A\cos B$ .....(ii)

$\therefore \cos A\cos B=\dfrac{1}{5}$ एवं $5\left(\dfrac{1}{2}+1\right)\sin A\sin B=3$.

37. (d) $\tan(100^o+125^o)=\dfrac{\tan 100^o+\tan 125^o}{1-\tan 100^o\tan 125^o}$

$\therefore \tan 225^o=\dfrac{\tan 100^o+\tan 125^o}{1-\tan 100^o\tan 125^o}$

अर्थात्, $1=\dfrac{\tan 100^o+\tan 125^o}{1-\tan 100^o\tan 125^o}$

अर्थात्, $\tan 100^o+\tan 125^o+\tan 100^o\tan 125^o=1$.

38. (d) दिया है, $\sin\alpha=\dfrac{15}{17}, \tan\beta=\dfrac{12}{5}$

$\Rightarrow \cos\alpha=-\dfrac{8}{17}, \sin\beta=-\dfrac{12}{13}$ एवं $\cos\beta=-\dfrac{5}{13}$

$\because \pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}, \therefore \cos\beta=-\dfrac{5}{13}$

$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha=\dfrac{171}{221}$.

39. (c) दिये गये समीकरण $\cos x+\cos y+\cos\alpha=0$ और $\sin x+\sin y+\sin\alpha=0$ हैं।

दिये गये समीकरण इस प्रकार लिख सकते हैं

$\cos x+\cos y=-\cos\alpha$ एवं $\sin x+\sin y=-\sin\alpha$

अतः $2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)=-\cos\alpha$ .....(i)

$2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)=-\sin\alpha$ .....(ii)

समी. (i) को समी. (ii) से भाग देने पर,

$\dfrac{2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\Rightarrow \cot\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\cot\alpha$.

40. (a) $\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 2\theta = \sin\alpha$

$\Rightarrow 2\sin 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta = \sin\alpha$

$\Rightarrow \sin 2\theta(2\cos\theta + 1) = \sin\alpha$ .....(i)

अब $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 2\theta = \cos\alpha$

$2\cos 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta = \cos\alpha$

$\cos 2\theta(2\cos\theta + 1) = \cos\alpha$ .....(ii)

समीकरण (i) एवं (ii) से,

$\tan 2\theta = \tan\alpha \Rightarrow 2\theta = \alpha \Rightarrow \theta = \alpha/2$.

41. (a) $\dfrac{\cos 10^o + \sin 10^o}{\cos 10^o - \sin 10^o} = \tan(45^o + 10^o) = \tan 55^o$.

42. (b) दिया है, $\cos P = \dfrac{1}{7}, \cos Q = \dfrac{13}{14}$

$\therefore \cos(P - Q) = \cos P\cos Q + \sin P\sin Q$

$= \dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{13}{14} + \dfrac{\sqrt{48}}{7}\cdot\dfrac{\sqrt{27}}{14} = \dfrac{13+36}{98} = \dfrac{1}{2} = \cos 60^o$

$\Rightarrow P - Q = 60^o$.

43. (c) $\sec 50^o + \tan 50^o$

$\Rightarrow \tan(70^o - 20^o) = \dfrac{\tan 70^o - \tan 20^o}{1 + \tan 70^o \tan 20^o}$

$\Rightarrow \tan 50^o + \tan 70^o \tan 20^o \tan 50^o = \tan 70^o - \tan 20^o$

$\Rightarrow \tan 50^o + \tan 50^o = \tan 70^o - \tan 20^o$

$[\because \tan 70^o = \cot 20^o]$

$\Rightarrow 2\tan 50^o + \tan 20^o = \tan 70^o$

$\Rightarrow 2\tan 50^o + \tan 20^o = \tan 50^o + \sec 50^o$.

44. (b) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$\Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2^x}} + \dfrac{1}{1 + 2^{x+1}}}{1 - \dfrac{1}{1 + 1/2^x}\dfrac{1}{1 + 2^{x+1}}}$

$\Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \dfrac{2^x + 2.2^{x+x} + 2^x + 1}{1 + 2^x + 2.2^x + 2.2^{x+x} - 2^x}$

$\Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$.

45. (a) $S = \sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + ... + \sin n\theta$

हम जानते हैं, $\sin\theta + \sin(\theta + \beta) + \sin(\theta + 2\beta) + ...n$ पदों तक

$= \dfrac{\sin\dfrac{n\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\sin\left[\dfrac{\theta + \theta + (n-1)\beta}{2}\right]$

$\beta = \theta$ रखने पर, $S = \dfrac{\sin\dfrac{n\theta}{2}.\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$.

46. (b) $\cot 70^o + 4\cos 70^o = \dfrac{\cos 70^o + 4\sin 70^o\cos 70^o}{\sin 70^o}$

$= \dfrac{\cos 70^o + 2\sin 140^o}{\sin 70^o} = \dfrac{\cos 70^o + 2\sin(180^o - 40^o)}{\sin 70^o}$

$= \dfrac{\sin 20^o + \sin 40^o + \sin 40^o}{\sin 70^o} = \dfrac{2\sin 30^o\cos 10^o + \sin 40^o}{\sin 70^o}$

$= \dfrac{\sin 80^o + \sin 40^o}{\sin 70^o} = \dfrac{2\sin 60^o\cos 20^o}{\sin 70^o} = \sqrt{3}$.

47. (b) $2\cos\dfrac{\pi}{13}.\cos\dfrac{9\pi}{13} + \cos\dfrac{3\pi}{13} + \cos\dfrac{5\pi}{13}$

$= 2\cos\dfrac{\pi}{13}.\cos\dfrac{9\pi}{13} + 2\cos\dfrac{4\pi}{13}\cos\dfrac{\pi}{13}$

$= 2\cos\dfrac{\pi}{13}\left[\cos\dfrac{9\pi}{13} + \cos\dfrac{4\pi}{13}\right]$

$= 2\cos\dfrac{\pi}{13}\left[2\cos\dfrac{\pi}{2}.\cos\dfrac{5\pi}{26}\right] = 0$, $\left[\because \cos\dfrac{\pi}{2} = 0\right]$.

48. (b) दिया है $\sin\theta = \dfrac{12}{13}$

$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{12}{13}\right)^2} = \dfrac{5}{13}$

एवं $\cos\phi = \dfrac{-3}{5}, \sin\phi = \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \dfrac{-4}{5}$, $\left[\because \pi < \phi < \dfrac{3\pi}{2}\right]$

अब, $\sin(\theta + \phi) = \sin\theta.\cos\phi + \cos\theta.\sin\phi$

$= \left(\dfrac{12}{13}\right)\left(\dfrac{-3}{5}\right) + \left(\dfrac{5}{13}\right)\left(\dfrac{-4}{5}\right) = \dfrac{-36}{65} - \dfrac{20}{65} = \dfrac{-56}{65}$.

49. (d) $\cot(A - B) = \dfrac{1}{\tan(A - B)} = \dfrac{1 + \tan A\ \tan B}{\tan A - \tan B}$

$= \dfrac{1}{\tan A - \tan B} + \dfrac{\tan A\ \tan B}{\tan A - \tan B} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

50. (c) $\sin 12^o\ \sin 48^o\ \sin 54^o = \dfrac{1}{2}\left\{\cos 36^o - \cos 60^o\right\}\cos 36^o$

$= \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sqrt{5}+1}{4} - \dfrac{1}{2}\right]\left[\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right] = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right]\left[\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right]$

$= \dfrac{5-1}{32} = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$.

51. (d) $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{4\pi}{5}\cos\dfrac{8\pi}{5}$

$= \dfrac{\sin\dfrac{2^4\pi}{5}}{2^4\sin\dfrac{\pi}{5}} = \dfrac{\sin\dfrac{16\pi}{5}}{16\sin\dfrac{\pi}{5}} = \dfrac{\sin\left(3\pi + \dfrac{\pi}{5}\right)}{16\sin\dfrac{\pi}{5}}$

$= \dfrac{-\sin\dfrac{\pi}{5}}{16\sin\dfrac{\pi}{5}} = -\dfrac{1}{16}$.

52. (c) $\dfrac{\cos 12^o - \sin 12^o}{\cos 12^o + \sin 12^o} + \dfrac{\sin 147^o}{\cos 147^o}$

$= \dfrac{1 - \tan 12^o}{1 + \tan 12^o} + \tan 147^o = \tan 33^o - \tan 33^o = 0$.

53. (c) $\tan 20^o \tan 40^o \tan 60^o \tan 80^o$

$= \frac{\sin 20^o \sin 40^o \sin 80^o \tan 60^o}{\cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o}$

यहाँ $N^r = (\sin 20^o \sin 40^o \sin 80^o)$

$= \frac{\sin 20^o}{2}(2 \sin 40^o \sin 80^o)$

$= \frac{\sin 20^o}{2}(\cos 40^o - \cos 120^o)$

$= \frac{1}{2}\sin 20^o \left(1 - 2\sin^2 20^o + \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\sin 20^o \left(\frac{3}{2} - 2\sin^2 20^o\right) = \frac{\sin 60^o}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}$

अब, $D^r = \cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o$

$= \frac{\sin 2^3 20^o}{2^3 \sin 20^o} = \frac{\sin 160^o}{8 \sin 20^o} = \frac{\sin 20^o}{8 \sin 20^o} = \frac{1}{8}$

$\therefore$ अतः $\tan 20^o \tan 40^o \tan 80^o = \frac{\sqrt{3}/8}{1/8}$

इसलिए $\tan 20^o \tan 40^o \tan 60^o \tan 80^o = \sqrt{3}.\sqrt{3} = 3$.

54. (d) $\cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o = \frac{\sin 2^3 20^o}{2^3 \sin 20^o} = \frac{\sin 160^o}{8 \sin 20^o} = \frac{1}{8}$.

55. (d) $\sin 36^o \sin 72^o \sin 108^o \sin 144^o$

$= \sin^2 36^o \sin^2 72^o = \frac{1}{4}\{(2\sin^2 36^o)(2\sin^2 72^o)\}$

$= \frac{1}{4}\{(1 - \cos 72^o)(1 - \cos 144^o)\}$

$= \frac{1}{4}\{(1 - \sin 18^o)(1 + \cos 36^o)\}$

$= \frac{1}{4}\left[\left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)\right] = \frac{20}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$.

56. (a) दिया है $\cos A = m \cos B \Rightarrow \frac{m}{1} = \frac{\cos A}{\cos B}$

$\Rightarrow \frac{m+1}{m-1} = \frac{\cos A + \cos B}{\cos A - \cos B} = \frac{2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{B-A}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{B-A}{2}\right)}$

$= \cot\left(\frac{A+B}{2}\right)\cot\left(\frac{B-A}{2}\right)$

अतः $\cot\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{m+1}{m-1}\tan\frac{B-A}{2}$.

57. (b) $x = \cos 10^o \cos 20^o \cos 40^o$

$= \frac{1}{2 \sin 10^o}[2 \sin 10^o \cos 10^o \cos 20^o \cos 40^o]$

$= \frac{1}{2.2 \sin 10^o}[2 \sin 20^o \cos 20^o \cos 40^o]$

$= \frac{1}{2.4 \sin 10^o}[2 \sin 40^o \cos 40^o) = \frac{1}{8 \sin 10^o}(\sin 80^o)$

$= \frac{1}{8 \sin 10^o}\cos 10^o = \frac{1}{8}\cot 10^o$.

58. (a) $\sin 12^o \sin 24^o \sin 48^o \sin 84^o$

$= \frac{1}{4}(2 \sin 12^o \sin 48^o)(2 \sin 24^o \sin 84^o)$

$= \frac{1}{2}(\cos 36^o - \cos 60^o)(\cos 60^o - \cos 108^o)$

$= \frac{1}{4}\left(\cos 36^o - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \sin 18^o\right)$

$= \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) - \frac{1}{2}\right\}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\right\} = \frac{1}{16}$

एवं $\cos 20^o \cos 40^o \cos 60 \cos 80^o$

$= \frac{1}{2}[\cos(60^o - 20^o)\cos 20^o \cos(60^o + 20^o)]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\cos 3(20^o)\right] = \frac{1}{8}\cos 60^o = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$.

59. (a) चूँकि $\tan 3A = \frac{\tan A + \tan 2A}{1 - \tan A \tan 2A}$

$\Rightarrow \tan 3A - \tan 2A - \tan A = \tan 3A \tan 2A \tan A$.

60. (d) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - \sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta + \alpha - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta - \alpha + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos(\alpha - \beta)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \overline{\alpha + \beta}\right) = \cos(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta)$.

61. (c) $\tan 9^o - \tan 27^o - \tan 63^o + \tan 81^o$

$= \tan 9^o - \tan 27^o - \cot 27^o + \cot 9^o$

$= (\tan 9^o + \cot 9^o) - (\tan 27^o + \cot 27^o)$

$= \frac{\cos(9^o - 9^o)}{\sin 9^o \cos 9^o} - \frac{\cos(27^o - 27^o)}{\sin 27^o . \cos 27^o} = \frac{2}{\sin 18^o} - \frac{2}{\sin 54^o}$

$= 2\left\{\frac{\sin 54^o - \sin 18^o}{\sin 18^o \sin 54^o}\right\} = 2.\ \frac{2.\cos 36^o . \sin 18^o}{\sin 18^o . \sin 54^o} = 4$

62. (c) $\frac{\sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta + \sin 9\theta}{\cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 9\theta}$

$= \frac{(\sin 3\theta + \sin 9\theta) + (\sin 5\theta + \sin 7\theta)}{(\cos 3\theta + \cos 9\theta) + (\cos 5\theta + \cos 7\theta)}$

$= \frac{2\sin 6\theta \cos 3\theta + 2\sin 6\theta \cos \theta}{2\cos 6\theta \cos 3\theta + 2\cos 6\theta \cos \theta}$

$= \frac{2\sin 6\theta(\cos 3\theta + \cos \theta)}{2\cos 6\theta(\cos 3\theta + \cos \theta)} = \tan 6\theta$.

63. (b) $\sin 163^o \cos 347^o + \sin 73^o \sin 167^o$

$= \sin(180^o - 17^o)\cos(360^o - 13^o) + \cos(90^o - 17^o)$

$\sin(180^o - 13^o)$

$= \sin 17^o \cos 13^o + \cos 17^o \sin 13^o = \sin 30^o = 1/2$.

64. (a) $\sin 600^o \cos 330^o + \cos 120^o \sin 150^o$

$= -\sin 60^o \cos 30^o - \sin 30^o \cos 60^o$

$= -\{\sin(60^o + 30^o)\} = -1$.

65. (b) $\cos A + \cos(240^o + A) + \cos(240^o - A)$

$= \cos A + 2\cos 240^o \cos A$

$= \cos A\{1 + 2\cos(180^o + 60^o)\} = \cos A\left\{1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} = 0$

66. (a) $\cos^2\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta + \frac{\pi}{6} - \theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta - \frac{\pi}{6} + \theta\right)$

$[\because \cos^2 A - \sin^2 B = \cos(A+B)\cos(A-B)]$

$= \cos\frac{2\pi}{6}\cos 2\theta = \frac{1}{2}\cos 2\theta$.

67. (c) दिया है $b\sin\alpha = a\sin(\alpha + 2\beta) \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + 2\beta)}$

$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin\alpha + \sin(\alpha + 2\beta)}{\sin\alpha - \sin(\alpha + 2\beta)} = \frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos\beta}{-2\cos(\alpha+\beta)\sin\beta}$

$= -\tan(\alpha+\beta)\cot\beta = -\frac{\cot\beta}{\cot(\alpha+\beta)}$.

68. (b) $\frac{\sin(B+A) + \cos(B-A)}{\sin(B-A) + \cos(B+A)}$

$= \frac{\sin(B+A) + \sin(90^o - \overline{B-A})}{\sin(B-A) + \sin(90^o - \overline{A+B})}$

$= \frac{2\sin(A+45^o)\cos(45^o - B)}{2\sin(45^o - A)\cos(45^o - B)}$

$= \frac{\sin(A+45^o)}{\sin(45^o - A)} = \frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A}$.

69. (b) $\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{a+b}{a-b}$

$\Rightarrow \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{\sin(x+y) - \sin(x-y)} = \frac{(a+b)+(a-b)}{(a+b)-(a-b)}$

$\Rightarrow \frac{2\sin x\cos y}{2\cos x\sin y} = \frac{2a}{2b} \Rightarrow \frac{\tan x}{\tan y} = \frac{a}{b}$.

70. (a) वर्ग करके जोड़ने पर,

$x^2 + y^2 = 1 + 1 + 2\cos(2A - A)$

$\therefore \frac{x^2 + y^2 - 2}{2} = \cos A$ .....(i)

साथ ही, $\cos A + 2\cos^2 A - 1 = y$

या $(\cos A + 1)(2\cos A - 1) = y$

समीकरण (i) से $\cos A$ का मान रखने पर उत्तर प्राप्त हो जाता है।

71. (b) दिया गया व्यंजक निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$\frac{(\cos 6x + \cos 4x) + 5(\cos 4x + \cos 2x) + 10(\cos 2x + 1)}{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x}$

सरल करने पर अभीष्ट परिणाम अर्थात्, $2\cos x$ है।

72. (a) $\cos\alpha\sin(\beta-\gamma) + \cos\alpha\sin(\gamma-\alpha) + \cos\gamma\sin(\alpha-\beta)$

$\alpha = \beta = \gamma = 60^o$ रखने पर $\Rightarrow \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(0) = 0$.

73. (b) प्रथम दो तथा अन्तिम दो पदों को मिलाने पर,

L.H.S. $= 2\sin\gamma\cos(\beta-\alpha) + 2\sin(-\gamma)\cos(\alpha+\beta)$

$= 2\sin\gamma[\cos(\beta-\alpha) - \cos(\alpha+\beta)]$

$= 2\sin\gamma \cdot 2\sin\alpha\sin\beta = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

74. (a) $\frac{m}{n} = \frac{\tan(120^o + \theta)}{\tan(\theta - 30^o)}$

$\Rightarrow \frac{m+n}{m-n} = \frac{\tan(\theta + 120^o) + \tan(\theta - 30^o)}{\tan(\theta + 120^o) - \tan(\theta - 30^o)}$

(योगान्तरानुपात से)

$= \frac{\sin(\theta + 120^o)\cos(\theta - 30^o) + \cos(\theta + 120^o)\sin(\theta - 30^o)}{\sin(\theta + 120^o)\cos(\theta - 30^o) - \cos(\theta + 120^o)\sin(\theta - 30^o)}$

$= \frac{\sin(2\theta + 90^o)}{\sin(150^o)} = \frac{\cos 2\theta}{1/2} = 2\cos 2\theta$.

75. (a) $2\cos x - \cos 3x - \cos 5x = 2\cos x(1 - \cos 4x)$

$= 2\cos x\, 2\sin^2 2x = 4\cos x\sin^2 2x = 16\sin^2 x\cos^3 x$.

76. (c) $1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x$

$= (1 + \cos 6x) + (\cos 2x + \cos 4x)$

$= 2\cos^2 3x + 2\cos 3x\cos x = 2\cos 3x(\cos 3x + \cos x)$

$= 4\cos x\cos 2x\cos 3x$.

77. (a) $\frac{\sin A - \sin C}{\cos C - \cos A} = \cot B \Rightarrow \frac{2\cos\frac{A+C}{2}\sin\frac{A-C}{2}}{2\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{A-C}{2}} = \cot B$

$\Rightarrow \cot\frac{(A+C)}{2} = \cot B \Rightarrow B = \frac{A+C}{2}$

अतः A, B, C समान्तर श्रेणी में होंगे।

78. (d) $\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{16\pi}{15}$

$= \frac{\sin 2^4\frac{2\pi}{15}}{2^4\sin\frac{2\pi}{15}} = \frac{\sin\frac{32\pi}{15}}{16\sin\frac{2\pi}{15}} = \frac{1}{16}\frac{\sin\frac{2\pi}{15}}{\sin\frac{2\pi}{15}} = \frac{1}{16}$.

79. (a) $\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{5\pi}{12}$

$= 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\cos^2\frac{5\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}\right)$

$= \frac{3}{2} + \cos\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{3}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}$

$= \frac{3}{2} + 0.\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

80. (b) यहाँ $\sin\frac{\pi}{16}.\sin\frac{3\pi}{16}.\sin\frac{5\pi}{16}.\sin\frac{7\pi}{16}$

$= \frac{1}{4}\left[2\sin\frac{\pi}{16}\sin\frac{3\pi}{16}.2\sin\frac{5\pi}{16}\sin\frac{7\pi}{16}\right]$

$= \frac{1}{4}\left[\left(\cos\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{8} - \cos\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$= \frac{1}{4}\left[\left(\cos\frac{\pi}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$

$= \frac{1}{4}\left[\left(\cos^2\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{8}\left[2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1\right]$

$= \frac{1}{8}\left[\cos\frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{8}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{16}$.

81. (d) $\cos^2 76^o + \cos^2 16^o - \cos 76^o \cos 16^o$

$= \frac{1}{2}\left[1 + \cos 152^o + 1 + \cos 32^o - \cos 92^o - \cos 60^o\right]$

$= \frac{1}{2}\left[2 - \frac{1}{2} + \cos 152^o + \cos 32^o - \cos 92^o\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} + 2\cos 92^o \cos 60^o - \cos 92^o\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} + \cos 92^o - \cos 92^o\right] = \frac{3}{4}$.

82. (d) $\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7} = \left[\frac{\sin\left(2^3.\frac{\pi}{7}\right)}{2^3\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right] = \frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}$.

83. (b) $\frac{\tan 70^o - \tan 20^o}{\tan 50^o}$

$= \frac{\frac{\sin 70^o}{\cos 70^o} - \frac{\sin 20^o}{\cos 20^o}}{\frac{\sin 50^o}{\cos 50^o}} = \frac{\frac{\sin 70^o \cos 20^o - \cos 70^o \sin 20^o}{\cos 70^o \cos 20^o}}{\frac{\sin 50^o}{\cos 50^o}}$

$= \frac{2}{2} \times \frac{\sin(70^o - 20^o)\cos 50^o}{\cos 70^o \cos 20^o \sin 50^o} = \frac{2\sin 50^o \cos 50^o}{2\cos 70^o \cos 20^o \sin 50^o}$

$= \frac{2\cos 50^o}{\cos 90^o + \cos 50^o} = \frac{2\cos 50^o}{0 + \cos 50^o} = 2$.

84. (a) $\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha + 120^o) + \cos^2(\alpha - 120^o)$

$= \cos^2\alpha + \{\cos(\alpha + 120^o) + \cos(\alpha - 120^o)\}^2$

$- 2\cos(\alpha + 120^o)\cos(\alpha - 120^o)$

$= \cos^2\alpha + \{2\cos\alpha\cos 120^o\}^2 - 2\{\cos^2\alpha - \sin^2 120^o\}$

$= \cos^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2 120^o$

$= 2\sin^2 120^o = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$.

85. (b) $\tan 20^o + 2\tan 50^o - \tan 70^o$

$= \frac{\sin 20^o}{\cos 20^o} - \frac{\sin 70^o}{\cos 70^o} + 2\tan 50^o$

$= \frac{\sin 20^o \cos 70^o - \cos 20^o \sin 70^o}{\cos 20^o \cos 70^o} + 2\tan 50^o$

$= \frac{\sin(20^o - 70^o)}{\frac{1}{2}[\cos(70^o + 20^o) + \cos(70^o - 20^o)]} + 2\tan 50^o$

$= \frac{2\sin(-50^o)}{\cos 90^o + \cos 50^o} + 2\tan 50^o = \frac{-2\sin 50^o}{0 + \cos 50^o} + 2\tan 50^o$

$= -2\tan 50^o + 2\tan 50^o = 0$.

अपवर्त्य और उप–अपवर्त्य कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

1. (b) $\frac{\cot^2 15^o - 1}{\cot^2 15^o + 1} = \frac{\frac{\cos^2 15^o}{\sin^2 15^o} - 1}{\frac{\cos^2 15^o}{\sin^2 15^o} + 1}$

$= \frac{\cos^2 15^o - \sin^2 15^o}{\cos^2 15^o + \sin^2 15^o} = \cos(30^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. (b) यहाँ $\cos\theta = \frac{3}{5}$ व $\cos\phi = \frac{4}{5}$.

इसलिए $\cos(\theta - \phi) = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi$

$= \frac{3}{5}.\frac{4}{5} + \frac{4}{5}.\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$

लेकिन $2\cos^2\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right) = 1 + \cos(\theta - \phi) = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{50}$

$\therefore \cos^2\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right) = \frac{49}{50}$. अतः $\cos\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right) = \frac{7}{5\sqrt{2}}$.

3. (a) दिया है $\sec\theta = \frac{5}{4}$

$\sec\theta = \frac{1 + \tan^2(\theta/2)}{1 - \tan^2(\theta/2)} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{1 + \tan^2(\theta/2)}{1 - \tan^2(\theta/2)}$

$\Rightarrow 5 - 5\tan^2(\theta/2) = 4 + 4\tan^2(\theta/2)$

$\Rightarrow 9\tan^2(\theta/2) = 1 \Rightarrow \tan(\theta/2) = \frac{1}{3}$.

4. (d) दिया है $\tan\frac{A}{2} = \frac{3}{2}$.

$\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} = \frac{2\cos^2\frac{A}{2}}{2\sin^2\frac{A}{2}} = \cot^2\frac{A}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

5. (d) दिया है $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 30^o \Rightarrow \tan 3A = \tan 90^o = \infty$

6. (a) $\sin 4\theta = 2\sin 2\theta\cos 2\theta$

$= 2.2\sin\theta\cos\theta(1 - 2\sin^2\theta)$

$= 4\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)\sqrt{1 - \sin^2\theta}$

7. (b) $\cos 2B = \frac{\cos(A + C)}{\cos(A - C)} = \frac{\cos A\cos C - \sin A\sin C}{\cos A\cos C + \sin A\sin C}$

$\Rightarrow \frac{1 - \tan^2 B}{1 + \tan^2 B} = \frac{1 - \tan A\tan C}{1 + \tan A\tan C}$

$\Rightarrow 1 + \tan^2 B - \tan A\tan C - \tan A\tan C\tan^2 B$

$= 1 - \tan^2 B + \tan A\tan C - \tan A\tan C\tan^2 B$

$\Rightarrow 2\tan^2 B = 2\tan A\tan C \Rightarrow \tan^2 B = \tan A\tan C$

अतः $\tan A$, $\tan B$ व $\tan C$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

8. (a) दिया है $\tan\theta = \frac{b}{a}$.

अब $a\cos 2\theta + b\sin 2\theta = a\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right) + b\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$ रखने पर,

$= a\left(\frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{1+\frac{b^2}{a^2}}\right) + b\left(\frac{2\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}}\right) = a\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right) + b\left(\frac{2ba}{a^2+b^2}\right)$

$= \frac{1}{(a^2+b^2)}\{a^3 - ab^2 + 2ab^2\} = \frac{a(a^2+b^2)}{a^2+b^2} = a$.

9. (a) $\left(\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}\right)\left(\frac{\cos A}{1+\cos A}\right)$

$= \frac{2\sin A\cos A}{2\cos^2 A}\frac{\cos A}{1+\cos A} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \tan\frac{A}{2}$.

10. (d) $\frac{1}{\tan 3A - \tan A} - \frac{1}{\cot 3A - \cot A}$

$= \frac{1}{\tan 3A - \tan A} + \frac{\tan A\tan 3A}{\tan 3A - \tan A} = \frac{1}{\tan 2A} = \cot 2A$.

11. (a) $\operatorname{cosec} A - 2\cot 2A\cos A = \frac{1}{\sin A} - \frac{2\cos A\cos 2A}{\sin 2A}$

$= \frac{1}{\sin A} - \frac{2\cos A\cos 2A}{2\sin A\cos A} = \frac{1-\cos 2A}{\sin A} = \frac{2\sin^2 A}{\sin A}$

$= 2\sin A$.

12. (c) $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\theta}} = \sqrt{2+\sqrt{2.2\cos^2 2\theta}}$

$= \sqrt{2+2\cos 2\theta} = \sqrt{4\cos^2\theta} = 2\cos\theta$.

13. (c) दिया है $\cos 3\theta = \alpha\cos\theta + \beta\cos^3\theta$

लेकिन $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \Rightarrow (\alpha,\beta) = (-3,4)$.

14. (a) $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2$

$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta + \sin^2\alpha +$

$\sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta$

$= 2\{1+\cos(\alpha-\beta)\} = 4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

15. (b) दिया है $\tan x = \frac{b}{a}$

अब $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \sqrt{\frac{1+b/a}{1-b/a}} + \sqrt{\frac{1-b/a}{1+b/a}}$

$= \frac{2}{\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1-\tan^2 x}} = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}} = \frac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

16. (d) $1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right) = -\sin 2\theta$.

17. (d) $\frac{\sin 3A - \cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)}{\cos A + \cos(\pi+3A)} = \frac{\sin 3A - \sin A}{\cos A - \cos 3A}$

$= \frac{2\cos 2A\sin A}{2\sin 2A\sin A} = \frac{\cos 2A}{\sin 2A} = \cot 2A$.

18. (b) यहाँ $\tan A = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A} = \frac{3.\frac{1}{2} - \frac{1}{8}}{1-3.\frac{1}{4}} = \frac{12-1}{2} = \frac{11}{2}$

.

19. (b) $\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}} = \frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}$

$= \tan\frac{x}{2}$.

20. (d) $(\sec 2A+1)\sec^2 A = \left(\frac{1+\tan^2 A}{1-\tan^2 A}+1\right)(1+\tan^2 A)$

$= \frac{2(1+\tan^2 A)}{1-\tan^2 A} = 2\sec 2A.$

21. (b) $2\sin A\cos^3 A - 2\sin^3 A\cos A$

$= 2\sin A\cos A(\cos^2 A - \sin^2 A)$

$= 2\sin A\cos A\cos 2A = \sin 2A\cos 2A = \frac{1}{2}\sin 4A$.

22. (c) $\frac{\sin\theta + \sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta}$

$= \frac{\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta + \cos\theta} = \frac{\sin\theta(1+2\cos\theta)}{\cos\theta(1+2\cos\theta)} = \tan\theta$.

ट्रिक : $\theta = 30°$ रखने पर, चूंकि $\theta = 30°$ के लिए कोई भी विकल्प उभयनिष्ठ मान नहीं देता है।

23. (b) यहाँ, $\frac{2\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha} = y$

तब, $\frac{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = y$

$\Rightarrow \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)} = y$

$\Rightarrow \frac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = y$.

24. (a) चूँकि $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \tan\beta = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \frac{3}{4}$

$\therefore \tan(\alpha+2\beta) = \frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{7}.\frac{3}{4}} = \frac{25}{25} = 1$

अब $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ एवं $\tan 2\beta = \frac{3}{4} > 0$ दोनों$\Rightarrow 0 < 2\beta < \frac{\pi}{2}$.

पुनः $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ एवं $0 < 2\beta < \frac{\pi}{2}$ दोनों $\Rightarrow 0 < \alpha + 2\beta < \pi$

अतः $0 < \alpha + 2\beta < \pi$ एवं $\tan(\alpha+2\beta) = 1$ दोनों

$\Rightarrow \alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha$.

25. (a) दिया हैं, $\cos(\theta-\alpha), \cos\theta$ और $\cos(\theta+\alpha)$ ह.श्रे. में हैं

$\Rightarrow \frac{1}{\cos(\theta-\alpha)}, \frac{1}{\cos\theta}, \frac{1}{\cos(\theta+\alpha)}$ स.श्रे. में होंगे

अतः $\frac{2}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos(\theta-\alpha)} + \frac{1}{\cos(\theta+\alpha)}$

$= \frac{\cos(\alpha+\theta)+\cos(\theta-\alpha)}{\cos^2\theta - \sin^2\alpha} \Rightarrow \frac{2}{\cos\theta} = \frac{2\cos\theta\cos\alpha}{\cos^2\theta-\sin^2\alpha}$

$\Rightarrow \cos^2\theta - \sin^2\alpha = \cos^2\theta\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos^2\theta(1-\cos\alpha) = \sin^2\alpha$

$\Rightarrow \cos^2\theta\left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$\cos^2\theta\sec^2\frac{\alpha}{2} = 2 \Rightarrow \cos\theta\sec\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{2}$.

26. (b) दिया है $\sin\theta + \sin\phi = a$ .....(i)

व $\cos\theta + \cos\phi = b$ .....(ii)

वर्ग करने पर, $\sin^2\theta + \sin^2\phi + 2\sin\theta\sin\phi = a^2$

व $\cos^2\theta + \cos^2\phi + 2\cos\theta\cos\phi = b^2$

जोड़ने पर, $2+2(\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi) = a^2+b^2$

$\Rightarrow 2\cos(\theta-\phi) = a^2+b^2-2 \Rightarrow \cos(\theta-\phi) = \frac{a^2+b^2-2}{2}$

$\Rightarrow \frac{1-\tan^2\frac{\theta-\phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta-\phi}{2}} = \frac{a^2+b^2-2}{2}$

$\Rightarrow (a^2+b^2)+(a^2+b^2)\tan^2\frac{\theta-\phi}{2} - 2 - 2\tan^2\frac{\theta-\phi}{2}$

$= 2 - 2\tan^2\frac{\theta-\phi}{2}$

$\Rightarrow \frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2} = \tan^2\frac{\theta-\phi}{2} \Rightarrow \tan\frac{(\theta-\phi)}{2} = \sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$

ट्रिक : $\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 0^o$ रखने पर, $a = 1 = b$

$\therefore \tan\frac{\theta-\phi}{2} = 1$, जो विकल्प (a) व (b) देते हैं।

अतः पुनः $\theta = \frac{\pi}{4} = \phi$ रखने पर, $\tan\frac{\theta-\phi}{2} = 0$ जो (b) देता है।

27. (a) $\tan A = \frac{1-\cos B}{\sin B} = \frac{2\sin^2(B/2)}{2\sin(B/2)\cos(B/2)} = \tan\frac{B}{2}$

$\Rightarrow \tan 2A = \tan B$.

28. (a,c) चूँकि $\sin\beta, \sin\alpha$ व $\cos\alpha$ के बीच गुणोत्तर माध्य है

$\therefore \sin^2\beta = \sin\alpha\cos\alpha$

अब $\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right)^2$

$= 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, जो (a) में दिया गया है

एवं $\cos 2\beta = 2\cos^2\left\{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right\} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$,

जो विकल्प (c) में दिया गया है।

29. (b) $\frac{\sec 8A - 1}{\sec 4A - 1} = \frac{1-\cos 8A}{\cos 8A} \cdot \frac{\cos 4A}{1-\cos 4A}$

$= \frac{2\sin^2 4A}{\cos 8A}\frac{\cos 4A}{2\sin^2 2A} = \frac{2\sin 4A\cos 4A}{\cos 8A}\frac{\sin 4A}{2\sin^2 2A}$

$= \tan 8A \frac{2\sin 2A\cos 2A}{2\sin^2 2A} = \frac{\tan 8A}{\tan 2A}$.

30. (c) $32\sin\frac{A}{2}\sin\frac{5A}{2} = 16(\cos 2A - \cos 3A)$

$= 16(2\cos^2 A - 1 - 4\cos^3 A + 3\cos A)$

$= 16\left(2\times\frac{9}{16} - 1 - 4\times\frac{27}{64} + 3\times\frac{3}{4}\right) = 11$.

31. (c) $\tan 15^o = \tan(45^o - 30^o)$

$= \frac{1-1/\sqrt{3}}{1+1/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = 2-\sqrt{3}$.

32. (b) $\cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{24}{25}$ {यहाँ $t = \tan\alpha$ }

$\sin 2\beta = \frac{2T}{1+T^2} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{5}$ { $T = \tan\beta$ }

$\therefore \sin 4\beta = 2\sin 2\beta\cos 2\beta = 2.\frac{3}{5}.\frac{4}{5} = \frac{24}{25} = \cos 2\alpha$.

33. (c) $\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

34. (b) $\cos A = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}$

L.H.S $= 16(\sin 3A - \sin 2A)$

$= 16\sin A(3 - 4\sin^2 A - 2\cos A)$

$= 16.\frac{\sqrt{7}}{4}\left(3 - 4.\frac{7}{16} - 2.\frac{3}{4}\right) = -\sqrt{7}$.

35. (d) दिया है, $\tan\theta = \frac{1}{7}, \sin\phi = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{50}}, \cos\theta = \frac{7}{\sqrt{50}}, \cos\phi = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\therefore \cos 2\phi = 2\cos^2\phi - 1 = 2.\frac{9}{10} - 1 = \frac{8}{10}$

$\sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi = 2\times.\frac{1}{\sqrt{10}}\times\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{6}{10}$

$\therefore \cos(\theta+2\phi) = \cos\theta\cos 2\phi - \sin\theta\sin 2\phi$

$= \frac{7}{\sqrt{50}}\times\frac{8}{10} - \frac{1}{\sqrt{50}}.\frac{6}{10}$

$= \frac{56-6}{10\sqrt{50}} = \frac{50}{10\sqrt{50}} = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \theta + 2\phi = 45^o$.

36. (d) $\frac{\cos A}{1-\sin A}=\frac{\cos A(1+\sin A)}{\cos^2 A}=\frac{(1+\sin A)}{\cos A}$

$=\frac{\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)}=\frac{\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}}$

$=\frac{1+\tan\frac{A}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}}$,

$\left(\text{अंश तथा हर को } \cos\frac{A}{2} \text{ से भाग देने पर}\right)$

$=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)$.

37. (c) $\tan\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{\sin(A/2)}{\cos(A/2)}=\pm\sqrt{\frac{(1-\cos A)/2}{(1+\cos A)/2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$.

38. (a) $\cos(\alpha/2)=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ [$\because \alpha$ तृतीय चतुर्थांश में है]

$=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$

$\therefore\ \cos(\alpha/2)=-\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$.

39. (b) $\sec 2x-\tan 2x=\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x}$

$=\frac{(\cos x-\sin x)^2}{(\cos^2 x-\sin^2 x)}=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$

$=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan x}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

40. (b) दिये गये सम्बन्ध का वर्ग करने पर,

$\sin 2\theta=x^2-1\le 1\Rightarrow x^2\le 2$

या $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$ [$\because \sin 2\theta\le 1$]

अब $\sin^6\theta+\cos^6\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^3-3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\theta$

$=1-\frac{3}{4}(x^2-1)^2=\frac{1}{4}\{4-3(x^2-1)^2\}$

अतः दिया गया परिणाम सत्य होगा जब $x^2\le 2$ ना कि x की सभी वास्तविक संख्याओं के लिए।

41. (a) $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta},\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$\tan 2\theta+\sec 2\theta=\frac{2t}{1-t^2}+\frac{1+t^2}{1-t^2}=\frac{(1+t)^2}{(1-t)(1+t)}=\frac{1+t}{1-t}$.

42. (c) $\frac{\sqrt{2}-\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$

$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\right\}}{\sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\right\}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}$

$=\frac{\sqrt{2}\{1-\cos\theta\}}{\sqrt{2}\sin\theta}$, जहाँ $\theta=\alpha-\frac{\pi}{4}$

$=\frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}=\tan\frac{\theta}{2}=\tan\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$.

43. (c) $\because \cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$\therefore \cos 3\theta=4\frac{1}{2^3}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$

$\Rightarrow \cos 3\theta=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-3\right]$

$\Rightarrow \cos 3\theta=\frac{1}{2}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)$.

44. (b) चूँकि α समीकरण $25\cos^2\theta+5\cos\theta-12=0$ का मूल है।

$\therefore 25\cos^2\alpha+5\cos\alpha-12=0$

$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{-5\pm\sqrt{25+1200}}{50}=\frac{-5\pm 35}{50}$

$\Rightarrow \cos\alpha=-4/5$ [$\because \pi/2<\alpha<\pi\Rightarrow\cos\alpha<0$]

$\therefore \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-24/25$.

45. (c) $A=133^o$ के लिए $\frac{A}{2}=66.5^o\Rightarrow \sin\frac{A}{2}>\cos\frac{A}{2}>0$

अतः $\sqrt{1+\sin A}=\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}$ .....(i)

तथा $\sqrt{1-\sin A}=\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}$ .....(ii)

समी (i) में से (ii) को घटाने पर,

$2\cos\frac{A}{2}=\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}$.

46. (d) $\sin A=\frac{4}{5}\Rightarrow\tan A=-\frac{4}{3}$, $(90^o<A<180^o)$

$\tan A=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$, (माना $\tan\frac{A}{2}=P$)

$\Rightarrow -\frac{4}{3}=\frac{2P}{1-P^2}\Rightarrow 4P^2-6P-4=0$

$\Rightarrow P=\frac{-1}{2}$ (असम्भव), अतः $\tan\frac{A}{2}=2$.

47. (b) $2\tan A=3\tan B$

$\Rightarrow \tan A=\frac{3}{2}\tan B=\frac{3}{2}t$, [माना $\tan B=t$]

$\Rightarrow \sin 2B=\frac{2t}{1+t^2},\cos 2B=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\therefore \frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}{5-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \frac{2t}{4+6t^2} = \frac{t}{2+3t^2} = \tan(A-B).$$

48. (b) $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$\Rightarrow$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

$$\Rightarrow 3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} \Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} = \frac{1}{3}.$$

49. (a) $\tan\frac{\theta}{2} = t \Rightarrow \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \cos\theta$.

50. (b) दिया है $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\cos\theta$ .....(i)

दोनों तरफ वर्ग करने पर, $x + \frac{1}{x} + 2 = 4\cos^2\theta$

$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = 4\cos^2\theta - 2$

$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2(2\cos^2\theta - 1) = 2\cos 2\theta$ .....(ii)

पुनः दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 4\cos^2 2\theta$

$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 4\cos^2 2\theta - 2 = 2(2\cos^2 2\theta - 1)$

$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 2\cos 4\theta$ .....(iii)

अब दोनों तरफ घन करने पर, $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 = (2\cos 4\theta)^3$

$\Rightarrow x^6 + \frac{1}{x^6} + 3x^2 \times \frac{1}{x^2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 8\cos^3 4\theta$

$\Rightarrow x^6 + \frac{1}{x^6} + 3(2\cos 4\theta) = 8\cos^3 4\theta$

$\Rightarrow x^6 + \frac{1}{x^6} = 8\cos^3 4\theta - 6\cos 4\theta$

$= 2(4\cos^3 4\theta - 3\cos 4\theta) = 2\cos 3(4\theta) = 2\cos 12\theta$.

51. (b) दिया है $\sin 2\theta + \sin 2\phi = 1/2$ .....(i)

एवं $\cos 2\theta + \cos 2\phi = 3/2$ .....(ii)

वर्ग करके जोड़ने पर,

$\therefore (\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) + (\sin^2 2\phi + \cos^2 2\phi)$

$+2[\sin 2\theta \sin 2\phi + \cos 2\theta \cos 2\phi] = (1/4) + (9/4)$

$\Rightarrow \cos 2\theta \cos 2\phi + \sin 2\theta \sin 2\phi = 1/4$

$\Rightarrow \cos(2\theta - 2\phi) = 1/4 \Rightarrow \cos^2(\theta - \phi) = 5/8$.

52. (a) यहाँ $\cos 2(\theta+\phi) - 4\cos(\theta+\phi)\sin\theta\sin\phi + 2\sin^2\phi$

अब $\theta = \phi = \frac{\pi}{4}$ रखने पर,

$$\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\sin^2\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 0$$

विकल्प (a) में $\theta = \phi = \frac{\pi}{4}$ रखने पर, $\cos 2\theta = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

अतः विकल्प (a) सही है।

53. (c) $\sin 15^o = \sin(45^o - 30^o) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ = अपरिमेय

$\cos 15^o = \cos(45^o - 30^o) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ = अपरिमेय

$\therefore \sin 15^o \cos 15^o = \frac{1}{2}(2\sin 15^o \cos 15^o)$

$= \frac{1}{2}\sin 30^o = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ = परिमेय

$\therefore \sin 15^o \cos 75^o = \sin 15^o \sin 15^o = \sin^2 15^o$

$= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{8}$ = अपरिमेय

54. (a) $\cos 15^o = \sqrt{\frac{1+\cos(2\times 15^o)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos 30^o}{2}}$

$(\because \cos 15^o > 0)$.

55. (b) $\sin A + \cos A = \sqrt{2}$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$1 + \sin 2A = 2 \Rightarrow \sin 2A = 1 = \sin 90^o$

$\Rightarrow 2A = 90^o$ या $A = 45^o$

अब $\cos^2 A = (\cos 45^o)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

56. (b) $2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta = 1 \Rightarrow 2\cos 2\theta = 1$

$\Rightarrow \cos 2\theta = \frac{1}{2} = \cos 60^o \Rightarrow 2\theta = 60^o \Rightarrow \theta = 30^o$

57. (c) $\sin\alpha = \frac{336}{625}$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{336}{625}\right)^2}$

[$\because \alpha$, II चतुर्थांश में है]

अब $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\frac{7}{25}$

[$\because \frac{\alpha}{2}$, III चतुर्थांश में है]

$\therefore \sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) = +\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha/2)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5}$

[$\because \frac{\alpha}{4}$, दूसरे चतुर्थांश में है]

58. (b) $\tan^2\theta = 2\tan^2\phi + 1 \Rightarrow 1 + \tan^2\theta = 2(1 + \tan^2\phi)$

$\Rightarrow \sec^2\theta = 2\sec^2\phi \Rightarrow \cos^2\phi = 2\cos^2\theta$

$\Rightarrow \cos^2\phi = 1 + \cos 2\theta \Rightarrow \sin^2\phi + \cos 2\theta = 0$.

ट्रिक : माना $\theta = 45^o$ तब $\phi = 0$

$\therefore \cos(2\times 45^o) + \sin^2 0 = 0 + 0 = 0$.

59. (c) $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$

$= \cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{\pi}{8}$

$= 2\left(\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8}\right)$

$= 2\left[\left(\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8}\right)^2 - 2\cos^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{3\pi}{8}\right]$

$= 2\left[1 - \frac{1}{2}\left(2\cos^2\frac{\pi}{8}\right)\left(2\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)\right]$

$= 2 - \left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right)\left(1 + \cos\frac{3\pi}{4}\right)$

$= 2 - \left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right)\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2 - \left(1 - \cos^2\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

60. (d) $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = \frac{1}{25}$

$\sin 2x = \frac{-24}{25} \Rightarrow \cos 2x = \frac{-7}{25} \Rightarrow \tan 2x = \frac{24}{7}$.

61. (c) $\cos^2 A(3 - 4\cos^2 A)^2 + \sin^2 A(3 - 4\sin^2 A)^2$

$= (3\cos A - 4\cos^3 A)^2 + (3\sin A - 4\sin^3 A)^2$

$= (\cos 3A)^2 + (\sin 3A)^2 = 1$.

ट्रिक : $A = \frac{\pi}{2}, 0^o$ रखने पर व्यंजक का मान 1 आता है। अतः यह A से स्वतंत्र व 1 के बराबर है।

62. (c) $\frac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1}$

$= \frac{\sin A - \cos A + 1}{\sin A - 1 + \cos A} = \frac{\sin A + (1 - \cos A)}{\sin A - (1 - \cos A)}$

$= \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} + 2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} - 2\sin^2\frac{A}{2}}$

$= \frac{\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}} = \frac{\left(\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}} = \frac{1 + \sin A}{\cos A}$.

63. (d) $\sqrt{\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A}} = \sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)}}$

$= \sqrt{\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}\right)}} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}\right)$.

64. (a) $\frac{\sin 3\theta - \cos 3\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \frac{N}{D}$ (माना)

तब $N = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta - (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

$= 3(\sin\theta + \cos\theta) - 4(\sin^3\theta + \cos^3\theta)$

$= (\sin\theta + \cos\theta)\{3 - 4(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)\}$

$\therefore \frac{N}{D} + 1 = \frac{(\sin\theta + \cos\theta)\{3 - 4(1 - \sin\theta\cos\theta)\}}{\sin\theta + \cos\theta} + 1$

$= 3 - 4(1 - \sin\theta\cos\theta) + 1 = 4\sin\theta\cos\theta = 2\sin 2\theta$.

65. (b) यहाँ $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{2\sin A\cos A}{2\cos^2 A} = \frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A}$

$A = 7\frac{1}{2}^o$ रखने पर,

$\Rightarrow \tan 7\frac{1}{2}^o = \frac{\sin 15^o}{1 + \cos 15^o}$

सरल करने पर, $\tan 7\frac{1}{2}^o = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$.

66. (b) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\tan\theta = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}$

$\left[\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{x-1}{2x}}\right.$ रखने पर,

$\left.\therefore \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{x+1}{2x}}$ एवं $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right]$

$\therefore \tan\theta = \sqrt{x^2 - 1}$.

त्रिकोणमितीय फलनों का उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ मान, प्रतिबन्धित त्रिकोणमितीय सर्वसमिकायें

1. (d) $a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b\sin\theta}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$

$= \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \phi)$

चूँकि $-1 \le \sin(\theta + \phi) \le 1$,

तब, $-\sqrt{a^2 + b^2} \le \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \phi) \le \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. (c) माना $3 = r\cos\alpha, 4 = r\sin\alpha$, अतः $r = 5$

$f(\theta) = r.(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta) = 5.\cos(\theta - \alpha)$

$\therefore$ $f(\theta)$ का उच्चिष्ठ मान $= 5.1 = 5$

{चूँकि $\cos(\theta - \alpha)$ का उच्चिष्ठ मान 1 है}

वैकल्पिक : चूँकि हम जानते हैं कि $a\sin\theta + b\cos\theta$ का अधिकतम मान $+\sqrt{a^2+b^2}$ तथा न्यूनतम मान $-\sqrt{a^2+b^2}$ है।
अतः $(3\cos\theta + 4\sin\theta)$ का अधिकतम मान $+\sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$ एवं न्यूनतम मान -5 है।

3. (d) माना $f(\theta) = 5\sin^2\theta + 4\cos^2\theta = 4 + \sin^2\theta$

$\therefore f(\theta) \geq 4 + 0 \qquad (\because \sin^2\theta \geq 0)$

$\therefore f(\theta)$ का न्यूनतम मान 4 है।

4. (c) $\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

$= \left\{\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\right\}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\right\}$

$= \left\{2\cos\frac{\pi}{3}\cos x\right\}\left\{2\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right\}$

$= \sin\frac{2\pi}{3}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$

अधिकतम मान $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ है, $\{-1 \leq \sin 2x \leq 1\}$

5. (a) हम जानते हैं $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \geq 0$

$x = \tan\theta$ रखने पर, $\tan^2\theta + \cot^2\theta \geq 2$.

6. (a) माना $f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$

$\Rightarrow f(x) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

लेकिन $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$

अतः $f(x)$ अधिकतम है यदि $x + \frac{\pi}{3} = 90° \Rightarrow x = 30°$.

7. (d) माना $f(x) = a\cos x + b\sin x$

माना कि $a = r\sin\theta$ एवं $b = r\cos\theta$ अर्थात् $r = \sqrt{a^2+b^2}$
अब, $f(x) = r\sin\theta\cos x + r\cos\theta\sin x$

$= \sqrt{a^2+b^2}\{\sin(\theta + x)\}$

लेकिन $-1 \leq \sin(\theta + x) \leq 1 \Rightarrow -r \leq r\sin(\theta + x) \leq r$

$\Rightarrow -\sqrt{a^2+b^2} \leq \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta + x) \leq \sqrt{a^2+b^2}$

अतः $f(x)$ का अधिकतम मान $\sqrt{a^2+b^2}$ है।

8. (d) $3\cos x + 4\sin x$ का न्यूनतम मान $-\sqrt{3^2+4^2} = -5$
अतः $3\cos x + 4\sin x + 5$ का न्यूनतम मान $= -5 + 5 = 0$.

9. (b) माना $f(x) = \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

हम जानते हैं कि, $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\sin 2x \leq \frac{1}{2}$

अतः $f(x)$ के उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ मान क्रमशः $\frac{1}{2}$ व $-\frac{1}{2}$ हैं।

10. (b) माना $f(x) = \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

चूँकि $-1 \leq \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$

$\Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$

अतः $f(x)$ का न्यूनतम मान $-\sqrt{2}$ है।

11. (b) $f(x) = 4\sin^2 x + 3\cos^2 x\sin^2 x + 3$ व $0 \leq |\sin x| \leq 1$

$\therefore \sin^2 x + 3$ का अधिकतम मान 4 है।

12. (a) $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$.

अतः $x = \frac{\pi}{12}$ पर अधिकतम मान होगा।

13. (d) समान्तर माध्य ≥ गुणोत्तर माध्य

$\Rightarrow \frac{9\tan^2\theta + 4\cot^2\theta}{2} \geq \sqrt{4\cot^2\theta . 9\tan^2\theta}$

$\Rightarrow 9\tan^2\theta + 4\cot^2\theta \geq 12$

अतः न्यूनतम मान 12 है।

14. (c) चूँकि $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > \sin(\alpha + \beta + \gamma)$
जब $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

$\therefore \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 0$

अतः $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ का न्यूनतम मान हमेशा धनात्मक होता है।

15. (d) $(3\sin\theta + 4\cos\theta)$ का न्यूनतम मान $-\sqrt{3^2+4^2}$ अर्थात् -5 है।

16. (a) $(\sin x - \cos x)$ का अधिकतम मान $\sqrt{1^2+1^2}$ अर्थात् $\sqrt{2}$ है।

17. (d) $A = \cos^2\theta + \sin^4\theta \Rightarrow A = \cos^2\theta + \sin^2\theta . \sin^2\theta$

$\Rightarrow A \leq \cos^2\theta + \sin^2\theta, \quad [\because \sin^2\theta \leq 1]$

$\Rightarrow A \leq 1$

पुनः $A = \cos^2\theta + \sin^4\theta = (1 - \sin^2\theta) + \sin^4\theta$

$A = \left(\sin^2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

अतः $3/4 \leq A \leq 1$.

18. (b) यहाँ $A = \sin^2\theta + \cos^4\theta$

$= \sin^2\theta + \cos^2\theta\cos^2\theta \leq \sin^2\theta + \cos^2\theta$

(चूँकि $\cos^2\theta \leq 1$)

$\Rightarrow \sin^2\theta + \cos^4\theta \leq 1 \Rightarrow A \leq 1$

पुनः $\sin^2\theta + \cos^4\theta = 1 - \cos^2\theta + \cos^4\theta$

$= \cos^4\theta - \cos^2\theta + 1 = \left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

अतः $\frac{3}{4} \leq A \leq 1$.

19. (c) $\sqrt{3}\sin x + \cos x$ का महत्तम मान $\sqrt{3+1} = 2$ है एवं स्पष्टतः यह $x = 60°$ पर है।

वैकल्पिक : $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

चूँकि $\sin x$, $x = \frac{\pi}{2}$ पर महत्तम है अतः $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ या $x = \frac{\pi}{3}$.

20. (a) यहाँ $\alpha+\beta-\gamma=\pi$.

अब $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma$

$=\sin^2\alpha+\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta+\gamma)$

$=\sin^2\alpha+\sin(\pi-\alpha)\sin(\beta+\gamma)$ $(\because \alpha+\beta-\gamma=\pi)$

$=\sin^2\alpha+\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)=\sin\alpha\{\sin\alpha+\sin(\beta+\gamma)\}$

$=\sin\alpha\{\sin(\pi-\overline{\beta+\gamma})+\sin(\beta+\gamma)\}$

$=\sin\alpha\{-\sin(\gamma-\beta)+\sin(\gamma+\beta)\}$

$=\sin\alpha\{2\sin\beta\cos\gamma\}=2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$.

21. (d) दिया है, $ABCD$ चक्रीय चतुर्भुज है।

अतः $A+C=180°\Rightarrow A=180°-C$

$\Rightarrow \cos A=\cos(180°-C)=-\cos C$

$\Rightarrow \cos A+\cos C=0$ .....(i)

इसी प्रकार, $\cos B+\cos D=0$ .....(ii)

जोड़ने पर, $\cos A+\cos B+\cos C+\cos D=0$.

22. (c) L.H.S. $=\frac{1}{2}\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin A\sin B\sin C}=2$.

23. (a) हम जानते हैं, $A+C=180°$, चूँकि $ABCD$ चक्रीय चतुर्भुज है $\Rightarrow A=180°-C$

$\Rightarrow \cos A=\cos(180°-C)=-\cos C$

$\Rightarrow \cos A+\cos C=0$ .....(i)

अब $B+D=180°$, तब $\cos B+\cos D=0$ .....(ii)

समीकरण (i) में से (ii) को घटाने पर, $\cos A-\cos B+\cos C-\cos D=0$.

24. (b) ΔABC में, $A+B+C=180°$

$\Rightarrow \sin A+\sin B+\sin C=$

$$2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{C}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\overline{A+B}}{2}\right)$

$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2}$

$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right]$

$=2\cos\frac{C}{2}\left(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

25. (a) हम जानते हैं $A+B+C=180°$ (ΔABC में)

अब, $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

$=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=2\sin(\pi-C)\cos(A-B)+2\sin C\cos(\pi-\overline{A+B})$

$=2\sin C\cos(A-B)-2\sin C\cos(A+B)$

$=2\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$

$=2\sin C\{2\sin A\sin B\}=4\sin A\sin B\sin C$.

26. (b) $\cos 2x+\cos 2y-\cos 2z$

$=2\cos(x+y)\cos(x-y)-2\cos^2 z+1$

$=2\cos(\pi-z)\cos(x-y)-2\cos^2 z+1$

$=1-2\cos z\{\cos(x-y)-\cos(x+y)\}$

$=1-2\cos z2\sin x\sin y=1-4\sin x\sin y\cos z$.

27. (a) यहाँ $\alpha+\beta+\gamma=2\pi\Rightarrow\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\pi$

$\Rightarrow \tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=\tan\pi=0$

$\Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}=0$

$\Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}=\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}$.

28. (c) L.H.S. $=2\cos(A+B)\cos(A-B)+(2\cos^2 C-1)$

$=-1-2\cos C\cos(A-B)+2\cos^2 C$

$=-1-2\cos C[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$

$=-1-4\cos A\cos B\cos C$.

29. (b) यहाँ $D^r=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ एवं

$N^r=4\sin A\sin B\sin C$

$\therefore L.H.S.=\frac{N^r}{D^r}$ तथा $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$.

30. (b) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$

$=1-\cos^2 A+1-\cos^2 B+\sin^2 C$

$=2-\cos^2 A-\cos(B+C)\cos(B-C)$

$=2-\cos A[\cos A-\cos(B-C)]$

$=2-\cos A[-\cos(B+C)-\cos(B-C)]$

$=2+\cos A.2\cos B\cos C$

$\therefore \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2\cos A\cos B\cos C=2$.

31. (a,b) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

$\therefore \tan A\tan B\tan C=6\Rightarrow\tan C=\frac{6}{2}=3$

एवं $\tan A+\tan B=6-3=3$

$\therefore \tan A,\tan B=2,1$, या $1,2$ तथा $\tan C=3$.

32. (b) $\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\frac{S_1-S_3}{1-S_2}=\tan\frac{\pi}{2}=\infty$

$\therefore S_2=1$ या $xy+yz+zx=1$, यहाँ $x=\tan\frac{A}{2}$ इत्यादि

अब $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$

या $2\sum x^2-2\sum xy\geq 0\Rightarrow\sum x^2\geq 1$, $\{\because \sum xy=1\}$.

33. (c) चूँकि $S_1=S_3\Rightarrow\frac{S_1}{S_3}=1$.

34. (d) $\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C$ =

$$2\sin A\cos A+2\cos(B+C)\sin(B-C)$$

$\{\because A+B+C=\pi,\therefore B+C=\pi-A,\cos(B+C)=\cos(\pi-A),$

$\cos(B+C)=-\cos A,\sin(B+C)=\sin A\}$

$=2\cos A\,[\sin A-\sin(B-C)]$

$=2\cos A\,[\sin(B+C)-\sin(B-C)]$

$=2\cos A.2\cos B.\sin C=4\cos A.\cos B.\sin C$.

ट्रिक: $A=B=C=60^o$ रखने पर इन मानों के लिए विकल्प (a) तथा (d) सन्तुष्ट होते हैं, अब केवल $A=B=45°$ तथा $c=90^o$ रखने पर केवल विकल्प (d) सन्तुष्ट होता है। अतः विकल्प (d) सही उत्तर है।

35. (c) **ट्रिक:** $A = B = C = 60^o$ रखने पर केवल विकल्प (c) सन्तुष्ट होता है।

36. (d) यहाँ $\cos A = \cos B \cos C$

$A + B + C = \pi \Rightarrow B + C = \pi - A$

$\therefore \cos(B + C) = \cos(\pi - A) \Rightarrow \cos(B + C) = -\cos A$

$\Rightarrow \cos B \cos C - \sin B \sin C = -\cos B \cos C$

($\because$ दिया है $\cos A = \cos B \cos C$)

$\Rightarrow 2 \cos B \cos C = \sin B \sin C$

$\Rightarrow \frac{\cos B \cos C}{\sin B \sin C} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cot B \cot C = \frac{1}{2}$.

37. (b) $\cot B + \cot C = \frac{\sin C \cos B + \sin B \cos C}{\sin B \sin C}$

$= \frac{\sin(B + C)}{\sin B \sin C} = \frac{\sin(180^o - A)}{\sin B \sin C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C}$

इसी प्रकार, $\cot C + \cot A = \frac{\sin B}{\sin C \sin A}$

एवं $\cot A + \cot B = \frac{\sin C}{\sin A \sin B}$

अतः $(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A)(\cot A + \cot B)$

$= \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \cdot \frac{\sin B}{\sin C \sin A} \cdot \frac{\sin C}{\sin A \sin B}$

$= \text{cosec} A \text{cosec} B \text{cosec} C.$

38. (c) $A + B + C = 180^o$,

$\therefore \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 90^o - \frac{C}{2}$

$\therefore \cot\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \cot\left(90^o - \frac{C}{2}\right)$

या $\frac{\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2} - 1}{\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{A}{2}} = \tan\frac{C}{2} = \frac{1}{\cot\frac{C}{2}}$

या $\left(\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} - 1\right)\cot\frac{C}{2} = \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{A}{2}$

$\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2} = \cot\frac{C}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{A}{2}.$

39. (b) $A + B + C = 270^o \Rightarrow A = B = C = 90^o$, तब

$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4 \sin A \sin B \sin C$

$= \cos 180^o + \cos 180^o + \cos 180^o + 4 \sin 90^o \sin 90^o \sin 90^o$

$= -1 - 1 - 1 + 4.1.1.1 = -3 + 4 = 1$.

40. (b) यहाँ $A + B + C = 180^o \Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{B + C}{2}\right)$

$\therefore \cot\frac{A}{2} = \tan\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{\tan\frac{A}{2}} = \frac{\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}}{1 - \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}$

$\Rightarrow 1 - \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{C}{2}$

$\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} = 1$

अर्थात्, $\sum \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1$.

41. (b) $A + B + C = \pi \Rightarrow A + B = \pi - C$

$\Rightarrow \tan(A + B) = \tan(\pi - C)$

$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan C} = \tan(\pi - C)$

$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$

अब चूँकि C एक अधिक कोण है। अतः

$\Rightarrow \tan C < 0 \Rightarrow -\tan C > 0$

$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} > 0 \Rightarrow 1 - \tan A \tan B > 0$

($\because A, B$ न्यून कोण हैं अतः $\therefore \tan A > 0, \tan B > 0$)

$\Rightarrow \tan A \tan B < 1$.

42. (a) $A + B + C = \pi$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

अब समान्तर माध्य $\geq$ गुणोत्तर माध्य

$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B + \tan C}{3} \geq (\tan A \tan B \tan C)^{1/3}$

$\Rightarrow \left(\frac{\tan A \tan B \tan C}{3}\right) \geq (\tan A \tan B \tan C)^{1/3}$

$\Rightarrow (\tan A \tan B \tan C)^{2/3} \geq 3$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{K}\right)^{2/3} \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{K} \geq 3^{3/2} \Rightarrow K \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

43. (d) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$

$= 2\cos(A + B)\cos(A - B) + \cos 2C$

$= 2\cos\left(\frac{3\pi}{2} - C\right)\cos(A - B) + \cos 2C$

$= -2 \sin C \cos(A - B) + 1 - 2\sin^2 C$

$= 1 - 2 \sin C\{\cos(A - B) + \sin C\}$

$= 1 - 2 \sin C\left\{\cos(A - B) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - (A + B)\right)\right\}$

$= 1 - 2 \sin C\{\cos(A - B) - \cos(A + B)\}$

$= 1 - 4 \sin A \sin B \sin C$.

ट्रिक : $A = B = C = \frac{\pi}{2}$ रखकर परीक्षण करें।

44. (d) $f(x)$ का अधिकतम मान $= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

45. (b) अधिकतम दूरी $= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = 2$.

अतः फलन $\sqrt{3}\sin x + \cos x$ के ग्राफ की x-अक्ष से अधिकतम दूरी 2 है।

46. (c) $f(x)$ का अधिकतम मान $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Critical Thinking Questions

1. (c) दिया है वृत्तीय तार का व्यास $= 10$ सेमी.

अतः तार की लम्बाई $= 10\pi$.

अतः अभीष्ट कोण $= \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}} = \frac{10\pi}{50} = \frac{\pi}{5}$ रेडियन

2. (d) दिया गया व्यंजक

$\sin^2 5^o + \sin^2 10^o + \sin^2 15^o + ... + \sin^2 85^o + \sin^2 90^o.$

हम जानते हैं कि, $\sin 90^o = 1$ या $\sin^2 90^o = 1$.

इसी प्रकार, $\sin 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}$ या $\sin^2 45^o = \frac{1}{2}$ तथा 18 पदों के कोण समान्तर श्रेणी में हैं।

हम यह भी जानते हैं $\sin^2 85^o = [\sin(90^o - 5^o)]^2 = \cos^2 5^o$

$\therefore \sin^2 5^o + \sin^2 85^o = \sin^2 5^o + \cos^2 5^o = 1.$

इसलिए

$\sin^2 5^o + \sin^2 10^o + \sin^2 15^o + ... + \sin^2 85^o + \sin^2 90^o$

(पूरक नियम द्वारा)

$= (1+1+1+1+1+1+1+1)+1+\frac{1}{2} = 9\frac{1}{2}.$

3. (c) $\sqrt{\text{cosec}^2\alpha + 2\cot\alpha} = \sqrt{1+\cot^2\alpha + 2\cot\alpha} = |1+\cot\alpha|$

लेकिन $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi \Rightarrow \cot\alpha < -1 \Rightarrow 1+\cot\alpha < 0$

अतः $|1+\cot\alpha| = -(1+\cot\alpha)$.

4. (c) दिये गये सम्बन्ध को जोड़ने व घटाने पर,

$(m+n) = a\cos^3\alpha + 3a\cos\alpha\sin^2\alpha$

$+ 3a\cos^2\alpha.\sin\alpha + a\sin^3\alpha$

$= a(\cos\alpha + \sin\alpha)^3$

एवं इसी प्रकार $(m-n) = a(\cos\alpha - \sin\alpha)^3$

अतः $(m+n)^{2/3} + (m-n)^{2/3}$

$= a^{2/3}\{(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 + (\cos\alpha - \sin\alpha)^2\}$

$= a^{2/3}\{2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\} = 2a^{2/3}.$

5. (c) यहाँ $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\theta - \beta - \overline{\theta-\alpha})$

$= \sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\alpha) - \cos(\theta-\beta)\sin(\theta-\alpha)$

$= ba - \sqrt{1-b^2}\sqrt{1-a^2}$

एवं $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\theta-\beta-\overline{\theta-\alpha})$

$= \cos(\theta-\beta)\cos(\theta-\alpha) + \sin(\theta-\beta)\sin(\theta-\alpha)$

$= a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}$

$\therefore$ अतः दिया गया व्यंजक $\cos^2(\alpha-\beta) + 2ab\sin(\alpha-\beta)$

$= (a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2)^2} + 2ab\{ab - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}\}$

$= a^2 + b^2.$

ट्रिक : $\alpha = 30°, \beta = 60°$, $\theta = 90°$ रखने पर,

$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$

$\therefore \cos^2(\alpha-\beta) + 2ab\sin(\alpha-\beta) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

जो कि विकल्प (c) द्वारा दिया जाता है।

6. (b) यहाँ $\sin A = n\sin B \Rightarrow \frac{n}{1} = \frac{\sin A}{\sin B}$

$\Rightarrow \frac{n-1}{n+1} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$

$= \tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{A+B}{2}$

$\Rightarrow \frac{n-1}{n+1}\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan\frac{A-B}{2}$.

7. (b) यहाँ $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$,

अब $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3x\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$= (2\cos\theta)^3 - 3(2\cos\theta) = 8\cos^3\theta - 6\cos\theta$

$= 2(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) = 2\cos 3\theta.$

ट्रिक: $x = 1 \Rightarrow \theta = 0^\circ$.

तब $x^3 + \frac{1}{x^3} = 2 = 2\cos 3\theta.$

8. (a) $\sin x + \text{cosec}\, x = 2 \Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x = 1$

$\therefore \sin^n x + \text{cosec}^n x = 1 + 1 = 2$.

9. (a) यहाँ $\tan\theta = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} \Rightarrow \tan\theta = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \theta = \alpha - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha = \theta + \frac{\pi}{4}$

अतः, $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\cos\theta$

एवं $\sin\alpha - \cos\alpha = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$

$= \frac{2}{\sqrt{2}}\sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta.$

10. (b) चूँकि $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha + K\sin^2 2\alpha = 1$

सूत्र $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ का प्रयोग करके हल करने पर अभीष्ट मान अर्थात् $K = \frac{3}{4}$ प्राप्त होता है।

11. (c) $\sin 20°\sin 40^o\sin 60°\sin 80°$

$= \frac{1}{2}\sin 20°\sin 60°(2\sin 40^o\sin 80°)$

$= \frac{1}{2}\sin 20°\sin 60°(\cos 40° - \cos 120°)$

$= \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20°\left(1 - 2\sin^2 20° + \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20°\left(\frac{3}{2} - 2\sin^2 20°\right)$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}(3\sin 20° - 4\sin^3 20°)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{16}.$$

12. (d) $\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}\sin\frac{7\pi}{14}\sin\frac{9\pi}{14}\sin\frac{11\pi}{14}\sin\frac{13\pi}{14}$

$$= \sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}\times 1$$

$$\times\sin\left(\pi-\frac{5\pi}{14}\right)\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{14}\right)\sin\left(\pi-\frac{\pi}{14}\right)$$

$$= \left[\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}\sin\frac{7\pi}{14}\right]^2 = \frac{1}{64}.$$

13. (c) $\tan\alpha + 2\tan 2\alpha + 4\tan 4\alpha + 8\cot 8\alpha$

$$= \tan\alpha + 2\tan 2\alpha + 4\left[\frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} + 2\frac{\cos 8\alpha}{\sin 8\alpha}\right]$$

$$= \tan\alpha + 2\tan 2\alpha +$$

$$4\left[\frac{\cos 4\alpha\cos 8\alpha + \sin 4\alpha\sin 8\alpha + \cos 4\alpha\cos 8\alpha}{\sin 8\alpha\cos 4\alpha}\right]$$

$$= \tan\alpha + 2\tan 2\alpha + 4\left[\frac{\cos 4\alpha + \cos 4\alpha\cos 8\alpha}{\sin 8\alpha\cos 4\alpha}\right]$$

$$= \tan\alpha + 2\tan 2\alpha + 4\left[\frac{\cos 4\alpha(1+\cos 8\alpha)}{\cos 4\alpha\sin 8\alpha}\right]$$

$$= \tan\alpha + 2\tan 2\alpha + 4\left[\frac{2\cos^2 4\alpha}{2\sin 4\alpha\cos 4\alpha}\right]$$

$$= \tan\alpha + 2\tan 2\alpha + 4\cot 4\alpha$$

$$= \tan\alpha + 2(\tan 2\alpha + 2\cot 4\alpha)$$

$$= \tan\alpha + 2\left[\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + 2\frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}\right]$$

$$= \tan\alpha + 2\left[\frac{\cos 2\alpha(1+\cos 4\alpha)}{\sin 4\alpha\cos 2\alpha}\right]$$

$$= \tan\alpha + 2\cot 2\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$= \frac{\cos\alpha + \cos\alpha\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \cot\alpha.$$

14. (c) $\sqrt{3}\,\text{cosec}\,20° - \sec 20° = \frac{\sqrt{3}}{\sin 20°} - \frac{1}{\cos 20°}$

$$= \frac{\sqrt{3}\cos 20° - \sin 20°}{\sin 20°\cos 20°} = \frac{2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20° - \frac{1}{2}\sin 20°\right]}{\frac{2}{2}\sin 20°\cos 20°}$$

$$= \frac{4\cos(20°+30°)}{\sin 40°} = \frac{4\cos 50°}{\sin 40°} = \frac{4\sin 40°}{\sin 40°} = 4.$$

15. (c) $1 + \cos 56° + \cos 58° - \cos 66°$

$$= 2\cos^2 28° + 2\sin 62°.\sin 4°$$

$$= 2\cos^2 28° + 2\cos 28°.\sin 4°$$

$$= 2\cos 28°(\cos 28° + \cos 86°)$$

$$= 2\cos 28°.2\cos 57°\cos 29°$$

$$= 4\cos 28°\cos 29°\sin 33°.$$

वैकल्पिक : प्रतिबन्धित सर्वसमिका के उपयोग से,

$$\cos A + \cos B - \cos C = -1 + 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$[\because 56° + 58° + 66° = 180°]$

अभीष्ट व्यंजक का मान $4\cos 28°\cos 29°\sin 33°$ होगा।

16. (b) $x = \sin 130^o\cos 80^o,\ y = \sin 80^o\cos 130^o$

$\Rightarrow x = \cos 40^o\cos 80^o,\ y = -\sin 80^o\sin 40^o$

अतः $x > 0$ एवं $y < 0$ तथा $xy < 0$

अब $z = 1 + xy \Rightarrow 0 < z < 1$.

17. (a) यहाँ $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma)$

$$= \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

$$-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$= \sin\alpha(1-\cos\beta\cos\gamma) + \sin\beta(1-\cos\alpha\cos\gamma)$$

$$+\sin\gamma(1-\cos\alpha\cos\beta) + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma > 0$$

$\therefore \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > \sin(\alpha+\beta+\gamma)$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} < 1.$$

18. (b) $a\cos 2\theta + b\sin 2\theta = c$

$$\Rightarrow a\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right) + b\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = c$$

$$\Rightarrow a - a\tan^2\theta + 2b\tan\theta = c + c\tan^2\theta$$

$$\Rightarrow -(a+c)\tan^2\theta + 2b\tan\theta + (a-c) = 0$$

$$\therefore \tan\alpha + \tan\beta = -\frac{2b}{-(c+a)} = \frac{2b}{c+a}.$$

19. (b) यहाँ $y + z = a(\cos^2 x + \sin^2 x) + c(\sin^2 x + \cos^2 x) = a + c$

((b) हल है)

$$y - z = a(\cos^2 x - \sin^2 x) + 4b\sin x\cos x$$

$$-c(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= (a-c)\cos 2x + 2b\sin 2x$$

$$= (a-c).\left(\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\right) + 2b.\left(\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\right)$$

$$= (a-c).\left\{\frac{1-4b^2/(a-c)^2}{1+4b^2/(a-c)^2}\right\} + 2b.\left\{\frac{2.2b/(a-c)}{1+4b^2/(a-c)^2}\right\}$$

चूँकि $\tan x = \frac{2b}{(a-c)}$,

$$\therefore y - z = \frac{(a-c).\{(a-c)^2 - 4b^2\} + 8b^2(a-c)}{(a-c)^2 + 4b^2}$$

$$= \frac{(a-c)(a-c)^2 + 4b^2}{\{(a-c)^2 + 4b^2\}} = (a-c)$$

$\Rightarrow y \neq z, (\because a \neq c)$.

20. (b) दिया है $\operatorname{cosec}\theta = \frac{p+q}{p-q} \Rightarrow \frac{1}{\sin\theta} = \frac{p+q}{p-q}$

योगान्तरानुपात नियम से,

$$\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \frac{p+q+p-q}{p+q-p+q}$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}\right\}^2 = \frac{p}{q} \Rightarrow \left\{\frac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}\right\}^2 = \frac{p}{q}$$

$$\Rightarrow \tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = \frac{p}{q} \Rightarrow \cot^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = \frac{q}{p}$$

नोट : $\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{q}{p}}$ सिर्फ, यदि $\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) > 0$.

21. (b) $a\sin^2 x + b\cos^2 x = c \Rightarrow (b-a)\cos^2 x = c-a$

$\Rightarrow (b-a) = (c-a)(1+\tan^2 x)$

$b\sin^2 y + a\cos^2 y = d \Rightarrow (a-b)\cos^2 y = d-b$

$\Rightarrow (a-b) = (d-b)(1+\tan^2 y)$

$\therefore \tan^2 x = \frac{b-c}{c-a}$, $\tan^2 y = \frac{a-d}{d-b}$

$\therefore \frac{\tan^2 x}{\tan^2 y} = \frac{(b-c)(d-b)}{(c-a)(a-d)}$ .....(i)

लेकिन $a\tan x = b\tan y$, अर्थात् $\frac{\tan x}{\tan y} = \frac{b}{a}$ .....(ii)

(i) व (ii) से, $\frac{b^2}{a^2} = \frac{(b-c)(d-b)}{(c-a)(a-d)}$

$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{(c-a)(a-d)}{(b-c)(d-b)}$.

22. (b, c) व्यंजक $\cot^n\frac{A-B}{2} + \cot^n\frac{B-A}{2}$ में परिवर्तित हो जाता है। अतः यदि n सम है, तब उत्तर (b) है तथा यदि n विषम है, तब उत्तर (c) होगा

23. (a, c) यहाँ $\sin\alpha = 1/\sqrt{5} \Rightarrow \cos\alpha = 2/\sqrt{5}$

और $\sin\beta = 3/5 \Rightarrow \cos\beta = 4/5$

$\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta$

$= \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{5\sqrt{5}} = 0.1789$

अब $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071 = \sin\frac{3\pi}{4}$

चूँकि $0 < 0.1789 < 0.7071$

$\therefore \sin 0 < \sin(\beta-\alpha) < \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < (\beta-\alpha) < \frac{\pi}{4}$

तथा $\sin\pi < \sin(\beta-\alpha) < \sin\frac{3\pi}{4}$

$\therefore (\beta-\alpha) \in [0, \pi/4]$ और $[3\pi/4, \pi]$.

24. (a) दिये गये समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\frac{2}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin^2\beta+\cos^2\beta}{\cos\beta\sin\beta} = \frac{1}{\cos\beta.\sin\beta}$$

$\Rightarrow \cos 2\alpha = \sin 2\beta$

$\Rightarrow \cos 2\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right) \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2}-2\beta$

$\Rightarrow 2\alpha+2\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$.

25. (b) यहाँ $\frac{x}{\cos\theta} = \frac{y}{\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{z}{\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)} = k$

$\Rightarrow x = k\cos\theta$, $y = k\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)$, $z = k\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow x+y+z = k\left[\cos\theta + \cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$= k[(0)] = 0$

$\Rightarrow x+y+z = 0$.

26. (d) $\sin 6\theta = 2\sin 3\theta\cos 3\theta$

$= 2[3\sin\theta - 4\sin^3\theta][4\cos^3\theta - 3\cos\theta]$

$= 24\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta) - 18\sin\theta\cos\theta - 32\sin\theta\cos\theta$

$= 32\cos^5\theta\sin\theta - 32\cos^3\theta\sin\theta + 3\sin 2\theta$

तुलना करने पर, $x = \sin 2\theta$.

27. (c) $\sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \sin^4\frac{7\pi}{8}$

$= \frac{1}{4}\left[\left(2\sin^2\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(2\sin^2\frac{3\pi}{8}\right)^2\right]$

$+ \frac{1}{4}\left[\left(2\sin^2\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(2\sin^2\frac{3\pi}{8}\right)^2\right]$

$= \frac{1}{4}\left[\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1-\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2\right]$

$+ \frac{1}{4}\left[\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1-\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2\right]$

$= \frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right] + \frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]$

$= \frac{1}{4}(3) + \frac{1}{4}(3) = \frac{3}{2}$.

28. (c) $\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right)$

$= \left(1+\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}\right)$

$\left(1+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{8}\right)$

$= \left(1+\cos\frac{\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}\right)$

$\left(1+\cos\frac{5\pi}{8}-\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{8}\right)$

$= \left(1+\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{8}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(2+2\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}\right)\left(2+2\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{8}\right)$

$$= \frac{1}{4}\left(2+\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\pi\right)\left(2+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\pi\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{3\pi}{4}\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\cos^2\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}.$$

वैकल्पिक : $\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{5\pi}{8}\right)$

$$= \left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1-\cos\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= \left(1-\cos^2\frac{\pi}{8}\right)\left(1-\cos^2\frac{3\pi}{8}\right) = \sin^2\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{3\pi}{8}$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\sin\frac{\pi}{8}.\sin\frac{3\pi}{8}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}.$$

29. (a) $3\tan A - 4 = 0 \Rightarrow \tan A = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin A = -\frac{4}{5}, \cos A = -\frac{3}{5}$

$\therefore$ $5\sin 2A + 3\sin A + 4\cos A$

$= 10\sin A\cos A + 3\sin A + 4\cos A$

$= 10\left(\frac{12}{25}\right) - \frac{12}{5} - \frac{12}{5} = 0$.

30. (a) यहाँ $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{2\cos^2 A}{2\sin A\cos A} = \frac{1+\cos 2A}{\sin 2A}$

$A = 7\frac{1^o}{2}$ रखने पर $\Rightarrow \cot 7\frac{1^o}{2} = \frac{1+\cos 15^o}{\sin 15^o}$

सरल करने पर,

$\cot 7\frac{1^o}{2} = \sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}$.

31. (c) $2A = (A+B)+(A-B)$

$\Rightarrow \tan 2A = \frac{\tan(A+B)+\tan(A-B)}{1-\tan(A+B)\tan(A-B)} = \frac{p+q}{1-pq}$.

32. (c) $\cos 2(\alpha+\beta) = 2\cos^2(\alpha+\beta) - 1, 2\sin^2\beta = 1-\cos 2\beta$

L.H.S.

$= -\cos 2\beta + 2\cos(\alpha+\beta)[2\sin\alpha\sin\beta + \cos(\alpha+\beta)]$

$= -\cos 2\beta + 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$= -\cos 2\beta + (\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = \cos 2\alpha$.

33. (b) माना $f(x) = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

लेकिन $-1 \le \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) \le 1 \Rightarrow -\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$

अतः $(\sin\theta+\cos\theta)$ का अधिकतम मान

अर्थात्, $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ है।

$\therefore \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \theta+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} = 45^o$.

34. (d) चूँकि $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 \ge 0, \forall\ x \in R,$

यहाँ $x^2 + \frac{1}{x^2} \ge 2$

अतः $f(x) = \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \ge 2$

35. (a) माना $y = \frac{\tan x}{\tan 3x} = \frac{\tan x}{\frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}}$

$$y = \frac{1-3\tan^2 x}{3-\tan^2 x} = \frac{\frac{1}{3}-\tan^2 x}{1-\frac{1}{3}.\tan^2 x}$$

अतः y के परिभाषित होने के लिए इसे $\frac{1}{3}$ एवं 3 के बीच में स्थित नहीं होना चाहिए।

36. (c) यहाँ $\cos 2\theta + 2\cos\theta = 2\cos^2\theta - 1 + 2\cos\theta$

$$= 2\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$$

अब $2\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2 \ge 0$ सभी θ के लिए

$\therefore 2\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \ge \frac{-3}{2}$ सभी θ के लिए

$\Rightarrow \cos 2\theta + 2\cos\theta \ge \frac{-3}{2}$ सभी θ के लिए

साथ ही, इस व्यंजक का अधिकतम मान 3 है।

37. (a) $A+B+C = \pi$

$\therefore \tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}} = \cot\frac{C}{2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}.\frac{2}{3}} = \frac{9}{7} = \cot\frac{C}{2}$$

$\therefore \tan\frac{C}{2} = \frac{7}{9}$.

38. (b) $\cos[\pi-(B+C)] = \cos B\cos C$

$\Rightarrow -\cos(B+C) = \cos B\cos C$

$\Rightarrow -[\cos B\cos C - \sin B\sin C] = \cos B\cos C$

$\Rightarrow \sin B\sin C = 2\cos B\cos C$

$\Rightarrow \tan B\tan C = 2$.

39. (b) $B = A+C \Rightarrow \tan B = \tan(A+C)$

$\Rightarrow \tan B = \frac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}$

$\Rightarrow \tan A\tan B\tan C = \tan B - \tan A - \tan C$.

40. (b) माना $u = \cos\theta\left\{\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + \sin^2\alpha}\right\}$

$\Rightarrow (u - \sin\theta\cos\theta)^2 = \cos^2\theta(\sin^2\theta + \sin^2\alpha)$

$\Rightarrow u^2\tan^2\theta - 2u\tan\theta + u^2 - \sin^2\alpha = 0$

चूँकि $\tan\theta$ वास्तविक है।

अतः $4u^2 - 4u^2(u^2 - \sin^2\alpha) \geq 0$

$\Rightarrow u^2 - (1 + \sin^2\alpha) \leq 0$

$\Rightarrow |u| \leq \sqrt{1 + \sin^2\alpha}$.

त्रिकोणमितीय फलन एवं त्रिकोणमितीय अनुपात

SET Self Evaluation Test - 10

1. k के किस मान के लिए

$(\cos x + \sin x)^2 + k \sin x \cos x - 1 = 0$ एक सर्वसमिका होगी **[Kerala (Engg.) 2001]**

(a) -1 (b) -2

(c) 0 (d) 1

2. यदि $\tan(A-B) = 1,\ \sec(A+B) = \frac{2}{\sqrt{3}}$, तब B का न्यूनतम धनात्मक मान होगा **[Kerala (Engg.) 2002]**

(a) $\frac{25}{24}\pi$ (b) $\frac{19}{24}\pi$

(c) $\frac{13}{24}\pi$ (d) $\frac{11}{24}\pi$

3. यदि $\frac{\sin^4 A}{a} + \frac{\cos^4 A}{b} = \frac{1}{a+b}$ हो, तब $\frac{\sin^8 A}{a^3} + \frac{\cos^8 A}{b^3}$ का मान बराबर है **[WB JEE 1971]**

(a) $\frac{1}{(a+b)^3}$ (b) $\frac{a^3b^3}{(a+b)^3}$

(c) $\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. यदि $\sin^3 x \sin 3x = \sum_{m=0}^{n} c_m \cos mx$ जहाँ $c_0, c_1, c_2, ..., c_n$ अचर हैं तथा $c_n \neq 0$, तो n का मान होगा **[DCE 1998; AMU 2000; DCE 2005]**

(a) 15 (b) 6

(c) 1 (d) 0

5. $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ के लिये, यदि $x = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n}\phi,\quad y = \sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2n}\phi,$

$z = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n}\phi \sin^{2n}\phi$, तो **[IIT 1993; Kerala (Engg.) 2005]**

(a) $xyz = xz + y$ (b) $xyz = xy + z$

(c) $xyz = x + y + z$ (d) $xyz = yz + x$

6. किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिये, यदि

$f_n(\theta) = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)(1+\sec\theta)(1+\sec 2\theta)(1+\sec 4\theta)$ .....

$(1+\sec 2^n\theta)$. तो **[IIT Screening 1999]**

(a) $f_2\left(\frac{\pi}{16}\right) = 1$ (b) $f_3\left(\frac{\pi}{32}\right) = 1$

(c) $f_4\left(\frac{\pi}{64}\right) = 1$ (d) $f_5\left(\frac{\pi}{128}\right) = 1$

7. यदि n एक धनात्मक पूर्णांक इस प्रकार है कि

$\sin\frac{\pi}{2^n} + \cos\frac{\pi}{2^n} = \frac{\sqrt{n}}{2}$, तब **[IIT Screening 1994]**

(a) $6 \le n \le 8$ (b) $4 < n \le 8$

(c) $4 \le n < 8$ (d) $4 < n < 8$

8. यदि $k = \sin\frac{\pi}{18}.\sin\frac{5\pi}{18}.\sin\frac{7\pi}{18}$, तो k का आंकिक मान है **[IIT 1993; MNR 1974]**

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{8}$

(c) $\frac{1}{16}$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि $\sin x + \sin^2 x = 1$ हो, तब

$\cos^{12} x + 3\cos^{10} x + 3\cos^8 x + \cos^6 x - 1$ का मान है **[Kurukshetra CEE 1998; MP PET 2001; Karnataka CET 2004]**

(a) 0 (b) 1

(c) –1 (d) 2

10. यदि $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ परिमाण के बढ़ते क्रम में न्यूनतम धनात्मक कोण हैं जिनकी ज्या (sines) धनात्मक राशि k के बराबर हैं, तब $4\sin\frac{\alpha}{2} + 3\sin\frac{\beta}{2} + 2\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\delta}{2}$ का मान है

(a) $2\sqrt{1-k}$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{1+k}$

(c) $2\sqrt{1+k}$ (d) इनमें से कोई नहीं

11. यदि $(\sec A + \tan A)(\sec B + \tan B)(\sec C + \tan C)$

$= (\sec A - \tan A)(\sec B - \tan B)(\sec C - \tan C)$, तब प्रत्येक पक्ष बराबर है

(a) 1 (b) -1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

12. यदि $\tan\theta = \sqrt{\frac{3}{2}}$, तब श्रेणी

$1 + 2(1-\cos\theta) + 3(1-\cos\theta)^2 + 4(1-\cos\theta)^3 + ...\infty$ के अनन्त पदों का योगफल होगा **[AMU 2002]**

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(c) $\frac{5}{2\sqrt{2}}$ (d) $\frac{5}{2}$

13. यदि $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ समान्तर श्रेणी में हैं जिनका सार्वअन्तर α है तब $\sin\alpha(\sec x_1 \sec x_2 + \sec x_2 \sec x_3 + ... + \sec x_{n-1} \sec x_n)$ का मान है

(a) $\frac{\sin(n-1)\alpha}{\cos x_1 \cos x_n}$ (b) $\frac{\sin n\alpha}{\cos x_1 \cos x_n}$

(c) $\sin(n-1)\alpha \cos x_1 \cos x_n$ (d) $\sin n\alpha \cos x_1 \cos x_n$

14. माना α, β इस प्रकार है कि $\pi < (\alpha - \beta) < 3\pi$. यदि $\sin\alpha + \sin\beta = -\frac{21}{65}$ तथा $\cos\alpha + \cos\beta = -\frac{27}{65}$, तो $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ का मान है **[AIEEE 2004]**

(a) $\frac{-6}{65}$ (b) $\frac{3}{\sqrt{130}}$

(c) $\frac{6}{65}$ (d) $-\frac{3}{\sqrt{130}}$

15. यदि $x\cos\theta = y\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = z\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$, तब $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ बराबर है **[IIT 1984, Pb. CET 2003]**

(a) 1 (b) 2

(c) 0 (d) $3\cos\theta$

16. माना $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ किसी इकाई त्रिज्या के वृत्त के भीतर बनने वाले समषटभुज के शीर्ष हों, तो रेखाखण्डों A_0A_1, A_0A_2 तथा A_0A_4 की लम्बाईयों का गुणनफल होगा **[IIT 1998]**

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $3\sqrt{3}$

(c) 3 (d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

17. $3\left[\sin^4\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin^4(3\pi + \alpha)\right]$

$$-2\left[\sin^6\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin^6(5\pi - \alpha)\right] = \quad \textbf{[IIT 1986]}$$

(a) 0 (b) 1

(c) 3 (d) $\sin 4\alpha + \sin 6\alpha$

18. यदि $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, तब $\sqrt{x^2 + x} + \frac{\tan^2\alpha}{\sqrt{x^2 + x}}$ सदैव निम्न से अधिक या बराबर होगा **[IIT Screening 2003]**

(a) $2\tan\alpha$ (b) 1

(c) 2 (d) $\sec^2\alpha$

19. यदि $0 \le \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \le \frac{\pi}{2}$ तथा $\cot\alpha_1.\cot\alpha_2....\cot\alpha_n = 1$, तब $\cos\alpha_1.\cos\alpha_2..... \cos\alpha_n$ का अधिकतम मान होगा **[IIT Screening 2001]**

(a) $\frac{1}{2^{n/2}}$ (b) $\frac{1}{2^n}$

(c) $\frac{1}{2n}$ (d) 1

20. यदि $A = \sin^8\theta + \cos^{14}\theta$, तब θ के सभी वास्तविक मानों के लिए

(a) $A \ge 1$ (b) $0 < A \le 1$

(c) $1 < 2A \le 3$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. यदि θ एक न्यूनकोण है तथा $\sin\theta = \frac{p-6}{8-p}$, तब p निम्न सम्बन्ध को निश्चित रूप से संतुष्ट करेगा **[AMU 1999]**

(a) $6 \le p < 8$ (b) $6 \le p < 7$

(c) $3 \le p \le 4$ (d) $4 \le p < 7$

22. यदि A, B, C एक त्रिभुज के कोण हैं, तब $\sum\frac{\cot A + \cot B}{\tan A + \tan B} =$

(a) 1 (b) 2

(c) –1 (d) – 2

23. यदि $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ तथा $\beta + \gamma = \alpha$, तब $\tan\alpha$ = **[IIT Screening 2001; DCE 2005]**

(a) $2(\tan\beta + \tan\gamma)$ (b) $\tan\beta + \tan\gamma$

(c) $\tan\beta + 2\tan\gamma$ (d) $2\tan\beta + \tan\gamma$

24. यदि $\left|a\sin^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta - \frac{1}{2}(a+c)\right| \le \frac{1}{2}k$, तब k^2 बराबर है

(a) $b^2 + (a-c)^2$ (b) $a^2 + (b-c)^2$

(c) $c^2 + (a-b)^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

25. यदि x के सभी वास्तविक मानों के लिये $\frac{4x^2+1}{64x^2 - 96x\sin\alpha + 5} < \frac{1}{32}$ तब α निम्न अन्तराल में स्थित होगा **[Roorkee Qualiying 1998]**

(a) $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ (b) $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$

(c) $\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ (d) $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$

Answers and Solutions

(SET - 10)

1. (b) दिया है , $(\cos x + \sin x)^2 + k \sin x \cos x - 1 = 0, \forall\, x$

$\Rightarrow \cos^2 x + \sin^2 x + 2\cos x \sin x + k \sin x \cos x - 1 = 0, \forall\, x$

$\Rightarrow (k+2)\cos x \sin x = 0, \forall\, x \;\Rightarrow\; k + 2 = 0 \;\Rightarrow\; k = -2$.

2. (b) $\tan(A - B) = 1 \Rightarrow A - B = \frac{\pi}{4}$ .....(i)

एवं $\sec(A + B) = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow A + B = \frac{11\pi}{6}$ .....(ii)

(i) व (ii) से, $B = \frac{19\pi}{24}$

3. (a) दिया है $\frac{\sin^4 A}{a} + \frac{\cos^4 A}{b} = \frac{1}{a+b}$

$\Rightarrow \frac{(1-\cos 2A)^2}{4a} + \frac{(1+\cos 2A)^2}{4b} = \frac{1}{a+b}$

$\Rightarrow b(a+b)(1 - 2\cos 2A + \cos^2 2A)$

$+ a(a+b)(1 + 2\cos 2A + \cos^2 2A) = 4ab$

$\Rightarrow \{b(a+b) + a(a+b)\}\cos^2 2A + 2(a+b)(a-b)\cos 2A$

$+ a(a+b) + b(a+b) - 4ab = 0$

$\Rightarrow (a+b)^2 \cos^2 2A + 2(a+b)(a-b)\cos 2A + (a-b)^2 = 0$

$\Rightarrow \{(a+b)\cos 2A + (a-b)\}^2 = 0$ या $\cos 2A = \frac{b-a}{b+a}$

अतः $\frac{\sin^8 A}{a^3} + \frac{\cos^8 A}{b^3} = \frac{(1-\cos 2A)^4}{16a^3} + \frac{(1+\cos 2A)^4}{16b^3}$

$= \frac{1}{16a^3}\left[1 - \frac{b-a}{b+a}\right]^4 + \frac{1}{16b^3}\left[1 + \frac{b-a}{b+a}\right]^4$

$= \frac{16a^4}{16a^3(b+a)^4} + \frac{16b^4}{16b^3(b+a)^4}$

$= \frac{1}{(b+a)^4}(a+b) = \frac{1}{(a+b)^3}$

ट्रिक : $A = 90^o$ रखने पर,

$\frac{\sin^4 A}{a} + \frac{\cos^4 A}{b} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow b = 0$

$\therefore \frac{\sin^8 A}{a^3} + \frac{\cos^8 A}{b^3} = \frac{1}{a^3}$ जो कि विकल्प (a) द्वारा दिया जाता है।

नोट : विद्यार्थी इस प्रश्न का A के अन्य मानों के लिए भी निरीक्षण करें।

4. (b) $\sin^3 x \sin 3x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)\sin 3x$

$= \frac{3}{8}.2\sin x \sin 3x - \frac{1}{8}.2\sin^2 3x$

$= \frac{3}{8}(\cos 2x - \cos 4x) - \frac{1}{8}(1 - \cos 6x)$

$= -\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cos 2x - \frac{3}{8}\cos 4x + \frac{1}{8}\cos 6x$ .....(i)

तथा $\sum_{m=0}^{n} c_m \cos mx = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x$

$+ c_3 \cos 3x + ... + c_n \cos nx$ .....(ii)

समी. (i) व (ii) के दोनों पक्षों की तुलना करने पर $n = 6$.

5. (b,c) $x = 1 + \cos^2\phi + \cos^4\phi + ... = \frac{1}{(1-\cos^2\phi)} = \frac{1}{\sin^2\phi}$

$y = 1 + \sin^2\phi + \sin^4\phi + ... = \frac{1}{(1-\sin^2\phi)} = \frac{1}{\cos^2\phi}$

$z = 1 + \cos^2\phi \sin^2\phi + \cos^4\phi \sin^4\phi + .. = \frac{1}{(1 - \cos^2\phi \sin^2\phi)}$

अब $xyz = \frac{1}{\sin^2\phi \cos^2\phi (1 - \cos^2\phi \sin^2\phi)}$

$xy + z = \frac{1}{\sin^2\phi \cos^2\phi} + \frac{1}{1 - \cos^2\phi \sin^2\phi}$

$= \frac{1}{\sin^2\phi \cos^2\phi (1 - \cos^2\phi \sin^2\phi)} = xyz$

जो कि (b) में दिया है।

एवं $x + y + z = xyz$, जो (c) में दिया है .

6. (a,b,c,d) $f_n(\theta) = \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}\left[\frac{2\cos^2\theta/2}{\cos\theta}.\frac{2\cos^2\theta}{\cos 2\theta}.\frac{2\cos^2 2\theta}{\cos 4\theta}..\right]$

दो पदों को एक साथ लेने पर,

$f_n(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\left[\frac{2\cos^2\theta}{\cos 2\theta}.\frac{2\cos^2 2\theta}{\cos 4\theta}.....\right]$

पुनः प्रथम दो पदों को समायोजित करने पर,

$f_n(\theta) = \tan 2\theta\left[\frac{2\cos^2 2\theta}{\cos 4\theta}.....\right] = \tan(2^n\theta)$

$\therefore f_2\left(\frac{\pi}{16}\right) = \tan\frac{4\pi}{16} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$f_3\left(\frac{\pi}{32}\right) = \tan\frac{8\pi}{32} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$f_4\left(\frac{\pi}{64}\right) = \tan\frac{16\pi}{64} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$f_5\left(\frac{\pi}{128}\right) = \tan 32\frac{\pi}{128} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

7. (b) $\sin\frac{\pi}{2^n}+\cos\frac{\pi}{2^n}=\frac{\sqrt{n}}{2}$

$\Rightarrow \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{2^n}.\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{2^n}.\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{n}}{2}$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2^n}\right)=\frac{\sqrt{n}}{2}$

चूँकि $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2^n}\right)\le 1$

$\therefore \frac{\sqrt{n}}{2}\le\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{n}\le 2\sqrt{2}\Rightarrow n\le 8$.

पुनः $\frac{\sqrt{n}}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2^n}\right)>\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}=1$

$\left(\because \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2^n}\right)>\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore n>4$, अतः $4<n\le 8$.

8. (b) यहाँ $k=\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18}$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{18}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{18}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{18}\right)$

$=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{\sin 2^3\frac{\pi}{9}}{2^3\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin\frac{8\pi}{9}}{8\sin\frac{\pi}{9}}$

$=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)}{8\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{1}{8}$.

9. (a) चूँकि $\sin x+\sin^2 x=1$,

$\Rightarrow \sin x=1-\sin^2 x=\cos^2 x$ .....(i)

दिया गया व्यंजक

$\cos^6 x(\cos^6 x+3\cos^4 x+3\cos^2 x+1)-1$

$=\cos^6 x(\cos^2 x+1)^3-1$, $(\because \sin x=\cos^2 x)$

$=(\sin^2 x+\sin x)^3-1=1-1=0$.

10. (c) दिया है $\alpha<\beta<\gamma<\delta$

एवं $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma=\sin\delta=k$ एवं $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ सबसे छोटे धनात्मक कोण हैं जो ऊपर दिये गये प्रतिबन्धों को संतुष्ट करते हैं।

$\therefore \beta=\pi-\alpha,\gamma=2\pi+\alpha,\delta=3\pi-\alpha$.

अतः दिया गया व्यंजक

$=4\sin\frac{\alpha}{2}+3\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+2\sin\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)$

$=4\sin\frac{\alpha}{2}+3\cos\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$

$=2\sqrt{\left(\sin\frac{1}{2}\alpha+\cos\frac{1}{2}\alpha\right)^2}=2\sqrt{1+\sin\alpha}=2\sqrt{1+k}$.

11. (a,b) यदि $L=M$, तब $L^2=LM$ या $ML=M^2$

दोनों $LM=ML=1$ चूँकि $\sec^2 A-\tan^2 A=1$

$\therefore L^2=M^2=1$.

12. (d) $1+2x+3x^2+4x^3+.....+(r+1)x^r+.....$ अनन्त तक

$=(1-x)^{-2}$, [माना $(1-\cos\theta)=x$]

$\therefore$ श्रेणी $=(1-1+\cos\theta)^{-2}=\sec^2\theta$

$=(1+\tan^2\theta)=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$.

13. (a) यहाँ $\sin\alpha\sec x_1\sec x_2+\sin\alpha\sec x_2\sec x_3+....$

$...+\sin\alpha\sec x_{n-1}\sec x_n$

$=\frac{\sin(x_2-x_1)}{\cos x_1\cos x_2}+\frac{\sin(x_3-x_2)}{\cos x_2\cos x_3}+....+\frac{\sin(x_n-x_{n-1})}{\cos x_{n-1}\cos x_n}$

$=\tan x_2-\tan x_1+\tan x_3-\tan x_2+....+\tan x_n-\tan x_{n-1}$

$=\tan x_n-\tan x_1=\frac{\sin(x_n-x_1)}{\cos x_n\cos x_1}=\frac{\sin(n-1)\alpha}{\cos x_n\cos x_1}$

$\{(\because x_n=x_1+(n-1)\alpha)\}$

14. (d) $\sin\alpha+\sin\beta=-\frac{21}{65},\cos\alpha+\cos\beta=-\frac{27}{65}$

अब $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2$

$=\left(\frac{-21}{65}\right)^2+\left(\frac{-27}{65}\right)^2$

$\Rightarrow 2+2\sin\alpha\sin\beta+2\cos\alpha\cos\beta=\frac{441}{65^2}+\frac{729}{65^2}$

$\Rightarrow 2+2[\cos(\alpha-\beta)]=\frac{1170}{(65)^2}\Rightarrow 2.2\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{1170}{(65)^2}$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\frac{3\sqrt{130}}{130}=\frac{3}{\sqrt{130}}$

अतः $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\frac{-3}{\sqrt{130}}$, $\left\{\because \frac{\pi}{2}<\frac{\alpha-\beta}{2}<\frac{3\pi}{2}\right\}$.

15. (c) दिया है

$x\cos\theta=y\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=z\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)=k$

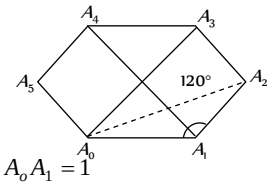
$\Rightarrow \cos\theta=\frac{k}{x},\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{k}{y}$ व $\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{k}{z}$

अतः $\frac{k}{x}+\frac{k}{y}+\frac{k}{z}=\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)$

$=\cos\theta+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$

$= \cos\theta - 2\cos\frac{\pi}{3}\cos\theta = 0$.

16. (c) प्रत्येक त्रिभुज समबाहु त्रिभुज है



अतः $A_oA_1 = 1$

$A_0A_2^2 = A_0A_1^2 + A_1A_2^2 - 2A_0A_1A_1A_2\cos 120^o$

$= 1 + 1 - 2.1.1\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$

$\Rightarrow A_0A_2 = \sqrt{3} = A_0A_4$

$\therefore A_0A_1 \times A_0A_2 \times A_0A_4 = 1.\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3$.

17. (b) $3\left\{\sin^4\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin^4(3\pi + \alpha)\right\}$

$-2\left\{\sin^6\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin^6(5\pi - \alpha)\right\}$

$= 3\{(-\cos\alpha)^4 + (-\sin\alpha)^4\} - 2\{\cos^6\alpha + \sin^6\alpha\}$

$= 3\{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\}$

$-2\{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^3 - 3\cos^2\alpha\sin^2\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\}$

$= 3 - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 2 + 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 3 - 2 = 1$

ट्रिक : $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}$ रखने पर व्यंजक का मान 1 आता है अर्थात् यह α से स्वतंत्र है।

18. (a) $\sqrt{x^2 + x} + \frac{\tan^2\alpha}{\sqrt{x^2 + x}} \geq 2\tan\alpha$

(समान्तर माध्य $\geq$ गुणोत्तर माध्य)

19. (a) यहाँ $(\cot\alpha_1).(\cot\alpha_2)....(\cot\alpha_n) = 1$

$\therefore \cos\alpha_1.\cos\alpha_2...\cos\alpha_n = \sin\alpha_1.\sin\alpha_2...\sin\alpha_n$

अब, $(\cos\alpha_1.\cos\alpha_2...\cos\alpha_n)^2$

$= (\cos\alpha_1.\cos\alpha_2...\cos\alpha_n)(\cos\alpha_1.\cos\alpha_2...\cos\alpha_n)$

$= (\cos\alpha_1.\cos\alpha_2...\cos\alpha_n)(\sin\alpha_1.\sin\alpha_2...\sin\alpha_n)$

$= \frac{1}{2^n}\sin 2\alpha_1.\sin 2\alpha_2...\sin 2\alpha_n.$

लेकिन प्रत्येक $\sin 2\alpha_i \leq 1$

$\therefore (\cos\alpha_1.\cos\alpha_2...\cos\alpha_n)^2 \leq \frac{1}{2^n}$

$\cos\alpha_i$ का प्रत्येक मान धनात्मक है।

$\therefore \cos\alpha_1.\cos\alpha_2....\cos\alpha_n \leq \sqrt{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2^{n/2}}$.

20. (b) दिया है $A = \sin^8\theta + \cos^{14}\theta$

हम जानते हैं $(\sin^2\theta)^4 \leq \sin^2\theta$ एवं $(\cos^2\theta)^7 \leq \cos^2\theta$

जोड़ने पर, $\sin^8\theta + \cos^{14}\theta \leq 1$

या $0 < \sin^8\theta + \cos^{14}\theta \leq 1$ अतः $0 < A \leq 1$.

21. (b) θ एक न्यूनकोण है, इसलिए $0^o \leq \theta < 90^o$ * * *

$\therefore 0 \leq \frac{p-6}{8-p} < 1 \Rightarrow 0 \leq (p-6) < (8-p) \Rightarrow 6 \leq p < 7$.

22. (a) $\sum\frac{\cot A + \cot B}{\tan A + \tan B} = \sum\frac{\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B}}{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}$

$= \sum\frac{\sin B\cos A + \sin A\cos B}{\sin A.\sin B}\frac{\cos A.\cos B}{(\sin A\cos B + \cos A.\sin B)}$

$= \sum\cot A\cot B$

हम जानते हैं कि यदि $A + B + C = \pi$ हो, तो

$\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$.

23. (c) $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\beta = \cot\alpha$

$\tan(\beta + \gamma) = \tan\alpha \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta\tan\gamma}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\cot\alpha + \tan\gamma}{1 - \cot\alpha\tan\gamma}$

$\Rightarrow \tan\alpha - \tan\gamma = \cot\alpha + \tan\gamma$

$\Rightarrow \tan\alpha = \tan\beta + 2\tan\gamma$.

24. (a) $a\sin^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta - \frac{1}{2}(a + c)$

$= \frac{1}{2}[-a\cos 2\theta + b\sin 2\theta + c\cos 2\theta]$

$= \frac{1}{2}[b\sin 2\theta - (a - c)\cos 2\theta]$

$\because |b\sin 2\theta - (a - c)\cos 2\theta| \leq \sqrt{b^2 + (a - c)^2}$

$\therefore \left|\frac{1}{2}\{b\sin 2\theta - (a - c)\cos 2\theta\}\right| \leq \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + (a - c)^2}$

$\Rightarrow \left|a\sin^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta - \frac{1}{2}(a + c)\right|$

$\leq \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + (a - c)^2}$

25. (b, d) $\frac{4x^2 + 1}{64x^2 - 96x\sin\alpha + 5} < \frac{1}{32}$

$\Rightarrow 128x^2 + 32 < 64x^2 - 96x\sin\alpha + 5$

$\Rightarrow 64x^2 + 96\sin\alpha.x + 27 < 0$

$\therefore x < \frac{-96\sin\alpha \pm \sqrt{(96\sin\alpha)^2 - (4 \times 64 \times 27)}}{2 \times 64}$

चूँकि x वास्तविक है $\therefore (96\sin\alpha)^2 - (4 \times 64 \times 27) \geq 0$

$\Rightarrow \sin^2\alpha \geq \frac{4 \times 64 \times 27}{96 \times 96} \Rightarrow \sin\alpha \geq \pm\sqrt{3}/2$

(+) चिन्ह लेने पर, $\sin\alpha \geq \sqrt{3}/2, \alpha \in (\pi/3, 2\pi/3)$

(–) चिन्ह लेने पर, $\sin\alpha \geq -\sqrt{3}/2, \alpha \in (4\pi/3, 5\pi/3)$.