Chapter - 16
Pair of straight lines

रेखायुग्म का समीकरण (Equation of pair of straight lines)

(1) **मूल बिन्दु से गुजरने वाले रेखायुग्म का समीकरण** (Equation of a pair of straight lines passing through origin): समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ मूल बिन्दु से गुजरने वाले एक रेखायुग्म को निरूपित करता है, जहाँ a, h, b नियतांक हैं।

माना समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$, द्वारा निरूपित रेखाएँ $y-m_1x=0$ तथा $y-m_2x=0$ हैं, तब $m_1+m_2=-\frac{2h}{b}$ एवं $m_1m_2=\frac{a}{b}$.

अतः $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित दो रेखाएँ $ax+hy+y\sqrt{h^2-ab}=0$ तथा $ax+hy-y\sqrt{h^2-ab}=0$ हैं।

(a) रेखायें वास्तविक तथा भिन्न होंगी, यदि $h^2-ab>0$.

(b) रेखायें वास्तविक एवं सम्पाती होंगी, यदि $h^2-ab=0$.

(c) रेखायें काल्पनिक होंगी, यदि $h^2-ab<0$.

(2) **रेखायुग्म का व्यापक समीकरण** (General equation of a pair of straight lines) : $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ रूप का एक समीकरण (जहाँ a, b, c, f, g, h नियतांक हैं) x एवं y में व्यापक द्विघात समीकरण कहलाता है।

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ के एक रेखायुग्म को निरूपित करने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0 \text{ या } \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=0.$$

समीकरण $ax+2hxy+by+2gx+2fy+c=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु (Point of intersection of lines represented by $ax+2hxy+by+2gx+2fy+c=0$)

माना $\phi \equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$

$\frac{\partial \phi}{\partial x}=2ax+2hy+2g=0$, ($y$ को स्थिर रखते हुए)

एवं $\frac{\partial \phi}{\partial y}=2hx+2by+2f=0$, ($x$ को स्थिर रखते हुए)

प्रतिच्छेद बिन्दु के लिए $\frac{\partial \phi}{\partial x}=0$ एवं $\frac{\partial \phi}{\partial y}=0$,

समीकरण $ax+hy+g=0$ एवं $hx+by+f=0$ प्राप्त होते हैं।

समीकरण को हल करने पर, $\frac{x}{fh-bg}=\frac{y}{gh-af}=\frac{1}{ab-h^2}$,

अर्थात् $(x,y)=\left(\frac{bg-fh}{h^2-ab},\frac{af-gh}{h^2-ab}\right)$.

संयुक्त समीकरण से पृथक समीकरण ज्ञात करना (Separate equations from joint equation): व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं को ज्ञात करने के लिए कार्य-विधि :

पद I : समघातीय भाग $ax^2+2hxy+by^2$ को दो रेखीय गुणनखण्डों में विभाजित करते हैं। माना कि रेखीय गुणनखण्ड $a'x+b'y$ तथा $a''x+b''y$ हैं।

पद II: Step I में प्राप्त गुणनखण्डों में नियतांक c' एवं c'' जोड़ते हैं, जिससे $a'x+b'y+c'$ तथा $a''x+b''y+c''$ प्राप्त होता है। माना कि रेखायें $a'x+b'y+c'=0$ तथा $a''x+b''y+c''=0$ हैं।

पद III : Step II से प्राप्त रेखाओं का संयुक्त समीकरण ज्ञात करते हैं तथा x, y के गुणांकों एवं नियतांक पद की तुलना कर c' एवं c'' में समीकरण प्राप्त करते हैं।

पद IV : c' एवं c'' में समीकरण को हल कर c' एवं c'' का मान ज्ञात करते हैं।

पद V : Step II से प्राप्त रेखाओं के समीकरण में c' एवं c'' के मान प्रतिस्थापित कर अभीष्ट रेखायें ज्ञात करते हैं।

रेखायुग्म के बीच का कोण (Angle between the pair of lines)

समीकरण $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ या $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच का कोण

$$\tan\theta = \left|\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right| \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left|\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right|$$

उपरोक्त सूत्र से स्पष्ट है कि

(1) $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ द्वारा निरूपित रेखायें समान्तर होगी यदि $h^2=ab$ तथा $af^2=bg^2$ या $\frac{a}{h}=\frac{h}{b}=\frac{g}{f}$.

(2) $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ द्वारा निरूपित रेखायें लम्बवत् होगी यदि $a+b=0$ अर्थात् x^2 का गुणांक + y^2 का गुणांक=0

(3) रेखायें सम्पाती होगी यदि $g^2=ac$ या $f^2=bc$.

रेखाओं के बीच कोणार्धक

(Bisectors of the angles between the lines)

(1) समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच कोणार्धक का संयुक्त समीकरण है

$$\frac{x^2-y^2}{a-b}=\frac{xy}{h} \quad .....(i)$$

$\Rightarrow hx^2-(a-b)xy-hy^2=0$,

यहाँ x^2 का गुणांक + y^2 का गुणांक $=0$.

अतः रेखाओं के कोणार्धक एक-दूसरे पर लम्ब होते हैं। कोणार्धक रेखायें मूल बिन्दु से गुजरती हैं।

यदि $a=b$, तो कोणार्धक $x^2-y^2=0$, अर्थात् $x-y=0$, $x+y=0$ होगें।

यदि $h=0$, कोणार्धक $xy=0$, अर्थात् $x=0, y=0$ होंगे।

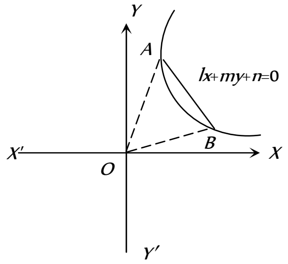
(2) $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ द्वारा प्रदर्शित रेखाओं के कोणों के अर्द्धकों का समीकरण, $\frac{(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2}{a-b}=\frac{(x-\alpha)(y-\beta)}{h}$ होगा, जहाँ α, β समीकरण द्वारा प्रदर्शित रेखाओं का प्रतिच्छेदन बिन्दु है।

वक्र और रेखा के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूलबिन्दु से मिलाने वाली सरल रेखायुग्म का समीकरण

(Equation of the lines joining the origin to the points of intersection of a given line and a given curve)

रेखा $lx+my+n=0$, वक्र $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु को मूलबिन्दु से मिलाने वाली सरल रेखाओं के समीकरण, वक्र के समीकरण को रेखा $lx+my+n=0$ द्वारा समघातीय बनाने पर प्राप्त होता है, अर्थात्

$$ax^2+2hxy+by^2+2(gx+fy)\left(\frac{lx+my}{-n}\right)+c\left(\frac{lx+my}{-n}\right)^2=0$$



प्रथम घात के पदों का विलोपन

(Removal of first degree terms)

माना समीकरण $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ......(i)

द्वारा प्रदर्शित रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु (α,β) हो, तो $(\alpha,\beta)=\left(\frac{bg-fh}{h^2-ab},\frac{af-gh}{h^2-ab}\right)$.

प्रथम घात के पदों के विलोपन के लिए मूलबिन्दु को (α,β) पर प्रतिस्थापित करते हैं, अर्थात् समीकरण (i) में x के स्थान पर $(X+\alpha)$ एवं y के स्थान पर $(Y+\beta)$ रखते हैं।

वैकल्पिक विधि : प्रथम घात के पदों को विलोपित करने के पश्चात् समीकरण $aX^2+2hXY+bY^2+(g\alpha+f\beta+c)=0$ है,

जहाँ $\alpha=\frac{bg-fh}{h^2-ab}$ एवं $\beta=\frac{af-gh}{h^2-ab}$.

मूलबिन्दु को परिवर्तित किये बिना $f(x,y)=ax^2+2hxy+by^2$ से xy पद का विलोपन (Removal of the term xy from $f(x,y)=ax^2+2hxy+by^2$ without changing the origin)

स्पष्टतः $h\neq 0$. कोण θ से अक्षों का घूर्णन करने पर, $x=X\cos\theta - Y\sin\theta$ तथा $y=X\sin\theta+Y\cos\theta$

$\therefore f(x,y)=ax^2+2hxy+by^2$.

घूर्णन के पश्चात्

$$F(X,Y)=(a\cos^2\theta+2h\cos\theta\sin\theta+b\sin^2\theta)X^2$$
$$+2\{(b-a)\cos\theta\sin\theta+h(\cos^2\theta-\sin^2\theta)XY$$
$$+(a\sin^2\theta-2h\cos\theta\sin\theta+b\cos^2\theta)Y^2$$

अब XY का गुणांक = 0, तो $\cot 2\theta=\frac{a-b}{2h}$.

• सामान्यतः सूत्र $\tan 2\theta=\frac{2h}{a-b}$ का उपयोग, घूर्णन कोण θ ज्ञात करने के लिए करते हैं। यदि $a=b$ हो, तो $\cot 2\theta=\frac{a-b}{2h}$ का उपयोग करते हैं, क्योंकि इस स्थिति में $\tan 2\theta$ अपरिभाषित होगा।

समान्तर सरल रेखायुग्म के बीच की दूरी

(Distance between the pair of parallel straight lines)

यदि $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ समान्तर सरल रेखाओं के युग्म को निरूपित करे, तो इनके बीच की दूरी $2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a(a+b)}}$ या $2\sqrt{\frac{f^2-bc}{b(a+b)}}$ होती है।

Tips & Tricks

✍ यदि रेखायुग्म $ax^2+2hxy+by^2=0$ तथा $a'x^2+2h'xy+b'y^2=0$ में एक रेखा उभयनिष्ठ हो, तो $(ab'-a'b)^2=4(ah'-a'h)(hb'-h'b)$.

✍ मूल बिन्दु से गुजरने वाली तथा $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखायुग्म के लम्बवत् रेखायुग्म का समीकरण $bx^2-2hxy+ay^2=0$ होता हैं

✍ समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं में से एक की प्रवणता दूसरे की वर्ग हो, तो $a^2b+ab^2-6abh+8h^3=0$.

✍ यदि समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं में से एक की प्रवणता दूसरे की λ गुनी हो, तो $4\lambda h^2=ab(1+\lambda)^2$.

✍ समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु (0, 0) होता है।

✍ यदि $ax^2+2hxy+by^2=0$ तथा $a'x^2+2h'xy+b'y^2=0$ द्वारा प्रदर्शित रेखाओं के कोणों के अर्द्धक समान हैं, तो $\frac{h'}{h}=\frac{a'-b'}{a-b}$.

✍ यदि समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा प्रदर्शित एक रेखा निर्देशाक्षों के बीच के कोण का अर्द्धक हो, तो $4h^2=(a+b)^2$.

✍ वक्रों $ax^2+2hxy+by^2+2gx=0$ तथा $a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाली रेखायें परस्पर लम्बवत् होंगी, यदि $g(a'+b')=g'(a+b)$.

✍ यदि समीकरण $hxy+gx+fy+c=0$ एक रेखायुग्म प्रदर्शित करता है, तो $fg=ch$.

✍ रेखायुग्म $(a^2-3b^2)x^2+8abxy+(b^2-3a^2)y^2=0$, रेखा $ax+by+c=0$ के साथ एक समबाहु त्रिभुज बनाता है तथा जिसका क्षेत्रफल $=\frac{c^2}{\sqrt{3}(a^2+b^2)}$ होगा।

✍ रेखायें $ax^2+2hxy+by^2=0$ तथा $lx+my+n=0$ एक समद्विबाहु त्रिभुज बनाती है यदि $\frac{l^2-m^2}{lm}=\frac{a-b}{h}$.

✍ रेखाओं $ax^2+2hxy+by^2=0$ तथा $lx+my+n=0$ द्वारा बने त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{n^2\sqrt{h^2-ab}}{am^2-2hlm+bl^2}$ होता है।

✍ रेखा $y=mx+c$ तथा वृत $x^2+y^2=a^2$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाली रेखायें परस्पर लम्बवत् होंगी, यदि $a^2(m^2+1)=2c^2$.

✍ यदि मूल बिन्दु से जाने वाली रेखाओं की बिन्दु (x_1, y_1) से दूरी d हो, तो रेखाओं के समीकरण $(xy_1-yx_1)^2=d^2(x^2+y^2)$ होते हैं।

✍ समीकरण $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ द्वारा प्रदर्शित रेखायें मूलबिन्दु से समदूरस्थ होंगी यदि $f^4-g^4=c(bf^2-ag^2)$

✍ बिन्दु (x, y) से रेखाओं $ax^2+2hxy+by^2=0$ पर डाले गये लम्बों का गुणनफल $\frac{ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$ होता है।

✍ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ द्वारा प्रदर्शित रेखाओं पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्बों का गुणनफल $\frac{c}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$ होता है।

✍ यदि $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ द्वारा प्रदर्शित रेखायें लम्बवत् हैं, तो इनके प्रतिच्छेद बिन्दु की मूल बिन्दु से दूरी का वर्ग $\frac{f^2+g^2}{h^2+b^2}$ अथवा $\frac{f^2+g^2}{h^2+a^2}$ होता है।

✍ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ द्वारा प्रदर्शित रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु की मूल बिन्दु से दूरी का वर्ग $\frac{c(a+b)-f^2-g^2}{ab-h^2}$ होता है।

✍ यदि रेखायुग्म $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा प्राप्त एक रेखा, रेखायुग्म $a'x^2+2h'xy+b'y^2=0$ के द्वारा प्राप्त एक रेखा के साथ सम्पाती हो तथा रेखायुग्मों द्वारा प्रदर्शित दूसरी रेखा से लम्बवत् हों, तब $\frac{ha'b'}{b'-a'}=\frac{h'ab}{b-a}=\frac{1}{2}\sqrt{(-aa'bb')}$.

✍ वक्र $(x-h)^2+(y-k)^2=c^2$ तथा सरल रेखा $kx+hy=2hk$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूलबिन्दु से मिलाने वाली रेखायें परस्पर लम्बवत् होंगी यदि $h^2+k^2=c^2$.

✍ रेखाओं $ax^2+2hxy+by^2=0$ तथा $lx+my=1$ द्वारा निर्मित त्रिभुज का लम्ब केन्द्र $\left(\frac{l(a+b)}{am^2-2hlm+bl^2}, \frac{m(a+b)}{am^2-2hlm+bl^2}\right)$ होता है।

✍ रेखाओं $ax^2+2hxy+by^2=0$ तथा $lx+my=1$ द्वारा निर्मित त्रिभुज का केन्द्रक $\left(\frac{2(bl-hm)}{3(bl^2-2hlm+am^2)}, \frac{2(am-hl)}{3(bl^2-2hlm+am^2)}\right)$ होता है।

✍ समीकरण $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ तथा $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखायें निर्मित करती हैं

(i) एक वर्ग यदि $(a-b)fg+h(f^2-g^2)=0,\ a+b=0$

(ii) एक आयत यदि $(a-b)fg+h(f^2-g^2)\neq 0,\ a+b=0$

(iii) एक समचतुर्भुज यदि

$(a-b)fg+h(f^2-g^2)=0,\ a+b\neq 0$

(iv) एक समान्तर चतुर्भुज यदि

$(a-b)fg+h(f^2-g^2)\neq 0,\ a+b\neq 0$.

Ordinary Thinking

Objective Questions

रेखायुग्म के समीकरण

1. समीकरण $(x+y)^2-(x^2+y^2)=0$ निरूपित करता है
(a) एक वृत्त (b) दो रेखाएँ
(c) दो समान्तर रेखाएँ (d) दो परस्पर लम्बवत् रेखाएँ

2. यदि समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं में से एक की प्रवणता दूसरी की प्रवणता का वर्ग हो, तो
(a) $a^2b+ab^2-6abh+8h^3=0$
(b) $a^2b+ab^2+6abh+8h^3=0$
(c) $a^2b+ab^2-3abh+8h^3=0$
(d) $a^2b+ab^2-6abh-8h^3=0$

3. समीकरण $x^2+xy+y^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाएँ हैं
(a) सम्पाती (b) समान्तर
(c) परस्पर लम्बवत् (d) काल्पनिक

4. यदि समीकरण $hxy+gx+fy+c=0$ एक रेखायुग्म निरूपित करती हों, तो
(a) $fh=cg$ (b) $fg=ch$
(c) $h^2=gf$ (d) $fgh=c$

5. उस सरल रेखायुग्म का समीकरण, जो रेखायुग्म $ax^2+2hxy+by^2=0$ के लम्बवत् हो, है [MP PET 1989]
(a) $ax^2-2hxy+by^2=0$ (b) $bx^2+2hxy+ay^2=0$
(c) $ay^2-2hxy+bx^2=0$ (d) $ay^2-bx^2=0$

6. h के मान, जिनके लिये समीकरण $3x^2+2hxy-3y^2-40x+30y-75=0$ एक सरल रेखायुग्म निरूपित करता है, हैं [MP PET 1989]
(a) 4, 4 (b) 4, 6
(c) 4, – 4 (d) 0, 4

7. मूल बिन्दु से जाने वाली तथा रेखाओं $y=m_1x+c_1$ और $y=m_2x+c_2$ के समान्तर रेखाओं का समीकरण है
(a) $m_1m_2x^2-(m_1+m_2)xy+y^2=0$
(b) $m_1m_2x^2+(m_1+m_2)xy+y^2=0$
(c) $m_1m_2y^2-(m_1+m_2)xy+x^2=0$
(d) $m_1m_2y^2+(m_1+m_2)xy+x^2=0$

8. समीकरण $ab(x^2-y^2)+(a^2-b^2)xy=0$ द्वारा निरूपित सरल रेखाओं के समीकरण हैं
(a) $ax-by=0, bx+ay=0$ (b) $ax-by=0, bx-ay=0$
(c) $ax+by=0, bx+ay=0$ (d) $ax+by=0, bx-ay=0$

9. समीकरण $(x-5)^2+(x-5)(y-6)-2(y-6)^2=0$ निरूपित करता है
(a) एक वृत्त
(b) मूल बिन्दु से जाने वाली दो सरल रेखाएँ
(c) बिन्दु (5, 6) से जाने वाली दो सरल रेखाएँ
(d) इनमें से कोई नहीं

10. x तथा y में एक द्विघात समघातीय समीकरण हमेशा निरूपित करता है
(a) एक रेखायुग्म (b) एक वृत्त
(c) एक शांकव (d) इनमें से कोई नहीं

11. यदि $6x^2+11xy-10y^2+x+31y+k=0$ एक रेखायुग्म को निरूपित करता है तो $k=$ [MP PET 1991]
(a) – 15 (b) 6
(c) – 10 (d) – 4

12. यदि $4ab=3h^2$, तो समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं की प्रवणताओं का अनुपात है
(a) $\sqrt{2}:1$ (b) $\sqrt{3}:1$
(c) $2:1$ (d) $1:3$

13. समीकरण $ax^2(b-c)-xy(ab-bc)+cy^2(a-b)=0$ द्वारा निरूपित रेखाएँ हैं
(a) $a(b-c)x-c(a-b)y=0$, $x+y=0$
(b) $x+y=0$, $x-y=0$
(c) $a(b-c)x-c(a-b)y=0$, $x-y=0$
(d) इनमें से कोई नहीं

14. यदि समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ दो रेखाएँ $y=m_1x$ तथा $y=m_2x$ निरूपित करता हो, तो [CEE 1993; MP PET 1988]
(a) $m_1+m_2=\frac{-2h}{b}$ तथा $m_1m_2=\frac{a}{b}$
(b) $m_1+m_2=\frac{2h}{b}$ तथा $m_1m_2=\frac{-a}{b}$
(c) $m_1+m_2=\frac{2h}{b}$ तथा $m_1m_2=\frac{a}{b}$
(d) $m_1+m_2=\frac{2h}{b}$ तथा $m_1m_2=-ab$

15. समीकरण $4x^2+12xy+9y^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं की प्रकृति है [MP PET 1988]
(a) वास्तविक तथा सम्पाती (b) वास्तविक तथा भिन्न
(c) काल्पनिक तथा भिन्न (d) इनमें से कोई नहीं

16. समीकरण $2x^2-10xy+12y^2+5x-16y-3=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्बों का समीकरण होगा
(a) $6x^2+5xy+y^2=0$ (b) $6y^2+5xy+x^2=0$
(c) $6x^2-5xy+y^2=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

17. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों में से कौन सा युगल रेखाओं को प्रदर्शित करता है [MP PET 1990]
(a) $x^2-xy-y^2=1$ (b) $-x^2+xy-y^2=1$
(c) $4x^2-4xy+y^2=4$ (d) $x^2+y^2=4$

18. रेखाएँ $a^2x^2+bcy^2=a(b+c)xy$ सम्पाती होंगी यदि
(a) $a=0$ या $b=c$ (b) $a=b$ या $a=c$
(c) $c=0$ या $a=b$ (d) $a=b+c$

19. यदि समीकरण $2x^2-2hxy+2y^2=0$ मूल बिन्दु से जाने वाली दो सम्पाती रेखाओं को निरूपित करता हो, तो $h=$
(a) ± 6 (b) $\sqrt{6}$
(c) $-\sqrt{6}$ (d) ± 2

20. यदि समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं में से एक रेखा $y=mx$ हो, तो [UPSEAT 1999]

(a) $bm^2+2hm+a=0$ (b) $bm^2+2hm-a=0$

(c) $am^2+2hm+b=0$ (d) $bm^2-2hm+a=0$

21. मूल बिन्दु से जाने वाली तथा समीकरण $2x^2-xy-6y^2+7x+21y-15=0$ के द्वारा निरूपित रेखाओं के समान्तर रेखायें हैं

(a) $2x^2-xy-6y^2=0$ (b) $6x^2-xy+2y^2=0$

(c) $6x^2-xy-2y^2=0$ (d) $2x^2+xy-6y^2=0$

22. समीकरण $2x^2+4xy-py^2+4x+qy+1=0$ दो परस्पर लम्बवत् रेखाएँ निरूपित करेगा यदि

(a) $p=1$ तथा $q=2$ या 6 (b) $p=2$ तथा $q=0$ या 6

(c) $p=2$ तथा $q=0$ या 8 (d) $p=-2$ तथा $q=-2$ या 8

23. यदि समीकरण $Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ एक रेखायुग्म निरूपित करता हो, तो B^2-AC है [MP PET 1992]

(a) <0 (b) $=0$

(c) >0 (d) इनमें से कोई नहीं

24. मूल बिन्दु से जाने वाली उन रेखाओं का समीकरण जिनकी प्रवणतायें 3 तथा $-\frac{1}{3}$ हैं, होगा

(a) $3y^2+8xy-3x^2=0$ (b) $3x^2+8xy-3y^2=0$

(c) $3y^2-8xy+3x^2=0$ (d) $3x^2+8xy+3y^2=0$

25. समीकरण $xy+a^2=a(x+y)$ निरूपित करता है [MP PET 1991]

(a) एक परवलय (b) एक रेखायुग्म

(c) एक दीर्घवृत्त (d) दो समान्तर रेखाएँ

26. यदि समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं में से एक की प्रवणता दूसरी रेखा की प्रवणता की λ गुनी हो, तो

(a) $4\lambda h=ab(1+\lambda)$ (b) $\lambda h=ab(1+\lambda)^2$

(c) $4\lambda h^2=ab(1+\lambda)^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

27. यदि $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं में से एक रेखा $a'x^2+2h'xy+b'y^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं में से एक रेखा सम्पाती हो तो

(a) $(ab'-a'b)^2=4(ah'-a'h)(hb'-h'b)$

(b) $(ab'+a'b)^2=4(ah'-a'h)(hb'-h'b)$

(c) $(ab'-a'b)^2=(ah'-a'h)(hb'-h'b)$

(d) इनमें से कोई नहीं

28. समीकरण $4x^2+12xy+9y^2+2gx+2fy+c=0$ दो वास्तविक समान्तर रेखायें निरूपित करेगा, यदि

(a) $g=4, f=9, c=0$

(b) $g=2, f=3, c=1$

(c) $g=2, f=3$, c कोई संख्या है

(d) $g=4, f=9, c>1$

29. समीकरण $2y^2-xy-x^2+6x-8=0$ निरूपित करता है [MP PET 1992]

(a) एक रेखायुग्म (b) एक वृत्त

(c) एक दीर्घवृत्त (d) एक परवलय

30. समीकरण $x^2+6xy=0$ द्वारा निरूपित एक रेखा है

(a) x-अक्ष के समान्तर (b) y-अक्ष के समान्तर

(c) x-अक्ष (d) y-अक्ष

31. समीकरण $x^2-5xy+6y^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के समीकरण हैं

(a) $y+2x=0$, $y-3x=0$ (b) $y-2x=0$, $y-3x=0$

(c) $y+2x=0$, $y+3x=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

32. यदि समीकरण $ax^2+by^2+cx+cy=0$ एक रेखायुग्म निरूपित करता हो तो

(a) $a(b+c)=0$ (b) $b(c+a)=0$

(c) $c(a+b)=0$ (d) $a+b+c=0$

33. समीकरण $ax^2+(a+b)xy+by^2+x+y=0$ द्वारा निरूपित रेखाएँ हैं

(a) $ax+by+1=0$, $x+y=0$

(b) $ax+by-1=0$, $x+y=0$

(c) $ax+by+1=0$, $x-y=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

34. समीकरण $x^2-7xy+12y^2=0$ प्रदर्शित करता है [BIT Ranchi 1991]

(a) वृत्त

(b) समान्तर रेखायुग्म

(c) लम्बवत् रेखायुग्म

(d) प्रतिच्छेदी रेखायें (जो लम्बवत् नहीं)

35. समीकरण $y^2-x^2+2x-1=0$ निरूपित करता है [MNR 1991]

(a) एक रेखायुग्म (b) एक वृत्त

(c) एक परवलय (d) एक दीर्घवृत्त

36. यदि समीकरण $\lambda x^2+2y^2-5xy+5x-7y+3=0$ दो सरल रेखाओं को निरूपित करता हो तो λ का मान होगा [RPET 1989]

(a) 3 (b) 2

(c) 8 (d) -8

37. समीकरण $x^2+2xy\cot\theta-y^2=0$ द्वारा निरूपित एक रेखा का समीकरण है

(a) $x-y\cot\theta=0$

(b) $x+y\tan\theta=0$

(c) $x\sin\theta+y(\cos\theta+1)=0$

(d) $x\cos\theta+y(\sin\theta+1)=0$

38. समीकरण $pq(x^2-y^2)+(p^2-q^2)xy=0$ द्वारा निरूपित एक रेखा का समीकरण है

(a) $px+qy=0$ (b) $px-qy=0$

(c) $p^2x+q^2y=0$ (d) $q^2x-p^2y=0$

39. उस रेखायुग्म का समीकरण जो (1, 2) से गुजरती हैं एवं रेखायुग्म $3x^2-8xy+5y^2=0$ पर लम्ब है, है

(a) $(5x+3y+11)(x+y+3)=0$

(b) $(5x+3y-11)(x+y-3)=0$

(c) $(3x+5y-11)(x+y-3)=0$

(d) $(3x-5y+11)(x+y-3)=0$

40. यदि व्यापक द्विघात समीकरण $f(x,y)=0$ में, $\Delta=0$ व $h^2=ab$, तो समीकरण प्रदर्शित करेगा

(a) दो समान्तर रेखाएँ (b) दो लम्बवत् सरल रेखाएँ
(c) दो सम्पाती रेखायें (d) इनमें से कोई नहीं

41. व्यापक द्विघात समीकरण $f(x,y)=0$ द्वारा सम्पाती रेखाएँ निरूपित करने का प्रतिबन्ध है
(a) $\Delta = 0$ व $h^2 = ab$
(b) $\Delta = 0$ व $a+b=0$
(c) $\Delta = 0$ व $h^2 = ab$, $g^2 = ac$, $f^2 = bc$
(d) $h^2 = ab$, $g^2 = ac$ व $f^2 = bc$

42. समीकरण $x^2 + ky^2 + 4xy = 0$ दो सम्पाती रेखाएँ प्रदर्शित करता हैं, यदि $k =$ [MP PET 1995]
(a) 0 (b) 1
(c) 4 (d) 16

43. रेखाओं $x+y=1$ व $x-y=4$ का संयुक्त समीकरण है [Karnataka CET 1993]
(a) $x^2 - y^2 = -4$ (b) $x^2 - y^2 = 4$
(c) $(x+y-1)(x-y-4)=0$ (d) $(x+y+1)(x-y+4)=0$

44. समीकरण $x^2 - \lambda xy + 2y^2 + 3x - 5y + 2 = 0$ दो सरल रेखाओं के युग्म को प्रदर्शित करता है, तब λ का मान है [Kurukshetra CEE 1996]
(a) 2 (b) 3
(c) 4 (d) 1

45. समीकरण $2x^2 + 7xy + 3y^2 + 8x + 14y + \lambda = 0$ एक सरल रेखायुग्म दर्शाएगा, जब $\lambda =$ [MP PET 1996]
(a) 2 (b) 4
(c) 6 (d) 8

46. समीकरण $x^2 + hxy + 2y^2 = 0$ की एक रेखा की प्रवणता दूसरी की दुगनी है, तब $h =$ [MP PET 1996]
(a) ± 3 (b) $\pm \frac{3}{2}$
(c) ± 2 (d) ± 1

47. यदि बिन्दु (2,–3) वक्र $kx^2 - 3y^2 + 2x + y - 2 = 0$ पर स्थित हो तो k का मान होगा
(a) $\frac{1}{7}$ (b) 16
(c) 7 (d) 12

48. यदि $Lx^2 - 10xy + 12y^2 + 5x - 16y - 3 = 0$ एक रेखायुग्म निरूपित करे, तो L का मान होगा [MP PET 2001]
(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) –1

49. यदि $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ द्वारा निरूपित रेखाओं की प्रवणताओं में 1 : 3 का अनुपात है, तो अनुपात $h^2 : ab$ का मान है [MP PET 1998]
(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{3}{4}$
(c) $\frac{4}{3}$ (d) 1

50. यदि रेखायुग्म $ax^2 + 4xy + y^2 = 0$ द्वारा निरूपित एक रेखा की प्रवणता, दूसरी रेखा की प्रवणता की 3 गुनी हो तो $a =$ [DCE 1999]
(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

51. यदि रेखायुग्म $4x^2 + 2hxy - 7y^2 = 0$ द्वारा निरूपित रेखाओं की प्रवणताओं का योग, प्रवणताओं के गुणनफल के बराबर हो, तो h का मान है [Karnataka CET 1999]
(a) – 6 (b) – 2
(c) – 4 (d) 4

52. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ द्वारा निरूपित एक रेखा की प्रवणता दूसरी की प्रवणता की दो गुनी हो, तो [MP PET 2000; Pb. CET 2002]
(a) $h^2 = ab$ (b) $h = a+b$
(c) $8h^2 = 9ab$ (d) $9h^2 = 8ab$

53. समीकरण $x^2 + kxy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$ एक रेखायुग्म निरूपित करता है, तब k का मान है [MP PET 2000]
(a) 5/3 (b) 10/3
(c) 3/2 (d) 3/10

54. समीकरण $2x^2 + 4xy - ky^2 + 4x + 2y - 1 = 0$ एक रेखायुग्म निरूपित करता है, तो k का मान है [Karnataka CET 2001]
(a) $-\frac{5}{3}$ (b) $\frac{5}{3}$
(c) $\frac{1}{3}$ (d) $-\frac{1}{3}$

55. रेखायुग्म $x^2 + xy - 12y^2 = 0$ से निरूपित रेखाओं के समीकरण हैं [Karnataka CET 2001; Pb. CET 2000]
(a) $x+4y=0$ तथा $x+3y=0$
(b) $2x-3y=0$ तथा $x-4y=0$
(c) $x-6y=0$ तथा $x-3y=0$
(d) $x+4y=0$ तथा $x-3y=0$

56. यदि समीकरण $2x^2 + 5xy + 3y^2 + 6x + 7y + k = 0$ एक रेखायुग्म को निरूपित करता है, तब k का मान है [Kurukshetra CEE 2002]
(a) 4 (b) 6
(c) 0 (d) 8

57. यदि समीकरण $3x^2 + xy - y^2 - 3x + 6y + k = 0$ रेखायुग्म को निरूपित करता है, तो k का मान है [Karnataka CET 2002]
(a) 9 (b) 1
(c) 0 (d) – 9

58. समीकरण $3x^2 + 7xy + 2y^2 + 5x + 3y + 2 = 0$ निरूपित करता है [UPSEAT 2002]
(a) सरल रेखा युग्म (b) दीर्घवृत्त
(c) अतिपरवलय (d) इनमें से कोई नहीं

59. 'p' के किस मान के लिए समीकरण $y^2 + xy + px^2 - x - 2y = 0$ दो सरल रेखाओं को प्रदर्शित करता है [UPSEAT 2002]
(a) 2 (b) $\frac{1}{3}$
(c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{2}$

60. यदि समीकरण $2x^2 + 7xy + 3y^2 - 9x - 7y + k = 0$ एक रेखायुग्म प्रदर्शित करता है, तब k का मान है
(a) 4 (b) 2
(c) 1 (d) – 4

61. यदि समीकरण $12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + k = 0$ दो सरल रेखायें प्रदर्शित करें, तब k का मान है [MP PET 2003]
(a) 1 (b) 2
(c) 0 (d) 3

62. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ $x^2 - 7xy + 6y^2 = 0$ से निरूपित हों एवं इसका केन्द्रक (1, 0) हो तो तीसरी भुजा का समीकरण है
(a) $2x + 7y + 3 = 0$ (b) $2x - 7y + 3 = 0$
(c) $2x + 7y - 3 = 0$ (d) $2x - 7y - 3 = 0$

63. समीकरण $4x^2 - 24xy + 11y^2 = 0$ प्रदर्शित करता है [Orissa JEE 2003]
(a) दो समान्तर रेखाएँ
(b) दो लम्बवत् रेखाएँ
(c) मूल बिन्दु से गुजरने वाली दो रेखाएँ
(d) एक वृत्त

64. रेखायुग्म $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ द्वारा दी गई रेखाओं में एक रेखा की प्रवणता दूसरे की 5 गुनी है, तब [Karnataka CET 2003]
(a) $5h^2 = ab$ (b) $5h^2 = 9ab$
(c) $9h^2 = 5ab$ (d) $h^2 = ab$

65. मूल बिन्दु से होकर जाने वाले व रेखायुग्म $2x^2 - 5xy + y^2 = 0$ के लम्बवत् रेखायुग्म का समीकरण है [MP PET 1990]
(a) $2x^2 + 5xy + y^2 = 0$ (b) $x^2 + 2y^2 + 5xy = 0$
(c) $x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$ (d) $2x^2 + y^2 - 5xy = 0$

66. रेखाओं $x^2 - 4y^2 = 0$ व $x = a$ द्वारा निरूपित त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा
(a) $2a^2$ (b) $\frac{a^2}{2}$
(c) $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$ (d) $\frac{2a^2}{\sqrt{3}}$

67. यदि समीकरण $6x^2 + 41xy - 7y^2 = 0$ द्वारा निरूपित रेखायें x-अक्ष से α तथा β कोण बनाती हों, तो $\tan\alpha . \tan\beta =$
(a) – 6/7 (b) 6/ 7
(c) 7/6 (d) – 7/6

68. समीकरण $x^2(\sec^2\theta - \sin^2\theta) - 2xy\tan\theta + y^2\sin^2\theta = 0$ के द्वारा निरूपित रेखाओं की प्रवणताओं का अन्तर होगा [Kurukshetra CEE 2002]
(a) 4 (b) 3
(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

69. λ के किस मान के लिए समीकरण $x^2 - y^2 - x - \lambda y - 2 = 0$ एक रेखायुग्म को निरूपित करेगा [MP PET 2004]
(a) 3, – 3 (b) – 3, 1
(c) 3, 1 (d) –1, 1

70. यदि समीकरण $ax^2 - y^2 + 4x - y = 0$ एक रेखायुग्म को निरूपित करता है तब a का मान होगा [Karnataka CET 2004]
(a) – 16 (b) 16
(c) 4 (d) – 4

71. दिये गये समीकरण $6x^2 - xy + 4cy^2 = 0$ में से एक रेखा $3x + 4y = 0$ है तब c का मान होगा [AIEEE 2004]
(a) – 3 (b) – 1
(c) 3 (d) 1

72. यदि रेखायुग्म $x^2 - 2cxy - 7y^2 = 0$ से निरूपित रेखाओं की प्रवणताओं का योग उनके गुणनफल का 4 गुना है। तब c का मान होगा [AIEEE 2004]
(a) – 2 (b) –- 1
(c) 2 (d) 1

73. यदि $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{2xy}{h} = 0$ एक रेखायुग्म को निरूपित करती है एवं एक रेखा की प्रवणता दूसरी की दुगुनी है। तब $ab : h^2$ का मान है [DCE 2005]
(a) 9 : 8 (b) 8 : 9
(c) 1 : 2 (d) 2 : 1

रेखायुग्म के बीच का कोण, समान्तर व लम्बवत् रेखाओं का प्रतिबन्ध

1. यदि समीकरण $ax^2 - bxy - y^2 = 0$ द्वारा निरूपित रेखाएँ x-अक्ष से कोण α तथा β बनाती हों, तो $\tan(\alpha + \beta) =$
(a) $\frac{b}{1+a}$ (b) $\frac{-b}{1+a}$
(c) $\frac{a}{1+b}$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. समीकरण $x^2 + 2xy\sec\theta + y^2 = 0$ के द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच का कोण है
(a) θ (b) 2θ
(c) $\frac{\theta}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

3. यदि रेखायुग्मों $3x^2 - 7xy + 4y^2 = 0$ तथा $6x^2 - 5xy + y^2 = 0$ के बीच के न्यूनकोण क्रमशः θ_1 तथा θ_2 हों, तो
(a) $\theta_1 = \theta_2$ (b) $\theta_1 = 2\theta_2$
(c) $2\theta_1 = \theta_2$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. समीकरण $ax^2 + xy + by^2 = 0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच का कोण 45^o होगा यदि
(a) $a = 1, b = 6$ (b) $a = 1, b = -6$
(c) $a = 6, b = 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

5. समीकरण $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 21x + 28y + 6 = 0$ द्वारा निरूपित रेखाएँ हैं
(a) समान्तर (b) सम्पाती
(c) लम्बवत् (d) इनमें से कोई नहीं

6. $(x^2 + y^2)\sqrt{3} = 4xy$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच का न्यूनकोण है [MP PET 1992]
(a) $\pi/6$ (b) $\pi/4$
(c) $\pi/3$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. समीकरण $xy + y = 0$ द्वारा निरूपित रेखाओं द्वारा $y-$अक्ष से बनाये गये कोण हैं
(a) 0^o तथा 90^o (b) 0^o तथा 30^o
(c) 30^o तथा 60^o (d) 30^o तथा 90^o

8. यदि समीकरण $y^2 + kxy - x^2\tan^2 A = 0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच का कोण $2A$ हो, तो $k =$
(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) $\tan A$

9. रेखाओं $xy = 0$ के मध्य कोण है [MP PET 1990, 92]

(a) 45^o (b) 60^o
(c) 90^o (d) 180^o

10. समीकरण $4x^2 - 24xy + 11y^2 = 0$ द्वारा दर्शायी गयी रेखाओं के बीच के कोण हैं **[MP PET 1990]**

(a) $\tan^{-1}\frac{3}{4}, \tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)$ (b) $\tan^{-1}\frac{1}{3}, \tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$

(c) $\tan^{-1}\frac{4}{3}, \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right)$ (d) $\tan^{-1}\frac{1}{2}, \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

11. यदि समीकरण $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$ द्वारा निरूपित रेखायें x-अक्ष से कोण α तथा β बनायें, तो $\cot^2\alpha + \cot^2\beta =$

(a) 0 (b) 3/2
(c) 7/4 (d) 5/4

12. मूल बिन्दु को वक्रों $2x^2 + 3y^2 + 10x = 0$ तथा $3x^2 + 5y^2 + 16x = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से मिलाने वाली रेखाओं के बीच का कोण है

(a) $\tan^{-1}\frac{3}{2}$ (b) $\tan^{-1}\frac{4}{5}$

(c) 90^o (d) इनमें से कोई नहीं

13. रेखायें $(lx + my)^2 - 3(mx - ly)^2 = 0$ व $lx + my + n = 0$ बनाती है

(a) एक समद्विबाहु त्रिभुज (b) एक समकोण त्रिभुज
(c) एक समबाहु त्रिभुज (d) इनमें से कोई नहीं

14. समीकरण $\lambda x^2 + (1-\lambda)^2 xy - \lambda y^2 = 0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच कोण है

(a) 30^o (b) 45^o
(c) 60^o (d) 90^o

15. यदि समीकरण $x^2 - 2xy\tan A - y^2 = 0$ द्वारा निरूपित रेखाओं की प्रवणताओं का योग 4 हो, तो $\angle A =$

(a) 0^o (b) 45^o
(c) 60^o (d) $\tan^{-1}(-2)$

16. यदि $(a+3b)(3a+b) = 4h^2$ तो समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच का कोण होगा

(a) 30^o (b) 45^o

(c) 60^o (d) $\tan^{-1}\frac{1}{2}$

17. समीकरण $(x^2 + y^2)\sin\theta + 2xy = 0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच का कोण है

(a) θ (b) $\frac{\theta}{2}$

(c) $\frac{\pi}{2} - \theta$ (d) $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$

18. रेखा $2x + y = 1$ व वक्र $3x^2 + 4xy - 4x + 1 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाली रेखाओं के बीच कोण है **[MP PET 1993]**

(a) $\pi/2$ (b) $\pi/3$
(c) $\pi/4$ (d) $\pi/6$

19. रेखायुग्म $x^2 + 4y^2 - 7xy = 0$ के बीच का कोण है **[MNR 1983]**

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (b) $\tan^{-1} 3$

(c) $\tan^{-1}\frac{\sqrt{33}}{5}$ (d) $\tan^{-1}\frac{5}{\sqrt{33}}$

20. रेखायुग्म $x^2 + 2xy - y^2 = 0$ के बीच का कोण है **[MNR 1990]**

(a) $\pi/3$ (b) $\pi/6$
(c) $\pi/2$ (d) 0

21. सरल रेखाओं $x^2 - y^2 - 2y - 1 = 0$ के बीच कोण है **[MNR 1991; UPSEAT 2000]**

(a) 90^o (b) 60^o
(c) 75^o (d) 36^o

22. यदि समीकरण $2x^2 + 5xy + 3y^2 + 6x + 7y + 4 = 0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच कोण $\tan^{-1} m$ हो तो m बराबर है **[MNR 1993]**

(a) 1/5 (b) 1
(c) 7/5 (d) 7

23. परस्पर लम्बवत् रेखाओं को निरूपित करने वाला रेखायुग्म है **[Roorkee 1990]**

(a) $2x^2 = 2y(2x + y)$ (b) $x^2 + y^2 + 3 = 0$
(c) $2x^2 = y(2x + y)$ (d) $x^2 = 2(x - y)$

24. यदि रेखायें $(p-q)x^2 + 2(p+q)xy + (q-p)y^2 = 0$ परस्पर लम्बवत् हैं तो

(a) $p = q$
(b) $p = 0$
(c) $q = 0$
(d) p व q का मान कुछ भी हो सकता है

25. निम्न में कौन सा समीकरण परस्पर लम्बवत् सरल रेखाओं के रेखायुग्म को निरूपित करता है

(a) $y^2 + xy - x^2 = 0$ (b) $y^2 - xy + x^2 = 0$
(c) $x^2 + xy + y^2 = 0$ (d) $x^2 + xy - 2y^2 = 0$

26. समीकरण $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 3x - 3\sqrt{3}y - 4 = 0$ द्वारा निरूपित रेखायें हैं

(a) परस्पर लम्बवत् (b) समान्तर
(c) परस्पर 45^o पर झुकी हैं (d) इनमें से कोई नहीं

27. यदि समीकरण $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0$ द्वारा निरूपित तीन रेखाओं में से दो परस्पर लम्बवत् हों, तो

(a) $a^2 + d^2 = 2ac$ (b) $a^2 + d^2 = 2bd$
(c) $a^2 + ac + bd + d^2 = 0$ (d) $a^2 + d^2 = 4bc$

28. यदि व्यापक द्विघात समीकरण $f(x,y) = 0$ में, $\Delta = 0$ व $a + b = 0$ तो समीकरण प्रदर्शित करेगा

(a) दो समान्तर सरल रेखाएँ
(b) दो लम्बवत् सरल रेखाएँ
(c) दो रेखायें जो मूल बिन्दु से गुजरती हैं
(d) इनमें से कोई नहीं

29. समीकरण $x^2 - 2pxy + y^2 = 0$ द्वारा प्रदर्शित रेखाओं के बीच का कोण है

(a) $\sec^{-1} p$ (b) $\cos^{-1} p$
(c) $\tan^{-1} p$ (d) इनमें से कोई नहीं

30. समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ द्वारा प्रदर्शित रेखाओं के बीच का कोण है **[RPET 1995]**

(a) $\tan\theta = \frac{2(h^2 - ab)}{(a+b)}$ (b) $\tan\theta = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{(a+b)}$

(c) $\tan\theta = \frac{2(h^2 - ab)}{\sqrt{a+b}}$ (d) $\tan\theta = \frac{2\sqrt{h^2 + ab}}{(a+b)}$

31. समीकरण $x^2 + k_1 y^2 + k_2 xy = 0$ परस्पर लम्ब रेखायुग्म निरूपित करेगा, यदि

(a) $k_1 = -1$ (b) $k_1 = 2k_2$

(c) $2k_1 = k_2$ (d) इनमें से कोई नहीं

32. रेखायुग्म $2x^2 + 5xy + 2y^2 + 3x + 3y + 1 = 0$ के बीच कोण होगा [EAMCET 1994]

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$

(c) 0 (d) $\pi/2$

33. समीकरण $9x^2 - 12xy + 4y^2 = 0$ से निरूपित सरल रेखायें हैं

(a) सम्पाती (b) लम्बवत्

(c) समान्तर (d) $45°$ के कोण पर झुकी हुई

34. दो सरल रेखाओं $2x^2 - 5xy + 2y^2 - 3x + 3y + 1 = 0$ के मध्य कोण है

(a) 45^o (b) 60^o

(c) $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ (d) $\tan^{-1}\frac{3}{4}$

35. मूल बिन्दु को वक्रों $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ एवं $x + y = 1$ के प्रतिच्छेदन बिन्दुओं से मिलाने वाली रेखाओं के बीच बना न्यूनकोण है [MP PET 1998]

(a) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (b) $\tan^{-1} 2$

(c) $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ (d) 60^o

36. रेखाओं $x^2 - y^2 = 0$ के मध्य कोण है [MP PET 1999]

(a) 15^o (b) 45^o

(c) 75^o (d) 90^o

37. यदि रेखायुग्म $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ दो लम्बवत् रेखाओं को निरूपित करे तो प्रतिबन्ध होगा [Kurukshetra CEE 1998; MP PET 2001]

(a) $ab = -1$ (b) $a = -b$

(c) $a = b$ (d) $ab = 1$

38. समीकरण $12x^2 + 7xy + ay^2 + 13x - y + 3 = 0$ द्वारा निरूपित रेखायें परस्पर लम्बवत् हैं, तब 'a' का मान है [Karnataka CET 2001]

(a) $\frac{7}{2}$ (b) – 19

(c) – 12 (d) 12

39. रेखाओं $x^2 + 4xy + y^2 = 0$ के मध्य कोण है [Karnataka CET 2001; Pb. CET 2001]

(a) 60^o (b) 15^o

(c) 30^o (d) 45^o

40. यदि समीकरण $12x^2 + 7xy - py^2 - 18x + qy + 6 = 0$ परस्पर लम्बवत् रेखाओं को निरूपित करें, तो [Kurukshetra CEE 2002]

(a) $p = 12, q = 1$ (b) $p = 1, q = 12$

(c) $p = -1, q = 12$ (d) $p = 1, q = -12$

41. समीकरण $2x^2 - 7xy + 3y^2 = 0$ से निरूपित रेखाओं के मध्य कोण है [Kurukshetra CEE 2002]

(a) 60^o (b) 45^o

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{7}{6}\right)$ (d) 30^o

42. यदि कोण 2θ न्यूनकोण है, तो रेखाओं $x^2(\cos\theta - \sin\theta) + 2xy\cos\theta + y^2(\cos\theta + \sin\theta) = 0$ के मध्य न्यूनकोण है [EAMCET 2002]

(a) 2θ (b) $\theta/3$

(c) θ (d) $\theta/2$

43. यदि समीकरण $x^2 - 3xy + \lambda y^2 + 3x - 5y + 2 = 0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के मध्य कोण $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ हो, जहाँ 'λ' एक अऋणात्मक वास्तविक संख्या है, तब λ का मान होगा [Orissa JEE 2002]

(a) 2 (b) 0

(c) 3 (d) 1

44. रेखाओं $x^2 - xy - 6y^2 - 7x + 31y - 18 = 0$ के मध्य कोण है [Karnataka CET 2003]

(a) 45^o (b) 60^o

(c) 90^o (d) 30^o

रेखाओं के कोणार्द्धकों के समीकरण एवं रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु

1. रेखा $x - 2y = 0$ समीकरण $x^2 - 2hxy - 2y^2 = 0$ के द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच के कोणों की समद्विभाजक रेखा होगी यदि $h =$

(a) 1/2 (b) 2

(c) –2 (d) –1/2

2. समीकरण $4x^2 - 16xy - 7y^2 = 0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच के कोणों के समद्विभाजकों का समीकरण है

(a) $8x^2 + 11xy - 8y^2 = 0$ (b) $8x^2 - 11xy - 8y^2 = 0$

(c) $16x^2 + 11xy - 16y^2 = 0$ (d) $16x^2 + 11xy + 16y^2 = 0$

3. समीकरण $(y - mx)^2 = (x + my)^2$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच के कोणों के समद्विभाजकों का समीकरण है

(a) $mx^2 + (m^2 - 1)xy - my^2 = 0$

(b) $mx^2 - (m^2 - 1)xy - my^2 = 0$

(c) $mx^2 + (m^2 - 1)xy + my^2 = 0$

(d) इनमें से कोई नहीं

4. समीकरण $x^2 - y^2 = 0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच के कोणों के अर्धकों का समीकरण है

(a) $x = 0$ (b) $y = 0$

(c) $xy = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

5. यदि $y = mx$ रेखाओं $ax^2 - 2hxy + by^2 = 0$ के बीच के कोणों का एक अर्धक हो, तो

(a) $h(1 + m^2) + m(a - b) = 0$ (b) $h(1 - m^2) + m(a + b) = 0$

(c) $h(1-m^2)+m(a-b)=0$ (d) $h(1+m^2)+m(a+b)=0$

6. अक्षों के समद्विभाजकों का संयुक्त समीकरण है

(a) $x^2+y^2=0$ (b) $x^2-y^2=0$

(c) $xy=0$ (d) $x+y=0$

7. यदि रेखायुग्मों $ax^2+2hxy+by^2=0$ तथा $ax^2+2hxy+by^2+\lambda(x^2+y^2)=0$ के बीच के कोणों के समद्विभाजक सम्पाती हो, तो $\lambda=$

(a) a (b) b

(c) h (d) कोई भी वास्तविक संख्या

8. $(x^2+y^2)\sqrt{3}=4xy$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच के कोणों के समद्विभाजकों का संयुक्त समीकरण है [MP PET 1992]

(a) $x^2-y^2=0$ (b) $xy=0$

(c) $x^2+y^2=2xy$ (d) $\frac{x^2-y^2}{\sqrt{3}}=\frac{xy}{2}$

9. समीकरण $x^2+2xy\cot\theta+y^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच के कोणों के समद्विभाजकों का समीकरण है

(a) $x^2-y^2=0$ (b) $x^2-y^2=xy$

(c) $(x^2-y^2)\cot\theta=2xy$ (d) इनमें से कोई नहीं

10. यदि समीकरणों $ax^2+2hxy+by^2=0$ व $a'x^2+2h'xy+b'y^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच कोणों के अर्द्धकों के समीकरण समान हों, तो

(a) $(a-b)h'=(a'-b')h$ (b) $(a-b)h=(a'-b')h'$

(c) $(a+b)h'=(a'-b')h$ (d) $(a-b)h'=(a'+b')h$

11. यदि $r(1-m^2)+m(p-q)=0$, तो समीकरण $px^2-2rxy+qy^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच कोणों के अर्द्धकों के समीकरण में से एक होगा

(a) $y=x$ (b) $y=-x$

(c) $y=mx$ (d) $my=x$

12. यदि समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं में एक रेखा निर्देशाक्षों का अर्द्धक हो, तो [Bihar CEE 1990]

(a) $(a-b)^2=h^2$ (b) $(a+b)^2=h^2$

(c) $(a-b)^2=4h^2$ (d) $(a+b)^2=4h^2$

13. यदि समीकरणों $3x^2-4xy+5y^2=0$ व $5x^2+4xy+3y^2=0$ के कोणों के अर्द्धक एक ही हों तो प्रथम समीकरण द्वारा निरूपित रेखायें द्वितीय समीकरण द्वारा निरूपित रेखाओं के साथ कोण बनायेंगी

(a) 30^o (b) 60^o

(c) 45^o (d) 90^o

14. रेखायुग्म $a(x-1)^2+2h(x-1)y+by^2=0$ के बीच एक कोण का समद्विभाजक $2x+y-2=0$ है, तो दूसरा कोण समद्विभाजक होगा

(a) $x-2y+1=0$ (b) $2x+y-1=0$

(c) $x+2y-1=0$ (d) $x-2y-1=0$

15. समीकरण $2x^2+3y^2+7xy+8x+14y+8=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु है

(a) (0, 2) (b) (1, 2)

(c) (–2, 0) (d) (–2, 1)

16. समीकरण $2(x+2)^2+3(x+2)(y-2)-2(y-2)^2=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु है

(a) (2, 2) (b) (–2, –2)

(c) (– 2, 2) (d) (2, –2)

किसी वक्र व रेखा के प्रतिच्छेद बिन्दु को मूल बिन्दु से मिलाने वाली रेखाओं का समीकरण, रेखायुग्म के बीच की दूरी

1. मूल बिन्दु को वक्रों $ax^2+2hxy+by^2+2gx=0$ तथा $a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से मिलाने वाली रेखाएँ परस्पर लम्बवत् होंगी यदि [UPSEAT 1999]

(a) $g(a'-b')=g'(a+b)$ (b) $g(a'+b')=g'(a+b)$

(c) $g(a'+b')=g'(a-b)$ (d) $g(a'-b')=g'(a-b)$

2. समीकरण $x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-3x-3\sqrt{3}y-4=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के बीच की दूरी हैं [Roorkee 1989]

(a) 5/2 (b) 5/4

(c) 5 (d) 0

3. यदि मूल बिन्दु को रेखा $fx-gy=\lambda$ तथा वक्र $x^2+hxy-y^2+gx+fy=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से मिलाने वाली रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हों, तो

(a) $\lambda=h$

(b) $\lambda=g$

(c) $\lambda=fg$

(d) λ का कोई भी मान हो सकता है

4. मूल बिन्दु को वक्रों $x^2+y^2=a^2$ तथा $x^2+y^2-ax-ay=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से मिलाने वाली रेखाओं का समीकरण है

(a) $x^2-y^2=0$ (b) $xy=0$

(c) $xy-x^2=0$ (d) $y^2+xy=0$

5. द्विघात समीकरण $x^2+2\sqrt{2}xy+2y^2+4x+4\sqrt{2}y+1=0$ दो सरल रेखायें निरूपित करता हैं, तो उनके बीच की दूरी है [MNR 1984; UPSEAT 2000]

(a) 4 (b) $4/\sqrt{3}$

(c) 2 (d) $2\sqrt{3}$

6. वक्र $x^2+y^2=4$ व $y-x=2$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाली रेखाओं का समीकरण है

(a) $x^2+y^2=(y-x)^2$ (b) $x^2+y^2+(y-x)^2=0$

(c) $x^2+y^2=4(y-x)^2$ (d) $x^2+y^2+4(y-x)^2=0$

7. यदि रेखा $x+y=1$ व वक्र $x^2+y^2-2y+\lambda=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाली रेखायें परस्पर लम्ब हों, तो λ का मान होगा

(a) 1/2 (b) –1/2

(c) $1/\sqrt{2}$ (d) 0

8. वक्र $5x^2+12xy-8y^2+8x-4y+12=0$ व रेखा $x-y=2$ के प्रतिच्छेद बिन्दु को मूल बिन्दु से मिलाने वाली रेखायें अक्षों के साथ कोण बनाती हैं

(a) 30^o तथा 45^o (b) 45^o तथा 60^o

(c) बराबर (d) अक्षों के समान्तर

9. वक्र $(x-h)^2+(y-k)^2-c^2=0$ व रेखा $kx+hy=2hk$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाली रेखायें परस्पर लम्बवत् हैं तो

(a) $c=h\pm k$ (b) $c^2=h^2+k^2$

(c) $c^2=(h+k)^2$ (d) $4c^2=h^2+k^2$

10. मूल बिन्दु से गुजरने वाली दो रेखाओं के बीच की दूरी बिन्दु (x_1,y_1) से 'd' हो तो रेखाओं का समीकरण होगा

(a) $(xy_1-yx_1)^2=d^2(x^2+y^2)$

(b) $(x_1y_1-xy)^2=(x^2+y^2)$

(c) $(xy_1+yx_1)^2=(x^2-y^2)$

(d) $(x^2-y^2)=2(x_1+y_1)$

11. वक्र $3x^2+5xy-3y^2+2x+3y=0$ व रेखा $3x-2y=1$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाली रेखाओं के समीकरण हैं

(a) परस्पर समान्तर

(b) परस्पर लम्बवत्

(c) परस्पर 45^o पर झुके हुए

(d) इनमें से कोई नहीं

12. समान्तर रेखायुग्म $9x^2-6xy+y^2+18x-6y+8=0$ के बीच की दूरी है [EAMCET 1994]

(a) $1/\sqrt{10}$ (b) $2/\sqrt{10}$

(c) $4/\sqrt{10}$ (d) $\sqrt{10}$

13. रेखायुग्म $(x-2y)^2+k(x-2y)=0$ के बीच की दूरी 3 है, तो k=

(a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

(c) $\pm 3\sqrt{5}$ (d) इनमें से कोई नहीं

14. रेखा $y=2\sqrt{2}x+c$ तथा वृत्त $x^2+y^2=2$ के प्रतिच्छेदन बिन्दुओं को मूलबिन्दु से मिलाने वाली सरल रेखायुग्म लम्बवत् हैं, यदि [MP PET 1996]

(a) $c^2-4=0$ (b) $c^2-8=0$

(c) $c^2-9=0$ (d) $c^2-10=0$

15. यदि समीकरण $8x^2+8xy+2y^2+26x+13y+15=0$ एक रेखा युग्म को प्रदर्शित करती है, तब रेखाओं के मध्य दूरी होगी [UPSEAT 2001]

(a) $7/\sqrt{5}$ (b) $7/2\sqrt{5}$

(c) $\sqrt{7}/5$ (d) इनमें से कोई नहीं

16. समीकरण $x^2-6xy+9y^2+3x-9y-4=0$ द्वारा प्रदर्शित रेखाओं के मध्य दूरी है [Kerala (Engg.) 2002]

(a) $\frac{15}{\sqrt{10}}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

17. मूल बिन्दु को वक्रों $x^2+y^2=9$ तथा $x+y=3$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से मिलाने वाली रेखाओं का समीकरण है [MP PET 2004]

(a) $(x+y)^2=9$ (b) $x^2+(3-x)^2=9$

(c) $xy=0$ (d) $(3-x)^2+y^2=9$

18. समान्तर रेखायुग्म $x^2+2xy+y^2-8ax-8ay-9a^2=0$ के बीच की दूरी है [Karnataka CET 2005]

(a) $2\sqrt{5}a$ (b) $\sqrt{10}\,a$

(c) $10\,a$ (d) $5\sqrt{2}\,a$

Critical Thinking

Objective Questions

1. एक स्थिर बिन्दु (a, b) से गुजरने वाली रेखा के ऊपर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब के पाद बिन्दु के बिन्दुपथ का समीकरण होगा

(a) $x^2+y^2-ax-by=0$ (b) $x^2+y^2+ax+by=0$

(c) $x^2+y^2-2ax-2by=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. रेखाओं $xy=0$ व $x+y=1$ द्वारा बने त्रिभुज का लम्बकेन्द्र है [IIT 1995]

(a) (0,0) (b) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

(c) $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

3. समीकरण $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्बों का गुणनफल है [Bihar CEE 1994]

(a) $\frac{ab}{\sqrt{a^2-b^2+4h^2}}$

(b) $\frac{bc}{\sqrt{a^2-b^2+4h^2}}$

(c) $\frac{ca}{\sqrt{a^2+b^2+4h^2}}$

(d) $\frac{c}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$

4. किसी समान्तर चतुर्भुज की विपरीत (opposite) सम्मुख भुजाओं के समीकरण $x^2-5x+6=0$ और $y^2-6y+5=0$ हैं, तो उनके विकर्णों के समीकरण होंगे [IIT 1994; Pb. CET 2003]

(a) $x+4y=13$ तथा $y=4x-7$

(b) $4x+y=13$ तथा $4y=x-7$

(c) $4x+y=13$ तथा $y=4x-7$

(d) $y-4x=13$ तथा $y+4x=7$

5. रेखाओं $y^2 - 9xy + 18x^2 = 0$ तथा $y = 9$ से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा

(a) $\frac{27}{4}$ वर्ग इकाई (b) 27 वर्ग इकाई

(c) $\frac{27}{2}$ वर्ग इकाई (d) इनमें से कोई नहीं

6. यदि रेखायुग्म $Ax^2 + 2Hxy + By^2 = 0, (H^2 > AB)$, रेखा $ax + by + c = 0$ के साथ एक समबाहु त्रिभुज की रचना करता है, तब $(A + 3B)(3A + B)$ = [EAMCET 2003]

(a) H^2 (b) $-H^2$

(c) $2H^2$ (d) $4H^2$

7. रेखायुग्मों $l^2x^2 - m^2y^2 - n(lx + my) = 0$ तथा $l^2x^2 - m^2y^2 + n(lx - my) = 0$ से बने चतुर्भुज का क्षेत्रफल (वर्ग इकाई में) है [EAMCET 2003]

(a) $\frac{n^2}{2|lm|}$ (b) $\frac{n^2}{|lm|}$

(c) $\frac{n}{2|lm|}$ (d) $\frac{n^2}{4|lm|}$

8. बिन्दु $P(x, y)$ का बिन्दुपथ, जो संबंध $\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} = 6$ को संतुष्ट करता है, होगा [Orissa JEE 2002]

(a) सरल रेखा (b) रेखायुग्म

(c) वृत्त (d) दीर्घवृत्त

9. समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ द्वारा प्रदर्शित रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु व मूल बिन्दु के बीच की दूरी का वर्ग है

(a) $\frac{c(a+b) - f^2 - g^2}{ab - h^2}$ (b) $\frac{c(a-b) + f^2 + g^2}{\sqrt{ab - h^2}}$

(c) $\frac{c(a+b) - f^2 - g^2}{ab + h^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

10. सरल रेखायुग्म का समीकरण, जिसमें से प्रत्येक, रेखा $y = x$ से कोण α बनाती है, होगा [MP PET 1990]

(a) $x^2 + 2xy \sec 2\alpha + y^2 = 0$

(b) $x^2 + 2xy \operatorname{cosec} 2\alpha + y^2 = 0$

(c) $x^2 - 2xy \operatorname{cosec} 2\alpha + y^2 = 0$

(d) $x^2 - 2xy \sec 2\alpha + y^2 = 0$

11. यदि रेखाओं $x^2 - 2pxy - y^2 = 0$ के अर्द्धकों का समीकरण $x^2 - 2qxy - y^2 = 0$ हो, तो [MP PET 1993; DCE 1999; RPET 2003; AIEEE 2003; Kerala (Engg.) 2005]

(a) $pq + 1 = 0$ (b) $pq - 1 = 0$

(c) $p + q = 0$ (d) $p - q = 0$

12. रेखायुग्म $y^2 \sin^2\theta - xy \sin^2\theta + x^2(\cos^2\theta - 1) = 1$ के बीच कोण है [MNR 1985; UPSEAT 2000; Kerala (Engg.) 2005]

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. रेखायुग्म $3ax^2 + 5xy + (a^2 - 2)y^2 = 0$ द्वारा निरूपित रेखायें परस्पर लम्बवत् है [AIEEE 2002]

(a) a के दो मानों के लिए (b) $\forall a$

(c) a के एक मान के लिए (d) a के किसी मान के लिए नहीं

14. रेखाओं $x^2 + 4xy + y^2 = 0$ व $x - y = 4$ द्वारा बनी आकृति होगी [Roorkee 1980]

(a) समकोण त्रिभुज (b) समद्विबाहु त्रिभुज

(c) समबाहु त्रिभुज (d) इनमें से कोई नहीं

15. समीकरण $x^2 - 3xy + \lambda y^2 + 3x - 5y + 2 = 0$ जबकि λ वास्तविक संख्या है एक रेखायुग्म निरूपित करती है। यदि इनके बीच कोण θ हो, तो $\operatorname{cosec}^2\theta$ = [EAMCET 1992]

(a) 3 (b) 9

(c) 10 (d) 100

16. यदि रेखायुग्म $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ की एक रेखा धनात्मक अक्षों के बीच के कोण को समद्विभाजित करती है, तो a, b, h निम्न सम्बन्ध को सन्तुष्ट करेंगे [Roorkee 1992]

(a) $a + b = 2|h|$ (b) $a + b = -2h$

(c) $a - b = 2|h|$ (d) $(a - b)^2 = 4h^2$

17. मूल बिन्दु को रेखा $y = mx + c$ तथा वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से मिलाने वाली रेखाएँ परस्पर लम्बवत् होंगी यदि [Roorkee 1977]

(a) $a^2(m^2 + 1) = c^2$ (b) $a^2(m^2 - 1) = c^2$

(c) $a^2(m^2 + 1) = 2c^2$ (d) $a^2(m^2 - 1) = 2c^2$

18. वक्र $x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 8y - 11 = 0$ व रेखा $y = 3x + 2$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाली रेखाओं के बीच का कोण है

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$

(b) $\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

(c) $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$

(d) $\tan^{-1}(2\sqrt{2})$

19. यदि रेखायें $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ एक समान्तर चतुर्भुज की आसन्न भुजाओं को निरूपित करती हों एवं एक विकर्ण $lx + my = 1$ हो तो दूसरा विकर्ण होगा

(a) $(am + hl)x = (bl + hm)y$

(b) $(am - hl)x = (bl - hm)y$

(c) $(am - hl)x = (bl + hm)y$

(d) इनमें से कोई नहीं

20. यदि रेखायुग्म $ax^2 + 2(a+b)xy + by^2 = 0$ एक वृत्त के व्यासों के अनुदिश हैं तथा वृत्त को चार वृत्त खंडों में विभाजित करते हैं कि इनमें से एक वृत्तखंड का क्षेत्रफल एक अन्य वृत्तखंड के क्षेत्रफल का तिगुना है, तो [AIEEE 2005]

(a) $3a^2 + 10ab + 3b^2 = 0$

(b) $3a^2 + 2ab + 3b^2 = 0$

(c) $3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0$

(d) $3a^2 - 2ab + 3b^2 = 0$

21. उस रेखायुग्म का समीकरण, जो कि x- अक्ष के समान्तर है तथा वृत्त $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$ को स्पर्श करती है [Kerala (Engg.) 2002]

(a) $y^2 - 4y - 21 = 0$ (b) $y^2 + 4y - 21 = 0$

(c) $y^2 - 4y + 21 = 0$ (d) $y^2 + 4y + 21 = 0$

22. यदि $ay^4 + bxy^3 + cx^2y^2 + dx^3y + ex^4 = 0$ द्वारा निरूपित कोई दो रेखायें लम्बवत् हों, तो प्रतिबन्ध होगा [Kurukshetra CEE 1998]

(a) $(b+d)(ad+be) + (e-a)^2(a+c+e) = 0$

(b) $(b+d)(ad+be) + (e+a)^2(a+c+e) = 0$

(c) $(b-d)(ad-be) + (e-a)^2(a+c+e) = 0$

(d) $(b-d)(ad-be) + (e+a)^2(a+c+e) = 0$

23. समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ द्वारा प्रदर्शित रेखायें मूल बिन्दु से समान दूरी पर होंगी, यदि

(a) $f^2 + g^2 = c(b-a)$ (b) $f^4 + g^4 = c(bf^2 + ag^2)$

(c) $f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2)$ (d) $f^2 + g^2 = af^2 + bg^2$

24. रेखाओं $xy + 2x + 2y + 4 = 0$ व $x + y + 2 = 0$ द्वारा निरूपित त्रिभुज का परिकेन्द्र होगा [EAMCET 1994]

(a) (0, 0) (b) (–2, – 2)

(c) (–1, –1) (d) (–1, –2)

25. रेखाओं $x^2 - y^2 + 2y = 1$ तथा $x + y = 3$ के कोण अर्द्धकों द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है [IIT Screening 2004]

(a) 2 (b) 3

(c) 4 (d) 6

Answers

रेखायुग्म के समीकरण

1	d	2	a	3	d	4	b	5	c
6	a	7	a	8	a	9	c	10	d
11	a	12	d	13	c	14	a	15	a
16	a	17	c	18	a	19	d	20	a
21	a	22	c	23	d	24	b	25	b
26	c	27	a	28	c	29	a	30	d
31	d	32	c	33	a	34	d	35	a
36	b	37	c	38	a	39	b	40	a
41	c	42	c	43	c	44	b	45	d
46	a	47	c	48	b	49	c	50	c
51	b	52	c	53	b	54	a	55	d
56	a	57	d	58	a	59	c	60	a
61	b	62	d	63	c	64	b	65	b
66	b	67	a	68	c	69	a	70	b
71	a	72	c	73	a				

रेखायुग्म के बीच का कोण, समान्तर व लम्बवत् रेखाओं का प्रतिबन्ध

1	b	2	a	3	a	4	b	5	a
6	a	7	a	8	a	9	c	10	c
11	d	12	c	13	c	14	d	15	d
16	c	17	c	18	a	19	c	20	c
21	a	22	a	23	a	24	d	25	a
26	b	27	c	28	b	29	a	30	b
31	a	32	a	33	a	34	d	35	b
36	d	37	b	38	c	39	a	40	a
41	b	42	c	43	a	44	a		

रेखाओं के कोणार्द्धकों के समीकरण एवं रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु

1	c	2	a	3	a	4	c	5	c
6	b	7	d	8	a	9	a	10	a
11	c	12	d	13	d	14	d	15	c
16	c								

किसी वक्र व रेखा के प्रतिच्छेद बिन्दु को मूल बिन्दु से मिलाने वाली रेखाओं का समीकरण, रेखायुग्म के बीच की दूरी

1	b	2	a	3	d	4	b	5	c
6	a	7	d	8	c	9	b	10	a
11	b	12	b	13	c	14	c	15	b
16	c	17	c	18	d				

Critical Thinking Questions

1	a	2	a	3	d	4	c	5	a
6	d	7	a	8	b	9	a	10	d
11	a	12	d	13	a	14	c	15	c
16	b	17	c	18	b	19	b	20	b
21	a	22	a	23	c	24	c	25	a

Answers and Solutions

रेखायुग्म के समीकरण

1. (d) दिया गया समीकरण $2xy=0 \Rightarrow x=0$ व $y=0$
अतः दो परस्पर लम्बवत् रेखायें हैं।

2. (a) यहाँ, $m_1=m_2^2 \Rightarrow m_2^2+m_2=\frac{-2h}{b}$ .....(i)
व $m_2^2m_2=\frac{a}{b} \Rightarrow m_2=\left(\frac{a}{b}\right)^{1/3}$ .....(ii)
m_2 का यह मान (i) में रखने पर
$$\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{1/3}\right\}^2+\left(\frac{a}{b}\right)^{1/3}=\frac{-2h}{b}$$
दोनों तरफ घन करने पर,
$$\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}+3\left(\frac{a}{b}\right)^{2/3}.\left(\frac{a}{b}\right)^{1/3}.\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{a}{b}\right)^{1/3}\right\}=\frac{-8h^3}{b^3}$$
$$\Rightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}-\frac{6ah}{b^2}=\frac{-8h^3}{b^3}\quad\left\{\because\left(\frac{a}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{a}{b}\right)^{1/3}=\frac{-2h}{b}\right\}$$
$\Rightarrow ab(a+b)-6abh+8h^3=0$.

3. (d) $x^2+y^2+xy=0 \Rightarrow (x-\omega y)(x-\omega^2 y)=0$
$1, \omega, \omega^2$ इकाई के घनमूल हैं
अतः यह रेखायें काल्पनिक हैं।

4. (b) $hxy+gx+fy+c=0$, $\Delta'=0$ का प्रयोग करने पर,
अर्थात् $a'b'c'+2f'g'h'-a'f'^2-b'g'^2-c'h'^2=0$
यहाँ $h'=\frac{h}{2}, g'=\frac{g}{2}, f'=\frac{f}{2}, c'=c, a'=0, b'=0$
अतः $\frac{hgf}{4}-\frac{ch^2}{4}=0$ या $fg=ch$.

5. (c) लम्बवत् रेखायें $bx^2-2hxy+ay^2=0$ होंगी।

6. (a) हम जानते हैं $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$
$\Rightarrow (3)(-3)(-75)+2(15)(-20)(h)$
$-3(15)^2-(-3)(-20)^2-(-75)h^2=0$
$\Rightarrow 675-600h-675+1200+75h^2=0 \Rightarrow h=4,4$.

7. (a) मूल बिन्दु से जाने वाली एवं दी गयी रेखाओं के समान्तर रेखायें $y=m_1x$ व $y=m_2x$ हैं। अतः रेखायुग्म में प्रदर्शित करने पर $(y-m_1x)(y-m_2x)=0$
$\Rightarrow m_1m_2x^2-(m_1+m_2)xy+y^2=0$

8. (a) $ab(x^2-y^2)+(a^2-b^2)xy=0$
$\Rightarrow abx^2+a^2xy-b^2xy-aby^2=0$
$\Rightarrow ax(bx+ay)-by(bx+ay)=0$
$\Rightarrow (bx+ay)(ax-by)=0$
$\Rightarrow bx+ay=0$ व $ax-by=0$ दो सरल रेखायें हैं।

9. (c) $(x-5)^2+(x-5)(y-6)-2(y-6)^2=0$
$\Rightarrow x^2+25-10x+xy+30-6x-5y-2y^2-72+24y=0$
$\Rightarrow x^2+xy-2y^2-16x+19y-17=0$
स्पष्टतः यह वृत्त नहीं है। यह रेखायुग्म प्रदर्शित करता है तथा $x=5, y=6$ पर समीकरण शून्य हो जाता है। अतः यह (5, 6) से गुजरता है।

10. (d) x व y में द्विघात समघात समीकरण हमेशा मूल बिन्दु से गुजरने वाली दो सरल रेखाओं को निरूपित करता है।

11. (a) $-6.10k+\frac{11.1.31}{4}-6\left(\frac{31}{2}\right)^2+10\left(\frac{1}{2}\right)^2-k\left(\frac{11}{2}\right)^2=0$
$\Rightarrow -k\frac{361}{4}=\frac{5415}{4} \Rightarrow k=-15$.

12. (d) यहाँ $m_1+m_2=\frac{-2h}{b}$ .....(i)
व $m_1m_2=\frac{a}{b}$ .....(ii)
एवं दिया गया है $4ab=3h^2$. अब हमें $\frac{m_1}{m_2}$ ज्ञात करना है।
अतः (i) व (ii) की सहायता से,
$(m_1-m_2)^2=\frac{4h^2-4ab}{b^2}=\frac{4h^2-3h^2}{b^2}=\frac{h^2}{b^2}$
$\Rightarrow m_1-m_2=\frac{h}{b}$ .....(iii)
अब (i) व (iii) को हल करने पर, $m_1=\frac{-h}{2b}$ व $m_2=\frac{-3h}{2b}$;
अतः $m_1:m_2=1:3$.

13. (c) विकल्पों से, स्पष्टतः $a(b-c)x-c(a-b)y=0$ व $x-y=0$ अभीष्ट रेखायें हैं।

14. (a) यह आधारभूत संकल्पना है।

15. (a) $4x^2+12xy+9y^2=0$
यहाँ $h^2-ab=36-36=0$, $\left(\tan\theta=\frac{\pm 2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\text{ से}\right)$
अतः वास्तविक व सम्पाती हैं।

16. (a) हम जानते हैं कि समीकरण
$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$
पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्बों का समीकरण युग्म $bx^2-2hxy+ay^2=0$ होगा। अतः अभीष्ट समीकरण $12x^2+10xy+2y^2=0$ या $6x^2+5xy+y^2=0$ होगा।

17. (c) विकल्प (d)नहीं हो सकता क्योंकि यह एक वृत्त है।
(a) के लिए $\Delta\neq 0$, (b) के लिए $\Delta\neq 0$ (c) के लिये $\Delta=0$.

18. (a) रेखायें सम्पाती होंगी यदि $H^2-AB=0$,
अतः $\left\{\frac{a(b+c)}{2}\right\}^2-a^2(bc)=0 \Rightarrow a^2(b-c)^2=0$
$\Rightarrow a=0$ या $b=c$.

19. (d) यदि यह समीकरण दो सम्पाती रेखायें प्रदर्शित करता है तो $h^2-ab=0$ अतः $h^2-4=0$ या $h=\pm 2$.

20. (a) y का मान समीकरण $ax^2+2hxy+by^2=0$ में रखने पर,
$\Rightarrow ax^2+2h(mx)x+b(mx)^2=0 \Rightarrow a+2hm+bm^2=0$.

21. (a) समीकरण $2x^2 - xy - 6y^2 + 7x + 21y - 15 = 0$ है।
अतः मूल बिन्दु से जाने वाली तथा दी गयी रेखाओं के समान्तर रेखायें द्वितीय घात के समाघातीय समीकरण द्वारा निरूपित होंगी अर्थात् $2x^2 - xy - 6y^2 = 0$.

22. (c) यहाँ समीकरण $2x^2 + 4xy - py^2 + 4x + qy + 1 = 0$ है।
रेखायें लम्बवत् होंगी यदि $a + b = 0$
$\Rightarrow 2 - p = 0 \Rightarrow p = 2$
और यह दो रेखायें निरूपित करेगा यदि
$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$
$$\Rightarrow 2(-2)(1) + 2\left(\frac{q}{2}\right)(2)(2) - 2\left(\frac{q}{2}\right)^2 + 2(2)^2 - 1(2)^2 = 0$$
$\Rightarrow q^2 - 8q = 0 \Rightarrow q = 0$ या 8.

23. (d) प्रतिबन्ध $\Delta = 0$ से,
$$\Rightarrow ACF + 2.\frac{E}{2}.\frac{D}{2}.B - A.\left(\frac{E}{2}\right)^2 - C.\left(\frac{D}{2}\right)^2 - F.(B)^2 = 0.$$
$\therefore$ विकल्प (d) सत्य है।

24. (b) $m_1 = 3,\ m_2 = -\frac{1}{3}$ अतः रेखायें $y = 3x, y = -\frac{1}{3}x$ हैं।
दोनों रेखाओं का गुणा करने पर
$(y - 3x)(3y + x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 8xy - 3y^2 = 0$.

25. (b) $xy + a^2 = a(x + y)$ प्रथम रेखायुग्म के लिये $\Delta = 0$ का परीक्षण करें।

26. (c) यह दिया गया है कि $m_2 = \lambda m_1 \Rightarrow m_1 + \lambda m_1 = \frac{-2h}{b}$
$$\Rightarrow m_1 = \frac{-2h}{b(1+\lambda)} \quad .....(i)$$
व $m_1.\lambda m_1 = \frac{a}{b} \Rightarrow m_1 = \sqrt{\frac{a}{b\lambda}}$ .....(ii)
अतः (i) व (ii) से, $\sqrt{\frac{a}{b\lambda}} = \frac{-2h}{b(1+\lambda)}$
दोनों तरफ वर्ग करने पर, $4\lambda h^2 = ab(1+\lambda)^2$.

27. (a) दी गयी रेखाओं के समीकरण
$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ .....(i)
$a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = 0$ .....(ii)
माना दोनों की उभयनिष्ठ रेखा $y = mx$ है तो यह उपरोक्त दोनों रेखाओं के समीकरण को सन्तुष्ट करेगी,
अतः $a + 2mh + bm^2 = 0$ .....(iii)
व $a' + 2mh' + b'm^2 = 0$ .....(iv)
अब (iii) व (iv) से m का विलोपन करने पर,
$$\frac{m^2}{2ha' - 2h'a} = \frac{-m}{ba' - b'a} = \frac{1}{2bh' - 2b'h}$$
$$\Rightarrow m^2 = \frac{ha' - h'a}{bh' - b'h} \quad .....(v)$$
$$\text{व } m^2 = \frac{(ab' - ba')^2}{4(bh' - b'h)^2} \quad .....(vi)$$
(v) व (vi) से अभीष्ट प्रतिबन्ध ज्ञात होता है।

28. (c) रेखायें समान्तर होंगी यदि $h^2 = ab, af^2 = bg^2$
या $\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f} \Rightarrow 4f^2 = 9g^2$
$\Rightarrow f = \frac{3}{2}g \Rightarrow g = 2,\ f = 3$ (माना)
अब $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$
$\Rightarrow 4 \times 9 \times c + 2 \times 3 \times 2 \times 6 - 4(3)^2 - 9(2)^2 - c(6)^2 = 0$
$\Rightarrow c$ कोई भी संख्या है।

29. (a) प्रतिबन्ध $\Delta = 0$ से, अर्थात्
$$(-1)(2)(-8) + 0 - 0 - 2(3)^2 - (-8)\left(\frac{-1}{2}\right)^2 = 16 - 18 + 2 = 0.$$
अतः समीकरण रेखायुग्म प्रदर्शित करता हैं।

30. (d) $x^2 + 6xy = 0 \Rightarrow x(x + 6y) = 0$
$\Rightarrow x = 0$ व $x + 6y = 0$ दो सरल रेखायें हैं।
अतः $x = 0$, $y -$ अक्ष को निरूपित करता है।

31. (d) $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2xy - 3xy + 6y^2 = 0$
$\Rightarrow x(x - 2y) - 3y(x - 2y) = 0$
$\Rightarrow x - 2y = 0$ व $x - 3y = 0$.

32. (c) $$ab(0) + 2\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right)(0) - a\left(\frac{c}{2}\right)^2 - b\left(\frac{c}{2}\right)^2 - 0(0)^2 = 0$$
$\Rightarrow ac^2 + bc^2 = 0 \Rightarrow c^2(a + b) = 0 \Rightarrow c(a + b) = 0$.

33. (a) समीकरण $ax^2 + (a+b)xy + by^2 + x + y = 0$ को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है $(ax + by + 1)(x + y) = 0$.

34. (d) $x^2 - 7xy + 12y^2 = 0 \Rightarrow (x - 3y)(x - 4y) = 0$
अतः रेखायें प्रतिच्छेदी हैं परन्तु लम्बवत् नहीं हैं।

35. (a) प्रतिबंध $\Delta = 0$ से।

36. (b) $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$
$$\Rightarrow \lambda(2)(3) + 2\left(\frac{-7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right) - \lambda\left(\frac{-7}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{-5}{2}\right)^2 = 0$$
$$\Rightarrow 6\lambda + \frac{175}{4} - \frac{49}{4}\lambda - \frac{25}{2} - \frac{75}{4} = 0$$
$\Rightarrow 25\lambda = 50 \Rightarrow \lambda = 2$.

37. (c) समीकरण $x^2 + 2xy\cot\theta - y^2 = 0$ द्वारा प्रदर्शित रेखायें $ax + hy \pm y\sqrt{h^2 - ab} = 0$ हैं।
$\Rightarrow x + y\cot\theta \pm y\sqrt{\cot^2\theta + 1} = 0$
$$\Rightarrow x + y\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \pm \frac{1}{\sin\theta}\right) = 0 \Rightarrow x\sin\theta + y(\cos\theta \pm 1) = 0$$
अतः एक रेखा $x\sin\theta + y(\cos\theta + 1) = 0$ है।

38. (a) रेखाओं के समीकरण $(px + qy)(py - qx) = 0$ हैं।
अतः एक रेखा $px + qy = 0$ है।

39. (b) समीकरण $3x^2 - 8xy + 5y^2 = 0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के समीकरण $3x - 5y = 0$ व $x - y = 0$ हैं।
अतः (1,2) से गुजरने वाली एवं दी गयी रेखाओं पर लम्ब रेखाओं के समीकरण $x + y - 3 = 0$ व $5x + 3y - 11 = 0$ हैं।

40. (a) $f(x, y) = 0$ से $\Delta = 0$ प्राप्त होता है। यह सरल रेखायुग्म है। चूँकि $h^2 = ab$, अतः रेखायें समान्तर हैं।

41. (c) यह स्पष्ट है।

42. (c) $x^2 + ky^2 + 4xy = 0$ को संपाती रेखायुग्म प्रदर्शित करने के लिए यह पूर्ण वर्ग होना चाहिए। अतः $k = 4$.

43. (c) दी गयी रेखाओं का संयुक्त समीकरण $(x+y-1)(x-y-4)=0$ होगा।

44. (b) $1\times2\times2+2\times\left(\frac{-5}{2}\right)\times\frac{3}{2}\times\left(\frac{-\lambda}{2}\right)-1\times\frac{25}{4}-2\times\frac{9}{4}-2\frac{\lambda^2}{4}=0$

$\Rightarrow \lambda=3,\frac{9}{2}$.

45. (d) $(2)(3)(\lambda)+2(7)(4)\frac{7}{2}-2(7)^2-3(4)^2-\lambda\left(\frac{7}{2}\right)^2=0$

$\Rightarrow 6\lambda+196-98-48-\frac{49\lambda}{4}=0 \Rightarrow \lambda=8$.

46. (a) $4\lambda h^2=ab(1+\lambda)^2$ से, {यहाँ $\lambda=2$}

$\therefore\ 4\times2\times\left(\frac{h}{2}\right)^2=1\times2(1+2)^2 \Rightarrow h^2=9 \Rightarrow h=\pm3$.

47. (c) बिन्दु (2,–3) वक्र $kx^2-3y^2+2x+y-2=0$ पर स्थित होगा, यदि $(2)^2k-3(-3)^2+2.2-3-2=0$

$\therefore 4k-28=0 \Rightarrow k=7$.

48. (b) दी गई रेखा के समीकरण $Lx^2-10xy+12y^2+5x-16y-3=0$ की मानक समीकरण, $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ से तुलना करने पर,

$\therefore\ a=L, h=-5, b=12, g=\frac{5}{2}, f=-8, c=-3$

रेखायुग्म निरूपित करने के लिये

$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$

$\Rightarrow -36L+200-64L-75+75=0$

$\Rightarrow -100L+200=0,\ \therefore L=2$.

49. (c) प्रवणतायें $\frac{m_1}{m_2}=1:3$

$m_1=m,\ m_2=3m$

$\therefore m_1+m_2=-\frac{2h}{b}$ .....(i)

व $m_1.m_2=\frac{a}{b}$ .....(ii)

समीकरण (i) से, $m+3m=-\frac{2h}{b}$ या $m=\frac{-h}{2b}$

समीकरण (ii) से, $m.3m=\frac{a}{b}$

$3.\frac{h^2}{4b^2}=\frac{a}{b} \Rightarrow \frac{h^2}{ab}=\frac{4}{3}$.

ट्रिक : यदि दो रेखाओं की प्रवणताएँ $1:n$ में हैं, तो $\frac{h^2}{ab}=\frac{(n+1)^2}{4n}=\frac{(3+1)^2}{4.3}=\frac{4}{3}$.

50. (c) यहाँ, $m_1+m_2=-4$ .....(i)

व $m_1m_2=a$ .....(ii)

दिया है, $m_1=3m_2$

(i) से, $3m_2+m_2=-4 \Rightarrow m_2=-1$

अतः $m_1=-3$. अतः (ii) से $a=3$.

51. (b) मानक समीकरण से तुलना करने पर $a=4$ और $b=-7$. माना m_1, m_2 दी गई रेखाओं की प्रवणता है।

$(m_1+m_2)=-\frac{2h}{b}=\frac{2h}{7}$ तथा $m_1m_2=\frac{a}{b}=\frac{4}{-7}$.

$\because m_1+m_2=m_1m_2$, $\therefore \frac{2h}{7}=\frac{4}{-7} \Rightarrow h=-2$.

52. (c) यहाँ, $m_1+m_2=\frac{-2h}{b}$ व $m_1m_2=\frac{a}{b}$

दिया है, $m_1=2m_2$

$\therefore 3m_2=\frac{-2h}{b}$ तथा $2m_2^2=\frac{a}{b}$

$\Rightarrow 2\left(\frac{-2h}{3b}\right)^2=\frac{a}{b} \Rightarrow 8h^2=9ab$.

53. (b) $\begin{vmatrix}1 & k/2 & -5/2\\ k/2 & 1 & -7/2\\ -5/2 & -7/2 & 6\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow \left(6-\frac{49}{4}\right)-\frac{k}{2}\left(\frac{6k}{2}-\frac{35}{4}\right)-\frac{5}{2}\left(-\frac{7k}{4}+\frac{5}{2}\right)=0$

$\Rightarrow 6k^2-35k+50=0 \Rightarrow k=\frac{10}{3}$.

54. (a) दिये गये समीकरण की मानक समीकरण से तुलना करने पर, $a=2, f=1, b=-k$, $g=2$, $c=-1$ तथा $h=2$.

$\because$ समीकरण रेखायुग्म प्रदर्शित करता है

अतः $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$

$\Rightarrow 2k+8-2+4k+4=0 \Rightarrow 6k=-10 \Rightarrow k=-\frac{5}{3}$.

55. (d) रेखाओं के समीकरण $x^2+xy-12y^2=0$ हैं।

$\Rightarrow x^2+4xy-3xy-12y^2=0 \Rightarrow (x+4y)(x-3y)=0$

अतः रेखाओं के पृथक् समीकरण हैं, $x+4y=0$ व $x-3y=0$.

56. (a) $\begin{vmatrix}2 & 5/2 & 3\\ 5/2 & 3 & 7/2\\ 3 & 7/2 & k\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}4 & 5 & 6\\ 5 & 6 & 7\\ 6 & 7 & 2k\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow 4(12k-49)-5(10k-42)+6(35-36)=0$

$\Rightarrow 48k-196-50k+210+210-216=0 \Rightarrow k=4$.

57. (d) $\begin{vmatrix}3 & 1/2 & -3/2\\ 1/2 & -1 & 3\\ -3/2 & 3 & k\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}6 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 6\\ -3 & 6 & 2k\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow 6(-4k-36)-1(2k+18)-3(6-6)=0$

$\Rightarrow -24k-216-2k-18=0 \Rightarrow k=-9$.

58. (a) रेखायुग्म के लिये,

$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$

$(3)(2)(2)+2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)-3\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\left(\frac{7}{2}\right)^2=0$.

अतः दिया गया समीकरण रेखायुग्म को प्रदर्शित करता है।

59. (c) द्विघात समीकरण की दो रेखाओं को प्रदर्शित करने का प्रतिबन्ध $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ है।

$\Rightarrow p^2+2(-1)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)-p(1)-1\left(\frac{1}{4}\right)-p\left(\frac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow p^2+\frac{1}{2}-p-\frac{1}{4}-\frac{p}{4}=0 \Rightarrow p^2-\frac{5p}{4}+\frac{1}{4}=0$

$\Rightarrow 4p^2-5p+1=0 \Rightarrow 4p^2-4p-p+1=0$

$\Rightarrow (4p-1)(p-1)=0 \Rightarrow p=\frac{1}{4},1.$

60. (a) रेखायुग्म के लिए,

$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

यहाँ, $a = 2$, $b = 3$, $c = k$, $f = -7/2$, $g = -9/2$, $h = 7/2$.

$\Rightarrow 2.3.k + 2(-7/2)(-9/2)(7/2) - 2(-7/2)^2 - 3(-9/2)^2 - k(7/2)^2 = 0$

$\Rightarrow 6k + \frac{441}{4} - \frac{49}{2} - \frac{243}{4} - \frac{49k}{4} = 0$

$\Rightarrow 24k + 441 - 98 - 243 - 49k = 0$

$\Rightarrow -25k + 100 = 0 \Rightarrow k = 4$.

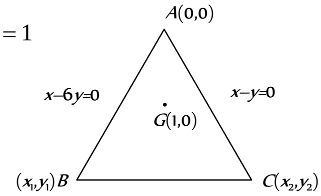
61. (b) रेखायुग्म के लिए आवश्यक शर्त ,

$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

यहाँ, $a = 12$, $h = -5$, $b = 2$, $g = 11/2$, $f = -5/2$, $c = k$.

हल करने पर $k = 2$.

62. (d) दी गयी दो रेखायें $x - 6y = 0$ व $x - y = 0$ है।



हम जानते हैं $\frac{0 + x_1 + x_2}{3} = 1$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 3$ .....(i)

व $y_1 + y_2 = 0$ .....(ii)

एवं $x_1 - 6y_1 = 0$ .....(iii)

व $x_2 - y_2 = 0$ .....(iv)

[चूँकि बिन्दु (x,y) व (x_2, y_2) ,रेखाओं AB व AC पर स्थित हैं]

अब उपर्युक्त समीकरणों को सरल करने पर B व C के निर्देशांक क्रमशः $\left(\frac{18}{5}, \frac{3}{5}\right)$ व $\left(\frac{-3}{5}, \frac{-3}{5}\right)$ प्राप्त होते हैं।

अतः तीसरी भुजा BC का समीकरण $2x - 7y - 3 = 0$ होगा।

63. (c) दिया गया समीकरण $4x^2 - 24xy + 11y^2 = 0$ है।

$4x^2 - 22xy - 2xy + 11y^2 = 0$

$2x(x - 11y) - 2y(x - 11y) = 0 \Rightarrow (2x - 2y)(x - 11y) = 0$

$2x - 2y = 0$ या $x - 11y = 0$, $\therefore$ $y = x$ या $y = \frac{x}{11}$

अतः दोनों रेखायें मूलबिन्दु से होकर गुजरती हैं।

64. (b) $m_2 = 5m_1 \Rightarrow m_1 + 5m_1 = \frac{-2h}{b}$

$\Rightarrow m_1 = \frac{-2h}{6b}$ .....(i)

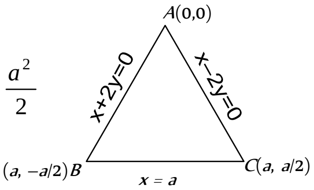
तथा $m_1.5m_1 = \frac{a}{b} \Rightarrow m_1 = \sqrt{\frac{a}{5b}}$ .....(ii)

(i) व (ii) से, $\frac{-2h}{6b} = \sqrt{\frac{a}{5b}} \Rightarrow \frac{4h^2}{36b^2} = \frac{a}{5b} \Rightarrow 9ab = 5h^2$.

65. (b) इस स्थिति में x^2 व y^2 के गुणांक आपस में बदल जाते है तथा h का चिन्ह परिवर्तित हो जाता है।

66. (b) चित्र के अनुसार,

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & -\frac{a}{2} & 1 \\ a & \frac{a}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{a^2}{2}$



67. (a) $\tan\alpha \tan\beta = m_1 m_2 = \frac{a}{b} = -\frac{6}{7}$.

68. (c) हम जानते हैं कि $m_1 - m_2 = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2}$

$= \sqrt{\left(\frac{2\tan\theta}{\sin^2\theta}\right)^2 - 4\left(\frac{\sec^2\theta - \sin^2\theta}{\sin^2\theta}\right)}$

$= \sqrt{\frac{4\tan^2\theta}{\sin^4\theta} - 4(\sec^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta - 1)} = 2$.

69. (a) दिया गया समीकरण $x^2 - y^2 - x - \lambda y - 2 = 0$ है।

यहाँ, $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$, $h = 0$, $g = \frac{-1}{2}$, $f = \frac{-\lambda}{2}$

यदि दिया गया समीकरण रेखायुग्म प्रदर्शित करता है तो, $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

$2 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \frac{\lambda^2}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \lambda^2 = 9, \lambda = \pm 3$, अर्थात् $(3, -3)$.

70. (b) दिया गया समीकरण $ax^2 - y^2 + 4x - y = 0$ है।

यहाँ $A = a, B = -1, H = 0, G = 2, F = \frac{-1}{2}, C = 0$

यदि यह समीकरण रेखायुग्म प्रदर्शित करता है तो, $ABC + 2FGH - AF^2 - BG^2 - CH^2 = 0$

$0 - 0 - a\left(\frac{1}{4}\right) - (-1)(4) = 0 \Rightarrow \frac{-a}{4} + 4 = 0 \Rightarrow a = 16$.

71. (a) दिया गया रेखायुग्म $6x^2 - xy + 4cy^2 = 0$ है।

रेखा की प्रवणता = $\frac{-3}{4} = m_1$ (माना)

रेखाओं की प्रवणता m_1 व m_2 का गुणनफल

$m_1 m_2 = \frac{a}{b} = \frac{6}{4c} = \frac{3}{2c}$

$\therefore m_2 = \frac{3/2c}{-3/4} = \frac{-2}{c}$, साथ ही $m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b} = \frac{1}{4c}$

$\Rightarrow \frac{-3}{4} - \frac{2}{c} = \frac{1}{4c} \Rightarrow -3c - 8 = 1 \Rightarrow c = -3$.

72. (c) दिया गया रेखायुग्म $x^2 - 2cxy - 7y^2 = 0$ है।

दिया है , $m_1 + m_2 = 4m_1 m_2 \Rightarrow \frac{-2c}{7} = \frac{-4}{7} \Rightarrow c = 2$

$\left[\because m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b} = \frac{-2c}{7}; m_1 m_2 = \frac{-1}{7}\right]$

73. (a) माना m_1, m_2 प्रवणतायें हैं

$\therefore m_1 + m_2 = -\frac{2b}{h}$ व $m_1 m_2 = \frac{b}{a}$

साथ ही, $m_2 = 2m_1$

$\therefore 3m_1 = -\frac{2b}{h}$ व $2m_1^2 = \frac{b}{a}$

$\therefore \frac{9m_1^2}{2m_1^2} = \frac{4b^2}{h^2} \times \frac{a}{b} \Rightarrow ab : h^2 = 9 : 8$.

रेखायुग्म के बीच का कोण, समान्तर व लम्बवत् रेखाओं के लिए प्रतिबन्ध

1. (b) यहाँ समीकरण $ax^2 - bxy - y^2 = 0$ है एवं दिया गया है $m_1 = \tan\alpha$ व $m_2 = \tan\beta$ एवं हम जानते हैं कि

$$m_1 + m_2 = \frac{b}{-1} = \tan\alpha + \tan\beta$$

व $m_1 m_2 = \frac{a}{-1} = \tan\alpha.\tan\beta$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{-b}{1-(-a)} = \frac{-b}{(1+a)}.$$

2. (a) माना दोनों रेखाओं के बीच कोण α है, तो

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{\sec^2\theta - 1}}{1+1}\right) = \theta .$$

3. (a) स्पष्टतः $\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{\frac{49}{4} - 12}}{3+4}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

एवं $\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{\frac{25}{4} - 6}}{6+1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

अतः $\theta_1 = \theta_2$.

4. (b) $\tan 45° = \frac{2\sqrt{\frac{1}{4} - ab}}{a+b}$

$\Rightarrow (a+b)^2 = (1 - 4ab) \Rightarrow a^2 + b^2 + 6ab - 1 = 0$,

जो कि स्पष्टतः $a = 1$ व $b = -6$ द्वारा सन्तुष्ट होता है।

5. (a) दी गयी रेखायें लम्बवत् नहीं है अर्थात् $a \ne -b$ तथा $\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f}$ से $(3x + 4y + 6)(3x + 4y + 1) = 0$

$\Rightarrow \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{21}{28}$. अतः रेखायें समान्तर हैं।

6. (a) $\tan\theta = \pm\frac{2\sqrt{4-3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ या $\theta = 30°$

अतः न्यूनकोण $30°$ या $\frac{\pi}{6}$ एवं अधिककोण $180^o - 30^o = 150^o$ है।

7. (a) $xy + y = 0$ द्वारा निरूपित रेखायें $x = -1$ व $y = 0$ हैं। स्पष्टतः रेखा $y = 0$, y-अक्ष के साथ $90°$ का कोण बनाती है एवं रेखा $x = -1$, y-अक्ष के साथ $0°$ का कोण बनाती है।

8. (a) यहाँ $\tan 2A = \frac{2\sqrt{\frac{k^2}{4} + \tan^2 A}}{1 - \tan^2 A}$

$$\Rightarrow \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} = \frac{2\sqrt{\frac{k^2}{4} + \tan^2 A}}{1 - \tan^2 A}$$

$$\Rightarrow \frac{k^2}{4} + \tan^2 A = \tan^2 A \Rightarrow k = 0 .$$

9. (c) $xy = 0$ दोनों अक्षों को निरूपित करता है अतः इनके बीच का कोण $90°$ है।

10. (c) $\tan\theta = \pm 2\frac{\sqrt{h^2 - ab}}{a+b} = \pm 2\frac{\sqrt{144 - 44}}{15} = \pm\frac{4}{3}$.

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\pm\frac{4}{3}\right)$.

11. (d) $m_1 = \tan\alpha$ व $m_2 = \tan\beta$

$\Rightarrow \cot\alpha = \frac{1}{m_1}$ व $\cot\beta = \frac{1}{m_2}$

अतः $\cot^2\alpha + \cot^2\beta = \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} = \frac{m_1^2 + m_2^2}{(m_1 m_2)^2}$

$$= \frac{(m_1 + m_2)^2 - 2m_1 m_2}{(m_1 m_2)^2} = \frac{(3)^2 - 2(2)}{(2)^2} = \frac{5}{4} .$$

12. (c) दिये गये वक्रों के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से जाने वाला कोई वक्र

$2x^2 + 3y^2 + 10x + \lambda(3x^2 + 5y^2 + 16x) = 0$ .....(i)

यदि एक समीकरण मूल बिन्दु से जाने वाली दो सरल रेखायें निरूपित करता है, तो इसे द्विघात समघात समीकरण होना चाहिए। अतः (i) से x का गुणांक शून्य होना चाहिए।

$\therefore 10 + 16\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-10}{16} = \frac{-5}{8}$

λ का मान (i) में रखने पर हमें रेखायुग्म $x^2 - y^2 = 0$ प्राप्त होता है जो कि स्पष्टतः परस्पर लम्बवत् रेखाओं का युग्म है।

13. (c) रेखायें

$[(l + \sqrt{3}m)x + (m - \sqrt{3}l)y][(l - \sqrt{3}m)x + (m + \sqrt{3}l)y] = 0$

व $L_3 = lx + my + n = 0$.

L_1 व L_2 ऊपर दी गयी दो रेखायें है।

$$S_1 = -\frac{(l + \sqrt{3}m)}{(m - \sqrt{3}l)},\quad S_2 = -\frac{(l - \sqrt{3}m)}{(m + \sqrt{3}l)},\quad S_3 = -\frac{l}{m}$$

(जहाँ S_1, S_2 व S_3 रेखाओं की प्रवणतायें हैं।)

$$\theta_{13} = \tan^{-1}\left[\frac{-\left(\frac{l + \sqrt{3}m}{m - \sqrt{3}l}\right) + \frac{l}{m}}{1 + \left(\frac{l + \sqrt{3}m}{m - \sqrt{3}l}\right)\frac{l}{m}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}m^2 - \sqrt{3}l^2}{l^2 + m^2}\right) = 60°$$

$$\theta_{23} = \tan^{-1}\left[\frac{-\left(\frac{l - \sqrt{3}m}{m + \sqrt{3}l}\right) + \frac{l}{m}}{1 + \left(\frac{l - \sqrt{3}m}{m + \sqrt{3}l}\right)\left(\frac{l}{m}\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}m^2 + \sqrt{3}l^2}{m^2 + l^2}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60°$$

अतः त्रिभुज समबाहु है।

14. (d) $\tan\theta = \frac{2\sqrt{\left[\frac{(1-\lambda)^2}{2}\right]^2 + \lambda^2}}{\lambda - \lambda} \Rightarrow \theta = 90°$.

15. (d) $m_1 + m_2 = \frac{2\tan A}{-1} = 4$

$\Rightarrow \tan A = -2 \Rightarrow \angle A = \tan^{-1}(-2)$.

16. (c) $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{4h^2 - 4ab}}{a+b}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3a^2 + 3b^2 + 10ab - 4ab}}{a+b}\right) = 60°$.

17. (c) $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{1-\sin^2\theta}}{2\sin\theta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$\tan^{-1}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right\} = \frac{\pi}{2} - \theta$.

18. (a) वक्र को समाघातीय बनाने पर,

$3x^2 + 4xy - 4x(2x + y) + (2x + y)^2 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 + 4xy - 8x^2 - 4xy + 4x^2 + y^2 + 4xy = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4xy - y^2 = 0$

अतः रेखाओं के बीच कोण $\tan\theta = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b}$

$= \frac{2\sqrt{4+1}}{0} = \infty$ अर्थात् रेखायें लम्बवत् हैं।

19. (c) $\alpha = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{\frac{49}{4} - 4}}{5} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{33}}{5}$.

20. (c) $a + b = 0$ से,

21. (a) $a + b = 0$ से,

22. (a) कोण $= \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{\frac{25}{4} - 6}}{2+3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ और यह $\tan^{-1} m$ दिया है, अतः $m = \frac{1}{5}$.

23. (a) चूँकि $2x^2 = 2y(2x + y) \Rightarrow x^2 - 2xy - y^2 = 0$.

$\therefore$ x^2 का गुणांक $+ y^2$ का गुणांक $= 1 - 1 = 0$.

अतः रेखायें लम्बवत् हैं।

24. (d) यहाँ $a + b = 0$ प्रत्येक p व q के लिए।

25. (a) यहाँ $a + b = 0$

26. (b) चूँकि $h^2 - ab = 0$ अतः रेखायें समान्तर हैं।

27. (c) दिया गया समीकरण तीन घात का समघातीय समीकरण है, जो मूलबिन्दु से जाने वाली तीन सरल रेखाएँ प्रदर्शित करता है। चूँकि दो रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हैं।

माना लम्बवत् रेखाओं का युग्म $(x^2 + pxy - y^2)$, p अचर है तथा दूसरा गुणनखण्ड $(ax - dy)$ है।

अतः $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = (x^2 + pxy - y^2)(ax - dy)$

समान घातों के गुणांकों की तुलना करने पर,

$b = ap - d$ .....(i)

$c = -pd - a$ .....(ii)

(i) को d व (ii) को a से गुणा करके जोड़ने पर,

$bd + ac = -d^2 - a^2 \Rightarrow a^2 + ac + bd + d^2 = 0$.

28. (b) यह स्पष्ट है।

29. (a) $\tan\theta = \frac{\pm 2\sqrt{p^2 - 1}}{1+1} = \pm\sqrt{p^2 - 1} \Rightarrow \theta = \sec^{-1} p$.

30. (b) यह एक सूत्र है।

31. (a) यह स्पष्ट है

32. (a) यहाँ $a = 2, b = 2, h = \frac{5}{2}, g = \frac{3}{2}, f = \frac{3}{2}, c = 1$

$\therefore \tan\theta = \frac{2\sqrt{(25/4) - 4}}{2+2} \Rightarrow \tan\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$.

33. (a) चूँकि $h^2 - ab$ अर्थात् $(6)^2 - 9 \times 4 = 0$

34. (d) $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{\frac{25}{4} - 4}}{4}\right) = \tan^{-1}\frac{3}{4}$.

35. (b) $x + y = 1$ से वक्र $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ को समघातीय समीकरण में परिवर्तित करने पर,

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x(x + y) - (x + y)^2 = 0$

$\therefore 2x^2 + 4xy = 0$ या $x^2 + 2xy = 0$ के लिए

$\therefore \tan\theta = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b}$ से

$a = 1, b = 0, h = 1$ रखने पर

$\tan\theta = \frac{2\sqrt{1^2 - 0}}{1} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(2)$

36. (d) x^2 का गुणांक $+ y^2$ का गुणांक $= 1 - 1 = 0$

$\therefore$ रेखायें परस्पर लम्बवत् हैं।

37. (b) x^2 का गुणांक $+ y^2$ का गुणांक $= 0$

$\Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b$.

38. (c) दिये गये समीकरण की मानक समीकरण से तुलना करने पर $a = 12$, $b = a$. लम्बवत् रेखाओं के लिए,

x^2 का गुणांक $+ y^2$ का गुणांक $= 0$ या $a + b = 0$

$\Rightarrow 12 + a = 0 \Rightarrow a = -12$.

39. (a) दिये गये समीकरण की मानक समीकरण से तुलना करने पर $a = 1, h = 2$ तथा $b = 1$.

रेखायुग्म से निरूपित रेखाओं के मध्य कोण

$\tan\theta = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b}$

$\therefore \tan\theta = \frac{2\sqrt{2^2 - 1}}{1+1} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60^o$.

40. (a) चूँकि दिया गया समीकरण रेखायुग्म को प्रदर्शित करता है, अतः

$-72p - \frac{63}{2}q - 3q^2 + 81p - \frac{147}{2} = 0$ .....(i)

चूँकि दिया गया समीकरण परस्पर लम्बवत् रेखाओं को प्रदर्शित करता है अतः $12 - p = 0 \Rightarrow p = 12$.

$\therefore$ (i) से $2q^2 + 21q - 23 = 0 \Rightarrow q = 1$.

41. (b) $\tan\theta = \frac{2\sqrt{(-7/2)^2 - 6}}{5} \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^o$.

42. (c) $\because \tan\phi = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b}$

$\Rightarrow \tan\phi = \frac{2\sqrt{\cos^2\theta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta)}}{\cos\theta - \sin\theta + \cos\theta + \sin\theta} = \frac{2\sin\theta}{2\cos\theta}$

$\Rightarrow \tan\phi = \tan\theta \Rightarrow \phi = \theta$.

43. (a) $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{3}$

$\because \tan\theta = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - \lambda}}{\lambda + 1}$

$\Rightarrow (\lambda+1)^2 = 9(9 - 4\lambda) \Rightarrow \lambda^2 + 38\lambda - 80 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \frac{-38 \pm \sqrt{(38)^2 + 320}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{-38 \pm 42}{2} \Rightarrow \lambda = 2$.

44. (a) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ की दिये गये समीकरण से तुलना करने पर,

$a = 1, h = -1/2, b = -6, g = -\frac{7}{2}, f = \frac{31}{2}, c = -18$

रेखायुग्म की रेखाओं के मध्य कोण

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{2\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 1\times(-6)}}{1 + (-6)}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{2\sqrt{\frac{1}{4} + 6}}{-5}\right|$$

$$= \tan^{-1}\left|\frac{\left(2\times\frac{5}{2}\right)}{-5}\right| = \tan^{1}|-1| = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \text{ या } 45^o.$$

रेखाओं के कोणार्द्धकों के समीकरण एवं रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु

1. (c) यहाँ एक अर्द्धक का समीकरण $x - 2y = 0$ है। हम जानते हैं कि दोनों अर्द्धक लम्बवत् होते हैं। अतः द्वितीय अर्द्धक $2x + y = 0$ होगा, क्योंकि यह मूलबिन्दु से गुजरते हैं।

अतः अर्द्धकों का संयुक्त समीकरण

$(2x + y)(x - 2y) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$

अब इसकी तुलना $hx^2 + 3xy - hy^2 = 0$ से करने पर $h = -2$.

2. (a) $\frac{x^2 - y^2}{11} = \frac{xy}{-8} \Rightarrow 8x^2 + 11xy - 8y^2 = 0$.

3. (a) समीकरण $y^2 + m^2x^2 - 2mxy - x^2 - m^2y^2 - 2mxy = 0$

$\Rightarrow x^2(m^2 - 1) + y^2(1 - m^2) - 4mxy = 0$

अतः अर्द्धकों का समीकरण $\frac{x^2 - y^2}{xy} = \frac{(m^2 - 1) - (1 - m^2)}{-2m}$

$\Rightarrow mx^2 + (m^2 - 1)xy - my^2 = 0$.

4. (c) समद्विभाजक सूत्र से, $\frac{x^2 - y^2}{1 - (-1)} = \frac{xy}{(0)} \Rightarrow xy = 0$ (वज्रगुणन से)

5. (c) यहाँ एक कोण के अर्द्धक का समीकरण $y - mx = 0$ है। अतः दूसरा अर्द्धक $x + my = 0$ होगा।

अतः संयुक्त समीकरण $(x + my)(y - mx) = 0$ होगा

$\Rightarrow -mx^2 - xy(m^2 - 1) + my^2 = 0$ .....(i)

एवं $ax^2 - 2hxy + by^2 = 0$ के अर्द्धकों का समीकरण

$-hx^2 - (a - b)xy + hy^2 = 0$ .....(ii)

(i) व (ii) एक ही समीकरण को प्रदर्शित करते हैं,

अतः $\frac{m}{h} = \frac{m^2 - 1}{(a - b)}$

$\Rightarrow h(m^2 - 1) = m(a - b) \Rightarrow m(a - b) + h(1 - m^2) = 0$.

6. (b) अक्षों के समीकरण $x = 0, y = 0$ हैं। संयुक्त समीकरण $xy = 0$ है। अतः समद्विभाजकों का संयुक्त समीकरण $\frac{x^2 - y^2}{0} = \frac{xy}{1/2} \Rightarrow x^2 - y^2 = 0$ है।

7. (d) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ के कोण समद्विभाजक

$\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}$ .....(i)

व $ax^2 + 2hxy + by^2 + \lambda(x^2 + y^2) = 0$

अर्थात् $(a + \lambda)x^2 + 2hxy + (b + \lambda)y^2 = 0$ के कोण

समद्विभाजक $\frac{x^2 - y^2}{(a + \lambda) - (b + \lambda)} = \frac{xy}{h}$ हैं .....(ii)

जो कि (i) जैसा है। अतः λ के किसी भी वास्तविक मान के लिए रेखाओं के समान समद्विभाजक होंगे।

8. (a) $\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{3} - \sqrt{3}} = \frac{xy}{-2} \Rightarrow x^2 - y^2 = 0$

9. (a) समद्विभाजक $\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}$

या $\frac{x^2 - y^2}{0} = \frac{xy}{\cot\theta}$ या $x^2 - y^2 = 0$.

10. (a) चूँकि अर्द्धक समान हैं, अतः $\frac{a - b}{h} = \frac{a' - b'}{h'}$

$\Rightarrow (a - b)h' = (a' - b')h$.

11. (c) समीकरण $px^2 - 2rxy + qy^2 = 0$ द्वारा प्रदर्शित रेखाओं के बीच कोणों के अर्द्धकों का समीकरण

$\frac{x^2 - y^2}{p - q} = \frac{xy}{-r}$
.....(i)

(i) में $y = mx$ रखने पर

$\frac{1 - m^2}{p - q} = \frac{m}{-r}$

$\Rightarrow r(1 - m^2) + m(p - q) = 0$.

12. (d) माना एक रेखा $x+y=0$ है।

$\Rightarrow m_1=-1$ और हम जानते हैं कि $m_1+m_2=-\frac{2h}{b}$ .....(i)

व $m_1m_2=\frac{a}{b}$ .....(ii)

अतः (ii) से, $m_2=-\frac{a}{b}$

$\Rightarrow -1-\frac{a}{b}=\frac{-2h}{b}\Rightarrow (a+b)^2=4h^2$.

13. (d) इन समीकरणों से प्रदर्शित रेखायें एक दूसरे पर लम्ब हैं अतः कोण $90°$ होगा।

14. (d) यहाँ $a(x-1)^2+2h(x-1)y+by^2=0$

या $a(x-1)^2+2h(x-1)(y-0)+b(y-0)^2=0$

यह समीकरण एक रेखायुग्म प्रदर्शित करता है जो (1, 0) पर प्रतिच्छेद करता है। अतः मूलबिन्दु को (1, 0) पर प्रतिस्थापित करने पर अर्थात् $x=X+1, y=Y+0$, समीकरण $aX^2+2hXY+bY^2=0$ हो जाएगा .....(i)

इस समीकरण का एक कोणार्धक $2x+y-2=0$ या $2(X+1)+Y-2=0$ अर्थात् $2X+Y=0$ होगा।

चूँकि कोणार्धकों के बीच हमेशा 90^o का कोण होता है अतः दूसरा अर्धक $X-2Y=0$ अर्थात् $x-1-2y=0$ या $x-2y-1=0$ होगा।

15. (c) यदि समीकरण $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ है, तो प्रतिच्छेद बिन्दु $\left(\frac{hf-bg}{ab-h^2},\frac{hg-af}{ab-h^2}\right)$.

अतः अभीष्ट प्रतिच्छेद बिन्दु $(-2,0)$ हैं।

16. (c) $X=x+2$ तथा $Y=y-2$ रखने पर,

समीकरण $2X^2+3XY-2Y^2=0$ जो कि $X=0, Y=0$ पर काटता हैं।

$\Rightarrow x+2=0, y-2=0$. प्रतिच्छेद बिन्दु $=(-2,2)$

ट्रिक : केवल (–2,2) दिये गये समीकरण को सन्तुष्ट करता है।

किसी वक्र व रेखा के प्रतिच्छेद बिन्दु को मूल बिन्दु से मिलाने वाली रेखाओं का समीकरण, रेखायुग्म के बीच की दूरी

1. (b) दिये गये वक्रों के प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाली रेखाओं का समीकरण

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+\lambda(a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x)=0$

$\Rightarrow (a+a'\lambda)x^2+(2h+2h'\lambda)xy$

$+(b+b'\lambda)y^2+(2g+2g'\lambda)x=0$

अब लम्ब होने का प्रतिबन्ध $\Delta=0$ व $a+b=0$

$\Rightarrow a+a'\lambda+b+b'\lambda=0\Rightarrow \lambda=-\frac{a+b}{a'+b'}$

तथा $\Delta=abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$

$\Rightarrow 0+0-0-(b+b'\lambda)(2g+2g'\lambda)^2-0=0$

$\Rightarrow 4(b+b'\lambda)(g+g'\lambda)^2=0$

अब λ का मान रखने पर,

$g(a'+b')=g'(a+b)$.

2. (a) सर्वप्रथम रेखायें समान्तर होने के लिए अर्थात्

$\frac{a}{h}=\frac{h}{b}=\frac{g}{f}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{-3/2}{-3\sqrt{3}/2}$

जो कि सत्य है। अतः रेखायें समान्तर हैं।

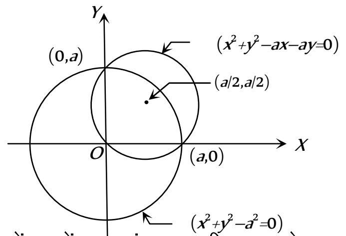
अतः रेखाओं के बीच की दूरी $=2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a(a+b)}}=2\sqrt{\frac{\frac{9}{4}+4}{4}}=\frac{5}{2}$.

3. (d) वक्र के समीकरण को रेखा के समीकरण $\frac{fx-gy}{\lambda}=1$ की सहायता से समघातीय बनाकर, दोनों रेखाओं के परस्पर लम्बवत् होने के लिए प्रतिबंध लगाने पर,

$a+b=0\Rightarrow \lambda+gf-\lambda-gf=0\Rightarrow 0=0$

अतः λ का मान कुछ भी हो सकता है।

4. (b) स्पष्टतः चित्र से, $xy=0$ रेखायुग्म निरूपित करता है।



अर्थात् दोनों अक्षों का संयुक्त समीकरण होगा।

5. (c) दूरी $=2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a(a+b)}}=2\sqrt{\frac{4-1}{1(1+2)}}=2$.

6. (a) रेखा से वक्र के समीकरण को समघातीय बनाने पर,

$x^2+y^2=4\left(\frac{y-x}{2}\right)^2$ या $x^2+y^2=(y-x)^2$.

7. (d) रेखा $x+y=1$ द्वारा वक्र के समीकरण को समघात बनाने पर $x^2+y^2-2y(x+y)+\lambda(x+y)^2=0$

$\Rightarrow x^2(1+\lambda)+y^2(-1+\lambda)-2yx=0$

अतः रेखायें परस्पर लम्बवत् होंगी यदि $A+B=0$

$\Rightarrow 1+\lambda-1+\lambda=0\Rightarrow\lambda=0$

8. (c) वक्र के समीकरण को समघातीय बनाने पर,

$5x^2+12xy-8y^2+8x-4y+12=0$

या $5x^2+12xy-8y^2+(8x-4y)\left(\frac{x-y}{2}\right)+12\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=0$

$\Rightarrow 5x^2+12xy-8y^2+4x^2-4xy-2xy+2y^2+3x^2$

$+3y^2-6xy=0$

$\Rightarrow 12x^2-3y^2=0$ या $4x^2-y^2=0$

या $(2x-y)(2x+y)=0$; $\therefore m_1=2,\ \ m_2=-2$.

9. (b) रेखा $\frac{x}{2h}+\frac{y}{2k}=1$ तथा

वक्र $x^2+y^2-2(hx+ky)+(h^2+k^2-c^2)=0$ हैं।

समघातीय बनाने पर,

$$\Rightarrow (x^2+y^2)-2(hx+ky)\left(\frac{x}{2h}+\frac{y}{2k}\right)$$

$$+(h^2+k^2-c^2)\left(\frac{x}{2h}+\frac{y}{2k}\right)^2=0$$

इससे निरूपित रेखायें परस्पर लम्बवत् होंगी, यदि $A+B=0$

$$\left[1-1+\frac{(h^2+k^2-c^2)}{4h^2}\right]+\left[1-1+\frac{(h^2+k^2-c^2)}{4k^2}\right]=0$$

या $(h^2+k^2-c^2)\left(\frac{h^2+k^2}{4h^2k^2}\right)=0$

$\therefore h^2+k^2=c^2$.

10. (a) यदि रेखा का समीकरण $y=mx$ एवं बिन्दु (x_1,y_1) से इस रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई d है, तो

$$\frac{y_1-mx_1}{\sqrt{1+m^2}}=\pm d\Rightarrow (y_1-mx_1)^2=d^2(1+m^2).$$

परन्तु $m=\frac{y}{x}$, अतः 'm' का विलोपन करने पर हमें अभीष्ट समीकरण $(xy_1-yx_1)^2=d^2(x^2+y^2)$ प्राप्त होता है।

11. (b) रेखा की सहायता से समीकरण को समाघातीय बनाने पर $9x^2+10xy-9y^2=0$ समीकरण प्राप्त होता है। स्पष्टतः रेखायें लम्बवत् हैं।

12. (b) दूरी $=2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a(a+b)}}=\frac{2}{\sqrt{10}}$.

13. (c) समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी का सूत्र लगाने पर अभीष्ट दूरी $=\left|2\sqrt{\frac{(k^2/4)-0}{1.(1+4)}}\right|=\left|\frac{k}{\sqrt{5}}\right|$

$\therefore \left|\frac{k}{\sqrt{5}}\right|=3\Rightarrow k=\pm 3\sqrt{5}$.

14. (c) वक्र के समीकरण को समाघातीय बनाने पर,

$$x^2+y^2-2\left(\frac{y-2\sqrt{2}x}{c}\right)^2=0 \quad .....(i)$$

परन्तु (i) द्वारा प्रदर्शित रेखायें परस्पर लम्बवत् हैं अतः x^2 का गुणांक + y^2 का गुणांक = 0

$$\Rightarrow 1-\frac{16}{c^2}+1-\frac{2}{c^2}=0\Rightarrow \frac{18}{c^2}=2\Rightarrow c^2-9=0.$$

15. (b) रेखायुग्म $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ से निरूपित दो समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी $=2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a(a+b)}}$.

यहाँ, $a=8, b=2, c=15, g=13$.

अतः अभीष्ट दूरी $=2\sqrt{\frac{169-120}{80}}=2\times\frac{7}{4}.\sqrt{5}=\frac{7}{2}\sqrt{5}$.

16. (c) रेखायुग्म $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ की दोनों रेखाओं के मध्य दूरी $=2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a(a+b)}}$.

यहाँ $a=1$, $b=9$, $c=-4$, $g=3/2$

$$=2\times\sqrt{\frac{9/4-(-4)}{1(1+9)}}=2\times\sqrt{\frac{25/4}{10}}=\sqrt{5/2}.$$

17. (c) दिया है, $x^2+y^2=9$ .....(i)

$x+y=3$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से,

$x^2+(x-3)^2=9\Rightarrow x^2+9+x^2-6x=9$

$\Rightarrow 2x^2=6x\Rightarrow x=3$

$x=3$ समीकरण (ii) में रखने पर $y=0$

इसी तरह, $x=3-y$ समीकरण (i) में रखने पर $y=3, x=0$. अतः प्रतिच्छेद बिन्दु $(3,0)$ व $(0,3)$ हैं। अतः मूल बिन्दु से मिलाने पर इनका अलग अलग समीकरण है $y-0=\frac{0-0}{0-3}(x-3)\Rightarrow y=0$.

बिन्दु (0, 0) व (0, 3) को लेने पर $x=0$

अतः अभीष्ट रेखायुग्म का समीकरण $xy=0$ है।

18. (d) वक्र $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ की समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी $2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a(a+b)}}$ है।

$$=2\sqrt{\frac{(4a)^2+9a^2}{1(1+1)}}=2\sqrt{\frac{25a^2}{2}}=5\sqrt{2}a.$$

Critical Thinking Questions

1. (a) रेखा का समीकरण $\lambda(x-a)+(y-b)=0$ है।

$$r=-\left(\frac{-a\lambda-b}{\lambda^2+1}\right)$$

बिन्दु के निर्देशांक $\equiv\left\{-\lambda\left(\frac{-a\lambda-b}{\lambda^2+1}\right), -\left(\frac{-a\lambda-b}{\lambda^2+1}\right)\right\}$

$$h=\lambda\left(\frac{a\lambda+b}{\lambda^2+1}\right), k=\frac{a\lambda+b}{\lambda^2+1}, \lambda=\frac{h}{k}$$

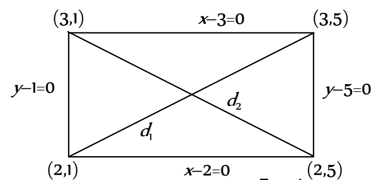
$$\therefore h=h\left(\frac{ah+kb}{h^2+k^2}\right)\Rightarrow x^2+y^2=ax+by.$$

2. (a) चूँकि त्रिभुज $O(0,0)$ पर समकोण है। अतः लम्बकेन्द्र (0,0) होगा।

3. (d) लम्बों का गुणनफल $=\frac{c}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$.

4. (c) विकर्ण d_1 का समीकरण $y-1=\frac{5-1}{3-2}(x-2)$

$$\Rightarrow y-1=\frac{4}{1}(x-2)\Rightarrow y=4x-7$$



विकर्ण d_2 का समीकरण, $y-1=\frac{5-1}{2-3}(x-3)$

$$\Rightarrow y-1=-4(x-3)\Rightarrow 4x+y=13$$

अतः समीकरण $4x+y=13$ तथा $y=4x-7$ है।

5. (a) समीकरण $y^2-9xy+18x^2=0$ द्वारा निरूपित रेखायें $6x-y=0$ व $3x-y=0$ हैं एवं तीसरी रेखा $y=9$ है,

इसलिए त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक $A(0,0); B(3,9)$ व $C\left(\frac{3}{2},9\right)$ होंगे।

अतः त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 3 & 9 & 1\\ 3/2 & 9 & 1\end{vmatrix}=\frac{27}{4}$$ वर्ग इकाई

वैकल्पिक : सूत्र से, अभीष्ट क्षेत्रफल

$$=\frac{(-9)^2\sqrt{(9/2)^2-18}}{18\times1+9\times0\times1+1\times0}=\frac{81}{18}\sqrt{\frac{81}{4}-18}$$

$$=\frac{81}{18}\times\frac{3}{2}=\frac{27}{4}$$ वर्ग इकाई

6. (d) हम जानते हैं कि रेखायुग्म

$(a^2-3b^2)x^2+8abxy+(b^2-3a^2)y^2=0$

रेखा $ax+by+c=0$ के साथ एक समबाहु त्रिभुज का निर्माण करता है।

$Ax^2+2Hxy+By^2=0$ से तुलना करने पर

$A=a^2-3b^2, B=b^2-3a^2, 2H=8ab$.

अब, $(A+3B)(3A+B)=(-8a^2)(-8b^2)$

$=(8ab)^2=(2H)^2=4H^2$

7. (a) दी गई रेखाएँ हैं (गुणनखण्ड करने पर)

$lx+my=0, lx+my+n=0$

$lx-my=0, lx+my-n=0$

क्षेत्रफल $=\left|\frac{(c_1-d_1)(c_2-d_2)}{(a_1b_2-a_2b_1)}\right|=\left|\frac{(0-n)(0+n)}{(-lm-lm)}\right|=\frac{n^2}{2|lm|}$.

8. (b) $\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}=6$

$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=6-\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर ,

$12x+36=12\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}$

पुनः वर्ग करने पर रेखायुग्म का समीकरण प्राप्त होता है।

9. (a) यदि दिये गये समीकरण द्वारा प्रदर्शित रेखायें $y=m_1x+c_1$ व $y=m_2x+c_2$ हैं,

तब $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$

$\Rightarrow b(y-m_1x-c_1)(y-m_2x-c_2)=0$

अब x^2, xy, x, y व अचर पद के गुणांकों की तुलना करने

$m_1m_2=\frac{a}{b}, m_1+m_2=\frac{-2h}{b}, m_1c_2+m_2c_1=\frac{2g}{b},$

$c_1+c_2=-\frac{2f}{b}$ व $c_1c_2=\frac{c}{b}$

एवं $y=m_1x+c_1$ व $y=m_2x+c_2$, का प्रतिच्छेद बिन्दु $\left(\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2},\frac{m_1c_2-m_2c_1}{m_1-m_2}\right)$ है। अतः इस बिन्दु की मूल बिन्दु से दूरी का वर्ग $\left(\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2}\right)^2+\frac{(m_1c_2-m_2c_1)^2}{(m_1-m_2)^2}$

$$=\frac{[(c_1+c_2)^2-4c_1c_2]+[(m_1c_2+m_2c_1)^2-4m_1m_2c_1c_2]}{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}$$

अब ऊपर परिभाषित मान इसमें रखने पर, अभीष्ट दूरी $\frac{-c(a+b)+f^2+g^2}{h^2-ab}$ होगी।

10. (d) मूल बिन्दु से जाने वाली कोई भी रेखा $y=mx$ होती है। अब यदि यह रेखा $y=x$ के साथ α कोण बनाती है, तो

$\tan\alpha=\pm\left\{\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right\}=\pm\frac{(m-1)}{1+m}$

या $(1+m)^2\tan^2\alpha=(m-1)^2$

$\Rightarrow m^2-2m\left\{\frac{1+\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}\right\}+1=0$

$\Rightarrow m^2-2m\sec 2\alpha+1=0$, $\left\{\because \frac{1+\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\sec 2\alpha\right\}$

परन्तु $m=\frac{y}{x}$, अतः m का विलोपन करने पर अभीष्ट समीकरण $y^2-2xy\sec 2\alpha+x^2=0$ होगा।

11. (a) रेखाओं $x^2-2pxy-y^2=0$ द्वारा प्रदर्शित रेखाओं के बीच कोणों का अर्द्धक $\frac{x^2-y^2}{xy}=\frac{1-(-1)}{-p}$ है।

$\Rightarrow px^2+2xy-py^2=0$

परन्तु यह $x^2-2qxy-y^2=0$ द्वारा दिया गया है,

अतः $\frac{p}{1}=\frac{2}{-2q}\Rightarrow pq=-1$.

12. (d) $\alpha=\tan^{-1}\left\{\frac{2\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{4}-\sin^2\theta(\cos^2\theta-1)}}{\sin^2\theta+\cos^2\theta-1}\right\}$

$=\tan^{-1}\infty\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}$

13. (a) रेखायें लम्बवत् होंगी यदि x^2 का गुणांक + y^2 का गुणांक $=0$

$\Rightarrow 3a+(a^2-2)=0 \Rightarrow a^2+3a-2=0$

$\because$ समीकरण a में द्विघातीय है और $B^2-4AC>0$.

अतः a के मूल वास्तविक व भिन्न होंगे। अतः a के दो मानों के लिये रेखायें एक दूसरे की लम्बवत् होंगी।

14. (c) $S_1=\frac{1}{-2+\sqrt{4-1}}=\frac{1}{-2+\sqrt{3}}=-(\sqrt{3}+2)$

$S_2=\frac{1}{-2-\sqrt{4-1}}=\frac{1}{-2-\sqrt{3}}=(\sqrt{3}-2)$ व $S_3=1$.

$\theta_{13}=\tan^{-1}\left|\frac{-(\sqrt{3}+2)-1}{1-(\sqrt{3}+2)}\right|=\tan^{-1}\left|\frac{-(\sqrt{3}+3)}{-(\sqrt{3}+1)}\right|$

$=\tan^{-1}(\sqrt{3})=60°$.

$\theta_{23}=\tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}-2-1}{1+\sqrt{3}-2}\right|=\tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}-1}\right|$

$=\tan^{-1}(\sqrt{3})=60°$.

15. (c) समीकरण $x^2-3xy+\lambda y^2+3x-5y+2=0$ एक रेखायुग्म निरूपित करता है। अतः

$$2\lambda + 2\left(-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{25}{4} - \frac{9\lambda}{4} - \frac{18}{4} = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

यदि इन रेखाओं के बीच कोण θ है, तो

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b} = \frac{2\sqrt{(9/4) - 2}}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$\therefore \operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta = 1 + 9 = 10$.

16. (b) धनात्मक अक्षों के बीच कोण का समद्विभाजक $y = x$ होता है। चूँकि यह दिये गये रेखायुग्म $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ द्वारा प्रदर्शित एक रेखा है। अतः

$x^2(a + 2h + b) = 0$ या $a + b = -2h$.

17. (c) वृत्त के समीकरण को रेखा $y = mx + c$, की सहायता से समघातीय बनाने पर $x^2 + y^2 - a^2\left(\frac{y - mx}{c}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow c^2x^2 + c^2y^2 - a^2y^2 - a^2m^2x^2 + 2a^2mxy = 0$

$\Rightarrow (c^2 - a^2m^2)x^2 + (c^2 - a^2)y^2 - 2a^2mxy = 0$ .....(i)

अतः (i) द्वारा निरूपित रेखायें लम्बवत् होंगी यदि

$c^2 - a^2m^2 + c^2 - a^2 = 0 \Rightarrow 2c^2 = a^2(1 + m^2)$

18. (b) वक्र को समाघातीय बनाने पर,

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + (4x + 8y)\left(\frac{y - 3x}{2}\right) - 11\left(\frac{y - 3x}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2xy + 3y^2 + (2xy - 6x^2 + 4y^2 - 12xy)$$

$$-\frac{11}{4}y^2 - \frac{99}{4}x^2 + \frac{33}{2}xy = 0$$

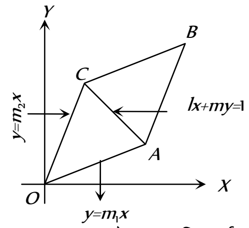
अतः $\alpha = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b}$ से प्राप्त करें.

19. (b) माना समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ द्वारा निरूपित रेखायें $y - m_1x = 0$ व $y - m_2x = 0$ हैं एवं एक विकर्ण AC $lx + my = 1$ है। अतः $m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b}$ व $m_1m_2 = \frac{a}{b}$

अब OA व OC के समीकरणों को रेखा AC के साथ हल करने पर A व C के निर्देशांक क्रमशः

$A\left(\frac{1}{l + mm_1}, \frac{m_1}{l + mm_1}\right)$

व $C\left(\frac{1}{l + mm_2}, \frac{m_2}{l + mm_2}\right)$



अब AC के मध्य बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करो एवं विकर्ण का समीकण (इस मध्य बिन्दु व मूल बिन्दु से) ज्ञात करो। अभीष्ट समीकरण $x(am - hl) = (lb - mh)y$ है।

20. (b) दी गयी रेखाओं के बीच कोण $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{(a+b)^2 - ab}}{a+b}$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{(a+b)^2 - ab}}{a+b} = 1 \Rightarrow 3a^2 + 2ab + 3b^2 = 0$$

21. (a) माना रेखायें $y = m_1x + c_1$ तथा $y = m_2x + c_2$ हैं, चूँकि रेखायुग्म x-अक्ष के समान्तर है।

$\therefore m_1 = m_2 = 0$

अतः रेखाएँ $y = c_1$ व $y = c_2$ होंगी

दिया गया वृत्त $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$ है जिसका केन्द्र (3, 2) व त्रिज्या 5 है।

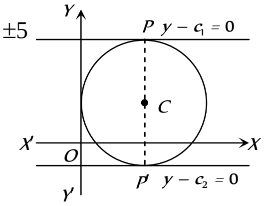
केन्द्र से रेखाओं पर डाले गये लम्ब क्रमशः CP व CP' हैं।

$CP = \frac{2 - c_1}{\sqrt{1}} = \pm 5 \Rightarrow 2 - c_1 = \pm 5$

$c_1 = 7$ तथा $c_1 = -3$

अतः रेखाएँ $y - 7 = 0, y + 3 = 0$

अर्थात् $(y - 7)(y + 3) = 0$ हैं।



अतः रेखायुग्म $y^2 - 4y - 21 = 0$ है।

22. (a) माना $ay^4 + bxy^3 + cx^2y^2 + dx^3y + ex^4$

$$= (ax^2 + pxy - ay^2)(x^2 + qxy + y^2)$$

समगुणांकों की तुलना करने पर

$b = aq - p, c = -pq$, $d = aq + p, e = -a$

$b + d = 2aq, e - a = -2a$

$ad + be = 2ap, a + c + e = -pq$

$(b + d)(ad + be) = -(e - a)^2(a + c + e)$

$\therefore (b + d)(ad + eb) + (e - a)^2(a + c + e) = 0$.

23. (c) माना $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ द्वारा प्रदर्शित रेखायें $lx + my + n = 0$ व $l'x + m'y + n' = 0$ हों, तो इन रेखाओं द्वारा प्रदर्शित रेखा का संयुक्त समीकरण $(lx + my + n)(l'x + m'y + n') = 0$ होगा।

अतः इसको दिये गये समीकरण के समान होना चाहिए। अंतः तुलना करने पर, $ll' = a$, $mm' = b$ $nn' = c$, $lm' + ml' = 2h$, $ln' + l'n = 2g$, $mn' + nm' = 2f$

दिये गये प्रतिबन्ध के अनुसार, मूल बिन्दु से इन रेखाओं पर डाले गये लम्बों की लम्बाइयाँ समान होंगी, अतः

$$\frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2}} = \frac{n'}{\sqrt{l'^2 + m'^2}} = \frac{(nn')^2}{(l^2 + m^2)(l'^2 + m'^2)}$$

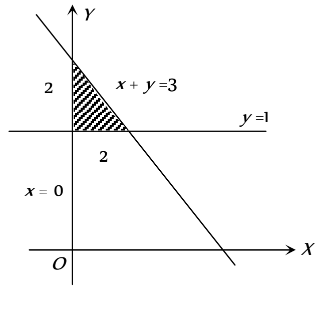
अब l, m, l', m' व n, n' का विलोपन करने पर अभीष्ट प्रतिबन्ध $f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2)$ प्राप्त होता है।

24. (c) रेखायुग्म $xy + 2x + 2y + 4 = 0$ के अलग अलग समीकरण $(x + 2)(y + 2) = 0$ व $x + 2 = 0$, $y + 2 = 0$ होंगे। इन समीकरणों को हल करके त्रिभुज के शीर्ष $A(-2,0)$, $B(0,-2)$ व $C(-2,-2)$ प्राप्त होंगे। स्पष्टतः त्रिभुज C पर समकोण है। अतः परिकेन्द्र AB का मध्य बिन्दु अर्थात् (–1, –1) होगा।

25. (a) $x^2 - y^2 + 2y = 1$ के कोण समद्विभाजक के समीकरण $x = 0$, $y = 1$ हैं।

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$.



रेखायुग्म

SET Self Evaluation Test -16

1. समीकरण $\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=4$ प्रदर्शित करता है [MNR 1982; MP PET 1999]
(a) वृत्त (b) रेखायुग्म
(c) परवलय (d) दीर्घवृत्त

2. यदि समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+1=0$ एक रेखायुग्म को निरूपित करे, तब [Pb. CET 2000; Karnataka CET 1999]
(a) $g^2-f^2=1$ (b) $f^2-g^2=1$
(c) $g^2+f^2=1$ (d) $f^2+g^2=\frac{1}{2}$

3. यदि रेखायुग्म $xy-x-y+1=0$ तथा रेखा $ax+2y-3=0$ संगामी हो, तो $a=$ [EAMCET 2002]
(a) – 1 (b) 0
(c) 3 (d) 1

4. रेखाओं $4x^2-9xy-9y^2=0$ तथा $x=2$ से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल है [Roorkee 2000]
(a) 2 (b) 3
(c) 10/3 (d) 20/3

5. एक समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं के समीकरण $x^2-7x+6=0$ व $y^2-14y+40=0$ हों, तो इसके एक विकर्ण का समीकरण होगा [EAMCET 1994]
(a) $6x+5y+14=0$ (b) $6x-5y+14=0$
(c) $5x+6y+14=0$ (d) $5x-6y+14=0$

6. $ax^2+2hxy+by^2=0$ द्वारा निरूपित रेखायुग्म का दर्पण $y=0$ में प्रतिबिम्ब है
(a) $ax^2-2hxy-by^2=0$ (b) $bx^2-2hxy+ay^2=0$
(c) $bx^2+2hxy+ay^2=0$ (d) $ax^2-2hxy+by^2=0$

7. PQR एक समकोणीय समद्विबाहु(Right angled isosceles) त्रिभुज हैं, जिसका समकोण $P(2,1)$ पर है। यदि QR रेखा का समीकरण $2x+y=3$ है, तो युग्म रेखाओं PQ तथा PR को प्रदर्शित करने वाला समीकरण है [IIT 1999]
(a) $3x^2-3y^2+8xy+20x+10y+25=0$
(b) $3x^2-3y^2+8xy-20x-10y+25=0$
(c) $3x^2-3y^2+8xy+10x+15y+20=0$
(d) $3x^2-3y^2-8xy-10x-15y-20=0$

8. यदि रेखा $lx+my=1$ का वृत्त $x^2+y^2=a^2$ के अन्तर्गत कटा भाग मूल बिन्दु पर 45^o का कोण बनाता हो तो
(a) $4[a^2(l^2+m^2)-1]=a^2(l^2+m^2)$
(b) $4[a^2(l^2+m^2)-1]=a^2(l^2+m^2)-2$
(c) $4[a^2(l^2+m^2)-1]=[a^2(l^2+m^2)-2]^2$
(d) इनमें से कोई नहीं

9. मूल बिन्दु को रेखा $x\sqrt{3}+y=2$ और वक्र $y^2+x^2=4$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से मिलाने वाली रेखाओं के मध्य कोण होगा [Roorkee 1998]
(a) $\pi/6$ (b) $\pi/4$
(c) $\pi/3$ (d) $\pi/2$

10. द्विघात व्यापक समीकरण $ax^2+by^2+2hxy+2fy+2gx+c=0$ में से मिश्रित पद xy को हटाना है। हमें अक्षों को θ कोण से घुमाना पड़ता है तो $\tan 2\theta$ बराबर है [MNR 1986; UPSEAT 2000]
(a) $\frac{a-b}{2h}$ (b) $\frac{2h}{a+b}$
(c) $\frac{a+b}{2h}$ (d) $\frac{2h}{(a-b)}$

11. यदि समीकरण $y^3-3x^2y+m(x^3-3xy^2)=0$ तीन रेखाओं को निरूपित करता हो जो मूल बिन्दु से जाती हैं, तो
(a) रेखायें परस्पर बराबर झुकी हुयी है
(b) दो रेखायें x-अक्ष के साथ बराबर कोण बनाती हैं
(c) तीनों रेखायें x-अक्ष के साथ बराबर कोण बनाती हैं
(d) इनमें से कोई नहीं

12. समीकरण $x^2\cos^2\theta-xy\sin^2\theta-y^2\sin^2\theta=0$ द्वारा निरूपित रेखाओं से समदूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दुपथ है
(a) $x^2+y^2+2xy\sec^2\theta=0$
(b) $x^2+y^2+2xy\,\text{cosec}^2\theta=0$
(c) $x^2-y^2+2xy\sec^2\theta=0$
(d) $x^2-y^2+2xy\,\text{cosec}^2\theta=0$

13. यदि रेखायुग्म $x^2-2mxy-y^2=0$ तथा $x^2-2nxy-y^2=0$ ऐसे हैं जो एक दूसरे के बीच के कोणों के अर्धक हैं, तो $mn=$ [MP PET 1991; UPSEAT 2001]
(a) 1 (b) – 1
(c) 0 (d) – 1/2

14. यदि रेखायुग्म $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$, y-अक्ष को प्रतिच्छेदित करता है, तो [AIEEE 2002]
(a) $2fgh=bg^2+ch^2$ (b) $bg^2\neq ch^2$
(c) $abc=2fgh$ (d) इनमें से कोई नहीं

15. वृत्त $x^2+y^2=3$ व रेखा $x+y=2$ के प्रतिच्छेद बिन्दु को मूलबिन्दु से मिलाने वाली रेखायें हैं [Roorkee 1995]
(a) $y-(3+2\sqrt{2})x=0$ (b) $x-(3+2\sqrt{2})y=0$
(c) $x-(3-2\sqrt{2})y=0$ (d) $y-(3-2\sqrt{2})x=0$

AS Answers and Solutions

(SET - 16)

1. (b) $\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=4$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2+4-4x}+\sqrt{x^2+y^2+4+4x}=4$

$\Rightarrow \sqrt{k-4x}+\sqrt{k+4x}=4$, (जहाँ $k=x^2+y^2+4$)

$\Rightarrow \sqrt{k-4x}=4-\sqrt{k+4x}$

वर्ग करके सरल करने पर, $y^2=0$.

अतः ये सम्पाती रेखायें हैं।

2. (c) मानक समीकरण से दी गई समीकरण की तुलना करने पर $a=1, b=1, h=0$ तथा $c=1$,रेखायुग्म के सामान्य समीकरण

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ के लिए

$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$

$\therefore (1\times1\times1)+(2\times f\times g\times0)-(1\times f^2)-(1\times g^2)-(1\times0)=0$

अथवा $1-f^2-g^2=0$ अथवा $f^2+g^2=1$.

3. (d) रेखायुग्म का समीकरण $xy-x-y+1=0$ है।

$\Rightarrow (x-1)(y-1)=0 \Rightarrow x-1=0$ या $y-1=0$

अतः रेखाओं के पृथक समीकरणों $x-1=0,\ y-1=0$ का प्रतिच्छेद बिन्दु (1, 1) है।

$\because$ रेखायें $x-1=0,\ y-1=0$ तथा $ax+2y-3=0$ संगामी हैं। अतः प्रथम दो रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु तीसरी रेखा को संतुष्ट करता है।

$\Rightarrow a+2-3=0 \Rightarrow a=1$.

4. (c) $4x^2-9xy-9y^2=0$

$\Rightarrow 4x^2-12xy+3xy-9y^2=0$

$\Rightarrow 4x(x-3y)+3y(x-3y)=0$

$\Rightarrow (4x+3y)(x-3y)=0$

$\Rightarrow 4x+3y=0$ या $x-3y=0$.

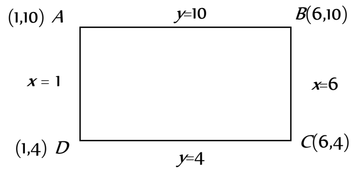
अतः दिये गये समघातीय समीकरण द्वारा प्रदर्शित रेखाएँ $4x+3y=0$ तथा $x-3y=0$ हैं। अतः Δ की भुजाएँ $4x+3y=0$, $x-3y=0$ तथा $x=2$ हैं।

इन समीकरणों को हल करने पर Δ के शीर्ष $A(2,-8/3), B(2,2/3), C(0,0)$ प्राप्त होते हैं।

अतः ΔABC का क्षेत्रफल

$=\frac{1}{2}\left[2\left(\frac{2}{3}\right)+2\left(\frac{8}{3}\right)+0\right]=\frac{10}{3}$.

5. (b) $x^2-7x+6=0$ द्वारा प्रदर्शित रेखायें $x=6$ व $x=1$ हैं। इसी प्रकार $y^2-14y+40=0$ द्वारा निरूपित रेखायें $y=10,\ y=4$ हैं।



अतः चित्र से एक विकर्ण BD का समीकरण $6x-5y+14=0$ होगा।

6. (d) माना $y=m_1x$ व $y=m_2x$ रेखायुग्म $ax^2+2hxy+by^2=0$. द्वारा निरूपित रेखायें हैं। अतः $y=0$ में इनका प्रतिबिम्ब $y=-m_1x$ व $y=-m_2x$ होगा। अतः संयुक्त समीकरण $y^2+m_1m_2x^2+xy(m_1+m_2)=0$

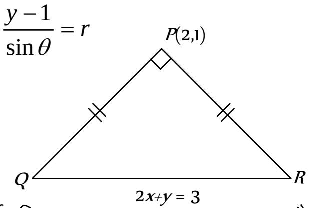
या $y^2+\frac{a}{b}x^2+xy\left(-\frac{2h}{b}\right)=0$

$\left(\because m_1+m_2=\frac{-2h}{b}, m_1m_2=\frac{a}{b}\right)$

या $ax^2-2hxy+by^2=0$.

7. (b) बिन्दु P से जाने वाली रेखा का प्राचल समीकरण है ,

$\frac{x-2}{\cos\theta}=\frac{y-1}{\sin\theta}=r$



अतः कोई बिन्दु $r\cos\theta+2,\ r\sin\theta+1$ है। यदि यह QR पर स्थित है, तो $2(r\cos\theta+2)+r\sin\theta+1=3$

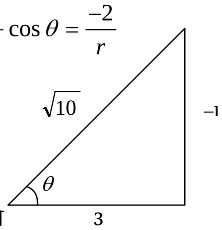
$r(2\cos\theta+\sin\theta)=-2$

$\Rightarrow 2\cos\theta+\sin\theta=\frac{-2}{r}$ ......(i)

यदि PQ का झुकाव θ है, तो PR का झुकाव $\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ होगा

अतः $2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{-2}{r}$

$\Rightarrow -2\sin\theta+\cos\theta=\frac{-2}{r}$ .....(ii)



(i) और (ii) से

$2\cos\theta+\sin\theta=-2\sin\theta+\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = -3\sin\theta \Rightarrow \tan\theta = -\frac{1}{3}$

अतः रेखाओं PQ और PR की प्रवणतायें क्रमशः $\frac{-1}{3}$ और 3 है।

अतः PQ और PR के समीकरण $y-1 = -\frac{1}{3}(x-2)$; $y-1 = 3(x-2)$ हैं एवं उनका सम्मिलित समीकरण है

$[3(y-1)+(x-2)][(y-1)-3(x-2)] = 0$

या $3(y-1)^2 - 8(y-1)(x-2) - 3(x-2)^2 = 0$

या $3(x-2)^2 + 8(x-2)(y-1) - 3(y-1)^2 = 0$

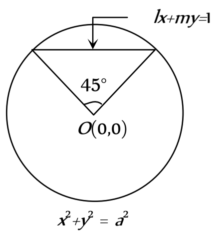
या $3(x^2-4x+4) + 8(xy - x - 2y + 2) - 3(y^2 - 2y + 1) = 0$

या $3x^2 - 3y^2 + 8xy - 20x - 10y + 25 = 0$.

8. (c) रेखा $lx + my = 1$ के समीकरण की सहायता से वृत्त के समीकरण को समाघातीय बनाने पर,

$x^2 + y^2 - a^2(lx+my)^2 = 0$

$\Rightarrow (a^2l^2 - 1)x^2 + (a^2m^2 - 1)y^2 + 2a^2lmxy = 0$



अब $\tan 45° = \frac{2\sqrt{(a^2lm)^2 - (a^2l^2-1)(a^2m^2-1)}}{a^2l^2 + a^2m^2 - 2}$

$\Rightarrow 2\sqrt{a^2l^2 + a^2m^2 - 1} = a^2l^2 + a^2m^2 - 2$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$4[a^2(l^2+m^2) - 1] = [a^2(l^2+m^2) - 2]^2$.

9. (c) सरल रेखा युग्म का समीकरण जो उनके प्रतिच्छेदन बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने पर मिलाता है, होगा

$y^2 + x^2 = 4\left[\frac{x\sqrt{3}+y}{2}\right]^2 = 4\left[\frac{(\sqrt{3}x+y)^2}{4}\right]$

$\Rightarrow y^2 + x^2 = 3x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}xy \Rightarrow 2x^2 + 2\sqrt{3}xy = 0$

$\therefore$ यदि अभीष्ट कोण α है, तब

$\tan\alpha = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b} = \frac{2\sqrt{(\sqrt{3})^2 - 0}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$.

10. (d) **वैकल्पिक :** माना नये अक्षों पर निर्देशांक (x', y') हैं, तो समीकरण में $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$ तथा $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$ रखते हैं। परिवर्ती समीकरण में xy का गुणांक शून्य है। अतः $2(b-a)\sin\theta\cos\theta + 2h\cos 2\theta = 0$

$\Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}$.

11. (a) समीकरण के गुणनखण्ड करके रेखाओं के समीकरण ज्ञात करें फिर उनकी प्रवणतायें ज्ञात करके, उनके बीच का कोण ज्ञात कीजिये। रेखायें आपस में बराबर झुकी हुई हैं।

12. (d) हम जानते हैं कि किसी वक्र द्वारा प्रदर्शित रेखाओं के बीच कोणों के अर्द्धकों पर कोई बिन्दु रेखाओं से समान दूरी पर स्थित होता है। अतः अर्द्धकों का समीकरण ही अभीष्ट बिन्दुपथ होगा।

$\frac{x^2 - y^2}{xy} = \frac{1}{\frac{-\sin^2\theta}{2}} \Rightarrow x^2 - y^2 + 2xy\,\text{cosec}^2\theta = 0$.

13. (b) यहाँ रेखा युग्म के समीकरण निम्न हैं

$x^2 - 2mxy - y^2 = 0$ .....(i)

व $x^2 - 2nxy - y^2 = 0$ .....(ii)

अतः इन रेखाओं के अर्द्धकों के समीकरण क्रमशः हैं,

$mx^2 + 2xy - my^2 = 0$ .....(iii)

$nx^2 + 2xy - ny^2 = 0$ .....(iv)

परन्तु दिये गये प्रतिबन्ध के अनुसार (i) व (iv), (ii) व (iii) सम्पाती होना चाहिए, इसलिए

$\therefore \frac{n}{1} = \frac{2}{-2m} = \frac{-n}{-1} \Rightarrow mn = -1$.

14. (a) $f(x,y) = ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$

प्रतिच्छेद बिन्दु के लिए $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0,\ 2ax + 2hy + 2g = 0$.

$\because x = 0$, $\therefore y$-अक्ष पर अन्तःखण्ड $y = -g/h$.

y के इस मान को $f(x,y)$ में रखने पर,

$\frac{bg^2}{h^2} + 2f(-g/h) + c = 0$ या $bg^2 + ch^2 = 2fgh$

15. (a,b,c,d) वृत्त के समीकरण को समघातीय बनाने पर,

$x^2 - 6xy + y^2 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{6y \pm \sqrt{(36-4)y^2}}{2} = \frac{6y \pm 4y\sqrt{2}}{2} = 3y \pm 2\sqrt{2}y$

अतः समीकरण $x = (3+2\sqrt{2})y$ व $x = (3-2\sqrt{2})y$ हैं।

उपरोक्त समीकरणों के परिमेयकरण से $y - (3+2\sqrt{2})x = 0$ तथा $y - (3-2\sqrt{2})x = 0$.

* * *