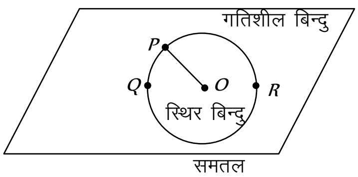
CHAPTER - 17
वृत्त

परिभाषा (Definition)

वृत्त उस बिन्दु का बिन्दुपथ है, जो किसी समतल में इस प्रकार गति करता है कि उसकी किसी स्थिर बिन्दु से दूरी सदैव नियत रहती है। स्थिर बिन्दु वृत्त का केन्द्र तथा नियत दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है।



वृत्त के मानक रूप में समीकरण
(Standard forms of equation of a circle)

(1) **वृत्त का व्यापक समीकरण :** वृत्त का व्यापक समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ होता है, जहाँ g, f, c अचर हैं।

(i) वृत्त का केन्द्र $(-g, -f)$ अर्थात्

$(-\frac{1}{2}x$ का गुणांक, $-\frac{1}{2}y$ का गुणांक) है।

(ii) वृत्त की त्रिज्या $\sqrt{g^2+f^2-c}$ है।

वृत्त की प्रकृति

(i) यदि $g^2+f^2-c>0$, तब वृत्त की त्रिज्या वास्तविक होगी। अतः इस स्थिति में समतल में एक वृत्त बनाया जा सकता है।

(ii) यदि $g^2+f^2-c=0$, तब वृत्त की त्रिज्या शून्य होगी। इस प्रकार के वृत्त को बिन्दु वृत्त कहते हैं।

(iii) यदि $g^2+f^2-c<0$, तब वृत्त की त्रिज्या काल्पनिक होगी। अतः इस स्थिति में समतल में वृत्त नहीं बनाया जा सकता है।

द्विघातीय व्यापक समीकरण के लिए प्रतिबन्ध जो कि एक वृत्त को निरूपित करता हो।

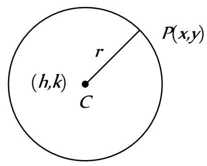
$ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ एक वृत्त को प्रदर्शित करता है, (i) $a=b\neq 0$ (ii) $h=0$

(iii) $\Delta = abc+2hgf-af^2-bg^2-ch^2\neq 0$

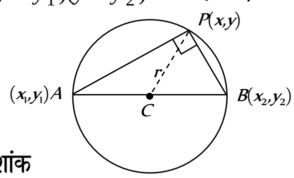
(2) **वृत्त के समीकरण का केन्द्रीय रूप :** वृत्त, जिसका केन्द्र (h, k) तथा त्रिज्या r है, का समीकरण $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ होगा।

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

यदि वृत्त का केन्द्र मूलबिन्दु हो, तो वृत्त का समीकरण $x^2+y^2=r^2$ होगा।



(3) **वृत्त, जिसका व्यास दिया हो :** उस वृत्त, जिसके व्यास के सिरों के निर्देशांक (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) हैं, का समीकरण $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ होगा।



(4) **प्राचलिक निर्देशांक**

(i) वृत्त $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ पर स्थित किसी बिन्दु के प्राचलिक निर्देशांक $(h+r\cos\theta, k+r\sin\theta)$ होते हैं, जहाँ $0\le\theta<2\pi$.

विशेष स्थिति में, वृत्त $x^2+y^2=r^2$ पर स्थित किसी बिन्दु के प्राचलिक निर्देशांक $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ होते हैं।

(ii) वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ पर स्थित किसी बिन्दु के प्राचलिक निर्देशांक हैं, $x=-g+\sqrt{(g^2+f^2-c)}\cos\theta$

तथा $y=-f+\sqrt{(g^2+f^2-c)}\sin\theta$, $(0\le\theta<2\pi)$

(5) **दिए गए प्रतिबन्धों के लिए वृत्त का समीकरण**

(i) तीन असमरैखिक बिन्दुओं $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण है,

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

(2) यदि दिए हुए तीन बिन्दुओं में से किन्हीं दो बिन्दुओं को वृत्त $S=0$ के व्यास के सिरों के रूप में लेते हैं तथा दोनों बिन्दुओं से गुजरने वाली सरल रेखा का समीकरण $L=0$ हो, तब वृत्त का अभीष्ट समीकरण $S+\lambda L=0$ होता है, जहाँ λ एक प्राचल है, जिसे समीकरण में तीसरे बिन्दु को रखकर ज्ञात करते हैं।

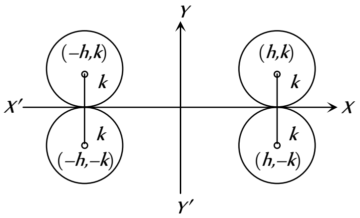
वृत्त के समीकरण के विशिष्ट रूप
(Equation of a circle in some special cases)

(1) जब वृत्त का केन्द्र (h,k) हो तथा यह मूलबिन्दु से गुजरता है, तब वृत्त का समीकरण होगा, $(x-h)^2+(y-k)^2=h^2+k^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-2hx-2ky=0$.

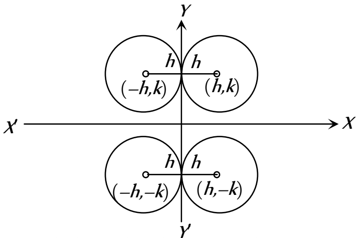
(2) यदि वृत्त x-अक्ष को स्पर्श करे, तब समीकरण होगा,

$(x\pm h)^2+(y\pm k)^2=k^2$ अर्थात् चार स्थितियाँ होंगी।



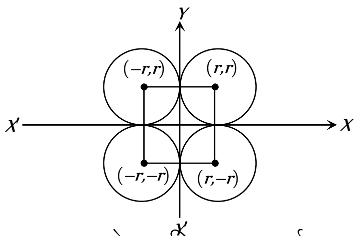
(3) यदि वृत्त y-अक्ष को स्पर्श करे, तब समीकरण होगा,

$(x\pm h)^2+(y\pm k)^2=h^2$ अर्थात् चार स्थितियाँ होंगी।

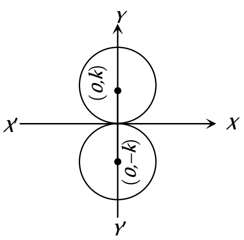


(4) यदि वृत्त दोनों अक्षों को स्पर्श करे, तब समीकरण होगा,

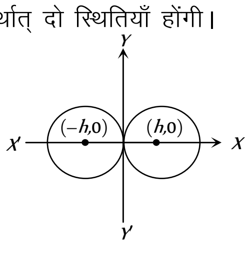
$(x\pm r)^2+(y\pm r)^2=r^2$ अर्थात् चार स्थितियाँ होंगी।



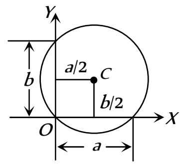
(5) यदि वृत्त x-अक्ष को मूलबिन्दु पर स्पर्श करता है, तो समीकरण होगा $x^2+(y\pm k)^2=k^2 \Rightarrow x^2+y^2\pm 2ky=0$ अर्थात् दो स्थितियाँ होंगी।



(6) यदि वृत्त y-अक्ष को मूलबिन्दु पर स्पर्श करता है, तो समीकरण होगा $(x\pm h)^2+y^2=h^2 \Rightarrow x^2+y^2\pm 2xh=0$ अर्थात् दो स्थितियाँ होंगी।



(7) यदि वृत्त मूलबिन्दु से गुजरे तथा अक्षों से क्रमशः a तथा b अंतःखण्ड काटे, तब वृत्त का समीकरण है, $x^2+y^2-ax-by=0$ तथा केन्द्र $(a/2,\, b/2)$ है। (चार स्थितियाँ होंगी)



अक्षों पर अंतःखण्ड (Intercepts on the axes)

वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ द्वारा x तथा y-अक्षों के साथ काटे गए अंतः खण्ड क्रमशः $2\sqrt{g^2-c}$ तथा $2\sqrt{f^2-c}$ हैं। इसलिए,

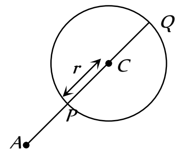
(i) यदि $g^2>c$, तब समीकरण $x^2+2gx+c=0$ के मूल वास्तविक तथा भिन्न होंगे, इसलिए वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, x-अक्ष को दो वास्तविक तथा भिन्न बिंदुओं पर मिलेगा तथा x-अक्ष पर अन्तःखण्ड की लम्बाई $2\sqrt{g^2-c}$ होगी।

(ii) इसी प्रकार, वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, y-अक्ष को $f^2>,=$ या $<c$ के अनुसार क्रमशः वास्तविक तथा भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करता है, या स्पर्श करता है, या वास्तविक बिन्दुओं पर नहीं मिलता है।

किसी बिन्दु की वृत्त के सापेक्ष स्थिति
(Position of a point with respect to a circle)

एक बिन्दु (x_1,y_1), वृत्त $S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ के बाहर, वृत्त पर अथवा वृत्त के अंदर स्थित हैं, यह $S_1\equiv x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$ के धनात्मक, शून्य अथवा ऋणात्मक होने पर, निर्भर करता है

एक वृत्त से किसी बिन्दु की न्यूनतम तथा महत्तम दूरी : माना $S=0$ एक वृत्त है तथा $A(x_1,y_1)$ एक बिन्दु है। यदि वृत्त का व्यास बिन्दु P तथा Q से गुजरता है, तब $AP=AC-r=$ न्यूनतम दूरी; $AQ=AC+r=$ महत्तम दूरी, जहाँ 'r' त्रिज्या तथा C वृत्त का केन्द्र है।



वृत्त तथा रेखा का प्रतिच्छेदन
(Intersection of a line and a circle)

(1) **किसी रेखा द्वारा एक वृत्त पर काटे गये अंतःखण्ड की लंबाई :** रेखा $y=mx+c$ द्वारा $x^2+y^2=a^2$ पर काटे गये अंतःखण्ड की लंबाई $2\sqrt{\dfrac{a^2(1+m^2)-c^2}{1+m^2}}$ होती है।

एक रेखा $y=mx+c$ एवं एक वृत्त $x^2+y^2=a^2$ तब, (i) यदि $a^2(1+m^2)-c^2>0$ रेखा, वृत्त को वास्तविक तथा भिन्न बिन्दुओं पर मिलती है।

(ii) यदि $c^2=a^2(1+m^2)$ रेखा, वृत्त को स्पर्श करती है।

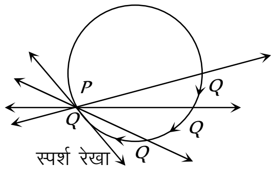
(iii) यदि $a^2(1+m^2)-c^2<0$ रेखा, वृत्त को दो काल्पनिक बिन्दुओं पर मिलती है।

दिये हुए बिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखा
(Tangent to a circle at a given point)

(1) **बिन्दु रूप**

(i) वृत्त $x^2+y^2=a^2$ की (x, y) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $xx_1+yy_1=a^2$ है।

(ii) वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ की (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$ है।



(2) **प्राचलिक समीकरण :** चूँकि वृत्त $x^2+y^2=a^2$ के प्राचलिक निर्देशांक $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ होते हैं, तब $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $x.a\cos\theta+y.a\sin\theta=a^2$ या $x\cos\theta+y\sin\theta=a$ है।

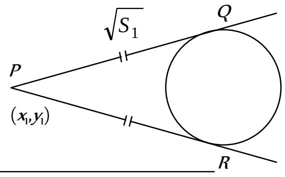
(3) **प्रवणता रूप :** सरल रेखा $y=mx+c$, वृत्त $x^2+y^2=a^2$ को स्पर्श करेगी यदि $c^2=a^2(1+m^2)$ तथा स्पर्श रेखा $y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}$ के स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{\mp ma}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{\pm a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$ होंगे।

स्पर्श रेखा की लम्बाई ज्ञात करने के लिए x^2 व y^2 के गुणांक को इकाई में परिवर्तित कर लेते हैं।

स्पर्श रेखा की लम्बाई (Length of tangent)

माना PQ तथा PR, $P(x_1, y_1)$ से

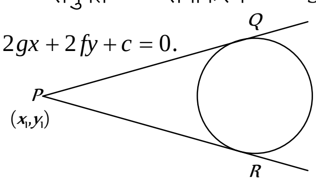
वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ पर खींची गयी स्पर्श रेखायें हैं, तब $PQ=PR$ को स्पर्श रेखा की लंबाई कहते हैं।



$PQ=PR=\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}=\sqrt{S_1}$.

स्पर्श रेखायुग्म (Pair of tangents)

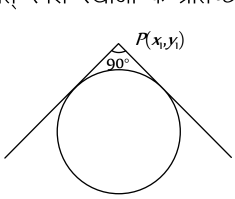
एक बाह्य बिन्दु $P(x_1, y_1)$ से वृत्त $S=x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ पर खींची गयी स्पर्श रेखायें PQ तथा PR हैं। उनका संयुक्त समीकरण $SS_1=T^2$ है। $S=x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.



जहाँ $S=0$ वृत्त का समीकरण है, $T=0$, (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण तथा S_1 x को x_1 से तथा y को y_1 से प्रतिस्थापित कर प्राप्त करते हैं।

नियामक वृत्त (Director circle)

किसी वृत्त पर खींची गयी दो परस्पर लम्बवत् स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद



बिन्दु का बिन्दुपथ, उस वृत्त का नियामक वृत्त कहलाता है।

यदि यह परस्पर लंबवत् रेखाओं को प्रदर्शित करे, तो नियामक वृत्त का समीकरण $x^2+y^2=2a^2$ होगा।

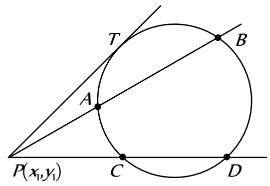
स्पष्टतः नियामक वृत्त संकेन्द्रीय वृत्त होता है, जिसकी त्रिज्या दिए गये वृत्त की त्रिज्या का $\sqrt{2}$ गुना होती है।

वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ का नियामक वृत्त

$$x^2+y^2+2gx+2fy+2c-g^2-f^2=0 \text{ होगा।}$$

वृत्त के सापेक्ष बिन्दु की शक्ति
(Power of point with respect to a circle)

माना $P(x_1, y_1)$, वृत्त के बाहर एक बिन्दु है तथा PAB और PCD दो प्रतिच्छेदी रेखाखण्ड हैं।



वृत्त $S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ के सापेक्ष बिन्दु P की शक्ति $PA\,.\,PB$ के बराबर होती है, जो कि $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=S_1$ के बराबर है।

$\therefore$ शक्ति, वृत्त के लिए सदैव नियत रहती है, अर्थात् A तथा B से स्वतंत्र होती है।

$$\therefore \quad PA\,.\,PB=PC\,.\,CD=(PT)^2=S_1=(\sqrt{S_1})^2$$

$$\therefore \quad PA\,.\,PB=(\sqrt{S_1})^2= \text{ स्पर्शरेखा की लंबाई का वर्ग}$$

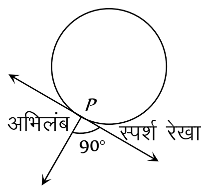
यदि P वृत्त के बाहर है, अंदर है या वृत्त पर है, तब $PA\,.\,PB$ क्रमशः धनात्मक, ऋणात्मक अथवा शून्य होगा।

दिये गए किसी बिन्दु पर वृत्त का अभिलंब
(Normal to a circle at a given point)

वृत्त के किसी बिन्दु पर अभिलंब वह सरल रेखा है, जो कि स्पर्श रेखा के लंबवत् होती है तथा सदैव वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरती है।

(1) **अभिलंब का समीकरणः** वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलंब का समीकरण है, $y-y_1=\frac{y_1+f}{x_1+g}(x-x_1)$

या $\frac{x-x_1}{x_1+g}=\frac{y-y_1}{y_1+f}$.



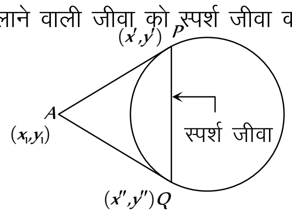
वृत्त $x^2+y^2=a^2$ का बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलंब $xy_1-x_1y=0$ अथवा $\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}$ है।

(2) **प्राचलिक रूपः** चूँकि वृत्त $x^2+y^2=a^2$ के प्राचलिक निर्देशांक $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ हैं।

$\therefore$ बिन्दु $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ पर अभिलम्ब का समीकरण है, $\frac{x}{a\cos\theta}=\frac{y}{a\sin\theta}$ या $\frac{x}{\cos\theta}=\frac{y}{\sin\theta}$ या $y=x\tan\theta$ या $y=mx$, जहाँ $m=\tan\theta$, जो कि अभिलंब की प्रवणता है।

वृत्त की स्पर्श जीवा (Chord of contact of tangents)

(1) **स्पर्श जीवा :** वृत्त के बाहर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाओं को मिलाने वाली जीवा को स्पर्श जीवा कहते हैं।



(2) **स्पर्श जीवा का समीकरण :** किसी बिन्दु (x_1, y_1) से वृत्त $x^2+y^2=a^2$ पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा का समीकरण $xx_1+yy_1=a^2$ होता है।

वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ की बिन्दु (x_1,y_1) पर स्पर्श जीवा का समीकरण $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$ है।

यदि बिन्दु (x_1,y_1) वृत्त पर स्थित हो, तो वृत्त की स्पर्श जीवा तथा स्पर्श रेखा सम्पाती होंगी।

स्पर्श जीवा की लंबाई $=2\sqrt{r^2-p^2}$; (जहाँ p वृत्त के केन्द्र से जीवा की लम्बवत् दूरी है)

ΔAPQ का क्षेत्रफल $=\frac{a(x_1^2+y_1^2-a^2)^{3/2}}{x_1^2+y_1^2}$.

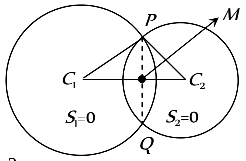
(3) **दिए हुए बिन्दु पर समद्विभाजित जीवा का समीकरण :** वृत्त $S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ की बिन्दु (x_1,y_1) पर समद्विभाजित जीवा का समीकरण $T=S'$ है। अर्थात्

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c.$$

दो वृत्तों की उभयनिष्ठ जीवा (Common chord of two circles)

(1) **परिभाषा :** दो वृत्तों के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मिलाने वाली जीवा, उभयनिष्ठ जीवा कहलाती है।

(2) **उभयनिष्ठ जीवा का समीकरण :** दो वृत्तों की उभयनिष्ठ जीवा का समीकरण



$$S_1\equiv x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0 \quad ....(i)$$

तथा $S_2\equiv x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ ....(ii)

$2x(g_1-g_2)+2y(f_1-f_2)+c_1-c_2=0$ अर्थात् $S_1-S_2=0$.

(3) **उभयनिष्ठ जीवा की लंबाई :**

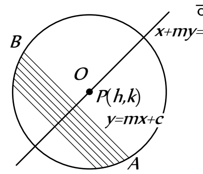
$$PQ=2(PM)=2\sqrt{C_1P^2-C_1M^2}$$

जहाँ C_1P = वृत्त $(S=0)$ की त्रिज्या, तथा C_1M = केन्द्र C_1 से उभयनिष्ठ जीवा PQ की लम्बवत् दूरी

वृत्त का व्यास (Diameter of a circle)

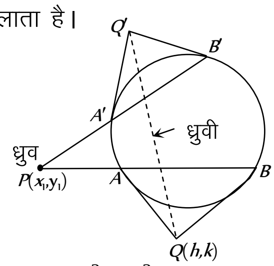
किसी वृत्त की समान्तर जीवाओं के निकाय के मध्य बिन्दुओं के बिन्दुपथ को उस वृत्त का व्यास कहते हैं।

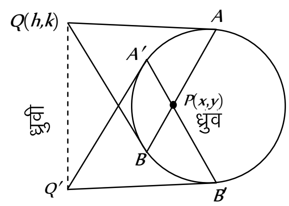
समान्तर जीवा निकाय $y=mx+c$ के सापेक्ष वृत्त $x^2+y^2=a^2$ के व्यास का समीकरण $x+my=0$ होता है।



ध्रुव तथा ध्रुवी (Pole and Polar)

माना $P(x_1,y_1)$ वृत्त के अंदर या बाहर स्थित कोई बिन्दु है। जीवाएँ AB तथा $A'B'$ खींची, जो कि P से गुजरती हैं। यदि वृत्त की A तथा B पर स्पर्श रेखायें बिन्दु $Q(h, k)$ पर मिलती हों, तब Q का बिन्दुपथ वृत के सापेक्ष P की ध्रुवी कहलाता है तथा P ध्रुव कहलाता है। यदि वृत्त की A' तथा B' पर स्पर्श रेखाएँ Q' पर मिलती हों, तो QQ' ध्रुवी तथा P ध्रुव कहलाता है।





वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ की ध्रुवी का समीकरण (x_1,y_1) के सापेक्ष $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$ होता है। यदि वृत्त का समीकरण $x^2+y^2=a^2$ हो, तो (x_1,y_1) के सापेक्ष ध्रुवी का समीकरण $xx_1+yy_1-a^2=0$ होता है।

माना रेखा $lx+my+n=0$ का वृत्त $x^2+y^2=a^2$ के सापेक्ष ध्रुव (x_1,y_1) है तब वृत्त $x^2+y^2=a^2$ के सापेक्ष ध्रुवी का समीकरण $xx_1+yy_1-a^2=0$ होगा, जो कि $lx+my+n=0$ के समान है।

तब $\frac{x_1}{l}=\frac{y_1}{m}=-\frac{a^2}{n}$, $\therefore$ $x_1=-\frac{a^2l}{n}$ तथा $y_1=-\frac{a^2m}{n}$.

अतः अभीष्ट ध्रुव $\left(-\frac{a^2l}{n},-\frac{a^2m}{n}\right)$ है।

ध्रुव तथा ध्रुवी के गुणधर्म

(i) यदि $P(x_1,y_1)$ की वृत्त के सापेक्ष ध्रुवी $Q(x_2,y_2)$ से गुजरती है, तब Q की ध्रुवी P से गुजरेगी । इस प्रकार के बिन्दु संयुग्मी बिन्दु कहलाते हैं।

(ii) यदि रेखा $ax+by+c=0$ का वृत्त के सापेक्ष ध्रुव अन्य रेखा $a_1x+b_1y+c_1=0$ पर स्थित हो, तब दूसरी रेखा का ध्रुव भी प्रथम रेखा पर स्थित होगा तथा इस प्रकार की रेखाओं को संयुग्मी रेखायें कहते हैं।

दो वृत्तों की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखायें (Common tangents to two circles)

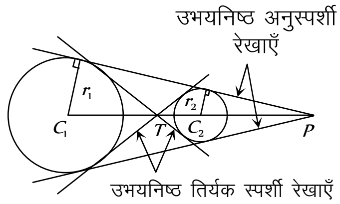
माना दो वृत्त $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r_1^2$ ....(i)

तथा $(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=r_2^2$ .....(ii) हैं;

जिनके केन्द्र $C_1(x_1,y_1)$ तथा $C_2(x_2,y_2)$ तथा त्रिज्यायें क्रमशः r_1 तथा r_2 हैं, तब निम्नलिखित स्थितियाँ होंगी :

स्थिति I : जब $|C_1C_2|>r_1+r_2$ अर्थात् केन्द्रों के बीच की दूरी, त्रिज्याओं के योग से अधिक हो।

इस स्थिति मे चार उभयनिष्ठ स्पर्श रेखायें खींची जा सकती हैं, जिनमें दो उभयनिष्ठ अनुस्पर्शी रेखायें तथा दो उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्शी रेखायें होती हैं।



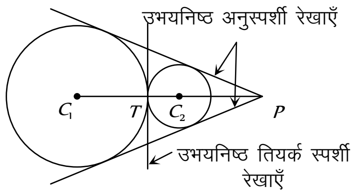
उभयनिष्ठ अनुस्पर्शी रेखाओं तथा उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु क्रमशः P व T दोनों वृत्तों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा पर सदैव स्थित होते हैं तथा ये वृत्तों की त्रिज्याओं को क्रमशः बाह्यतः एवं अन्तः विभाजित करते हैं।

$\frac{C_1P}{C_2P}=\frac{r_1}{r_2}$ (बाह्यतः) तथा $\frac{C_1T}{C_2T}=\frac{r_1}{r_2}$ (अन्तः)

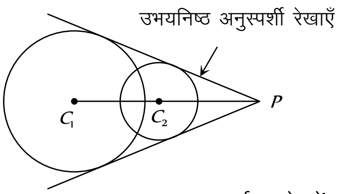
अतः बिन्दुओं P व T के निर्देशांक

$$P\equiv\left(\frac{r_1x_2-r_2x_1}{r_1-r_2},\frac{r_1y_2-r_2y_1}{r_1-r_2}\right) \text{तथा } T\equiv\left(\frac{r_1x_2+r_2x_1}{r_1+r_2},\frac{r_1y_2+r_2y_1}{r_1+r_2}\right)$$

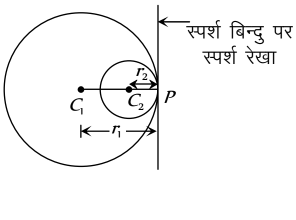
स्थिति II : जब $|C_1C_2|=r_1+r_2$ अर्थात् केन्द्रों के बीच दूरी, त्रिज्याओं के योग के बराबर हो। इस स्थिति में दोनों उभयनिष्ठ अनुस्पर्शी रेखायें वास्तविक तथा भिन्न, जबकि तिर्यक स्पर्शी रेखायें सम्पाती होती हैं।



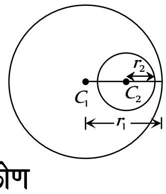
स्थिति III : जब $|r_1-r_2|<|C_1C_2|<r_1+r_2$ अर्थात् केन्द्रों के बीच की दूरी, त्रिज्याओं के योग से कम होती है। इस स्थिति में दोनों उभयनिष्ठ अनुस्पर्शी रेखायें वास्तविक तथा भिन्न होती हैं जबकि तिर्यक स्पर्शी रेखायें काल्पनिक होती हैं।



स्थिति IV : जब $|C_1C_2|=|r_1-r_2|$, अर्थात् केन्द्रों के बीच की दूरी, त्रिज्याओं के अंतर के बराबर हो। इस स्थिति में दो स्पर्श रेखायें वास्तविक तथा संपाती जबकि अन्य दो काल्पनिक होती हैं।



स्थिति V : जब $|C_1C_2|<|r_1-r_2|$ अर्थात् केन्द्रों के बीच की दूरी त्रिज्याओं के अन्तर से कम हो, तब इस स्थिति में सभी चारों स्पर्श रेखायें काल्पनिक होंगी।

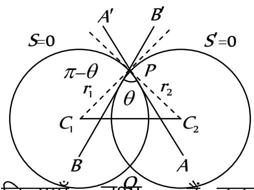


दो वृत्तों का प्रतिच्छेदन कोण
(Angle of intersection of two circles)

दो वृत्तों $S=0$ तथा $S'=0$ का प्रतिच्छेदन कोण, उनके प्रतिच्छेद बिन्दु पर स्पर्श रेखाओं के बीच कोण के बराबर होता है।

यदि $S\equiv x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$

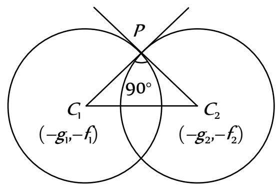
$S'\equiv x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$



दो वृत्त, जिनकी त्रिज्याएँ r_1 तथा r_2 हैं, उनके केन्द्रों के बीच की दूरी d है, तथा उनके बीच का कोण θ है, तब $\cos\theta=\frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2}$

या $\left\{\cos\theta=\frac{2(g_1g_2+f_1f_2)-(c_1+c_2)}{2\sqrt{g_1^2+f_1^2-c_1}\sqrt{g_2^2+f_2^2-c_2}}\right\}$.

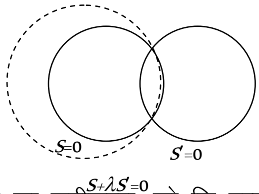
वृत्तों के लांबिक होने का प्रतिबंध : यदि दो वृत्तों का प्रतिच्छेदन कोण एक समकोण $(\theta=90^o)$ हो, तो इस प्रकार के वृत्त लांबिक या समकोणिक वृत्त होते हैं तथा समकोणिक वृत्तों के लिए प्रतिबंध $2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2$ होता है।



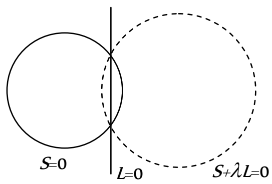
वृत्त निकाय (Family of circles)

(1) वृत्त निकाय का समीकरण, जो कि दिए हुए वृत्त $S=0$ तथा $S'=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर गुजरता है,

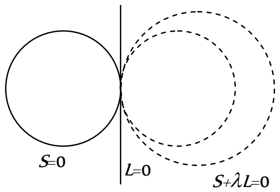
$S+\lambda S'=0$ (जहाँ λ एक प्राचल है, $\lambda\neq-1$)



(2) वृत्त निकाय का समीकरण, जो कि वृत्त $S=0$ तथा रेखा $L=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरता है, $S+\lambda L=0$ (जहाँ λ प्राचल है)



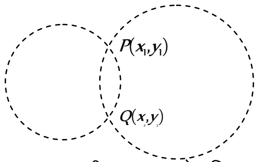
(3) वृत्त निकाय का समीकरण, जो कि वृत्त $S=0$ तथा $L=0$ के स्पर्श बिन्दु से होकर गुजरता है, $S+\lambda L=0$ (जहाँ λ एक प्राचल है)



(4) वृत्त निकाय का समीकरण, जो बिन्दुओं $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ से गुजरता है,

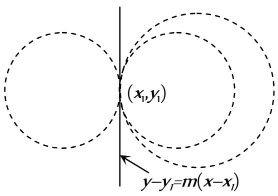
$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+\lambda\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0 ,$$

(जहाँ λ एक प्राचल है)



(5) उस वृत्त निकाय का समीकरण, जो कि $y-y_1=m(x-x_1)$ को प्रत्येक निश्चित m के लिए स्पर्श करे,

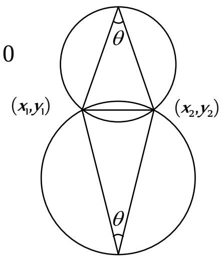
$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+\lambda\{(y-y_1)-m(x-x_1)\}=0$ तथा यदि m अनिश्चित है, तब वृत्त निकाय $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+\lambda(x-x_1)=0$ होगा। (जहाँ λ एक प्राचल है)



(6) चित्र में दिए गये वृत्तों का समीकरण

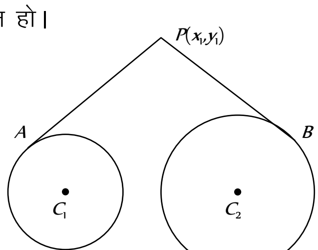
$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)\pm\cot\theta\{(x-x_1)(y-y_2)$

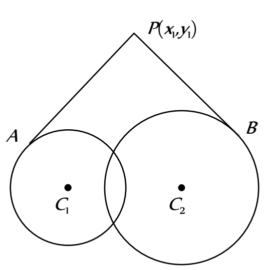
$-(x-x_2)(y-y_1)\}=0$



मूलाक्ष (Radical axis)

दो वृत्तों का मूलाक्ष, उस बिन्दु का बिन्दुपथ है, जो इस प्रकार गमन करता है कि इससे दोनों वृत्तों पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं की लंबाई समान हो।





दो वृत्तों के मूलाक्ष का समीकरण $S_1 - S_2 = 0$ अर्थात् $2x(g_1-g_2)+2y(f_1-f_2)+c_1-c_2=0$, जो एक सरल रेखा है।

मूलाक्ष के गुणधर्म

(i) दो प्रतिच्छेदी वृत्तों का मूलाक्ष तथा उभयनिष्ठ जीवा एक समान (Identical) होती है।

(ii) मूलाक्ष, वृत्तों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा के लंबवत् होता है।

(iii) यदि दो वृत्त, एक तीसरे वृत्त को समकोणिक प्रतिच्छेद करें, तो दो वृत्तों का मूलाक्ष, तीसरे वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरता है।

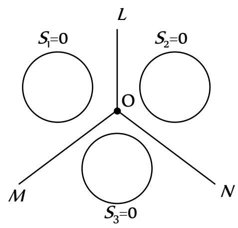
मूलकेन्द्र (Radical centre)

तीन वृत्तों को युग्मों में लेने पर प्राप्त मूलाक्ष, एक बिन्दु पर मिलते हैं, जिसे मूलकेन्द्र कहते हैं।

माना तीन वृत्त $S_1=0$ .....(i),

$S_2=0$ .....(ii)

तथा $S_3=0$ ....(iii) हैं।



माना सरल रेखायें OL तथा OM, O पर मिलती हैं। O से गुजरने वाली किसी सरल रेखा का समीकरण, $(S_1-S_2)+\lambda(S_3-S_1)=0$ है, जहाँ λ कोई अचर है।

$\lambda=1$ के लिए, यह समीकरण $S_2-S_3=0$ हो जाता है, जो कि ON का समीकरण है।

अतः तीसरा मूलाक्ष भी उसी बिन्दु से गुजरता है, जहाँ सरल रेखा OL तथा OM मिलते हैं। उपरोक्त चित्र में O मूलकेन्द्र है ।

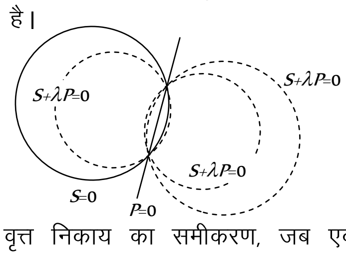
मूलकेन्द्र के गुणधर्म

(i) मूलकेन्द्र के निर्देशांक, समीकरण $S_1=S_2=S_3=0$ को हल करने पर प्राप्त होते हैं।

(ii) तीन वृत्तों के व्यास से मिलकर बने त्रिभुज का लंबकेन्द्र, वृत्तों का मूलकेन्द्र होता है।

समाक्ष वृत्त निकाय (Co-axial system of circles)

एक वृत्त निकाय, जिसके प्रत्येक युग्म के मूलाक्ष समान हों, समाक्ष वृत्त निकाय कहलाता है।



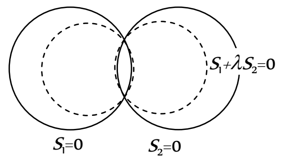
(i) समाक्ष वृत्त निकाय का समीकरण, जब एक मूलाक्ष तथा वृत्त निकाय के समीकरण क्रमशः $P\equiv lx+my+n=0$

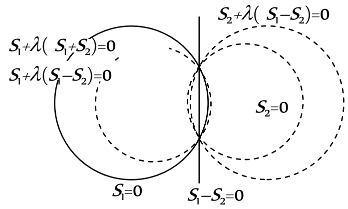
तथा $S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ हैं,

$S + \lambda P = 0$ होगा, (λ एक स्वेच्छ अचर है)

(2) यदि निकाय के दो वृत्तों के समीकरण

$$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$$





तथा $S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ हैं, तो समाक्ष वृत्त निकाय का समीकरण, $S_1 + \lambda(S_1 - S_2) = 0$, $(\lambda \neq -1)$ अथवा $S_2 + \lambda_1(S_1 - S_2) = 0$, $(\lambda_1 \neq -1)$ होगा।

दूसरा रूप $S_1 + \lambda S_2 = 0$, $(\lambda \neq -1)$ है।

(3) समाक्ष वृत्त निकाय का सरलतम रूप में समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$ है, जहाँ g चर तथा c अचर है।

सीमान्त बिन्दु (Limiting points)

समाक्ष वृत्तों के निकाय का सीमान्त बिन्दु, इस निकाय में स्थित बिन्दु वृत्तों का केन्द्र होता है। (वृत्त जिनकी त्रिज्या शून्य हो, बिन्दु वृत्त कहलाते हैं)

माना वृत्त का समीकरण है, $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$ .....(i),

जहाँ g चर तथा c एक अचर है।

$\therefore$ वृत्त (i) का केन्द्र $(-g, 0)$ तथा त्रिज्या $\sqrt{(g^2 - c)}$ है।

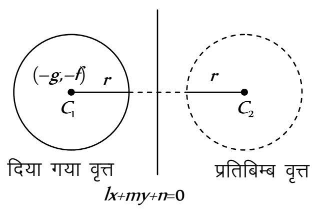
माना $\sqrt{g^2 - c} = 0 \Rightarrow g = \pm\sqrt{c}$

अतः हम दिए गये समाक्ष वृत्तों के निकाय के दो सीमान्त बिन्दु $(\sqrt{c}, 0)$ तथा $(-\sqrt{c}, 0)$ प्राप्त करते हैं।

स्पष्टतः, उपरोक्त सीमान्त बिन्दु $c >, =, < 0$ के अनुसार क्रमशः वास्तविक तथा भिन्न या वास्तविक एवं संपाती या काल्पनिक हैं।

रैखिक दर्पण के द्वारा वृत्त का प्रतिबिम्ब (Image of the circle by the line mirror)

माना वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ तथा रैखिक दर्पण $lx + my + n = 0$ है। इस स्थिति में वृत्त की त्रिज्या अपरिवर्तित रहती है, लेकिन उसका केन्द्र परिवर्तित हो जाता है। माना प्रतिबिम्ब वृत्त का केन्द्र (x_1, y_1) है।



(C_1C_2 की प्रवणता) $\times$ ($lx + my + n = 0$ की प्रवणता) $= -1$ .....(i)

और $C_1(-g, -f)$ तथा $C_2(x_1, y_1)$ का मध्य बिन्दु $lx + my + n = 0$ पर स्थित है, अर्थात् $l\left(\frac{x_1 - g}{2}\right) + m\left(\frac{y_1 - f}{2}\right) + n = 0$ .....(ii)

समीकरण (i) तथा (ii) को हल करने पर, (x_1, y_1) प्राप्त होता है।

$\therefore$ अभीष्ट प्रतिबिम्ब वृत्त का समीकरण

$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$ है, जहाँ $r = \sqrt{(g^2 + f^2 - c)}$.

Tips & Tricks

- यदि एक चर बिन्दु इस प्रकार गमन करता है कि इसकी एक त्रिभुज के शीर्षों से दूरियों के वर्गों का योग नियत रहे, तब बिन्दु का बिन्दुपथ एक वृत्त होता है, जिसका केन्द्र त्रिभुज का केन्द्रक होता है।

- समीकरण $y = mx \pm a\sqrt{1 + m^2}$ द्वारा वृत्त की दो स्पर्श रेखायें प्रदर्शित होती हैं तथा व्यास के सिरों से गुजरने वाली समांतर रेखायें हैं।

- रेखा $ax + by + c = 0$, वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ की एक स्पर्श रेखा है, यदि और केवल यदि $c^2 = r^2(a^2 + b^2)$.

- वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ को रेखा $lx + my + n = 0$ स्पर्श करेगी, यदि $(lg + mf - n)^2 = (l^2 + m^2)(g^2 + f^2 - c)$.

- वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ की स्पर्श रेखा का प्रवणता रूप में समीकरण $y = mx + mg - f \pm \sqrt{(g^2 + f^2 - c)}\sqrt{(1 + m^2)}$ होता है।

- वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c_1 = 0$ पर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ पर खींची गयी स्पर्श रेखा की लंबाई $\sqrt{c - c_1}$ होती है।

- यदि मूलबिन्दु से वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ पर खींची गयी दो स्पर्श रेखायें परस्पर लंबवत् हों, तब $g^2 + f^2 = 2c$.

- यदि बिन्दु (a, b) पर वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ की स्पर्श रेखा निर्देशाक्षों से बिन्दु A तथा B पर मिलती है तथा O मूलबिन्दु हो, तब त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल $= \frac{r^4}{2ab}$.

- (α, β) से वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण $2\tan^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - a^2}}\right)$ होता है।

- यदि OA तथा OB मूलबिन्दु से वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ पर खींची गई स्पर्श रेखायें हैं तथा C वृत्त का केन्द्र है, तब चतुर्भुज $OACB$ का क्षेत्रफल $\sqrt{c(g^2 + f^2 - c)}$

होता है।

✍ यदि वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + c^2 = 0$

तथा $x^2 + y^2 + 2fy + c^2 = 0$

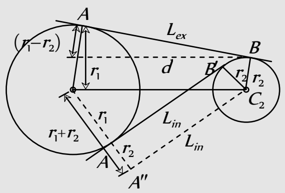
एक दूसरे को स्पर्श करें, तो $\frac{1}{g^2} + \frac{1}{f^2} = \frac{1}{c^2}$.

✍ यदि रेखा $lx + my + n = 0$ वृत्त $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ की स्पर्श रेखा है, तब $(hl + km + n)^2 = a^2(l^2 + m^2)$.

✍ यदि O मूलबिन्दु है एवं OP, OQ वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ की स्पर्श रेखायें है, तब त्रिभुज OPQ का परिकेन्द्र $\left(\frac{-g}{2}, \frac{-f}{2}\right)$ होगा।

✍ यदि दिये गये वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ की त्रिज्या r है एवं यह दोनों अक्षों को स्पर्श करता है, तब $|g| = |f| = \sqrt{c} = r$.

✍ दो वृत्तों की उभयनिष्ठ अन्तःस्पर्श रेखा तथा उभयनिष्ठ बाह्य स्पर्श रेखा की लम्बाई $L_{ex} = \sqrt{d^2 + (r_1 - r_2)^2}$



तथा उभयनिष्ठ अन्तःस्पर्श रेखा की लम्बाई

$L_{in} = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$, [केवल $d > (r_1 + r_2)$ के लिए]

जहाँ d केन्द्रों के बीच की दूरी अर्थात् $|C_1C_2| = d$ है तथा r_1 और r_2 दोनों वृत्तों की त्रिज्यायें हैं।

✍ यदि रेखा $y = mx + c$ वृत्त जिसकी त्रिज्या r तथा केन्द्र (a, b) है, का अभिलंब है, तब $b = ma + c$.

✍ वृत्त $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ द्वारा बिन्दु $P(x_1, y_1)$ पर अंतरित कोण θ है, तब $\cot\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{g^2 + f^2 - c}}$.

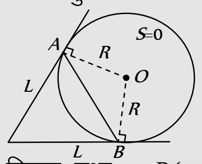
✍ वृत्त $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ और $x^2 + y^2 + bx + ay + c = 0$ की उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई $\sqrt{\frac{1}{2}(a+b)^2 - 4c}$ है।

✍ रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ द्वारा वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ पर काटे अंतःखण्ड के जीवा की लंबाई $2\sqrt{\left(\frac{r^2(a^2 + b^2) - a^2b^2}{a^2 + b^2}\right)}$ होती है।

✍ वृत्त $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ एवं $x^2 + (y-b)^2 = b^2$ की उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई $\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ है।

✍ वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ की स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा की मूलबिन्दु तथा बिन्दु (g, f) से दूरी $\frac{1}{2}\frac{g^2 + f^2 - c}{\sqrt{g^2 + f^2}}$ है।

✍ स्पर्श जीवा की लम्बाई $AB = \frac{2LR}{\sqrt{(R^2 + L^2)}}$ तथा स्पर्श रेखा युग्म एवं स्पर्श जीवा से निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{RL^3}{R^2 + L^2}$ होता है,



जहाँ R वृत्त की त्रिज्या तथा L, $P(x_1, y_1)$ से वृत्त $S=0$ पर स्पर्श रेखा की लम्बाई है। यहाँ $L = \sqrt{S_1}$ है।

✍ वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ की एक जीवा, जो कि केन्द्र पर α कोण अन्तरित करती है, के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ $x^2 + y^2 = (a\cos\alpha/2)^2$ होगा।

✍ वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ की एक जीवा, जो कि केन्द्र पर समकोण अंतरित करती है, के मध्यबिन्दु का बिन्दुपथ $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$ होता है।

✍ वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ के केन्द्र पर समकोण बनाने वाली जीवाओं के मध्यबिन्दु का बिन्दुपथ $x^2 + y^2 + gx + fy + \frac{c}{2} = 0$ होता है।

✍ यदि रेखाओं $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ को निर्देशांक्षों से मिलाने वाले बिन्दु चक्रीय हों, तब $a_1a_2 = b_1b_2$.

✍ यदि उस वृत्त का समीकरण जिसकी त्रिज्यायें r तथा R है क्रमशः $S = 0$ और $S' = 0$, तब लाम्बिक वृत्त का समीकरण $\frac{S}{r} \pm \frac{S'}{R} = 0$ होता है।

Ordinary Thinking

Objective Questions

वृत्त का समीकरण, वृत्त से सम्बन्धित ज्यामितीय प्रश्न

1. वृत्त $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ के अन्तर्गत एक वर्ग खींचा गया है जिसकी भुजायें निर्देशांक अक्षों के समान्तर हैं। वर्ग का एक शीर्ष है [IIT 1980; DCE 2001]

(a) $(1+\sqrt{2}, -2)$ (b) $(1-\sqrt{2}, -2)$

(c) $(1, -2+\sqrt{2})$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. यदि रेखा $x + 2by + 7 = 0$, वृत्त $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ का एक व्यास हो तो $b =$ [MP PET 1991]

(a) 3 (b) – 5

(c) –1 (d) 5

3. θ के सभी मानों के लिए रेखाओं $x\cos\theta + y\sin\theta = a$ तथा $x\sin\theta - y\cos\theta = b$ के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ है

(a) एक दीर्घवृत्त (b) एक वृत्त

(c) एक परवलय (d) एक अतिपरवलय

4. यदि एक वृत्त जिसका केन्द्र (1, –3) है, रेखा $3x - 4y - 5 = 0$ को स्पर्श करता हो, तो वृत्त की त्रिज्या है

(a) 2 (b) 4

(c) $\frac{5}{2}$ (d) $\frac{7}{2}$

5. यदि वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, x-अक्ष को स्पर्श करता हो, तो

(a) $g = f$ (b) $g^2 = c$

(c) $f^2 = c$ (d) $g^2 + f^2 = c$

6. उस वृत्त का समीकरण जो दोनों अक्षों को स्पर्श करता है तथा जिसकी त्रिज्या a है, होगा [MP PET 1984]

(a) $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$

(b) $x^2 + y^2 + ax + ay - a^2 = 0$

(c) $x^2 + y^2 + 2ax + 2ay - a^2 = 0$

(d) $x^2 + y^2 - ax - ay + a^2 = 0$

7. उस वृत्त का क्षेत्रफल जिसका केन्द्र (1, 2) है तथा जो बिन्दु (4, 6) से होकर जाता है, होगा [MNR 1982; IIT 1980; KCET 1999; MP PET 2002; DCE 2000; Pb. CET 2002]

(a) 5π (b) 10π

(c) 25π (d) इनमें से कोई नहीं

8. वृत्तों $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 + 6x - 2y = 1$ तथा $x^2 + y^2 - 12x + 4y = 1$ के केन्द्र हैं [MP PET 1986]

(a) समान (b) समरेखीय

(c) असमरेखीय (d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि कोई वृत्त बिन्दुओं (0, 0), (a, 0), (0, b) से गुजरता हो तो उसका केन्द्र है [MNR 1975]

(a) (a, b) (b) (b, a)

(c) $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ (d) $\left(\frac{b}{2}, -\frac{a}{2}\right)$

10. उस वृत्त, जिसका केन्द्र (1, –3) है तथा जो रेखा $2x - y - 4 = 0$ को स्पर्श करता है, का समीकरण है

(a) $5x^2 + 5y^2 - 10x + 30y + 49 = 0$

(b) $5x^2 + 5y^2 + 10x - 30y + 49 = 0$

(c) $5x^2 + 5y^2 - 10x + 30y - 49 = 0$

(d) इनमें से कोई नहीं

11. वृत्त $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ स्पर्श करता है [MP PET 1988]

(a) x-अक्ष को (b) y-अक्ष को

(c) x-अक्ष तथा y-अक्ष को (d) इनमें से कोई नहीं

12. उस वृत्त का समीकरण जो दोनों अक्षों को स्पर्श करता है तथा जिसका केन्द्र (x_1, y_1) है, होगा [MP PET 1988]

(a) $x^2 + y^2 + 2x_1(x+y) + x_1^2 = 0$

(b) $x^2 + y^2 - 2x_1(x+y) + x_1^2 = 0$

(c) $x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2$

(d) $x^2 + y^2 + 2xx_1 + 2yy_1 = 0$

13. उस वृत्त का समीकरण जिसकी त्रिज्या 5 है तथा जो वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ को बिन्दु (5, 5) पर बाह्यतः स्पर्श करता है, होगा [Pb. CET 2003; IIT 1979]

(a) $x^2 + y^2 - 18x - 16y - 120 = 0$

(b) $x^2 + y^2 - 18x - 16y + 120 = 0$

(c) $x^2 + y^2 + 18x + 16y - 120 = 0$

(d) $x^2 + y^2 + 18x - 16y + 120 = 0$

14. रेखाएँ $2x - 3y = 5$ तथा $3x - 4y = 7$ एक 154 वर्ग इकाई क्षेत्रफल वाले वृत्त के दो व्यास हैं। वृत्त का समीकरण है [IIT 1989; AIEEE 2003; Kerala (Engg.) 2005]

(a) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 62$ (b) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 47$

(c) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 47$ (d) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 62$

15. एक वृत्त y-अक्ष को बिन्दु (0, 4) पर स्पर्श करता है तथा x-अक्ष से 6 इकाई की जीवा काटता है। वृत्त की त्रिज्या है [MP PET 1992]

(a) 3 (b) 4

(c) 5 (d) 6

16. बिन्दुओं (– 2, 0) तथा (4, 0) से होकर जाने वाले तथा 5 त्रिज्या वाले वृत्तों की संख्या है

(a) एक (b) दो

(c) चार (d) असंख्य

17. उस वृत्त का समीकरण जो x-अक्ष को स्पर्श करता है तथा जिसका केन्द्र (1, 2) है, होगा [MP PET 1984]

(a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

(b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

(c) $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$

(d) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$

18. x-अक्ष तथा y-अक्ष में क्रमशः $2a$ तथा $2b$ लम्बाई के अन्तःखण्ड काटने वाले वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ है

(a) $x + y = a + b$ (b) $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

(c) $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ (d) $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$

19. यदि रेखाएँ $3x-4y+4=0$ तथा $6x-8y-7=0$ एक वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हों, तो वृत्त की त्रिज्या है

[IIT 1984; MP PET 1994, 2002; RPET 1995, 97; Kurukshetra CEE 1998]

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{3}{4}$

(c) $\frac{1}{10}$ (d) $\frac{1}{20}$

20. यदि वृत्त $x^2+y^2-18x+12y+k=0$ की त्रिज्या 11 हो, तो $k=$

(a) 347 (b) 4

(c) -4 (d) 49

21. वृत्त $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ का केन्द्र है

(a) $\left(\frac{x_1+y_1}{2},\frac{x_2+y_2}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{x_1-y_1}{2},\frac{x_2-y_2}{2}\right)$

(c) $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ (d) $\left(\frac{x_1-x_2}{2},\frac{y_1-y_2}{2}\right)$

22. *ABC* एक त्रिभुज है जिसमें कोण *C* समकोण है। यदि बिन्दुओं *A* तथा *B* के निर्देशांक क्रमशः (–3, 4) तथा (3, –4) हों, तो त्रिभुज *ABC* के परिवृत्त का समीकरण है

(a) $x^2+y^2-6x+8y=0$

(b) $x^2+y^2=25$

(c) $x^2+y^2-3x+4y+5=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

23. प्रत्येक अक्ष को मूल बिन्दु से एकल दूरी पर स्पर्शी वृत्त, जो प्रथम पाद में स्थित हो, का समीकरण निम्न है

[RPET 1991; MP PET 1987, 89]

(a) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$

(b) $x^2+y^2-2x-2y-1=0$

(c) $x^2+y^2-2x-2y=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

24. सरल रेखा $y-x=0$ तथा *y*-अक्ष के स्पर्शी वृत्तों की संख्या निम्न है

(a) शून्य (b) एक

(c) दो (d) असंख्य

25. उस वृत्त का समीकरण, जो बिन्दु $(-1,-3)$ से होकर जाता है तथा रेखा $4x+3y-12=0$ को बिन्दु (3, 0) पर स्पर्श करता है, होगा

(a) $x^2+y^2-2x+3y-3=0$

(b) $x^2+y^2+2x-3y-5=0$

(c) $2x^2+2y^2-2x+5y-8=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

26. यदि एक त्रिभुज के शीर्ष $(2,-2)$, $(-1,-1)$ तथा (5, 2) हों, तो उसके परिवृत्त का समीकरण होगा

(a) $x^2+y^2+3x+3y+8=0$

(b) $x^2+y^2-3x-3y-8=0$

(c) $x^2+y^2-3x+3y+8=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

27. उस वृत्त का समीकरण जो दोनों अक्षों तथा रेखा $3x-4y+8=0$ को स्पर्श करता है तथा जिसका केन्द्र तीसरे पाद में स्थित है, होगा [MP PET 1986]

(a) $x^2+y^2-4x+4y-4=0$

(b) $x^2+y^2-4x+4y+4=0$

(c) $x^2+y^2+4x+4y+4=0$

(d) $x^2+y^2-4x-4y-4=0$

28. यदि वृत्त $x^2+y^2-4x-6y+11=0$ [MP PET 1987] के व्यास का एक सिरा (3, 4) हो, तो दूसरा सिरा होगा

[MP PET 1986; BIT Ranchi 1991]

(a) (0, 0) (b) (1, 1)

(c) (1, 2) (d) (2, 1)

29. यदि समीकरण $px^2+(2-q)xy+3y^2-6qx+30y+6q=0$ एक वृत्त को निरूपित करता हो, तो *p* तथा *q* के मान हैं

(a) 3, 1 (b) 2, 2

(c) 3, 2 (d) 3, 4

30. मूल बिन्दु से जाने वाले तथा धनात्मक निर्देशांक अक्षों से 3 तथा 4 लम्बाई के अन्तःखण्ड काटने वाले वृत्त का समीकरण है

(a) $x^2+y^2+6x+8y+1=0$

(b) $x^2+y^2-6x-8y=0$

(c) $x^2+y^2+3x+4y=0$

(d) $x^2+y^2-3x-4y=0$

31. वृत्त $x^2+y^2+6y=0$ स्पर्श करता है

(a) *y*-अक्ष को मूल बिन्दु पर (b) *x*-अक्ष को मूल बिन्दु पर

(c) *x*-अक्ष को बिन्दु (3, 0) पर (d) रेखा $y+3=0$ को

32. समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ द्वारा निरूपित वृत्त बिन्दु वृत्त होगा, यदि

(a) $g^2+f^2=c$ (b) $g^2+f^2>c$

(c) $g^2+f^2+c=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

33. वृत्त जिसका केन्द्र $(1,-2)$ है तथा जो रेखाओं $3x+y=14$, $2x+5y=18$ के कटान बिन्दु से होकर जाता है, का समीकरण है

[MP PET 1990]

(a) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$

(b) $x^2+y^2-2x-4y-20=0$

(c) $x^2+y^2+2x-4y-20=0$

(d) $x^2+y^2+2x+4y-20=0$

34. वृत्त $x^2+y^2+6x-8y+9=0$ के लिए निम्न में से कौनसा कथन सत्य है

(a) वृत्त बिन्दु $(-3,4)$ से गुजरता है

(b) वृत्त *x*-अक्ष को स्पर्श करता है

(c) वृत्त *y*-अक्ष को स्पर्श करता है

(d) इनमें से कोई नहीं

35. रेखाओं $x=0, y=0$ और $3x+4y=4$ को स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण है [MP PET 1991]

(a) $x^2-4x+y^2+4y+4=0$

(b) $x^2-4x+y^2-4y+4=0$

(c) $x^2+4x+y^2+4y+4=0$

(d) $x^2+4x+y^2-4y+4=0$

36. रेखा $3x+2y=12$ तथा वृत्त $x^2+y^2-4x-6y+3=0$ के लिये निम्न में से कौनसा कथन सत्य है
(a) रेखा वृत्त की एक स्पर्श रेखा है
(b) रेखा वृत्त की एक जीवा है
(c) रेखा वृत्त का एक व्यास है
(d) इनमें से कोई नहीं

37. उस वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ जो धनात्मक x-अक्ष से $2a$ लम्बाई की जीवा काटता है व मूल बिन्दु से b दूरी पर y-अक्ष पर स्थित बिन्दु से गुजरता है, होगा
(a) $x^2+2by=b^2+a^2$ (b) $x^2-2by=b^2+a^2$
(c) $x^2-2by=a^2-b^2$ (d) $x^2-2by=b^2-a^2$

38. यदि वृत्त बिन्दु (4, 5) से गुजरे तथा उसका केन्द्र बिन्दु (2, 2) पर हो, तो उसका समीकरण होगा [MNR 1986; MP PET 1984]
(a) $x^2+y^2+4x+4y-5=0$
(b) $x^2+y^2-4x-4y-5=0$
(c) $x^2+y^2-4x=13$
(d) $x^2+y^2-4x-4y+5=0$

39. एक वृत्त x-अक्ष को स्पर्श करता है तथा y-अक्ष से $2l$ लंबाई की एक जीवा काटता है। वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ होगा
(a) एक रेखा (b) एक वृत्त
(c) एक दीर्घवृत्त (d) एक अतिपरवलय

40. वृत्त $(x-5)(x-1)+(y-7)(y-4)=0$ की त्रिज्या है
(a) 3 (b) 4
(c) $\frac{5}{2}$ (d) $\frac{7}{2}$

41. उस वृत्त का समीकरण जो बिन्दुओं (2, 3) तथा (4, 5) से होकर जाता है तथा जिसका केन्द्र सरल रेखा $y-4x+3=0$ पर स्थित है, होगा [RPET 1985; MP PET 1989]
(a) $x^2+y^2+4x-10y+25=0$
(b) $x^2+y^2-4x-10y+25=0$
(c) $x^2+y^2-4x-10y+16=0$
(d) $x^2+y^2-14y+8=0$

42. उस वृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र बिन्दु (1, –2) पर है तथा जो वृत्त $x^2+y^2+2y-3=0$ के केन्द्र से होकर गुजरता है, होगा
(a) $x^2+y^2-2x+4y+3=0$
(b) $x^2+y^2-2x+4y-3=0$
(c) $x^2+y^2+2x-4y-3=0$
(d) $x^2+y^2+2x-4y+3=0$

43. वृत्त $x^2+y^2+8x+10y-7=0$ के संकेन्द्री तथा वृत्त $x^2+y^2-4x-6y=0$ के केन्द्र से जाने वाले वृत्त का समीकरण है
(a) $x^2+y^2+8x+10y+59=0$
(b) $x^2+y^2+8x+10y-59=0$
(c) $x^2+y^2-4x-6y+87=0$
(d) $x^2+y^2-4x-6y-87=0$

44. बिन्दुओं (0, 0), (0, b) तथा (a, b) से जाने वाले वृत्त का समीकरण है
(a) $x^2+y^2+ax+by=0$ (b) $x^2+y^2-ax+by=0$
(c) $x^2+y^2-ax-by=0$ (d) $x^2+y^2+ax-by=0$

45. समीकरण $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ एक वृत्त निरूपित करेगा यदि [MNR 1979; MP PET 1988; RPET 1997, 2003]
(a) $a=b=0$ तथा $c=0$ (b) $f=g$ तथा $h=0$
(c) $a=b\neq 0$ तथा $h=0$ (d) $f=g$ तथा $c=0$

46. दोनों अक्षों को स्पर्श करने वाले तथा बिन्दु (1, 2) से जाने वाले वृत्तों के समीकरण हैं
(a) $x^2+y^2-2x-2y+1=0,\ x^2+y^2-10x-10y+25=0$
(b) $x^2+y^2-2x-2y-1=0,\ x^2+y^2-10x-10y-25=0$
(c) $x^2+y^2+2x+2y+1=0,\ x^2+y^2+10x+10y+25=0$
(d) इनमें से कोई नहीं

47. निम्न में से कौनसी रेखा वृत्त $x^2+y^2-6x-8y-9=0$ का व्यास है
(a) $3x-4y=0$ (b) $4x-3y=9$
(c) $x+y=7$ (d) $x-y=1$

48. यदि एक वृत्त, वृत्त $x^2+y^2-6x+12y+15=0$ के संकेन्द्री है तथा उसका क्षेत्रफल इसके क्षेत्रफल का दुगना हो, तो वृत्त का समीकरण है
(a) $x^2+y^2-6x+12y-15=0$
(b) $x^2+y^2-6x+12y+15=0$
(c) $x^2+y^2-6x+12y+45=0$
(d) इनमें से कोई नहीं

49. यदि वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ की त्रिज्या r हो तो यह दोनों अक्षों को स्पर्श करेगा, यदि
(a) $g=f=r$ (b) $g=f=c=r$
(c) $g=f=\sqrt{c}=r$ (d) $g=f$ तथा $c^2=r$

50. उस वृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र x-अक्ष पर है तथा त्रिज्या 4 है और जो मूल बिन्दु से होकर जाता है, होगा
(a) $x^2+y^2+4x=0$ (b) $x^2+y^2-8y=0$
(c) $x^2+y^2\pm 8x=0$ (d) $x^2+y^2+8y=0$

51. बिन्दु (2, 1) से जाने वाले तथा y-अक्ष को मूल बिन्दु पर स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण है
(a) $x^2+y^2-5x=0$ (b) $2x^2+2y^2-5x=0$
(c) $x^2+y^2+5x=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

52. मूल बिन्दु से जाने वाले तथा ऋणात्मक अक्षों से 2 इकाई लंबाई के अन्तःखण्ड काटने वाले वृत्त का समीकरण है
(a) $x^2+y^2-2x+2y=0$ (b) $x^2+y^2+2x-2y=0$
(c) $x^2+y^2+2x+2y=0$ (d) $x^2+y^2-2x-2y=0$

53. वृत्त $x^2+y^2+3x+3y=0$ के लिये निम्न में से कौनसा कथन सत्य है
(a) केन्द्र x-अक्ष पर है (b) केन्द्र y-अक्ष पर है
(c) केन्द्र मूल बिन्दु पर है (d) वृत्त मूल बिन्दु से गुजरता है

54. बिन्दु (2, 3) से जाने वाले उस वृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र *x*-अक्ष पर तथा त्रिज्या 5 है, होगा

(a) $x^2+y^2+4x-21=0$ (b) $x^2+y^2+4x+21=0$

(c) $x^2+y^2-4x-21=0$ (d) $x^2+y^2+5x-21=0$

55. उस वृत्त का समीकरण जो *x*-अक्ष को बिन्दु (3, 0) पर स्पर्श करता है एवं (1, 4) से गुजरता है, है [MP PET 1993]

(a) $x^2+y^2-6x-5y+9=0$

(b) $x^2+y^2+6x+5y-9=0$

(c) $x^2+y^2-6x+5y-9=0$

(d) $x^2+y^2+6x-5y+9=0$

56. यदि रेखाएँ $x+y=6$ तथा $x+2y=4$ एक वृत्त के व्यास हों जिसका व्यास 20 है, तो वृत्त का समीकरण होगा

(a) $x^2+y^2-16x+4y-32=0$

(b) $x^2+y^2+16x+4y-32=0$

(c) $x^2+y^2+16x+4y+32=0$

(d) $x^2+y^2+16x-4y+32=0$

57. रेखाओं $x=0$, $y=a$ तथा $y=b$ को स्पर्श करने वाले वृत्तों की संख्या होगी

(a) एक (b) दो

(c) चार (d) अनन्त

58. उस वृत्त का समीकरण जिसके व्यास के सिरों के निर्देशांक (*a*, 0) व (0, *b*) हों, है [MP PET 1993]

(a) $x^2+y^2-ax-by=0$ (b) $x^2+y^2+ax-by=0$

(c) $x^2+y^2-ax+by=0$ (d) $x^2+y^2+ax+by=0$

59. वृत्त $2x^2+2y^2-x=0$ का केन्द्र तथा त्रिज्या हैं [MP PET 1984, 87]

(a) $\left(\frac{1}{4},0\right)$ तथा $\frac{1}{4}$ (b) $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ तथा $\frac{1}{2}$

(c) $\left(\frac{1}{2},0\right)$ तथा $\frac{1}{2}$ (d) $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ तथा $\frac{1}{4}$

60. वृत्त $(x-3)^2+(y-4)^2=5$ का केन्द्र है [MP PET 1988]

(a) (3, 4) (b) (–3, – 4)

(c) (4, 3) (d) (–4, – 3)

61. रेखाओं $x=0, y=0$ और $x=4$ को स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण है [UPSEAT 2004]

(a) $x^2+y^2-4x-4y+16=0$

(b) $x^2+y^2-8x-8y+16=0$

(c) $x^2+y^2+4x+4y+4=0$

(d) $x^2+y^2-4x-4y+4=0$

62. समीकरण $x^2+y^2=0$ प्रदर्शित करता है [MP PET 1984]

(a) एक बिन्दु (b) एक वृत्त

(c) *x*-अक्ष (d) *y*-अक्ष

63. समीकरण $ax^2+2y^2+2bxy+2x-y+c=0$, मूल बिन्दु से जाने वाले वृत्त को निरूपित करता है यदि [MP PET 1984]

(a) $a=0, b=0, c=2$ (b) $a=1, b=0, c=0$

(c) $a=2, b=2, c=0$ (d) $a=2, b=0, c=0$

64. उस वृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र मूल बिन्दु एवं त्रिज्या दो रेखाओं $x=1$ व $x=-1$ के बीच की दूरी के बराबर है, है [MP PET 1984]

(a) $x^2+y^2=1$ (b) $x^2+y^2=\sqrt{2}$

(c) $x^2+y^2=4$ (d) $x^2+y^2=-4$

65. एक वृत्त अक्षों को बिन्दुओं (3, 0) व (0, –3) पर स्पर्श करता है तो वृत्त का केन्द्र है [MP PET 1992]

(a) (3, – 3) (b) (0, 0)

(c) (– 3, 0) (d) (6, – 6)

66. यदि किसी वृत्त का केन्द्र (2, 3) एवं एक स्पर्श रेखा $x+y=1$ है, तो इस वृत्त का समीकरण है [RPET 1985, 89]

(a) $(x-2)^2+(y-3)^2=8$ (b) $(x-2)^2+(y-3)^2=3$

(c) $(x+2)^2+(y+3)^2=2\sqrt{2}$ (d) $(x-2)^2+(y-3)^2=2\sqrt{2}$

67. उस वृत्त का समीकरण जो मूल बिन्दु से गुजरता है एवं अक्षों पर अन्तःखण्ड *a* व *b* काटता है, है [RPET 1991]

(a) $x^2+y^2-ax-by=0$ (b) $x^2+y^2+ax+by=0$

(c) $x^2+y^2-ax+by=0$ (d) $x^2+y^2+ax-by=0$

68. एक वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ जो $(4,-2)$ से जाता है एवं वृत्त $x^2+y^2-2x+4y+20=0$ के संकेन्द्री है, तो *c* का मान होगा [RPET 1984, 86]

(a) – 4 (b) 4

(c) 0 (d) 1

69. यदि समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ एक ऐसे वृत्त को निरूपित करता हो जिसका एक व्यास *x*-अक्ष तथा त्रिज्या *a* हो, तो

(a) $f=2a, g=0, c=3a^2$ (b) $f=0, g=a, c=3a^2$

(c) $f=0, g=-2a, c=3a^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

70. वृत्त $x^2+y^2-6x+2y=0$ के व्यास का समीकरण जो मूल बिन्दु से जाता है, है [RPET 1991; IIT 1989; MP PET 2002]

(a) $x+3y=0$ (b) $x-3y=0$

(c) $3x+y=0$ (d) $3x-y=0$

71. उस वृत्त की त्रिज्या जो *y*-अक्ष को बिन्दु (0,3) पर स्पर्श करता है एवं *x*-अक्ष से 8 इकाई अन्तःखण्ड काटता है, है [IIT 1972]

(a) 3 (b) 2

(c) 5 (d) 8

72. एक बिन्दु *P* इस प्रकार गति करता है कि इसकी किन्हीं दो समतलीय बिन्दुओं से दूरियों का अनुपात हमेशा एक स्थिर संख्या रहती है $(\neq 1)$, तो इसका बिन्दुपथ है [IIT 1982]

(a) सरल रेखा (b) वृत्त

(c) परवलय (d) रेखायुग्म

73. रेखाओं $y+\sqrt{3}x=6, y-\sqrt{3}x=6$ व $y=0$ द्वारा बने त्रिभुज के परिवृत्त का समीकरण है [EAMCET 1982]

(a) $x^2+y^2-4y=0$ (b) $x^2+y^2+4x=0$

(c) $x^2+y^2-4y=12$ (d) $x^2+y^2+4x=12$

74. समीकरण $x^2+y^2+4x+6y+13=0$ प्रदर्शित करता है [Roorkee 1990]

(a) वृत्त (b) दो सम्पाती रेखायुग्म

(c) दो संगामी रेखायें (d) बिन्दु

75. उस वृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र $(-4, 3)$ है एवं जो वृत्त $x^2+y^2=1$ को स्पर्श करता है, है
(a) $x^2+y^2+8x-6y+9=0$
(b) $x^2+y^2+8x+6y-11=0$
(c) $x^2+y^2+8x+6y-9=0$
(d) इनमें से कोई नहीं

76. वृत्त $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ के संकेन्द्री तथा y-अक्ष को स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण है
(a) $x^2+y^2-4x-6y-9=0$
(b) $x^2+y^2-4x-6y+9=0$
(c) $x^2+y^2-4x-6y+3=0$
(d) इनमें से कोई नहीं

77. दोनों निर्देशांक अक्षों को स्पर्श करने वाले वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ है
(a) $x^2+y^2=0$ (b) $x^2+y^2=a$, अशून्य अचर
(c) $x^2-y^2=0$ (d) $x^2-y^2=a$, अशून्य अचर

78. एक रेखा अक्षों को A व B पर मिलती है। त्रिभुज OAB पर एक परिवृत्त खींचा गया है। बिन्दु A व B से वृत्त के मूल बिन्दु पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ क्रमशः m व n हों तो वृत्त का व्यास है
(a) $m(m+n)$ (b) $m+n$
(c) $n(m+n)$ (d) $\frac{1}{2}(m+n)$

79. वृत्त $x^2+y^2+2x\cos\theta+2y\sin\theta-8=0$ की त्रिज्या है [MNR 1974]
(a) 1 (b) 3
(c) $2\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{10}$

80. यदि रेखायें $l_1x+m_1y+n_1=0$ व $l_2x+m_2y+n_2=0$ अक्षों को चक्रीय बिन्दुओं पर काटती हैं, तो
(a) $l_1l_2=m_1m_2$ (b) $l_1m_1=l_2m_2$
(c) $l_1l_2+m_1m_2=0$ (d) $l_1m_2=l_2m_1$

81. उस बिन्दु का बिन्दुपथ, जो इस प्रकार गति करता है कि इसकी त्रिभुज के शीर्षों से दूरियों के वर्गों का योग स्थिर रहता है, एक वृत्त है जिसका केन्द्र
(a) त्रिभुज के अन्तःकेन्द्र पर है
(b) त्रिभुज के केन्द्रक पर है
(c) त्रिभुज के लंबकेन्द्र पर है
(d) इनमें से कोई नहीं

82. वृत्त $x^2+y^2=a^2$ पर किसी बिन्दु से दो परस्पर लम्बवत् स्पर्श रेखायें खींची जाती हैं, तो बिन्दु का बिन्दुपथ है
(a) मूल बिन्दु से जाने वाला वृत्त
(b) $2a$ त्रिज्या का वृत्त
(c) त्रिज्या $a\sqrt{2}$ का संकेन्द्री वृत्त
(d) इनमें से कोई नहीं

83. वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ, जो दो स्थिर बिन्दुओं $(a, 0)$ व $(-a, 0)$ से होकर जाता है, होगा
(a) $x=1$ (b) $x+y=6$
(c) $x+y=2a$ (d) $x=0$

84. उस वृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र $(-2, 1)$ पर है एवं जो रेखा $3x-2y-6=0$ को बिन्दु $(4, 3)$ पर स्पर्श करता है, होगा
(a) $x^2+y^2+4x-2y-35=0$
(b) $x^2+y^2-4x+2y+35=0$
(c) $x^2+y^2+4x+2y+35=0$
(d) इनमें से कोई नहीं

85. उस वृत्त का समीकरण जो बिन्दु $(4, 5)$ से होकर जाता है तथा जिसका केन्द्र $(2, 2)$ है, होगा [UPSEAT 2000]
(a) $x^2+y^2+4x+4y-5=0$
(b) $x^2+y^2-4x-4y-5=0$
(c) $x^2+y^2-4x=13$
(d) $x^2+y^2-4x-4y+5=0$

86. उस वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ, जो वृत्त $x^2+y^2-6x-6y+14=0$ को बाह्यतः स्पर्श करता है एवं y-अक्ष को भी स्पर्श करता है, होगा [IIT 1993; DCE 2000]
(a) $x^2-6x-10y+14=0$ (b) $x^2-10x-6y+14=0$
(c) $y^2-6x-10y+14=0$ (d) $y^2-10x-6y+14=0$

87. केन्द्र (h, k) तथा त्रिज्या a वाले वृत्त का क्षेत्रफल है [MP PET 1994]
(a) $\pi(h^2+k^2-a^2)$ (b) πa^2hk
(c) πa^2 (d) इनमें से कोई नहीं

88. यदि समीकरण $\frac{K(x+1)^2}{3}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$ एक वृत्त को निरूपित करता है, तो $K=$ [MP PET 1994]
(a) $\frac{3}{4}$ (b) 1
(c) $\frac{4}{3}$ (d) 12

89. 3 इकाई त्रिज्या का वृत्त, जिसका केन्द्र रेखा $y=x-1$ पर है और यह बिन्दु $(7, 3)$ से गुजरता है, का समीकरण होगा [Roorkee 1988]
(a) $x^2+y^2-8x-6y+16=0$
(b) $x^2+y^2+8x+6y+16=0$
(c) $x^2+y^2-8x-6y-16=0$
(d) इनमें से कोई नहीं

90. उस वृत्त का समीकरण जिसके व्यास के सिरों के निर्देशांक $(-4, 3)$ व $(12, -1)$ हैं, होगा [IIT 1971; RPET 1984, 87, 89; MP PET 1984; Roorkee 1969; AMU 1979]
(a) $x^2+y^2+8x+2y+51=0$
(b) $x^2+y^2+8x-2y-51=0$
(c) $x^2+y^2+8x+2y-51=0$
(d) $x^2+y^2-8x-2y-51=0$

91. उस वृत्त का समीकरण जो बिन्दुओं $(3, -2)$ व $(-2, 0)$ से गुजरता है एवं जिसका केन्द्र रेखा $2x-y=3$ पर है, होगा [Roorkee 1971]
(a) $x^2+y^2-3x-12y+2=0$
(b) $x^2+y^2-3x+12y+2=0$
(c) $x^2+y^2+3x+12y+2=0$
(d) इनमें से कोई नहीं

92. त्रिज्या 2 के एक वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ, जो कि वृत्त $x^2+y^2+3x-6y-9=0$ के बाहर घूमता है, होगा

(a) $x^2+y^2+3x-6y+5=0$

(b) $x^2+y^2+3x-6y-31=0$

(c) $x^2+y^2+3x-6y+\frac{29}{4}=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

93. उस वृत्त का क्षेत्रफल, जिसकी $\sqrt{2}$ लम्बाई की जीवा केन्द्र पर $\frac{\pi}{2}$ कोण अन्तरित करती है, है

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) 2π

(c) π (d) $\frac{\pi}{4}$

94. वृत्त $S=0$ व रेखा $P=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण है **[RPET 1995]**

(a) $S+\lambda P=0$ (b) $S-\lambda P=0$

(c) $\lambda S+P=0$ (d) $P-\lambda S=0$

(e) उपरोक्त सभी

95. यदि वृत्त $x^2+y^2-8x-4y+c=0$ के व्यास के एक सिरे के निर्देशांक (–3, 2) हों, तो दूसरे सिरे के निर्देशांक हैं **[Roorkee 1995]**

(a) (5, 3) (b) (6, 2)

(c) (1, – 8) (d) (11, 2)

96. यदि $ax^2+2hxy+3y^2+4x+8y-6=0$ एक वृत्त निरूपित करता है, तो

(a) $a=3, h=0$ (b) $a=1, h=0$

(c) $a=h=3$ (d) $a=h=0$

97. एक स्थिर बिन्दु $P(\alpha,\beta)$ से खींची गयी एक रेखा वृत्त $x^2+y^2=r^2$ को A व B पर काटती है, तो $PA\,.\,PB=$

(a) $(\alpha+\beta)^2-r^2$ (b) $\alpha^2+\beta^2-r^2$

(c) $(\alpha-\beta)^2+r^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

98. वृत्त $x=-1+2\cos\theta$, $y=3+2\sin\theta$ का केन्द्र है **[MP PET 1995]**

(a) (1, – 3) (b) (–1, 3)

(c) (1, 3) (d) इनमें से कोई नहीं

99. यदि $(x, 3)$ व (3, 5) किसी वृत्त के व्यास के सिरे हैं। इस वृत्त का केन्द्र $(2, y)$ है, तो x व y का मान है

(a) $x=1, y=4$ (b) $x=4, y=1$

(c) $x=8, y=2$ (d) इनमें से कोई नहीं

100. बिन्दु (2, 0) से वृत्त खींचे जाते हैं जो x-अक्ष पर 5 इकाई का अन्तःखण्ड काटते हैं। यदि इनके केन्द्र प्रथम चतुर्थांश में हों, तो इनके समीकरण हैं

(a) $x^2+y^2+9x+2fy+14=0$

(b) $3x^2+3y^2+27x-2fy+42=0$

(c) $x^2+y^2-9x+2fy+14=0$

(d) $x^2+y^2-2fx-9y+14=0$

101. उस वृत्त का समीकरण जो रेखाओं $3x-4y+1=0$, $4x+3y-7=0$ को स्पर्श करता है एवं बिन्दु (2, 3) से जाता है, होगा **[EAMCET 1989]**

(a) $(x-2)^2+(y-8)^2=25$

(b) $5x^2+5y^2-12x-24y+31=0$

(c) दोनों (a) व (b)

(d) इनमें से कोई नहीं

102. प्रथम चतुर्थांश में प्रत्येक अक्ष को मूल बिन्दु से 5 की दूरी पर स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण है **[MP PET 1997]**

(a) $x^2+y^2+5x+5y+25=0$

(b) $x^2+y^2-10x-10y+25=0$

(c) $x^2+y^2-5x-5y+25=0$

(d) $x^2+y^2+10x+10y+25=0$

103. बिन्दुओं (1, 0) व (0, 1) से जाने वाले एवं न्यूनतम त्रिज्या वाले वृत्त का समीकरण होगा

(a) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$

(b) $x^2+y^2-x-y=0$

(c) $2x^2+2y^2-3x-3y+1=0$

(d) $x^2+y^2-3x-3y+2=0$

104. रेखाओं $x=0, y=0, 2x+3y=5$ के द्वारा बने त्रिभुज के परिवृत्त का समीकरण है **[MP PET 2004]**

(a) $x^2+y^2+2x+3y-5=0$

(b) $6(x^2+y^2)-5(3x+2y)=0$

(c) $x^2+y^2-2x-3y+5=0$

(d) $6(x^2+y^2)+5(3x+2y)=0$

105. यदि (α,β) मूल बिन्दु से गुजरने वाले वृत्त का केन्द्र है तो उसका समीकरण है **[MP PET 1999]**

(a) $x^2+y^2-\alpha x-\beta y=0$

(b) $x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y=0$

(c) $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y=0$

(d) $x^2+y^2+\alpha x+\beta y=0$

106. समीकरण $2x^2+2y^2+4x+8y+15=0$ प्रदर्शित करता है **[Roorkee 1999]**

(a) एक रेखायुग्म (b) एक वृत्त

(c) एक दीर्घवृत्त (d) इनमें से कोई नहीं

107. उस वृत्त का समीकरण जिसका व्यास रेखा $2x+3y=3$ तथा $16x-y=4$ पर है तथा जो (4,6) से गुजरता है, होगा **[Kurukshetra CEE 1998]**

(a) $5(x^2+y^2)-3x-8y=200$

(b) $x^2+y^2-4x-8y=200$

(c) $5(x^2+y^2)-4x=200$

(d) $x^2+y^2=40$

108. वक्र $x^2+y^2=2ax$ का क्षेत्रफल है **[MP PET 1996]**

(a) πa^2 (b) $2\pi a^2$

(c) $4\pi a^2$ (d) $\frac{1}{2}\pi a^2$

109. वृत्त $(x-1)(x-3)+(y-2)(y-4)=0$ की त्रिज्या है

(a) 2 (b) $\sqrt{2}$

(c) 3 (d) $2\sqrt{2}$

110. उस वृत्त का समीकरण, जिसका केन्द्र $3x-y-4=0$ तथा $x+3y+2=0$ पर स्थित है तथा जिसका क्षेत्रफल 154 वर्ग इकाई है, है [DCE 2001]

(a) $x^2+y^2-2x+2y-47=0$

(b) $x^2+y^2-2x+2y+47=0$

(c) $x^2+y^2+2x-2y-47=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

111. वृत्त $x^2+y^2-8x+4y+4=0$ स्पर्श करता है [Karnataka CET 1999, 2004; Pb. CET 2000]

(a) केवल x-अक्ष को

(b) केवल y-अक्ष को

(c) x तथा y-अक्ष दोनों को

(d) किसी भी अक्ष को स्पर्श नहीं करता

112. वृत्त का समीकरण, जिसका केन्द्र (1, 2) है तथा स्पर्श रेखा $x+y-5=0$ हैं, है [MP PET 2001]

(a) $x^2+y^2+2x-4y+6=0$

(b) $x^2+y^2-2x-4y+3=0$

(c) $x^2+y^2-2x+4y+8=0$

(d) $x^2+y^2-2x-4y+8=0$

113. उस वृत्त का समीकरण जो बिन्दु (–2, 4) तथा वृत्त $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ और रेखा $3x+2y-5=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरता है, होगा [RPET 1996]

(a) $x^2+y^2+2x-4y-4=0$

(b) $x^2+y^2+4x-2y-4=0$

(c) $x^2+y^2-3x-4y=0$

(d) $x^2+y^2-4x-2y=0$

114. उस वृत्त का समीकरण जिसकी त्रिज्या 5 है तथा जो तीसरे चतुर्थांश में दोनों अक्षों को स्पर्श करता है, है [EAMCET 2002]

(a) $(x-5)^2+(y+5)^2=25$ (b) $(x+4)^2+(y+4)^2=25$

(c) $(x+6)^2+(y+6)^2=25$ (d) $(x+5)^2+(y+5)^2=25$

115. वृत्त $x^2+y^2-3x-4y+2=0$, x-अक्ष को किन बिन्दुओं पर काटता है [Karnataka CET 2001; Pb. CET 2002]

(a) $(2,0),(-3,0)$ (b) $(3,0),(4,0)$

(c) $(1,0),(-1,0)$ (d) $(1,0),(2,0)$

116. यदि $g^2+f^2=c$ हो, तब समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ प्रदर्शित करता है [MP PET 2003]

(a) g त्रिज्या का एक वृत्त (b) f त्रिज्या का एक वृत्त

(c) $\sqrt{c}$ व्यास का एक वृत्त (d) 0(शून्य) त्रिज्या का एक वृत्त

117. एक वृत्त का केन्द्र (2, –3) तथा परिधि 10π है, तो वृत्त का समीकरण है [Kerala (Engg.) 2002]

(a) $x^2+y^2+4x+6y+12=0$

(b) $x^2+y^2-4x+6y+12=0$

(c) $x^2+y^2-4x+6y-12=0$

(d) $x^2+y^2-4x-6y-12=0$

118. एक चर वृत्त, स्थिर बिन्दु (2, 0) से गुजरता है तथा y-अक्ष को स्पर्श करता है। इसके केन्द्र का बिन्दुपथ है [EAMCET 2002]

(a) वृत्त (b) दीर्घवृत्त

(c) अतिपरवलय (d) परवलय

119. एक n भुजा के समबहुभुज के परिमाप की सीमा क्या होगी, जो कि R त्रिज्या के वृत्त में घिरा हुआ है, जबकि $n\to\infty$ है [MP PET 2003]

(a) $2\pi R$ (b) πR

(c) $4R$ (d) πR^2

120. उस वृत्त का केन्द्र, जो कि रेखाओं $x^2-8x+12=0$ तथा $y^2-14y+45=0$ द्वारा निर्मित वर्ग से घिरा हुआ है, है [IIT Screening 2003]

(a) (4, 7) (b) (7, 4)

(c) (9, 4) (d) (4, 9)

121. k के किस मान के लिये बिन्दु (0, 0), (1, 3), (2, 4) और (k, 3) एक ही वृत्त पर हैं [RPET 1997]

(a) 2 (b) 1

(c) 4 (d) 5

122. चार भिन्न बिन्दु (0, 0),(2, 0), (0, –2) और (k,–2) एक ही वृत्त पर हैं, यदि $k=$ [EAMCET 2002]

(a) –2 (b) 2

(c) 1 (d) 0

123. निम्न में से किन बिन्दुओं के युग्म से वृत्त $x^2+y^2-12x+1=0$ गुजरता है [MP PET 1983]

(a) (–1, 0), $(6,\sqrt{35})$ (b) $(3,-\sqrt{26}),(-3,\sqrt{26})$

(c) $(6,-\sqrt{35})$, $(3,-\sqrt{26})$ (d) $(0,-1),(-6,-\sqrt{35})$

124. उस वृत्त की त्रिज्या, जो बिन्दु (6, 2) से होकर गुजरता है और जिसके दो व्यास $x+y=6$ तथा $x+2y=4$ हैं, है [Karnataka CET 2004]

(a) 4 (b) 6

(c) 20 (d) $\sqrt{20}$

125. यदि रेखायें $2x+3y+1=0$ और $3x-y-4=0$ उस वृत्त के व्यास हो जिसकी परिधि 10π है, तब वृत्त का समीकरण है [AIEEE 2004]

(a) $x^2+y^2+2x-2y-23=0$

(b) $x^2+y^2-2x-2y-23=0$

(c) $x^2+y^2+2x+2y-23=0$

(d) $x^2+y^2-2x+2y-23=0$

126. उस वृत्त का समीकरण जो निर्देशांक अक्षों को एवं रेखा $x\cos\alpha+y\sin\alpha=2$ को स्पर्श करता है, होगा

(a) $x^2+y^2-2gx-2gy+g^2=0$,
जहाँ $g=\frac{2}{(\cos\alpha+\sin\alpha+1)}$

(b) $x^2+y^2-2gx-2gy+g^2=0$,
जहाँ $g=\frac{2}{(\cos\alpha+\sin\alpha-1)}$

(c) $x^2+y^2-2gx+2gy+g^2=0$,
जहाँ $g=\frac{2}{(\cos\alpha-\sin\alpha+1)}$

(d) $x^2+y^2-2gx+2gy+g^2=0$
जहाँ $g=\frac{2}{(\cos\alpha-\sin\alpha-1)}$

(e) उपरोक्त सभी

127. यदि एक वृत्त और एक वर्ग समान परिमाप रखते हैं, तब

[Pb. CET 2001]

(a) उनके क्षेत्रफल समान है
(b) वृत्त का क्षेत्रफल बड़ा है
(c) वर्ग का क्षेत्रफल बड़ा है
(d) इनमें से कोई नहीं

128. वृत्त $x^2+y^2+10x-6y+9=0$ की x-अक्ष पर अन्तःखण्ड की लम्बाई है [Pb. CET 2001]

(a) 2 (b) 4
(c) 6 (d) 8

129. केन्द्र (2, 1) और रेखा $3x+4y=5$ को स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण है [Karnataka CET 2005]

(a) $x^2+y^2-4x-2y+5=0$
(b) $x^2+y^2-4x-2y-5=0$
(c) $x^2+y^2-4x-2y+4=0$
(d) $x^2+y^2-4x-2y-4=0$

130. वृत्त $x=2+3\cos\theta$, $y=3\sin\theta-1$ का केन्द्र है [Karnataka CET 2005]

(a) (3, 3) (b) (2, −1)
(c) (−2, 1) (d) (−1, 2)

131. वृत्त $x^2+y^2+4x+6y+13=0$ की त्रिज्या है [Karnataka CET 2005]

(a) $\sqrt{26}$ (b) $\sqrt{13}$
(c) $\sqrt{23}$ (d) 0

132. माना $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ दो बिन्दु इस प्रकार हैं कि उनके भुज x_1 और x_2 समीकरण $x^2+2x-3=0$ के मूल हैं व उनकी कोटि y_1 और y_2 समीकरण $y^2+4y-12=0$ की मूल हैं तब PQ को व्यास मानकर खींचे गये वृत्त का केन्द्र है [Orissa JEE 2005]

(a) (−1,−2) (b) (1, 2)
(c) (1,−2) (d) (−1,2)

133. k के किस मान के लिए चार बिन्दु $(2k, 3k), (1,0)(0,1)$ और $(0,0)$ एक वृत्त पर स्थित होंगे [DCE 2005]

(a) $\forall k \in I$ (b) $k<0$
(c) $0<k<1$ (d) k के दो मानों के लिये

134. यदि व्यास के एक सिरे के निर्देशांक (1, 1) हैं व दूसरा सिरा रेखा $x+y=3$ पर स्थित है तब वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ है [AMU 2005]

(a) $x+y=1$ (b) $2(x-y)=5$
(c) $2x+2y=5$ (d) इनमें से कोई नहीं

135. एक वृत्त x-अक्ष से $2a$ इकाई लम्बाई की जीवा और y-अक्ष को स्पर्श करता है। वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ है [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $x^2+y^2=a^2$ (b) $x^2-y^2=a^2$
(c) $x+y=a^2$ (d) $x^2-y^2=4a^2$
(e) $x^2+y^2=4a^2$

वृत्त की स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब

1. यदि बिन्दु (5, 3) से वृत्त $x^2+y^2+2x+ky+17=0$ पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई 7 हो, तो $k=$

(a) 4 (b) − 4
(c) − 6 (d) 13/2

2. रेखा $lx+my+n=0$, वृत्त $x^2+y^2=a^2$ की एक स्पर्श रेखा होगी यदि [MNR 1974; AMU 1981]

(a) $n^2(l^2+m^2)=a^2$ (b) $a^2(l^2+m^2)=n^2$
(c) $n(l+m)=a$ (d) $a(l+m)=n$

3. मूल बिन्दु से वृत्त $(x-7)^2+(y+1)^2=25$ पर खींची गयी दो स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण है [MNR 1990; RPET 1997; DCE 2000]

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{3}$
(c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

4. युगल स्पर्श रेखायें मूल बिन्दु से वृत्त $x^2+y^2+20(x+y)+20=0$ पर खींची गयी हैं। युगल स्पर्श रेखाओं का समीकरण है [MP PET 1990]

(a) $x^2+y^2+10xy=0$ (b) $x^2+y^2+5xy=0$
(c) $2x^2+2y^2+5xy=0$ (d) $2x^2+2y^2-5xy=0$

5. यदि OA तथा OB मूल बिन्दु O से वृत्त $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ पर खींची गयी रेखाएँ हों तो $AB=$

(a) 11 (b) $\frac{4}{5}\sqrt{21}$
(c) $\sqrt{\frac{17}{3}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

6. मूल बिन्दु से वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ पर खींची स्पर्श रेखायुग्म का समीकरण है

(a) $gx+fy+c(x^2+y^2)$ (b) $(gx+fy)^2=x^2+y^2$
(c) $(gx+fy)^2=c^2(x^2+y^2)$ (d) $(gx+fy)^2=c(x^2+y^2)$

7. यदि रेखा $y=mx+c$ वृत्त $x^2+y^2=a^2$ की एक स्पर्श रेखा हो, तो स्पर्श बिन्दु होगा

(a) $\left(\frac{-a^2}{c}, a^2\right)$ (b) $\left(\frac{a^2}{c}, \frac{-a^2m}{c}\right)$
(c) $\left(\frac{-a^2m}{c}, \frac{a^2}{c}\right)$ (d) $\left(\frac{-a^2c}{m}, \frac{a^2}{m}\right)$

8. बिन्दु $(a, 0)$ से होकर जाने वाले तथा रेखा $x+1=0$ को स्पर्श करने वाले वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ होगा, एक

(a) वृत्त (b) दीर्घवृत्त
(c) परवलय (d) अतिपरवलय

9. वृत्त $x^2+y^2+3x-3y+2=0$ के भीतर स्थित एक बिन्दु है [MP PET 1988]

(a) (− 1, 3) (b) (− 2, 1)
(c) (2, 1) (d) (− 3, 2)

10. वृत्त $x^2+y^2-x+y-1=0$ के सापेक्ष बिन्दु (1, 1) की स्थिति है [MP PET 1986, 90]
(a) वृत्त के बाहर (b) वृत्त के ऊपर
(c) वृत्त के अन्दर (d) इनमें से कोई नहीं

11. वृत्त $x^2+y^2=50$ के उन बिन्दुओं पर, जहाँ रेखा $x+7=0$ इसको काटती है, स्पर्श रेखाओं के समीकरण हैं
(a) $7x \pm y + 50 = 0$ (b) $7x \pm y - 5 = 0$
(c) $y \pm 7x + 5 = 0$ (d) $y \pm 7x - 5 = 0$

12. यदि रेखा $y=\sqrt{3}x+k$ वृत्त $x^2+y^2=16$ को स्पर्श करती हो, तो $k=$
(a) 0 (b) 2
(c) 4 (d) 8

13. वृत्त $x^2+y^2-6x+4y=12$ की उन स्पर्श रेखाओं, जो रेखा $4x+3y+5=0$ के समान्तर हो, के समीकरण हैं [ISM Dhanbad 1973; MP PET 1991]
(a) $3x-4y-19=0,\ 3x-4y+31=0$
(b) $4x+3y-19=0,\ 4x+3y+31=0$
(c) $4x+3y+19=0,\ 4x+3y-31=0$
(d) $3x-4y+19=0, 3x-4y+31=0$

14. वृत्त $x^2+y^2=36$ की उन स्पर्श रेखाओं के समीकरण जो x-अक्ष से 45^o के कोण पर झुकी हों, होंगे
(a) $x+y=\pm\sqrt{6}$ (b) $x=y\pm 3\sqrt{2}$
(c) $y=x\pm 6\sqrt{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

15. एक वृत्त का समीकरण $x^2+y^2-6x+8y-11=0$ व दो बिन्दु (0, 0) व (1, 8) हैं। तो इन बिन्दुओं की स्थिति है
(a) दोनों वृत्त के अन्दर
(b) एक वृत्त के बाहर एवं एक अन्दर
(c) दोनों वृत्त के बाहर
(d) एक वृत्त पर एवं एक अन्दर

16. बिन्दु (5, 1) से वृत्त $x^2+y^2+6x-4y-3=0$ पर खींची गयी स्पर्श रेखा की लम्बाई होगी [MNR 1981]
(a) 81 (b) 29
(c) 7 (d) 21

17. वृत्त $x^2+y^2=9$ के बिन्दु $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ पर अभिलम्ब का समीकरण है
(a) $x+y=0$ (b) $x-y=\frac{\sqrt{2}}{3}$
(c) $x-y=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

18. रेखा $5x+12y+8=0$ के लम्बवत् वृत्त $x^2+y^2-22x-4y+25=0$ की स्पर्श रेखाओं के समीकरण हैं
(a) $12x-5y+8=0$, $12x-5y=252$
(b) $12x-5y=0,\ 12x-5y=252$
(c) $12x-5y-8=0, 12x-5y+252=0$
(d) इनमें से कोई नहीं

19. रेखा $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$, वृत्त $x^2+y^2-2ax\cos\alpha-2ay\sin\alpha=0$ की स्पर्श रेखा होगी, यदि $p=$
(a) 0 या a (b) 0
(c) $2a$ (d) 0 या $2a$

20. यदि रेखा $lx+my+n=0$ वृत्त $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ की स्पर्श रेखा हो, तो
(a) $hl+km+n=a^2(l^2+m^2)$
(b) $(hl+km+n)^2=a(l^2+m^2)$
(c) $(hl+km+n)^2=a^2(l^2+m^2)$
(d) इनमें से कोई नहीं

21. रेखा $(x-a)\cos\alpha+(y-b)\sin\alpha=r$, वृत्त $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ की एक स्पर्श रेखा होगी
(a) यदि $\alpha=30^o$ (b) यदि $\alpha=60^o$
(c) α के सभी मानों के लिये (d) इनमें से कोई नहीं

22. मूल बिन्दु से वृत्त $x^2+y^2-2rx-2hy+h^2=0$ पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं के समीकरण हैं [Roorkee 1989; IIT 1988; RPET 1996]
(a) $x=0, y=0$
(b) $(h^2-r^2)x-2rhy=0, x=0$
(c) $y=0, x=4$
(d) $(h^2-r^2)x+2rhy=0, x=0$

23. यदि बिन्दु (1, 2) से वृत्त $x^2+y^2-2x-4y+\lambda=0$ पर असंख्य स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हों, तो $\lambda=$ [MP PET 1989]
(a) – 20 (b) 0
(c) 5 (d) ज्ञात नहीं किया जा सकता

24. यदि रेखा $lx+my=1$, वृत्त $x^2+y^2=a^2$ की एक स्पर्श रेखा हो तो बिन्दु (l, m) का बिन्दुपथ है [MNR 1978; RPET 1997]
(a) एक सरल रेखा (b) एक वृत्त
(c) एक परवलय (d) एक दीर्घवृत्त

25. बिन्दु (0, 1) से वृत्त $x^2+y^2-2x+4y=0$ पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं के समीकरण हैं [Roorkee 1979]
(a) $2x-y+1=0,\ x+2y-2=0$
(b) $2x-y+1=0,\ x+2y+2=0$
(c) $2x-y-1=0,\ x+2y-2=0$
(d) $2x-y-1=0,\ x+2y+2=0$

26. वृत्त $x^2+y^2=a^2$ पर रेखा $\sqrt{3}x+y+3=0$ के समान्तर स्पर्श रेखाओं के समीकरण हैं
(a) $\sqrt{3}x+y\pm 2a=0$ (b) $\sqrt{3}x+y\pm a=0$
(c) $\sqrt{3}x+y\pm 4a=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

27. वृत्त $x^2+y^2=169$ के बिन्दुओं (5, 12) तथा (12, –5) पर स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण है
(a) 30^o (b) 45^o
(c) 60^o (d) 90^o

28. यदि रेखा $x = k$ वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ का स्पर्श करती हो, तो k का मान है
(a) 2 परन्तु – 2 नहीं (b) – 2 परन्तु 2 नहीं
(c) 3 (d) इनमें से कोई नहीं

29. यदि रेखा $y\cos\alpha = x\sin\alpha + a\cos\alpha$ वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ की स्पर्श रेखा हो, तो
(a) $\sin^2\alpha = 1$ (b) $\cos^2\alpha = 1$
(c) $\sin^2\alpha = a^2$ (d) $\cos^2\alpha = a^2$

30. वृत्त $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$, रेखा $3x - 4y = m$ को दो भिन्न बिन्दुओं पर काटेगा यदि
(a) $-10 < m < 5$ (b) $9 < m < 20$
(c) $-35 < m < 15$ (d) इनमें से कोई नहीं

31. बाह्य बिन्दु से एक वृत्त पर खींची गयी दो स्पर्श रेखायें हमेशा होती हैं [MP PET 1986]
(a) बराबर (b) एक–दूसरे पर लम्ब
(c) एक दूसरे के समान्तर (d) इनमें से कोई नहीं

32. बिन्दु (h, k) से वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं तथा उनके स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा द्वारा बने त्रिभुज का क्षेत्रफल है [MNR 1980]
(a) $a\dfrac{(h^2 + k^2 - a^2)^{3/2}}{h^2 + k^2}$ (b) $a\dfrac{(h^2 + k^2 - a^2)^{1/2}}{h^2 + k^2}$
(c) $\dfrac{(h^2 + k^2 - a^2)^{3/2}}{h^2 + k^2}$ (d) $\dfrac{(h^2 + k^2 - a^2)^{1/2}}{h^2 + k^2}$

33. वृत्त, जिसका केन्द्र (2, –1) है, पर मूल बिन्दु से खींची गयी एक स्पर्श रेखा का समीकरण $3x + y = 0$ हो, तो दूसरी स्पर्श रेखा का समीकरण है
(a) $3x - y = 0$ (b) $x + 3y = 0$
(c) $x - 3y = 0$ (d) $x + 2y = 0$

34. वृत्त $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ के उन बिन्दुओं पर जिसकी कोटि –1 है, अभिलम्ब के समीकरण होंगे
(a) $2x - y - 7 = 0, 2x + y - 9 = 0$
(b) $2x + y + 7 = 0, 2x + y + 9 = 0$
(c) $2x + y - 7 = 0,\ 2x + y + 9 = 0$
(d) $2x - y + 7 = 0, 2x - y + 9 = 0$

35. यदि बिन्दु (f, g) से वृत्तों $x^2 + y^2 = 6$ तथा $x^2 + y^2 + 3x + 3y = 0$ पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयों का अनुपात 2 : 1 हो, तो
(a) $f^2 + g^2 + 2g + 2f + 2 = 0$
(b) $f^2 + g^2 + 4g + 4f + 4 = 0$
(c) $f^2 + g^2 + 4g + 4f + 2 = 0$
(d) इनमें से कोई नहीं

36. यदि $c^2 > a^2(1 + m^2)$ तो रेखा $y = mx + c$ वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ को काटेगी
(a) एक बिन्दु पर (b) दो विभिन्न बिन्दुओं पर
(c) किसी बिन्दु पर नहीं (d) इनमें से कोई नहीं

37. रेखा $x - y - 3 = 0$ वृत्त $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0$ को निम्न बिन्दु पर स्पर्श करती है [MP PET 1993]
(a) (1,–2) (b) (1, 2)
(c) (–1, 2) (d) (–1,–2)

38. रेखा $y = mx + c$ उस वृत्त की, जिसकी त्रिज्या r तथा केन्द्र (a, b) है, अभिलम्ब होगी यदि
(a) $a = mb + c$ (b) $b = ma + c$
(c) $r = ma - b + c$ (d) $r = ma - b$

39. वृत्त $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 39 = 0$ के बिन्दु (2, 3) पर खींचा गया अभिलम्ब वृत्त को पुनः जिस बिन्दु पर मिलेगा वह बिन्दु है
(a) (6, –9) (b) (6, 9)
(c) (–6, –9) (d) (–6, 9)

40. रेखा $x + 2y = 3$ के समान्तर, वृत्त $x^2 + y^2 - 2x = 0$ के अभिलम्ब का समीकरण है
(a) $2x + y - 1 = 0$ (b) $2x + y + 1 = 0$
(c) $x + 2y - 1 = 0$ (d) $x + 2y + 1 = 0$

41. वृत्त $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$ के बिन्दु $\left(\dfrac{ab^2}{a^2 + b^2}, \dfrac{a^2b}{a^2 + b^2}\right)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण है
(a) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ (b) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + 1 = 0$
(c) $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 1$ (d) $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} + 1 = 0$

42. यदि एक रेखा मूल बिन्दु से गुजरे तथा वृत्त $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 25$ को स्पर्श करे तो उसकी प्रवणता होनी चाहिये
(a) $\pm\dfrac{3}{4}$ (b) 0
(c) ± 3 (d) ± 1

43. मूल बिन्दु से वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ पर खींची गयी दो स्पर्श रेखाएँ परस्पर लम्बवत् होंगी, यदि
(a) $g^2 + f^2 = 2c$ (b) $g = f = c^2$
(c) $g + f = c$ (d) इनमें से कोई नहीं

44. वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c_1 = 0$ के किसी बिन्दु से वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ पर खींची गयी स्पर्श रेखा की लम्बाई होगी [Kerala (Engg.) 2002]
(a) $\sqrt{c_1 - c}$ (b) $\sqrt{c - c_1}$
(c) $\sqrt{c_1 + c}$ (d) इनमें से कोई नहीं

45. वृत्त $x^2 + y^2 = 13$ के उन बिन्दुओं पर जिनके भुज 2 हैं, स्पर्श रेखाओं के समीकरण होंगे
(a) $2x + 3y = 13, 2x - 3y = 13$
(b) $3x + 2y = 13, 2x - 3y = 13$
(c) $2x + 3y = 13,\ 3x - 2y = 13$
(d) इनमें से कोई नहीं

46. वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के नियामक वृत्त (Director circle) का समीकरण है [BIT Ranchi 1990]
(a) $x^2 + y^2 = 4a^2$
(b) $x^2 + y^2 = \sqrt{2}a^2$
(c) $x^2 + y^2 - 2a^2 = 0$
(d) इनमें से कोई नहीं

47. यदि O मूल बिन्दु है एवं OP व OQ वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ पर खींची गयी स्पर्श रेखायें हैं, तो त्रिभुज OPQ का परिकेन्द्र है

(a) $(-g,-f)$ (b) (g,f)
(c) $(-f,-g)$ (d) इनमें से कोई नहीं

48. उस वृत्त का समीकरण, जो निर्देशांक्षों को एवं रेखा $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ को स्पर्श करता है एवं जिसका केन्द्र प्रथम चतुर्थांश में है, $x^2+y^2-2cx-2cy+c^2=0$ है, तो c का मान होगा [BIT Ranchi 1986; Kurukshetra CEE 1996]

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 6

49. बिन्दु (–1,2) से वृत्त $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ पर डाली जाने वाली स्पर्श रेखाओं की संख्या है [BIT Ranchi 1991]

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 0

50. बिन्दु (0, 0) से वृत्त $x^2+y^2+2x+6y-15=0$ पर खींची जा सकने वाली स्पर्श रेखाओं की संख्या है [MP PET 1992]

(a) कोई नहीं (b) एक
(c) दो (d) अनन्त

51. वृत्त $x^2+y^2-2x-6y+9=0$ की स्पर्श रेखा $x=0$, अर्थात् y-अक्ष पर किस बिन्दु पर होगी [RPET 1984]

(a) (0, 1) (b) (0, 2)
(c) (0, 3) (d) (0, 4)

52. वृत्तों $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ तथा $x^2+y^2+6x+18y+26=0$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या है [MP PET 1995]

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

53. यदि रेखा $y=mx+c$ वृत्त $x^2+y^2-4y=0$ को स्पर्श करती है, तो c का मान होगा [RPET 1988]

(a) $1+\sqrt{1+m^2}$ (b) $1-\sqrt{m^2+1}$
(c) $2(1+\sqrt{1+m^2})$ (d) $2+\sqrt{1+m^2}$

54. वृत्त $x^2+y^2=4$ के बिन्दु $(1,\sqrt{3})$ पर खींची गयी स्पर्श रेखा एवं अभिलम्ब एवं धनात्मक x-अक्ष से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल है [IIT 1989; RPET 1997, 99; Kurukshetra CEE 1998]

(a) $2\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{3}$
(c) $4\sqrt{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

55. वृत्त $x^2+y^2=a^2$ के किस बिन्दु पर $y=x+a\sqrt{2}$ वृत्त की स्पर्श रेखा है [RPET 1991; MP PET 1999]

(a) $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ (b) $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$
(c) $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ (d) $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

56. वृत्त $x^2+y^2=5$ के बिन्दु (1, –2) पर स्पर्श रेखा का वृत्त $x^2+y^2-8x+6y+20=0$ पर स्पर्श बिन्दु है [Roorkee 1989]

(a) (2, –1) (b) (3, –1)
(c) (4, –1) (d) (5, –1)

57. वृत्त $x^2+y^2-3x-6y-10=0$ के बिन्दु (–3, 4) पर अभिलम्ब का समीकरण है [RPET 1986, 89]

(a) $2x+9y-30=0$ (b) $9x-2y+35=0$
(c) $2x-9y+30=0$ (d) $2x-9y-30=0$

58. वृत्त $x^2+y^2=5$ के बिन्दु (1,–2) पर स्पर्श रेखा वृत्त $x^2+y^2-8x+6y+20=0$ को [IIT 1975]

(a) स्पर्श करती है
(b) वास्तविक बिन्दुओं पर काटती है
(c) काल्पनिक बिन्दुओं पर काटती है
(d) इनमें से कोई नहीं

59. रेखा $y=x+c$ वृत्त $x^2+y^2=1$ को दो सम्पाती बिन्दुओं पर काटेगी, यदि

(a) $c=\sqrt{2}$ (b) $c=-\sqrt{2}$
(c) $c=\pm\sqrt{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

60. निम्न में से कौनसी रेखा m के सभी मानों के लिये वृत्त $x^2+y^2=25$ की स्पर्श रेखा है

(a) $y=mx+25\sqrt{1+m^2}$ (b) $y=mx+5\sqrt{1+m^2}$
(c) $y=mx+25\sqrt{1-m^2}$ (d) $y=mx+5\sqrt{1-m^2}$

61. बिन्दु (α,β) से वृत्त $ax^2+ay^2=r^2$ पर खींची गयी स्पर्श रेखा की लम्बाई का वर्ग है

(a) $a\alpha^2+a\beta^2-r^2$ (b) $\alpha^2+\beta^2-\frac{r^2}{a}$
(c) $\alpha^2+\beta^2+\frac{r^2}{a}$ (d) $\alpha^2+\beta^2-r^2$

62. वृत्त $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ तथा निर्देशांक अक्षों के स्पर्श बिन्दु हैं

(a) $(1,0),(0,1)$ (b) $(-1,0),(0,1)$
(c) $(-1,0),(0,-1)$ (d) $(1,0),(0,-1)$

63. $y-x+3=0$, बिन्दु $\left(3+\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ पर किस वृत्त का अभिलम्ब है [Roorkee 1990]

(a) $\left(x-3-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=9$
(b) $\left(x-3-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+y^2=6$
(c) $(x-3)^2+y^2=9$
(d) $(x-3)^2+(y-3)^2=9$

64. यदि रेखा $y=mx+c$ वृत्त $x^2+y^2-2x-4y+3=0$ को बिन्दु (2, 3) पर स्पर्श करती हो, तो $c=$

(a) – 3 (b) 4
(c) 5 (d) – 2

65. वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ पर बिन्दु (x_1,y_1) से खींची गयी स्पर्श रेखा की लम्बाई है [EAMCET 1980]

(a) $(x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c)^{1/2}$
(b) $(x_1^2+y_1^2)^{1/2}$
(c) $[(x_1+g)^2+(y_1+f)^2]^{1/2}$
(d) इनमें से कोई नहीं

66. बिन्दु (0.1, 3.1) वृत्त $x^2+y^2-2x-4y+3=0$ के सापेक्ष है [MNR 1980]
(a) वृत्त के केन्द्र पर
(b) वृत्त के अन्दर लेकिन केन्द्र पर नहीं
(c) वृत्त पर
(d) वृत्त के बाहर

67. वृत्त $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ व रेखा $4x-3y-10=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक हैं [IIT 1983]
(a) $(-2,-6),(4,2)$ (b) $(2,6),(-4,-2)$
(c) $(-2,6),(-4,2)$ (d) इनमें से कोई नहीं

68. वृत्त $x^2+y^2=r^2$ के बिन्दु (a,b) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $ax+by-\lambda=0$ है, जहाँ λ है
(a) a^2 (b) b^2
(c) r^2 (d) इनमें से कोई नहीं

69. यदि किसी वृत्त का केन्द्र (–6, 8) है एवं यह बिन्दु (0, 0) से गुजरता है, तो (0, 0) पर इसकी स्पर्श रेखा का समीकरण है [MNR 1976]
(a) $2y=x$ (b) $4y=3x$
(c) $3y=4x$ (d) $3x+4y=0$

70. रेखा $y=mx+c$, वृत्त $x^2+y^2=r^2$ को दो वास्तविक व भिन्न बिन्दुओं पर काटेगी यदि
(a) $-r\sqrt{1+m^2}<c\le 0$ (b) $0\le c<r\sqrt{1+m^2}$
(c) (a) व (b) दोनों (d) $-c\sqrt{1-m^2}<r$

71. वृत्त $x^2+y^2=a^2$ की जीवा के वृत्त के साथ प्रतिच्छेद बिन्दुओं पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ जो कि वृत्त $x^2+y^2=2ax$ को स्पर्श करता है, होगा
(a) $y^2=a(a-2x)$ (b) $x^2=a(a-2y)$
(c) $x^2+y^2=(y-a)^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

72. बिन्दु (6,–5) से वृत्त $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ पर खींची गयी स्पर्श रेखायुग्म का समीकरण है [AMU 1980]
(a) $7x^2+23y^2+30xy+66x+50y-73=0$
(b) $7x^2+23y^2+30xy-66x-50y-73=0$
(c) $7x^2+23y^2-30xy-66x-50y+73=0$
(d) इनमें से कोई नहीं

73. यदि OA व OB मूल बिन्दु से वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ पर खींची गयी स्पर्श रेखायें हों एवं C वृत्त का केन्द्र हो, तो चतुर्भुज $OACB$ का क्षेत्रफल होगा
(a) $\frac{1}{2}\sqrt{c(g^2+f^2-c)}$ (b) $\sqrt{c(g^2+f^2-c)}$
(c) $c\sqrt{g^2+f^2-c}$ (d) $\frac{\sqrt{g^2+f^2-c}}{c}$

74. बिन्दु (1, 2) व (3, 4) से गुजरने वाले एवं रेखा $3x+y-3=0$ को स्पर्श करने वाले वृत्त के समीकरण में अचर पद का मान है
(a) 7 व 12 (b) केवल 7
(c) केवल 12 (d) इनमें से कोई नहीं

75. वृत्त $x^2+y^2=a^2$ के बिन्दु $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता है
(a) $\tan\alpha$ (b) $\tan(\pi-\alpha)$
(c) $\cot\alpha$ (d) $-\cot\alpha$

76. दो वृत्त, जो $(0,a)$ व $(0,-a)$ से गुजरते हैं एवं रेखा $y=mx+c$ को स्पर्श करते हैं, एक–दूसरे को समकोण पर काटेंगे यदि
(a) $a^2=c^2(2m+1)$ (b) $a^2=c^2(2+m^2)$
(c) $c^2=a^2(2+m^2)$ (d) $c^2=a^2(2m+1)$

77. वृत्त $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ पर उस रेखा का समीकरण जो धनात्मक अक्षों से बराबर अन्तःखण्ड काटती है, होगा
(a) $x+y+2\sqrt{2}=0$ (b) $x+y=2\sqrt{2}$
(c) $x+y=2$ (d) इनमें से कोई नहीं

78. वृत्त $x^2+y^2=a^2$ पर बिन्दु (α,β) से खींची गयी स्पर्श रेखाओं के बीच कोण है
(a) $\tan^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2-a^2}}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2-a^2}}{a}\right)$
(c) $2\tan^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2-a^2}}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

79. वृत्त $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण जो रेखा $3x-4y-1=0$ पर लम्ब है, होगा
(a) $4x+3y-5=0$ (b) $4x+3y+25=0$
(c) $4x-3y+5=0$ (d) $4x+3y-25=0$

80. वृत्त $x^2+y^2=a^2$ की स्पर्श रेखा का समीकरण जो अक्षों के साथ a^2 क्षेत्रफल का त्रिभुज बनाती है, होगा
(a) $x\pm y=a\sqrt{2}$ (b) $x\pm y=\pm a\sqrt{2}$
(c) $x\pm y=2a$ (d) $x+y=\pm 2a$

81. यदि रेखा $3x-4y=\lambda$, वृत्त $x^2+y^2-4x-8y-5=0$ को स्पर्श करती है, तो λ के मान हैं [Roorkee 1972; Kurukshetra CEE 1996]
(a) – 35, –15 (b) – 35, 15
(c) 35, 15 (d) 35,– 15

82. यदि एक वृत्त, अक्षों के साथ रेखाओं $\lambda x-y+1=0$ व $x-2y+3=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से होकर जाता है, तो λ का मान है [IIT 1991]
(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

83. मूल बिन्दु से वृत्त $x^2+y^2-2ax-2by+b^2=0$ पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हैं, यदि [MP PET 1995]
(a) $a-b=1$ (b) $a+b=1$
(c) $a^2=b^2$ (d) $a^2+b^2=1$

84. रेखा $lx+my+n=0$, वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ का अभिलम्ब है, यदि [MP PET 1995]
(a) $lg+mf-n=0$ (b) $lg+mf+n=0$
(c) $lg-mf-n=0$ (d) $lg-mf+n=0$

85. दिये गये वृत्त $x^2+y^2-4x-5=0$ व $x^2+y^2+6x-2y+6=0$ हैं। माना बिन्दु $P(\alpha,\beta)$ इस प्रकार है कि इस बिन्दु से दोनों वृत्तों पर खींची गयी स्पर्श रेखायें बराबर हों, तो
(a) $2\alpha+10\beta+11=0$ (b) $2\alpha-10\beta+11=0$
(c) $10\alpha-2\beta+11=0$ (d) $10\alpha+2\beta+11=0$

86. दो वृत्तों $x^2+y^2=4$ व $x^2-y^2-8x+12=0$ की उभयनिष्ठ स्पर्शियों की संख्या है [EAMCET 1990]

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

87. यदि $2x-4y=9$ व $6x-12y+7=0$ एक ही वृत्त की स्पर्श रेखायें हों, तो इसकी त्रिज्या होगी [Roorkee 1995]

(a) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (b) $\frac{17}{6\sqrt{5}}$
(c) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (d) $\frac{17}{3\sqrt{5}}$

88. वृत्त $x^2+y^2=4$ के किसी बिन्दु P पर स्पर्श रेखा अक्षों को A व B पर मिलती है, तो

(a) AB की लम्बाई नियत है
(b) PA व PB हमेशा बराबर होते हैं
(c) AB के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ $x^2+y^2=x^2y^2$ है
(d) इनमें से कोई नहीं

89. वृत्तों $x^2+y^2-x=0$ व $x^2+y^2+x=0$ पर खींची गयी उभयनिष्ठ स्पर्शियों की संख्या है [EAMCET 1994]

(a) 2 (b) 1
(c) 4 (d) 3

90. वृत्त $x^2+y^2=a^2$ की स्पर्श रेखा का समीकरण, जो $y=mx+c$ के समान्तर हो, है [RPET 2001]

(a) $y=mx\pm\sqrt{1+m^2}$ (b) $y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}$
(c) $x=my\pm a\sqrt{1+m^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

91. यदि वृत्त $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ बिन्दु (1, 2) पर वक्र $y=x^2+1$ का स्पर्शी है, तब बिन्दुओं (h, k) की संभव स्थितियाँ हैं [AMU 2000]

(a) $hk=5/2$ (b) $h+2k=5$
(c) $h^2-4k^2=5$ (d) $k^2=h^2+1$

92. रेखा $ax+by+c=0$ वृत्त $x^2+y^2=r^2$ पर अभिलम्ब है। रेखा $ax+by+c=0$ द्वारा वृत्त पर काटे गये अन्तःखण्ड की लम्बाई है

(a) r (b) r^2
(c) $2r$ (d) $\sqrt{r}$

93. $x=7$ वृत्त $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ को स्पर्श करती है तब एक स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक हैं [MP PET 1996]

(a) (7, 3) (b) (7, 4)
(c) (7, 8) (d) (7, 2)

94. यदि $a>2b>0$ तब m का धनात्मक मान जिसके लिए $y=mx-b\sqrt{1+m^2}$, वृत्तों $x^2+y^2=b^2$ तथा $(x-a)^2+y^2=b^2$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है [IIT Screening 2002]

(a) $\frac{2b}{\sqrt{a^2-4b^2}}$ (b) $\frac{\sqrt{a^2-4b^2}}{2b}$
(c) $\frac{2b}{a-2b}$ (d) $\frac{b}{a-2b}$

95. वृत्त $x^2+y^2=9$ एवं $x^2+y^2-12y+27=0$ एक दूसरे को स्पर्श करते हैं। इनकी उभयनिष्ठ स्पर्शी का समीकरण है [MP PET 1998]

(a) $4y=9$ (b) $y=3$
(c) $y=-3$ (d) $x=3$

96. यदि वृत्त जिसका केन्द्र (–1, 1) है, सरल रेखा $x+2y+12=0$ को स्पर्श करता है, तब स्पर्श–बिन्दु के निर्देशांक हैं

(a) $\left(\frac{-7}{2},-4\right)$ (b) $\left(\frac{-18}{5},\frac{-21}{5}\right)$
(c) (2,–7) (d) (–2, –5)

97. यदि किसी वक्र के बिन्दु $P(x,y)$ पर स्पर्श रेखा मूल बिन्दु को बिन्दु P से मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् हो, तो वक्र है [MP PET 1998]

(a) वृत्त (b) परवलय
(c) दीर्घवृत्त (d) सरल रेखा

98. वृत्त $x^2+y^2=a^2$ के बिन्दु (h,h) पर स्पर्शी की प्रवणता होगी

(a) 0 (b) 1
(c) –1 (d) h पर निर्भर

99. यदि रेखा $4x+3y+\lambda=0$ वृत्त $2(x^2+y^2)=5$ को स्पर्श करे तो λ का मान होगा

(a) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ (b) $5\sqrt{2}$
(c) $\frac{5\sqrt{5}}{4}$ (d) $\frac{5\sqrt{10}}{2}$

100. वृत्त $x^2+y^2+2x+4y+3=0$ के बिन्दु (–2, –3) पर अभिलम्ब की प्रवणता है

(a) 1 (b) –1
(c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

101. वृत्त $x^2+y^2=a^2$ की स्पर्श रेखा का समीकरण जो कि सरल रेखा $y=mx+c$ के लम्बवत् है, होगा

(a) $y=-\frac{x}{m}\pm a\sqrt{1+m^2}$ (b) $x+my=\pm a\sqrt{1+m^2}$
(c) $x+my=\pm a\sqrt{1+(1/m)^2}$ (d) $x-my=\pm a\sqrt{1+m^2}$

102. एक वृत्त जिसका केन्द्र (a, b) है मूल बिन्दु से गुजरता है। मूल बिन्दु पर वृत्त की स्पर्श रेखा का समीकरण है [RPET 2000]

(a) $ax-by=0$ (b) $ax+by=0$
(c) $bx-ay=0$ (d) $bx+ay=0$

103. दो वृत्त $x^2+y^2-2x+6y+6=0$ तथा $x^2+y^2-5x+6y+15=0$ परस्पर स्पर्श करते हैं। इनकी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण है [DCE 1999]

(a) $x=3$ (b) $y=6$
(c) $7x-12y-21=0$ (d) $7x+12y+21=0$

104. बिन्दु (4, 5) से वृत्त $x^2+y^2+2x-6y=6$ पर खींची स्पर्श रेखा की लम्बाई है [DCE 1999]

(a) $\sqrt{13}$ (b) $\sqrt{38}$
(c) $2\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{13}$

105. वृत्त $x^2+y^2=4$ के उन स्पर्शियों के समीकरण जो कि $x+2y+3=0$ के समान्तर हैं, हैं [MP PET 2003]

(a) $x-2y=2$ (b) $x+2y=\pm 2\sqrt{3}$

(c) $x+2y=\pm 2\sqrt{5}$ (d) $x-2y=\pm 2\sqrt{5}$

106. बिन्दु (1, 1) पर वृत्त $2x^2+2y^2-2x-5y+3=0$ के अभिलम्ब का समीकरण है [MP PET 2001]

(a) $2x+y=3$ (b) $x-2y=3$

(c) $x+2y=3$ (d) इनमें से कोई नहीं

107. बिन्दु (3, –4) से वृत्त $x^2+y^2-4x-6y+3=0$ पर खींची स्पर्श रेखा की लम्बाई का वर्ग है [MP PET 2000]

(a) 20 (b) 30

(c) 40 (d) 50

108. सरल रेखा $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$, वृत्त $x^2+y^2=a^2$ को स्पर्श करती है, यदि [AMU 1999]

(a) $p=a\cos\alpha$ (b) $p=a\tan\alpha$

(c) $p^2=a^2$ (d) $p\sin\alpha=a$

109. रेखा $3x-2y=k$, वृत्त $x^2+y^2=4r^2$ को केवल एक बिन्दु पर मिलती है, यदि $k^2=$ [Karnataka CET 2003]

(a) $20r^2$ (b) $52r^2$

(c) $\frac{52}{9}r^2$ (d) $\frac{20}{9}r^2$

110. यदि $5x-12y+10=0$ तथा $12y-5x+16=0$ किसी वृत्त की स्पर्शियों के समीकरण हैं, तब इस वृत्त की त्रिज्या है [EAMCET 2003]

(a) 1 (b) 2

(c) 4 (d) 6

111. वृत्त $x^2+y^2=25$ के बिन्दु (3, 4) पर स्पर्श रेखा व निर्देशांक अक्षों द्वारा निरूपित त्रिभुज का क्षेत्रफल है [Pb. CET 2004]

(a) $\frac{24}{25}$ (b) 0

(c) $\frac{625}{24}$ (d) $-\left(\frac{24}{25}\right)$

112. रेखा $y=2x+c$ को वृत्त $x^2+y^2=16$ की स्पर्श रेखा होने के लिए c का मान है [MP PET 2004; Karnataka CET 2005]

(a) $-16\sqrt{5}$ (b) 20

(c) $4\sqrt{5}$ (d) $16\sqrt{5}$

113. रेखा $3x+4y=1$ के समान्तर वृत्त $5x^2+5y^2=1$ की स्पर्श रेखा का समीकरण है [J & K 2005]

(a) $3x+4y=\pm 2\sqrt{5}$ (b) $6x+8y=\pm\sqrt{5}$

(c) $3x+4y=\pm\sqrt{5}$ (d) इनमें से कोई नहीं

114. निम्नलिखित कथनों पर विचार करो

कथन (*A*) : वृत्त $x^2+y^2=1$, *x*-अक्ष के समान्तर दो स्पर्श रेखाएँ रखता है

कारण (*R*) : वृत्त के बिन्दु $(0,\pm 1)$ पर $\frac{dy}{dx}=0$

तब निम्नलिखित में से कौनसा कथन सहीं है [SCRA 1996]

(a) *A* और *R* दोनों सत्य है और *R*, *A* का सही कारण है

(b) *A* और *R* दोनों सत्य है लेकिन *R*, *A* का सही कारण नहीं है

(c) *A* सत्य है लेकिन *R* असत्य है

(d) *A* असत्य है लेकिन *R* सत्य है

115. यदि $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$ वृत्त $x^2+y^2=a^2$ को स्पर्श करती है, तब बिन्दु $(1/\alpha, 1/\beta)$ होगा [Orissa JEE 2005]

(a) सरल रेखा पर (b) वृत्त पर

(c) परवलय पर (d) दीर्घवृत्त पर

116. वृत्त $x^2+y^2+2x+8y-23=0$ और $x^2+y^2-4x-10y+9=0$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या है [Orissa JEE 2005]

(a) 1 (b) 3

(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

117. वृत्त $x^2+y^2=1$ और $x^2+y^2-4x+3=0$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या है [DCE 2005]

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

118. यदि रेखा $ax+by=0$ वृत्त $x^2+y^2+2x+4y=0$ को स्पर्श करती है और वृत्त $x^2+y^2-4x+2y-3=0$ का अभिलम्ब है, तब (*a*,*b*) का मान है [AMU 2005]

(a) (2, 1) (b) (1, –2)

(c) (1, 2) (d) (–1, 2)

119. वृत्त $x^2+y^2-2k+6y-6=0$ की स्पर्श रेखा $3x-4y+7=0$ के समान्तर रेखा $3x-4y+k=0$ है, तब *k* के मान हैं [Kerala (Engg.) 2005]

(a) 5, –35 (b) –5, 35

(c) 7, –32 (d) –7, 32

(e) 3, –13

120. उस बिन्दु का बिन्दुपथ जो इस प्रकार गमन करता है कि वृत्तों $x^2+y^2+4x+3=0$ व $x^2+y^2-6x+5=0$ पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं की लम्बाई का अनुपात 2:3 है, है [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $5x^2+5y^2-60x+7=0$ (b) $5x^2+5y^2+60x-7=0$

(c) $5x^2+5y^2-60x-7=0$ (d) $5x^2+5y^2+60x+7=0$

(e) $5x^2+5y^2+60x+12=0$

स्पर्श जीवा, ध्रुव व ध्रुवी

1. वृत्तों $x^2+y^2+4x+1=0$ तथा $x^2+y^2+6x+2y+3=0$ की उभयनिष्ठ जीवा है [MP PET 1991]

(a) $x+y+1=0$ (b) $5x+y+2=0$

(c) $2x+2y+5=0$ (d) $3x+y+3=0$

2. यदि वृत्त $x^2+y^2+x-y-1=0$ की किसी जीवा का मध्य बिन्दु (1, 1) हो, तो जीवा की लम्बाई है

(a) 4 (b) 2

(c) 5 (d) इनमें से कोई नहीं

3. रेखा $y=mx$ एक वृत्त की जीवा है जिसकी त्रिज्या *a* है तथा एक व्यास *x*-अक्ष पर है, जीवा का दूसरा सिरा मूल बिन्दु पर है। इस जीवा को व्यास मानकर खींचे गये वृत्त का समीकरण होगा [MP PET 1990]

(a) $(1+m^2)(x^2+y^2)-2ax=0$

(b) $(1+m^2)(x^2+y^2)-2a(x+my)=0$

(c) $(1+m^2)(x^2+y^2)+2a(x+my)=0$

(d) $(1+m^2)(x^2+y^2)-2a(x-my)=0$

4. वृत्त $x^2+y^2=4$ की उन जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ जो मूल बिन्दु पर समकोण बनाती है, होगा [MP PET 1990; IIT 1984; RPET 1997; DCE 2000, 01]
(a) $x^2+y^2-2x-2y=0$ (b) $x^2+y^2=4$
(c) $x^2+y^2=2$ (d) $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

5. वृत्त $x^2+y^2=a^2$ की उस जीवा का समीकरण जिसके मध्य बिन्दु (x_1, y_1) है, होगा [IIT 1983; MP PET 1986; Pb. CET 2003]
(a) $xy_1+yx_1=a^2$ (b) $x_1+y_1=a$
(c) $xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$ (d) $xx_1+yy_1=a^2$

6. रेखा $y=2x$ के समान्तर वृत्त $x^2+y^2=a^2$ की जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ होगा
(a) a त्रिज्या का एक वृत्त
(b) $-\frac{1}{2}$ प्रवणता वाली एक रेखा
(c) (0, 0) केन्द्र वाला एक वृत्त
(d) – 2 प्रवणता वाली एक रेखा

7. वृत्त $x^2+y^2=r^2$ के द्वारा रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से काटी गयी जीवा की लम्बाई है
(a) $\sqrt{\frac{r^2(a^2+b^2)-a^2b^2}{a^2+b^2}}$ (b) $2\sqrt{\frac{r^2(a^2+b^2)-a^2b^2}{a^2+b^2}}$
(c) $2\frac{\sqrt{r^2(a^2+b^2)-a^2b^2}}{a^2+b^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

8. वृत्त $x^2+y^2=25$ के द्वारा सरल रेखा $x-2y=2$ से काटी गयी जीवा का मध्य बिन्दु है
(a) $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ (b) (–2,–2)
(c) $\left(\frac{2}{5},-\frac{4}{5}\right)$ (d) $\left(\frac{8}{3},\frac{1}{3}\right)$

9. यदि वृत्त $x^2+y^2=3$ रेखा $x-2y=k$ से 2 लम्बाई की जीवा काटता हो तो $k=$
(a) 0 (b) ± 1
(c) $\pm\sqrt{10}$ (d) इनमें से कोई नहीं

10. मूल बिन्दु से होकर जाने वाले वृत्त $(x-1)^2+y^2=1$ की जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ है [IIT 1985; EAMCET 1991]
(a) $x^2+y^2-3x=0$ (b) $x^2+y^2-3y=0$
(c) $x^2+y^2-x=0$ (d) $x^2+y^2-y=0$

11. बिन्दु (–1, 2) से वृत्तों $S_1 \equiv x^2+y^2+6y+7=0$ तथा $S_2 \equiv x^2+y^2+6x+1=0$ पर खींची गई ध्रुवी है [RPET 2002]
(a) समान्तर
(b) बराबर
(c) लम्बवत्
(d) एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद होने वाली

12. वृत्त $x^2+y^2+2x-4y-11=0$ के उस व्यास का समीकरण जो सरल रेखा $2x-y+3=0$ से काटी गयी जीवा को समद्विभाजित करता है, होगा
(a) $x+y-7=0$ (b) $2x-y-5=0$
(c) $x+2y-3=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. यदि वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy=0$ के द्वारा अक्षों से काटी गयी जीवाओं की लम्बाइयाँ क्रमशः 10 तथा 24 हों, तो वृत्त की त्रिज्या है
(a) 17 (b) 9
(c) 14 (d) 13

14. वृत्तों $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ तथा $(x-b)^2+(y-a)^2=c^2$ की उभयनिष्ठ जीवा का समीकरण है
(a) $x-y=0$ (b) $x+y=0$
(c) $x+y=a^2+b^2$ (d) $x-y=a^2-b^2$

15. वृत्तों $(x-a)^2+y^2=a^2$ तथा $x^2+(y-b)^2=b^2$ की उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई है [MP PET 1989]
(a) $2\sqrt{a^2+b^2}$ (b) $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$
(c) $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

16. वृत्त $x^2+y^2=1$ के सापेक्ष रेखा $lx+my+n=0$ के ध्रुव के निर्देशांक हैं [RPET 1987]
(a) $\left(\frac{l}{n},\frac{m}{n}\right)$ (b) $\left(-\frac{l}{n},-\frac{m}{n}\right)$
(c) $\left(\frac{l}{n},-\frac{m}{n}\right)$ (d) $\left(-\frac{l}{n},\frac{m}{n}\right)$

17. वृत्तों $x^2+y^2=12$ व $x^2+y^2-4x+3y-2=0$ की उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई है [RPET 1990, 99]
(a) $4\sqrt{2}$ (b) $5\sqrt{2}$
(c) $2\sqrt{2}$ (d) $6\sqrt{2}$

18. वृत्तों $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ व $(x-b)^2+(y-a)^2=c^2$ की उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई है
(a) $\sqrt{4c^2-2(a-b)^2}$ (b) $\sqrt{4c^2+2(a-b)^2}$
(c) $\sqrt{4c^2-2(a+b)^2}$ (d) $\sqrt{4c^2+2(a+b)^2}$

19. वृत्त $x^2+y^2-2x-6y-10=0$ की जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ जो मूल बिन्दु से गुजरती हैं, है [Roorkee 1989]
(a) $x^2+y^2+x+3y=0$
(b) $x^2+y^2-x+3y=0$
(c) $x^2+y^2+x-3y=0$
(d) $x^2+y^2-x-3y=0$

20. वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ पर बिन्दुओं (g, f) व (0, 0) से खींची स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा के बीच की दूरी है
(a) $\frac{1}{2}\left(\frac{g^2+f^2-c}{\sqrt{g^2+f^2}}\right)$ (b) $\left(\frac{g^2+f^2-c}{\sqrt{g^2+f^2}}\right)$
(c) $\frac{1}{2}\left(\frac{g^2+f^2-c}{g^2+f^2}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. सरल रेखा $x+2y=1$ का वृत्त $x^2+y^2=5$ के सापेक्ष ध्रुव (pole) है [RPET 2000, 01]
(a) (5, 5) (b) (5, 10)
(c) (10, 5) (d) (10, 10)

22. एक रेखा $lx+my+n=0$, वृत्त $x^2+y^2=a^2$ के बिन्दु P व Q पर मिलती है। बिन्दु P व Q पर स्पर्श रेखायें खींची जाती हैं जो R पर मिलती हैं, तो R के निर्देशांक हैं

(a) $\left(\frac{a^2l}{n}, \frac{a^2m}{n}\right)$ (b) $\left(\frac{-a^2l}{n}, \frac{-a^2m}{n}\right)$

(c) $\left(\frac{a^2n}{l}, \frac{a^2n}{m}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

23. बिन्दु (0, 0) की वृत्त $x^2+y^2+2\lambda x+2\mu y+c=0$ के सापेक्ष ध्रुवी, वृत्त $x^2+y^2=r^2$ को स्पर्श करेगी यदि [RPET 1992]

(a) $c=r(\lambda^2+\mu^2)$ (b) $r=c(\lambda^2+\mu^2)$

(c) $c^2=r^2(\lambda^2+\mu^2)$ (d) $r^2=c^2(\lambda^2+\mu^2)$

24. वृत्त $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ पर बिन्दु $A(0,1)$ से खींची गयीं स्पर्शियाँ AB व AC हैं, तो बिन्दुओं A, B व C से जाने वाले वृत्त का समीकरण है

(a) $x^2+y^2+x+y-2=0$ (b) $x^2+y^2-x+y-2=0$

(c) $x^2+y^2+x-y-2=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

25. वृत्तों $x^2+y^2+5x+7y+9=0$ और $x^2+y^2+7x+5y+9=0$ की उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई है [Kurukshetra CEE 1996]

(a) 9 (b) 8

(c) 7 (d) 6

26. वृत्त $x^2+y^2-2x-2y-2=0$ की जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ, जो केन्द्र पर $120°$ का कोण बनाता है, है [MNR 1994]

(a) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ (b) $x^2+y^2+x+y-1=0$

(c) $x^2+y^2-2x-2y-1=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

27. यदि वृत्त $x^2+y^2=a^2$ रेखा $y=mx+c$ से $2b$ लम्बाई की जीवा काटता हो तो

(a) $(1-m^2)(a^2+b^2)=c^2$ (b) $(1+m^2)(a^2-b^2)=c^2$

(c) $(1-m^2)(a^2-b^2)=c^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

28. वृत्त $2x^2+2y^2-3x+5y-7=0$ के सापेक्ष रेखा $9x+y-28=0$ का ध्रुव है [RPET 1990, 99; MNR 1984; UPSEAT 2000]

(a) (3, 1) (b) (1, 3)

(c) (3, –1) (d) (–3, 1)

29. यदि (x', y') के सापेक्ष वृत्त $x^2+y^2=a^2$ की ध्रुवी $Ax+By+C=0$ है, तब इसका ध्रुव होगा [RPET 1995]

(a) $\left(\frac{a^2A}{-C}, \frac{a^2B}{-C}\right)$ (b) $\left(\frac{a^2A}{C}, \frac{a^2B}{C}\right)$

(c) $\left(\frac{a^2C}{A}, \frac{a^2C}{B}\right)$ (d) $\left(\frac{a^2C}{A}, \frac{a^2C}{B}\right)$

30. बिन्दु (5, –1/2) का वृत्त $(x-2)^2+y^2=4$ के सापेक्ष ध्रुवी (polar) का समीकरण होगा [RPET 1996]

(a) $5x-10y+2=0$ (b) $6x-y-20=0$

(c) $10x-y-10=0$ (d) $x-10y-2=0$

31. रेखा $2x+3y=4$ का वृत्त $x^2+y^2=64$ के सापेक्ष ध्रुव (pole) होगा [RPET 1996]

(a) (32, 48) (b) (48, 32)

(c) (– 32, 48) (d) (48, –32)

32. वृत्तों $x^2+y^2+2x+3y+1=0$ तथा $x^2+y^2+4x+3y+2=0$ की उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई है [MP PET 2000]

(a) $9/2$ (b) $2\sqrt{2}$

(c) $3\sqrt{2}$ (d) $3/2$

33. उन बिन्दुओं को मिलाने वाली जीवा की लम्बाई, जिसमें सरल रेखा $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$, वृत्त $x^2+y^2=\frac{169}{25}$ को काटती है, है [Orissa JEE 2003]

(a) 1 (b) 2

(c) 4 (d) 8

34. निम्न में से कौनसा बिन्दु, वृत्तों $x^2+y^2+2x-3y+6=0$ तथा $x^2+y^2+x-8y-13=0$ की उभयनिष्ठ जीवा पर है [Karnataka CET 2003]

(a) (1, –2) (b) (1, 4)

(c) (1, 2) (d) (1, –4)

35. यदि वृत्त $x^2+y^2=4$, एक अन्य वृत्त $x^2+y^2-2x+6y+a=0$ की परिधि को समद्विभाजित करता है, तब a बराबर है [RPET 1999]

(a) 4 (b) –4

(c) 16 (d) –16

36. वृत्त $x^2+y^2=7$ के सापेक्ष बिन्दु (1, 2) की ध्रुवी का समीकरण है [RPET 1983, 84; MNR 1973]

(a) $x-2y-7=0$ (b) $x+2y-7=0$

(c) $x-2y=0$ (d) $x+2y=0$

37. वृत्त $x^2+y^2=10$ पर बिन्दु (5, –3) से खींची गयीं स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा का समीकरण है

(a) $5x-3y=10$ (b) $5x+3y=10$

(c) $3x+5y=10$ (d) $3x-5y=10$

38. बिन्दु (0,0) से जाने वाली रेखा, वृत्त $x^2+y^2-2ax=0$ को A तथा B पर काटती है, तो AB को व्यास मानकर खींचे गये वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ है [RPET 2002]

(a) $x^2+y^2-2ay=0$ (b) $x^2+y^2+ay=0$

(c) $x^2+y^2+ax=0$ (d) $x^2+y^2-ax=0$

39. उस वृत्त की त्रिज्या जिसका केन्द्र (2,1) है व एक जीवा वृत्त $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ का व्यास है, होगी [IIT Screening 2004]

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) $\sqrt{3}$

40. वृत्त $x^2+y^2-2x=0$ द्वारा रेखा $y=x$ का अन्तःखण्ड AB है, AB को व्यास मानकर खींचे गये वृत्त का समीकरण है [AIEEE 2004]

(a) $x^2+y^2+x-y=0$ (b) $x^2+y^2-x+y=0$

(c) $x^2+y^2+x+y=0$ (d) $x^2+y^2-x-y=0$

41. यदि वृत्त $2x^2+2y^2-2x-6y-25=0$ की जीवा $x-y-1=0$ हो तो उस वृत्त का समीकरण जिसका व्यास यह जीवा हो, होगा

(a) $x^2+y^2-3x-y-\frac{29}{2}=0$

(b) $2x^2+2y^2+2x-5y-\frac{29}{2}=0$

(c) $2x^2+2y^2-6x-2y-21=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

वृत्तों का निकाय

1. यदि वृत्त $x^2+y^2=a^2$ तथा $x^2+y^2-2gx+g^2-b^2=0$ एक–दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करते हों, तो
(a) $g=ab$ (b) $g^2=a^2+b^2$
(c) $g^2=ab$ (d) $g=a+b$

2. वृत्तों $x^2+y^2-6x-2y+1=0$ तथा $x^2+y^2+2x-8y+13=0$ के लिए निम्न में से कौनसा सत्य है [MP PET 1989]
(a) एक वृत्त दूसरे के अन्दर स्थित है
(b) एक वृत्त दूसरे के पूर्णतया बाहर स्थित है
(c) दोनों वृत्त एक–दूसरे को दो बिन्दुओं पर काटते हैं
(d) दोनों वृत्त एक–दूसरे को स्पर्श करते हैं

3. एक वृत्त (0, 0) व (1, 0) से गुजरता है एवं $x^2+y^2=9$ को स्पर्श करता है तो वृत्त का केन्द्र है [IIT 1992]
(a) $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$
(c) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{2},\pm\sqrt{2}\right)$

4. यदि $x^2+y^2+px+3y-5=0$ व $x^2+y^2+5x+py+7=0$ परस्पर समकोण पर काटते हैं तो p का मान है
(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1
(c) $\frac{3}{2}$ (d) 2

5. वृत्तों $x^2+y^2-6x-6y+10=0$ तथा $x^2+y^2=2$ का स्पर्श बिन्दु है
(a) (0, 0) (b) (1, 1)
(c) (1, –1) (d) (–1, –1)

6. तीन असमरेखीय बिन्दुओं से खींचा जा सकता है [MP PET 1984; BIT Ranchi 1990]
(a) केवल एक वृत्त (b) तीन वृत्त
(c) अनन्त वृत्त (d) कोई वृत्त नहीं

7. बिन्दु (2, 3) एक समाक्ष वृत्त निकाय का एक सीमान्त बिन्दु है जिसका वृत्त $x^2+y^2=9$ एक सदस्य है। दूसरे सीमान्त बिन्दु के निर्देशांक होंगे [MP PET 1993]
(a) $\left(\frac{18}{13},\frac{27}{13}\right)$ (b) $\left(\frac{9}{13},\frac{6}{13}\right)$
(c) $\left(\frac{18}{13},-\frac{27}{13}\right)$ (d) $\left(-\frac{18}{13},-\frac{9}{13}\right)$

8. उस वृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र $x+2y-3=0$ पर है एवं जो वृत्तों $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ व $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से होकर जाता है, है [MNR 1992]
(a) $x^2+y^2-6x+7=0$
(b) $x^2+y^2-3y+4=0$
(c) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$
(d) $x^2+y^2+2x-4y+4=0$

9. यदि एक वृत्त बिन्दु (1, 2) से गुजरता है एवं वृत्त $x^2+y^2=4$ को समकोण पर काटता है तो इसके केन्द्र के बिन्दुपथ का समीकरण है [MNR 1992]
(a) $x^2+y^2-3x-8y+1=0$ (b) $x^2+y^2-2x-6y-7=0$
(c) $2x+4y-9=0$ (d) $2x+4y-1=0$

10. वृत्त $x^2+y^2-2x-4y=0$ व $x^2+y^2-8y-4=0$ [IIT 1973]
(a) परस्पर अन्तःस्पर्श करते हैं
(b) परस्पर बाह्य स्पर्श करते हैं
(c) परस्पर दो बिन्दुओं पर काटते हैं
(d) इनमें से कोई नहीं

11. दो वृत्त $x^2+y^2-4y=0$ व $x^2+y^2-8y=0$ [BIT Ranchi 1985]
(a) परस्पर अन्तःस्पर्श करते हैं (b) परस्पर बाह्य स्पर्श करते हैं
(c) परस्पर स्पर्श नहीं करते हैं (d) इनमें से कोई नहीं

12. उस वृत्त का समीकरण जो वृत्तों $x^2+y^2+13x-3y=0$ व $2x^2+2y^2+4x-7y-25=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं एवं बिन्दु (1, 1) से होकर जाता है, है [RPET 1988, 89; IIT 1983]
(a) $4x^2+4y^2-30x-10y-25=0$
(b) $4x^2+4y^2+30x-13y-25=0$
(c) $4x^2+4y^2-17x-10y+25=0$
(d) इनमें से कोई नहीं

13. बिन्दु (a, b) से जाने वाले वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ जो वृत्त $x^2+y^2=p^2$ को समकोण पर काटता है, है [IIT 1988; AIEEE 2005]
(a) $2ax+2by-(a^2+b^2+p^2)=0$
(b) $2ax+2by-(a^2-b^2+p^2)=0$
(c) $x^2+y^2-3ax-4by+(a^2+b^2-p^2)=0$
(d) $x^2+y^2-2ax-3by+(a^2-b^2-p^2)=0$

14. उस वृत्त का समीकरण जो वृत्तों $x^2+y^2+x+2y+3=0$, $x^2+y^2+2x+4y+5=0$ व $x^2+y^2-7x-8y-9=0$ को समकोण पर काटता है, होगा
(a) $x^2+y^2-4x-4y-3=0$
(b) $3(x^2+y^2)+4x-4y-3=0$
(c) $x^2+y^2+4x+4y-3=0$
(d) $3(x^2+y^2)+4(x+y)-3=0$

15. वृत्तों $x^2+y^2-1=0$, $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से जाने वाले एवं रेखा $x+2y=0$ को स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण है [Roorkee 1989]
(a) $x^2+y^2+x+2y=0$ (b) $x^2+y^2-x+20=0$
(c) $x^2+y^2-x-2y=0$ (d) $2(x^2+y^2)-x-2y=0$

16. यदि वृत्त $x^2+y^2-9=0$ और $x^2+y^2+2ax+2y+1=0$ एक दूसरे को स्पर्श करें तो a का मान होगा [Roorkee Qualifying 1998]
(a) $-4/3$ (b) 0
(c) 1 (d) 4/3

17. उस वृत्त का समीकरण जो मूल बिन्दु से गुजरता है एवं जिसका केन्द्र $x+y=4$ पर है एवं वृत्त $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ को लम्बवत् काटता है, होगा

(a) $x^2+y^2-2x-6y=0$ (b) $x^2+y^2-6x-3y=0$

(c) $x^2+y^2-4x-4y=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

18. दो वृत्त $x^2+y^2+ax+by+c=0$ व $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ परस्पर समकोण पर प्रतिच्छेद करेंगे यदि

(a) $a+b+c=d+e+f$ (b) $ad+be=c+f$

(c) $ad+be=2c+2f$ (d) $2ad+2be=c+f$

19. वक्रों $ax^2+by^2=1$ व $a'x^2+b'y^2=1$ को समकोण पर काटने का प्रतिबन्ध है

(a) $\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}=\frac{1}{b}-\frac{1}{b'}$ (b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}$

(c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}$ (d) इनमें से कोई नहीं

20. वृत्तों $x^2+y^2+4x+6y=19$, $x^2+y^2=9$ व $x^2+y^2-2x-2y=5$ का मूलकेन्द्र है

(a) (1, 1) (b) (–1, 1)

(c) (1, –1) (d) (0, 1)

21. वृत्तों $x^2+y^2=a^2$ व $x^2+y^2=4ax$ को बाह्यतः स्पर्श करने वाले वृत्तों के केन्द्र का बिन्दुपथ होगा

(a) $12x^2-4y^2-24ax+9a^2=0$

(b) $12x^2+4y^2-24ax+9a^2=0$

(c) $12x^2-4y^2+24ax+9a^2=0$

(d) $12x^2+4y^2+24ax+9a^2=0$

22. यदि समान त्रिज्याओं a व केन्द्र (2, 3) व (5, 6) वाले वृत्त एक–दूसरे को लम्बवत् काटते हैं, तो $a=$ [EAMCET 1988]

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

23. उस वृत्त का समीकरण जो मूल बिन्दु से जाता है एवं वृत्त $x^2+y^2=a^2$ व $x^2+y^2+2ax=2a^2$ के समाक्ष है, होगा

(a) $x^2+y^2=1$ (b) $x^2+y^2+2ax=0$

(c) $x^2+y^2-2ax=0$ (d) $x^2+y^2=2a^2$

24. वृत्तों $x^2+y^2-8x-2y+7=0$ व $x^2+y^2-4x+10y+8=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से गुजरने वाले एवं y -अक्ष पर केन्द्र वाले वृत्त का समीकरण है

(a) $x^2+y^2+22x+9=0$ (b) $x^2+y^2+22x-9=0$

(c) $x^2+y^2+22y+9=0$ (d) $x^2+y^2+22y-9=0$

25. वृत्तों $3x^2+3y^2-2x+12y-9=0$ व $x^2+y^2+6x+2y-15=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से जाने वाली रेखा का समीकरण है [IIT 1986; UPSEAT 1999]

(a) $10x-3y-18=0$ (b) $10x+3y-18=0$

(c) $10x+3y+18=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

26. वृत्त $x^2+y^2=a^2$ के एक बिन्दु से, वृत्त $x^2+y^2=a^2\sin^2\alpha$ पर दो स्पर्श रेखायें खींची जाती हैं, तब उनके मध्य का कोण है [RPET 2002]

(a) $\frac{\alpha}{2}$ (b) α

(c) 2α (d) इनमें से कोई नहीं

27. वृत्तों $x^2+y^2-8x-2y+7=0$ व $x^2+y^2-4x+10y+8=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं एवं (3, –3) से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण है

(a) $23x^2+23y^2-156x+38y+168=0$

(b) $23x^2+23y^2+156x+38y+168=0$

(c) $x^2+y^2+156x+38y+168=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

28. बिन्दु (1,1) से गुजरने वाले एवं वृत्तों $x^2+y^2+2x+4y+6=0$ व $x^2+y^2+4x+6y+2=0$ को समकोण पर काटने वाले वृत्त का समीकरण है

(a) $x^2+y^2+16x+12y+2=0$

(b) $x^2+y^2-16x-12y-2=0$

(c) $x^2+y^2-16x+12y+2=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

29. दो वृत्त $S_1=x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ व $S_2=x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ एक–दूसरे को लम्बवत् काटते हैं, तब [RPET 1995]

(a) $2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2$ (b) $2g_1g_2-2f_1f_2=c_1+c_2$

(c) $2g_1g_2+2f_1f_2=c_1-c_2$ (d) $2g_1g_2-2f_1f_2=c_1-c_2$

30. वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy=0$ तथा $x^2+y^2+2g'x+2f'y=0$ बाह्यतः स्पर्श करते हैं यदि [MP PET 1994; Karnataka CET 2003]

(a) $f'g=g'f$ (b) $fg=f'g'$

(c) $f'g'+fg=0$ (d) $f'g+g'f=0$

31. दो वृत्त $x^2+y^2-2x-3=0$ व $x^2+y^2-4x-6y-8=0$ इस प्रकार हैं कि [MNR 1995]

(a) वे एक–दूसरे को स्पर्श करते हैं

(b) वे एक–दूसरे को प्रतिच्छेदित करते हैं

(c) एक–दूसरे के अन्दर हैं

(d) इनमें से कोई नहीं

32. समाक्ष (coaxial) वृत्त निकाय $x^2+y^2-6x-6y+4=0$, $x^2+y^2-2x-4y+3=0$ का एक सीमान्त बिन्दु है [EAMCET 1987]

(a) $(-1,1)$ (b) $(-1,2)$

(c) $(-2,1)$ (d) $(-2,2)$

33. उस वृत्त का समीकरण जिसके अभिलम्ब $x^2+2xy+3x+6y=0$ हैं एवं इसका आकार इतना है कि यह $x(x-4)+y(y-3)=0$ को ठीक अन्दर रखता है, होगा [Roorkee 1990]

(a) $x^2+y^2+3x-6y-40=0$

(b) $x^2+y^2+6x-3y-45=0$

(c) $x^2+y^2+8x+4y-20=0$

(d) $x^2+y^2+4x+8y+20=0$

34. उस बिन्दु का बिन्दुपथ जिससे दो दिये गये वृत्तों पर खींची गयी स्पर्शियों की लम्बाइयों के वर्ग का अन्तर नियत है, होगा

(a) वृत्त (b) परवलय

(c) सरल रेखा (d) इनमें से कोई नहीं

35. वृत्त $x^2+(y-1)^2=9$ व $(x-1)^2+y^2=25$ [EAMCET 1994]

(a) एक–दूसरे को स्पर्श करते हैं

(b) एक वृत्त दूसरे के पूर्णतः अन्दर है

(c) एक वृत्त दूसरे के पूर्णतः बाहर है

(d) दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं

36. वृत्तों $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ व $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ को लम्बवत् काटने वाले वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ है **[Karnataka CET 1991]**

(a) एक दीर्घवृत्त

(b) दिये गये वृत्तों का मूलाक्ष

(c) एक शांकव

(d) दूसरा वृत्त

37. एक वृत्त मूलबिन्दु से जाता है एवं इसका केन्द्र $y=x$ पर है। यदि यह $x^2+y^2-4x-6y+10=0$ को लम्बवत् काटता है, तो वृत्त का समीकरण होगा **[EAMCET 1994]**

(a) $x^2+y^2-x-y=0$ (b) $x^2+y^2-6x-4y=0$

(c) $x^2+y^2-2x-2y=0$ (d) $x^2+y^2+2x+2y=0$

38. किसी त्रिभुज की तीन भुजाओं को व्यास मानकर खींचे गये वृत्तों का मूलकेन्द्र त्रिभुज का होगा **[EAMCET 1994]**

(a) लम्बकेन्द्र (b) परिकेन्द्र

(c) अन्तःकेन्द्र (d) केन्द्रक

39. समाक्ष निकाय के तीन वृत्तों पर एक स्थिर बिन्दु से खींची गयी स्पर्शियों की लम्बाइयाँ t_1, t_2, t_3 हैं एवं यदि P, Q व R केन्द्र हों, तो $QRt_1^2+RPt_2^2+PQt_3^2=$

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 0

40. यदि तीन समाक्ष वृत्तों के केन्द्र P, Q, R एवं त्रिज्यायें क्रमशः r_1, r_2, r_3 हों, तो $QRr_1^2+RP\,r_2^2+PQr_3^2=$

(a) $PQ\,.\,QR\,.\,RP$ (b) $-PQ\,.\,QR\,.\,RP$

(c) $PQ^2.QR^2.RP^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

41. वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, वृत्त $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ की परिधि को समद्विभाजित करेगा यदि

(a) $2g'(g-g')+2f'(f-f')=c-c'$

(b) $g'(g-g')+f'(f-f')=c-c'$

(c) $f(g-g')+g(f-f')=c-c'$

(d) इनमें से कोई नहीं

42. वृत्त $(x+a)^2+(y+b)^2=a^2$ व $(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2=\beta^2$ एक–दूसरे को लम्बवत् प्रतिच्छेद करेंगे यदि

(a) $a\alpha+b\beta=b^2+\alpha^2$ (b) $2(a\alpha+b\beta)=b^2+\alpha^2$

(c) $a\alpha+b\beta=a^2+b^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

43. वृत्त $x^2+y^2+4x+6y+3=0$ व $2(x^2+y^2)+6x+4y+C=0$ लम्बवत् काटेंगे यदि $C=$ **[Kurukshetra CEE 1996]**

(a) 4 (b) 18

(c) 12 (d) 16

44. यदि रेखाओं $x+\sqrt{3}y=1$ एवं $\sqrt{3}x-y=2$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु से जाने वाला कोई वृत्त इन रेखाओं को बिन्दु P व Q से काटता है, तो PQ चाप से इसके केन्द्र पर अन्तरित कोण का मान है **[MP PET 1998]**

(a) 180^o (b) 90^o

(c) 120^o (d) केन्द्र व त्रिज्या पर निर्भर

45. उस वृत्त का समीकरण जो वृत्त $x^2+y^2+14x+6y+2=0$ को लम्बवत् प्रतिच्छेदित करता है और जिसका केन्द्र (0, 2) है, है **[MP PET 1998]**

(a) $x^2+y^2-4y-6=0$ (b) $x^2+y^2+4y-14=0$

(c) $x^2+y^2+4y+14=0$ (d) $x^2+y^2-4y-14=0$

46. यदि वृत्त $x^2+y^2=4, x^2+y^2-10x+\lambda=0$ एक–दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करते हैं, तब λ का मान है **[AMU 1999]**

(a) –16 (b) 9

(c) 16 (d) 25

47. एक वृत्त $x^2+y^2+2gx+c=0$ के समाक्षीय निकाय में, जहाँ g एक प्राचल है, यदि $c>0$, तब वृत्त हैं **[Karnataka CET 1999]**

(a) लम्बवत् (b) स्पर्श करने वाले

(c) प्रतिच्छेद करने वाले (d) प्रतिच्छेद नहीं करने वाले

48. यदि सरल रेखा $y=mx$, वृत्त $x^2+y^2-20y+90=0$ के बाहर है, तब **[Roorkee 1999]**

(a) $m>3$ (b) $m<3$

(c) $|m|>3$ (d) $|m|<3$

49. वृत्तों $2x^2+2y^2-7x=0$ और $x^2+y^2-4y-7=0$ के मूलाक्ष (radical axis) का समीकरण होगा **[RPET 1996]**

(a) $7x+8y+14=0$ (b) $7x-8y+14=0$

(c) $7x-8y-14=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

50. वृत्तों $x^2+y^2+13x-3y=0$ तथा $2x^2+2y^2+4x-7y-25=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाने वाले वृत्त का समीकरण, जिसका केन्द्र $13x+30y=0$ पर स्थित है, होगा **[DCE 2001]**

(a) $x^2+y^2+30x-13y-25=0$

(b) $4x^2+4y^2+30x-13y-25=0$

(c) $2x^2+2y^2+30x-13y-25=0$

(d) $x^2+y^2+30x-13y+25=0$

51. वृत्तों $x^2+y^2-16x+60=0, x^2+y^2-12x+27=0$ तथा $x^2+y^2-12y+8=0$ का मूलाक्ष केन्द्र हैं **[RPET 2000]**

(a) (13, 33/4) (b) (33/4, –13)

(c) (33/4, 13) (d) इनमें से कोई नहीं

52. दो वृत्तों के मूलाक्ष तथा वृत्तों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखायें होती हैं **[Karnataka CET 2001]**

(a) समान्तर

(b) लम्बवत्

(c) न तो समान्तर, न ही लम्बवत्

(d) प्रतिच्छेदित होने वाली, परन्तु पूर्णतः लम्बवत् नहीं

53. दो वृत्त $x^2+y^2-2x+6y+6=0$ तथा $x^2+y^2-5x+6y+15=0$ हैं **[Karnataka CET 2001]**

(a) प्रतिच्छेदित (b) संकेन्द्रीय

(c) अन्तःस्पर्शी (d) बाह्यस्पर्शी

54. उस वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ जो वृत्त $x^2+y^2-20x+4=0$ को लम्बवत् काटता है तथा रेखा $x=2$ को स्पर्श करता है, होगा **[UPSEAT 2001]**

(a) $y^2=16x+4$ (b) $x^2=16y$

(c) $x^2=16y+4$ (d) $y^2=16x$

55. उस वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ जो वृत्तों $x^2+y^2+4x-6y+9=0$ तथा $x^2+y^2-4x+6y+4=0$ को लम्बवत् प्रतिच्छेदित करता है, है [UPSEAT 2001]

(a) $12x+8y+5=0$ (b) $8x+12y+5=0$

(c) $8x-12y+5=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

56. वृत्तों $3x^2+3y^2-7x+8y+11=0$ तथा $x^2+y^2-3x-4y+5=0$ का मूलाक्ष है [RPET 2001]

(a) $x+10y+2=0$ (b) $x+10y-2=0$

(c) $x+10y+8=0$ (d) $x+10y-8=0$

57. यदि वृत्त $x^2+y^2=1$ की जीवा $y=mx+1$, वृत्त के दीर्घ खण्ड (major segment) पर 45^o का कोण अन्तरित करती है तो m का मान है [AIEEE 2002]

(a) 2 (b) – 2

(c) – 1 (d) इनमें से कोई नहीं

58. यदि दो वृत्त $2x^2+2y^2-3x+6y+k=0$ तथा $x^2+y^2-4x+10y+16=0$ एक दूसरे को लम्बवत् काटते हैं, तब k का मान है [Kerala (Engg.) 2002]

(a) 41 (b) 14

(c) 4 (d) 0

59. उस वृत्त का केन्द्र, जो कि दिये गये वृत्तों $x^2+y^2+2x+17y+4=0$, $x^2+y^2+7x+6y+11=0$ तथा $x^2+y^2-x+22y+3=0$ को लम्बवत् काटता है, है [MP PET 2003]

(a) (3, 2) (b) (1, 2)

(c) (2, 3) (d) (0, 2)

60. वृत्तों $x^2+y^2-3x-4y+5=0$ तथा $2x^2+2y^2-10x-12y+12=0$ के मूलाक्ष का समीकरण है [RPET 2003]

(a) $2x+2y-1=0$ (b) $2x+2y+1=0$

(c) $x+y+7=0$ (d) $x+y-7=0$

61. यदि वृत्त $x^2+y^2+6x-2y+k=0$ वृत्त $x^2+y^2+2x-6y-15=0$ की परिधि को समद्विभाजित करता है, तो k का मान है [EAMCET 2003]

(a) 21 (b) – 21

(c) 23 (d) – 23

62. यदि एक बिन्दु P इस प्रकार है कि इस बिन्दु P से वृत्तों $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ तथा $x^2+y^2-4x+2y-44=0$ पर खींची गयी स्पर्शियों की लम्बाइयों का अनुपात 2 : 3 है, तब इस बिन्दु P का बिन्दुपथ एक वृत्त है, जिसका केन्द्र होगा [EAMCET 2003]

(a) (7, – 8) (b) (– 7, 8)

(c) (7, 8) (d) (– 7, – 8)

63. यदि दो वृत्त $(x-1)^2+(y-3)^2=r^2$ तथा $x^2+y^2-8x+2y+8=0$ दो भिन्न–भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हों, तो [IIT 1989; Karnataka CET 2002; DCE 2000, 01; AIEEE 2003; MP PET 2004]

(a) $2<r<8$ (b) $r=2$

(c) $r<2$ (d) $r>2$

64. वृत्तों $x^2+y^2=25$ तथा $x^2+y^2-8x+7=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु हैं

(a) (4, 3) तथा (4, –3) (b) (4, –3) तथा (–4, –3)

(c) (–4, 3) तथा (4, 3) (d) (4, 3) तथा (3, 4)

65. यदि वृत्त $x^2+y^2+2ax+c=0$ तथा $x^2+y^2+2by+c=0$ एक–दूसरे को स्पर्श करते हों तो [MNR 1987]

(a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ (b) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}$

(c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=c^2$ (d) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c}$

66. यदि दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी d, उनकी त्रिज्यायें r_1, r_2 हों और $d=r_1+r_2$, तो [MP PET 1986]

(a) वृत्त एक–दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करते हैं

(b) वृत्त एक–दूसरे को अन्तः स्पर्श करते हैं

(c) वृत्त एक–दूसरे को प्रतिच्छेद करते हैं

(d) वृत्त असंयुक्त हैं

67. वृत्तों $x^2+y^2=2ax$ तथा $x^2+y^2=2by$ के प्रतिच्छेद बिन्दु हैं [AMU 2000]

(a) (0, 0), (a, b)

(b) (0, 0), $\left(\frac{2ab^2}{a^2+b^2}, \frac{2ba^2}{a^2+b^2}\right)$

(c) (0, 0), $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}, \frac{a^2+b^2}{b^2}\right)$

(d) इनमें से कोई नहीं

68. एक वृत्त जिसकी त्रिज्या 12 है, प्रथम पाद में स्थित है तथा दोनों अक्षों को स्पर्श करता है। एक दूसरे वृत्त का केन्द्र (8,9) तथा त्रिज्या 7 है। निम्न में से कौनसा कथन सत्य है

(a) वृत्त एक–दूसरे को अन्तः स्पर्श करते हैं

(b) वृत्त एक–दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करते हैं

(c) वृत्त दो भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं

(d) इनमें से कोई नहीं

69. वृत्तों $x^2+y^2+x-y+2=0$ व $3x^2+3y^2-4x-12=0$ के मूलाक्ष का समीकरण है [RPET 1984, 85, 86, 91, 2000]

(a) $2x^2+2y^2-5x+y-14=0$

(b) $7x-3y+18=0$

(c) $5x-y+14=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

70. यदि वृत्तों $x^2+y^2-6x+2y+4=0$ व $x^2+y^2+2x-4y-6=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से जाने वाले वृत्त का केन्द्र रेखा $y=x$ पर हो, तो वृत्त का समीकरण है [RPET 1991; Roorkee 1989]

(a) $7x^2+7y^2-10x+10y-11=0$

(b) $7x^2+7y^2+10x-10y-12=0$

(c) $7x^2+7y^2-10x-10y-12=0$

(d) $7x^2+7y^2-10x-12=0$

71. यदि वृत्त $x^2+y^2-2ax+c=0$ तथा $x^2+y^2+2by+2\lambda=0$ एक दूसरे को समकोण पर काटते हैं, तो λ का मान होगा

(a) c (b) $-c$

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

72. दो वृत्त $x^2+y^2=144$ तथा $x^2+y^2-15x+12y=0$ के मूलाक्ष का समीकरण होगा [MP PET 1988]

(a) $15x-12y=0$ (b) $3x-2y=12$

(c) $5x-4y=48$ (d) इनमें से कोई नहीं

73. वृत्त $(x-3)^2+(y-4)^2=r^2$ पूर्णतः वृत्त $x^2+y^2=R^2$ के भीतर है। यदि [AMU 1999]

(a) $R+r\le 7$ (b) $R^2+r^2<49$

(c) $R^2-r^2<25$ (d) $R-r>5$

74. λ का वह मान जिसके लिये वृत्त $x^2+y^2+2\lambda x+6y+1=0$ व $x^2+y^2+4x+2y=0$ लम्बवत् प्रतिच्छेदित करते हैं, है [MP PET 2004]

(a) $\frac{-5}{2}$ (b) -1

(c) $\frac{-11}{8}$ (d) $\frac{-5}{4}$

75. k का वह मान जिसके लिये वृत्त $x^2+y^2+kx+4y+2=0$ व $2(x^2+y^2)-4x-3y+k=0$ लम्बवत् प्रतिच्छेदित करते हैं, है [Karnataka CET 2004]

(a) $\frac{10}{3}$ (b) $\frac{-8}{3}$

(c) $\frac{-10}{3}$ (d) $\frac{8}{3}$

76. यदि वृत्तों $x^2+y^2+2ax+cy+a=0$ और $x^2+y^2-3ax+dy-1=0$ दो भिन्न बिन्दुओं P व Q पर प्रतिच्छेद करते हैं, तब रेखा $5x+by-a=0$ P व Q से गुजरेगी [AIEEE 2005]

(a) a के अनन्त मानों के लिये

(b) a के ठीक दो मानों के लिये

(c) a के ठीक एक मान के लिये

(d) a के कोई मान के लिये नहीं

77. दो वृत्त $x^2+y^2-2x+22y+5=0$ व $x^2+y^2+14x+6y+k=0$ लम्बवत् प्रतिच्छेदित करेंगे यदि $k=$ [Karnataka CET 2005]

(a) 47 (b) -47

(c) 49 (d) -49

78. एक वृत्त, केन्द्र (0, 3) और 2 त्रिज्या वाले वृत्त और x-अक्ष को स्पर्श करता है। वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ है [AIEEE 2005]

(a) एक अतिपरवलय (b) एक परवलय

(c) एक दीर्घवृत्त (d) एक वृत्त

Critical Thinking

Objective Questions

1. $ABCD$ एक वर्ग है जिसकी भुजा की लम्बाई a है। AB तथा AD को निर्देशांक अक्ष मानते हुये वर्ग के शीर्षों से होकर जाने वाले वृत्त का समीकरण है [MP PET 2003]

(a) $x^2+y^2+ax+ay=0$ (b) $x^2+y^2-ax-ay=0$

(c) $x^2+y^2+2ax+2ay=0$ (d) $x^2+y^2-2ax-2ay=0$

2. समीकरणों $x=\frac{2at}{1+t^2}$, $y=\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}$ $(-1\le t\le 1)$ से दत्त बिन्दु का बिन्दुपथ होगा

(a) एक सरल रेखा (b) एक वृत्त

(c) एक दीर्घवृत्त (d) एक अतिपरवलय

3. उस वृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र मूल बिन्दु एवं जो उस समबाहु त्रिभुज के शीर्षों से होकर जाता है जिसकी मध्यिका की लम्बाई $3a$ है, है [BIT Ranchi 1992; AIEEE 2002]

(a) $x^2+y^2=9a^2$ (b) $x^2+y^2=16a^2$

(c) $x^2+y^2=a^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. यदि रेखा $3x+4y-1=0$ वृत्त $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$ को स्पर्श करती है, तो r का मान होगा [RPET 1986]

(a) 2 (b) 5

(c) $\frac{12}{5}$ (d) $\frac{2}{5}$

5. किसी समतल में दो बिन्दु A व B इस प्रकार हैं कि प्रत्येक बिन्दु P जो वृत्त पर है $\frac{PA}{PB}=k$ को संतुष्ट करता है, तो k बराबर नहीं होगा [IIT 1982]

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

6. बिन्दु $A(-1,1)$ व वृत्त $x^2+y^2=4$ पर एक गतिशील बिन्दु P को मिलाने वाली रेखा को 3 : 2 में विभाजित करने वाले बिन्दु का बिन्दुपथ होगा

(a) $25(x^2+y^2)+20(x-y)+28=0$

(b) $25(x^2+y^2)+20(x-y)-28=0$

(c) $20(x^2+y^2)+25(x-y)+28=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

7. बिन्दुओं A व B के भुज, समीकरण $x^2+2ax-b^2=0$ के मूल हैं तथा कोटि, समीकरण $y^2+2py-q^2=0$ के मूल हैं। AB को व्यास मानकर खींचे गये वृत्त का समीकरण है [IIT 1984]

(a) $x^2+y^2+2ax+2py-b^2-q^2=0$

(b) $x^2+y^2+2ax+py-b^2-q^2=0$

(c) $x^2+y^2+2ax+2py+b^2+q^2=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

8. वृत्त $x^2+y^2-2x+4y-93=0$ के भीतर एक वृत्त निर्मित किया गया है जिसकी भुजायें निर्देशांक्षों के समान्तर हैं, तो इसके शीर्षों के निर्देशांक होंगे

(a) (–6, –9), (–6, 5), (8, –9) और (8, 5)

(b) (–6, 9), (–6, –5), (8, –9) और (8, 5)

(c) (–6, –9), (–6, 5), (8, 9) और (8, 5)

(d) (–6, –9), (–6, 5), (8, –9) और (8, –5)

9. यदि वृत्त $x^2+y^2=25$ के सापेक्ष बिन्दु (3, 2) की स्पर्श जीवा जो कि निर्देशाक्षों को A व B पर मिलती है, तो त्रिभुज OAB का परिकेन्द्र होगा

(a) $\left(\frac{25}{4},\frac{25}{6}\right)$

(b) $\left(\frac{2}{50},\frac{3}{50}\right)$

(c) $\left(\frac{25}{6},\frac{25}{4}\right)$

(d) इनमें से कोई नहीं

10. वृत्त $x^2+y^2=4$ बिन्दुओं $A(1, 0)$ व $B(3, 4)$ को जोड़ने वाली रेखा को दो बिन्दुओं P व Q पर काटता है। माना $\frac{BP}{PA}=\alpha$ तथा $\frac{BQ}{QA}=\beta$ तो α व β निम्न समीकरण के मूल हैं

(a) $3x^2+2x-21=0$ (b) $3x^2+2x+21=0$
(c) $2x^2+3x-21=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

11. a भुजा वाले समबाहु त्रिभुज के अन्तःवृत्त के अन्दर वर्ग खींचा गया है, तो वर्ग का क्षेत्रफल है [IIT 1994]

(a) $\frac{a^2}{3}$ (b) $\frac{2a^2}{3}$
(c) $\frac{a^2}{6}$ (d) $\frac{a^2}{12}$

12. माना कि L_1 मूलबिन्दु से गुजरने वाली एक सरल रेखा है तथा सरल रेखा L_2 का समीकरण $x+y=1$ है। यदि वृत्त $x^2+y^2-x+3y=0$ द्वारा L_1 और L_2 पर काटे गये अन्तःखण्ड बराबर हैं, तो निम्नलिखित में से कौनसा समीकरण रेखा L_1 को निरूपित करता है [IIT 1999]

(a) $x+y=0$ (b) $x-y=0$
(c) $x+7y=0$ (d) $x-7y=0$

13. मूल बिन्दु को रेखा $x\sqrt{5}+2y=3\sqrt{5}$ तथा वृत्त $x^2+y^2=10$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से मिलाने पर निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा [Roorkee Qualifying 1998]

(a) 3 (b) 4
(c) 5 (d) 6

14. बिन्दु (0, 0) तथा (1, 0) से होकर जाने वाले तथा वृत्त $x^2+y^2=9$ को स्पर्श करने वाले वृत्त का केन्द्र है [AIEEE 2002]

(a) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$
(c) $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

15. यदि $\left(m_i,\frac{1}{m_i}\right), i=1,2,3,4$ चक्रीय बिन्दु हैं, तो $m_1.m_2.m_3.m_4$ का मान है [Karnataka CET 2002]

(a) 1 (b) –1
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

16. वृत्त के बिन्दु (3, 4) पर अभिलम्ब, वृत्त को (–1, –2) पर काटता है तब वृत्त का समीकरण है [Orissa JEE 2002]

(a) $x^2+y^2+2x-2y-13=0$
(b) $x^2+y^2-2x-2y-11=0$
(c) $x^2+y^2-2x+2y+12=0$
(d) $x^2+y^2-2x-2y+14=0$

17. बिन्दु (4, 3) से वृत्त $x^2+y^2=9$ पर स्पर्श रेखाएँ खींची गयी हैं। इन स्पर्श रेखाओं और इनके स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल है [MP PET 1991; IIT 1981, 87]

(a) $\frac{24}{25}$ (b) $\frac{64}{25}$
(c) $\frac{192}{25}$ (d) $\frac{192}{5}$

18. यदि वृत्त $x^2+y^2=r^2$ के बिन्दु (a, b) पर खींची गयी स्पर्श रेखा निर्देशांक अक्षों को बिन्दुओं A तथा B पर मिलती हो और O मूल बिन्दु हो तो त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल होगा

(a) $\frac{r^4}{2ab}$ (b) $\frac{r^4}{ab}$
(c) $\frac{r^2}{2ab}$ (d) $\frac{r^2}{ab}$

19. उस बिन्दु के निर्देशांक जिससे वृत्तों $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2+8x+15=0$ व $x^2+y^2+10y+24=0$ पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर हैं, है [Roorkee 1982]

(a) $\left(2,\frac{5}{2}\right)$ (b) $\left(-2,-\frac{5}{2}\right)$
(c) $\left(-2,\frac{5}{2}\right)$ (d) $\left(2,-\frac{5}{2}\right)$

20. वृत्त $x^2+y^2-4x-2y-11=0$ पर बिन्दु (4, 5) से स्पर्श रेखायें खींची जाती हैं तो इन स्पर्श रेखाओं व त्रिज्याओ से बने चतुर्भुज का क्षेत्रफल है [IIT 1985]

(a) 15 वर्ग इकाई (b) 75 वर्ग इकाई
(c) 8 वर्ग इकाई (d) 4 वर्ग इकाई

21. माना r त्रिज्या के वृत्त के व्यास PR के सिरों पर स्पर्श रेखायें PQ तथा RS हैं। यदि PS तथा RQ, वृत्त की परिधि के बिन्दु X पर प्रतिच्छेदित हो, तो $2r$ बराबर है [IIT Screening 2001]

(a) $\sqrt{PQ.RS}$ (b) $\frac{PQ+RS}{2}$
(c) $\frac{2PQ.\ RS}{PQ+RS}$ (d) $\sqrt{\frac{PQ^2+RS^2}{2}}$

22. बिन्दु P से वृत्त $x^2+y^2+4x-6y+9\sin^2\alpha+13\cos^2\alpha=0$ पर खींचे गए स्पर्श रेखायुग्म के मध्य का कोण 2α है। बिन्दु P के बिन्दुपथ का समीकरण है [IIT 1996]

(a) $x^2+y^2+4x-6y+4=0$
(b) $x^2+y^2+4x-6y-9=0$
(c) $x^2+y^2+4x-6y-4=0$
(d) $x^2+y^2+4x-6y+9=0$

23. एक सरल रेखा बिन्दु $C(-\sqrt{8},\sqrt{8})$ से जाती है जो x-अक्ष से $135°$ का कोण बनाती है तथा वृत्त $x=5\cos\theta, y=5\sin\theta$ को बिन्दुओं A व B पर काटती है, तो AB की लम्बाई होगी

(a) 3 (b) 7
(c) 10 (d) इनमें से कोई नहीं

24. वृत्तों $x^2+y^2=4$ और $x^2+y^2-6x-8y=24$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या है [IIT 1998]

(a) 0 (b) 1
(c) 3 (d) 4

25. उस वृत्त का समीकरण, जो बिन्दु $(2a,0)$ से गुजरता है एवं जिसका वृत्त $x^2+y^2=a^2$ के सापेक्ष मूलाक्ष $x=\frac{a}{2}$ है, होगा [RPET 1999]

(a) $x^2+y^2-2ax=0$ (b) $x^2+y^2+2ax=0$
(c) $x^2+y^2+2ay=0$ (d) $x^2+y^2-2ay=0$

26. वृत्त $x^2+4x+(y-3)^2=0$ पर बिन्दु $A(0,3)$ से जीवा AB खींची जाती है जो M पर इस प्रकार मिलती है कि $AM=2AB$, तो बिन्दु M का बिन्दुपथ होगा [IIT 1986]

(a) सरल रेखा (b) वृत्त
(c) परवलय (d) इनमें से कोई नहीं

27. यदि वृत्त $x^2+y^2=px+qy$ (जहाँ $pq\neq 0$) पर किसी बिन्दु (p, q) से खींची गयी दो विभिन्न जीवाएँ x-अक्ष द्वारा समद्विभाजित होती हैं, तो [IIT 1999]

(a) $p^2=q^2$ (b) $p^2=8q^2$
(c) $p^2<8q^2$ (d) $p^2>8q^2$

28. मूल बिन्दु से वृत्त $(x-1)^2+y^2=1$ पर डाली गई जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ है [IIT 1985]

(a) वृत्त (b) सरल रेखा
(c) रेखायुग्म (d) इनमें से कोई नहीं

29. माना वृत्त $x^2+y^2=r^2$ की एक जीवा AB, केन्द्र पर समकोण अन्तरित करती है। तब ΔPAB के केन्द्रक का बिन्दुपथ, जबकि P वृत्त पर गति करता है, होगा [IIT Screening 2001]

(a) एक परवलय (b) एक वृत्त
(c) एक दीर्घवृत्त (d) एक रेखायुग्म

30. यदि वृत्त $C_1: x^2+y^2=16$ एक अन्य 5 त्रिज्या वाले वृत्त को इस प्रकार प्रतिच्छेदित करता है कि उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई अधिकतम एवं प्रवणता $\frac{3}{4}$ हो, तो C_2 के केन्द्र के निर्देशांक हैं

(a) $\left(-\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right),\left(\frac{9}{5},\frac{-12}{5}\right)$ (b) $\left(-\frac{9}{5},-\frac{12}{5}\right),\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$
(c) $\left(\frac{9}{5},\frac{-12}{5}\right),\left(\frac{-9}{5},\frac{-12}{5}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

31. वृत्त $x^2+y^2-2x=0$ द्वारा रेखा $y=x$ पर काटा गया अन्तःखण्ड AB है। ऐसा वृत्त जिसका व्यास AB है, का समीकरण है [IIT 1996]

(a) $x^2+y^2-x-y=0$ (b) $x^2+y^2-2x-y=0$
(c) $x^2+y^2-x+y=0$ (d) $x^2+y^2+x-y=0$

32. यदि वृत्त $S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ द्वारा बिन्दु $P(x_1,y_1)$ पर अन्तरित कोण θ हो, तो

(a) $\cot\theta=\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{g^2+f^2-c}}$ (b) $\cot\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{g^2+f^2-c}}$
(c) $\tan\theta=\frac{2\sqrt{g^2+f^2-c}}{\sqrt{S_1}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

33. $x^2+y^2+2gx+c=0$, ($c<0$ के लिये) द्वारा समाक्ष वृत्त का निकाय प्रस्तुत करता है [Karnataka CET 2004]

(a) प्रतिच्छेदित वृत्त
(b) अप्रतिच्छेदी वृत्त
(c) स्पर्शी वृत्त
(d) स्पर्शी या अप्रतिच्छेदी वृत्त

34. एक रेखा L दो वृत्तों $x^2+y^2=25$ व $x^2+y^2-8x+7=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से जाती है। दूसरे वृत्त के केन्द्र से इस रेखा L पर डाले गये लम्ब की लम्बाई होगी [Bihar CEE 1994]

(a) 4 (b) 3
(c) 1 (d) 0

35. यदि वृत्त बिन्दु (a, b) से गुजरता है तथा वृत्त $x^2+y^2=4$ को लम्बवत् प्रतिच्छेद करता है तब उसके केन्द्र का बिन्दुपथ है [AIEEE 2004]

(a) $2ax-2by-(a^2+b^2+4)=0$
(b) $2ax+2by-(a^2+b^2+4)=0$
(c) $2ax-2by+(a^2+b^2+4)=0$
(d) $2ax+2by+(a^2+b^2+4)=0$

36. यदि θ_1,θ_2 बिन्दु P से वृत्त $x^2+y^2=a^2$ पर डाली गयी स्पर्शियों के $x-$अक्ष से प्रवणता (Slopes) हैं और $\cot\theta_1+\cot\theta_2=c$, तो P का बिन्दुपथ है

(a) $c(x^2-a^2)=2xy$
(b) $c(x^2-a^2)=y^2-a^2$
(c) $c(y^2-a^2)=2xy$
(d) इनमें से कोई नहीं

37. रेखा $Ax+By+C=0$ वृत्त $x^2+y^2+ax+by+c=0$ को P व Q पर एवं रेखा $A'x+B'y+C'=0$ वृत्त $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$ को R व S पर काटती है। यदि चारों बिन्दु P, Q, R, S चक्रीय हों, तो $D=\begin{vmatrix} a-a' & b-b' & c-c' \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}=$ [Roorkee 1986]

(a) 1 (b) 0
(c) −1 (d) इनमें से कोई नहीं

38. उस वृत्त का समीकरण जो वृत्त $x^2+y^2-6x+6y+17=0$ को बाह्यतः स्पर्श करता है एवं जिस पर रेखायें $x^2-3xy-3x+9y=0$ अभिलम्ब हैं, है [Roorkee 1994]

(a) $x^2+y^2-6x-2y-1=0$
(b) $x^2+y^2+6x+2y+1=0$
(c) $x^2+y^2-6x-6y+1=0$
(d) $x^2+y^2-6x-2y+1=0$

39. उस वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ जो वृत्त $x^2+(y-1)^2=1$ को बाह्यतः स्पर्श करता है और x-अक्ष को भी स्पर्श करता है, है [IIT Screening 2005]

(a) $\{(x,y): x^2+(y-1)^2=4\}\cup\{(x,y): y<0\}$
(b) $\{(x,y): x^2=4y\}\cup\{(0,y): y<0\}$
(c) $\{(x,y): x^2=y\}\cup\{(0,y): y<0\}$
(d) $\{(x,y): x^2=4y\}\cup\{(x,y): y<0\}$

40. त्रिज्या 2 का एक वृत्त C_1 x-अक्ष और y-अक्ष दोनों को स्पर्श करता है। दूसरा वृत्त C_2 जिसकी त्रिज्या 2 से अधिक है, वृत्त C_1 व दोनों अक्षों को स्पर्श करता है। वृत्त C_2 की त्रिज्या होगी [AMU 2005]

(a) $6-4\sqrt{2}$ (b) $6+4\sqrt{2}$
(c) $6-4\sqrt{3}$ (d) $6+4\sqrt{3}$

Answers

वृत्तों का समीकरण, वृत्त से सम्बन्धित ज्यामितीय प्रश्न

1	d	2	d	3	b	4	a	5	b
6	a	7	c	8	b	9	c	10	a
11	c	12	b	13	b	14	b	15	c
16	b	17	b	18	c	19	b	20	c
21	c	22	b	23	a	24	d	25	a
26	b	27	c	28	c	29	c	30	d
31	b	32	a	33	a	34	b	35	b
36	c	37	c	38	b	39	d	40	c
41	b	42	a	43	b	44	c	45	c
46	a	47	c	48	a	49	c	50	c
51	b	52	c	53	d	54	a	55	a
56	a	57	b	58	a	59	a	60	a
61	d	62	a	63	d	64	c	65	a
66	a	67	a	68	a	69	c	70	a
71	c	72	b	73	c	74	d	75	a
76	b	77	c	78	b	79	b	80	a
81	b	82	c	83	d	84	a	85	b
86	d	87	c	88	a	89	a	90	d
91	c	92	b	93	c	94	e	95	d
96	a	97	b	98	b	99	a	100	c
101	c	102	b	103	b	104	b	105	c
106	d	107	a	108	a	109	b	110	a
111	b	112	b	113	b	114	d	115	d
116	d	117	c	118	d	119	a	120	a
121	b	122	b	123	c	124	d	125	d
126	e	127	b	128	d	129	c	130	b
131	d	132	a	133	d	134	c	135	b

वृत्त की स्पर्शरेखा तथा अभिलम्ब

1	b	2	b	3	d	4	c	5	b
6	d	7	c	8	c	9	b	10	a
11	a	12	d	13	c	14	c	15	b
16	c	17	c	18	a	19	d	20	c
21	c	22	b	23	c	24	b	25	a
26	a	27	d	28	c	29	b	30	c
31	a	32	a	33	c	34	a	35	c
36	c	37	a	38	b	39	c	40	c
41	a	42	b	43	a	44	b	45	a
46	c	47	d	48	d	49	d	50	a
51	c	52	c	53	c	54	a	55	d
56	b	57	a	58	a	59	c	60	b
61	b	62	c	63	c	64	c	65	a
66	d	67	a	68	c	69	b	70	c
71	a	72	a	73	b	74	a	75	d
76	c	77	b	78	c	79	d	80	b
81	b	82	b	83	c	84	a	85	c
86	c	87	b	88	c	89	d	90	b
91	b	92	c	93	a	94	a	95	b
96	b	97	a	98	c	99	d	100	a
101	b	102	b	103	a	104	a	105	c
106	c	107	c	108	c	109	b	110	a
111	c	112	c	113	c	114	a	115	b
116	c	117	c	118	c	119	a	120	d

स्पर्श जीवा, ध्रुव व ध्रुवी

1	a	2	d	3	b	4	c	5	c
6	b	7	b	8	c	9	c	10	c
11	d	12	c	13	d	14	a	15	c
16	b	17	a	18	a	19	d	20	a
21	b	22	b	23	c	24	b	25	d
26	a	27	b	28	c	29	a	30	b
31	a	32	b	33	b	34	d	35	c
36	b	37	a	38	d	39	c	40	d
41	c								

वृत्तों का निकाय

1	d	2	d	3	d	4	a	5	b
6	a	7	a	8	a	9	c	10	a
11	a	12	b	13	a	14	d	15	c
16	a,d	17	c	18	c	19	a	20	a
21	a	22	c	23	c	24	c	25	a
26	c	27	a	28	c	29	a	30	a
31	b	32	a	33	b	34	c	35	b
36	b	37	c	38	a	39	d	40	b
41	a	42	b	43	b	44	a	45	d
46	a	47	b	48	d	49	c	50	b
51	d	52	b	53	c	54	d	55	c
56	b	57	c	58	c	59	a	60	a
61	d	62	b	63	a	64	a	65	d
66	a	67	b	68	a	69	b	70	c
71	d	72	c	73	d	74	d	75	c
76	d	77	a	78	b				

Critical Thinking Questions

1	b	2	b	3	d	4	a	5	b
6	b	7	a	8	a	9	d	10	a
11	c	12	b, c	13	c	14	b	15	a
16	b	17	c	18	a	19	b	20	c
21	a	22	d	23	c	24	b	25	a
26	b	27	d	28	a	29	b	30	a
31	a	32	b	33	a	34	d	35	b
36	c	37	b	38	d	39	b	40	b

Answers and Solutions

वृत्त का समीकरण, वृत्त से सम्बन्धित ज्यामितीय प्रश्न

1. (d) **ट्रिक :** स्पष्टतः दिये गये वृत्त का केन्द्र $(1,-2)$ है। चूँकि वर्ग की भुजायें अक्षों के समान्तर हैं, अतः पहले तीन विकल्प त्रिभुज के शीर्ष नहीं हो सकते क्योंकि प्रथम दो (*a* व *b*) में $y=-2$ एवं (c) में $x=1$ है जो कि केन्द्र $(1,-2)$ से गुजरते हैं परन्तु यह सम्भव नहीं है। अतः उत्तर (d) सही है।

2. (d) यहाँ वृत्त के केन्द्र $(3,-1)$ को रेखा $x+2by+7=0$ पर होना चाहिए। अतः $3-2b+7=0 \Rightarrow b=5$

3. (b) प्रतिच्छेद बिन्दु निम्न हैं

$x=a\cos\theta+b\sin\theta$

$y=a\sin\theta-b\cos\theta$

अतः $x^2+y^2=a^2+b^2$

जो कि एक वृत्त का समीकरण है।

4. (a) त्रिज्या = $(1,-3)$ से $3x-4y-5=0$ पर लम्बवत् दूरी

अर्थात $\left|\frac{3+12-5}{\sqrt{5^2}}\right|=2$.

5. (b) *x*-अक्ष को स्पर्श करता है अतः त्रिज्या = केन्द्र की कोटि (Ordinate)

अतः $\sqrt{g^2+f^2-c}=(-f)$ या $g^2=c$.

6. (a) अभीष्ट समीकरण $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-2ax-2ay+a^2=0$.

7. (c) स्पष्टतः त्रिज्या $=\sqrt{(1-4)^2+(2-6)^2}=5$

अतः क्षेत्रफल = $\pi r^2=25\pi$ वर्ग इकाई

8. (b) केन्द्र (0, 0), (– 3, 1) व (6, – 2) हैं एवं किन्हीं दो बिन्दुओं (0, 0) व (– 3, 1) (माना) से गुजरने वाली रेखा $y=-\frac{1}{3}x$ है एवं बिन्दु (6, – 2) इस पर है अतः बिन्दु समरेखीय हैं।

9. (c) माना वृत्त का समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ है। अब दिये गये बिन्दुओं को रखने पर हमें निम्न तीन समीकरण मिलते हैं।

$c=0$ ....(i)

$a^2+2ga+c=0$ ....(ii)

$b^2+2fb+c=0$ ....(iii)

इन्हें सरल करने पर, $g=-\frac{a}{2}, f=-\frac{b}{2}$

अतः केन्द्र $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$ होगा।

10. (a) वृत्त की त्रिज्या = $\left|\frac{2+3-4}{\sqrt{5}}\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}$

अतः समीकरण $(x-1)^2+(y+3)^2=\frac{1}{5}$

या $x^2+y^2-2x+6y+1+9=\frac{1}{5}$

या $5x^2+5y^2-10x+30y+49=0$.

11. (c) दोनों अक्ष, क्योंकि केन्द्र (–2, 2) व त्रिज्या 2 है।

12. (b) समीकरण $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$ होगा।

चूँकि यह दोनों अक्षों को स्पर्श करता है

$\therefore x_1=y_1=r$

$\therefore (x-x_1)^2+(y-x_1)^2=x_1^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-2x_1(x+y)+x_1^2=0$.

13. (b) माना अभीष्ट वृत्त का केन्द्र (x_1,y_1) है एवं हम जानते हैं, कि दिये गये वृत्त का केन्द्र (1, 2) है। चूँकि दोनों वृत्तों की त्रिज्यायें बराबर हैं, अतः स्पर्श बिन्दु (5, 5) दोनों केन्द्रो को मिलाने वाली रेखा का मध्य बिन्दु होगा। अतः $x_1=9$ व $y_1=8$ है। अतः अभीष्ट समीकरण $(x-9)^2+(y-8)^2=25$

$\Rightarrow x^2+y^2-18x-16y+120=0$ है।

ट्रिक : बिन्दु (5, 5) अभीष्ट वृत्त को सन्तुष्ट करेगा। अतः अभीष्ट वृत्त विकल्प (b) द्वारा दिया गया है।

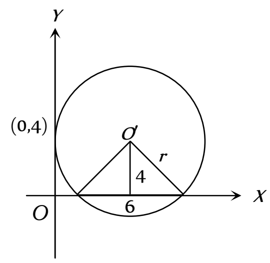
14. (b) वृत्त का केन्द्र = व्यासों का प्रतिच्छेद बिन्दु = (1, –1)

क्षेत्रफल $=154 \Rightarrow \pi r^2=154 \Rightarrow r=7$

अतः अभीष्ट वृत्त का समीकरण

$(x-1)^2+(y+1)^2=7^2 \Rightarrow x^2+y^2-2x+2y=47$ है।

15. (c) चित्र से



त्रिज्या $(r)=\sqrt{(4)^2+(3)^2}=5$.

16. (b) इस प्रकार के दो वृत्त होंगे प्रत्येक का केन्द्र दोनों बिन्दुओं को जोड़ने वाली रेखा के लम्ब समद्विभाजक पर होगा।

17. (b) केन्द्र (1, 2) है और चूँकि वृत्त *x*-अक्ष को स्पर्श करता है इसलिए त्रिज्या 2 होगी। अतः समीकरण $(x-1)^2+(y-2)^2=2^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-2x-4y+1=0$ होगा

ट्रिक : यहाँ केवल एक वृत्त $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ है, जिसका केन्द्र (1, 2) है।

18. (c) $2\sqrt{g^2-c}=2a$ ....(i)

व $2\sqrt{f^2-c}=2b$ ....(ii)

(i) व (ii) का वर्ग करके और फिर (ii) को (i) में से घटाने पर $g^2-f^2=a^2-b^2$ प्राप्त होता है।

अतः बिन्दुपथ $x^2-y^2=a^2-b^2$ होगा।

19. (b) वृत्त का व्यास, समान्तर रेखाओं (स्पर्शियों) $3x-4y+4=0$ व $3x-4y-\frac{7}{2}=0$ के बीच की दूरी होगी, अतः $\frac{4}{\sqrt{9+16}}+\frac{7/2}{\sqrt{9+16}}=\frac{3}{2}$. अतः त्रिज्या $\frac{3}{4}$ होगी।

20. (c) $(\text{त्रिज्या})^2=g^2+f^2-c$ या $121=81+36-k \Rightarrow k=-4$.

21. (c) (x_1, y_1) व (x_2, y_2) व्यास के शीर्ष हैं।

अतः केन्द्र $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ है।

22. (b) *AB* को व्यास होना चाहिए क्योंकि अर्द्ध–वृत्त परिधि पर समकोण अन्तरित करता है, अतः अब वृत्त का समीकरण $A(-3, 4)$ व $B(3,-4)$ को व्यास के सिरे मानकर ज्ञात कीजिये।

23. (a) वृत्त $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ है चूँकि केन्द्र (1, 1) व त्रिज्या 1 है।

24. (d) अनन्त, चूँकि समाक्ष वृत्तों के निकाय हैं।

25. (a) माना समीकरण

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ....(i)

परन्तु यह $(-1,-3)$ व (3, 0) से गुजरता है, अतः

$10-2g-6f+c=0$ ....(ii)

व $9+6g+c=0$ ....(iii)

एवं केन्द्र $C(-g,-f)$ है।

स्पर्श रेखा की प्रवणता $=-\frac{4}{3} \Rightarrow$ अभिलम्ब की प्रवणता $=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \frac{f}{3+g}=\frac{3}{4} \Rightarrow 3g-4f+9=0$ .....(iv)

अब (ii), (iii) व (iv) को सरल करने पर,

$g=-1, f=\frac{3}{2}$ व $c=-3$

अतः वृत्त का समीकरण $x^2+y^2-2x+3y-3=0$ है।

ट्रिक : स्पष्टतः बिन्दु (–1, –3) तथा (3, 0) वृत्त के समीकरण को सन्तुष्ट करेंगें। अतः विकल्प (a) में दिये गये वृत्त पर दोनों बिन्दु स्थित हैं। परन्तु यह भी निरीक्षण कर लेना चाहिये कि यह दी गयी रेखा $4x+3y-12=0$ को स्पर्श करता है या नहीं।

26. (b) $(2,-2)$ व $(-1,-1)$ से जाने वाले वृत्तों का निकाय

अर्थात $(x-2)(x+1)+(y+2)(y+1)+\lambda\left(\frac{y+2}{-2+1}-\frac{x-2}{2+1}\right)=0$

बिन्दु (5, 2) इस पर स्थित है।

अतः $3.6+4.3+\lambda\left(\frac{4}{-1}-1\right)=0 \Rightarrow \lambda=\frac{30}{5}=6$

अतः अभीष्ट समीकरण

$(x-2)(x+1)+(y+2)(y+1)+6\left(\frac{y+2}{-1}-\frac{x-2}{3}\right)=0$

या $x^2+y^2-3x-3y-8=0$ होगा

ट्रिक : यहाँ वृत्त $x^2+y^2-3x-3y-8=0$, (2, –2), (–1, –1) व (5, 2) द्वारा संतुष्ट होता है। अतः विधार्थियों को इस तरह की समस्याओं का विलोमतः परीक्षण करना चाहिये।

27. (c) तृतीय चतुर्थांश में निर्देशांक्षों को स्पर्श करने वाले वृत्त का केन्द्र $(-a,-a)$ एवं '*a*' त्रिज्या का समीकरण

$x^2+y^2+2ax+2ay+a^2=0$ है एवं हम जानते है

$\left|\frac{3(-a)-4(-a)+8}{\sqrt{9+16}}\right|=a \Rightarrow a=2$

अतः अभीष्ट समीकरण $x^2+y^2+4x+4y+4=0$ होगा।

ट्रिक : स्पष्टतः वृत्त का केन्द्र तृतीय चतुर्थांश में स्थित है जो कि विकल्प (c) द्वारा दिया जाता है।

28. (c) केन्द्र (2, 3) है व एक सिरा (3, 4) है।

P_2, P_1 व O का मिलाने वाली रेखा को 2 : 1 में बाँटता है।

अतः $P_2=\left(\frac{4-3}{2-1}, \frac{6-4}{2-1}\right) \equiv (1, 2)$ है।

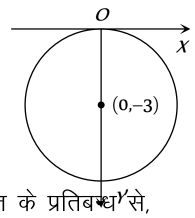
29. (c) जैसा कि हम जानते हैं, कि वृत्त के समीकरण में ऐसा कोई पद नहीं होता है जिसमें *xy* हो तथा x^2 व y^2 के गुणांक बराबर होते हों। अतः $2-q=0 \Rightarrow q=2$ व $p=3$.

30. (d) स्पष्टतः वृत्त का केन्द्र $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ है।

अतः वृत्त का समीकरण

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2+y^2-3x-4y=0$ होगा

31. (b) केन्द्र (0, – 3) व $R=\sqrt{0^2+9+0}=3$.



32. (a) बिन्दुवृत्त के प्रतिबन्ध से,

$R=\sqrt{g^2+f^2-c}=0 \Rightarrow g^2+f^2=c$.

33. (a) रेखा $3x+y-14=0$ व $2x+5y-18=0$ का प्रतिच्छेद बिन्दु $x=\frac{-18+70}{15-2}, y=\frac{-28+54}{13} \Rightarrow x=4, y=2$

अर्थात् (4, 2) है।

अतः त्रिज्या $=\sqrt{(9)+(16)}=5$ व समीकरण

$x^2+y^2-2x+4y-20=0$ है।

ट्रिक : यहाँ केवल एक वृत्त $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ है जिसका केन्द्र (1, –2) है।

34. (b) $2\sqrt{g^2-c}=2\sqrt{9-9}=0$

x-अक्ष पर कटे अंतः खण्ड की लम्बाई शून्य हैं,अतः वृत *x*-अक्ष को स्पर्श करता है।

35. (b) माना केन्द्र (*h*, *k*) है। चूँकि यह दोनों अक्षों को स्पर्श करता है। अतः $h=k=a$

अतः समीकरण $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ है।

परन्तु यह रेखा $3x+4y=4$ को स्पर्श करता है अतः

$\frac{3a+4a-4}{5}=a \Rightarrow a=2$

$\therefore$ अभीष्ट वृत्त $x^2+y^2-4x-4y+4=0$ है।

36. (c) वृत्त का केन्द्र (2, 3) है, स्पष्टतः रेखा $3x+2y=12$ वृत्त के केन्द्र से गुजरती है। अतः यह वृत्त का व्यास होगा।

37. (c) यहाँ $2\sqrt{g^2-c}=2a \Rightarrow g^2-a^2-c=0$ .....(i)

और यह (0, *b*) से गुजरता है, अतः

$b^2+2fb+c=0$ .....(ii)

(i) व (ii) को जोड़ने पर, $g^2+2fb=a^2-b^2$

अतः बिन्दुपथ $x^2-2by=a^2-b^2$ है।

38. (b) केन्द्र (2, 2) व $R=\sqrt{(4-2)^2+(5-2)^2}=\sqrt{13}$ है।

अतः अभीष्ट समीकरण $x^2+y^2-4x-4y-5=0$ है।

39. (d) यदि वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, *x*-अक्ष को स्पर्श करता है, तो $-f=\sqrt{g^2+f^2-c} \Rightarrow g^2=c$ .....(i)

एवं *y*-अक्ष से 2*l* लम्बाई की एक जीवा काटता है।

$\Rightarrow 2\sqrt{f^2-c}=2l \Rightarrow f^2-c=l^2$ ....(ii)

(ii) में से (i) घटाने पर, $f^2-g^2=l^2$

अतः बिन्दुपथ $y^2-x^2=l^2$ होगा जो कि स्पष्टतः एक अतिपरवलय है।

40. (c) व्यास के सिरे (5, 7) व (1, 4) हैं अतः त्रिज्या

$=\frac{1}{2}\sqrt{(4)^2+(3)^2}=\frac{5}{2}$ है।

41. (b) माना केन्द्र (*h, k*) है, तो

$\sqrt{(h-2)^2+(k-3)^2}=\sqrt{(h-4)^2+(k-5)^2}$ ....(i)

व $k-4h+3=0$ ....(ii)

(i) से, $-4h-6k+8h+10k=16+25-4-9$

या $4h+4k-28=0$ या $h+k-7=0$ ....(iii)

(ii) व (iii) से,(*h, k*) = (2, 5) अतः केन्द्र (2, 5) व त्रिज्या = 2 है।

ट्रिक : स्पष्टतः वृत्त $x^2+y^2-4x-10y+25=0$, बिन्दुओं (2, 3) व (4, 5) से गुजरता है। चूँकि इस प्रश्न में विकल्प "इनमें से कोई नही" नहीं है अतः विद्यार्थियों को आगे निरीक्षण करने की आवश्यकता नहीं है।

42. (a) प्रश्नानुसार, अभीष्ट वृत्त बिन्दु (0,–1) से गुजरता है। अतः इसकी त्रिज्या बिन्दुओं (0, –1) व (1, –2) के बीच की दूरी के बराबर होगी अर्थात् $\sqrt{2}$ अतः अभीष्ट वृत्त

$(x-1)^2+(y+2)^2=(\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-2x+4y+3=0$

ट्रिक : चूँकि दिये गये वृत्तों में से केवल यही वृत्त, (0, –1) से गुजरता है।

43. (b) केन्द्र $(-4,-5)$ है व (2, 3) से गुजरता है।

44. (c) (0, 0) से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण है

$x^2+y^2+2gx+2fy=0$ ....(i)

वृत्त (i), (0, *b*) तथा (*a, b*) से भी गुजरता है।

$\therefore f=-\frac{b}{2}$ तथा $a^2+b^2+2ag+2\left(-\frac{b}{2}\right)b=0$

$\Rightarrow g=-\frac{a}{2}$

अतः वृत्त का समीकरण $x^2+y^2-ax-by=0$ है।

45. (c) यह आधारभूत संकल्पना है।

46. (a) दोनों अक्षों को स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2=0$ होगा। यह (1,2) से गुजरता है, अतः $a=5, 1$

अतः वृत्तों के समीकरण $x^2+y^2-2x-2y+1=0$

व $x^2+y^2-10x-10y+25=0$ हैं।

47. (c) केन्द्र (3, 4) केवल $x+y=7$ को सन्तुष्ट करता है।

48. (a) दिये गये वृत्त के संकेन्द्री वृत्त का समीकरण $x^2+y^2-6x+12y+k=0$ होगा। ....(i)

वृत्त (i) की त्रिज्या $=\sqrt{2}$ (दिये गये वृत्त की त्रिज्या)

$\Rightarrow \sqrt{9+36-k}=\sqrt{2}\sqrt{9+36-15}$

$\Rightarrow 45-k=60 \Rightarrow k=-15$

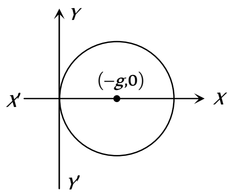
अतः वृत्त का अभीष्ट समीकरण

$x^2+y^2-6x+12y-15=0$.

49. (c) प्रश्नानुसार, $g=f=r$ व $\sqrt{g^2+f^2-c}=r$ से $\Rightarrow g=\sqrt{c}$

50. (c) केन्द्र $(\pm 4, 0)$ व त्रिज्या = 4, *x*-अक्ष के दोनों ओर।

51. (b) वृत्त का समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ है।



परन्तु यह (0, 0) व (2, 1) से गुजरता है, तो

$c=0$ ....(i)

$5+4g+2f=0$ ....(ii)

एवं $\sqrt{g^2+f^2-c}=|g| \Rightarrow f=0$ $\{\because c=0\}$

(ii) से, $g=-\frac{5}{4}$

अतः समीकरण $2x^2+2y^2-5x=0$ होगा।

52. (c) चूँकि वृत्त (0, 0) से गुजरता है, अतः $c=0$, $2\sqrt{g^2-c}=2$

$\Rightarrow g=1$ व $2\sqrt{f^2-c}=2 \Rightarrow f=1$

अतः त्रिज्या $\sqrt{2}$ है एवं केन्द्र $(-1,-1)$ है। अतः अभीष्ट समीकरण $x^2+y^2+2x+2y=0$ है।

ट्रिक : स्पष्टतः वृत्त का केन्द्र तृतीय चतुर्थाश में है जो कि (c) द्वारा दिया जाता है।

53. (d) यदि $c=0$; वृत्त मूलबिन्दु से गुजरता है।

54. (a) माना केन्द्र $(-g, 0)$ हो, तो $\sqrt{g^2-c}=5 \Rightarrow c=g^2-25$

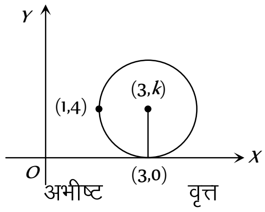
एवं यह (2, 3) से गुजरता है, अतः

$13+4g+g^2-25=0 \Rightarrow g=-6, 2$

अतः समीकरण $x^2+y^2-12x+11=0$

व $x^2+y^2+4x-21=0$ हैं।

55. (a) $k^2=4+(k-4)^2 \Rightarrow k=\frac{5}{2}$



अतः अभीष्ट वृत्त का समीकरण है, $(x-3)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-6x-5y+9=0$.

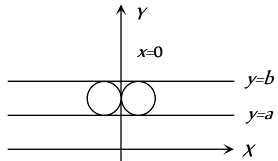
ट्रिक : केवल (a), (1, 4) से गुजरता है

56. (a) यहाँ $r=10$ (त्रिज्या), केन्द्र इन दोनों व्यास का प्रतिच्छेद बिन्दु अर्थात् (8, –2) होगा।

अतः अभीष्ट समीकरण $(x-8)^2+(y+2)^2=10^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-16x+4y-32=0$ है।

57. (b) अतः केवल दो वृत्त हैं। (जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है)



58. (a) अभीष्ट वृत्त $(x-a)x+(y-b)y=0$

या $x^2-ax+y^2-by=0$ है।

59. (a) वृत्त $x^2+y^2-\frac{1}{2}x=0$ है।

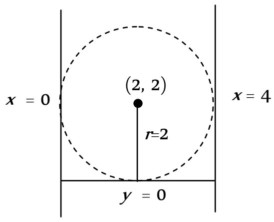
केन्द्र $(-g,-f)=\left(\frac{1}{4},0\right)$ व $R=\sqrt{\frac{1}{16}+0-0}=\frac{1}{4}$.

60. (a) यह स्पष्ट है।

61. (d) $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

$x^2+4-4x+y^2+4-4y=4$

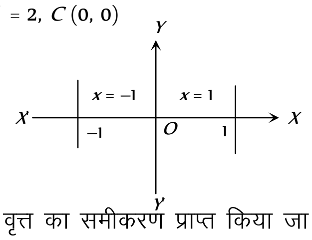
$\Rightarrow x^2+y^2-4x-4y+4=0$.



62. (a) चूँकि वृत्त की त्रिज्या शून्य व केन्द्र (0 , 0) है।

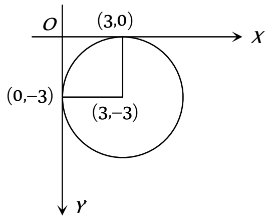
63. (d) वृत्त के मूल बिन्दु से जाने के प्रतिबन्ध से अर्थात् $c=0$ होगा।

64. (c) त्रिज्या = 2, C (0, 0)



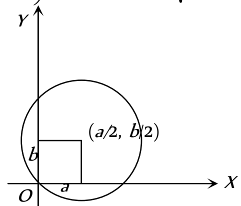
इससे वृत्त का समीकरण प्राप्त किया जा सकता है।

65. (a) यह चित्र से स्पष्ट है।



66. (a) केन्द्र से स्पर्शी पर लम्ब की लम्बाई त्रिज्या होती है। अतः त्रिज्या प्राप्त करके वृत्त समीकरण निकालें।

67. (a) केन्द्र $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$ व त्रिज्या $=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}$ है।



68. (a) वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, वृत्त $x^2+y^2-2x+4y+20=0$ के समकेन्द्रीय है

अतः केन्द्र $(1,-2)$ है व त्रिज्या

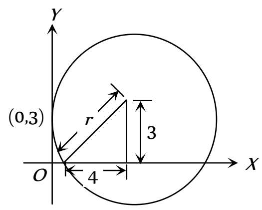
$=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{(1-4)^2+(-2+2)^2}\Rightarrow c=-4$.

69. (c) यहाँ $\sqrt{f^2+g^2-c}=a$

f शून्य होना चाहिए। $\Rightarrow g^2-c=a^2$

70. (a) केन्द्र (3, –1) है। इस बिन्दु एवं मूल बिन्दु से जाने वाली रेखा $x+3y=0$ है।

71. (c) चित्रानुसार



त्रिज्या $r=\sqrt{4^2+3^2}=5$

72. (b) माना दो समतलीय बिन्दु (0, 0) व (a, 0) हैं अतः

$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}=\lambda,(\lambda\neq 1)$ (जहाँ λ कोई संख्या है)

$\Rightarrow x^2+y^2+\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}\right)(a^2-2ax)=0$, जो कि वृत्त का समीकरण है।

73. (c) पहले त्रिभुज के शीर्ष प्राप्त करें फिर वृत्त के समीकरण का निरीक्षण करें।

74. (d) बिन्दु वृत्त ($\because$ त्रिज्या शून्य है) तथा दो संगामी रेखायें।

75. (a) केन्द्र $(-4,3)$ है।

त्रिज्या = केन्द्रों के बीच की दूरी – दूसरे वृत्त की त्रिज्या

$=5-1=4$

अतः वृत्त का समीकरण $x^2+y^2+8x-6y+9=0$ है।

ट्रिक : केवल विकल्प (a) में केन्द्र (– 4, 3) है।

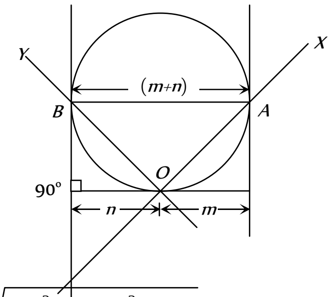
76. (b) दिये गये वृत्त के संकेन्द्री वृत्त का समीकरण $x^2+y^2-4x-6y+k=0$ है, यह $x=0$ पर स्पर्श करेगा, अतः त्रिज्या = केन्द्र से $x=0$ की लम्बवत् दूरी

$\Rightarrow\sqrt{4+9-k}=\frac{2}{\sqrt{1}}\Rightarrow k=9$

अतः अभीष्ट समीकरण $x^2+y^2-4x-6y+9=0$ है।

77. (c) चूँकि केन्द्र, निर्देशाक्षों (या $x=0$ व $y=0$) के कोण समद्विभाजकों पर है। अतः हमें दो रेखायें प्राप्त होंगी जो एक–दूसरे पर लम्बवत् हैं अर्थात् $x=y$ व $x=-y$ स्पष्टतः इनका संयुक्त समीकरण $x^2-y^2=0$ होगा।

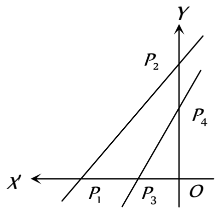
78. (b) चित्र से स्पष्ट है व्यास = $m+n$



79. (b) $R=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta+8}=3$

80. (a) $P_1\equiv\left(-\frac{n_1}{l_1},0\right),P_2\equiv\left(0,-\frac{n_1}{m_1}\right),P_3\equiv\left(-\frac{n_2}{l_2},0\right)$ व

$P_4\equiv\left(0,-\frac{n_2}{m_2}\right)$ $\{\angle P_1P_2P_3=\angle P_1P_4P_3\}$



अतः $m_{12}=-\frac{l_1}{m_1},m_{23}=-\frac{n_1}{n_2}.\frac{l_2}{m_1},m_{14}=-\frac{n_2}{n_1}.\frac{l_1}{m_2}$,

व $m_{34}=-\frac{l_2}{m_2}$

$$\tan\theta=\frac{-\frac{l_1}{m_1}+\frac{n_1l_2}{n_2m_1}}{1+\frac{n_1l_1l_2}{n_2m_1^2}} \text{ तथा } \tan\phi=\frac{-\frac{n_2l_1}{n_1m_2}+\frac{l_2}{m_2}}{1+\frac{n_2l_1l_2}{n_1m_2^2}}$$

अब $\tan\theta=\tan\phi\Rightarrow m_1m_2=l_1l_2$

वैकल्पिक : रेखा $l_1x+m_1y+n_1=0$, x व y-अक्ष को $A\left(-\frac{n_1}{l_1},0\right),B\left(0,-\frac{n_1}{m_1}\right)$ एवं रेखा $l_2x+m_2y+n_2=0$ इन अक्षों को $C\left(-\frac{n_2}{l_2},0\right)$, व $D\left(0,\frac{-n_2}{m_2}\right)$ पर काटती है।

अतः AC व BD क्रमशः x व y-अक्ष के अनुदिश जीवायें हैं एवं मूलबिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं। चूँकि A, B, C व D चक्रीय हैं।

अतः $OA.OC=OB.OD$

$$\Rightarrow\left|\left(-\frac{n_1}{l_1}\right)\left(-\frac{n_2}{l_2}\right)\right|=\left|\left(-\frac{n_1}{m_1}\right)\left(-\frac{n_2}{m_2}\right)\right|$$

$\Rightarrow|l_1l_2|=|m_1m_2|$

दिये गये सभी विकल्पों में सत्य है जो कि (a) द्वारा दिया जाता है।

81. (b) माना त्रिभुज के शीर्ष (0, 0), $(a, 0)$, $(0, b)$ हैं।

अतः बिन्दु (h,k) के प्रतिबन्धानुसार,

$h^2+k^2+(h-a)^2+k^2+h^2+(k-b)^2=c$

$\Rightarrow 3h^2+3k^2-2ah-2bk+a^2+b^2=c$

इसलिए $3x^2+3y^2-2ax-2by+a^2+b^2=c$

इसका केन्द्र $\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3}\right)$ जो कि त्रिभुज का केन्द्रक है।

82. (c) अभीष्ट बिन्दुपथ $SS_1=T^2$ है।

$(x^2+y^2-a^2)(h^2+k^2-a^2)=(hx+ky-a^2)^2$

परन्तु प्रश्नानुसार, x^2 का गुणांक $+y^2$ का गुणांक $=0$

$\Rightarrow h^2+k^2=2a^2$.

अतः बिन्दु का बिन्दुपथ केन्द्र (0, 0) व त्रिज्या $a\sqrt{2}$ वाला वृत्त है।

83. (d) दो बिन्दुओं $(a, 0)$ व $(-a, 0)$ को जोड़ने वाली रेखा का लम्ब समद्विभाजक $x=0$ है।

84. (a) केन्द्र (–2, 1), त्रिज्या $=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}$

अतः वृत्त का समीकरण $x^2+y^2+4x-2y-35=0$.

85. (b) वृत्त का केन्द्र (2, 2) है।

$\because$ वृत्त, बिन्दु (4, 5) से होकर जाता है।

$\therefore$ वृत्त की त्रिज्या

$=\sqrt{(4-2)^2+(5-2)^2}=\sqrt{(4+9)}=\sqrt{13}$

अतः वृत्त का समीकरण $(x-2)^2+(y-2)^2=(\sqrt{13})^2$

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2-4y+4=13$

$\Rightarrow x^2+y^2-4x-4y-5=0$.

86. (d) माना केन्द्र (h, k) है, तो त्रिज्या = h एवं $CC_1=R_1+R_2$

या $\sqrt{(h-3)^2+(k-3)^2}=h+\sqrt{9+9-14}$

$\Rightarrow(h-3)^2+(k-3)^2=h^2+4+4h$

$\Rightarrow k^2-10h-6k+14=0$ या $y^2-10x-6y+14=0$.

87. (c) चूँकि क्षेत्रफल $=\pi r^2$, जहाँ $r=a\Rightarrow$ क्षेत्रफल $=\pi a^2$.

88. (a) यह एक वृत्त निरूपित करेगा यदि $a=b$

$\Rightarrow\frac{k}{3}=\frac{1}{4}\Rightarrow k=\frac{3}{4}$.

89. (a) माना केन्द्र (h, k), व $h-k=1$ ....(i)

एवं त्रिज्या $a=3$

समीकरण $(x-h)^2+(y-k)^2=9$ है।

साथ ही यह (7, 3) से गुजरता है

अर्थात् $(7-h)^2+(3-k)^2=9$ ....(ii)

(i) व (ii) से, $(h, k)=(4, 3)$

अतः समीकरण $x^2+y^2-8x-6y+16=0$ होगा।

ट्रिक : चूँकि वृत्त $x^2+y^2-8x-6y+16=0$ दिये गये प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करता है।

90. (d) अभीष्ट समीकरण है,

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

$(x+4)(x-12)+(y-3)(y+1)=0$

$x^2+y^2-8x-2y-51=0$.

91. (c) माना केन्द्र (h, k) है, तब

$(h-3)^2+(k+2)^2=(h+2)^2+k^2$

$\Rightarrow 10h-4k-9=0$

केन्द्र रेखा पर भी स्थित है, अतः $2h-k=3$

हल करने पर, $k=-6, h=-\frac{3}{2}$

त्रिज्या $(h-3)^2+(k+2)^2=\frac{145}{4}$ है जो कि केवल विकल्प (c) के लिए सत्य है।

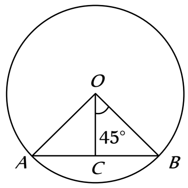
92. (b) माना (h, k) उस वृत्त का केन्द्र है जो दिये गये वृत्त के बाहर घूमता है। दिये गये वृत्त का केन्द्र $\left(\frac{-3}{2}, 3\right)$ तथा त्रिज्या $\sqrt{\frac{9}{4}+9+9}=\frac{9}{2}$ है। स्पष्टतः (h, k), $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$ से हमेशा $\left(\frac{9}{2}+2\right)=\frac{13}{2}$ की दूरी पर रहता है।

अतः $\left(h+\frac{3}{2}\right)^2+(k-3)^2=\left(\frac{13}{2}\right)^2$

$\Rightarrow h^2+k^2+3h-6k+\frac{9}{4}+9-\frac{169}{4}=0$

अतः बिन्दुपथ $x^2+y^2+3x-6y-31=0$ होगा।

93. (c) माना जीवा AB की लम्बाई $\sqrt{2}$ है, O वृत्त का केन्द्र है एवं OC बिन्दु O से AB पर डाले गये लम्ब की लम्बाई है, तो



$AB=\sqrt{2}$

$AC=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

ΔOBC में, $OB=BC \operatorname{cosec} 45^o=\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}=1$

$\therefore$ वृत्त का क्षेत्रफल $=\pi(OB)^2=\pi$.

94. (e) यह आधारभूत संकल्पना है।

95. (d) स्पष्टतः केन्द्र (4, 2) है जिसे व्यास के सिरों का मध्य बिन्दु होना चाहिये। अतः दूसरा सिरा (11, 2) होगा।

96. (a) यह स्पष्ट है।

97. (b) माना बिन्दु (α, β) से जाने वाली रेखा

$\frac{x-\alpha}{\cos\theta}=\frac{y-\beta}{\sin\theta}=k$ (माना) ....(i)

जहाँ k, रेखा पर किसी बिन्दु (x, y) की $P(\alpha, \beta)$ से दूरी है।

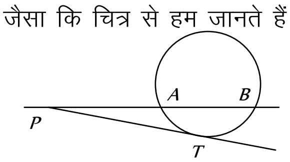
माना यह रेखा वृत्त $x^2+y^2=r^2$ को बिन्दु $(\alpha+k\cos\theta, \beta+k\sin\theta)$ पर मिलती है।

अतः $\therefore (\alpha+k\cos\theta)^2+(\beta+k\sin\theta)^2=r^2$

$\Rightarrow k^2+2(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta)k+(\alpha^2+\beta^2-r^2)=0$ जो कि k, में वर्ग समीकरण है। यदि k_1 व k_2 इसके मूल हैं एवं रेखा (i) वृत्त को A व B पर मिलती है तो $PA=k_1$ व $PB=k_2$

$\therefore PA.PB=k_1k_2=$ मूलों का गुणनफल $=\alpha^2+\beta^2-r^2$.

ट्रिक : जैसा कि चित्र से हम जानते हैं कि, $PA \,.\, PB=PT^2$



98. (b) दिया है, $\frac{x+1}{2}=\cos\theta$; $\frac{y-3}{2}=\sin\theta$

$\Rightarrow \left(\frac{x+1}{2}\right)^2+\left(\frac{y-3}{2}\right)^2=1 \Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=4$,

$\therefore$ केन्द्र $(-1, 3)$ है।

99. (a) केन्द्र व्यास का मध्यबिन्दु है।

100. (c) वृत्त g, f, c बिन्दु (2, 0) से गुजरता है। अतः

$\therefore 4+4g+c=0$ ....(i)

x-अक्ष पर अन्तः खण्ड $2\sqrt{(g^2-c)}=5$ है।

$\therefore 4(g^2+4g+4)=25$, [(i) से]

या $(2g+9)(2g-1)=0 \Rightarrow g=-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}$

$\because$ केन्द्र प्रथम चतुर्थांश में स्थित है अतः $-g=\frac{9}{2}$ (धनात्मक)

$\therefore c=14$, [(i) से].

101. (c) **ट्रिक :** चूँकि विकल्पों (a) व (b) में दिये गये वृत्त सभी दिये गये प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करते हैं।

102. (b) दोनों अक्षो को प्रथम चतुर्थाश में 5 इकाई दूरी पर स्पर्श करने वाले वृत्त का केन्द्र (5, 5) तथा त्रिज्या 5 होगी

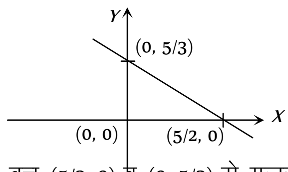
$\therefore (x-h)^2+(y-k)^2=a^2 \Rightarrow (x-5)^2+(y-5)^2=(5)^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-10x-10y+25=0$.

103. (b) त्रिज्या न्यूनतम होगी यदि दिये गये बिन्दु व्यास के सिरे हों।

104. (b) रेखाओं $x=0$, $y=0$, $2x+3y=5$ से त्रिभुज निर्मित होता है जिसके शीर्ष (0, 0), (5/2, 0) और (0, 5/3) हैं। चूँकि वृत्त (0,0) से गुजरता है।

अतः वृत्त का समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy=0$ ..(i) होगा।



साथ ही, वृत्त (5/2, 0) व (0, 5/3) से गुजरता है, अतः

$g=-5/4$, $f=-5/6$

समी. (i) में g व f के मान रखने पर अभीष्ट वृत्त का समीकरण $6(x^2+y^2)-5(3x+2y)=0$ है।

105. (c) त्रिज्या = मूल बिन्दु से दूरी $=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

$\therefore (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$.

106. (d) दी गई समीकरण $2x^2 + 2y^2 + 4x + 8y + 15 = 0$ है।

$\Rightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = -\frac{5}{2}$

जो कि संभव नहीं हैं, क्योंकि वाम पक्ष पूर्णतः धनात्मक है।

107. (a) माना व्यास पर बिन्दु (x_1, y_1) है

$\Rightarrow 2x_1 + 3y_1 = 3$ ....(i)

$16x_1 - y_1 = 4$ ....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से,

$x_1 = \frac{3}{10}, y_1 = \frac{4}{5}$

$\therefore$ वृत्त का समीकरण $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$

$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = r^2$

यह वृत्त बिन्दु (4, 6) से गुजरता है,

अतः $r^2 = \left(\frac{37}{10}\right)^2 + \left(\frac{26}{5}\right)^2 \Rightarrow r^2 = \frac{4073}{100}$

अतः अभीष्ट वृत्त का समीकरण है,

$\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4073}{100}$

$\Rightarrow 5(x^2 + y^2) - 3x - 8y = 200$.

108. (a) $x^2 + y^2 - 2ax = 0$

स्पष्टतः वृत्त की त्रिज्या a है, अतः इसका क्षेत्रफल πa^2 है।

109. (b) वृत्त का समीकरण है, $(x-1)(x-3) + (y-2)(y-4) = 0$

त्रिज्या $= \frac{1}{2}\sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{8} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

110. (a) केन्द्र $(1, -1)$ है जो कि दी गयी दोनों रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु है, तथा $\pi r^2 = 154 \Rightarrow r = 7$

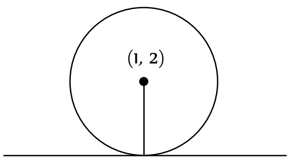
अतः अभीष्ट वृत्त का समीकरण है, $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 49$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 47 = 0$.

111. (b) वृत्त का समीकरण $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 4^2$ है। हम जानते हैं कि (h, k) केन्द्र वाले वृत्त का मानक समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ है। दिये गये समीकरण को मानक समीकरण से तुलना करने पर केन्द्र $\equiv (4, -2)$ तथा त्रिज्या 4 है। चूँकि वृत्त का केन्द्र $(4, -2)$ है। अतः वृत्त सिर्फ y-अक्ष को स्पर्श करता है।

112. (b) $\because$ वृत्त की त्रिज्या=वृत्त के केन्द्र से स्पर्श रेखा की लम्बवत् दूरी

$\Rightarrow r = \frac{1+2-5}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$



अतः अभीष्ट वृत्त का समीकरण है,

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$.

113. (b) अभीष्ट वृत्त का समीकरण है,

$(x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6) + \lambda(3x + 2y - 5) = 0$

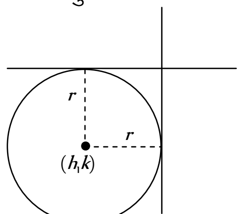
यह वृत्त बिन्दु $(-2, 4)$ से गुजरता है,

अतः $(4 + 16 + 4 - 24 + 6) + \lambda(-6 + 8 - 5) = 0$, $\therefore \lambda = 2$

$\therefore (x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6) + 2(3x + 2y - 5) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$.

114. (d) चूँकि वृत्त तीसरे चतुर्थाश में अक्षों को स्पर्श करता है



$\therefore$ त्रिज्या $= -h = -k$ अतः $h = k = -5$

$\therefore$ वृत्त का समीकरण है $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 25$.

115. (d) वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 - 3x - 4y + 2 = 0$ है, तथा यह x-अक्ष को काटता है। चूँकि वृत्त x-अक्ष को काटता है,

$\therefore$ $y = 0$ अतः वृत्त का समीकरण $x^2 + 0 - 3x + 2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$ होगा

$\Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1, 2$

$\therefore$ बिन्दु (1,0) तथा (2, 0) हैं।

116. (d) वृत्त की त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$g^2 + f^2 = c$ (दिया है),

$\therefore$ त्रिज्या = 0.

117. (c) केन्द्र (2, − 3)

परिधि $= 10\pi \Rightarrow 2\pi r = 10\pi \Rightarrow r = 5$.

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ से,

$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 25$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$,

जो कि वृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

118. (d) माना वृत्त का केन्द्र (h, k) है, चूँकि यह y-अक्ष को स्पर्श करता है।

$\therefore$ वृत्त की त्रिज्या = h

अब $(h-2)^2 + k^2 = h^2$

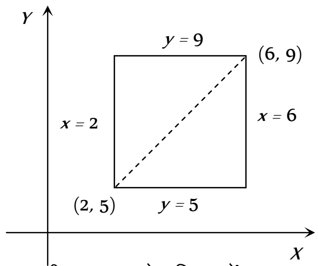
$\Rightarrow h^2 + 4 - 4h + k^2 = h^2$

$\Rightarrow k^2 = 4h - 4$

अतः केन्द्र का बिन्दुपथ $y^2 = 4x - 4$ है, जो कि एक परवलय है।

119. (a) जैसे–जैसे $n \to \infty$, बहुभुज एक वृत्त होगा तथा वृत्त का परिमाप $= 2\pi R$ होगा।

120. (a) केन्द्र (4, 7) है।



121. (b) वृत्त का समीकरण, जो बिन्दुओं (0, 0), (1, 3) व (2, 4) से गुजरता है, $x^2 + y^2 - 10x = 0$ है।

बिन्दु $(k, 3)$ वृत्त पर स्थित होंगे, यदि

$k^2 + 9 - 10k = 0 \Rightarrow k^2 - 10k + 9 = 0$

$\Rightarrow k^2 - 9k - k + 9 = 0 \Rightarrow k(k-9) - 1(k-9) = 0$

$\Rightarrow k = 1$ या $k = 9$.

122. (b) वृत्त का समीकरण, जो बिन्दुओं $(0, 0)$, $(2, 0)$ व (0, – 2) से गुजरता है, $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ है। यदि यह $(k, -2)$ बिन्दु से गुजरता है, तो $k^2 + 4 - 2k - 4 = 0 \Rightarrow k = 0, 2$

$\because (0, -2)$ वृत्त पर पहले से ही स्थित है, $\therefore k = 2$.

123. (c) बिन्दुओं $(6, -\sqrt{35})$ व $(3, -\sqrt{26})$ के परीक्षण द्वारा यह वृत्त पर स्थित है।

124. (d) वृत्त के व्यास के समीकरण $x + y = 6$ व $x + 2y = 4$ हैं। हमें ज्ञात है कि व्यासों का प्रतिच्छेदन बिन्दु वृत्त का केन्द्र कहलाता है।

$\therefore$ केन्द्र $\equiv (8, -2)$ चूँकि वृत्त बिन्दु (6, 2) से गुजरता है अतः केन्द्र (8, – 2) व बिन्दु (6, 2) के बीच की दूरी वृत्त की त्रिज्या होगी। अतः वृत्त की त्रिज्या

$= \sqrt{(6-8)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$.

125. (d) प्रश्नानुसार, वृत्त के व्यासों के समीकरण $2x + 3y + 1 = 0$ तथा $3x - y - 4 = 0$ हैं।

हल करने पर $x = 1, y = -1$

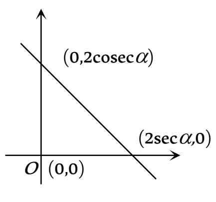
$\therefore$ वृत्त का केन्द्र (1, – 1) है।

दिया है : $2\pi r = 10\pi \Rightarrow r = 5$

अभीष्ट वृत्त है, $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$.

126. (e) $x^2 + y^2 - 2gx - 2gy + g^2 = 0$



$g = \pm \dfrac{g\cos\alpha + g\sin\alpha - 2}{\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}}$

$\Rightarrow g = \dfrac{2}{\sin\alpha + \cos\alpha \pm 1}$.

इसी तरह, सभी विकल्पों द्वारा यह संतुष्ट होता है।

127. (b) हमें दिया गया है, कि वृत्त का परिमाप, वर्ग के परिमाप के बराबर है।

$\therefore$ माना वृत्त की त्रिज्या 'r' व वर्ग की भुजा 'a' है।

$\therefore \quad 2\pi r = 4a \Rightarrow a = \dfrac{\pi r}{2}$

$\therefore$ वर्ग का क्षेत्रफल $\Rightarrow a^2 = \dfrac{\pi^2 r^2}{4}$

और वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$\therefore \quad \dfrac{\text{वृत्त का क्षेत्रफल}}{\text{वर्ग का क्षेत्रफल}} = \dfrac{\pi r^2}{\pi^2 r^2 / 4} = \dfrac{4}{\pi} > 1$

अतः वृत्त का क्षेत्रफल, वर्ग के क्षेत्रफल की तुलना में बड़ा है।

128. (d) दिये गये समीकरण को $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ से तुलना करने पर, $g = 5$

x-अक्ष पर अंतः खण्ड की लम्बाई $= 2\sqrt{g^2 - c}$

$= 2\sqrt{(5)^2 - 9} = 8$.

129. (c) केन्द्र : (2, 1)

त्रिज्या = बिन्दु (2, 1) से रेखा $3x + 4y = 5$ पर लम्ब

$= \left|\dfrac{3.2 + 4.1 - 5}{\sqrt{9+16}}\right| \Rightarrow \left|\dfrac{6 + 4 - 5}{5}\right| = 1$

$\therefore$ वृत्त $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

अर्थात् $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ है।

130. (b) $x = 2 + 3\cos\theta, y = 3\sin\theta - 1$

$x^2 + y^2 = 4 + 9\cos^2\theta + 12\cos\theta + 9\sin^2\theta + 1 - 6\sin\theta$

$= 14 + 12\cos\theta - 6\sin\theta$

$= 4(2 + 3\cos\theta) - 2(3\sin\theta - 1) + 4$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4x - 2y + 4$

$\Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 9$

$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ है। अतः $\therefore$ केन्द्र (2,–1) है।

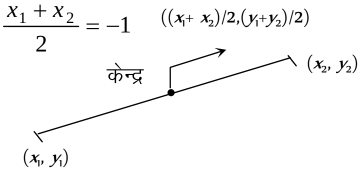
131. (d) दिये गये वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 = 0$ है।

अतः त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{4 + 9 - 13} = 0$.

132. (a) समीकरण $x^2+2x+3=0$ के मूल x_1, x_2 हैं।

$\Rightarrow x_1+x_2=-2$

$\therefore \frac{x_1+x_2}{2}=-1$



समीकरण $y^2+4y-12=0$ के मूल y_1, y_2 हैं।

$\Rightarrow y_1+y_2=-4 \Rightarrow \frac{y_1+y_2}{2}=-2$

$\therefore$ वृत्त का केन्द्र = $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)=(-1,-2)$.

133. (d) वृत्त का व्यापक समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ है। यह बिन्दुओं (0,0), (1, 0) व (0, 1) से गुजरता है।

$\therefore c=0$

$2g+1=0 \Rightarrow g=-\frac{1}{2}$ और $2f+1=0 \Rightarrow f=\frac{-1}{2}$

अतः वृत्त का समीकरण $x^2+y^2-x-y=0$ है।

बिन्दु $(2k, 3k)$ वृत्त पर स्थित हैं।

$\therefore 4k^2+9k^2-5k=0$

$\Rightarrow 13k^2-5k=0 \Rightarrow k=0$ या $k=\frac{5}{13}$.

134. (c) दूसरा शीर्ष $(t, 3-t)$ है।

अतः वृत्त का प्राचल समीकरण

$(x-1)(x-t)+(y-1)(y-3+t)=0$

अर्थात् $x^2+y^2-(1+t)x-(4-t)y+3=0$ है।

केन्द्र (α, β) होगा

$\alpha=\frac{1+t}{2}, \beta=\frac{4-t}{2} \Rightarrow 2\alpha+2\beta=5$

$\therefore$ अभीष्ट बिन्दुपथ $2x+2y=5$ है।

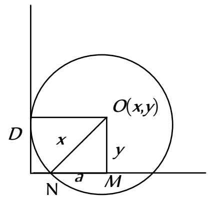
135. (b) चूँकि केन्द्र $O(x,y)$ से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।

$\therefore NM=a$, $OM=y$

$(ON)^2=(OM)^2+(MN)^2$

$x^2=y^2+a^2$

$x^2-y^2=a^2$.



वृत्त की स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब

1. (b) प्रतिबन्धानुसार, $\sqrt{(5)^2+(3)^2+2(5)+k(3)+17}=7$

$\Rightarrow 61+3k=49 \Rightarrow k=-4$.

2. (b) रेखा $y=mx+c$ स्पर्श रेखा होगी यदि $c=\pm a\sqrt{1+m^2}$ हो।

अब $lx+my+n=0$ या $y=-\frac{l}{m}x-\frac{n}{m}$ स्पर्श रेखा होगी यदि

$-\frac{n}{m}=\pm a\sqrt{1+\left(\frac{l}{m}\right)^2}$ या $n^2=a^2(m^2+l^2)$.

3. (d) (0, 0) से जाने वाली कोई रेखा $y-mx=0$ है एवं यह वृत्त $(x-7)^2+(y+1)^2=25$ पर स्पर्श रेखा होगी, यदि

$\frac{-1-7m}{\sqrt{1+m^2}}=5 \Rightarrow m=\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}$.

अतः दोनों प्रवणताओं का गुणनफल –1 है अर्थात् $\frac{3}{4}\times-\frac{4}{3}=-1$.

अतः दोनों स्पर्शियों के बीच कोण $\frac{\pi}{2}$ है।

4. (c) स्पर्शज्या युग्मों के समीकरण $SS_1=T^2$ द्वारा दिये जाते हैं।

यहाँ $S=x^2+y^2+20(x+y)+20$, $S_1=20$

$T=10(x+y)+20$

$\therefore SS_1=T^2$

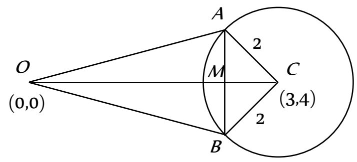
$\Rightarrow 20\{x^2+y^2+20(x+y)+20\}=10^2(x+y+2)^2$

$\Rightarrow 4x^2+4y^2+10xy=0 \Rightarrow 2x^2+2y^2+5xy=0$.

5. (b) यहाँ AB का समीकरण (स्पर्श जीवा) है

$0+0-3(x+0)-4(y+0)+21=0$

$\Rightarrow 3x+4y-21=0$ ....(i)



CM = रेखा (i) पर (3, 4) से लम्बवत् दूरी

$=\frac{3\times3+4\times4-21}{\sqrt{9+16}}=\frac{4}{5}$

$AM=\sqrt{AC^2-CM^2}=\sqrt{4-\frac{16}{25}}=\frac{2}{5}\sqrt{21}$

$\therefore AB=2AM=\frac{4}{5}\sqrt{21}$.

6. (d) स्पर्शी युग्म का समीकरण $SS_1=T^2$ है।

जहाँ $T=xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c$

$\Rightarrow c(x^2+y^2+2gx+2fy+c)=(gx+fy+c)^2$

$\Rightarrow c(x^2+y^2)=(gx+fy)^2$.

7. (c) रेखा $y=mx+c$ व वृत्त $x^2+y^2=a^2$ का प्रतिच्छेद बिन्दु $\left(-\frac{a^2m}{c}, \frac{a^2}{c}\right)$ है।

8. (c) बिन्दुपथ परवलय होगा क्योंकि केन्द्र की सरल रेखा से दूरी = बिन्दु $(a, 0)$ से दूरी (परवलय की परिभाषा से)।

9. (b) बिन्दु अन्दर, बाहर या वृत्त पर क्रमानुसार $S_1 <, >, = 0$ होता है।

बिन्दु (– 2, 1) के लिये $S_1<0$.

10. (a) चूँकि $S_1>0$ अतः बिन्दु बाहर है।

11. (a) उन बिन्दुओं के निर्देशांक जहाँ वृत्त $x^2+y^2=50$, रेखा $x+7=0$ को काटता है, $(-7,1)$ व $(-7,-1)$ हैं। अतः इन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण $-7x \pm y=50$ या $7x \pm y+50=0$ हैं।

12. (d) $k=\pm 4\sqrt{1+3}=\pm 8$.

13. (c) माना स्पर्श रेखा का समीकरण $4x+3y+k=0$ है, तब

$\sqrt{9+4+12}=\left|\frac{4(3)+3(-2)+k}{\sqrt{16+9}}\right|$

$\Rightarrow 6+k=\pm 25 \Rightarrow k=19$ व -31.

अतः स्पर्श रेखायें $4x+3y+19=0$ व $4x+3y-31=0$ हैं।

14. (c) $y=mx+c$ स्पर्शी है यदि $c=\pm a\sqrt{1+m^2}$,

जहाँ $m=\tan 45^o=1$. अतः समीकरण $y=x\pm 6\sqrt{2}$ है।

15. (b) एक बाहर एवं एक अन्दर है। (बिन्दुओं के अंदर, बाहर या वृत्त पर होने के प्रतिबंध से)

16. (c) स्पर्शी की लम्बाई $L_T=\sqrt{S_1}=\sqrt{49}=7$

17. (c) हम जानते हैं कि वृत्त $x^2+y^2=a^2$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब का समीकरण $\frac{x}{x_1}-\frac{y}{y_1}=0$ होता है।

अतः $\frac{x}{1/\sqrt{2}}-\frac{y}{1/\sqrt{2}}=0 \Rightarrow x-y=0$

18. (a) रेखा $5x+12y+8=0$ पर लम्ब रेखा का समीकरण $12x-5y+k=0$ होगा।

अब यह वृत्त को स्पर्श करेगी यदि

$\Rightarrow$ वृत्त की त्रिज्या = वृत्त के केन्द्र से रेखा की दूरी

$\sqrt{121+4-25}=\left|\frac{12(11)-5(2)+k}{\sqrt{144+25}}\right| \Rightarrow k=8$ या -252

अतः स्पर्शियों के समीकरण $12x-5y+8=0$ व $12x-5y=252$ हैं।

19. (d) $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ स्पर्शी होगी यदि केन्द्र से डाले गये लम्ब की लम्बाई त्रिज्या के बराबर हो। यहाँ केन्द्र $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ व त्रिज्या a है।

लम्ब की लम्बाई $=\left|\frac{a\cos^2\alpha+a\sin^2\alpha-p}{\sqrt{1}}\right|=a$

अर्थात् $|a-p|=a \Rightarrow p=0$ या $p=2a$.

20. (c) प्रश्नानुसार, $a=\frac{hl+mk+n}{\sqrt{l^2+m^2}}$

$\Rightarrow (hl+km+n)^2=a^2(l^2+m^2)$.

21. (c) स्पर्शी के प्रतिबन्ध के अनुसार,

$r=\frac{a\cos\alpha+b\sin\alpha-(a\cos\alpha+b\sin\alpha)-r}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}$

$\Rightarrow r=|-r| \Rightarrow r=r$.

अतः यह α के सभी मानों के लिए वृत्त की स्पर्शी है।

22. (b) स्पर्शी का समीकरण $SS_1=T^2$ है।

$\Rightarrow h^2(x^2+y^2-2rx-2hy+h^2)=(rx+hy-h^2)^2$

$\Rightarrow (h^2-r^2)x^2-2rhxy=0 \Rightarrow x\{(h^2-r^2)x-2rhy\}=0$

$\Rightarrow x=0, (h^2-r^2)x-2rhy=0$.

23. (c) बिन्दु (1, 2) दिये गए वृत्त के केन्द्र के निर्देशांक हैं और अनन्त स्पर्श रेखायें केवल बिन्दु वृत्त पर ही खींची जा सकती हैं अतः त्रिज्या शून्य होनी चाहिये।

$\therefore \sqrt{1^2+2^2-\lambda}=0 \Rightarrow \lambda=5$.

24. (b) यदि रेखा $lx+my-1=0$, वृत्त $x^2+y^2=a^2$ को स्पर्श करती है, तो स्पर्शी का प्रतिबन्ध लगाने पर, $\pm\frac{l.0+m.0-1}{\sqrt{l^2+m^2}}=a$

वर्ग करके सरल करने पर, बिन्दुपथ $x^2+y^2=\frac{1}{a^2}$ है।

अतः यह वृत्त है।

25. (a) अभीष्ट समीकरण $SS_1=T^2$ द्वारा दिये जाते हैं।

$\Rightarrow (x^2+y^2-2x+4y)(1+4)=\{y-1(x)+2(y+1)\}^2$

$\Rightarrow 2x^2-2y^2-3x+4y+3xy-2=0$

$\Rightarrow (2x-y+1)(x+2y-2)=0$.

26. (a) रेखा $\sqrt{3}x+y+3=0$ के समान्तर रेखा का समीकरण है, $\sqrt{3}x+y+k=0$ .....(i)

लेकिन यह वृत्त $x^2+y^2=a^2$ की स्पर्श रेखा है, तब

$\left|\frac{k}{\sqrt{1+3}}\right|=a \Rightarrow k=\pm 2a$

अतः अभीष्ट समीकरण $\sqrt{3}x+y\pm 2a=0$ है।

27. (d) दिये गये वृत्तों की स्पर्श रेखायें $5x+12y=169$ व $12x-5y=169$ हैं। स्पष्टतः दोनों स्पर्श रेखाओं के बीच कोण 90^o है।

28. (c) $k=3$, चूँकि केन्द्र से रेखा की लम्बवत् दूरी = त्रिज्या।

29. (b) स्पर्शी का समीकरण है, $y\cos\alpha=x\sin\alpha+a\cos\alpha$

$\Rightarrow y=x\tan\alpha+a$ है। यह वृत्त $x^2+y^2=a^2$ की स्पर्शी होगी यदि और केवल यदि $a^2=a^2(1+\tan^2\alpha)$

$\Rightarrow \sec^2\alpha=1 \Rightarrow \cos^2\alpha=1$.

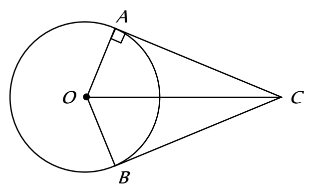
30. (c) दिये गये वृत्त की त्रिज्या > दी गयी रेखा की वृत्त के केन्द्र से लम्बवत् दूरी

$\Rightarrow \sqrt{4+16+5}>\frac{3(2)-4(4)-m}{\sqrt{9+16}}$

$\Rightarrow \pm 25>-10-m \Rightarrow m+10>\pm 25$

$\Rightarrow -35<m<15$.

31. (a)



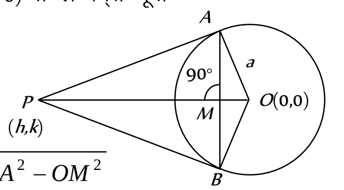
$\because \angle A=\angle B=90^o$ व OC उभयनिष्ठ है।

$\therefore AC=BC$.

32. (a) स्पर्श जीवा AB का समीकरण है, $xh+yk=a^2$ .....(i)

$OM =$ रेखा (i) पर $O(0, 0)$ से लम्बवत् दूरी

$= \frac{a^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$



$\therefore\ AB = 2AM = 2\sqrt{OA^2 - OM^2}$

$= \frac{2a\sqrt{h^2+k^2-a^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$

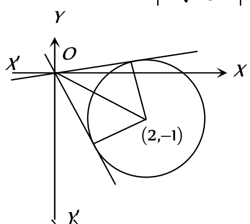
साथ ही, $PM =$ $P(h, k)$ से रेखा (i) पर लम्बवत् दूरी

$= \frac{h^2+k^2-a^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$

$\therefore$ अभीष्ट ΔPAB का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}.\ AB\ .\ PM = \frac{a(h^2+k^2-a^2)^{3/2}}{h^2+k^2}.$

33. (c) केन्द्र $(2, -1)$ है। अतः $r = \left|\frac{3(2)-1}{\sqrt{10}}\right| = \frac{5}{\sqrt{10}}$



अब केन्द्र (2, –1) से रेखा $x - 3y = 0$ पर लम्ब = त्रिज्या

$(r) = \left|\frac{2-3(-1)}{\sqrt{10}}\right| = \frac{5}{\sqrt{10}}.$

34. (a) बिन्दु का भुज, कोटि का मान रखने पर प्राप्त किया जा सकता है।

$\Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = 5$ या 3

अर्थात् बिन्दु $(5, -1)$ व (3, –1) हैं।

अभिलम्ब $\frac{x-5}{5-4} = \frac{y+1}{-1-1} \Rightarrow 2x + y - 9 = 0$

व $\frac{x-3}{3-4} = \frac{y+1}{-1-1} \Rightarrow 2x - y - 7 = 0$ है।

35. (c) प्रतिबन्ध के अनुसार $\frac{f^2+g^2-6}{f^2+g^2+3f+3g} = \frac{4}{1}$

$\Rightarrow f^2 + g^2 + 4f + 4g + 2 = 0.$

36. (c) यदि $c^2 \le$ या $> a^2(1+m^2)$, तो रेखा $y = mx + c$ वृत्त $(x^2+y^2=a^2)$ को दो, एक बिन्दुओं पर या एक भी बिन्दु पर नहीं काटेगी। अतः यहाँ $c^2 > a^2(1+m^2)$ यह एक भी बिन्दु पर नहीं काटेगी।

37. (a) **ट्रिक :** अभीष्ट बिन्दु को रेखा व वृत्त को सन्तुष्ट करना चाहिये। अतः स्पर्श बिन्दु $(1, -2)$ है।

38. (b) अभिलम्ब केन्द्र से जाता है अतः $b = ma + c$

39. (c) अभिलम्ब का समीकरण होगा, $\frac{x-2}{2+2} = \frac{y-3}{3+3}$

$\Rightarrow 3x - 2y = 0 \Rightarrow x = \frac{2y}{3}$

इस प्रकार $\left(\frac{2y}{3}\right)^2 + y^2 + 4\left(\frac{2y}{3}\right) + 6y - 39 = 0$

$\Rightarrow y = 3, -9 \Rightarrow x = 2, -6$

अतः दूसरा बिन्दु $(-6, -9)$ होगा।

40. (c) रेखा $x + 2y = 3$ के समान्तर रेखा $x + 2y + \lambda = 0$ होगी एवं इसके वृत्त पर अभिलम्ब होने के लिए यह वृत्त के केन्द्र (1, 0) से गुजरेगी अर्थात् $\lambda = -1$ अतः अभिलम्ब $x + 2y - 1 = 0$ है।

41. (a) किसी बिन्दु पर स्पर्शी के सूत्र से,

$x\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right) + y\left(\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right) = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$

42. (b) माना रेखा का समीकरण $y = mx$ या $y - mx = 0$ है।

अतः स्पर्शी के प्रतिबन्ध से, $\left|\frac{-5-4m}{\sqrt{1+m^2}}\right| = 5$

$\Rightarrow 25 + 16m^2 + 40m = 25 + 25m^2$

$\Rightarrow 9m^2 - 40m = 0 \Rightarrow m = 0$ या $m = \frac{40}{9}.$

43. (a) स्पर्शी का समीकरण

$c(x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c) = (gx + fy + c)^2$ है।

यह स्पर्शियाँ परस्पर लम्बवत् होंगी, यदि

x^2 का गुणांक + y^2 का गुणांक $= 0$

$\Rightarrow c - g^2 + c - f^2 = 0 \Rightarrow f^2 + g^2 = 2c.$

44. (b) माना (x_1, y_1) प्रथम वृत्त पर कोई बिन्दु है जिससे स्पर्शी खींची जाती हैं, तो $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c_1 = 0$ ....(i)

एवं स्पर्शी की लम्बाई

$= \sqrt{S_2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$ ....(ii)

(i) से, अभीष्ट लम्बाई $\sqrt{c - c_1}$ होगी।

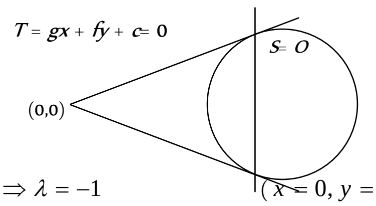
45. (a) माना बिन्दु $(2, y')$ है तो $2^2 + y'^2 = 13 \Rightarrow y' = \pm 3$

अतः अभीष्ट स्पर्शियाँ $2x \pm 3y = 13$ हैं।

46. (c) नियामक वृत्त की त्रिज्या वृत्त की त्रिज्या से $\sqrt{2}$ गुनी होती है। अतः समीकरण $x^2 + y^2 = 2a^2$ होगा।

47. (d) (0, 0) से स्पर्शी युग्म $SS_1 = T^2$ है।

मूल बिन्दु व स्पर्श जीवा से जाने वाला वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c + \lambda(gx + fy + c) = 0$ है



$\Rightarrow \lambda = -1$ ($x = 0, y = 0$ से)

इसलिए समीकरण $x^2 + y^2 + gx + fy = 0$ है।

अतः परिकेन्द्र $\left(-\frac{g}{2}, -\frac{f}{2}\right).$

वैकल्पिक : अभीष्ट परिकेन्द्र (0, 0) तथा $(-g, -f)$ का मध्य बिन्दु अर्थात् $\left(-\frac{g}{2}, -\frac{f}{2}\right)$ होगा।

48. (d) इसका केन्द्र (c, c) एवं त्रिज्या $\left|\frac{4c+3c-12}{5}\right| = \sqrt{c^2}$

$\Rightarrow c = 6$.

49. (d) चूँकि बिन्दु वृत्त के अन्दर है। अतः कोई स्पर्श रेखा नहीं खींची जा सकती है।

50. (a) चूँकि $S_1 < 0$, अतः बिन्दु वृत्त के अन्दर है। अतः कोई स्पर्श रेखा नहीं खींची जा सकती है।

51. (c) $x = 0$ के लिए $y^2 - 6y + 9 = 0$ या $(y-3)^2 = 0$ अर्थात् स्पर्श बिन्दु $(0, 3)$ है।

52. (c) वृत्तों के केन्द्र $C_1(2, 3)$ व $C_2(-3, -9)$ हैं तथा उनकी त्रिज्यायें $r_1 = 5$ व $r_2 = 8$ हैं।

स्पष्टतः $r_1 + r_2 = C_1C_2$ अर्थात् वृत्त एक–दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करते हैं, अतः तीन उभयनिष्ठ स्पर्शियाँ होंगी।

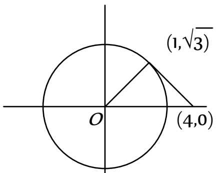
53. (c) स्पर्शी के प्रतिबन्ध से, केन्द्र $(0, 2)$ व त्रिज्या $= 2$ होने पर,

$$\left|\frac{-2+c}{\sqrt{1+m^2}}\right| = 2 \Rightarrow c^2 - 4c + 4 = 4 + 4m^2$$

$$\Rightarrow c = \frac{4 \pm \sqrt{16+16m^2}}{2} \text{ या } c = 2 \pm 2\sqrt{1+m^2}$$

अतः उपयुक्त सही उत्तर $c = 2(1 + \sqrt{1+m^2})$ है।

54. (a) $T \equiv x + \sqrt{3}y - 4 = 0$



अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

55. (d) माना कि बिन्दु (h,k) है। (h,k) पर स्पर्श रेखा का समीकरण है, $hx + ky = a^2 \equiv x - y = -\sqrt{2}a$

या $\frac{h}{1} = \frac{k}{-1} = \frac{a^2}{-\sqrt{2}a}$ या $h = -\frac{a}{\sqrt{2}}, k = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ स्पर्श बिन्दु $= \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$.

56. (b) बिन्दु $(1, -2)$ पर $x^2 + y^2 = 1$ की स्पर्शी $x - 2y = 5$ है। यहाँ केवल $(3, -1)$ स्पर्शी पर स्थित है।

57. (a) सूत्र से, $\frac{x - x_1}{x_1 + g} = \frac{y - y_1}{y_1 + f}$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{-3-\frac{3}{2}} = \frac{y-4}{4-3} \Rightarrow 2x + 9y - 30 = 0.$$

58. (a) स्पर्शी $x - 2y - 5 = 0$ है एवं वृत्त $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 20 = 0$ के साथ प्रतिच्छेद बिन्दु निम्न प्रकार दिये जा सकते हैं,

$4y^2 + 25 + 20y + y^2 - 16y - 40 + 6y - 20 = 0$

$\Rightarrow 5y^2 + 10y + 5 = 0 \Rightarrow y = -1$ व $x = -3$

59. (c) $y = x + c$ दो सम्पाती बिन्दुओं पर काटेगी अर्थात् यह एक स्पर्शी है। अतः $c^2 = 1(1+1) \Rightarrow c = \pm\sqrt{2}$.

60. (b) रेखा $y = mx + c$ वृत्त की स्पर्शी होगी यदि,

$c = \pm a\sqrt{1+m^2}$

$\therefore y = mx + 5\sqrt{1+m^2}$

61. (b) स्पर्शी की लम्बाई $\sqrt{S_1}$ है।

वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 - \frac{r^2}{a} = 0$ है।

अतः $S_1 = \alpha^2 + \beta^2 - \frac{r^2}{a}$.

62. (c) निर्देशाक्षों पर स्पर्श बिन्दु $(-g, 0)$ व $(0, -f)$ होंगे।

अतः अभीष्ट बिन्दु $(-1, 0), (0, -1)$ होंगे।

63. (c) **ट्रिक** : प्रत्येक वृत्त के लिए अभिलम्ब ज्ञात करें।

64. (c) $y = mx + c$, $(2, 3)$ पर स्पर्शी है। $(2, 3)$ पर स्पर्शी का समीकरण $2x + 3y - (x+2) - 2(y+3) + 3 = 0$ है।

$\Rightarrow 2x + 3y - x - 2y - 2 - 6 + 3 = 0$

$\Rightarrow x + y - 5 = 0 \Rightarrow c = 5$.

65. (a) यह स्पष्ट है

66. (d) यह स्पष्ट है।

67. (a) वृत्त के समीकरण में $x = \frac{3y+10}{4}$ रखने पर y के दो मान $2, -6$ एवं x के दो मान क्रमशः $4, -2$ प्राप्त होते हैं।

68. (c) स्पर्शी $ax + by - r^2 = 0$ होगी।

69. (b) केन्द्र $(-6, 8)$, त्रिज्या $= \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 12x - 16y = 0$ है।

बिन्दु $(0, 0)$ पर स्पर्शी $3x - 4y = 0$ है।

70. (c) रेखा $y = mx + c$ को वृत्त के समीकरण $x^2 + y^2 = r^2$ में प्रतिस्थापित करने पर,

$x^2 + (mx + c)^2 = r^2 \Rightarrow (1+m)^2 x^2 + 2mxc + c^2 - r^2 = 0$

यदि विविक्तकर, शून्य से अधिक है, तो x के दो वास्तविक मान प्राप्त होंगे, $B^2 > 4AC$

$4m^2c^2 - 4(c^2 - r^2)(1 + m^2) > 0$

$r^2(1 + m^2) > c^2$

$0 \le c < r\sqrt{1+m^2}$ तथा $-r\sqrt{(1+m^2)} < c \le 0$.

71. (a) $T \equiv hx + ky - a^2 = 0$

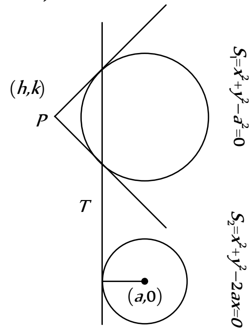
$\Rightarrow a = \frac{ah + 0 - a^2}{\sqrt{h^2 + k^2}}$

$\Rightarrow h^2 + k^2 = (h - a)^2$

$\Rightarrow k^2 = a(a - 2h)$

$\Rightarrow y^2 = a(a - 2x)$,

जो कि अभीष्ट बिन्दुपथ है।



72. (a) $SS_1 = T^2$

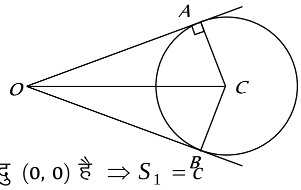
$\Rightarrow (x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3)(36 + 25 - 12x - 20y + 3)$

$= (6x - 5y - x - 6 + 2(y - 5) + 3)^2$

$\Rightarrow 7x^2 + 23y^2 + 30xy + 66x + 50y - 73 = 0$.

73. (b) चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= 2$ (ΔOAC का क्षेत्रफल)

$= 2.\frac{1}{2}OA \,.\, AC = \sqrt{S_1}.\sqrt{g^2+f^2-c}$



बिन्दु (0, 0) है $\Rightarrow S_1 = c$

$\therefore$ क्षेत्रफल $= \sqrt{c}.\sqrt{g^2+f^2-c}$.

74. (a) व्यास के सिरे (1, 2) व (3, 4) वाले वृत्त का समीकरण $(x-1)(x-3)+(y-2)(y-4)=0$ है

एवं इससे जाने वाली रेखा $(y-2)=\left(\frac{4-2}{3-1}\right)(x-1)$ है।

अतः इन बिन्दुओं एवं रेखा से जाने वाले वृत्त का निकाय है,

$(x-1)(x-3)+(y-2)(y-4)+\lambda(y-x-1)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+x(-4-\lambda)+y(-6+\lambda)+(3+8-\lambda)=0$

यह वृत्त रेखा $3x+y-3=0$ को स्पर्श करता है,

$\therefore$ त्रिज्या = केन्द्र से रेखा पर लम्ब की लम्बाई

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{4+\lambda}{2}\right)^2+\left(\frac{6-\lambda}{2}\right)^2-(3+8-\lambda)}$$

$$=\left|\frac{3\left(\frac{4+\lambda}{2}\right)+\left(\frac{6-\lambda}{2}\right)-3}{\sqrt{5}}\right|$$

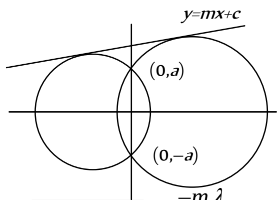
$\Rightarrow \lambda = 1, -4 \Rightarrow c = 7$ व 12.

75. (d) बिन्दु $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ पर वृत्त $x^2+y^2=a^2$ की स्पर्शी $ax\cos\alpha+ay\sin\alpha=a^2$ है।

अतः प्रवणता $= -\frac{a\cos\alpha}{a\sin\alpha} = -\cot\alpha$.

76. (c) वृत्तों का समीकरण है, $(x^2+(y-a)(y+a))+\lambda x=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+\lambda x-a^2=0$



और $\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2+a^2} = \frac{\frac{-m\lambda}{2}+c}{\sqrt{1+m^2}}$

$\Rightarrow (1+m^2)\left[\frac{\lambda^2}{4}+a^2\right]=\left(\frac{m\lambda}{2}-c\right)^2$

$\Rightarrow (1+m^2)\left[\frac{\lambda^2}{4}+a^2\right]=\frac{m^2\lambda^2}{4}-mc\lambda+c^2$

$\Rightarrow \lambda^2+4mc\lambda+4a^2(1+m^2)-4c^2=0$

$\therefore \lambda_1\lambda_2 = 4[a^2(1+m^2)-c^2] \Rightarrow g_1g_2=[a^2(1+m^2)-c^2]$

और $g_1g_2+f_1f_2=\frac{c_1+c_2}{2} \Rightarrow a^2(1+m^2)-c^2=-a^2$

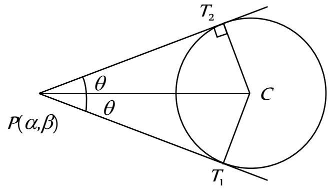
$\therefore c^2=a^2(2+m^2)$.

77. (b) स्पर्शी $x+y+c=0$ रूप की होगी। अतः स्पर्शता के प्रतिबन्ध के अनुसार, $\left|\frac{-2+2+c}{\sqrt{2}}\right|=\sqrt{4+4-4} \Rightarrow c=\pm 2\sqrt{2}$

किन्तु धनात्मक अंतःखण्ड के लिये, $c=-2\sqrt{2}$

$\therefore$ स्पर्शज्या $x+y=2\sqrt{2}$ है।

78. (c) $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{CT_1}{PT_1}=\frac{a}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2-a^2}}$



$\frac{\theta}{2}=\tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2-a^2}} \Rightarrow \theta = 2\tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2-a^2}}$.

79. (d) स्पर्शी $4x+3y+c=0$ होगी।

स्पर्शी प्रतिबन्ध से, $c=-25$.

अतः स्पर्श रेखा का समीकरण $4x+3y-25=0$ होगा।

80. (b) माना स्पर्शी $\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}=1$ है एवं अक्षों के साथ बने त्रिभुज का

क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}x_1y_1=a^2$ ....(i)

पुनः $y_1x+x_1y-x_1y_1=0$

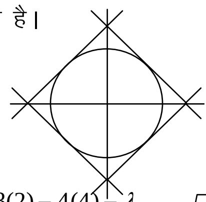
स्पर्शी के प्रतिबन्ध से,

$\left|\frac{-x_1y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\right|=a$ या $(x_1^2+y_1^2)=\frac{x_1^2y_1^2}{a^2}$ ....(ii)

(i) व (ii) से, x_1, y_1 प्राप्त होते हैं।

अतः स्पर्शी $x\pm y=\pm\, a\sqrt{2}$ है।

ट्रिक : स्पष्टतः 4 स्पर्शियाँ हो सकती है (चित्रानुसार)। चूँकि रेखायें $x\pm y=\pm\, a\sqrt{2}$ सभी चतुर्थांशों में a क्षेत्रफल का त्रिभुज बनाती है।



81. (b) प्रश्नानुसार, $\frac{3(2)-4(4)-\lambda}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\sqrt{2^2+4^2+5}$

$\Rightarrow -10-\lambda=\pm 25 \Rightarrow \lambda=-35, 15$.

82. (b) निर्देशाक्षों से प्रतिच्छेद बिन्दु $\left(-\frac{1}{\lambda}, 0\right)$, $(0, 1)$ व $(-3, 0)$, $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ हैं।

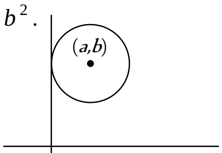
बिन्दुओं (0, 1), (–3, 0) व $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ से जाने वाले वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + \frac{7x}{2} - \frac{5y}{2} + \frac{3}{2} = 0$ है।

यह $\left(\frac{-1}{\lambda}, 0\right)$ से गुजरता है।

अतः $\frac{1}{\lambda^2} - \frac{7}{2\lambda} + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 3\lambda^2 - 7\lambda + 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6} = 2, \frac{1}{3}$.

83. (c) स्पष्टतः मूल बिन्दु से खींची गयी स्पर्शियाँ परस्पर लम्बवत् होंगी यदि यह वृत्त दोनों अक्षों को स्पर्श करता है अर्थात् $a = b$ या $a^2 = b^2$.



84. (a) चूँकि अभिलम्ब हमेशा वृत्त के केन्द्र से गुजरता है, अतः $(-g, -f)$ रेखा $lx + my + n = 0$ पर स्थित होगा, अतः $lg + mf - n = 0$.

85. (c) प्रश्नानुसार, $\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha - 5 = \alpha^2 + \beta^2 + 6\alpha - 2\beta + 6$
$\Rightarrow 10\alpha - 2\beta + 11 = 0$.

86. (c) यहाँ $C_1 = (0, 0), r_1 = 2, C_2 = (4, 0), r_2 = 2$
यहाँ $C_1C_2 = 4 = r_1 + r_2$
अतः वृत्त एक–दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करते हैं। इसलिये तीन उभयनिष्ठ स्पर्श रेखायें होंगी।

87. (b) चूँकि स्पर्शियाँ समान्तर हैं। अतः इन दोनों स्पर्शियाँ के बीच की दूरी व्यास के बराबर होनी चाहिये अर्थात् व्यास $= \frac{34}{\sqrt{180}} = \frac{17}{3\sqrt{5}}$

अतः त्रिज्या $= \frac{17}{6\sqrt{5}}$.

88. (c) माना बिन्दु $P(x_1, y_1)$, वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ पर स्थित है तो P पर स्पर्शी का समीकरण $xx_1 + yy_1 = 4$ है जो अक्षों को $A\left(\frac{4}{x_1}, 0\right)$ व $B\left(0, \frac{4}{y_1}\right)$ पर मिलती है, अतः (a), (b) सत्य नहीं हैं।
माना (h, k) AB का मध्य बिन्दु है।

अतः $h = \frac{2}{x_1}, k = \frac{2}{y_1}$ अर्थात् $x_1 = \frac{2}{h}, y_1 = \frac{2}{k}$

परन्तु (x_1, y_1) वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ पर स्थित है।

89. (d) दिये गये वृत्तों के केन्द्र व त्रिज्यायें क्रमशः $C_1\left(\frac{1}{2}, 0\right), C_2\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{2}$ हैं।

स्पष्टतः $C_1C_2 = r_1 + r_2$, अतः वृत्त एक–दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करेंगे। अतः तीन उभयनिष्ठ स्पर्शियाँ होंगी।

90. (b) यह स्पष्ट है।

91. (b) **ट्रिक :** बिन्दु $(1, 2)$ प्रत्येक विकल्प में रखने पर समीकरण $h + 2k = 5$ संतुष्ट होता है। अतः विकल्प (b) सही है।

92. (c) अन्तःखण्डित भाग व्यास होगा अर्थात् $2r$.

93. (a) $x = 7$ रखने पर $y^2 - 6y + 9 = 0 \Rightarrow y = 3, 3$
अतः स्पर्श बिन्दु (7, 3) है।

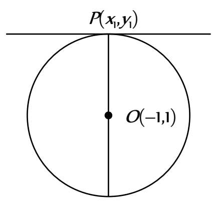
94. (a) $x^2 + y^2 = b^2$ की स्पर्शी $y = mx - b\sqrt{1 + m^2}$ है।
यह $(x - a)^2 + y^2 = b^2$ को स्पर्श करती है यदि

$\frac{ma - b\sqrt{1 + m^2}}{\sqrt{m^2 + 1}} = b \Rightarrow ma = 2b\sqrt{1 + m^2}$

$\Rightarrow m^2a^2 = 4b^2 + 4b^2m^2$, $\therefore m = \pm\frac{2b}{\sqrt{a^2 - 4b^2}}$.

95. (b) $S_1 = x^2 + y^2 - 12y + 27 = 0$
$S_2 = x^2 + y^2 - 9 = 0$
उभयनिष्ठ स्पर्शी का समीकरण है,
$S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow -12y + 36 = 0 \Rightarrow y = 3$.

96. (b) माना स्पर्श बिन्दु $P(x_1, y_1)$ है तथा यह बिन्दु निम्न रेखा पर स्थित है।



$x_1 + 2y_1 = -12$ ....(i)

OP की प्रवणता $= m_1 = \frac{y_1 - 1}{x_1 + 1}$

$x + 2y + 12 = 0$ की प्रवणता है, $m_2 = -\frac{1}{2}$

दोनों लम्बवत् हैं, $\therefore m_1m_2 = -1$

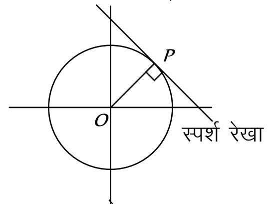
$\Rightarrow \left(\frac{y_1 - 1}{x_1 + 1}\right)\left(\frac{-1}{2}\right) = -1 \Rightarrow y_1 - 1 = 2x_1 + 2$

$\Rightarrow 2x_1 - y_1 = -3$ ....(ii)

समीकरण (i) व (ii) को हल करने पर,

स्पर्श बिन्दु $\equiv (x_1, y_1) = \left(\frac{-18}{5}, \frac{-21}{5}\right)$

97. (a) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ में किसी बिन्दु $P(x, y)$ पर खींची गई स्पर्श रेखा $xx_1 + yy_1 = a^2$ है, जो वृत्त के केन्द्र को P से मिलाने वाला रेखा पर लम्बवत् होती है।



अतः अभीष्ट वक्र वृत्त होगा।

98. (c) $hx + hy - a^2 = 0$ की प्रवणता -1 है।

99. (d) प्रश्नानुसार, $\frac{4(0)+3(0)+\lambda}{\sqrt{4^2+3^2}}=\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow \lambda=\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{10}}{2}$.

100. (a) दिए गए वृत्त $x^2+y^2+2x+4y+3=0$ के बिन्दु $(-2,-3)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण है,

$-2x-3y+1(x-2)+2(y-3)+3=0$

$\Rightarrow -2x-3y+x-2+2y-6+3=0$

$\Rightarrow -x-y-5=0 \Rightarrow x+y+5=0$

या $y=-x-5$ अतः $m=-1$

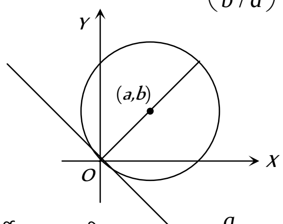
इसलिए अभिलम्ब की प्रवणता $=\frac{-1}{-1}=1$.

101. (b) $y=mx+c$ पर लम्ब रेखा $y=-\frac{1}{m}x+\lambda$ होगी,

तथा $m\lambda=\pm a\sqrt{1+m^2}$

अतः अभीष्ट स्पर्शी $my+x=\pm a\sqrt{1+m^2}$ है।

102. (b) स्पष्टतः स्पर्शी की प्रवणता $-\left(\frac{1}{b/a}\right)$ अर्थात $-\frac{a}{b}$ है।



अतः स्पर्शी का समीकरण $y=-\frac{a}{b}x$ अर्थात् $by+ax=0$ है।

103. (a) माना $S_1 \equiv x+y-2x+6y+6=0$

तथा $S_2 \equiv x+y-5x+6y+15=0$,

तब उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण है, $S_1-S_2=0$

$\Rightarrow 3x=9 \Rightarrow x=3$.

104. (a) स्पर्श रेखा की लम्बाई

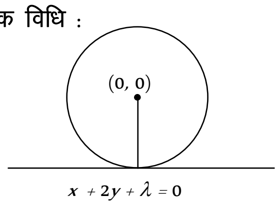
$=\sqrt{4^2+5^2+2\cdot1\cdot4+2(-3)\cdot5-6}=\sqrt{13}$

105. (c) **ट्रिक :** केवल विकल्प (b) तथा (c) की रेखायें $x+2y+3=0$ के समान्तर हैं।

अभीष्ट रेखा वृत्त $x^2+y^2=4$ की स्पर्शी भी है।

इसकी दूरी (0, 0) से 2 है। अतः विकल्प (c) सही है।

वैकल्पिक विधि :



$x^2+y^2=4$ का केन्द्र (0, 0) है।

$x+2y+3=0$ के समान्तर स्पर्शी का समीकरण है

$x+2y+\lambda=0$ .....(i)

(0,0) से $x+2y+\lambda=0$ की लाम्बिक दूरी वृत्त की त्रिज्या के बराबर होगी। (दिया है, त्रिज्या = 2)

$\therefore \frac{0+2\times0+\lambda}{\sqrt{1^2+2^2}}=\pm2$

$\Rightarrow \lambda=\pm2\sqrt{5}$

λ का मान समीकरण (i) में रखने पर,

वृत्त की स्पर्शियों के समीकरण $x+2y=\pm2\sqrt{5}$ हैं,

अतः विकल्प (c) सही है।

106. (c) वृत्त के बिन्दु $(1,1)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण है,

$2x+2y-(x+1)-\frac{5}{2}(y+1)+3=0$

$\Rightarrow x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow 2x-y-1=0$

स्पर्श रेखा की प्रवणता = 2, $\therefore$ अभिलम्ब की प्रवणता $=-\frac{1}{2}$

अतः बिन्दु (1, 1) पर अभिलम्ब का समीकरण है,

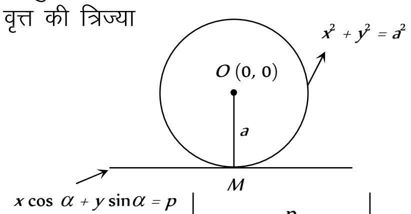
$y-1=-\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow x+2y=3$.

107. (c) स्पर्श रेखा की लम्बाई

$=\sqrt{3^2+(-4)^2-4(3)-6(-4)+3}=\sqrt{40}$

अतः स्पर्श रेखा की लम्बाई का वर्ग $=40$.

108. (c) प्रश्नानुसार, केन्द्र से सरल रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई = वृत्त की त्रिज्या



$OM=$ वृत्त की त्रिज्या $\left|\frac{-p}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}\right|=a$

$\Rightarrow |-p|=a \Rightarrow p^2=a^2$.

109. (b) रेखा है, $3x-2y=k$ ......(i)

व वृत्त है, $x^2+y^2=4r^2$ .....(ii)

रेखा के समीकरण से, $y=\frac{3}{2}x-\frac{k}{2}$

यहाँ, $c=-\frac{k}{2}, m=\frac{3}{2}$

रेखा, वृत्त के एक बिन्दु पर मिलेगी, अतः

$c=\pm a\sqrt{1+m^2}$ $\frac{-k}{2}=\pm(2r)\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2}$ {(ii) से, $a=2r$}

$=\frac{k^2}{4}=4r^2\times\frac{13}{4}$; $\therefore k^2=52r^2$.

110. (a) दिये गये स्पर्शी हैं, $5x-12y+10=0$, $5x-12y-16=0$

त्रिज्या $=\frac{c_1-c_2}{2\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{26}{2.13}=1$.

111. (c) वृत्त $x^2+y^2=25$ पर स्थित बिन्दु $(3,4)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $3x+4y=25$ है, जो कि निर्देशांको को बिन्दु $A\left(\frac{25}{3},0\right)$ व $B\left(0,\frac{25}{4}\right)$ पर प्रतिच्छेद करता है। यदि O मूलबिन्दु है तब ΔOAB समकोण त्रिभुज होगा जिसमें $OA=\frac{25}{3}$ व $OB=\frac{25}{4}$ है।

ΔOAB का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}\times OA\times OB=\frac{1}{2}\times\frac{25}{3}\times\frac{25}{4}=\frac{625}{24}$.

112. (c) $c=\pm a\sqrt{1+m^2}$ से,

यहाँ, $a=4, m=2$

$\therefore c = \pm\ 4\sqrt{1+4} = \pm\ 4\sqrt{5}$.

113. (c) स्पर्श रेखा का समीकरण है, $y = \frac{-3}{4}x \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{1+\left(\frac{-3}{4}\right)^2}$

$\Rightarrow y = \frac{-3}{4}x \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{16+9}{16}}$

$\Rightarrow 4y = -3x \pm \sqrt{5} \Rightarrow 3x + 4y = \pm\sqrt{5}$.

114. (a) दोनों कथन सत्य हैं और *R, A* का सही व्याख्यान है क्योंकि *x*-अक्ष के समान्तर स्पर्श रेखाओं के लिये, $\frac{dy}{dx} = 0$.

115. (b) रेखा $y = -\frac{\beta}{\alpha}x + \beta$, वृत्त को स्पर्श करती है।

$\therefore\ \beta^2 = a^2\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{a^2}$

$\therefore\ \left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}\right)$ का बिन्दुपथ $x^2+y^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2$ है।

116. (c) $x^2+y^2+2x+8y-23=0$

$\therefore C_1(-1,-4), r_1 = 2\sqrt{10}$

तथा $x^2+y^2-4x-10y+9=0$

$\therefore\ C_2(2,5), r_2 = 2\sqrt{5}$

$C_1C_2 =$ केन्द्रों के बीच की दूरी $= \sqrt{9+81} = 3\sqrt{10} = 9.486$

और $r_1 + r_2 = 2(\sqrt{10}+\sqrt{5}) = 10.6$

$r_1 - r_2 = 2\sqrt{5}(\sqrt{2}-1) = 2\times 2.2\times 0.4 = 4.4\times 0.4 = 1.76$

$C_1C_2 = 2\sqrt{10} > r_1 - r_2$

$r_1 - r_2 < C_1C_2 < r_1 + r_2$

$\Rightarrow$ दो स्पर्श रेखायें खींची जा सकती हैं।

117. (c) यहाँ $C_1 = (0,0), r_1 = 1$ इकाई

$C_2 = (2,0),\ r_2 = 1$ इकाई

स्पष्टतः , $C_1C_2 = r_1 + r_2 = 1+1 = 2$

इस प्रकार दो वृत्त बाह्यतः स्पर्श करते हैं। अतः उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या 3 है।

118. (c) चूँकि रेखा $ax+by=0$, वृत्त $x^2+y^2+2x+4y=0$ को स्पर्श करती है।

अतः केन्द्र (–1, –2) से रेखा की लम्बवत् दूरी = त्रिज्या

$\Rightarrow \left|\frac{-a-2b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} \Rightarrow (a+2b)^2 = 5(a^2+b^2)$

$\Rightarrow 4a^2-4ab+b^2=0 \Rightarrow (2a-b)^2=0$

$\therefore\ b = 2a$.

अब, $ax+by=0$, वृत्त $x^2+y^2-4x+2y-3=0$ का अभिलम्ब है अतः केन्द्र (2, –1) रेखा $ax+by=0$ पर होना चाहिये।

$\therefore\ 2a-b=0 \Rightarrow b=2a$. $\therefore a=1$, $b=2$.

119. (a) वृत्त का समीकरण है, $x^2+y^2-2x+6y-6=0$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y+3)^2 = (4)^2$

वृत्त की त्रिज्या = 4

और वृत्त का केन्द्र $= (1,-3)$

स्पर्श रेखा का समीकरण $3x-4y+k=0$ है,

$\therefore \frac{3\times 1 - 4\times(-3)+k}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}} = \pm 4$

$\therefore k = 5, -35$.

120. (d) माना बिन्दु (x_1, y_1) है।

प्रश्नानुसार, $\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2+4x_1+3}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2-6x_1+5}} = \frac{2}{3}$

दोनों तरफ वर्ग करने पर , $\frac{x_1^2+y_1^2+4x_1+3}{x_1^2+y_1^2-6x_1+5} = \frac{4}{9}$

$\Rightarrow 9x_1 + 9y_1^2 + 36x_1 + 27 = 4x_1^2 + 4y_1^2 - 24x_1 + 20$

$\Rightarrow 5x_1^2 + 5y_1^2 + 60x_1 + 7 = 0$

अतः बिन्दुपथ $5x^2+5y^2+60x+7=0$ है।

स्पर्श जीवा, ध्रुव व ध्रुवी

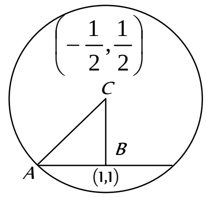
1. (a) $S_1 = x^2+y^2+4x+1=0$

$S_2 = x^2+y^2+6x+2y+3=0$

उभयनिष्ठ जीवा $\equiv S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow 2x+2y+2=0$

$\Rightarrow x+y+1=0$.

2. (d)



यहाँ वृत्त की त्रिज्या है, $AC = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

एवं $CB = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

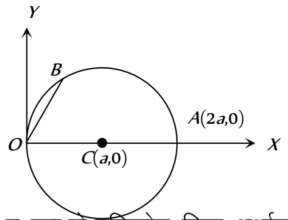
अब $AB^2 = AC^2 - BC^2 = \frac{3}{2}-\frac{5}{2} = -1$

$\Rightarrow$ अतः *AB* का कोई सम्भव मान नहीं है।

वैकल्पिक: चूँकि बिन्दु (1, 1) वृत्त के बाहर है अतः इस प्रकार की किसी भी जीवा का अस्तित्व नहीं होगा।

3. (b) यहाँ वृत्त का समीकरण $(x-a)^2+(y-0)^2=a^2$

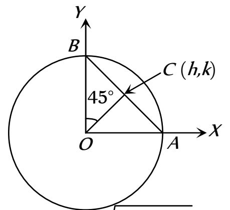
$\Rightarrow x^2+y^2-2ax=0$ है।



अब जीवा व वृत्त के प्रतिच्छेद बिन्दु अर्थात् O व B क्रमशः $O(0, 0)$ व $B\left(\frac{2a}{1+m^2}, \frac{2am}{1+m^2}\right)$ हैं।

अतः जीवा OB को व्यास मानकर खींचे गये वृत्त का समीकरण $(x^2+y^2)(1+m^2)-2a(x+my)=0$ होगा।

4. (c) माना जीवा का मध्य बिन्दु (h, k) है एवं वृत्त की त्रिज्या 2 है।



$\therefore \frac{OC}{OB}=\cos 45^o \Rightarrow \frac{\sqrt{h^2+k^2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow h^2+k^2=2$

अतः बिन्दुपथ $x^2+y^2=2$ होगा।

5. (c) अभीष्ट जीवा का समीकरण $T=S_1$ है

अतः $xx_1+yy_1-a^2=x_1^2+y_1^2-a^2$

$\Rightarrow xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$.

6. (b) $y=2x$ के समान्तर रेखा हैं, $2x-y+k=0$ ..... (i)
अतः केन्द्र तथा जीवा के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा (i) पर लम्ब होगी। अतः बिन्दुपथ एक सरल रेखा होगी, जिसकी प्रवणता $\frac{-1}{2}$ है।

7. (b) जीवा की लम्बाई

$=2\{(\text{त्रिज्या})^2-(\text{केन्द्र से जीवा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई})^2\}^{1/2}$

$$=2\left\{r^2-\left(\frac{-1}{\sqrt{(1/a^2)+(1/b^2)}}\right)^2\right\}^{1/2}$$

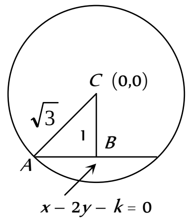
$$=2\sqrt{\frac{r^2(a^2+b^2)-a^2b^2}{a^2+b^2}}.$$

8. (c) यहाँ, वृत्त व जीवा के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को, वृत्त व दी गई रेखा के समीकरणों को हल करके ज्ञात किया जा सकता है।

अतः प्रतिच्छेद बिन्दु $(-4,-3)$ व $\left(\frac{24}{5}, \frac{7}{5}\right)$ हैं।

अतः मध्य बिन्दु $\left(\frac{-4+\frac{24}{5}}{2}, \frac{-3+\frac{7}{5}}{2}\right)=\left(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ है ।

9. (c) स्पष्टतः $BC=\sqrt{2}$



अतः $\pm\frac{0-2.0-k}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{2} \Rightarrow k=\pm\sqrt{10}$.

10. (c) दिया गया वृत्त $x^2+y^2-2x=0$ है। माना इस वृत्त की किसी भी जीवा का मध्यबिन्दु (x_1, y_1) है तो इसका समीकरण $S_1=T$ है।

या $x_1^2+y_1^2-2x_1=xx_1+yy_1-(x+x_1)$
यदि यह (0, 0) से गुजरता है, तो
$x_1^2+y_1^2-2x_1=-x_1 \Rightarrow x_1^2+y_1^2-x_1=0$
अतः दिये गये बिन्दु (x_1, y_1) का अभीष्ट बिन्दुपथ $x^2+y^2-x=0$ है।

11. (d) वृत्त (i) की ध्रुवी का समीकरण $x-5y+13=0$ है तथा वृत्त (ii) का ध्रुवी का समीकरण $x+y-1=0$ है।
स्पष्टतः ध्रुवी एक बिन्दु पर प्रतिच्छेदित होते हैं।

12. (c) हम जानते हैं कि जीवा पर व्यास लम्ब होगा क्योंकि यह जीवा को समद्विभाजित करता है, अतः व्यास का समीकरण है,
$x+2y+k=0$ ....(i)
परन्तु (i), वृत्त के केन्द्र $(-1, 2)$ से भी गुजरती है, अतः
$-1+4+k=0 \Rightarrow k=-3$
अतः अभीष्ट समीकरण $x+2y-3=0$ है।

13. (d) दिया गया है, $2\sqrt{g^2}=10$

$\Rightarrow |g|=5$ व $2\sqrt{f^2}=24 \Rightarrow |f|=12$

अतः त्रिज्या $\sqrt{5^2+12^2}=13$ है।

14. (a) हम जानते हैं कि उभयनिष्ठ जीवा का समीकरण $S_1-S_2=0$ है जहाँ S_1 व S_2 दो दिये गये वृत्तों के समीकरण हैं, अतः
$(x-a)^2+(y-b)^2+c^2-(x-b)^2-(y-a)^2-c^2=0$
$\Rightarrow 2bx-2ax+2ay-2by=0$
$\Rightarrow 2(b-a)x-2(b-a)y=0$
$\Rightarrow x-y=0$

15. (c) उभयनिष्ठ जीवा का समीकरण $ax-by=0$ है।

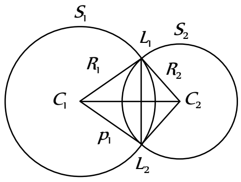
अब उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई $=2\sqrt{r_1^2-p_1^2}=2\sqrt{r_2^2-p_2^2}$,
जहाँ r_1 व r_2 दिये गये वृत्त की त्रिज्यायें हैं एवं p_1, p_2 वृत्त के केन्द्रों से उभयनिष्ठ जीवा पर डाले गये लम्बों की लम्बाइयाँ हैं

अतः अभीष्ट लम्बाई $=2\sqrt{a^2-\frac{a^4}{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

16. (b) माना ध्रुव (x_1, y_1) है तब ध्रुवी $xx_1+yy_1=1$ होगी।
$lx+my+n=0$ से तुलना करने पर,
$\Rightarrow x_1=-\frac{l}{n}, y_1=-\frac{m}{n}$.

17. (a) उभयनिष्ठ जीवा का समीकरण $\equiv S_1 - S_2 = 0$ या $4x - 3y - 10 = 0$ है तथा प्रथम वृत्त का केन्द्र (0, 0) है।

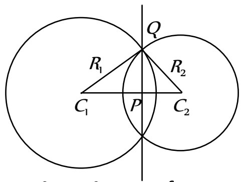
अतः इससे रेखा पर लम्ब $p_1 = \frac{10}{5} = 2$ व $R_1 = \sqrt{12}$



अतः $L_1L_2 = 2\sqrt{(R_1^2 - p_1^2)} = 2\sqrt{(12-4)} = 4\sqrt{2}$.

18. (a) $C_1(a, b), C_2(b, a), r_1 = r_2 = c$

$\therefore C_1P = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + a^2 + b^2 - 4ab}$



उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई

$$= 2\left[c^2 - \frac{1}{4}\{2(a^2 + b^2) - 4ab\}\right]^{1/2}$$

$$= 2\left(\frac{2c^2 - a^2 - b^2 + 2ab}{2}\right)^{1/2} = \sqrt{4c^2 - 2(a-b)^2} .$$

19. (d) माना कि जीवा के मध्यबिन्दु (*h, k*) हैं, तब इसका समीकरण $T = S_1$ होगा।

$\Rightarrow hx + ky - (x + h) - 3(y + k) - 10$

$= h^2 + k^2 - 2h - 6k - 10$

चूँकि यह मूलबिन्दु से गुजरता है

$\therefore h^2 + k^2 - h - 3k = 0$

या बिन्दुपथ $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$ है।

20. (a) मूल बिन्दु से स्पर्श जीवा $\equiv gx + fy + c = 0$

एवं (*g, f*) से, $gx + fy + g(x+g) + f(y+f) + c = 0$

या $2gx + 2fy + g^2 + f^2 + c = 0$

$$\therefore \text{दूरी} = \frac{\frac{g^2 + f^2 + c}{2} - c}{\sqrt{g^2 + f^2}} = \frac{g^2 + f^2 - c}{2\sqrt{g^2 + f^2}} .$$

21. (b) माना ध्रुव (x_1, y_1) है, तब ध्रुवी का समीकरण है,

$xx_1 + yy_1 = a^2$ अर्थात् $xx_1 + yy_1 = 5$ ....(i)

चूँकि (i) तथा $x + 2y = 1$ एक ही सरल रेखा को निरूपित करते हैं। अतः $x_1 = 5$, $y_1 = 10$ $\Rightarrow$ ध्रुव = (5, 10).

22. (b) माना बिन्दु (*h, k*) है। उभयनिष्ठ स्पर्श जीवा का समीकरण $hx + ky - a^2 = 0 \equiv lx + my + n = 0$ है।

या $\frac{h}{l} = \frac{k}{m} = \frac{-a^2}{n}$ या $h = \frac{-a^2 l}{n}$, $k = \frac{-a^2 m}{n}$

नोट : विद्यार्थी इस प्रश्न को सूत्र मानकर याद रखें।

23. (c) $\lambda x + \mu y + c = 0$ ध्रुवी है। स्पर्शी प्रतिबन्ध $p = r$ से विकल्प (c) में प्राप्त परिणाम प्राप्त होता है।

24. (b) *BC* का समीकरण (स्पर्श जीवा) है,

$0.x + 1.y - (x+0) + 2(y+1) + 1 = 0$ या $-x + 3y + 3 = 0$

B व *C* से जाने वाले वृत्त का समीकरण अर्थात् दिये गये वृत्त व स्पर्श जीवा से जाने वाले वृत्त का समीकरण है,

$(x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1) + \lambda(-x + 3y + 3) = 0$

यह $A(0, 1)$ से गुजरता है। अतः अभीष्ट वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$ है।

वैकल्पिक : अभीष्ट वृत्त का केन्द्र $A(0, 1)$ और दिये गये वृत्त के केन्द्र $(1, -2)$ का मध्य बिन्दु होगा अर्थात् केन्द्र $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ व त्रिज्या $\sqrt{\frac{5}{2}}$ होगी। अतः अभीष्ट वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$ होगा।

25. (d) चूँकि $|r_1 - r_2| < c_1c_2 < |r_1 + r_2|$

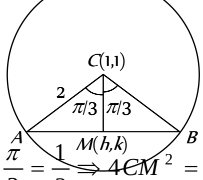
वृत्तों की उभयनिष्ठ जीवा है, $S_1 - S_2 = 0$

$\Rightarrow 2x - 2y = 0$ अर्थात् $x - y = 0$

$\because C_1$ से $x - y = 0$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई $= \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई $= 2\sqrt{\frac{19}{2} - \frac{1}{2}} = 6$.

26. (a) दिये गये वृत्त का केन्द्र (1, 1) एवं इसकी त्रिज्या $\sqrt{2}$ है। चित्र से $M(h, k)$ जीवा *AB* का मध्य बिन्दु होगा, जो *C* पर $\frac{2\pi}{3}$ कोण अन्तरित करती है अतः



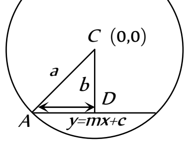
$\frac{CM}{AC} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4CM^2 = AC^2$

या $4[(h-1)^2 + (k-1)^2] = 4 \Rightarrow h^2 + k^2 - 2h - 2k + 2 = 1$

अतः बिन्दुपथ $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ है।

27. (b) हम जानते हैं, $CD = \left|\frac{c}{\sqrt{1+m^2}}\right|$ ....(i)

परन्तु चित्र के अनुसार,



$a^2 - b^2 = CD^2$ ....(ii)

(i) व (ii) से, $a^2 - b^2 = \frac{c^2}{(1+m^2)}$

$\Rightarrow (a^2 - b^2)(1 + m^2) = c^2$.

28. (c) $x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y - \frac{7}{2} = 0$

$\Rightarrow \left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-\frac{25}{16}-\frac{7}{2}=0$

$\Rightarrow \left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{45}{8}=0$

माना $X=x-\frac{3}{4}$ व $Y=y+\frac{5}{4}$, वृत्त का समीकरण $X^2+Y^2-\frac{45}{8}=0$ व रेखा $9X+Y-\frac{45}{2}=0$ है।

अतः ध्रुव $\equiv\left(\frac{9\times\frac{45}{8}}{\frac{45}{2}}, \frac{1\times\frac{45}{8}}{\frac{45}{2}}\right)\equiv\left(\frac{9}{4},\frac{1}{4}\right)$

परन्तु $x=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}$ व $y=\frac{1}{4}-\frac{5}{4}=-1$

अतः ध्रुव (3, –1) है।

29. (a) वृत्त की ध्रुवी $xx'+yy'=a^2$ है परन्तु यह $Ax+By+C=0$ द्वारा दी जाती है, तब $\frac{x'}{A}=\frac{y'}{B}=\frac{a^2}{-C}$ अतः ध्रुवी $\left(\frac{a^2A}{-C},\frac{a^2B}{-C}\right)$ है।

30. (b) बिन्दु $\left(5,-\frac{1}{2}\right)$ के सापेक्ष ध्रुवी का समीकरण

$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$ है।

$\Rightarrow 5x-\frac{1}{2}y-2(x+5)+0+0=0$

$\Rightarrow 3x-\frac{y}{2}-10=0\Rightarrow 6x-y-20=0$.

31. (a) माना ध्रुव (x_1,y_1) है, तब ध्रुवी का समीकरण होगा, $xx_1+yy_1=a^2$

$\therefore xx_1+yy_1=64$ ....(i)

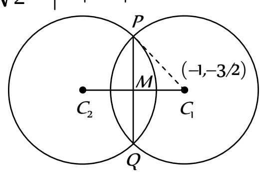
चूँकि (i) तथा रेखा $2x+3y=4$ एक ही रेखा का निरूपित करते हैं, अतः

$\Rightarrow\frac{x_1}{2}=\frac{y_1}{3}=\frac{-64}{-4}\Rightarrow x_1=32, y_1=48$

ट्रिक : ध्रुव $\left(\frac{-la^2}{n},\frac{-ma^2}{n}\right)\Rightarrow(32,48)$.

32. (b) उभयनिष्ठ जीवा PQ का समीकरण $2x+1=0$ है।

C_1M = केन्द्र C_1 से उभयनिष्ठ जीवा की लम्बवत् दूरी $=\left|\frac{-2+1}{\sqrt{2^2}}\right|=\left|-\frac{1}{2}\right|$

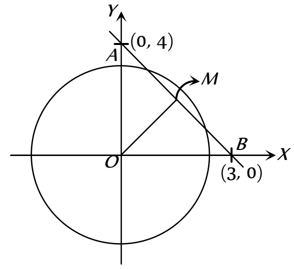


यहाँ, $C_1\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$, $r_1=\frac{3}{2}=C_1P$

$C_2\left(-2,\frac{-3}{2}\right), r_2=\frac{\sqrt{17}}{4}$

$PQ=2PM=2\sqrt{C_1P^2-C_1M^2}=2\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{1}{4}}=2\sqrt{2}$.

33. (b) OM = (0, 2) से रेखा $4x+3y=12$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई $=\frac{12}{5}$



वृत्त की त्रिज्या $\frac{13}{5}$ है।

अभीष्ट लम्बाई $=2\sqrt{\frac{169}{25}-\frac{144}{25}}=2$

34. (d) वृत्तों के समीकरण हैं,

$S_1=x^2+y^2+2x-3y+6=0$ .....(i)

$S_2=x^2+y^2+x-8y-13=0$ .....(ii)

$\therefore$ उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई है,

$S_1-S_2=0\Rightarrow x+5y+19=0$ .....(iii)

दिये गये चारों बिन्दुओं में से केवल बिन्दु (1, – 4) ही समीकरण (iii) को सन्तुष्ट करता है।

35. (c) दिये गये वृत्तों की उभयनिष्ठ जीवा है,

$2x-6y-4-a=0$ .....(i)

$\because$ वृत्त $x+y=4$, वृत्त $x+y-2x+6y+a=0$ की परिधि को समद्विभाजित करता है। अतः समीकरण (i) दूसरे वृत्त के केन्द्र अर्थात् (1, – 3) से गुजरता है।

$\therefore 2+18-4-a=0\Rightarrow a=16$.

36. (b) अभीष्ट ध्रुवी $x(1)+y(2)=7$ या $x+2y=7$ है।

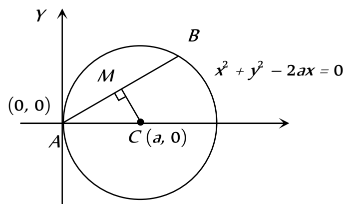
37. (a) अभीष्ट स्पर्श जीवा का समीकरण $xx_1+yy_1=a^2$ अर्थात् $5x-3y=10$ है।

38. (d) माना जीवा AB का समीकरण $y=mx$ .....(i)

व CM का समीकरण, $x+my=\lambda$ है।

यह $(a, 0)$ से गुजरती है।

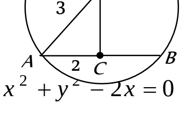
$\therefore\quad x+my=a$ .....(ii)



(i) व (ii) से, $x+y.\frac{y}{x}=a\Rightarrow x^2+y^2=ax$

$\Rightarrow x^2+y^2-ax=0$ जो कि अभीष्ट वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ है।

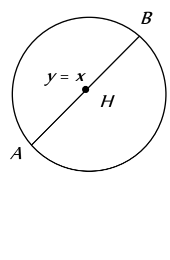
39. (c) दिये गये वृत्त का केन्द्र (1, 3) व त्रिज्या 2 है। अतः AB दिये गये वृत्त का व्यास है जिसका मध्य बिन्दु (1, 3) है। अतः अभीष्ट वृत्त की त्रिज्या 3 है।



40. (d) दिया गया वृत्त $x^2+y^2-2x=0$ ......(i)

और रेखा $y=x$ .....(ii) है

$y=x$ (i) में रखने पर,



$2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, 1$

समी (i) से, $y = 0, 1$

माना $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$

अभीष्ट वृत्त का समीकरण है,

$(x-0)(x-1)+(y-0)(y-1)=0$ या $x^2+y^2-x-y=0$

41. (c) अभीष्ट वृत्त

$(2x^2+2y^2-2x-6y-25)+\lambda(x-y-1)=0$ है।

इसका केन्द्र $\left(\frac{1-\lambda}{4}, \frac{3-\lambda}{4}\right)$ रेखा $x-y-1=0$ पर है।

अतः वृत्त का समीकरण $2x^2+2y^2-6x-2y-21=0$ है।

वृत्तों का निकाय

1. (d) प्रतिबन्ध के अनुसार,

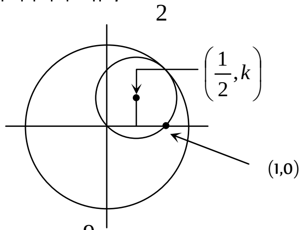
$\sqrt{(g-0)^2+(0-0)^2} = a+b \Rightarrow g = a+b$.

2. (d) $C_1 = (3, 1), C_2(-1, 4), R_1 = 3, R_2 = 2$

$C_1C_2 = \sqrt{16+9} = 5, R_1 + R_2 = C_1C_2$

अतः वृत्त बाह्यतः स्पर्श करते हैं।

3. (d) वृत्त की त्रिज्या $r = \frac{3}{2}$



$\frac{1}{4}+k^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow k = \pm\sqrt{2}$

अतः केन्द्र $\left(\frac{1}{2}, \pm\sqrt{2}\right)$ है।

4. (a) लम्बवत् प्रतिच्छेदन के लिये, $2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$

$\Rightarrow p\left(\frac{5}{2}\right)+p\left(\frac{3}{2}\right) = -5+7 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

5. (b) $x^2+y^2-6x-6y+10=0$ ....(i)

$x^2+y^2=2$ ....(ii)

$\Rightarrow -6x-6y+12=0$ या $x+y-2=0$ ....(iii)

$\Rightarrow x^2+y^2+2xy=4$ {(iii) से}

या $2xy = 2$ {(ii)से}

व $x-y=\sqrt{(x+y)^2-4xy} = \sqrt{4-4} = 0$

या $x = y$ व $x+y=2 \Rightarrow x=1, y=1$

ट्रिक : अभीष्ट बिन्दु दोनों वृत्तों को सन्तुष्ट करेगा, स्पष्टतः बिन्दु (1, 1) दोनों वृत्तों को सन्तुष्ट करता है।

6. (a) केवल एक वृत्त होगा।

7. (a) $(x-2)^2+(y-3)^2=0$

या $(x^2+y^2-9)-4x-6y+22=0$

या $(x^2+y^2-9)-\lambda(2x+3y-11)=0$ समाक्ष वृत्तों के निकाय को प्रदर्शित करता है।

$C = \left(\lambda, \frac{3\lambda}{2}\right)$, $r = \sqrt{\lambda^2+\frac{9\lambda^2}{4}-11\lambda+9}$

सीमान्त बिन्दुओं के लिए, $r = 0$

$\Rightarrow 13\lambda^2-44\lambda+36=0 \Rightarrow \lambda = \frac{18}{13}, 2$

$\therefore$ सीमान्त बिन्दु (2, 3) व $\left[\frac{18}{13}, \frac{3}{2}\left(\frac{18}{13}\right)\right]$ या $\left(\frac{18}{13}, \frac{27}{13}\right)$ हैं।

8. (a) वृत्तों के प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाले, वृत्तों के निकाय का समीकरण $= S_1 + \lambda S_2 = 0$ ($\lambda \ne -1$) होगा।

अर्थात् $x^2+y^2-2x-4y+1+\lambda(x^2+y^2-4x-2y+4)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-2\frac{(1+2\lambda)}{1+\lambda}x-2\frac{(2+\lambda)}{1+\lambda}y+\frac{1+4\lambda}{1+\lambda}=0$

केन्द्र $\left(\frac{1+2\lambda}{1+\lambda}, \frac{2+\lambda}{1+\lambda}\right)$, रेखा $x+2y-3=0$ पर स्थित है।

$\therefore \frac{1+2\lambda}{1+\lambda}+2\left(\frac{2+\lambda}{1+\lambda}\right)-3=0 \Rightarrow \lambda=-2$.

$\therefore$ वृत्त का अभीष्ट समीकरण $x^2+y^2-6x+7=0$ है।

9. (c) माना वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ है।

यह (1, 2) से जाता है अतः $1+4+2g+4f+c=0$ एवं $x^2+y^2=4$ पर अभिलम्ब है।

अतः $2g\times 0+2f\times 0=-c+4$ या $c=4$

अतः $2g+4f+9=0$

यदि केन्द्र (x, y) या $(-g, -f)$ हो, तो $2x+4y-9=0$ अभीष्ट बिन्दुपथ है।

10. (a) $C_1(1, 2), C_2(0, 4), R_1=\sqrt{5}, R_2=2\sqrt{5}$

$C_1C_2=\sqrt{5}$ व $C_1C_2 = |R_2-R_1|$

अतः वृत्त अन्तःस्पर्श करते हैं।

11. (a) $r_1 = 2$; $r_2 = 4$

$C_1C_2 = 2$

$\because r_2 - r_1 = C_1C_2$

अतः वृत्त अन्तःस्पर्श करते हैं।

12. (b) अभीष्ट समीकरण

$(x^2+y^2+13x-3y)+\lambda(2x^2+2y^2+4x-7y-25)=0$ है।

जो (1, 1) से गुजरता है अतः $\lambda = \frac{1}{2}$

अतः अभीष्ट समीकरण $4x^2+4y^2+30x-13y-25=0$ है।

13. (a) माना वृत्त का समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ है। यह $x^2+y^2=p^2$ को लम्बवत् प्रतिच्छेद करता है अतः $0+0=+c-p^2$ या $c=p^2$ एवं (a, b) से गुजरता है, अतः

$a^2+b^2+2ga+2fb+p^2=0$

या $2ax+2by-(a^2+b^2+p^2)=0$

14. (d) माना वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ है।

$g+2f=c+3$ ....(i)

$2g+4f=c+5$ ....(ii)

$-7g-8f=c-9$ ....(iii)

$\Rightarrow g=\frac{2}{3},\ f=\frac{2}{3},\ c=-1$

अतः अभीष्ट समीकरण $3(x^2+y^2)+4(x+y)-3=0$ है।

15. (c) वृत्तों का निकाय है,

$x^2+y^2-2x-4y+1+\lambda(x^2+y^2-1)=0$

$(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2-2x-4y+(1-\lambda)=0$

$x^2+y^2-\frac{2}{1+\lambda}x-\frac{4}{1+\lambda}y+\frac{1-\lambda}{1+\lambda}=0$ .....(i)

केन्द्र $\left[\frac{1}{1+\lambda},\frac{2}{1+\lambda}\right]$ है

त्रिज्या $=\sqrt{\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2+\left(\frac{2}{1+\lambda}\right)^2-\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}=\frac{\sqrt{4+\lambda^2}}{1+\lambda}$

चूँकि यह रेखा $x+2y=0$ को स्पर्श करती है,

अतः त्रिज्या = केन्द्र से रेखा पर लम्बवत् दूरी

अर्थात् $\left|\frac{\frac{1}{1+\lambda}+2\frac{2}{1+\lambda}}{\sqrt{1^2+2^2}}\right|=\frac{\sqrt{4+\lambda^2}}{1+\lambda}$

$\Rightarrow\sqrt{5}=\sqrt{4+\lambda^2}\Rightarrow\lambda=\pm1$

$\lambda=-1$ वृत्त के लिये संभव नहीं है अतः $\lambda=1$.

अतः (i) से वृत्त का अभीष्ट समीकरण $x^2+y^2-x-2y=0$ है।

16. (a,d) जब दो वृत्त बाह्य रूप से एक–दूसरे को स्पर्श करते हैं, तब

$r_1+r_2=\sqrt{\{0-(-a)\}^2+\{0-(-1)\}^2}$

$\Rightarrow(3+a)=\sqrt{a^2+1}\Rightarrow a=-4/3$

जब दो वृत्त एक–दूसरे को अन्तःस्पर्श करते हैं, तब

$r_1-r_2=\sqrt{\{0-(-a)\}^2+\{0-(-1)\}^2}$

$\Rightarrow(3-a)=\sqrt{a^2+1}\Rightarrow a=\frac{4}{3}$.

17. (c) केन्द्र $(-g,-f)$ वाले वृत्त का समीकरण है,

$x^2+y^2+2gx+2fy=0$ ....(i)

एवं $g+f+4=0$ ....(ii)

एवं $-4g+2f=4$ ....(iii)

(ii) व (iii) से, g व f का मान प्राप्त हो जाता है । अतः वृत्त $x^2+y^2-4x-4y=0$ है।

18. (c) $\frac{ad}{2}+\frac{be}{2}=c+f$, (लम्बवत् प्रतिच्छेदन के प्रतिबन्ध से)

19. (a) x^2, y^2 के लिये हल करने पर $\left(\sqrt{\frac{b'-b}{ab'-ba'}},\sqrt{\frac{a'-a}{a'b-b'a}}\right)$ प्रतिच्छेद बिन्दु हैं।

$ax^2+by^2=1$ का अवकलन करने पर, $2ax+2by\frac{dy}{dx}=0$

$\Rightarrow\left(\frac{dy}{dx}\right)_1=-\frac{ax}{ay}$ व $\left(\frac{dy}{dx}\right)_2=-\frac{a'x}{b'y}$

$\Rightarrow\left(\frac{dy}{dx}\right)_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_2=-1$

$\Rightarrow\frac{aa'}{bb'}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)=-1$ या $\frac{aa'}{bb'}\left(\frac{b'-b}{a'-a}\right)=1$

अतः $\frac{1}{b}-\frac{1}{b'}=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right)$.

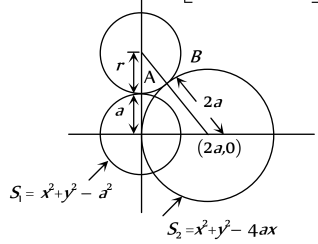
20. (a) मूलाक्ष $4x+6y=10$ या $2x+3y=5$ ....(i)

$2x+2y=4$ या $x+y=2$ ....(ii)

(i) व (ii) के प्रतिच्छेद बिन्दु (1, 1) है।

21. (a) माना $C\equiv(h,k)$, त्रिज्या $=r$

A के निर्देशांक $\equiv\left[\frac{ah}{a+r},\frac{ak}{a+r}\right]$



व B के निर्देशांक $\equiv\left[\frac{2ar+2ah}{2a+r},\frac{2ak}{2a+r}\right]$

A व B के निर्देशांक क्रमशः S_1, S_2 में रखकर r के विलोपन से अभीष्ट बिन्दुपथ $12x^2-4y^2-24ax+9a^2=0$ है।

वैकल्पिकः चूँकि यह $x^2+y^2=a^2$ c तथा $x^2+y^2-4ax=0$ को स्पर्श करता है

अतः $r+a=\sqrt{h^2+k^2}$ ....(i)

तथा $r+2a=\sqrt{(h-2a)^2+k^2}$ ....(ii)

(i) से r का मान (ii) में रखने पर

$-a+\sqrt{h^2+k^2}+2a=\sqrt{(h-2a)^2+k^2}$,

हल करने पर अभीष्ट बिन्दुपथ प्राप्त हो जाता है।

22. (c) $(C_1C_2)^2=r_1^2+r_2^2\Rightarrow 2a^2=18\Rightarrow a=3$.

23. (c) मूल बिन्दु से जाने वाले वृत्त का समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy=0$ है।

दोनों वृत्तों का मूलाक्ष है, $2gx+2fy+a^2=0$ ....(i)

$2(g-a)x+2fy+2a^2=0$ ....(ii)

एवं शेष दो वृत्तों का मूलाक्ष $x=\frac{a}{2}\Rightarrow f=0$ है

अब, (i) व (ii) से $\frac{2g}{2(g-a)}=\frac{1}{2}\Rightarrow g=-a$

अतः वृत्त $x^2+y^2-2ax=0$ है।

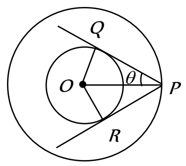
24. (c) $S_1 + \lambda S_2 = 0$ के प्रयोग से, किन्तु इसका केन्द्र y-अक्ष पर है अर्थात् $-8-4\lambda = 0$ या $\lambda = -2$

अतः अभीष्ट समीकरण $x^2+y^2+22y+9=0$ है।

25. (a) उभयनिष्ठ जीवा $= S_1 - S_2$

$10x-3y-18=0$.

26. (c) माना वृत्त $x^2+y^2=a^2$ पर कोई बिन्दु $(a\cos t, a\sin t)$ है तथा $\angle OPQ = \theta$



$\because$ $PQ =$ P से वृत्त $x^2+y^2=a^2\sin^2\alpha$ पर खींची गई स्पर्शी की लम्बाई

$\therefore$ $PQ = \sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t - a^2\sin^2\alpha} = a\cos\alpha$

अब $OQ =$ वृत्त $x^2+y^2=a^2\sin^2\alpha$ की त्रिज्या

$\therefore$ $OQ = a\sin\alpha$, $\therefore \tan\theta = \frac{OQ}{PQ} = \tan\alpha \Rightarrow \theta = \alpha$

अतः स्पर्शियों के मध्य कोण $= \angle QPR = 2\alpha.$

27. (a) वृत्त का समीकरण

$(x^2+y^2-8x-2y+7)+\lambda(x^2+y^2-4x+10y+8)=0$

है एवं बिन्दु $(3,-3)$ इस वृत्त पर स्थित है, अतः $\lambda = \frac{7}{16}$

अतः अभीष्ट वृत्त $23x^2+23y^2-156x+38y+168=0$ होगा।

28. (c) माना वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ है।

चूँकि यह लम्बवत् प्रतिच्छेद करता है अतः $2g+4f=6+c$ व $4g+6f=2+c$ एवं यह (1, 1) से जाता है। अतः $2g+2f=-2-c$ इन समीकरणों से, g, f व c के मान क्रमशः –8, 6, 2 हैं।

अतः अभीष्ट वृत्त $x^2+y^2-16x+12y+2=0$ है।

29. (a) यह आधारभूत संकल्पना है।

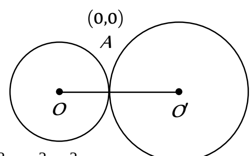
30. (a) चित्रानुसार $OA + O'A = OO'$

$\sqrt{g^2+f^2} + \sqrt{f'^2+g'^2} = \sqrt{(g'-g)^2+(f'-f)^2}$

$\Rightarrow g^2+f^2+f'^2+g'^2+2\sqrt{g^2+f^2}\times\sqrt{f'^2+g'^2}$

$=(g'-g)^2+(f'-f)^2$

$\Rightarrow 2\sqrt{g^2+f^2}\sqrt{f'^2+g'^2} = -2(gg'+ff')$



$\Rightarrow g^2f'^2+f^2g'^2 = 2gg'ff'$.

$\therefore (gf'-fg')^2 = 0 \Rightarrow gf' = fg'$.

31. (b) $r_1+r_2 = 2+\sqrt{21}$, $C_1C_2 = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

स्पष्टतः $r_1+r_2 > C_1C_2$, अतः वृत्त एक–दूसरे को प्रतिच्छेदित करते हैं।

32. (a) **ट्रिक** : मूलाक्ष का समीकरण $S_1 - S_2 = 0$ अर्थात् $4x+2y-1=0$ है।

समाक्ष वृत्त निकाय

$(x^2+y^2-6x-6y+4)+\lambda(4x+2y-1)=0$

या $x^2+y^2-(6-4\lambda)x-(6-2\lambda)y+(4-\lambda)=0$ ....(i)

द्वारा दिया जा सकता है जिसका केन्द्र $C(3-2\lambda, 3-\lambda)$

तथा त्रिज्या $r = \sqrt{(3-2\lambda)^2+(3-\lambda)^2-(4-\lambda)}$

यदि $r=0$ तो $\lambda = 2$ या $7/5$

C के निर्देशांक रखने पर सीमान्त बिन्दु (–1, 1) व $\left(\frac{1}{5}, \frac{8}{5}\right)$ हैं।

इनमें से एक बिन्दु विकल्प (a) में दिया गया है।

33. (b) दिया गया वृत्त का केन्द्र $\equiv \left(2, \frac{3}{2}\right), \frac{5}{2} = r_1$ (माना)

वृत्त के अभीष्ट अभिलम्ब $x+3=0, x+2y=0$ हैं जो केन्द्र $\left(-3, \frac{3}{2}\right)$ पर काटते हैं। r_2 = त्रिज्या, (माना)

द्वितीय वृत्त, प्रथम वृत्त को समाहित करता है, अर्थात $C_2C_1 = r_2 - r_1 \Rightarrow r_2 = \frac{15}{2}$.

34. (c) $t_1^2 - t_2^2 = k \Rightarrow S_1 - S_2 = k \Rightarrow$ यह रेखीय समीकरण, मूलाक्ष $S_1 - S_2 = 0$ के समान्तर रेखा प्रदर्शित करता है।

35. (b) दिये गये वृत्तों की त्रिज्यायें $r_1 = 3, r_2 = 5$ व केन्द्र $C_1(0,1), C_2(1,0)$ हैं। स्पष्टतः $C_1C_2 = \sqrt{2} < (r_2 - r_1)$ अतः एक वृत्त पूर्णतः दूसरे के अन्दर हैं।

36. (b) माना वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ है। यह दिये गये दो वृत्तों को लम्बवत् काटता है। अतः

$2(gg_1+ff_1) = c+c_1$ ....(i)

व $2(gg_2+ff_2) = c+c_2$ ....(ii)

(ii) को (i) से घटाने पर,

$2g(g_1-g_2)+2f(f_1-f_2) = c_1-c_2$

अतः $(-g,-f)$ का बिन्दुपथ $-2x(g_1-g_2)-2y(f_1-f_2) = c_1-c_2$

या $2x(g_1-g_2)+2y(f_1-f_2)+c_1-c_2=0$ है, जो कि दिये गये वृत्तों का मूलाक्ष है।

37. (c) माना अभीष्ट वृत्त का समीकरण है,

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ....(i)

यह (0, 0) से जाता है। अतः $c=0$

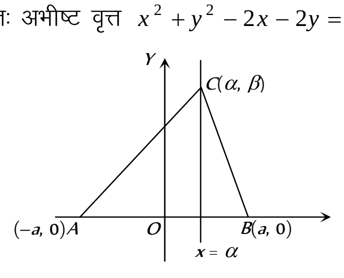
(i) का केन्द्र $(-g,-f)$ रेखा $y=x$ पर स्थित है। अतः $g=f$। चूँकि (i) वृत्त $x^2+y^2-4x-6y+10=0$ को लम्बवत् काटता है। अतः $2(-2g-3f) = c+10$

$\Rightarrow -10g = 10$, $(\because g = f$ तथा $c = 0)$

$\Rightarrow g = f = -1$,

अतः अभीष्ट वृत्त $x^2+y^2-2x-2y=0$ होगा।

38. (a)



चित्रानुसार त्रिभुज लेने पर AB, BC व CA को व्यास मानकर खीचें गये वृत्तों के समीकरण हैं,

$S_1 \equiv (x+a)(x-a)+y^2=0$

$S_2 \equiv (x-a)(x-\alpha)+y(y-\beta)=0$

व $S_3 \equiv (x+a)(x-\alpha)+y(y-\beta)=0$

अर्थात् $S_1 \equiv x^2+y^2-a^2=0$

$S_2 \equiv x^2+y^2-(a+\alpha)x-\beta y+a\alpha=0$

व $S_3 \equiv x^2+y^2-(\alpha-a)x-\beta y-a\alpha=0$

S_2 व S_3 की मूलाक्ष का समीकरण है, $S_3-S_2=0$

अर्थात् $2ax-2a\alpha=0$

$\Rightarrow 2a(x-\alpha)=0$, $a\neq 0$, $x=\alpha$

किन्तु $x=\alpha$, C से गुजरने वाला लम्ब है इसी तरह अन्य मूलाक्ष भी A व B से गुजरने वाला लम्ब है। अतः मूलकेन्द्र, लम्बकेन्द्र होगा।

39. (d) समाक्ष वृत्त निकाय है, $x^2+y^2+2gx+c=0$, (जहाँ g चर है)

L.H.S. = $\Sigma(g_2-g_3)(h^2+k^2-c+2g_1h)=0$

चूँकि $\Sigma(g_2-g_3)=0$ तथा $\Sigma g_1(g_2-g_3)=0$.

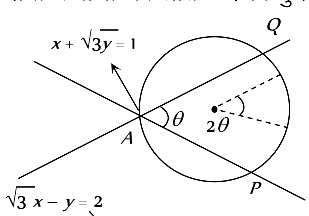
40. (b) चूँकि $\Sigma g_1^2(g_2-g_3)=-(g_1-g_2)(g_2-g_3)(g_3-g_1)$.

41. (a) उभयनिष्ठ जीवा $S_1-S_2=0$, वृत्त $S_2=0$ के केन्द्र से होकर जाती है।

42. (b) $(C_1C_2)^2=r_1^2+r_2^2$ या $2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2$ से।

43. (b) $2\times 2\times\frac{3}{2}+2\times 3\times 1=3+\frac{C}{2}\Rightarrow C=18$.

44. (a) माना दोनों रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु A है,



$\therefore$ PQ द्वारा केन्द्र C पर बनाया गया कोण PQ द्वारा A पर बनाए गए कोण से दुगुना होता है।

$x+\sqrt{3}y=1$ के लिए, $m_1=\frac{-1}{\sqrt{3}}$

व $\sqrt{3}x-y=2$ के लिए, $m_2=\sqrt{3}$

$\because m_1\times m_2=\frac{-1}{\sqrt{3}}\times\sqrt{3}=-1$, $\therefore \angle A=90^o$

$\therefore$ PQ द्वारा केन्द्र C पर बना कोण $=2\times 90^o=180^o$.

ट्रिक : दी गई रेखायें लम्बवत् हैं, अतः PQ वृत्त के केन्द्र से गुजरती है अतः चाप PQ द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण 180^o है।

45. (d) दिए गए वृत्त $x^2+y^2+14x+6y+2=0$ में

$g=7,\ f=3,\ c=2$ है।

दूसरे वृत्त का केन्द्र $(-g,-f)=(0,2)$, (दिया है)

लाम्बिक प्रतिच्छेदन के लिये, $2gg'+2ff'=c+c'$

$0-12=2+c'\Rightarrow c'=-14$

यह मान समीकरण $x^2+y^2+2g'x+2f'x+c'=0$ में रखने पर,

$\Rightarrow x^2+y^2+0-4y-14=0\Rightarrow x^2+y^2-4y-14=0$.

46. (a) वृत्त $x+y=4$, $x+y-10x+\lambda=0$ एक दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करते हैं

$\therefore$ $C_1C_2=r_1+r_2\Rightarrow C_1(0,0)$ व $C_2=(5,0)$

$r_1=2$ व $r_2=\sqrt{25+\lambda}$

$\therefore$ $\sqrt{(5-0)^2+0}=2+\sqrt{25+\lambda}$

$\Rightarrow$ $5-2=\sqrt{25+\lambda}\Rightarrow 3=\sqrt{25+\lambda}$

$\Rightarrow$ $9=25+\lambda\Rightarrow\lambda=-16$.

47. (b) वृत्त का समीकरण $x+y+2gx+c=0$ है, जहाँ c अचर तथा g समाक्षीय निकाय का प्राचल है तथा $c>0$. हम जानते हैं, कि वृत्त का मानक समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ है। दिये गये समीकरण की मानक समीकरण से तुलना करने पर केन्द्र $\equiv(-g,0)$ तथा त्रिज्या $\sqrt{g^2-c}$ अतः त्रिज्या शून्य होगी। जब $g^2-c=0$ या $g=\pm\sqrt{c}$ अतः $(\sqrt{c},0)$ तथा $(-\sqrt{c},0)$ वृत्तों के समाक्षीय निकाय के सीमान्त बिन्दु हैं। चूँकि $c>0$ अतः $\sqrt{c}$ वास्तविक है तथा सीमांत बिन्दु वास्तविक तथा भिन्न–भिन्न हैं। अतः समाक्षीय निकाय स्पर्शी रूप का है।

48. (d) यदि सरल रेखा $y=mx$ दिये गये वृत्त के बाहर है, तब वृत्त के केन्द्र से रेखा की दूरी > वृत्त की त्रिज्या

अतः $\frac{10}{\sqrt{1+m^2}}>\sqrt{10}$

$\Rightarrow(1+m)<10\Rightarrow m<9\Rightarrow|m|<3$.

49. (c) मूलाक्ष का समीकरण है, $S_1-S_2=0$

अर्थात् $(2x^2+2y^2-7x)-(2x^2+2y^2-8y-14)=0$

$\Rightarrow -7x+8y+14=0$, $\therefore 7x-8y-14=0$.

50. (b) अभीष्ट वृत्त का समीकरण है, $S_1+\lambda S_2=0$

$\Rightarrow x^2(1+\lambda)+y^2(1+\lambda)+x(2+13\lambda)-y\left(\frac{7}{2}+3\lambda\right)-\frac{25}{2}=0$

केन्द्र = $\left(\frac{-(2+13\lambda)}{2},\frac{\frac{7}{2}+3\lambda}{2}\right)$

$\because$ केन्द्र रेखा $13x+30y=0$ पर स्थित है

$\therefore -13\left(\frac{2+13\lambda}{2}\right)+30\left(\frac{\frac{7}{2}+3\lambda}{2}\right)=0\Rightarrow\lambda=1$.

अतः अभीष्ट वृत्त का समीकरण

$4x^2+4y^2+30x-13y-25=0$ है।

51. (d) $S_1\equiv x^2+y^2-16x+60=0$ .....(i)

$S_2\equiv x^2+y^2-12x+27=0$ .....(ii)

$S_3\equiv x^2+y^2-12y+8=0$ .....(iii)

वृत्त (i) तथा (ii) का मूलाक्ष है

$S_1-S_2=0\Rightarrow -4x+33=0$ ....(iv)

वृत्त (ii) तथा (iii) का मूलाक्ष है

$S_2 - S_3 = 0 \Rightarrow -12 + 12y + 19 = 0$ .....(v)

वृत्त (iv) तथा (v) का मूल केन्द्र $\left(\frac{33}{4}, \frac{20}{3}\right)$ है।

52. (b) हम जानते हैं कि दो वृत्तों का मूलाक्ष एक ऐसे बिन्दु का बिन्दुपथ है जो इस प्रकार गति करता है, कि इस बिन्दु से वृत्तों पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाई बराबर हो। यह रेखा, दोनों वृत्तों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा पर लम्ब होती है।

53. (c) वृत्तों के समीकरण हैं,

$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$ .....(i)

तथा $x^2 + y^2 - 5x + 6y + 15 = 0$ .....(ii)

वृत्त का मानक समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ है

अतः वृत्त (i) के लिये $g = -1; f = 3; c = 6;$

केन्द्र $A = (1, -3)$ तथा

त्रिज्या $(r_1) = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{1 + 9 - 6} = 2$

इसी प्रकार, वृत्त (ii) के लिये, $g = \frac{-5}{2}; f = 3; c = 15;$

केन्द्र $B \equiv \left(+\frac{5}{2}, -3\right)$ तथा त्रिज्या $(r_2) = \sqrt{\frac{25}{4} + 9 - 15} = \frac{1}{2}$

अतः A व B के बीच दूरी $= \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 + (-3+3)^2} = \frac{3}{2}$

तथा त्रिज्याओं के बीच दूरी $= (r_1 - r_2) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. चूँकि वृत्तों के केन्द्र A तथा B के बीच की दूरी $r_1 - r_2$ के बराबर हैं। अतः वृत्त एक दूसरे को अन्तःस्पर्श करते हैं।

54. (d) माना कि वृत्त का समीकरण है,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ .....(i)

वृत्त (i), वृत्त $x^2 + y^2 - 20x + 4 = 0$ को लम्बवत् काटता है

$\therefore 2(-10g + 0 \times f) = c + 4 \Rightarrow -20g = c + 4$ .....(ii)

वृत्त (i) रेखा $x = 2$ को स्पर्श करता है

$\therefore x + 0y - 2 = 0$

$\therefore \left|\frac{-g + 0 - 2}{\sqrt{1^2 + 0^2}}\right| = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$\Rightarrow (g+2)^2 = g^2 + f^2 - c$

$\Rightarrow 4g + 4 = f^2 - c$ .....(iii)

समीकरण (ii) तथा (iii) से c को विलुप्त करने पर,

$-16g - 4 = f^2 - 4 \Rightarrow f^2 + 16g = 0$

अतः बिन्दु $(-g, -f)$ का बिन्दुपथ $y^2 - 16x = 0$ है।

55. (c) माना कि वृत्त $x^2 + y^2 + 2hx + 2ky + c = 0$ है, जिसके केन्द्र का बिन्दुपथ ज्ञात करना है चूँकि यह वृत्तों $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$

तथा $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ को लम्बवत् काटता है

अतः $2h(2) + 2k(-3) = c + 9 \Rightarrow 4h - 6k = c + 9$ .....(i)

व $2h(-2) + 2k(3) = c + 4 \Rightarrow -4h + 6k = c + 4$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से, $c + 9 = -c - 4 \Rightarrow 2c = -13$ .....(iii)

(i) से $8h - 12k = 2c + 18 \Rightarrow 8h - 12k = 5$ .....(iv)

दिये गये वृत्त का केन्द्र $(-h, -k)$ है।

अतः समीकरण (iv) से $(-h, -k)$ का बिन्दुपथ है,

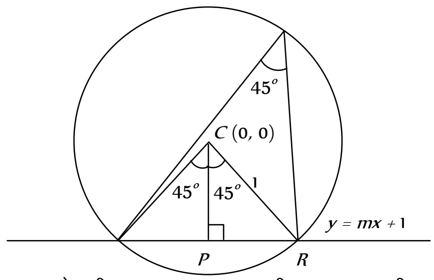
$8(-x) - 12(-y) = 5 \Rightarrow 8x - 12y + 5 = 0.$

56. (b) दिये गये वृत्तों का मूलाक्ष है,

$\left(-\frac{7}{3} + 3\right)x + \left(\frac{8}{3} + 4\right)y + \frac{11}{3} - 5 = 0$

$\Rightarrow 2x + 20y - 4 = 0 \Rightarrow x + 10y - 2 = 0.$

57. (c) दिया गया वृत्त है, $x^2 + y^2 = 1$ जिसका केन्द्र $C(0,0)$, त्रिज्या = 1 तथा जीवा $y = mx + 1$ है। $\cos 45^o = \frac{CP}{CR}$



CP = (0,0) से जीवा $y = mx + 1$ की लम्बवत् दूरी

$CP = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}$, ($CR$ = त्रिज्या = 1)

$\cos 45° = \frac{1/\sqrt{m^2+1}}{1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$

$m^2 + 1 = 2 \Rightarrow m = \pm 1.$

58. (c) दिए गये वृत्त हैं, $2x^2 + 2y^2 - 3x + 6y + k = 0$

अथवा $x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 3y + \frac{k}{2} = 0$ .....(i)

तथा $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 16 = 0$ .....(ii)

वृत्त (i) व (ii) एक दूसरे को लम्बवत् काटते हैं

तब $2g_1 g_2 + 2f_1 f_2 = c_1 + c_2$

$2\left(-\frac{3}{4}\right)(-2) + 2\left(\frac{3}{2}\right).5 = \frac{k}{2} + 16$

$3 + 15 = \frac{k}{2} + 16 \Rightarrow 18 = \frac{k}{2} + 16 \Rightarrow k = 4.$

59. (a) माना वृत्त का समीकरण है, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ .....(i)

वृत्त (i) दिये गये तीनों वृत्तों को लम्बवत् काटता है

अतः प्रश्नानुसार, $2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$ से,

$2g + 17f = c + 4$ .....(ii)

$7g + 6f = c + 11$ .....(iii)

$-g + 22f = c + 3$ .....(iv)

(ii), (iii) व (iv) से, $g = -3, \; f = -2$.

अतः वृत्त का केन्द्र $\equiv (-g, -f) = (3, 2)$.

60. (a) वृत्त है, $S_1 = x^2 + y^2 - 3x - 4y + 5 = 0$ .....(i)

तथा $S_2 = 2x^2 + 2y^2 - 10x - 12y + 12 = 0$

या $S_2 = x^2 + y^2 - 5x - 6y + 6 = 0$ .....(ii)

अतः मूलाक्ष का समीकरण है, $S_1 - S_2 = 0$

$\Rightarrow\ 2x+2y-1=0$.

61. (d) $2g_2(g_1-g_2)+2f_2(f_1-f_2)=c_1-c_2$

$2(1)\ (3-1)+2(-3)\ (-1+3)=k+15$

$4-12=k+15$ व $-8=k+15 \Rightarrow k=-23$.

62. (b) $\dfrac{x^2+y^2+2x-4y-20}{x^2+y^2-4x+2y-44}=\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow\ x^2+y^2+14x-16y+28=0$, $\therefore$ केन्द्र $=(-7,8)$.

63. (a) हम जानते हैं, कि जब दो वृत्त एक–दूसरे को प्रतिच्छेदित करते हैं तब उनकी त्रिज्याओं का अन्तर उनके केन्द्रों के बीच की दूरी से कम होता है।

$\Rightarrow r-3<5 \Rightarrow r<8$ .....(i)

एवं त्रिज्याओं का योग > केन्द्रों के बीच की दूरी .....(ii)

$\Rightarrow\ r+3>5 \Rightarrow r>2$

अतः (i) व (ii) से, $2<r<8$.

64. (a) $x^2+y^2=25$ .....(i)

$x^2+y^2-8x+7=0$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से,

$8x=7+25$ या $x=4$ और $x=4$ के लिये $y=\pm 3$.

$\therefore$ प्रतिच्छेद बिन्दु (4, 3), (4, –3) हैं।

65. (d) $C_1(-a,0);\ C_2(0,-b);\ R_1(\sqrt{a^2-c});\ \ R_2(\sqrt{b^2-c})$

$C_1C_2=\sqrt{a^2+b^2}$

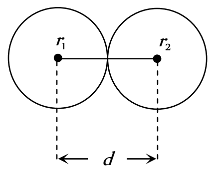
चूँकि ये एक–दूसरे को स्पर्श करते हैं, अतः

$\sqrt{a^2-c}+\sqrt{b^2-c}=\sqrt{a^2+b^2}$

$\Rightarrow a^2b^2-b^2c-a^2c=0$

$\dfrac{1}{a^2b^2c}$ से गुणा करने पर, $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{c}$.

66. (a)



स्पष्टतः वृत्त एक दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करते हैं।

67. (b) दिये गये वृत्त हैं $x^2+y^2=2ax$ .....(i)

व $x^2+y^2=2by$ .....(ii)

(i) – (ii) से, $0=2(ax-by)\ \Rightarrow\ y=\dfrac{a}{b}x$

(i) से, $x^2+\dfrac{a^2}{b^2}x^2=2ax\ \Rightarrow\ x\left\{\left(1+\dfrac{a^2}{b^2}\right)x-2a\right\}=0$

$\Rightarrow\ x=0,\dfrac{2ab^2}{a^2+b^2}$

$x=0$ के लिये, $y=0$

व $x=\dfrac{2ab^2}{a^2+b^2}$ के लिये, $y=\dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}$

$\therefore$ प्रतिच्छेद बिन्दु (0, 0) व $\left(\dfrac{2ab^2}{a^2+b^2},\dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}\right)$ हैं।

68. (a) $r_1=\sqrt{g^2+f^2-c}=12$

एवं $r=-g=-f=12$ (क्योंकि यह दोनों अक्षों को स्पर्श करता है)

$\Rightarrow C_1=(12,12),\ r_2=7,\ C_2=(8,9)$

अब $C_1C_2=5$ व $r_1-r_2=5$

अतः वृत्त एक–दूसरे को अन्तःस्पर्श करते हैं।

69. (b) मूलाक्ष का समीकरण $S_1-S_2=0$ होता है।

$S_1\equiv x^2+y^2+x-y+2=0$

$S_2=x^2+y^2-\dfrac{4}{3}x-4=0$

$\Rightarrow S_1-S_2=\dfrac{7}{3}x-y+6=0$

व $7x-3y+18=0$.

70. (c) दो वृत्तों के प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाले वृत्तों का निकाय $S_1+\lambda S_2=0,\ (\lambda\neq -1)$ है।

$x^2+y^2-6x+2y+4+\lambda(x^2+y^2+2x-4y-6)=0$

केन्द्र $(3-\lambda,\ -1+2\lambda)$ है, जो कि $y=x$ पर है

$\therefore\ -1+2\lambda=3-\lambda \Rightarrow \lambda=\dfrac{4}{3}$

अतः λ का मान रखने पर अभीष्ट वृत्त प्राप्त होगा।

71. (d) वृत्त एक–दूसरे को समकोण पर काटते हैं, यदि

$2(g_1g_2+f_1f_2)=c_1+c_2 \Rightarrow 0=c+2\lambda \Rightarrow \lambda=-\dfrac{c}{2}$.

72. (c) $S_1=0$ व $S_2=0$ का मूलाक्ष $S_1-S_2=0$ है।

$\therefore\ (x^2+y^2-144)-(x^2+y^2-15x+12y)=0$

$\Rightarrow 15x-12y-144=0 \Rightarrow 5x-4y=48$.

73. (d) स्पष्टतः, $r_1-r_2>C_1C_2$

$r_1=R,\ \ C_1(3,4);\ \ r_2=r;\ C_2(0,0)$

$R-r>\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2} \Rightarrow R-r>5$.

74. (d) यदि दो वृत्त $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ व $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ लम्बकोणीय प्रतिच्छेद करते हैं, तब $2(g_1g_2+f_1f_2)=c_1+c_2$ व $g_1=\lambda, f_1=3, c_1=1$, $g_2=2, f_2=1, c_2=0$

अतः $2(2\lambda+3)=1+0 \Rightarrow 2\lambda+3=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \lambda=\dfrac{-5}{4}$.

75. (c) यहाँ $g_1=\dfrac{k}{2}, f_1=2, c_1=2$, $g_2=-1, f_2=\dfrac{-3}{4}, c_2=\dfrac{k}{2}$

लम्बकोणीय प्रतिच्छेद का प्रतिबंध है,

$2(g_1g_2+f_1f_2)=c_1+c_2$

$\Rightarrow\ 2\left[\dfrac{-k}{2}+\left(\dfrac{-3}{2}\right)\right]=2+\dfrac{k}{2}$

$\Rightarrow -k-3 = 2+\frac{k}{2} \Rightarrow \frac{3k}{2} = -5$

$\Rightarrow k = \frac{-10}{3}$.

76. (d) रेखा PQ (अर्थात उभयनिष्ठ जीवा) का समीकरण है,

$5ax + (c-d)y + a + 1 = 0$ .....(i)

साथ ही, रेखा PQ का दिया गया समीकरण है,

$5x + by - a = 0$ .....(ii)

$\therefore \frac{5a}{5} = \frac{c-d}{b} = \frac{a+1}{-a}; \ \frac{a+1}{-a} = a$

$\Rightarrow a^2 + a + 1 = 0$

अतः a का कोई भी वास्तविक मान विद्यमान नही है, ($\because D<0$).

77. (a) दिये गये दो वृत्तों के समीकरण $x^2+y^2-2x+22y+5=0$ व $x^2+y^2+14x+6y+k=0$ हैं। यदि ये वृत्त लम्बकोणीय प्रतिच्छेदन करते हैं, तब $2(g_1g_2+f_1f_2)=c_1+c_2$ अर्थात $2(-1.7+11.3)=5+k$ $2(-7+33)=5+k$

$\Rightarrow 52-5=k \Rightarrow k=47$.

78. (b) माना केन्द्र $\equiv (h,k)$; दिया गया है $C_1C_2 = r_1 \pm r_2$

$\Rightarrow \sqrt{(h-0)^2+(k-3)^2} = |k \pm 2| \Rightarrow h^2 = 5(2k-1)$

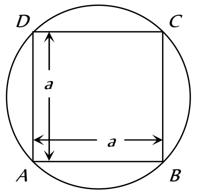
अतः बिन्दुपथ $x^2 = 5(2y-1)$ या $x^2 = 2y-5$ है, जो कि परवलय हैं।

Critical Thinking Questions

1. (b) चित्र के अनुसार $A(0, 0)$, $B(a,0)$ व $D(0,a)$ हैं एवं केन्द्र $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ है। अतः वृत्त का समीकरण

$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow x^2+y^2-ax-ay=0$ है।



2. (b) यहाँ $x = \frac{2at}{1+t^2}$ व $y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}$

वर्ग करके दोनों को जोड़ने पर, $x^2+y^2=a^2$ प्राप्त होता है।

3. (d) केन्द्र $(0, 0)$ तथा त्रिज्या $= 3a \times \frac{2}{3} = 2a$

अतः वृत्त $x^2+y^2=4a^2$, चूँकि केन्द्रक माध्यिका को $2:1$ में विभाजित करता है।

4. (a) यदि रेखा $3x+4y-1=0$, वृत्त $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$ को स्पर्श करती है तो केन्द्र से रेखा पर लम्ब की लम्बाई त्रिज्या के बराबर होगी, अर्थात् $\left|\frac{3+8-1}{5}\right| = r$ या $r=2$.

5. (b) माना $A=(a,0)$, $B=(-a,0)$, $P=(\alpha,\beta)$

$\therefore \frac{PA^2}{PB^2} = k^2 \Rightarrow (\alpha-a)^2+\beta^2 = k^2[(\alpha+a)^2+\beta^2]$

$\therefore$ बिन्दुपथ $(x^2+y^2)(1-k^2) - 2a(1+k^2)x + (1-k^2)a^2 = 0$ है, यह $k \ne 1$ के लिये वृत्त है।

6. (b) माना वृत्त पर बिन्दु $B(x_1, y_1)$ है एवं P बिन्दु A व B को $3:2$ में विभाजित करता है, अतः

$h = \frac{-2+3x_1}{5}, k = \frac{2+3y_1}{5}$ या $\frac{5h+2}{3} = x_1, \frac{5k-2}{3} = y_1$

चूँकि (x_1, y_1) वृत्त $x^2+y^2=4$ पर स्थित है। अतः $25(x^2+y^2)+20(x-y)-28=0$.

7. (a) माना $A(x_1,y_1)$ व $B(x_2,y_2)$,

तो $x_1+x_2=-2a$, $x_1x_2=-b^2$

$y_1+y_2=-2p$, $y_1y_2=-q^2$

अब केन्द्र व त्रिज्या प्राप्त करके वृत्त का समीकरण प्राप्त करते हैं।

8. (a) माना $x=a, x=b, y=c$ व $y=d$ किसी वर्ग की भुजाएँ हैं। वर्ग के विकर्ण की लम्बाई वृत्त के व्यास के बराबर है, अर्थात् $2\sqrt{1+4+93}$ माना वर्ग की भुजा l है, तो $2l$=(विकर्ण)

$\Rightarrow 2l^2 = (2.\sqrt{1+4+93})^2 \Rightarrow l=14$

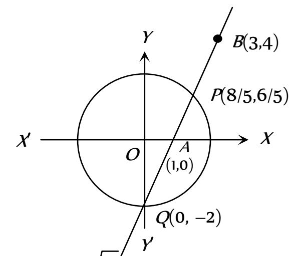
अतः वर्ग की प्रत्येक भुजा वृत्त के केन्द्र $(1, -2)$ से 7 इकाई की दूरी पर है। अतः $a=-6, b=8, c=-9, d=5$

इस प्रकार, वर्ग के शीर्ष $(-6,-9), (-6,5), (8,-9), (8,5)$ हैं।

9. (d) चूँकि $S(3, 2) = 9+4-25<0$ अतः बिन्दु $(3, 2)$ वृत्त के अन्दर स्थित है। अतः कोई स्पर्श जीवा नहीं होगी अर्थात् कोई त्रिभुज OAB सम्भव नहीं है।

10. (a) बिन्दुओं $A(1, 0)$ व $B(3, 4)$ को जोड़ने वाली रेखा का समीकरण $y=2x-2$ है। यह वृत्त $x^2+y^2=4$ को बिन्दु $Q(0,-2)$ व $P\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$ पर काटता है।

अतः $BQ = 3\sqrt{5}, QA = \sqrt{5}, BP = \frac{7}{\sqrt{5}}$ तथा $PA = \frac{3}{\sqrt{5}}$



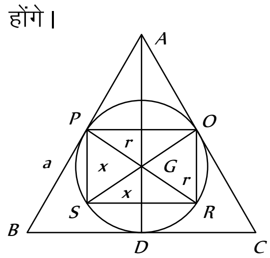
$\therefore \alpha = \frac{BP}{PA} = \frac{7/\sqrt{5}}{3/\sqrt{5}} = \frac{7}{3}$ व $\beta = \frac{BQ}{QA} = \frac{3\sqrt{5}}{-\sqrt{5}} = -3$

$\therefore \alpha, \beta$ समीकरण $x^2 - x(\alpha+\beta)+\alpha\beta=0$ के मूल हैं।

अर्थात् $x^2 - x\left(\frac{7}{3}-3\right)+\frac{7}{3}(-3)=0$

या $3x^2+2x-21=0$.

11. (c) यदि p ऊँचाई है, तो $p = a\sin 60^o = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. चूँकि त्रिभुज समबाहु है, अतः केन्द्रक, लम्बकेन्द्र परिकेन्द्र व अन्तःकेन्द्र सम्पाती होंगे।



अतः अन्तःवृत्त की त्रिज्या $r = \frac{1}{3}p = \frac{a}{2\sqrt{3}}$,

व्यास $= 2r = \frac{a}{\sqrt{3}}$

अब यदि x वर्ग की भुजा है, तो अर्द्धवृत्त का कोण 90° का होगा

अतः $x^2 + x^2 = d^2 = 4r^2 \Rightarrow 2x^2 = \frac{a^2}{3}$

$\therefore$ क्षेत्रफल $= x^2 = \frac{a^2}{6}$.

12. (b,c) माना मूल बिन्दु से गुजरने वाली रेखा $y = mx$ है, तो अन्तः खण्ड के लिये

$x^2 + y^2 - x + 3y = 0 \Rightarrow x^2 + m^2x^2 - x + 3mx = 0$

$\Rightarrow x[x(1+m^2) - (1-3m)] = 0$

$\therefore x = 0, x = \frac{1-3m}{1+m^2}$ व $y = 0, y = m\frac{1-3m}{1+m^2}$

$\therefore$ अन्तः खण्ड $= \sqrt{\left(\frac{1-3m}{1+m^2}\right)^2 + m^2\left(\frac{1-3m}{1+m^2}\right)^2}$

$= \frac{1-3m}{1+m^2}\sqrt{1+m^2} = \frac{1-3m}{\sqrt{1+m^2}}$

इसी प्रकार, रेखा $x + y = 1$ या $y = 1 - x$ के लिये,

$x^2 + (1-x)^2 - x + 3(1-x) = 0$

$\Rightarrow x^2 + x^2 - 2x + 1 - x + 3 - 3x = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$\therefore x = 1, 2$ और $y = 0, -1$

$\therefore$ अन्तः खण्ड $= \sqrt{(1-2)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{2}$

दिया है कि, $\sqrt{2} = \frac{1-3m}{\sqrt{1+m^2}}$

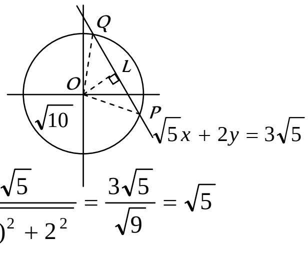
$\Rightarrow 2 + 2m^2 = 9m^2 - 6m + 1 \Rightarrow 7m^2 - 6m - 1 = 0$

$\Rightarrow (7m+1)(m-1) = 0 \Rightarrow m = 1, -\frac{1}{7}$

$\therefore$ अभीष्ट रेखायें $y = x, y = -\frac{1}{7}x$

या $x - y = 0, x + 7y = 0$ हैं।

13. (c) मूल बिन्दु से रेखा $x\sqrt{5} + 2y = 3\sqrt{5}$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई है,



$OL = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \sqrt{5}$

दिये हुए वृत्त की त्रिज्या $= \sqrt{10} = OQ = OP$

$PQ = 2QL = 2\sqrt{OQ^2 - OL^2} = 2\sqrt{10-5} = 2\sqrt{5}$

अतः ΔOPQ का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times PQ \times OL = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$.

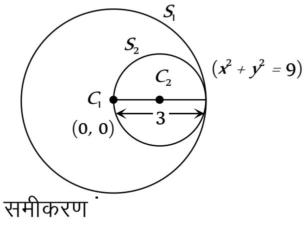
14. (b) यदि दो वृत्त स्पर्श करते हैं, तथा उनमें से एक वृत्त, दूसरे वृत्त के केन्द्र से गुजरता है, तो वे वृत्त अन्तःस्पर्श करेंगे।

$\therefore C_1C_2 = r_1 - r_2$

साथ ही, $C_1C_2 = r_2$

$\therefore r_2 = r_1 - r_2$

$\Rightarrow r_2 = \frac{r_1}{2} = \frac{3}{2}$



माना, दूसरे वृत्त S_2 का समीकरण

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ है।

$\therefore$ यह (0, 0), से गुजरता है अतः $c = 0$

यह वृत्त (1, 0) से भी गुजरता है,

$\therefore 2g + 1 = 0 \Rightarrow g = -\frac{1}{2}$

अतः $C_2\left(\frac{1}{2}, -f\right)$, अतः $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + f^2} = r_2$

$\Rightarrow \frac{1}{4} + f^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow f = \pm\sqrt{2}$

अतः अभीष्ट वृत्त का केन्द्र $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$ है।

15. (a) माना वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ है।

यदि $\left(m, \frac{1}{m}\right)$ इस वृत्त पर स्थित है, तो

$m^2 + \frac{1}{m^2} + 2gm + 2f\frac{1}{m} + c = 0$

या $m^4 + 2gm^3 + 2fm + cm^2 + 1 = 0$

यह m में चार घात का समीकरण है

अतः m_1, m_2, m_3, m_4 इसके मूल होंगे।

$\therefore m_1m_2m_3m_4 =$ मूलों का गुणनफल $= \frac{1}{1} = 1$.

16. (b) $\because$ अभिलम्ब वृत्त के केन्द्र से गुजरता है

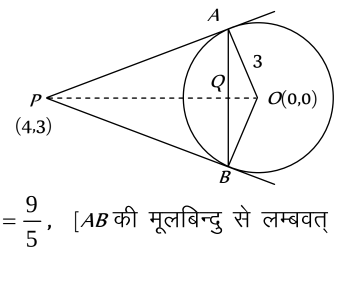
$\therefore$ अभीष्ट वृत्त वह वृत्त होगा, जिसके व्यास के सिरे (3, 4) तथा (– 1, – 2) हैं।

$\therefore$ अभीष्ट वृत्त का समीकरण है, $(x-3)(x+1)+(y-4)(y+2)=0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$ है।

17. (c) AB का समीकरण है, $4x + 3y = 9$ ....(i)

{$\because$ यह स्पर्श जीवा है}



$OQ = \frac{9}{5}$, [AB की मूलबिन्दु से लम्बवत् दूरी]

$AQ = \sqrt{OA^2 - OQ^2} = \sqrt{9 - \frac{81}{25}} = \frac{12}{5}$

$AB = 2AQ = \frac{24}{5}$

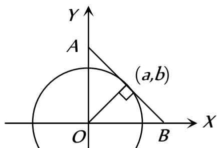
$PQ = \frac{16+9-9}{\sqrt{16+9}} = \frac{16}{5}$

अतः क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times \frac{24}{5} \times \frac{16}{5} = \frac{192}{25}$.

वैकल्पिक : अभीष्ट क्षेत्रफल $= \frac{a}{h^2+k^2}(h^2+k^2-a^2)^{3/2}$

$= \frac{3}{4^2+3^2}(4^2+3^2-9)^{3/2} = \frac{192}{25}$.

18. (a) स्पष्टतः, $r = \sqrt{a^2+b^2}$



AB का समीकरण है, $ax + by = r^2$ या $\frac{x}{r^2/a} + \frac{y}{r^2/b} = 1$

$\Rightarrow OA = \frac{r^2}{a}$ तथा $OB = \frac{r^2}{b}$

अतः क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{a} \cdot \frac{r^2}{b} = \frac{1}{2} \frac{r^4}{ab}$.

19. (b) स्पर्श रेखाओं की लम्बाईयाँ बराबर होगी, अर्थात्
$\sqrt{S_1} = \sqrt{S_2} = \sqrt{S_3}$

x व y के लिये समीकरणों को हल करने पर हमें वह बिन्दु प्राप्त होंगे जिससे स्पर्शी डाली गयी है।

अर्थात् $x^2 + y^2 = 1$,

$x^2 + y^2 + 8x + 15 = 0$ व $x^2 + y^2 + 10y + 24 = 0$

या $8x + 16 = 0$ तथा $10y + 25 = 0$

$\Rightarrow x = -2$ तथा $y = -\frac{5}{2}$

अतः अभीष्ट बिन्दु $\left(-2, -\frac{5}{2}\right)$ है।

20. (c) प्रत्येक स्पर्शी की लम्बाई

$L^2 = (4)^2 + (5)^2 - (4 \times 4) - (2 \times 5) - 11$

$L = 2$

$r = \sqrt{2^2 + 1^2 - (-11)}$

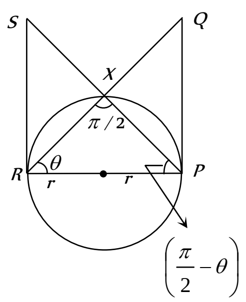
$r = 4$

क्षेत्रफल $= L \times r = 8$ वर्ग इकाई.

21. (a) $\tan\theta = \frac{PQ}{PR} = \frac{PQ}{2r}$

साथ ही, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{RS}{2r}$

अर्थात् $\cot\theta = \frac{RS}{2r}$



$\therefore \tan\theta . \cot\theta = \frac{PQ.RS}{4r^2}$

$\Rightarrow 4r^2 = PQ.RS$

$\Rightarrow 2r = \sqrt{(PQ)(RS)}$.

22. (d) माना बिन्दु P के निर्देशांक (h, k) हैं।

वृत्त $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9\sin^2\alpha + 13\cos^2\alpha = 0$

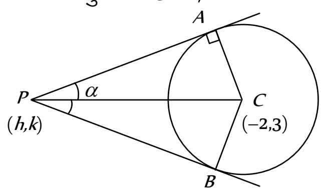
का केन्द्र $C(-2, 3)$ तथा

त्रिज्या $= \sqrt{2^2 + (-3)^2 - 9\sin^2\alpha - 13\cos^2\alpha}$

$= \sqrt{4 + 9 - 9\sin^2\alpha - 13\cos^2\alpha} = 2\sin\alpha$ होगी।

माना बिन्दु P से खींची गई स्पर्श रेखाएँ PA एवं PA हैं जिनके बीच का कोण 2α दिया गया है।

अतः समकोण त्रिभुज APC से,



$\sin\alpha = \frac{AC}{PC} = \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{(h+2)^2 + (k-3)^2}}$

$\Rightarrow \sqrt{(h+2)^2 + (k-3)^2} = 2 \Rightarrow (h+2)^2 + (k-3)^2 = 4$

अतः बिन्दुपथ का अभीष्ट समीकरण
$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ होगा।

23. (c) रेखा AB, $x + y = 0$ है, जो कि वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ का व्यास है। अतः इसकी लम्बाई $= 2r = 10$.

24. (b) $S_1 \equiv x^2 + y^2 = 2^2$,

$S_2 \equiv (x-3)^2 + (y-4)^2 = 7^2$

$\therefore$ केन्द्र $C_1 = (0, 0)$, $C_2 = (3, 4)$

तथा त्रिज्यायें $r_1 = 2, r_2 = 7$

$\therefore C_1C_2 = 5,\ r_2 - r_1 = 5$

अर्थात् वृत्त अन्तःस्पर्शी होंगे।

अतः केवल एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा होगी।

25. (a) माना वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ है। चूँकि यह $(2a, 0)$ से गुजरता है।

अतः $4a^2 + 4ag + c = 0$ .....(i)

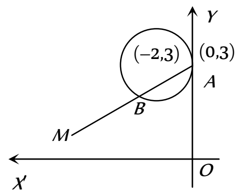
एवं इसके मूलाक्ष का समीकरण, वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के साथ

$2gx + 2fy + c + a \equiv x - \frac{a}{2} = 0$ है।

$\Rightarrow \frac{2g}{1} = \frac{c+a}{-a/2}$ तथा $f = 0$ और $ag + c + a = 0$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से, g व c के मान प्राप्त होते हैं। अतः इसका समीकरण $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ है।

26. (b) $\left(\frac{h}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{h}{2}\right) + \left(\frac{k+3}{2} - 3\right)^2 = 0$



$\Rightarrow \frac{h^2}{4} + \frac{8h}{4} + \frac{(k-3)^2}{4} = 0$

या $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$ जो कि एक वृत्त है।

27. (d) माना x-अक्ष पर कोई बिन्दु $(h, 0)$ है तो उस जीवा का समीकरण जिसका मध्य बिन्दु $(h, 0)$ है,

$xh - \frac{1}{2}p(x+h) - \frac{1}{2}q(y+0) = h^2 - ph$ होगा। यह (p, q) से होकर जाती है।

अतः $ph - \frac{1}{2}p(p+h) - \frac{1}{2}q.q = h^2 - ph$

$\Rightarrow ph - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}ph - \frac{1}{2}q^2 = h^2 - ph$

$\Rightarrow h^2 - \frac{3}{2}ph + \frac{1}{2}(p^2 + q^2) = 0$

h वास्तविक है, अतः $B^2 - 4AC > 0$

$\therefore \frac{9}{4}p^2 - 4.\frac{1}{2}(p^2 + q^2) > 0$

$\Rightarrow 9p^2 - 8(p^2 + q^2) > 0$

$\Rightarrow p^2 - 8q^2 > 0$

$\Rightarrow p^2 > 8q^2$.

28. (a) माना (x', y') जीवा का मध्य बिन्दु है।

अतः $xx' + yy' - (x + x') = x'^2 + y'^2 - 2x', (T = S')$

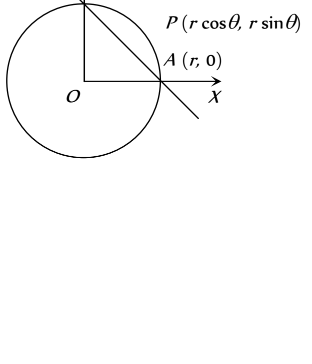
यह मूल बिन्दु से जाएगी यदि $-x' = x'^2 + y'^2 - 2x'$.

अतः बिन्दुपथ $x^2 + y^2 - x = 0$ है, जो कि वृत्त है।

29. (b) माना केन्द्रक $= (\alpha, \beta)$

तब, $\alpha = \frac{r + r\cos\theta}{3}, \quad \beta = \frac{r + r\sin\theta}{3}$

या $\left(\alpha - \frac{r}{3}\right)^2 + \left(\beta - \frac{r}{3}\right)^2 = \frac{r^2}{9}$



$\therefore$ अतः बिन्दुपथ $\left(x - \frac{r}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{r}{3}\right)^2 = \left(\frac{r}{3}\right)^2$ है, जो कि एक वृत्त है।

30. (a) माना वृत्त C_2 के केन्द्र का निर्देशांक (h, k) है, तब इसका समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = 5^2$ है। वृत्त C_1 का समीकरण $x^2 + y^2 = 4^2$ है। अतः वृत्तों C_1 व C_2 की उभयनिष्ठ जीवा का समीकरण है,

$2hx + 2ky = h^2 + k^2 - 9$ ....(i)

माना C_1 के केन्द्र (0, 0) से (i) पर डाले गये लम्ब की लम्बाई p है, तो $p = \frac{h^2 + k^2 - 9}{\sqrt{4h^2 + 4k^2}}$

उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई $2\sqrt{4^2 - p^2}$ जो कि अधिकतम होगी यदि $p = 0 \Rightarrow h^2 + k^2 - 9 = 0$ ....(ii)

(i) की प्रवणता $\frac{3}{4}$ दी गयी है,

$\therefore -\frac{h}{k} = \frac{3}{4} \Rightarrow k = -\frac{4h}{3}$ ....(iii)

(ii) में k का मान रखने पर,

$h = \pm\frac{9}{5} \Rightarrow k = \mp\frac{12}{5}$, [(iii) से]

अतः वृत्त C_2 के केन्द्र $\left(\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}\right)$ व $\left(-\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ हैं।

31. (a) $x^2 + y^2 - 2x = 0$ तथा $y = x$ को हल करने पर प्रतिच्छेद बिन्दु A (0,0) तथा B (1,1) प्राप्त होते हैं।

अतः AB को व्यास मानकर खींचे गये वृत्त का समीकरण

$x^2 + y^2 - 2x + \lambda(y - x) = 0$

या $x^2 + y^2 - (2+\lambda)x + \lambda y = 0$ है।

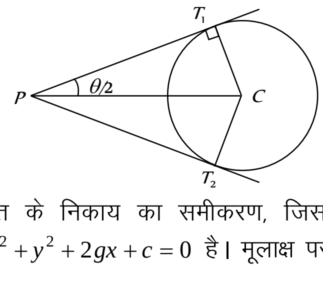
इसका केन्द्र $\left(\frac{2+\lambda}{2}, \frac{-\lambda}{2}\right)$ है। AB को वृत्त का व्यास होने के लिये, केन्द्र AB पर होना चाहिये अर्थात् $\frac{2+\lambda}{2} = \frac{-\lambda}{2}$

$\Rightarrow \lambda = -1$

अतः वृत्त का अभीष्ट समीकरण $x^2 + y^2 - 2x - y + x = 0$

या $x^2 + y^2 - x - y = 0$ है।

32. (b) $\cot\frac{\theta}{2} = \frac{PT_1}{CT_1} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{g^2 + f^2 - c}}$



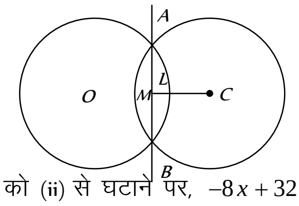
33. (a) वृत्त के निकाय का समीकरण, जिसका केन्द्र x-अक्ष पर है, $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$ है। मूलाक्ष पर कोई बिन्दु $(0, y_1)$ है।

$x = 0$ रखने पर $y = \pm\sqrt{-c}$ यदि c ऋणात्मक $(c < 0)$ है, हमें मूलाक्ष पर दो वास्तविक बिन्दु प्राप्त होते हैं तब वृत्तों को प्रतिच्छेदी वृत्त कहते हैं।

34. (d) माना वृत्तों $x^2 + y^2 = 25$ ....(i)

$x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$ ....(ii)

की प्रतिच्छेदी रेखा AB है। A व B के निर्देशांक वृत्तों के समीकरण (i) व (ii) को हल करने पर प्राप्त होते हैं।



(i) को (ii) से घटाने पर, $-8x + 32 = 0$ या $x = 4$

अतः (i) से, $16 + y^2 = 25$; $\therefore y^2 = 9$ या $y = \pm 3$

इस प्रकार A व B के निर्देशांक (4, 3) व (4, –3) प्राप्त होते हैं।

अतः रेखा L का समीकरण $\frac{y-3}{3+3} = \frac{x-4}{4-4}$ या $x - 4 = 0$

एवं दूसरे वृत्त का केन्द्र $C(4, 0)$ है।

अतः CM = C से रेखा L पर लम्बवत् लम्बाई $= \frac{4-4}{\sqrt{1}} = 0$

अतः C व M एक ही बिन्दु हैं।

35. (b) माना वृत्त का चर समीकरण है,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ......(i)

वृत्त (i), वृत्त $x^2 + y^2 - 4 = 0$ को लम्बकोणीय प्रतिच्छेद करता है। $\Rightarrow 2g.0 + 2f.0 = c - 4 \Rightarrow c = 4$

$\because$ वृत्त (i), (a, b) से गुजरता है

$\therefore a^2 + b^2 + 2ga + 2fb + 4 = 0$

$\therefore$ केन्द्र $(-g, -f)$ का बिन्दुपथ

$2ax + 2by - (a^2 + b^2 + 4) = 0$ है।

36. (c) यदि कोई भी स्पर्शी $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ है। यदि यह $P(h,k)$ से जाती है, तब $(k - mh)^2 = a^2(1+m^2)$

या $m^2(h^2 - a^2) - 2mhk + (k^2 - a^2) = 0$

यहाँ $m = \tan\theta$; $\cot\theta_1 + \cot\theta_2 = c$

$\Rightarrow \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = c \Rightarrow \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = c$

$\Rightarrow \frac{2hk}{(k^2 - a^2)} = c \Rightarrow c(y^2 - a^2) = 2xy$.

37. (b) P व Q से जाने वाले वृत्त का समीकरण है,

$x^2 + y^2 + ax + by + c + \lambda(Ax + By + C) = 0$ .....(i)

R व S से जाने वाले वृत्त का समीकरण है,

$x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' + \mu(A'x + B'y + C') = 0$ .....(ii)

चूँकि P, Q, R व S एक ही वृत्त पर हैं अतः (i) व (ii) एक ही वृत्त को प्रदर्शित करते हैं।

$\therefore a + \lambda A = a' + \mu A'$

$b + \lambda B = b' + \mu B'$

$c + \lambda C = c' + \mu C'$

$\Rightarrow (a - a') + \lambda A - \mu A' = 0$

$(b - b') + \lambda B - \mu B' = 0$

$(c - c') + \lambda C - \mu C' = 0$

λ व μ को विलोपित करने पर,

$$\begin{vmatrix} a-a' & A & A' \\ b-b' & B & B' \\ c-c' & C & C' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a-a' & b-b' & c-c' \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 0 .$$

38. (d) दिये गये अभिलम्ब $x - 3y = 0, x - 3 = 0$ हैं जो बिन्दु (3, 1) पर प्रतिच्छेद करते हैं। यहाँ $C_1 \equiv (3, -3)$; $r_1 = 1$, $C_2 \equiv (3, 1)$ व $r_2 = (?)$

यदि दोनों वृत्त बाह्यतः स्पर्श करते हैं तो

$C_1C_2 = r_1 + r_2 \Rightarrow 4 = 1 + r_2 \Rightarrow r_2 = 3$

$\therefore (x-3)^2 + (y-1)^2 = 3^2$ या $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$.

39. (b) प्रतिबंधानुसार, $\sqrt{(h-0)^2 + (k-1)^2} = 1 + |k|$

$\Rightarrow h^2 + (k-1)^2 = (1 + |k|)^2$

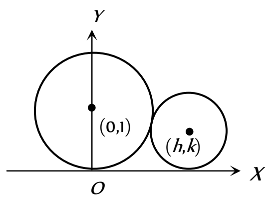
$\Rightarrow h^2 = 2k + 2|k|$

$\therefore$ अभीष्ट बिन्दुपथ है,

$x^2 = 2y + 2|y|$

$y > 0,\ x^2 = 4y$

$y < 0,\ x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.



40. (b) प्रथम वृत्त दोनों निर्देशांकों को स्पर्श करता है तथा इसकी त्रिज्या 2 इकाई है, अतः वृत्त का केन्द्र (2, 2) है।

माना दूसरे वृत्त की त्रिज्या a है और यह वृत्त भी दोनों निर्देशांकों को स्पर्श करता है। अतः इसका केन्द्र (a, a) होगा।

यह वृत्त, प्रथम वृत्त को स्पर्श करता है

अतः $\sqrt{(a-2)^2 + (a-2)^2} = a + 2$

दोनों तरफ वर्ग करने पर, $a^2 - 12a + 4 = 0$

$a = \frac{12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \times 4 \times 1}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{128}}{2} = 6 \pm 4\sqrt{2}$

किन्तु $a > 2$ अतः $a = 6 - 4\sqrt{2}$ की उपेक्षा करने पर, $a = 6 + 4\sqrt{2}$.

वृत्त तथा वृत्तों का निकाय

SET Self Evaluation Test - 17

1. रेखा $(x-2)+(y+3)=0$ वृत्त $(x-2)^2+(y-3)^2=11$ को काटती है [MNR 1975]
   (a) किसी भी बिन्दु पर नहीं (b) एक बिन्दु पर
   (c) दो बिन्दुओं पर (d) इनमें से कोई नहीं

2. एक वृत्त दूसरे चतुर्थांश में स्थित है तथा दोनों अक्षों को स्पर्श करता है। यदि वृत्त की त्रिज्या 4 हो, तो उसका समीकरण है
   (a) $x^2+y^2+8x+8y+16=0$
   (b) $x^2+y^2+8x-8y+16=0$
   (c) $x^2+y^2-8x+8y+16=0$
   (d) $x^2+y^2-8x-8y+16=0$

3. उस वृत्त जिसका केन्द्र (3, –1) है तथा जो रेखा $2x-5y+18=0$ से 6 लम्बाई की जीवा काटता है, का समीकरण है [Roorkee 1977]
   (a) $(x-3)^2+(y+1)^2=38$ (b) $(x+3)^2+(y-1)^2=38$
   (c) $(x-3)^2+(y+1)^2=\sqrt{38}$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. एक वृत्त का समीकरण $x^2+y^2+2x+4y+1=0$ है, तो इसके केन्द्र के निर्देशांक एवं त्रिज्या है
   (a) केन्द्र (–1, –2), त्रिज्या = 2
   (b) केन्द्र (2, 1), त्रिज्या = 1
   (c) केन्द्र (1, 2), त्रिज्या = 3
   (d) केन्द्र (–1, 2), त्रिज्या = 2

5. यदि बिन्दु (2, 0), (0, 1), (4, 5) व (0, c) चक्रीय हों, तो c का मान है [MNR 1982]
   (a) $-1,-\frac{3}{14}$ (b) $-1,-\frac{14}{3}$
   (c) $\frac{14}{3},1$ (d) इनमें से कोई नहीं

6. बिन्दु $P(10,7)$ वृत्त $x^2+y^2-4x-2y-20=0$ के बाहर स्थित है तो P की वृत्त से अधिकतम दूरी है
   (a) 5 (b) $\sqrt{3}$
   (c) $\sqrt{5}$ (d) 15

7. किसी वृत्त का व्यास AB है एवं C कोई अन्य बिन्दु वृत्त पर स्थित है, तो ΔABC का क्षेत्रफल होगा
   (a) अधिकतम, यदि त्रिभुज समद्विबाहु है
   (b) न्यूनतम, यदि त्रिभुज समद्विबाहु है
   (c) अधिकतम, यदि त्रिभुज समबाहु है
   (d) इनमें से कोई नहीं

8. यदि एक अचर त्रिज्या $3k$ का वृत्त मूल बिन्दु से गुजरता है एवं अक्षों को A व B पर मिलता है, तो त्रिभुज OAB के केन्द्रक का बिन्दुपथ है
   (a) $x^2+y^2=k^2$ (b) $x^2+y^2+k^2=0$
   (c) $x^2+y^2+4k^2=0$ (d) $x^2+y^2=4k^2$

9. वृत्त $x^2+y^2+16x-24y+183=0$ का दर्पण रेखा $4x+7y+13=0$ से प्रतिबिम्ब है
   (a) $x^2+y^2+32x-4y+235=0$
   (b) $x^2+y^2+32x+4y-235=0$
   (c) $x^2+y^2+32x-4y-235=0$
   (d) $x^2+y^2+32x+4y+235=0$

10. एक बिन्दु इस प्रकार गति करता है कि इसकी एक इकाई लम्बाई भुजा वाले वर्ग की भुजाओं से दूरियों के वर्गों का योग 9 रहता है, तो इस बिन्दु का बिन्दुपथ होगा
    (a) सरल रेखा (b) वृत्त
    (c) परवलय (d) इनमें से कोई नहीं [MP PET 1982]

11. वृत्तों के समुच्चय, जिसमें प्रत्येक की त्रिज्या 3 है, के केन्द्र वृत्त $x^2+y^2=25$ पर स्थित हैं। इस समुच्चय के किसी बिन्दु का बिन्दुपथ है [AIEEE 2002]
    (a) $4\le x^2+y^2\le 64$
    (b) $x^2+y^2\le 25$
    (c) $x^2+y^2\ge 25$
    (d) $3\le x^2+y^2\le 9$

12. एक चर वृत्त स्थिर बिन्दु $A(p,q)$ से गुजरता है व x-अक्ष को स्पर्श करता है। A से जाने वाले व्यास के दूसरे सिरे का बिन्दुपथ है [AIEEE 2004]
    (a) $(y-q)^2=4px$ (b) $(x-q)^2=4py$
    (c) $(y-p)^2=4qx$ (d) $(x-p)^2=4qy$

13. यदि बिन्दु (1,2) से वृत्तों $x^2+y^2+x+y-4=0$ तथा $3x^2+3y^2-x-y+k=0$ पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयों का अनुपात 4 : 3 हो, तो $k=$
    (a) 7/2 (b) 21/ 2
    (c) – 21/ 4 (d) 7/ 4

14. दो स्पर्श रेखायें PQ व PR वृत्त $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ पर बिन्दु $P(16,7)$ से डाली गयी है, यदि वृत्त का केन्द्र C हो, तो आकृति $PQCR$ का क्षेत्रफल है

(a) 75 वर्ग इकाई (b) 150 वर्ग इकाई

(c) 15 वर्ग इकाई (d) इनमें से कोई नहीं

15. वृत्त $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$ के उन बिन्दुओं पर जिनके प्राचलिक कोणों का अन्तर $\pi/2$ है, खींची गयी स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दुओं का बिन्दुपथ होगा

(a) सरल रेखा (b) वृत्त

(c) दीर्घवृत्त (d) इनमें से कोई नहीं

16. एक बिन्दु P से दो वृत्तों के मूलाक्षों पर स्पर्शियाँ खींची जाती हैं, जो वृत्तों को क्रमशः Q तथा R पर स्पर्श करती हैं, तब PQR को मिलाने पर बनने वाला त्रिभुज होगा

(a) समद्विबाहु (b) समबाहु

(c) समकोण (d) इनमें से कोई नहीं

17. यदि सरल रेखा $ax+by=2; a,b\neq 0$ वृत्त $x^2+y^2-2x=3$ को स्पर्श करती है तथा वृत्त $x^2+y^2-4y=6$ पर अभिलम्ब है, तब a तथा b के मान क्रमशः हैं

(a) 1, –1 (b) 1, 2

(c) $-\frac{4}{3},1$ (d) 2, 1

18. यदि वृत्त $x^2+y^2+6x+6y=2$ के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा, सरल रेखा $5x-2y+6=0$ को y- अक्ष पर बिन्दु Q पर मिलती है, तो PQ की लम्बाई है

(a) 4 (b) $2\sqrt{5}$

(c) 5 (d) $3\sqrt{5}$

19. यदि रेखा $y=2x$ वृत्त $x^2+y^2-10x=0$ की एक जीवा हो तो इस जीवा को व्यास मानकर खींचे गये वृत्त का समीकरण होगा

[RPET 1988]

(a) $x^2+y^2-2x+4y=0$ (b) $x^2+y^2+2x+4y=0$

(c) $x^2+y^2+2x-4y=0$ (d) $x^2+y^2-2x-4y=0$

20. वृत्त $x^2+y^2=a^2$ की जीवा $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ को व्यास मानकर खींचे गये वृत्त का समीकरण है

[Roorkee 1967; MP PET 1993]

(a) $x^2+y^2-a^2-2p(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p)=0$

(b) $x^2+y^2+a^2+2p(x\cos\alpha-y\sin\alpha+p)=0$

(c) $x^2+y^2-a^2+2p(x\cos\alpha+y\sin\alpha+p)=0$

(d) $x^2+y^2-a^2-2p(x\cos\alpha-y\sin\alpha-p)=0$

21. वृत्त $x^2+y^2-2ax=0$ पर मूल बिन्दु से एक गतिशील जीवा खींची गयी है। इस जीवा को व्यास मानकर खींचे गये वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ है

[IIT 1981; MP PET 1994]

(a) $x^2+y^2+ax=0$ (b) $x^2+y^2+ay=0$

(c) $x^2+y^2-ax=0$ (d) $x^2+y^2-ay=0$

22. वृत्त $x^2+y^2-10x+16=0$ और $x^2+y^2=r^2$ एक दूसरे को दो अलग–अलग बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करेंगे यदि

[IIT Screening 1994; UPSEAT 2004]

(a) $r<2$ (b) $r>8$

(c) $2<r<8$ (d) $2\le r\le 8$

23. उस वृत्त का समीकरण जो वृत्तों $x^2+y^2-6x+8=0$ व $x^2+y^2=6$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं तथा बिन्दु (1, 1) से जाता है, है

[RPET 1988; IIT 1980; MP PET 2002]

[UPSEAT 2002]

(a) $x^2+y^2-6x+4=0$ (b) $x^2+y^2-3x+1=0$

(c) $x^2+y^2-4y+2=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

24. वृत्तों $x^2+y^2-x+y-8=0$ व $x^2+y^2+2x+2y-11=0$, के बीच का कोण है

[Roorkee 2000]

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{19}{9}\right)$ (b) $\tan^{-1}(19)$

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{9}{19}\right)$ (d) $\tan^{-1}(9)$

25. यदि तीन वृत्तों $x^2+y^2-2\lambda_i x=c^2, (i=1,2,3)$ के केन्द्रों की मूलबिन्दु से दूरियाँ गुणोत्तर श्रेणी में हों, तब वृत्त $x^2+y^2=c^2$ पर किसी बिन्दु से उन पर खींची गयीं स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ होंगी

[IIT Screening 2002]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में

(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

26. वृत्तों $x^2+y^2-3x-4y+5=0$ तथा $3x^2+3y^2-7x+8y+11=0$ के मूलाक्ष की प्रवणता है

[MP PET 2000]

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{1}{10}$

(c) $-\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{2}{3}$

27. यदि वृत्त $x^2+y^2+2x+2ky+6=0$ तथा $x^2+y^2+2ky+k=0$ परस्पर समकोण पर काटते हैं, तो k का मान है [IIT Screening 2000; DCE 2005]

(a) 2 या $-\frac{3}{2}$ (b) –2 या $\frac{3}{2}$

(c) 2 या $\frac{3}{2}$ (d) -2 या $-\frac{3}{2}$

28. तीन वृत्तों के समीकरण $x^2+y^2-12x-16y+64=0$, $3x^2+3y^2-36x+81=0$ तथा $x^2+y^2-16x+81=0$ हैं,

तब उस बिन्दु के निर्देशांक, जिससे तीनों वृत्तों पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाई बराबर हो, हैं

(a) (33/4, 2) (b) (2, 2)

(c) (2, 33/4) (d) इनमें से कोई नहीं

29. तीन वृत्तों $x^2+y^2-4x-2y+6=0$, $x^2+y^2-4x-2y+6y=0$, $x^2+y^2-12x+2y+30=0$ के मूल केन्द्र के निर्देशांक हैं

(a) (6, 30) (b) (0, 6)

(c) (3, 0) (d) इनमें से कोई नहीं

30. यदि वृत्त $x^2+y^2=r_1^2$ के बिन्दु से वृत्त $x^2+y^2=r_2^2$ पर खींची गयी स्पर्शी की स्पर्श जीवा, वृत्त $x^2+y^2=r_3^2$ को स्पर्श करती है तब r_1, r_2, r_3 हैं

[RPET 2002]

[MP PET 1999; RPET 1999, Orissa JEE 2004]

(a) स.श्रे. में (b) ह.श्रे. में

(c) गु.श्रे. में (d) स.गु.श्रे. में

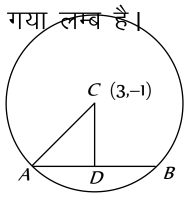
Answers and Solutions

(SET - 17)

1. (a) रेखा का समीकरण $x+y+1=0$ है। चूँकि केन्द्र से रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई, त्रिज्या से अधिक होगी, अतः यह किसी भी बिन्दु पर नहीं काटेगा।

2. (b) द्वितीय चतुर्थांश में केन्द्र (–4,4) अतः अभीष्ट समीकरण है, $(x+4)^2+(y-4)^2=4^2 \Rightarrow x^2+y^2+8x-8y+16=0$

3. (a) माना $AB(=6)$ रेखा $2x-5y+18=0$ द्वारा वृत्त पर अन्तः खण्डित जीवा है एवं *CD* केन्द्र (3, –1) से जीवा *AB* पर डाला गया लम्ब है।



अर्थात् $AD=3, CD=\dfrac{2.3-5(-1)+18}{\sqrt{2^2+5^2}}=\sqrt{29}$

अतः $CA^2=3^2+(\sqrt{29})^2=38$

अतः अभीष्ट समीकरण $(x-3)^2+(y+1)^2=38$ है।

4. (a) केन्द्र $(-1,-2)$, त्रिज्या $(\sqrt{1^2+2^2-1})=2$ है।

5. (c) व्यास के सिरों (2,0),(0,1) वाला वृत्त $(x-2)x+(y-1)y=0$ है एवं इससे जाने वाली रेखा $y-0=\left(\dfrac{-1}{2}\right)(x-2)$ या $2y+x-2=0$ है।

इन दो बिन्दुओं से जाने वाले वृत्तों का निकाय $x(x-2)+y(y-1)+\lambda(2y+x-2)=0$ है।

यह (4, 5) से गुजरती है अर्थात्

$4(2)+5(4)+\lambda(10+4-2)=0 \Rightarrow \lambda=\dfrac{-7}{3}$

अतः वृत्त का समीकरण

$x(x-1)+y(y-1)-\dfrac{7}{3}(2y+x-2)=0$ है।

यह (0, *c*) से गुजरता है, अतः $c(c-1)-\dfrac{7}{3}(2c-2)=0$

$\Rightarrow 3c^2-17c+14=0$ और $c=\dfrac{14}{3}$ तथा 1.

6. (d) $r=\sqrt{4+1+20}=5$

$C\equiv(2,1)$

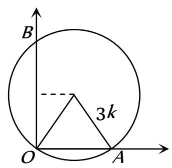
$\therefore CP=\sqrt{(10-2)^2+(7-1)^2}=10$

$\therefore$ अधिकतम दूरी $=10+5=15$.

7. (a) चूँकि त्रिभुज में आधार नियत है तथा ऊँचाई परिवर्तित होती है तथा समद्विबाहु त्रिभुज की ऊँचाई अधिकतम होती है।

8. (d) वृत्त का समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy=0$ है।

त्रिज्या $=3k=\sqrt{g^2+f^2}$



$\therefore$ अन्तः खण्डों की लम्बाईयाँ $2\sqrt{g^2}$ व $2\sqrt{f^2}$ हैं

$\therefore$ *A* $(2g,0), B(0,2f)$ व त्रिभुज का केन्द्रक $\left(\dfrac{2g}{3},\dfrac{2f}{3}\right)$ है एवं इसका बिन्दुपथ हैं, $\left(\dfrac{9}{4}\right)(x^2+y^2)=9k^2$

$\Rightarrow x^2+y^2=4k^2$.

9. (d) अभीष्ट वृत्त का केन्द्र, बिन्दु $(-8,12)$ का दर्पण रेखा $4x+7y+13=0$ के सापेक्ष प्रतिबिम्ब होगा एवं त्रिज्या

दिये गये वृत्त की त्रिज्या के बराबर होगी। माना बिन्दु $(-8, 12)$ का प्रतिबिम्ब (h, k) है, तो बिन्दु $C(-8, 12)$ व $P(h, k)$ को जोड़ने वाली रेखा का मध्य बिन्दु दर्पण रेखा पर स्थित होगा।

$\therefore 4\left(\frac{h-8}{2}\right)+7\left(\frac{k+12}{2}\right)+13=0$

या $4h+7k+78=0$ ....(i)

एवं CP, $4x+7y+13=0$ पर लम्ब है

$\therefore \frac{k-12}{h+8}\times -\frac{4}{7}=-1$ या $7h-4k+104=0$ ....(ii)

(i) व (ii) को हल करने पर, $h=-16, k=-2$

अतः प्रतिबिम्ब वृत्त का केन्द्र $(-16, -2)$ होगा तथा इसकी त्रिज्या, वृत्त $x^2+y^2+16x-24y+183=0$ की त्रिज्या के बराबर अर्थात् 5 होगी।

अतः अभीष्ट वृत्त का समीकरण $(x+16)^2+(y+2)^2=5^2$ अर्थात् $x^2+y^2+32x+4y+235=0$ होगा।

10. (b) $x^2+(x-1)^2+y^2+(y-1)^2=9$.

11. (a) माना समुच्चय में कोई बिन्दु (h, k) है, तब वृत्त का समीकरण $(x-h)^2+(y-k)^2=9$ होगा। किन्तु बिन्दु (h, k) वृत्त $x^2+y^2=25$ पर स्थित है, तब $h^2+k^2=25$

$\therefore 2\le$ दो वृत्तों के मध्य दूरी ≤ 8

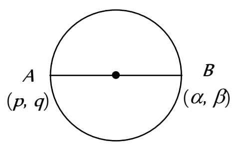
$2\le\sqrt{h^2+k^2}\le 8$

$\Rightarrow 4\le(h^2+k^2)\le 64.$

$\therefore (h, k)$ का बिन्दुपथ $4\le(x^2+y^2)\le 64$ है।

12. (d) वृत्त का समीकरण, जिसका व्यास AB है,

$(x-p)(x-\alpha)+(y-q)(y-\beta)=0$



या $x^2+y^2-(p+\alpha)x-(q+\beta)y+p\alpha+q\beta=0$ ......(i)

$y=0$ रखने पर, $x^2-(p+\alpha)x+p\alpha+q\beta=0$ ....(ii)

चूँकि वृत्त (i), y-अक्ष को स्पर्श करता है

$\therefore$ समीकरण (ii) का विविक्तकर = 0

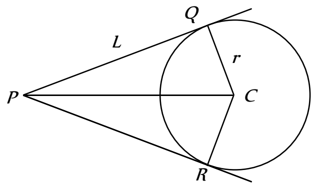
$\Rightarrow (p+\alpha)^2=4(p\alpha+q\beta)\Rightarrow(p-\alpha)^2=4q\beta$

अतः $B(\alpha, \beta)$ का बिन्दुपथ $(p-x)^2=4qy$ या $(x-p)^2=4qy$ है।

13. (c) दिया गया है $\frac{T_1}{T_2}=\frac{4}{3}$, जहाँ T_1 व T_2 स्पर्श रेखाओं की लम्बाईयाँ हैं जो दिये गये वृत्त पर डाली गयी हैं

$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+4+1+2-4}}{\sqrt{(1)^2+(2)^2-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+\frac{k}{3}}}=\frac{4}{3}\Rightarrow k=-\frac{21}{4}$.

14. (a) क्षेत्रफल $PQCR=2.\Delta PQC=2\times\frac{1}{2}L\times r$



जहाँ L = स्पर्शी की लम्बाई व r = वृत्त की त्रिज्या

$L=\sqrt{S_1}$ व $r=\sqrt{1+4+20}=5$

$\because$ अभीष्ट क्षेत्रफल = 75 वर्ग इकाई.

15. (b) θ व $\frac{\pi}{2}+\theta$ पर स्पर्शियाँ क्रमशः $x\cos\theta+y\sin\theta=a$ व $x\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+y\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=a$ हैं।

या $x\cos\theta+y\sin\theta=a$ या $-x\sin\theta+y\cos\theta=a$ है।

वर्ग करके जोड़ने पर, $x^2+y^2=2a^2$.

16. (a) त्रिभुज समद्विबाहु है।

17. (c) $x^2+y^2-2x=3$ का केन्द्र (1, 0) तथा त्रिज्या 2 है तथा $x^2+y^2-4y=6$ का केन्द्र (0, 2) तथा त्रिज्या $\sqrt{10}$ है।

$\because$ रेखा $ax+by=2$, प्रथम वृत्त को स्पर्श करती है

$\therefore \frac{a(1)+b(0)-2}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$ या $(a-2)=[2\sqrt{a^2+b^2}]$ .....(i)

साथ ही, चूँकि दी गई रेखा, द्वितीय वृत्त पर अभिलम्ब हैं। अतः यह रेखा द्वितीय वृत्त के केन्द्र से होकर जायेगी।

$\therefore a(0)+b(2)=2$ या $2b=2$ या $b=1$

यह मान समीकरण (i) में रखने पर,

$a-2=2\sqrt{a^2+1^2}\Rightarrow(a-2)^2=4(a^2+1)$

$\Rightarrow a^2+4-4a=4a^2+4 \Rightarrow 3a^2+4a=0$

$\Rightarrow a(3a+4)=0 \Rightarrow a=0, -\frac{4}{3}$

अतः a तथा b के मान क्रमशः $\left(-\frac{4}{3}, 1\right)$ हैं, (दिये गये विकल्प के अनुसार)।

18. (c) माना $P=(x_1, y_1)$ है, तब P पर स्पर्शी का समीकरण है,

$xx_1+yy_1+3(x+x_1)+3(y+y_1)-2=0$ .....(i)

Q के निर्देशांक (i) को संतुष्ट करते हैं,

$\Rightarrow 5x-2y+6=0, x=0.$

$\therefore 3x_1+6y_1+7=0$ तथा $Q=(0,3)$

$\therefore \quad PQ^2 = x_1^2+(y_1-3)^2 = x_1^2+y_1^2-6y_1+9$

$=11-6x_1-12y_1$, $(\because x_1^2+y_1^2+6x_1+6y_1-2=0)$

$=11-2(3x_1+6y_1)=11-2(-7)=25 \quad \therefore PQ=5.$

19. (d) वृत्त व जीवा के प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाले वृत्तों का निकाय $x^2+y^2-10x+\lambda(y-2x)=0$ है।

इसका केन्द्र $\left((5+\lambda), -\frac{\lambda}{2}\right)$ है।

यह $y-2x=0$ पर स्थित है,

$\therefore -\frac{\lambda}{2}-10-2\lambda=0 \Rightarrow -5\lambda=20 \Rightarrow \lambda=-4$

अतः अभीष्ट वृत्त $x^2+y^2-2x-4y=0$ है।

ट्रिक : चूँकि रेखा $y=2x$ मूलबिन्दु एवं प्रथम व तृतीय चतुर्थांश से होकर गुजरती है। दिये गये वृत्त का केन्द्र धनात्मक x-अक्ष पर है। स्पष्टतः अभीष्ट वृत्त का केन्द्र प्रथम चतुर्थांश में होगा एवं रेखा $y=2x$ को सन्तुष्ट करेगा जो कि वृत्त $x^2+y^2-2x-4y=0$ द्वारा सन्तुष्ट है।

20. (a) वृत्त तथा रेखा के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से होकर जाने वाले वृत्त निकाय का संयुक्त समीकरण ज्ञात करते हैं तथा वृत्त की त्रिज्या के प्रतिबन्ध का उपयोग करते हैं।

21. (c) माना जीवा का मध्य बिन्दु (h, k) है तो इसका समीकरण $T=S_1$ होगा

$\Rightarrow hx+ky-a(x+h)=h^2+k^2-2ah$

यह मूल बिन्दु से जाएगा अतः $hx+ky-ax=0$

अतः मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ $x^2+y^2-ax=0$ है।

22. (c) यदि दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी d तथा त्रिज्या r_1 तथा r_2 हों, तो यह दो अलग–अलग बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करेंगे, यदि $|r_1-r_2|<d<(r_1+r_2)$

यहाँ $r_1=\sqrt{25-16}=3$; $r_2=r$

$\Rightarrow |3-r|<5<|3+r| \Rightarrow 2<r<8$.

23. (b) अभीष्ट समीकरण $x^2+y^2-6x+8+\lambda(x^2+y^2-6)=0$ है। अब स्वयं करें।

24. (c) $\cos\theta=\frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2}$, ($d$ केन्द्रों के बीच की दूरी है)

$r_1=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+8}=\sqrt{\frac{17}{2}}$

$r_2=\sqrt{1+1+11}=\sqrt{13}$

$d=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\therefore \cos\theta=\frac{19}{\sqrt{442}}$

$\Rightarrow \tan\theta=\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta} \Rightarrow \tan\theta=\frac{9}{19}$

$\Rightarrow \theta=\tan^{-1}\left(\frac{9}{19}\right)$.

25. (b) स्पष्टतः $\lambda_2^2=\lambda_1\lambda_3$ अब माना वृत्त $x^2+y^2=c^2$ पर कोई बिन्दु $(-c, 0)$ है, अतः वृत्तों $x^2+y^2-2\lambda_i x-c^2=0$ पर $(-c,0)$ से खींची स्पर्शियों की लम्बाईयाँ $2\lambda_1 c$, $2\lambda_2 c$ व $2\lambda_3 c$ हैं जो कि गु. श्रे. में हैं।

26. (b) मूलाक्ष का समीकरण है, $S_1-S_2=0$

$S_1 \equiv x^2+y^2-3x-4y+5=0$

$S_2 \equiv x^2+y^2-\frac{7}{3}x+\frac{8y}{3}+\frac{11}{3}=0$

अतः मूलाक्ष का समीकरण $-2x-20y-4=0$ है।

$\therefore$ मूलाक्ष की प्रवणता $=-\frac{1}{10}$.

27. (a) $2gg'+2ff'=c+c' \Rightarrow 2.1.0+2.k.k.=6+k$

या $2k^2-k-6=0 \Rightarrow (2k+3)(k-2)=0$

$\therefore k=2, -\frac{3}{2}$.

28. (d) अभीष्ट बिन्दु, दिये गये तीनों वृत्तों का मूल केन्द्र है।

$\therefore S_1-S_2=0 \Rightarrow -16y+37=0$

$S_2-S_3=0 \Rightarrow 4x-54=0$

$S_3-S_1=0 \Rightarrow -4x+16y+17=0$

इन समीकरणों को हल करने पर,

$x=\frac{54}{4}, y=\frac{37}{16} \Rightarrow x=\frac{27}{2}, y=\frac{37}{16}$

$\therefore$ अभीष्ट बिन्दु $\left(\frac{27}{2}, \frac{37}{16}\right)$ हैं।

29. (d) प्रथम दो वृत्तों का मूलाक्ष है,

$6y-6=0$ अर्थात् $y=1$ ....(i)

अन्तिम दो वृत्तों का मूलाक्ष है,

$8x+2y=30$ ....(ii)

(i) व (ii) को हल करने पर, मूल केन्द्र $\left(\frac{7}{2}, 1\right)$ हैं।

30. (c) द्वितीय वृत्त के सापेक्ष प्रथम वृत्त के किसी बिन्दु $(r_1\cos\theta, r_1\sin\theta)$ पर स्पर्शजीवा का समीकरण $r_1 x\cos\theta+r_1 y\sin\theta=r_2^2$ है। यह जीवा, वृत्त $x^2+y^2=r_3^2$ को स्पर्श करती है।

अतः त्रिज्या = केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब

$$r_3 = \frac{r_2^2}{r_1\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} \Rightarrow r_2^2 = r_1 r_3$$

$\therefore$ r_1, r_2, r_3 गु. श्रे. में हैं।