CHAPTER - 18
शांकव परिच्छेद

शांकव परिच्छेद : सामान्य

परिभाषा (Definition)

किसी तल तथा द्विशंकु के विभिन्न अभिविन्यासों के प्रतिच्छेदन से प्राप्त वक्र शांकव परिच्छेद कहलाता है।

विभिन्न पदों की महत्वपूर्ण परिभाषायें (Definitions of various important terms)

(1) **नाभि** : स्थिर बिन्दु को शांकव की नाभि कहते हैं।

(2) **नियता** : नियत सरल रेखा शांकव की नियता कहलाती है।

सामान्यतः प्रत्येक केंद्रीय शांकव की चार नाभियाँ होती हैं, जिसमें दो वास्तविक तथा दो काल्पनिक होती हैं। दो वास्तविक नाभियों के संगत दो नियतायें होती हैं।

(3) **उत्केन्द्रता** : अचर अनुपात को शांकव की उत्केन्द्रता कहते हैं तथा इसे e से प्रदर्शित करते हैं।

यदि $e = 1$, तब शांकव परवलय कहलाता है।

यदि $e < 1$, तब शांकव दीर्घवृत्त कहलाता है।

यदि $e > 1$, तब शांकव अतिपरवलय कहलाता है।

यदि $e = 0$, तब शांकव वृत्त कहलाता है।

यदि $e = \infty$, तब शांकव रेखायुग्म कहलाता है।

(4) **अक्ष** : नाभि से होकर गुजरने वाली तथा नियता के लम्बवत् सरल रेखा, शांकव का अक्ष कहलाती है। शांकव, अक्ष के परितः सदैव सममित होता है।

(5) **शीर्ष** : वह बिन्दु जहाँ शांकव का अक्ष शांकव को काटता है, शीर्ष कहलाता है।

(6) **केन्द्रः** वह बिन्दु जो शांकव से गुजरने वाली प्रत्येक जीवा को समद्विभाजित करता है, शांकव का केन्द्र कहलाता है।

(7) **नाभिलम्ब** : वह जीवा, जो नाभि से गुजरती है तथा अक्ष के लम्बवत् है, शांकव की नाभिलम्ब जीवा कहलाती है।

(8) **द्विगुणित कोटि** : शांकव की द्विगुणित कोटि वह जीवा है, जो अक्ष के लम्बवत् है।

(9) **नाभीय जीवा** : वह जीवा जो शांकव की नाभि से गुजरती है, नाभीय जीवा कहलाती है।

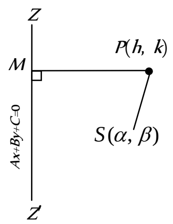
(10) **नाभीय दूरी** : शांकव पर स्थित किसी बिंदु की नाभि से दूरी; उस बिन्दु की नाभीय दूरी कहलाती है।

शांकव का व्यापक समीकरण, जबकि इसकी नाभि, नियता तथा उत्केन्द्रता दी गयी है (General equation of a conic section when its focus, directrix and eccentricity are given

माना शांकव की नाभि $S(\alpha, \beta)$, नियता $Ax + By + C = 0$ तथा उत्केन्द्रता e है। माना शांकव पर कोई बिन्दु $P(h,k)$ है तथा P से नियता पर डाला गया लम्ब PM है, तब परिभाषा से,

$$SP = ePM \Rightarrow SP^2 = e^2 PM^2$$

$$\Rightarrow (h-\alpha)^2 + (k-\beta)^2 = e^2\left(\frac{Ah + Bk + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)^2$$



इस प्रकार, बिन्दु (h,k) का बिन्दु पथ

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = e^2\,\frac{(Ax + By + C)^2}{(A^2 + B^2)}$$ होगा।

यह शांकव का कार्तीय समीकरण है, जिसे हल करने पर $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ के रूप में लिख सकते हैं, जो कि द्विघातीय व्यापक समीकरण है।

शांकवों का परीक्षण (Recognisation of conics)

शांकवों का समीकरण, द्विघात के व्यापक समीकरण

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ......(i) द्वारा प्रदर्शित होता है

समीकरण (i) का विविक्तकर, Δ द्वारा प्रदर्शित करते हैं, जहाँ $\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

स्थिति 1: जब $\Delta = 0$ । इस स्थिति में समीकरण (i) डिजनरेट शांकव (Degenerate conic) प्रदर्शित करता है।

सारणी : 18.1

क्रमांक	प्रतिबन्ध	शांकव की प्रकृति
1.	$\Delta = 0$ तथा $ab - h^2 = 0$`	सम्पाती सरल रेखाओं का युग्म
2.	$\Delta = 0$ तथा $ab - h^2 < 0$	प्रतिच्छेदी सरल रेखाओं का युग्म
3.	$\Delta = 0$ तथा $ab - h^2 > 0$	एक बिन्दु

स्थिति II: जब $\Delta \neq 0$ इस स्थिति में समीकरण (i) नान-डिजनरेट शांकव (non-degenerate conic) प्रदर्शित करता है।

सारणी : 18.2

क्रमांक	प्रतिबन्ध	शांकव की प्रकृति
1.	$\Delta \neq 0, h=0, a=b\neq 0, e=0$	एक वृत्त
2.	$\Delta \neq 0, ab-h^2=0, e=1$	एक परवलय
3.	$\Delta \neq 0, ab-h^2>0, e<1$	एक दीर्घवृत्त
4.	$\Delta \neq 0, ab-h^2<0, e>1$	एक अतिपरवलय
5.	$\Delta \neq 0, ab-h^2<0, a+b=0$, $e=\sqrt{2}$	एक समकोणिक अतिपरवलय

परवलय

परिभाषा (Definition)

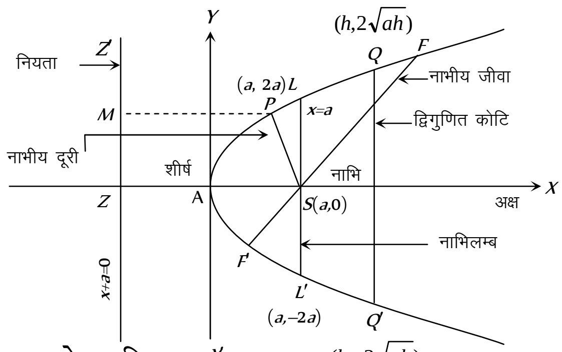
परवलय उस बिन्दु का बिन्दुपथ है, जो किसी तल में इस प्रकार गमन करता है कि इसकी एक स्थिर बिन्दु (अर्थात् नाभि) से दूरी सदैव एक स्थिर रेखा (अर्थात् नियता) से लम्बवत् दूरी के बराबर रहती है।

परवलय का मानक समीकरण
(Standard equation of the parabola)

माना परवलय की नाभि S, नियता ZZ' तथा परवलय पर कोई बिन्दु (x, y) है। माना $AS = AK = a(>0)$ तब S के निर्देशांक $= (a, 0)$ तथा KZ का समीकरण है, $x=-a$ या $x+a=0$ अब, $SP = PM$

$\Rightarrow (SP)^2 = (PM)^2 \Rightarrow (x-a)^2 + (y-0)^2 = (a+x)^2$

$\therefore\ y^2 = 4ax$ जो परवलय का मानक समीकरण है।



परवलय से सम्बन्धित पद Y'

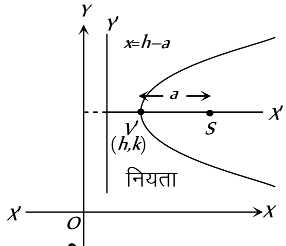
सारणी : 18.3

महत्वपूर्ण पद	$y^2 = 4ax$	$y^2 = -4ax$	$x^2 = 4ay$	$x^2 = -4ay$
शीर्ष के निर्देशांक	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
नाभि के निर्देशांक	$(a, 0)$	$(-a, 0)$	$(0, a)$	$(0, -a)$
नियता का समीकरण	$x=-a$	$x=a$	$y=-a$	$y=a$
अक्ष का समीकरण	$y=0$	$y=0$	$x=0$	$x=0$
नाभिलम्ब की लम्बाई	$4a$	$4a$	$4a$	$4a$
बिन्दु $P(x, y)$	$x+a$	$a-x$	$y+a$	$a-y$

परवलय का विशिष्ट रूप
(Special form of parabola $(y-k)^2 = 4a(x-h)$)

परवलय का शीर्ष (h, k) तथा अक्ष, x-अक्ष के समान्तर हो, तब परवलय का समीकरण है, $(y-k)^2 = 4a(x-h)$

यदि परवलय का शीर्ष (p, q) तथा इसका अक्ष y-अक्ष के समान्तर है, तब परवलय का समीकरण, $(x-p)^2 = 4b(y-q)$ होगा।



परवलय का प्राचलिक समीकरण
(Parametric equations of a parabola)

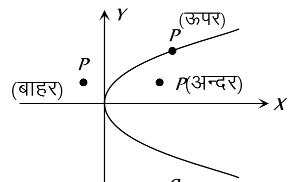
सारणी : 18.4

परवलय	$y^2 = 4ax$	$y^2 = -4ax$	$x^2 = 4ay$	$x^2 = -4ay$
प्राचलिक निर्देशांक	$(at^2, 2at)$	$(-at^2, 2at)$	$(2at, at^2)$	$(2at, -at^2)$
प्राचलिक समीकरण	$x=at^2$ $y=2at$	$x=-at^2$ $y=2at$	$x=2at$ $y=at^2$	$x=2at$, $y=-at^2$

परवलय $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ का प्राचलिक समीकरण $x = h + at^2$ तथा $y = k + 2at$ होता है।

परवलय के सापेक्ष बिन्दु या रेखा की स्थिति
(Position of a point and a line with respect to a parabola)

(1) **परवलय के सापेक्ष किसी बिन्दु की स्थिति :** बिन्दु (x_1, y_1) परवलय $y^2 = 4ax$ के बाहर, ऊपर या अंदर क्रमशः $y_1^2 - 4ax_1 >, =$ या <0 के अनुसार स्थित है। $y_1^2 - 4ax_1 >, =, < 0$.



(2) रेखा $y = mx + c$, परवलय $y^2 = 4ax$ को $c >, =, < \frac{a}{m}$ के अनुसार क्रमशः प्रतिच्छेद नहीं करती है या स्पर्श करती है या प्रतिच्छेद करती है।

स्पर्शिता का प्रतिबन्ध : रेखा $y = mx + c$, परवलय $y = 4ax$ को स्पर्श करती है, यदि $c = \frac{a}{m}$.

स्पर्श रेखा के समीकरण के विभिन्न रूप
(Equations of tangent in different forms)

(1) **बिन्दु रूप :**

सारणी : 18.5

बिन्दु (x, y) पर मानक परवलयों की स्पर्श रेखा का समीकरण	
परवलयों के समीकरण	(x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा
$y^2 = 4ax$	$yy_1 = 2a(x + x_1)$
$y^2 = -4ax$	$yy_1 = -2a(x + x_1)$
$x^2 = 4ay$	$xx_1 = 2a(y + y_1)$
$x^2 = -4ay$	$xx_1 = -2a(y + y_1)$

(2) **प्राचलिक रूप :**

सारणी : 18.6

't' पर मानक परवलय की स्पर्श रेखा का समीकरण		
परवलय का समीकरण	प्राचलिक निर्देशांक 't'	't' पर स्पर्श रेखा
$y^2 = 4ax$	$(at^2, 2at)$	$ty = x + at^2$
$y^2 = -4ax$	$(-at^2, 2at)$	$ty = -x + at^2$
$x^2 = 4ay$	$(2at, at^2)$	$tx = y + at^2$
$x^2 = -4ay$	$(2at, -at^2)$	$tx = -y + at^2$

(3) **प्रवणता रूप :**

सारणी : 18.7

प्रवणता के पदों में विभिन्न परवलयों की स्पर्श रेखा के समीकरण			
परवलय के समीकरण	प्रवणता (m) के पदों में स्पर्श बिन्दु	प्रवणता (m) के पदों में स्पर्श रेखा का समीकरण	स्पर्शिता का प्रतिबंध
$y^2 = 4ax$	$\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$	$y = mx + \frac{a}{m}$	$c = \frac{a}{m}$
$y^2 = -4ax$	$\left(-\frac{a}{m^2}, -\frac{2a}{m}\right)$	$y = mx - \frac{a}{m}$	$c = -\frac{a}{m}$
$x^2 = 4ay$	$(2am, am^2)$	$y = mx - am^2$	$c = -am^2$
$x^2 = -4ay$	$(-2am, -am^2)$	$y = mx + am^2$	$c = am^2$

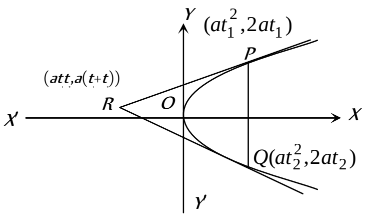
परवलय पर स्थित दो बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु

(Point of intersection of tangents at any two points on the parabola)

(1) परवलय $y^2 = 4ax$ पर स्थित दो बिन्दुओं $P(at_1^2, 2at_1)$ तथा $Q(at_2^2, 2at_2)$ पर स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु $(at_1t_2, a(t_1 + t_2))$ है।

(2) परवलय $y^2 = 4ax$ की स्पर्श रेखाओं, के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ जो α कोण पर मिलती हैं, $(x+a)^2 \tan^2 \alpha = y^2 - 4ax$ होगा।

(3) **नियामक वृत्तः** शांकव की लम्बवत् स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ नियामक वृत्त कहलाता है। परवलय का नियामक वृत्त इसकी नियता होती है।



(4) परवलय $y^2 = 4ax$ पर स्थित बिन्दुओं $P(at_1^2, 2at_1)$ तथा $Q\ (at_2^2, 2at_2)$ पर खींची गयी स्पर्श रेखायें बिन्दु R पर प्रतिच्छेदित करती है तथा त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल $\frac{1}{2}a^2(t_1 - t_2)^3$ होता है।

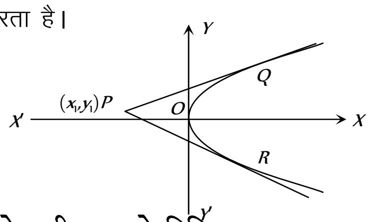
परवलय पर स्थित किसी बिन्दु से डाले गये स्पर्श रेखा युग्म का समीकरण

(Equation of pair of tangents from a point to a parabola)

यदि $y_1^2 - 4ax_1 > 0$, तब बिन्दु (x_1, y_1) परवलय के बाहर स्थित होगा तथा बिन्दु P से स्पर्शी रेखा युग्म PQ, PR खींचे जा सकते हैं।

बिन्दु (x, y) से परवलय पर खींचे गये स्पर्शी रेखा युग्म का संयुक्त समीकरण $SS' = T^2$ होता है, जहाँ $S = y^2 - 4ax; S' = y_1^2 - 4ax_1$ तथा $T = yy_1 - 2a(x + x_1)$

किसी बिन्दु से एक परवलय पर दो स्पर्श रेखायें खींची जा सकती हैं। दोनों स्पर्श रेखाएँ वास्तविक, संपाती या काल्पनिक होंगी, यह बिन्दु के क्रमशः परवलय के बाहर, परवलय पर या परवलय के अन्दर स्थित होने पर निर्भर करता है।



अभिलम्बों के समीकरण के विभिन्न प्रकार

(Equations of normal in different forms)

(1) **बिन्दु रूप :**

सारणी : 18.8

बिन्दु (x, y) पर अन्य मानक परवलयों के अभिलम्बों के समीकरण	
परवलय का समीकरण	बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब
$y^2 = 4ax$	$y - y_1 = \frac{-y_1}{2a}(x - x_1)$
$y^2 = -4ax$	$y - y_1 = \frac{y_1}{2a}(x - x_1)$
$x^2 = 4ay$	$y - y_1 = -\frac{2a}{x_1}(x - x_1)$
$x^2 = -4ay$	$y - y_1 = \frac{2a}{x_1}(x - x_1)$

(2) **प्राचलिक रूप :**

सारणी : 18.9

बिन्दु 't' पर अन्य मानक परवलयों के अभिलम्बों के समीकरण		
परवलय का समीकरण	प्राचलिक निर्देशांक	't' पर अभिलम्ब
$y^2 = 4ax$	$(at^2, 2at)$	$y + tx = 2at + at^3$
$y^2 = -4ax$	$(-at^2, 2at)$	$y - tx = 2at + at^3$
$x^2 = 4ay$	$(2at, at^2)$	$x + ty = 2at + at^3$
$x^2 = -4ay$	$(2at, -at^2)$	$x - ty = 2at + at^3$

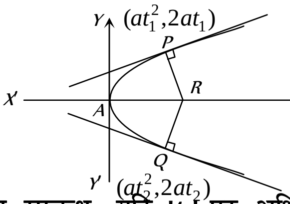
(3) **प्रवणता रूप :**

सारणी : 18.10

अभिलम्ब का समीकरण, स्पर्श बिन्दु तथा प्रवणता के पदों में अभिलम्बता का प्रतिबन्ध (m)			
परवलय का समीकरण	प्रवणता (m) के पदों मे स्पर्श बिन्दु	प्रवणता (m) के पदों में अभिलम्ब का समीकरण	अभिलम्बता का प्रतिबन्ध
$y^2 = 4ax$	$(am^2, -2am)$	$y = mx - 2am - am^3$	$c = -2am - am^3$
$y^2 = -4ax$	$(-am^2, 2am)$	$y = mx + 2am + am^3$	$c = 2am + am^3$
$x^2 = 4ay$	$\left(-\frac{2a}{m}, \frac{a}{m^2}\right)$	$y = mx + 2a + \frac{a}{m^2}$	$c = 2a + \frac{a}{m^2}$
$x^2 = -4ay$	$\left(\frac{2a}{m}, -\frac{a}{m^2}\right)$	$y = mx - 2a - \frac{a}{m^2}$	$c = -2a - \frac{a}{m^2}$

परवलय के दो बिन्दुओं पर अभिलम्बों का प्रतिच्छेद बिन्दु (Point of intersection of normals at any two points on the parabola)

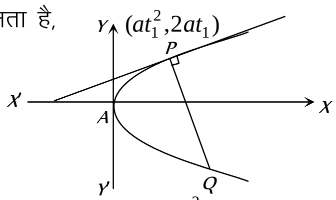
परवलय $y^2 = 4ax$ के दो बिन्दुओं $P(at_1^2, 2at_1)$ तथा $Q(at_2^2, 2at_2)$ पर अभिलम्बों का प्रतिच्छेद बिन्दु $R[2a + a(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2), -at_1t_2(t_1 + t_2)]$ है।



't_1' व 't_2' के मध्य सम्बन्ध, यदि 't_1' पर अभिलम्ब परवलय को पुनः 't_2' पर मिलता है (Relation between 't_1' and 't_2' if normal at 't_1' meets the parabola again at 't_2')

यदि बिन्दु $P(at_1^2, 2at_1)$ पर अभिलम्ब परवलय $y^2 = 4ax$ को पुनः बिन्दु $Q(at_2^2, 2at_2)$ पर मिलता है,

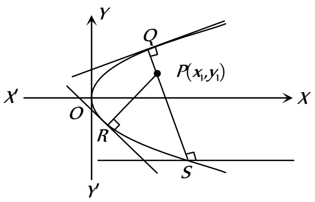
तब $t_2 = -t_1 - \dfrac{2}{t_1}$



सह–अभिलम्ब बिन्दु (Co-normal points)

वक्र पर वे बिन्दु, जिन पर अभिलम्ब एक उभयनिष्ठ बिन्दु से होकर गुजरते हैं, सहअभिलम्ब बिन्दु कहलाते हैं।

Q, R, S सहअभिलम्ब बिन्दु हैं। सहअभिलम्ब बिन्दुओं को अभिलम्ब का पाद भी कहते हैं।



सह अभिलम्ब बिन्दु के गुणधर्म :

(1) किसी बिन्दु से परवलय पर तीन अभिलम्ब खींचे जा सकते हैं।

(2) तीन संगामी अभिलम्बों की प्रवणताओं का बीजगणितीय योग शून्य होता है।

(3) सह-अभिलम्ब बिन्दुओं की कोटियों का योग शून्य होता है।

(4) सह-अभिलम्ब बिन्दुओं से निर्मित त्रिभुज का केन्द्रक परवलय के अक्ष पर स्थित होता है।

(5) परवलय के अभिलम्ब के पादों द्वारा निर्मित त्रिभुज का केन्द्रक परवलय के अक्ष पर होता है तथा केन्द्रक के निर्देशांक

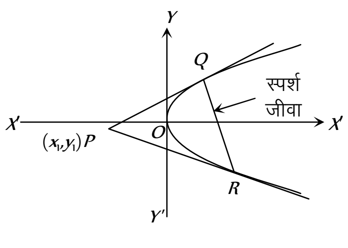
$$= \left(\frac{am_1^2 + am_2^2 + am_3^2}{3}, \frac{2am_1 + 2am_2 + 2am_3}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{am_1^2 + am_2^2 + am_3^2}{3}, 0\right)$$

(6) बिन्दु (h, k) से परवलय $y^2 = 4ax$ पर खींचे गये तीनों अभिलम्ब वास्तविक होंगे यदि $h > 2a$. ($a = 1$ के लिए)

(7) तीनों अभिलम्बों में से कम से कम एक अभिलम्ब वास्तविक होगा, क्योंकि काल्पनिक अभिलम्ब सदैव युग्मों के रूप में उपस्थित होंगे।

परवलय की स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा का समीकरण (Equation of the chord of contact of tangents to a parabola)



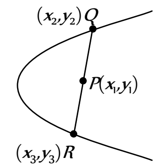
माना किसी बाह्य बिन्दु (x_1, y_1) से परवलय $y^2 = 4ax$ पर खींची गयी स्पर्श रेखायें *PQ* तथा *PR* हैं, तब *QR* को परवलय $y^2 = 4ax$ की स्पर्श जीवा कहते हैं।

बिन्दु (x_1, y_1) से परवलय $y^2 = 4ax$ पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा का समीकरण है, $yy_1 = 2a(x + x_1)$

परवलय की जीवा का समीकरण, जिसका मध्य बिन्दु दिया गया है (Equation of the chord of the parabola which is bisected at a given point)

परवलय $y^2 = 4ax$ की बिन्दु (x_1, y_1) पर समद्विभाजित होने वाली जीवा का समीकरण है, $T = S_1$, जहाँ $T = yy_1 - 2a(x + x_1)$ तथा $S_1 = y_1^2 - 4ax_1$

अर्थात्, $yy_1 - 2a(x + x_1) = y_1^2 - 4ax_1$



परवलय पर स्थित दो बिन्दुओं को मिलाने वाली जीवा का समीकरण (Equation of the chord joining any two points on the parabola)

माना परवलय $y^2 = 4ax$ पर दो बिन्दु $P(at_1^2, 2at_1)$ तथा $Q(at_2^2, 2at_2)$ हैं। तब इन बिन्दुओं को मिलाने वाली जीवा का समीकरण है, $y - 2at_1 = \dfrac{2at_2 - 2at_1}{at_2^2 - at_1^2}(x - at_1^2)$ या $y - 2at_1 = \dfrac{2}{t_1 + t_2}\left(x - at_1^2\right)$ या $y(t_1 + t_2) = 2x + 2at_1t_2$

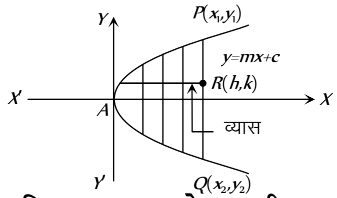
(1) **बिन्दुओं t_1 व t_2 को मिलाने वाली जीवा के नाभीय जीवा होने का प्रतिबन्ध :** यदि परवलय पर बिन्दुओं $(at_1^2, 2at_1)$ तथा $(at_2^2, 2at_2)$ को मिलाने वाली जीवा, नाभि से गुजरती है, तब बिन्दु $(a, 0)$ समीकरण $y(t_1 + t_2) = 2x + 2at_1t_2$ को संतुष्ट करेगा।

$$\therefore 0 = 2a + 2at_1t_2 \Rightarrow t_1t_2 = -1 \text{ या } t_2 = -\frac{1}{t_1}$$

s(2) **नाभीय जीवा की लम्बाईः** नाभीय जीवा की लम्बाई $= a(t_2 - t_1)^2$, जहाँ t_1 व t_2 नाभीय जीवा के सिरों के बिन्दुओं के प्राचल हैं।

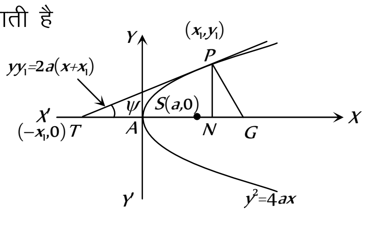
परवलय का व्यास (Diameter of a parabola)

किसी परवलय की समान्तर जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ उसका व्यास कहलाता है। परवलय का व्यास, परवलय के अक्ष के समान्तर होता है। परवलय $y^2 = 4ax$ की m प्रवणता की समान्तर जीवाओं $y = mx + c$ के सापेक्ष व्यास का समीकरण है, $y = \dfrac{2a}{m}$ ।



स्पर्शी, अधोस्पर्शी, अभिलम्ब तथा अधोलम्ब की लम्बाई (Length of tangent, subtangent, normal and subnormal)

माना परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ है तथा बिन्दु (x_1, y_1) पर परवलय की स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब x-अक्ष से क्रमशः T तथा G पर मिलते हैं। माना बिन्दु $P(x_1, y_1)$ पर स्पर्शरेखा, x–अक्ष की धनात्मक दिशा से ψ कोण बनाती है



परवलय का शीर्ष $A(0,0)$ है तथा $PN = y_1$, तब

(1) स्पर्शरेखा की लम्बाई $= PT = PN \operatorname{cosec} \psi = y_1 \operatorname{cosec} \psi$

(2) अभिलम्ब की लम्बाई $= PG = PN \operatorname{cosec}(90^o - \psi) = y_1 \sec \psi$

(3) अधोस्पर्शी की लम्बाई $= TN = PN \cot \psi = y_1 \cot \psi$

(4) अधोलम्ब की लम्बाई $= NG = PN \cot(90^o - \psi) = y_1 \tan \psi$

यहाँ $\tan \psi = \frac{2a}{y_1} = m$, [$m$, $P(x, y)$ पर स्पर्शरेखा की प्रवणता है]

परवलय $y^2=4ax$ के बिन्दु$(at^2,2at)$ पर स्पर्शी, अधोस्पर्शी, अभिलम्ब तथा अधोलम्ब की लम्बाई (Length of tangent, Subtangent, Normal and subnormal to $y^2=4ax$ at $(at^2,2at)$)

(1) बिन्दु $(at^2, 2at)$ पर स्पर्शरेखा की लम्बाई $= 2at \operatorname{cosec} \psi$

$= 2at\sqrt{(1+\cot^2\psi)}$ $= 2at\sqrt{1+t^2}$

(2) बिन्दु $(at^2, 2at)$ पर अभिलम्ब की लम्बाई $= 2at \sec \psi$

$= 2at\sqrt{(1+\tan^2\psi)}$ $= 2a\sqrt{t^2+t^2\tan^2\psi}$ $= 2a\sqrt{(t^2+1)}$

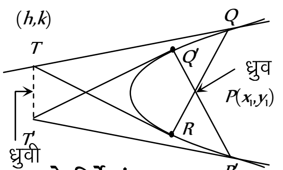
(3) बिन्दु $(at^2, 2at)$ पर अधोस्पर्शी की लम्बाई $= 2at \cot \psi = 2at^2$

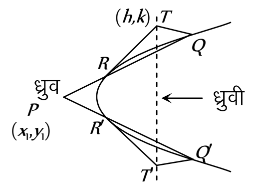
(4) बिन्दु $(at^2, 2at)$ पर अधोलम्ब की लम्बाई $= 2at \tan \psi = 2a$

ध्रुव तथा ध्रुवी (Pole and Polar)

किसी स्थिर बिन्दु P से खींची गयी जीवा के सिरों पर, परवलय की स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ, बिन्दु P की ध्रुवी कहलाता है तथा बिन्दु P को ध्रुवी का ध्रुव कहते हैं।

ध्रुवी का समीकरण : परवलय $y^2 = 4ax$ के सापेक्ष बिन्दु (x_1, y_1) की ध्रुवी का समीकरण, स्पर्श जीवा के समीकरण के समान होता है, अर्थात् ध्रुवी का समीकरण है, $yy_1 = 2a(x + x_1)$





ध्रुव के निर्देशांकः

परवलय $y^2 = 4ax$ के सापेक्ष रेखा $lx + my + n = 0$ के ध्रुव के निर्देशांक $\left(\frac{n}{l}, \frac{-2am}{l}\right)$ होते हैं ।

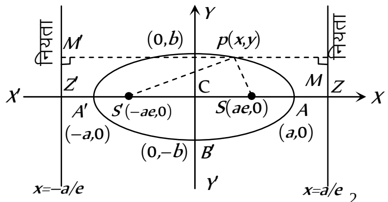
दीर्घवृत्त

परिभाषा (Definition)

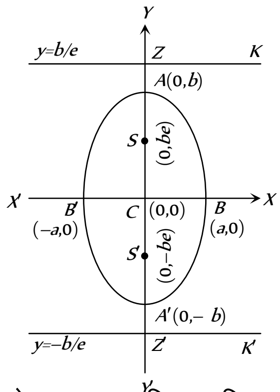
दीर्घवृत्त उस बिन्दु का बिन्दुपथ है जो इस प्रकार गति करता है, कि इसकी एक स्थिर बिन्दु से दूरी तथा स्थिर रेखा से दूरी का अनुपात सदैव अचर (< 1) रहता है। स्थिर बिन्दु को नाभि तथा स्थिर रेखा को नियता कहते हैं। अचर अनुपात को दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता कहते है तथा इसे e से प्रदर्शित करते हैं।

दीर्घवृत्त का मानक समीकरण (Standard equation of the ellipse)

माना दीर्घवृत्त की नाभि S, नियता ZM तथा दीर्घवृत्त पर कोई बिन्दु $P(x, y)$ है, तब परिभाषा से, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, जहाँ $b^2 = a^2(1 - e^2)$.



दीर्घवृत्त का समीकरण अन्य रूप में, $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ है, जहाँ $a^2 = b^2(1 - e^2)$ अर्थात् $a < b$.



दोनों दीर्घवृत्तों के मध्य अन्तर निम्न तालिका से स्पष्ट होता है

सारणी : 18.11

दीर्घवृत्त / सम्बन्धित पद	$\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$	
	$a > b$ के लिए	$b > a$ के लिए
केन्द्र	(0, 0)	(0, 0)
शीर्ष	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm b)$
दीर्घ अक्ष की लम्बाई	$2a$	$2b$
लघु अक्ष की लम्बाई	$2b$	$2a$
नाभियाँ	$(\pm ae, 0)$	$(0, \pm be)$
नियताओं के समीकरण	$x = \pm a/e$	$y = \pm b/e$
a, b तथा e से सम्बन्ध	$b^2 = a^2(1 - e^2)$	$a^2 = b^2(1 - e^2)$
नाभिलम्ब की लम्बाई	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$
नाभिलम्ब के सिरों के निर्देशांके	$\left(\pm ae, \pm\frac{b^2}{a}\right)$	$\left(\pm\frac{a^2}{b}, \pm be\right)$
प्राचलिक समीकरण	$(a\cos\phi, b\sin\phi)$	$(a\cos\phi, b\sin\phi)$ $(0 \le \phi < 2\pi)$
नाभीय त्रिज्यायें	$SP = a - ex_1$ $S'P = a + ex_1$	$SP = b - ey_1$ $S'P = b + ey_1$
नाभीय त्रिज्याओं का योग $SP + S'P =$	$2a$	$2b$
नाभियों के मध्य दूरी	$2ae$	$2be$
नियताओं के मध्य दूरी	$2a/e$	$2b/e$
शीर्षों पर स्पर्श रेखायें	$x = -a$, $x = a$	$y = b$, $y = -b$

दीर्घवृत्त का प्राचलिक समीकरण (Parametric form of the ellipse)

दीर्घवृत्त का मानक समीकरण है, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ तब दीर्घवृत्त के समीकरण का प्राचलिक रूप है, $x=a\cos\phi, y=b\sin\phi$, जहाँ ϕ उत्केन्द्र कोण है जिसका मान अन्तराल $0\le\phi<2\pi$ में होता है। अतः दीर्घवृत्त पर किसी बिन्दु P के निर्देशांक $(a\cos\phi, b\sin\phi)$ होंगे।

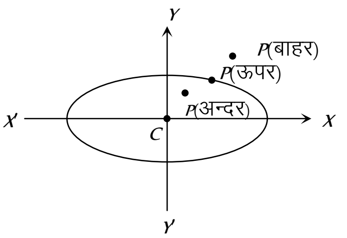
दीर्घवृत्त के विशिष्ट रूप (Special forms of an ellipse)

(1) यदि दीर्घवृत्त का केन्द्र बिन्दु (h,k) पर है तथा अक्षों की दिशायें, निर्देशांक अक्षों के समान्तर है, तब दीर्घवृत्त का समीकरण है, $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

(2) यदि वक्र का समीकरण $\frac{(lx+my+n)^2}{a^2}+\frac{(mx-ly+p)^2}{b^2}=1$, जहाँ $lx+my+n=0$ तथा $mx-ly+p=0$ लम्बवत् रेखायें हैं तब $\frac{lx+my+n}{\sqrt{l^2+m^2}}=X$, $\frac{mx-ly+p}{\sqrt{l^2+m^2}}=Y$, प्रतिस्थापित कर समीकरण को मानक रूप में परिवर्तित करते हैं।

दीर्घवृत्त के सापेक्ष बिन्दु की स्थिति
(Position of a point with respect to an ellipse)

माना दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ तथा कोई बिन्दु $P(x_1,y_1)$ है। बिन्दु $P(x_1,y_1)$ दीर्घवृत्त के बाहर, दीर्घवृत्त पर या दीर्घवृत्त के भीतर स्थित होगा, यदि $S_1=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1$ का मान क्रमशः $>0, =0$ या <0 हो।



रेखा तथा दीर्घवृत्त का प्रतिच्छेद बिन्दु
(Intersection of a line and an ellipse)

रेखा $y=mx+c$, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ को दो भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है यदि $a^2m^2+b^2>c^2$, एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है यदि $c^2=a^2m^2+b^2$ तथा प्रतिच्छेद नहीं करती है यदि $a^2m^2+b^2<c^2$.

स्पर्श रेखा के समीकरण के विभिन्न रूप
(Equations of tangent in different forms)

(1) **बिन्दु रूप :** बिन्दु (x_1,y_1) पर दीर्घवृत्त की स्पर्श रेखा का समीकरण है, $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$.

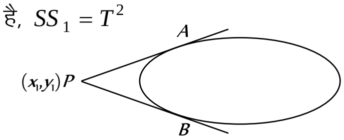
(2) **प्रवणता रूप :** यदि रेखा $y=mx+c$, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ को स्पर्श करती है, तब $c^2=a^2m^2+b^2$, अतः सरल रेखा $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ सदैव दीर्घवृत्त की स्पर्श रेखाओं को प्रदर्शित करती है।

स्पर्श बिन्दु : रेखा $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ को बिन्दुओं $\left(\frac{\pm a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{\mp b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$ पर स्पर्श करती है।

(3) **प्राचलिक रूप :** बिन्दु $\phi(a\cos\phi, b\sin\phi)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण है, $\frac{x}{a}\cos\phi+\frac{y}{b}\sin\phi=1$.

स्पर्श रेखा युग्म का समीकरण $SS_1=T^2$
(Equation of pair of tangents $SS_1=T^2$)

स्पर्शी युग्म : माना दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के बाहर कोई बिन्दु $P(x_1,y_1)$ है तथा इस बिन्दु P से खींचे गये स्पर्शी युग्म PA, PB हैं तब स्पर्शी युग्म PA तथा PB का समीकरण है, $SS_1=T^2$



जहाँ $S\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$

$S_1\equiv\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1$, $T\equiv\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1$

नियामक वृत्त : वह वृत्त जिस पर दीर्घवृत्त की परस्पर लम्ब स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु स्थित होता है, नियामक वृत्त कहलाता है। माना बिन्दुपथ पर कोई बिन्दु $P(x_1,y_1)$ है। अतः $P(x_1,y_1)$ का बिन्दुपथ अर्थात् नियामक वृत्त का समीकरण है, $x^2+y^2=a^2+b^2$.

अभिलम्ब के समीकरण के विभिन्न रूप
(Equations of normal in different forms)

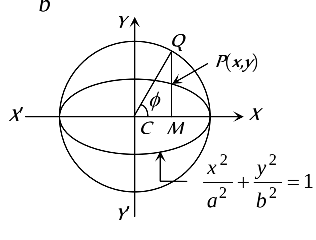
(1) **बिन्दु पथ :** बिन्दु (x_1,y_1) पर दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के अभिलम्ब का समीकरण है, $\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}=a^2-b^2$

(2) **प्राचलिक रूपः** बिन्दु $(a\cos\phi, b\sin\phi)$ पर दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के अभिलम्ब का समीकरण है, $ax\sec\phi-by\,\text{cosec}\,\phi=a^2-b^2$

(3) **प्रवणता रूप :** यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के अभिलम्ब की प्रवणता m हो, तब अभिलम्ब का समीकरण है, $y=mx\pm\frac{m(a^2-b^2)}{\sqrt{a^2+b^2m^2}}$ तथा स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{\pm a^2}{\sqrt{a^2+b^2m^2}}, \frac{\pm mb^2}{\sqrt{a^2+b^2m^2}}\right)$ है।

सहायक वृत्त (Auxiliary circle)

दीर्घवृत्त के दीर्घाक्ष को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त, सहायक वृत्त कहलाता है। यदि $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ एक दीर्घवृत्त है, तब इसका सहायक वृत्त $x^2+y^2=a^2$ होगा।



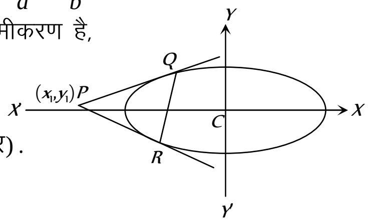
किसी बिन्दु का उत्केन्द्र कोण : माना दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ पर कोई बिन्दु P है। अब दीर्घवृत्त के दीर्घाक्ष पर बिन्दु P से लम्ब PM खींचा तथा MP को आगे बढ़ाने पर यह सहायक वृत्त को बिन्दु Q में मिलता है। CQ को मिलाया। दीर्घवृत्त पर बिन्दु P का उत्केन्द्र कोण $\angle XCQ=\phi$ कहलाता है। यह ध्यान रखना चाहिये कि कोण $\angle XCQ$, बिन्दु P का उत्केन्द्र कोण नहीं है।

स्पर्श जीवा (Chord of contact)

यदि $P(x_1,y_1)$ से दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की स्पर्श रेखायें PQ तथा PR है, तब स्पर्श जीवा QR का समीकरण है,

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$$

या $T=0$ (बिन्दु x_1,y_1 पर).

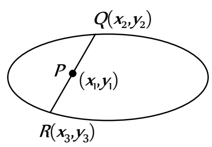


जीवा का समीकरण, जिसका मध्य बिन्दु (x_1, y_1) है (Equation of chord with mid point (x_1, y_1))

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की जीवा का समीकरण जिसका मध्य बिन्दु (x_1,y_1) है $T=S_1$

जहाँ $T=\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1$

$$S_1=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1.$$



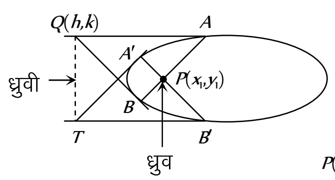
दीर्घवृत्त पर दो बिन्दुओं को मिलाने वाली जीवा का समीकरण (Equation of the chord joining two points on an ellipse)

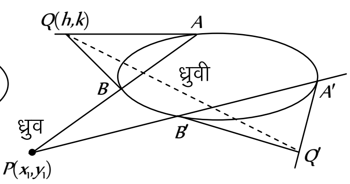
माना दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ पर दो बिन्दु $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$; $Q(a\cos\phi,b\sin\phi)$ है, तब इन बिन्दुओं को मिलाने वाली जीवा का समीकरण है, $y-b\sin\theta=\frac{b\sin\phi-b\sin\theta}{a\cos\phi-a\cos\theta}(x-a\cos\theta)$ । अतः दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ पर उन बिन्दुओं को मिलाने वाली जीवा का समीकरण, जिनके उत्केन्द्र कोण θ तथा ϕ है,

$$\frac{x}{a}\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)+\frac{y}{b}\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$ होगा।

ध्रुव तथा ध्रुवी (Pole and Polar)

माना दीर्घवृत्त के भीतर या बाहर कोई बिन्दु $P(x_1,y_1)$ है। P से होकर जाने वाली जीवा दीर्घवृत्त को क्रमशः A व B पर प्रतिच्छेद करती है। यदि बिन्दुओं A तथा B पर दीर्घवृत्त की स्पर्श रेखायें $Q(h,k)$ पर मिलती है, तब दीर्घवृत्त के सापेक्ष Q का बिन्दु पथ, बिन्दु P की ध्रुवी कहलाता है तथा बिन्दु P, ध्रुव कहलाता है





ध्रुवी का समीकरण : दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के सापेक्ष बिन्दु (x_1,y_1) की ध्रुवी का समीकरण है $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$, (अर्थात् $T=0$)

ध्रुव के निर्देशांक : दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के सापेक्ष रेखा s के ध्रुव के निर्देशांक $P\left(\frac{-a^2l}{n},\frac{-b^2m}{n}\right)$ होंगे।

ध्रुव तथा ध्रुवी के गुणधर्म :

(1) यदि $P(x_1,y_1)$ की ध्रुवी $Q(x_2,y_2)$ से होकर गुजरती है, तब $Q(x_2,y_2)$ की ध्रुवी $P(x_1,y_1)$ से होकर जायेगी तथा इस प्रकार के बिन्दुओं को संयुग्मी बिन्दु कहते है।

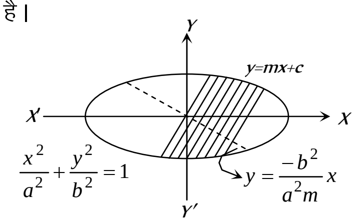
(2) यदि रेखा $l_1x+m_1y+n_1=0$ का ध्रुव अन्य रेखा $l_2x+m_2y+n_2=0$ पर स्थित है, तब दूसरी रेखा का ध्रुव पहली रेखा पर स्थित होगा तथा इस प्रकार की रेखाओं को संयुग्मी रेखायें कहते है।

(3) किसी दी गई रेखा का ध्रुव, इसके सिरों पर स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु होता है।

दीर्घवृत्त का व्यास (Diameter of the ellipse)

परिभाषा : दीर्घवृत्त की समान्तर जीवाओं के निकाय के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ दीर्घवृत्त का व्यास कहलाता है तथा जीवायें, द्विगुणित कोटियाँ कहलाती है, अर्थात् दीर्घवृत्त के केन्द्र से होकर जाने वाली रेखा, दीर्घवृत्त का व्यास कहलाती है।

वह बिन्दु जहाँ व्यास दीर्घवृत्त को प्रतिच्छेदित करता है, व्यास का शीर्ष कहलाता है।

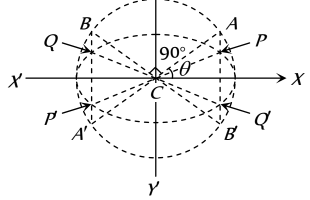


माना दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की समान्तर जीवाओं का निकाय $y=mx+c$ है, जहाँ m अचर है तथा c चर है। दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की m प्रवणता की जीवाओं को समद्विभाजित करने वाले व्यास का समीकरण है, $y=-\frac{b^2}{a^2m}x$, जो कि (0, 0) से गुजरता है।

संयुग्मी व्यास : जब दीर्घवृत्त के दो व्यासों में से प्रत्येक दूसरे की समान्तर जीवाओं को समद्विभाजित करता है, तो वे दोनों व्यास संयुग्मी व्यास कहलाते है।

वृत्त के संयुग्मी व्यास अर्थात् AA' तथा BB' परस्पर लम्बवत् होते हैं। अतः दीर्घवृत्त के संयुग्मी व्यास PP' तथा QQ' हैं।

$\therefore$ दीर्घवृत्त के संयुग्मी व्यासों के मध्य कोण $>90^o$.



अब दोनों संयुग्मी व्यासों के चारों सिरों के निर्देशांक है,

$P(a\cos\phi, b\sin\phi); P'(-a\cos\phi, -b\sin\phi)$;

$Q(-a\sin\phi, b\cos\phi); Q'(a\sin\phi, -b\cos\phi)$

यदि दीर्घवृत्त के दो संयुग्मी व्यास $y = m_1 x$ तथा $y = m_2 x$ हो, तब $m_1 m_2 = \frac{-b^2}{a^2}$

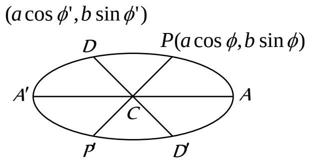
(1) **व्यास के गुण :**

(i) किसी व्यास के सिरों पर स्पर्श रेखा, समद्विभाजित करने वाली जीवाओं के समान्तर होती है या संयुग्मी व्यास के समान्तर होती है।

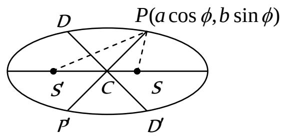
(ii) किसी जीवा के सिरों पर स्पर्श रेखा उस व्यास पर मिलती है, जो जीवा को समद्विभाजित करता है।

(2) **संयुग्मी व्यास के गुण :**

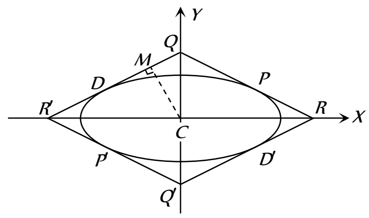
(i) दीर्घवृत्त के संयुग्मी व्यासों के युग्म के सिरों के उत्केन्द्र कोणों में एक समकोण का अन्तर होता है, अर्थात् $\phi - \phi' = \frac{\pi}{2}$



(ii) किसी दीर्घवृत्त के दो संयुग्मी अर्द्धव्यासों के वर्गों का योग अचर होता है तथा दीर्घवृत्त के अर्द्ध अक्षों के वर्गों के योग के बराबर होता है अर्थात् $CP^2 + CD^2 = a^2 + b^2$



(iii) दीर्घवृत्त पर किसी बिन्दु की नाभीय दूरियों का गुणनफल अर्द्धव्यास के वर्ग के बराबर होता है, जो कि बिन्दु से होकर जाने वाले व्यास के संयुग्मी है, अर्थात् $SP.S'P = CD^2$



(iv) संयुग्मी व्यासों के युग्मों के सिरों पर स्पर्श रेखायें एक समान्तर चतुर्भुज बनाती है, जिसका क्षेत्रफल अचर रहता है तथा अक्षों के गुणनफल के बराबर होता है, अर्थात्

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= (2a)(2b)$ = आयत का क्षेत्रफल जिसमें दीर्घाक्ष तथा लघुअक्ष समाहित है।

(v) दीर्घवृत्त के सापेक्ष किसी बिन्दु की ध्रुवी उस व्यास के समान्तर होती है, जिस पर बिन्दु स्थित होता है। अतः उस जीवा का समीकरण प्राप्त होता है जिसका मध्यबिन्दु दिया है अर्थात् जीवा $T = S_1$.

(3) **सम संयुग्मी व्यास :** दो संयुग्मी व्यास समसंयुग्मी कहलाते हैं, यदि संयुग्मी व्यासों की लम्बाईयाँ समान हैं, अर्थात् $(CP)^2 = (CD)^2$

$\therefore \; a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi = a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi$

$\Rightarrow a^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi) - b^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi) = 0$

$\Rightarrow (a^2 - b^2)(\cos^2\phi - \sin^2\phi) = 0$

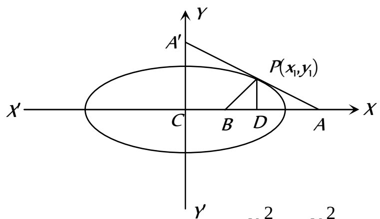
$\because \; (a^2 - b^2) \neq 0$, $\therefore \cos 2\phi = 0$. इसलिए, $\phi = \frac{\pi}{4}$ या $\frac{3\pi}{4}$

$(CP) = (CD) = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)}{2}}$ (संयुग्मी व्यास के लिये)

अधो स्पर्शी तथा अधोलम्ब (Subtangent and subnormal)

माना बिन्दु $P(x_1, y_1)$ पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब x-अक्ष को क्रमशः बिन्दुओं A तथा B पर मिलते हैं।

बिन्दु $P(x_1, y_1)$ पर दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की अधोस्पर्शी की लम्बाई है, $DA = CA - CD = \frac{a^2}{x_1} - x_1$



बिन्दु $P(x_1, y_1)$ पर दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के अधोलम्ब की लम्बाई है, $BD = CD - CB = x_1 - \left(x_1 - \frac{b^2}{a^2}x_1\right) = \frac{b^2}{a^2}x_1 = (1 - e^2)x_1$.

अतिपरवलय

परिभाषा (Definition)

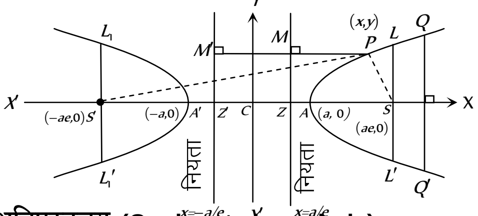
अतिपरवलय उस बिन्दु का बिन्दुपथ है जो किसी तल में इस प्रकार गति करता है, कि एक स्थिर बिन्दु से दूरी तथा एक स्थिर रेखा से दूरी का अनुपात सदैव अचर रहे।

यह अचर अनुपात सदैव एक से अधिक होता है। स्थिर बिन्दु को नाभि तथा स्थिर रेखा को नियता कहते हैं।

अचर अनुपात उत्केन्द्रता कहलाता है, जिसे e से प्रदर्शित करते हैं तथा $e > 1$.

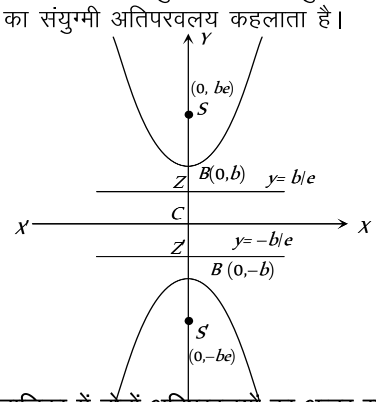
अतिपरवलय का मानक समीकरण
(Standard equation of the hyperbola)

माना अतिपरवलय की नाभि S, नियता ZM तथा उत्केन्द्रता e है, तब परिभाषा से, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



संयुग्मी अतिपरवलय (Conjugate hyperbola)

वह अतिपरवलय, जिसके अनुप्रस्थ तथा संयुग्मी अक्ष दिये गये अतिपरवलय के क्रमशः संयुग्मी तथा अनुप्रस्थ अक्ष हैं, दिये गये अतिपरवलय का संयुग्मी अतिपरवलय कहलाता है।



दी गयी तालिका में दोनों अतिपरवलयों का अन्तर स्पष्ट किया गया है

सारणी : 18.12

अतिपरवलय / सम्बन्धित पद	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ या $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$
केन्द्र	(0, 0)	(0, 0)
अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई	$2a$	$2b$
संयुग्मी अक्ष की लम्बाई	$2b$	$2a$
नाभियाँ	$(\pm ae, 0)$	$(0, \pm be)$
नियताओं के समीकरण	$x=\pm a/e$	$y=\pm b/e$
उत्केन्द्रता	$e=\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)}$	$e=\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right)}$
नाभिलम्ब की लम्बाई	$2b^2/a$	$2a^2/b$
प्राचलिक निर्देशांक	$(a\sec\phi, b\tan\phi)$ $0\le\phi<2\pi$	$(b\sec\phi, a\tan\phi)$ $0\le\phi<2\pi$
नाभीय त्रिज्यायें	$SP=ex_1-a$ $S'P=ex_1+a$	$SP=ey_1-b$ $S'P=ey_1+b$
नाभीय त्रिज्याओं का अन्तर $(S'P-SP)$	$2a$	$2b$
शीर्षों पर स्पर्श रेखायें	$x=-a, x=a$	$y=-b, y=b$
अनुप्रस्थ अक्ष का समीकरण	$y=0$	$x=0$
संयुग्मी अक्ष का समीकरण	$x=0$	$y=0$

अतिपरवलय का विशिष्ट रूप (Special form of hyperbola)

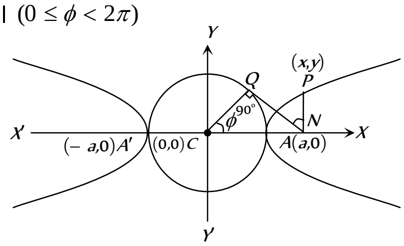
यदि अतिपरवलय का केन्द्र (h, k) है तथा इसके अक्ष, निर्देशांक अक्षों के समान्तर हैं, तब अतिपरवलय का समीकरण $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ है।

अतिपरवलय का सहायक वृत्त (Auxiliary circle of hyperbola)

माना $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ एक अतिपरवलय है, जिसका केन्द्र C तथा अनुप्रस्थ अक्ष AA' है, अतः C को केन्द्र तथा खण्ड AA' को व्यास लेकर खींचा गया वृत्त, अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ का सहायक वृत्त कहलाता है।

$\therefore$ सहायक वृत्त का समीकरण है, $x^2+y^2=a^2$

माना $\angle QCN=\phi$ । यहाँ P तथा Q सहायक वृत्त तथा अतिपरवलय पर संगत बिन्दु हैं। $(0\le\phi<2\pi)$

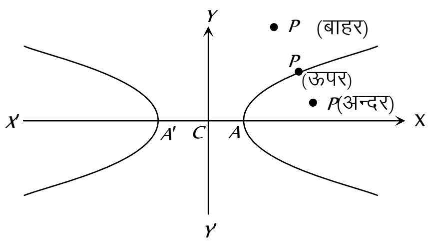


अतिपरवलय का प्राचलिक समीकरण
(Parametric equations of hyperbola)

अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ के प्राचलिक समीकरण $x=a\sec\phi$ तथा $y=b\tan\phi$ हैं। ϕ के सभी मानों के लिए बिन्दु $(a\sec\phi, b\tan\phi)$ अतिपरवलय पर स्थित है।

अतिपरवलय के सापेक्ष बिन्दु की स्थिति
(Position of a point with respect to a hyperbola)

माना अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ हैं। तब, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1$ के धनात्मक, शून्य या ऋणात्मक मान के अनुसार बिन्दु $P(x_1, y_1)$ क्रमशः अतिपरवलय $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$ के अन्दर, पर या बाहर होगा।



अतिपरवलय तथा रेखा का प्रतिच्छेद बिन्दु
(Intersection of a line and a hyperbola)

सरल रेखा $y=mx+c$, अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ को $c^2 >,=,< a^2m^2-b^2$ के अनुसार क्रमशः दो वास्तविक, सम्पाती या काल्पनिक बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करेगी।

स्पर्शता का प्रतिबन्ध : यदि सरल रेखा $y=mx+c$, अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ को स्पर्श करती है, तब $c^2=a^2m^2-b^2$.

स्पर्श रेखा के समीकरण के विभिन्न रूप
(Equations of tangent in different forms)

(1) **बिन्दु रूप :** बिन्दु (x_1, y_1) पर अतिपरवलय की स्पर्श रेखा का समीकरण है, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(2) **प्राचलिक रूप :** बिन्दु $(a \sec \phi, b \tan \phi)$ पर अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्श रेखा का समीकरण है, $\frac{x}{a} \sec \phi - \frac{y}{b} \tan \phi = 1$

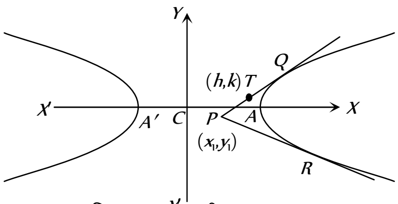
(3) **प्रवणता रूप :** अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ की m प्रवणता की स्पर्श रेखा का समीकरण $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ है तथा स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक $\left(\pm \frac{a^2 m}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}, \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}\right)$ हैं।

स्पर्श रेखा युग्म का समीकरण (Equation of pair of tangents)

माना अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के बाहर कोई बिन्दु $P(x_1, y_1)$ है, तब P से स्पर्शी युग्म PQ तथा PR खींचे जा सकते हैं।

स्पर्शी युग्म PQ तथा PR का समीकरण है, $SS_1 = T^2$

जहाँ, $S = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$



नियामक वृत्त : अतिपरवलय की परस्पर लम्बवत् स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ नियामक वृत्त कहलाता है।

अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के नियामक वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ है।

अभिलम्ब के समीकरणों के विभिन्न रूप
(Equations of normal in different forms)

(1) **बिन्दु रूप :** बिन्दु (x_1, y_1) पर अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के अभिलम्ब का समीकरण है, $\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = a^2 + b^2$

(2) **प्राचलिक रूपः** बिन्दु $(a \sec \theta, b \tan \theta)$ पर अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के अभिलम्ब का समीकरण है,

$ax \cos \theta + by \cot \theta = a^2 + b^2$

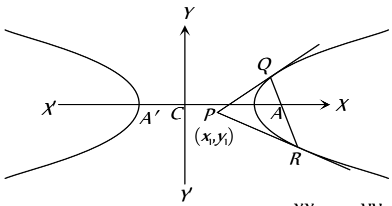
(3) **प्रवणता रूप :** अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर अभिलम्ब का प्रवणता m के पदों में समीकरण है, $y = mx \mp \frac{m(a^2 + b^2)}{\sqrt{a^2 - b^2m^2}}$

(4) **अभिलम्बता का प्रतिबन्ध :** यदि सरल रेखा $y = mx + c$, अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ का अभिलम्ब है, तब $c = \mp \frac{m(a^2 + b^2)}{\sqrt{a^2 - m^2b^2}}$ या $c^2 = \frac{m^2(a^2 + b^2)^2}{(a^2 - m^2b^2)}$, जो कि अभिलम्बता का प्रतिबन्ध है।

(5) **स्पर्श बिन्दु :** स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक $\left(\pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2m^2}}, \mp \frac{mb^2}{\sqrt{a^2 - b^2m^2}}\right)$ हैं।

किसी बिन्दु से अतिपरवलय पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा का समीकरण (Equation of chord of contact of tangents drawn from a point to a hyperbola)

माना, किसी बाह्य बिन्दु $P(x_1, y_1)$ से अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर खींची गयी स्पर्श रेखायें PQ तथा PR हैं।



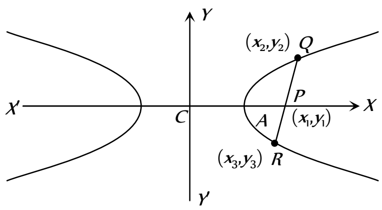
तब स्पर्श जीवा QR का समीकरण है, $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ या $T = 0$ (बिन्दु x_1, y_1 पर)

अतिपरवलय की जीवा का समीकरण, जिसका मध्यबिन्दु (x_1, y_1) ज्ञात है (Equation of the chord of the hyperbola whose mid point (x_1, y_1) is given)

अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ की उस जीवा का समीकरण, जो दियें गए बिन्दु (x_1, y_1) पर समद्विभाजित होती है,

$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1$

$= \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1$



अर्थात् $T = S_1$ होगा।

अतिपरवलय पर दो बिन्दुओं को मिलाने वाली जीवा का समीकरण (Equation of the chord joining two points on the hyperbola)

बिन्दुओं $P(a \sec \phi_1, b \tan \phi_1)$ तथा $Q(a \sec \phi_2, b \tan \phi_2)$ को मिलाने वाली जीवा का समीकरण है

$$y - b \tan \phi_1 = \frac{b \tan \phi_2 - b \tan \phi_1}{a \sec \phi_2 - a \sec \phi_1}(x - a \sec \phi_1)$$

$$\frac{x}{a} \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) - \frac{y}{b} \sin\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) = \cos\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$$

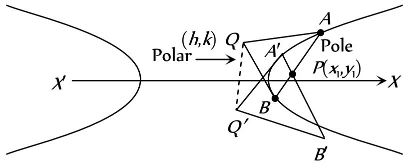
ध्रुव तथा ध्रुवी (Pole and Polar)

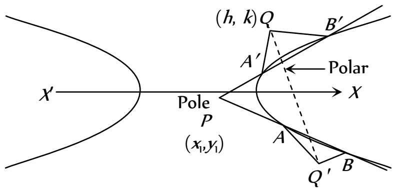
माना अतिपरवलय के अन्तः या बाह्यतः कोई बिन्दु P है। यदि P से खींची गई सरल रेखा अतिपरवलय को A तथा B पर प्रतिच्छेद करती है, तब बिन्दुओं A तथा B पर अतिपरवलय की स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ अतिपरवलय के सापेक्ष दिये गये बिन्दु P की ध्रुवी कहलाती हैं तथा बिन्दु P, इस ध्रुवी का ध्रुव कहलाता है।

अतः अभीष्ट ध्रुवी का समीकरण है, $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$, (जबकि (x_1,y_1) ध्रुव है)

नाभि की ध्रुवी नियता होती है।

कोई स्पर्श रेखा, स्वयं के स्पर्श बिन्दु की ध्रुवी होती है।





दी गई रेखा का ध्रुव : अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ के सापेक्ष दी गई रेखा $lx+my+n=0$ का ध्रुव $(x_1,y_1)=\left(-\frac{a^2l}{n},\frac{b^2m}{n}\right)$ है।

ध्रुव तथा ध्रुवी के गुणधर्म :

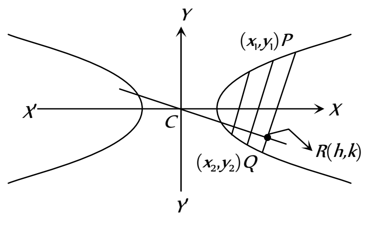
(i) यदि $P(x_1,y_1)$ की ध्रुवी $Q(x_2,y_2)$ से होकर गुजरती है, तब $Q(x_2,y_2)$ की ध्रुवी $P(x_1,y_1)$ से होकर जायेगी तथा इस प्रकार के बिन्दुओं को संयुग्मी बिन्दु कहते हैं।

(ii) यदि रेखा $lx+my+n=0$ का ध्रुव अन्य रेखा $l'x+m'y+n'=0$ पर स्थित है, तब दूसरी रेखा का ध्रुव पहली रेखा पर स्थित होगा तथा इस प्रकार की रेखाओं को संयुग्मी रेखायें कहते हैं।

(iii) किसी दी गई रेखा का ध्रुव, इसके सिरों पर स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु होता है।

अतिपरवलय का व्यास (Diameter of the hyperbola)

अतिपरवलय की समान्तर जीवाओं के निकाय के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ अतिपरवलय का व्यास कहलाता हैं तथा वह बिन्दु, जहाँ व्यास अतिपरवलय को प्रतिच्छेदित करता है, व्यास का शीर्ष कहलाता है। माना अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ की विभिन्न जीवाओं के लिये समान्तर जीवाओं का निकाय $y=mx+c$ है, तब अतिपरवलय के व्यास का समीकरण $y=\frac{b^2x}{a^2m}$ है, जो (0, 0) से होकर गुजरता है।



संयुग्मी व्यास : जब अतिपरवलय के दो व्यासों में से प्रत्येक, दूसरे की समान्तर जीवाओं को समद्विभाजित करता है, तो वे दोनों व्यास संयुग्मी व्यास कहलाते हैं।

यदि संयुग्मी व्यास $y=m_1x$, $y=m_2x$ हैं,

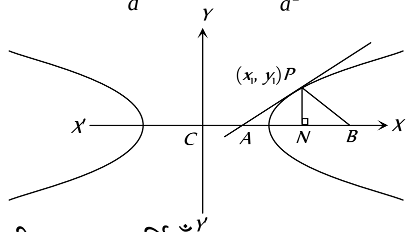
तब $m_1m_2=\frac{b^2}{a^2}$.

अतिपरवलय की अधोस्पर्शी तथा अधोलम्ब
(Subtangent and Subnormal of the hyperbola)

माना बिन्दु $P(x_1,y_1)$ पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब x-अक्ष को क्रमशः A तथा B पर मिलते हैं। अधोस्पर्शी की लम्बाई $AN=CN-CA=x_1-\frac{a^2}{x_1}$

अधोलम्ब की लम्बाई =

$$BN=CB-CN=\frac{(a^2+b^2)}{a^2}x_1-x_1=\frac{b^2}{a^2}x_1=(e^2-1)x_1$$



अतिपरवलय की अनन्त स्पर्शियाँ (Asymptotes of a hyperbola)

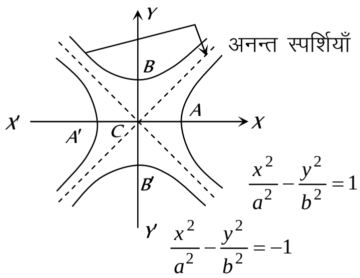
मूल बिन्दु से निश्चित दूरी पर किसी वक्र की अनन्त स्पर्शियाँ, वे सरल रेखाएँ हैं, जो कि वक्र को अनन्त पर स्पर्श करती हैं।

अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ की दो अनन्त स्पर्शियों के समीकरण $y=\pm\frac{b}{a}x$ या $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$ हैं।

अनन्त स्पर्शियों से सम्बन्धित महत्वपूर्ण बिन्दु :

(i) अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ की अनन्त स्पर्शियों का सयुंक्त समीकरण $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ होता है।

(ii) यदि $b=a$, अर्थात् आयताकार अतिपरवलय $x^2-y^2=a^2$ की अनन्त स्पर्शियाँ $y=\pm x$ होती हैं, जो कि लम्बवत् हैं।



(iii) अतिपरवलय तथा इसके सयुंग्मी की अनन्त स्पर्शियाँ एक समान होती हैं।

(iv) अनन्त स्पर्शी युग्म तथा अतिपरवलय में अन्तर और संयुग्मी अतिपरवलय तथा अनन्त स्पर्शियों में अन्तर एक समान होता है, अर्थात $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1\right)-\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)=\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)-\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1\right)$.

(v) अनन्त स्पर्शियाँ अतिपरवलय के केन्द्र से होकर जाती हैं।

(vi) अनन्त स्पर्शियों के मध्य कोणों का समद्विभाजक निर्देशांक अक्ष होता है।

(vii) अतिपरवलय $S=0$ अर्थात् $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ की अनन्त स्पर्शियों के मध्य कोण $2\tan^{-1}\frac{b}{a}$ या $2\sec^{-1}e$ होता है।

(viii) अनन्त स्पर्शियाँ, अतिपरवलय के अक्ष से बराबर कोण पर झुकी होती हैं।

समकोणीय या आयताकार अतिपरवलय

(Rectangular or equilateral hyperbola)

(1) **परिभाषा :** वह अतिपरवलय, जिसकी अनन्त स्पर्शियाँ परस्पर लम्बवत् हों, आयताकार या समकोणिक अतिपरवलय कहलाता है। आयताकार अतिपरवलय की उत्केन्द्रता सदैव $\sqrt{2}$ होती है।

द्विघात का व्यापक समीकरण एक आयताकार अतिपरवलय को प्रदर्शित करता है, यदि $\Delta \neq 0$, $h^2 > ab$ तथा x^2 का गुणांक + y^2 का गुणांक = 0

(2) **अतिपरवलय $xy = c^2$ पर किसी बिन्दु के प्राचलिक निर्देशांक :** यदि t अशून्य अचर है, तब समकोणिक अतिपरवलय $xy = c^2$ पर किसी बिन्दु के प्राचलिक निर्देशांक $(ct, c/t)$ होंगे। अतिपरवलय $xy = c^2$ पर बिन्दु $(ct, c/t)$ को बिन्दु 't' से निर्देशित करते हैं।

समकोणिक अतिपरवलय $x^2 - y^2 = a^2$ के लिये नाभियों के निर्देशांक $(\pm a\sqrt{2}, 0)$ तथा नियतायें $x = \pm a\sqrt{2}$ होती हैं।

समकोणिक अतिपरवलय $xy = c^2$ के लिये नाभियों के निर्देशांक $(\pm c\sqrt{2}, \pm c\sqrt{2})$ तथा नियतायें $x + y = \pm c\sqrt{2}$ होती हैं।

(3) **बिन्दुओं t_1 तथा t_2 को मिलाने वाली जीवा का समीकरण :** अतिपरवलय $xy = c^2$ पर दो बिन्दुओं $\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$ तथा $\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$ को मिलाने वाली जीवा का समीकरण है, $y - \frac{c}{t_1} = \frac{\frac{c}{t_2} - \frac{c}{t_1}}{ct_2 - ct_1}(x - ct_1)$

$\Rightarrow x + y\,t_1 t_2 = c(t_1 + t_2)$.

(4) **स्पर्श रेखा के समीकरण के विभिन्न रूप :**

(i) **बिन्दु रूप :** बिन्दु (x_1, y_1) पर अतिपरवलय $xy = c^2$ की स्पर्श रेखा का समीकरण है, $xy_1 + yx_1 = 2c^2$ या $\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 2$

(ii) **प्राचलिक रूप :** अतिपरवलय $xy = c^2$ के बिन्दु $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण है, $\frac{x}{t} + yt = 2c$

x_1 को ct से तथा y_1 को $\frac{c}{t}$ से प्रतिस्थापित करने पर बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $xy_1 + yx_1 = 2c^2$, प्राचलिक समीकरण $\frac{x}{t} + yt = 2c$ के रूप में परिवर्तित हो जाता है।

बिन्दुओं 't_1' तथा 't_2' पर स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु $\left(\frac{2ct_1t_2}{t_1 + t_2}, \frac{2c}{t_1 + t_2}\right)$ होता है।

(5) **अभिलम्ब के समीकरण के विभिन्न रूप :**

(i) **बिन्दु रूप :** बिन्दु (x_1, y_1) पर अतिपरवलय $xy = c^2$ के अभिलम्ब का समीकरण हैं, $xx_1 - yy_1 = x_1^2 - y_1^2$.

(ii) **प्राचलिक रूप :** बिन्दु $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ पर अतिपरवलय $xy = c^2$ के अभिलम्ब का समीकरण $xt^3 - yt - ct^4 + c = 0$ होगा, जो समीकरण $xx_1 - yy_1 = x_1^2 - y_1^2$, में x_1 को ct तथा y_1 को $\frac{c}{t}$ से प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है।

अर्थात् $xct - \frac{yc}{t} = c^2t^2 - \frac{c^2}{t^2} \Rightarrow xt^3 - yt - ct^4 + c = 0$

बिन्दु $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ पर अभिलम्ब का समीकरण, t में चतुर्थ घातीय है, अतः, सामान्यतः किसी बिन्दु से अतिपरवलय $xy = c^2$ पर चार अभिलम्ब खींचे जा सकते हैं।

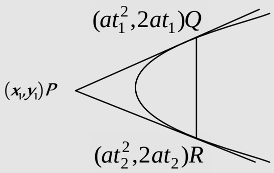
बिन्दु $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ से वक्र $xy = c^2$ पर अभिलम्ब, वक्र को पुनः t' में मिलता है, तब $t' = \frac{-1}{t^3}$। बिन्दुओं 't_1' व 't_2' पर अभिलम्बों का प्रतिच्छेद बिन्दु $\left(\frac{c\{t_1t_2(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2) - 1\}}{t_1t_2(t_1 + t_2)}, \frac{c\{t_1^3t_2^3 + (t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2)\}}{t_1t_2(t_1 + t_2)}\right)$ होता है।

Tips & Tricks

- परवलय $y^2 = 4ax$ के अन्दर बने त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{8a}(y_1 \sim y_2)(y_2 \sim y_3)(y_3 \sim y_1)$, जहाँ y_1, y_2, y_3 शीर्षों की कोटियाँ हैं।
- परवलय $y^2 = 4ax$ के अन्दर बने समबाहु त्रिभुज की भुजा की लम्बाई $= 8a\sqrt{3}$ (एक कोणीय बिन्दु शीर्ष पर है)।
- परवलय, जिसकी नाभि मूलबिन्दु तथा अक्ष, x-अक्ष है, का समीकरण $y^2 = 4a(x + a)$ है।
- परवलय, जिसका अक्ष x-अक्ष तथा नियता y-अक्ष है, का समीकरण $y^2 = 4a(x - a)$ है।
- परवलय, जिसकी नाभि मूल बिन्दु तथा अक्ष, y-अक्ष है, का समीकरण $x^2 = 4a(y + a)$ है।
- परवलय, जिसका अक्ष, y-अक्ष तथा नियता x-अक्ष है, का समीकरण $x^2 = 4a(y - a)$ है।
- यदि परवलय के शीर्ष तथा नाभि x-अक्ष पर, मूलबिन्दु से क्रमशः a तथा a' दूरी पर हैं, तब परवलय का समीकरण $y^2 = 4(a' - a)(x - a)$ होगा।
- परवलय, जिसका अक्ष, x-अक्ष के समान्तर है, का समीकरण $x = Ay^2 + By + C$ तथा y-अक्ष के समान्तर परवलय का समीकरण $y = Ax^2 + Bx + C$ होता है।
- यदि सरल रेखा $lx + my + n = 0$, परवलय $y^2 = 4ax$ को स्पर्श करती है, तब $ln = am^2$
- यदि सरलरेखा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$, परवलय $y^2 = 4ax$, को स्पर्श करती है, तब $p\cos\alpha + a\sin^2\alpha = 0$ तथा स्पर्श बिन्दु $(a\tan^2\alpha, -2a\tan\alpha)$ है।
- यदि रेखा $\frac{x}{l} + \frac{y}{m} = 1$, परवलय $y^2 = 4a(x + b)$ को स्पर्श करती है, तब $m^2(l + b) + al^2 = 0$.
- यदि दो परवलय $y^2 = 4x$ तथा $x^2 = 4y$ बिन्दु P, जिसकी भुज शून्य नहीं है, पर प्रतिच्छेद करते हैं। तब बिन्दु P पर प्रत्येक वक्र की स्पर्श रेखा x-अक्ष के साथ पूरक कोण बनाती है।

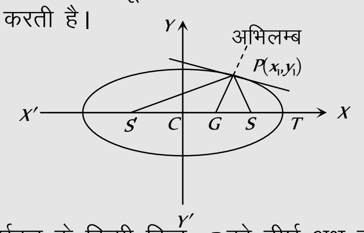
- परवलय की नाभीय जीवा के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखायें नियता से समकोण पर मिलती हैं।
- परवलय के किन्हीं तीन बिन्दुओं को मिलाने से प्राप्त त्रिभुज का क्षेत्रफल, उन बिन्दुओं पर खींची गई स्पर्श रेखाओं से निर्मित त्रिभुज के क्षेत्रफल का दुगुना होता है।
- यदि परवलय के बिन्दुओं P तथा Q पर खींची गई स्पर्श रेखायें T पर मिलती हैं, तब SP तथा SQ का गुणोत्तर माध्य ST होगा, अर्थात् $ST^2 = SP.SQ$
- परवलय की नाभीय जीवा के एक सिरे पर स्पर्श रेखा दूसरे सिरे पर अभिलम्ब के समान्तर होती है।
- परवलयों $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4by$ के मध्य प्रतिच्छेदन कोण $\tan^{-1}\left|\frac{3a^{1/3}b^{1/3}}{2(a^{2/3}+b^{2/3})}\right|$ होता है।
- परवलयों $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4by$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण $a^{\frac{1}{3}}x + b^{\frac{1}{3}}y + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} = 0$ होता है।
- रेखा $lx + my + n = 0$, परवलय $y^2 = 4ax$ पर अभिलम्ब होगी, यदि $al(l^2 + 2m^2) + m^2 n = 0$
- यदि $(at_1^2, 2at)$ तथा $(at_2^2, 2at_2)$ पर खींचे गये अभिलम्ब परवलय $y^2 = 4ax$ पर मिलते हैं, तब $t_1 t_2 = 2$
- यदि परवलय के बिन्दु $P(at^2, 2at)$ पर अभिलम्ब परवलय के शीर्ष पर समकोण अन्तरित करता है, तब $t^2 = 2$
- यदि परवलय $y^2 = 4ax$ का अभिलम्ब अक्ष के साथ ϕ कोण बनाता है, तब यह वक्र को $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan\phi\right)$ के कोण पर काटता है।
- यदि परवलय $y^2 = 4ax$ के दो बिन्दुओं P तथा Q पर अभिलम्ब वक्र के तीसरे बिन्दु R पर प्रतिच्छेद करता है, तब P तथा Q की कोटियों का गुणनफल $8a^2$ होगा।
- परवलय की दो लम्बवत् स्पर्श रेखाओं के स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाली स्पर्श जीवा सदैव नाभि से होकर गुजरती है।
- यदि बिन्दु (x_1, y_1) से परवलय $y^2 = 4ax$, पर स्पर्श रेखायें खींची जायें, तब स्पर्श जीवा की लम्बाई

$$= \frac{1}{|a|}\sqrt{(y_1^2 - 4ax_1)(y_1^2 + 4a^2)}$$



- बिन्दु (x_1, y_1) से परवलय $y^2 = 4ax$ पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं तथा इनकी स्पर्श जीवा से निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{(y_1^2 - 4ax_1)^{3/2}}{2a}$ होता है।
- यदि नाभीय जीवा के एक सिरे के निर्देशांक $(at_1^2, 2at_1)$ हैं, तब $t_1 t_2 = -1$ से, दूसरे सिरे $(at_2^2, 2at_2)$ के निर्देशांक $\left(\frac{a}{t_1^2}, \frac{-2a}{t_1}\right)$ होंगे।
- यदि नाभीय जीवा का एक सिरा $(at^2, 2at)$ है, तब दूसरा सिरा $\left(\frac{a}{t^2}, -2at\right)$ होगा तथा जीवा की लम्बाई $= a\left(t + \frac{1}{t}\right)^2$.
- परवलय पर दो बिन्दुओं 't_1' व 't_2' को मिलाने वाली जीवा की लम्बाई $a(t_1 - t_2)\sqrt{(t_1 + t_2)^2 + 4}$ होती है।
- परवलय $y^2 = 4ax$ के मध्य, रेखा $y = mx + c$ द्वारा बने अंतःखण्ड की लम्बाई $\frac{4}{m^2}\sqrt{a(1+m^2)(a - mc)}$ होती है।
- किसी परवलय के शीर्ष बिन्दु पर समकोण अंतरित करने वाली जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ एक परवलय होता है।
- परवलय $y^2 = 4ax$ की नाभीय जीवा, जो x-अक्ष के साथ α कोण बनाती है, की लम्बाई $4a\text{cosec}^2\alpha$ होती है तथा इस पर शीर्ष से लम्ब की लम्बाई $a = \sin\alpha$ होती हैं।
- परवलय की नाभीय जीवा की लम्बाई, शीर्ष से इसकी दूरी के वर्ग के समानुपाती होती है।
- यदि परवलय की नाभीय जीवा के खण्डों की लम्बाई l_1 व l_2 है, तब इसके नाभिलम्ब की लम्बाई $\frac{4l_1 l_2}{l_1 + l_2}$ होगी।
- परवलय $y^2 = 4ax$ का अर्द्धनाभिलम्ब, परवलय की किसी नाभीय जीवा के खण्डों का हरात्मक माध्य होता है।
- सरल रेखा $lx + my + n = 0$, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को स्पर्श करती है, यदि $a^2 l^2 + b^2 m^2 = n^2$.
- रेखा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को स्पर्श करती है यदि $a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = p^2$ तथा स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{a^2\cos\alpha}{p}, \frac{b^2\sin\alpha}{p}\right)$ होंगे।
- यदि एक r त्रिज्या का वृत्त, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के संकेन्द्रीय है, तब उभयनिष्ठ स्पर्शी का दीर्घ अक्ष से झुकाव $\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{r^2 - b^2}{a^2 - r^2}\right)}$ होता है।
- केन्द्र से दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्श रेखा पर खींचे गये लम्ब के पाद का बिन्दुपथ $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ या $r^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$ (ध्रुवीय निर्देशांकों मे) होता है।
- दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्श रेखा का भाग, जो कि अक्षों के मध्य अंतःखन्ड काटता है, के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ $a^2y^2 + b^2x^2 = 4x^2y^2$ होता है।
- यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का अभिलम्ब $y = mx + c$ है, तब अभिलम्बता के प्रतिबन्ध से, $c^2 = \frac{m^2(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2m^2)}$.
- यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, का अभिलम्ब सरल रेखा $lx + my + n = 0$` हो, तब $\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \left(\frac{a^2 - b^2}{n^2}\right)^2$.
- दीर्घवृत्त में एक बिन्दु से चार अभिलम्ब खींचे जा सकते है।

✍ यदि S नाभि है तथा बिन्दु P पर अभिलम्ब दीर्घवृत्त के अक्ष को बिन्दु G पर मिलता है तब $SG = e.SP$, तथा P पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब P की नाभीय दूरियों के मध्य बाह्यः तथा अन्तःकोणों को समद्विभाजित करती है।



✍ यदि दीर्घवृत्त के किसी बिन्दु P को दीर्घ अक्ष के सिरों से मिलाया जाये, तब इसके द्वारा अन्तःखंडित नियता का खण्ड, संगत नाभि पर समकोण अन्तरित करता है।

✍ दीर्घवृत्त की नाभिलम्ब के सिरों पर अभिलम्बों के समीकरण तथा प्रत्येक समीकरण लघु अक्ष के सिरे से गुजरता है, यदि $e^4 + e^2 - 1 = 0$

✍ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर तीन बिन्दुओं द्वारा निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल $2ab \sin\left(\frac{\phi - \psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi - \theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right)$ होगा, जहाँ θ, ϕ तथा ψ उत्केन्द्र कोण है।

✍ यदि दीर्घवृत्तों $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ तथा $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ का प्रतिच्छेद बिन्दु, पहले दीर्घवृत्त के सयुंग्मी व्यास के सिरों पर हो, तब $\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} = 2$

✍ दीर्घवृत्त के दो लम्बवत् व्यासों के व्युत्क्रम के वर्गों का योग अचर रहता है।

✍ दीर्घवृत्त में, लघु अक्ष के समान्तर सभी जीवाओं का दीर्घाक्ष समद्विभाजित करता है तथा इसका विलोम भी सत्य है। अतः दीर्घवृत्त के दीर्घाक्ष तथा लघुअक्ष दीर्घवृत्त के संयुग्मी व्यास होते हैं किन्तु वे प्रतिबन्ध $m_1.m_2 = -b^2/a^2$ को सन्तुष्ट नहीं करते है तथा केवल लम्बवत् संयुग्मी व्यास होते हैं।

✍ अतिपरवलय तथा इसके संयुग्मी की नाभियाँ चक्रीय होती हैं।

✍ किसी बाह्य बिन्दु से अतिपरवलय पर दो स्पर्श रेखायें खींची जा सकती है।

✍ यदि सरल रेखा $lx + my + n = 0$ अतिपरवलय $\frac{x}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ को स्पर्श करती है, तब $a^2l^2 - b^2m^2 = n^2$.

✍ यदि सरल रेखा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$, अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ को स्पर्श काटती है, तब $a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha = p^2$.

✍ यदि रेखा $lx + my + n = 0$, अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ का अभिलम्ब है, तब $\frac{a^2}{l^2} - \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2+b^2)^2}{n^2}$.

✍ सामान्यतः किसी बिन्दु से अतिपरवलय पर चार अभिलंब खींचे जा सकते हैं।

✍ यदि अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर उन तीन बिन्दुओं के उत्केन्द्र कोण α, β, γ हैं, जिन पर अभिलम्ब संगामी हैं, तब $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta+\gamma) + \sin(\gamma+\alpha) = 0$

✍ बिन्दु (h,k) से अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के अभिलम्बों का पाद $a^2y(x-h) + b^2x(y-k) = 0$ पर स्थित होता है।

✍ सरल रेखा $y = mx + c$ से अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ द्वारा अन्तःखण्डित जीवा की लम्बाई $= \frac{2ab\sqrt{[c^2 - (a^2m^2 - b^2)](1+m^2)}}{(b^2 - a^2m^2)}$.

✍ यदि बिन्दुओं $(a\sec\theta_1, b\tan\theta_1)$ तथा $(a\sec\theta_2, b\tan\theta_2)$ को मिलाने वाली जीवा, अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ की नाभि से गुजरती है, तब $\tan\frac{\theta_1}{2}\tan\frac{\theta_2}{2} = \frac{1-e}{1+e}$.

✍ यदि अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के सापेक्ष बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) की ध्रुवियाँ समकोण पर हों, तब $\frac{x_1x_2}{y_1y_2} + \frac{a^4}{b^4} = 0$

✍ अतिपरवलय के संयुग्मी व्यासों के सिरों पर स्पर्श रेखाओं द्वारा निर्मित समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष अनन्त स्पर्शियों पर स्थित होते हैं तथा क्षेत्रफल अचर होता है।

✍ अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर, किसी बिन्दु से अनन्त स्पर्शियों पर खींचे गये लम्बों की लम्बाईयों का गुणनफल $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ होता है।

✍ बिन्दु $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ से वक्र $xy = c^2$ पर अभिलम्ब, वक्र को पुनः t' में मिलता है, तब $t' = -\frac{1}{t^3}$

✍ यदि किसी त्रिभुज के शीर्ष, समकोणिक अतिपरवलय पर हों, तब त्रिभुज का लम्बकेन्द्र भी इसी अतिपरवलय पर स्थित होगा।

✍ दो समकोणिक अतिपरवलयों के प्रतिच्छेदन से गुजरने वाले सभी शांकव, समकोणिक अतिपरवलय होते हैं।

✍ समकोणिक अतिपरवलय $xy = c^2$ के अंदर अनन्त त्रिभुज निर्मित किये जा सकते हैं, जिनकी सभी भुजायें परवलय $y^2 = 4ax$ को स्पर्श करती हैं।

Ordinary Thinking

Objective Questions

शांकव परिच्छेद : सामान्य

1. शांकव $2x^2 - 72xy + 23y^2 - 4x - 28y - 48 = 0$ द्वारा व्यक्त वक्र का केन्द्र है
(a) $\left(\frac{11}{15}, \frac{2}{25}\right)$ (b) $\left(\frac{2}{25}, \frac{11}{25}\right)$
(c) $\left(\frac{11}{15}, -\frac{2}{25}\right)$ (d) $\left(-\frac{11}{25}, -\frac{2}{25}\right)$

2. समीकरण $14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$ द्वारा प्रदर्शित शांकव का केन्द्र है [BIT Ranchi 1986]
(a) (2, 3) (b) (2, – 3)
(c) (– 2, 3) (d) (– 2, – 3)

3. उस शांकव का समीकरण जिसकी नाभि (1,–1), नियता $x - y + 1 = 0$ एवं उत्केन्द्रता $\sqrt{2}$ है, होगा [EAMCET 1994]
(a) $x^2 - y^2 = 1$ (b) $xy = 1$
(c) $2xy - 4x + 4y + 1 = 0$ (d) $2xy + 4x - 4y - 1 = 0$

4. यदि एक बिन्दु $(x, y) \equiv (\tan\theta + \sin\theta, \tan\theta - \sin\theta)$ है, तब (x, y) का बिन्दुपथ है [EAMCET 2002]
(a) $(x^2y)^{2/3} + (xy^2)^{2/3} = 1$
(b) $x^2 - y^2 = 4xy$
(c) $(x^2 - y^2)^2 = 16xy$
(d) $x^2 - y^2 = 6xy$

5. समीकरण $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 4$ प्रदर्शित करता है [Orissa JEE 2004]
(a) परवलय (b) दीर्घवृत्त
(c) वृत्त (d) सरल रेखा का युग्म

6. वक्र $r = \sin\theta + \cos\theta$ और $r = 2\sin\theta$ के प्रतिच्छेदन कोण का मान है [UPSEAT 2004]
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$
(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. समीकरण $y^2 - x^2 + 2x - 1 = 0$ प्रदर्शित करता है [UPSEAT 2004]
(a) अतिपरवलय (b) दीर्घवृत्त
(c) सरल रेखा युग्म (d) आयताकार अतिपरवलय

परवलय

1. यदि परवलय $y^2 = 4ax$ की किसी द्विगुणित कोटि की लम्बाई $8a$ हो, तो परवलय के शीर्ष को इस द्विगुणित कोटि के सिरों से मिलाने वाली रेखाओं के बीच का कोण है
(a) 30° (b) 60°
(c) 90° (d) 120°

2. PQ परवलय $y^2 = 4ax$ की एक द्विगुणित कोटि है। PQ को समत्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं का बिन्दुपथ है
(a) $9y^2 = 4ax$ (b) $9x^2 = 4ay$
(c) $9y^2 + 4ax = 0$ (d) $9x^2 + 4ay = 0$

3. यदि परवलय का शीर्ष मूलबिन्दु तथा नियता $x + 5 = 0$ हो, तो उसका नाभिलम्ब होगा [RPET 1991]
(a) 5 (b) 10
(c) 20 (d) 40

4. उस परवलय का नाभिलम्ब जिसकी नियता $x + y - 2 = 0$ तथा नाभि (3, – 4) है, होगा
(a) $-3\sqrt{2}$ (b) $3\sqrt{2}$
(c) $-3/\sqrt{2}$ (d) $3/\sqrt{2}$

5. परवलय $y^2 = 6x$ के उन बिन्दुओं को जिनकी भुज 24 है, शीर्ष से मिलाने वाली रेखाओं का समीकरण है
(a) $y \pm 2x = 0$ (b) $2y \pm x = 0$
(c) $x \pm 2y = 0$ (d) $2x \pm y = 0$

6. परवलय $y^2 = 36x$ पर स्थित वे बिन्दु, जिनकी कोटि भुज की तिगुनी है, हैं
(a) (0, 0), (4, 12) (b) (1, 3), (4, 12)
(c) (4, 12) (d) इनमें से कोई नहीं

7. $y^2 = 12x$ पर स्थित वे बिन्दु जिनकी नाभीय दूरी 4 है, हैं
(a) $(2, \sqrt{3}), (2, -\sqrt{3})$ (b) $(1, 2\sqrt{3}), (1, -2\sqrt{3})$
(c) (1, 2) (d) इनमें से कोई नहीं

8. परवलय $y^2 = 16x$ पर स्थित उस बिन्दु जिसकी कोटि भुज की दुगनी है, की नाभीय दूरी है
(a) 6 (b) 8
(c) 10 (d) 12

9. परवलय $5y^2 = 4x$ के नाभिलम्ब के सिरों के निर्देशांक हैं
(a) $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right), \left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right), \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$
(c) $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{-4}{5}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

10. बिन्दु (–4, – 2) से गुजरने वाले एक परवलय का शीर्ष मूलबिन्दु पर तथा अक्ष y-अक्ष है। परवलय का नाभिलम्ब होगा
(a) 6 (b) 8
(c) 10 (d) 12

11. परवलय $x^2 = -16y$ की नाभि है [RPET 1987; MP PET 1988, 92]
(a) (4, 0) (b) (0, 4)
(c) (– 4, 0) (d) (0, – 4)

12. यदि किसी परवलय का शीर्ष (2, 0) एवं नियता y-अक्ष हो तो इसकी नाभि है [MNR 1981]
(a) (2, 0) (b) (– 2, 0)
(c) (4, 0) (d) (– 4, 0)

13. यदि परवलय $y^2 = 4ax$ बिन्दु (– 3, 2) से गुजरता है, तो इसके नाभिलम्ब की लम्बाई है [RPET 1986, 95]
(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{3}$
(c) $\frac{4}{3}$ (d) 4

14. परवलय $x^2 + 8y = 0$ के नाभिलम्ब के सिरे हैं [MP PET 1995]

(a) (– 4, – 2) तथा (4, 2) (b) (4, – 2) तथा (– 4, 2)
(c) (– 4, – 2) तथा (4, – 2) (d) (4, 2) तथा (– 4, 2)

15. परवलय $x^2 = 4ay$ के नाभिलम्ब के सिरे हैं [RPET 1997]
(a) $(a, 2a), (2a, -a)$ (b) $(-a, 2a), (2a, a)$
(c) $(a, -2a), (2a, a)$ (d) $(-2a, a), (2a, a)$

16. परवलय का समीकरण, जिसका शीर्ष मूलबिन्दु है, अक्ष, *y*-अक्ष है, तथा जो बिन्दु (6, – 3) से जाता है, होगा [MP PET 2001]
(a) $y^2 = 12x + 6$ (b) $x^2 = 12y$
(c) $x^2 = -12y$ (d) $y^2 = -12x + 6$

17. परवलय $x^2 = -8ay$ की नाभि तथा नियता हैं [RPET 2001]
(a) $(0, -2a)$ तथा $y = 2a$ (b) $(0, 2a)$ तथा $y = -2a$
(c) $(2a, 0)$ तथा $x = -2a$ (d) $(-2a, 0)$ तथा $x = 2a$

18. उस परवलय का समीकरण जिनकी नाभि (3, 0) तथा नियता $x + 3 = 0$ है, है [EAMCET 2002]
(a) $y^2 = 3x$ (b) $y^2 = 2x$
(c) $y^2 = 12x$ (d) $y^2 = 6x$

19. परवलय की नाभीय जीवा के ध्रुवों का बिन्दुपथ, परवलय की होती है [EAMCET 2002]
(a) शीर्ष पर स्पर्शी (b) अक्ष
(c) नाभीय जीवा (d) नियता

20. परवलय $y^2 = x$ सममित है [Kerala (Engg.) 2002]
(a) *x*-अक्ष के परितः (b) *y*-अक्ष के परितः
(c) *x* व *y*-अक्ष दोनों के परितः (d) रेखा $y = x$ के परितः

21. परवलय $y^2 = 18x$ का वह बिन्दु, जिसके लिए कोटि भुज की तिगुनी है, है [MP PET 2003]
(a) (6, 2) (b) (–2, –6)
(c) (3, 18) (d) (2, 6)

22. परवलय के नाभिलम्ब का समीकरण $x + y = 8$ तथा शीर्ष पर स्पर्श रेखा का समीकरण $x + y = 12$ है, तब नाभिलम्ब की लम्बाई है [MP PET 2002]
(a) $4\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{2}$
(c) 8 (d) $8\sqrt{2}$

23. परवलय $y^2 + 2y + x = 0$ का शीर्ष किस पाद में स्थित है [MP PET 1989]
(a) पहले (b) दूसरे
(c) तीसरे (d) चौथे

24. समीकरण $x^2 - 2xy + y^2 + 3x + 2 = 0$ निरूपित करती है [UPSEAT 2001]
(a) एक परवलय (b) एक दीर्घवृत्त
(c) एक अतिपरवलय (d) एक वृत्त

25. $x - 2 = t^2, y = 2t$ निम्नलिखित में से किस परवलय के प्राचल समीकरण हैं
(a) $y^2 = 4x$ (b) $y^2 = -4x$
(c) $x^2 = -4y$ (d) $y^2 = 4(x - 2)$

26. परवलय $x^2 + 4x + 2y = 0$ के नाभिलम्ब का समीकरण है [Pb. CET 2004]
(a) $2y + 3 = 0$ (b) $3y = 2$
(c) $2y = 3$ (d) $3y + 2 = 0$

27. परवलय $9x^2 - 6x + 36y + 9 = 0$ का शीर्ष है
(a) $\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{9}\right)$ (b) $\left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{2}\right)$
(c) $\left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

28. उस परवलय का समीकरण जिसका अक्ष ऊर्ध्वाधर है एवं बिन्दुओं (0, 0), (3, 0) व (–1, 4) से गुजरता है, होगा
(a) $x^2 - 3x - y = 0$ (b) $x^2 + 3x + y = 0$
(c) $x^2 - 4x + 2y = 0$ (d) $x^2 - 4x - 2y = 0$

29. उस परवलय का समीकरण जिसका शीर्ष (–1, –2), अक्ष ऊर्ध्वाधर है तथा जो बिन्दु (3, 6) से गुजरता है, है
(a) $x^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ (b) $2x^2 = 3y$
(c) $x^2 - 2x - y + 3 = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

30. परवलय $x^2 - 4x - 3y + 10 = 0$ का अक्ष है
(a) $y + 2 = 0$ (b) $x + 2 = 0$
(c) $y - 2 = 0$ (d) $x - 2 = 0$

31. उस परवलय का समीकरण जिसकी नियता $y = 2x - 9$ तथा नाभि (– 8, – 2) है, होगा
(a) $x^2 + 4y^2 + 4xy + 16x + 2y + 259 = 0$
(b) $x^2 + 4y^2 + 4xy + 116x + 2y + 259 = 0$
(c) $x^2 + y^2 + 4xy + 116x + 2y + 259 = 0$
(d) इनमें से कोई नहीं

32. उस परवलय का समीकरण जिसकी नाभि (– 3, 0) तथा नियता $x + 5 = 0$ है, होगा [RPET 1985, 86, 89; MP PET 1991]
(a) $x^2 = 4(y + 4)$ (b) $x^2 = 4(y - 4)$
(c) $y^2 = 4(x + 4)$ (d) $y^2 = 4(x - 4)$

33. उस परवलय, जिसका शीर्ष तथा नाभि *x*-अक्ष पर मूल बिन्दुओं से *a* तथा *a'* दूरी पर हैं, का समीकरण होगा [RPET 2000]
(a) $y^2 = 4(a'-a)(x - a)$ (b) $y^2 = 4(a'-a)(x + a)$
(c) $y^2 = 4(a'+a)(x - a)$ (d) $y^2 = 4(a'+a)(x + a)$

34. परवलय $y^2 = 4y - 4x$ की नाभि है [MP PET 1991]
(a) (0, 2) (b) (1, 2)
(c) (2, 0) (d) (2, 1)

35. परवलय $x^2 + 4x + 2y - 7 = 0$ का शीर्ष है [MP PET 1990]
(a) $\left(-2, \frac{11}{2}\right)$ (b) (–2, 2)
(c) (–2, 11) (d) (2, 11)

36. यदि किसी परवलय का अक्ष क्षैतिज हो और वह बिन्दुओं (0, 0), (0, –1) , (6, 1) से गुजरता हो, तो उसका समीकरण होगा
(a) $y^2 + 3y - x - 4 = 0$ (b) $y^2 - 3y + x - 4 = 0$
(c) $y^2 - 3y - x - 4 = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

37. समीकरण $y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ द्वारा निरूपित परवलय के नाभिलम्ब का समीकरण है

(a) $x = \frac{B^2 + A^2 - C}{2A}$ (b) $x = \frac{B^2 - A^2 + C}{2A}$

(c) $x = \frac{B^2 - A^2 - C}{2A}$ (d) $x = \frac{A^2 - B^2 - C}{2A}$

38. वक्र $y^2 = 8x$ के प्राचल समीकरण हैं

(a) $x = t^2, y = 2t$ (b) $x = 2t^2, y = 4t$

(c) $x = 2t, y = 4t^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

39. समीकरण $x = \frac{t}{4}, y = \frac{t^2}{4}$ निरूपित करता है

(a) वृत्त (b) परवलय

(c) दीर्घवृत्त (d) अतिपरवलय

40. उस परवलय का समीकरण जिसका शीर्ष एवं नाभि क्रमशः (0, 4) व (0, 2) हैं, होगा [RPET 1987, 89, 90, 91]

(a) $y^2 - 8x = 32$ (b) $y^2 + 8x = 32$

(c) $x^2 + 8y = 32$ (d) $x^2 - 8y = 32$

41. वक्र $16x^2 + 8xy + y^2 - 74x - 78y + 212 = 0$ प्रदर्शित करता है

(a) परवलय (b) अतिपरवलय

(c) दीर्घवृत्त (d) इनमें से कोई नहीं

42. परवलय $9x^2 - 6x + 36y + 19 = 0$ के नाभिलम्ब की लम्बाई है [MP PET 1994]

(a) 36 (b) 9

(c) 6 (d) 4

43. परवलय $9y^2 - 16x - 12y - 57 = 0$ का अक्ष है [MNR 1995]

(a) $3y = 2$ (b) $x + 3y = 3$

(c) $2x = 3$ (d) $y = 3$

44. किसी परवलय का शीर्ष (*a*, *b*) है एवं इसके नाभिलम्ब की लम्बाई *l* है। यदि परवलय का अक्ष धनात्मक *y*-अक्ष के अनुदिश है, तो इसका समीकरण है

(a) $(x + a)^2 = \frac{l}{2}(2y - 2b)$ (b) $(x - a)^2 = \frac{l}{2}(2y - 2b)$

(c) $(x + a)^2 = \frac{l}{4}(2y - 2b)$ (d) $(x - a)^2 = \frac{l}{8}(2y - 2b)$

45. यदि परवलय $y = x^2 - 8x + c$ का शीर्ष *x*-अक्ष पर स्थित है, तो *c* का मान होगा

(a) –16 (b) – 4

(c) 4 (d) 16

46. उन वक्रों के प्रतिच्छेद बिन्दु जिनके प्राचलिक समीकरण $x = t^2 + 1, y = 2t$ एवं $x = 2s, y = \frac{2}{s}$ हैं, है

(a) (1, – 3) (b) (2, 2)

(c) (–2, 4) (d) (1, 2)

47. परवलय $y^2 = 5x + 4y + 1$ का नाभिलम्ब है [MP PET 1996]

(a) $\frac{5}{4}$ (b) 10

(c) 5 (d) $\frac{5}{2}$

48. एक बिन्दु इस प्रकार से गमन करता है कि उसकी दूरी बिन्दु (*a*, 0) और *y*-अक्ष से समान है, तो उसके बिन्दुपथ का समीकरण है

(a) $y^2 - 2ax + a^2 = 0$ (b) $y^2 + 2ax + a^2 = 0$

(c) $x^2 - 2ay + a^2 = 0$ (d) $x^2 + 2ay + a^2 = 0$

49. परवलय $x^2 = 2x + 2y$ की नाभि है

(a) $\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ (b) $\left(1, \frac{-1}{2}\right)$

(c) (1, 0) (d) (0, 1)

50. परवलय $y^2 - 4y - 2x - 8 = 0$ का नाभिलम्ब है

(a) 2 (b) 4

(c) 8 (d) 1

51. परवलय जिसकी नाभि (*a*, *b*) तथा नियता $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ है, का समीकरण है [MP PET 1997]

(a) $(ax - by)^2 - 2a^3x - 2b^3y + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$

(b) $(ax + by)^2 - 2a^3x - 2b^3y - a^4 + a^2b^2 - b^4 = 0$

(c) $(ax - by)^2 + a^4 + b^4 - 2a^3x = 0$

(d) $(ax - by)^2 - 2a^3x = 0$

52. परवलय $4y^2 + 2x - 20y + 17 = 0$ के नाभिलम्ब की लम्बाई है [MP PET 1999]

(a) 3 (b) 6

(c) $\frac{1}{2}$ (d) 9

53. परवलय $x^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ की उत्क्रेन्द्रता होगी [RPET 1996; Pb. CET 2003]

(a) $e = 0$ (b) $e = 1$

(c) $e > 4$ (d) $e = 4$

54. परवलय $3x - 2y^2 - 4y + 7 = 0$ का शीर्ष होगा [RPET 1996]

(a) (3, 1) (b) (– 3, –1)

(c) (– 3, 1) (d) इनमें से कोई नहीं

55. परवलय $4y^2 - 6x - 4y = 5$ की नाभि होगी [RPET 1997]

(a) $\left(\frac{-8}{5}, 2\right)$ (b) $\left(\frac{-5}{8}, \frac{1}{2}\right)$

(c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$ (d) $\left(\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}\right)$

56. परवलय $x^2 + 8x + 12y + 4 = 0$ का शीर्ष होगा [DCE 1999]

(a) (– 4, 1) (b) (4, –1)

(c) (– 4, –1) (d) (4, 1)

57. परवलय $(y - 2)^2 = 20(x + 3)$ की नाभि होगी [Karnataka CET 1999]

(a) (3, –2) (b) (2, –3)

(c) (2, 2) (d) (3, 3)

58. परवलय $x^2 - 4x - 8y + 12 = 0$ के नाभिलम्ब की लम्बाई है [MP PET 2000]

(a) 4 (b) 6

(c) 8 (d) 10

59. परवलय $y = 2x^2 + x$ की नाभि है [MP PET 2000]

(a) (0, 0) (b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

(c) $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ (d) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$

60. परवलय $y^2 - x - 2y + 2 = 0$ की नाभि होगी [UPSEAT 2000]

(a) $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ (b) (1, 2)

(c) $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ (d) $\left(\frac{5}{4}, 1\right)$

61. परवलय $(y-2)^2 = 16(x-1)$ का शीर्ष होगा [Karnataka CET 2001]

(a) (2, 1) (b) (1, –2)
(c) (–1, 2) (d) (1, 2)

62. उस परवलय का समीकरण, जिसका शीर्ष (1, 1) तथा नाभि (3, 1) है, है [Karnataka CET 2001, 02]

(a) $(x-1)^2 = 8(y-1)$ (b) $(y-1)^2 = 8(x-3)$

(c) $(y-1)^2 = 8(x-1)$ (d) $(x-3)^2 = 8(y-1)$

63. उस परवलय का समीकरण, जिसकी नाभि (5, 3) तथा नियता $3x - 4y + 1 = 0$, है [MP PET 2002]

(a) $(4x+3y)^2 - 256x - 142y + 849 = 0$

(b) $(4x-3y)^2 - 256x - 142y + 849 = 0$

(c) $(3x+4y)^2 - 142x - 256y + 849 = 0$

(d) $(3x-4y)^2 - 256x - 142y + 849 = 0$

64. निम्न में से कौन सा बिन्दु परवलय $x^2 = 4ay$ पर स्थित है [RPET 2002]

(a) $x = at^2, y = 2at$ (b) $x = 2at, y = at$

(c) $x = 2at^2, y = at$ (d) $x = 2at, y = at^2$

65. उस परवलय का समीकरण, जिसके शीर्ष (2, –1) तथा नाभि (2, – 3) है, होगा [Kerala (Engg.) 2002]

(a) $x^2 + 4x - 8y - 12 = 0$ (b) $x^2 - 4x + 8y + 12 = 0$

(c) $x^2 + 8y = 12$ (d) $x^2 - 4x + 12 = 0$

66. परवलय $x^2 - 4x - 8y + 12 = 0$ की नियता है [Karnataka CET 2003]

(a) $x = 1$ (b) $y = 0$

(c) $x = -1$ (d) $y = -1$

67. उस परवलय का समीकरण जिसकी नाभि (0, 0) तथा नियता $x + y = 4$ है, है [EAMCET 2003]

(a) $x^2 + y^2 - 2xy + 8x + 8y - 16 = 0$

(b) $x^2 + y^2 - 2xy + 8x + 8y = 0$

(c) $x^2 + y^2 + 8x + 8y - 16 = 0$

(d) $x^2 - y^2 + 8x + 8y - 16 = 0$

68. यदि (0, 6) और (0, 3) क्रमशः परवलय के शीर्ष व नाभि हैं तब परवलय का समीकरण है [Karnataka CET 2004]

(a) $x^2 + 12y = 72$ (b) $x^2 - 12y = 72$

(c) $y^2 - 12x = 72$ (d) $y^2 + 12x = 72$

69. परवलय $x^2 + 8y - 2x = 7$ की नियता का समीकरण है [UPSEAT 2004]

(a) $y = 3$ (b) $y = -3$

(c) $y = 2$ (d) $y = 0$

70. परवलय $2x^2 + 5y - 3x + 4 = 0$ के अक्ष का समीकरण है [Pb. CET 2000]

(a) $x = \frac{3}{4}$ (b) $y = \frac{3}{4}$

(c) $x = -\frac{1}{2}$ (d) $x - 3y = 5$

71. यदि $x^2 + 6x + 20y - 51 = 0$ है, तो परवलय के अक्ष का समीकरण है [Orrisa JEE 2004]

(a) $x + 3 = 0$ (b) $x - 3 = 0$
(c) $x = 1$ (d) $x + 1 = 0$

72. परवलय $y = x^2 - x$ के उस बिन्दु पर स्पर्श रेखा का समीकरण क्या होगा, जहाँ $x = 1$ है [MP PET 1992]

(a) $y = -x - 1$ (b) $y = -x + 1$

(c) $y = x + 1$ (d) $y = x - 1$

73. परवलय $y^2 + 4x + 2y - 8 = 0$ के नाभिलम्ब तथा अक्ष का प्रतिच्छेद बिन्दु है

(a) $\left(\frac{5}{4}, -1\right)$ (b) $\left(\frac{9}{4}, -1\right)$

(c) $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

74. परवलय $y^2 = 2x$ की स्पर्श रेखा $18x - 6y + 1 = 0$ का स्पर्श बिन्दु है

(a) $\left(\frac{-1}{18}, \frac{-1}{3}\right)$ (b) $\left(\frac{-1}{18}, \frac{1}{3}\right)$

(c) $\left(\frac{1}{18}, \frac{-1}{3}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{18}, \frac{1}{3}\right)$

75. परवलयों $x^2 = 108y$ तथा $y^2 = 32x$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण है

(a) $2x + 3y = 36$ (b) $2x + 3y + 36 = 0$

(c) $3x + 2y = 36$ (d) $3x + 2y + 36 = 0$

76. रेखा $lx + my + n = 0$ परवलय $y^2 = 4ax$ को स्पर्श करेगी यदि [RPET 1988; MNR 1977; MP PET 2003]

(a) $mn = al^2$ (b) $lm = an^2$

(c) $ln = am^2$ (d) $mn = al$

77. रेखा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ परवलय $y^2 = 4a(x+a)$ को स्पर्श करेगी, यदि

(a) $p\cos\alpha + a = 0$ (b) $p\cos\alpha - a = 0$

(c) $a\cos\alpha + p = 0$ (d) $a\cos\alpha - p = 0$

78. x-अक्ष से कोण θ बनाने वाली परवलय $y^2 = 4ax$ की स्पर्श रेखा का समीकरण है

(a) $y = x\cot\theta + a\tan\theta$ (b) $x = y\tan\theta + a\cot\theta$

(c) $y = x\tan\theta + a\cot\theta$ (d) इनमें से कोई नहीं

79. रेखा $y = 2x + 7$ के समान्तर परवलय $y^2 = 4x + 5$ की स्पर्श रेखा का समीकरण है [MNR 1979]

(a) $2x - y - 3 = 0$ (b) $2x - y + 3 = 0$

(c) $2x + y + 3 = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

80. परवलय $y^2 = 4ax$ की उस स्पर्श रेखा, जो x-अक्ष से 60^o का कोण बनाती है, का स्पर्श बिन्दु है

(a) $\left(\frac{a}{3}, \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)$ (b) $\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{3}\right)$

(c) $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{2a}{3}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

81. सरल रेखा $y = 2x + \lambda$ परवलय $y^2 = 2x$ को नहीं मिलेगी यदि [MP PET 1993; MNR 1977]

(a) $\lambda < \frac{1}{4}$ (b) $\lambda > \frac{1}{4}$

(c) $\lambda = 4$ (d) $\lambda = 1$

82. परवलय $y^2 = 4ax$ के किसी बिन्दु $P(t)$ जहाँ 't' कोई प्राचल है, पर स्पर्शी का समीकरण है [MNR 1983]

(a) $yt = x + at^2$ (b) $y = xt + at^2$

(c) $y = xt + \frac{a}{t}$ (d) $y = tx$

83. रेखा $y = 2x + c$ परवलय $y^2 = 16x$ पर स्पर्श रेखा होगी यदि $c =$ [MNR 1988]

(a) -2 (b) -1

(c) 0 (d) 2

84. रेखा $y = mx + 1$ परवलय $y^2 = 4x$ पर स्पर्श रेखा होगी यदि [MNR 1990; Kurukshetra CEE 1998; DCE 2000; Pb. CET 2004]

(a) $m = 1$ (b) $m = 2$

(c) $m = 4$ (d) $m = 3$

85. वक्र $y^2 = 4x$ व $x^2 = 32y$ के प्रतिच्छेदन के बीच का कोण बिन्दु (16, 8) पर हैं [RPET 1987, 96]

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$

(c) π (d) $\frac{\pi}{2}$

86. परवलय $y^2 = 4ax$ की स्पर्श रेखा पर नाभि से डाले गये लम्ब के पाद का बिन्दुपथ है [RPET 1989]

(a) $x = 0$ (b) $y = 0$

(c) $y^2 = 2a(x + a)$ (d) $x^2 + y^2(x + a) = 0$

87. यदि रेखा $x + y = 1$ परवलय $y^2 - y + x = 0$ को स्पर्श करती है, तो स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक होंगे [RPET 1991]

(a) (1, 1) (b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(c) (0, 1) (d) (1, 0)

88. यदि रेखा $y = mx + c$ परवलय $y^2 = 4a(x + a)$ की स्पर्श रेखा हो, तो $ma + \frac{a}{m}$ बराबर होगा

(a) c (b) $2c$

(c) $-c$ (d) $3c$

89. परवलय $y^2 = 8x$ की स्पर्श रेखा सरल रेखा $y = 3x + 5$ के साथ 45^o का कोण बनाती है, तो स्पर्श रेखा का समीकरण होगा

(a) $2x + y - 1 = 0$ (b) $x + 2y - 1 = 0$

(c) $2x + y + 1 = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

90. परवलय $y^2 = 4ax$ के नाभिलम्ब के सिरे पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं के बीच कोण होगा

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$

(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

91. रेखा $y = mx + c$ परवलय $x^2 = 4ay$ को स्पर्श करती है यदि [MNR 1973; MP PET 1994, 99]

(a) $c = -am$ (b) $c = \frac{-a}{m}$

(c) $c = -am^2$ (d) $c = \frac{a}{m^2}$

92. परवलय $x^2 = 4ay$ की लम्बवत् स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दु पथ है [MP PET 1994]

(a) परवलय का अक्ष

(b) परवलय की नियता

(c) परवलय की नाभीय जीवा

(d) परवलय के शीर्ष पर स्पर्श रेखा

93. परवलय $y^2 = 4a(x - a)$ पर मूलबिन्दु से डाली गयी स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण है [MNR 1994]

(a) 90^o (b) 30^o

(c) $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ (d) 45^o

94. यदि रेखा $x = my + k$ परवलय $x^2 = 4ay$ को स्पर्श करती है, तो $k =$ [MP PET 1995]

(a) $\frac{a}{m}$ (b) am

(c) am^2 (d) $-am^2$

95. यदि y_1, y_2 क्रमशः परवलय पर P व Q बिन्दुओं की कोटियाँ हैं एवं y_3 इन बिन्दुओं पर खींची गयी स्पर्शियों के प्रतिच्छेद बिन्दु की कोटि हैं, तो

(a) y_1, y_2, y_3 समान्तर श्रेणी में हैं

(b) y_1, y_3, y_2 समान्तर श्रेणी में हैं

(c) y_1, y_2, y_3 गुणोत्तर श्रेणी में हैं

(d) y_1, y_3, y_2 गुणोत्तर श्रेणी में हैं

96. दो परवलय $y^2 = 4x$ व $x^2 = 4y$ बिन्दु P पर, जिसका भुज अशून्य है, इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि

(a) दोनों एक दूसरे को बिन्दु P पर स्पर्श करते हैं

(b) वे एक दूसरे को बिन्दु P पर समकोण पर काटते हैं

(c) P बिन्दु पर प्रत्येक वक्र पर खींची गयी स्पर्श रेखायें x-अक्ष से पूरक कोण बनाती है

(d) इनमें से कोई नहीं

97. रेखा $y = 2x + c$ परवलय $y^2 = 4x$ की स्पर्श रेखा है, तो $c =$ [MP PET 1996]

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{3}$ (d) 4

98. वह प्रतिबंध जिस पर सरल रेखा $y = mx + c$ परवलय $y^2 = 4ax$ को स्पर्श करती है, है [MP PET 1997, 2001]

(a) $a = c$ (b) $\frac{a}{c} = m$

(c) $m = a^2c$ (d) $m = ac^2$

99. यदि परवलय $y^2 = 4ax$ बिन्दु (1, –2) से होकर जाता है, तब इस बिन्दु पर स्पर्श रेखा है **[MP PET 1998]**

(a) $x + y - 1 = 0$ (b) $x - y - 1 = 0$

(c) $x + y + 1 = 0$ (d) $x - y + 1 = 0$

100. परवलय $y^2 = 16x$ की उस स्पर्शी का समीकरण जो रेखा $y = 3x + 7$ के लम्बवत् हो, है **[MP PET 1998]**

(a) $y - 3x + 4 = 0$ (b) $3y - x + 36 = 0$

(c) $3y + x - 36 = 0$ (d) $3y + x + 36 = 0$

101. परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु $\left(\frac{a}{t^2}, \frac{2a}{t}\right)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण होगा **[RPET 1996]**

(a) $ty = xt^2 + a$ (b) $ty = x + at^2$

(c) $y = tx + at^2$ (d) $y = tx + \left(\frac{a}{t^2}\right)$

102. वृत्त $x^2 + y^2 = 2$ तथा परवलय $y^2 = 8x$ की उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा का समीकरण होगा **[RPET 1997]**

(a) $y = x + 1$ (b) $y = x + 2$

(c) $y = x - 2$ (d) $y = -x + 2$

103. यदि रेखा $lx + my + n = 0$ परवलय $y^2 = 4ax$ की स्पर्श रेखा हो, तो स्पर्श बिन्दु का बिन्दुपथ होगा **[RPET 1997]**

(a) एक सरल रेखा (b) एक वृत्त

(c) एक परवलय (d) दो सरल रेखायें

104. रेखा $x - y + 2 = 0$ परवलय $y^2 = 8x$ को निम्न बिन्दु पर स्पर्श करती है **[Roorkee 1998]**

(a) $(2, -4)$ (b) $(1, 2\sqrt{2})$

(c) $(4, -4\sqrt{2})$ (d) (2, 4)

105. परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु $(a, 2a)$ पर खींची गई स्पर्श रेखा तथा x-अक्ष के बीच का कोण होगा **[SCRA 1996]**

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

106. यदि सरल रेखा $lx + my + n = 0$ परवलय $x^2 = y$ की स्पर्श रेखा हो, तो स्पर्शिता का प्रतिबन्ध होगा **[RPET 1999]**

(a) $l^2 = 2mn$ (b) $l = 4m^2n^2$

(c) $m^2 = 4ln$ (d) $l^2 = 4mn$

107. परवलय $y^2 = 9x$ की उस स्पर्शी का समीकरण जो बिन्दु (4, 10) से होकर गुजरती है, होगा **[MP PET 2000]**

(a) $x + 4y + 1 = 0$ (b) $9x + 4y + 4 = 0$

(c) $x - 4y + 36 = 0$ (d) $9x - 4y + 4 = 0$

108. परवलय $y^2 = 4ax$ की दो लम्बवत् स्पर्श रेखाएँ हमेशा रेखा पर प्रतिच्छेदित होती हैं, यदि **[Karnataka CET 2000]**

(a) $x = a$ (b) $x + a = 0$

(c) $x + 2a = 0$ (d) $x + 4a = 0$

109. परवलय $y^2 = 4x$ तथा वृत्त $(x-3)^2 + y^2 = 9$ की उभयनिष्ठ स्पर्शी का x-अक्ष के ऊपर समीकरण है **[IIT Screening 2001]**

(a) $\sqrt{3}y = 3x + 1$ (b) $\sqrt{3}y = -(x + 3)$

(c) $\sqrt{3}y = x + 3$ (d) $\sqrt{3}y = -(3x + 1)$

110. वह बिन्दु जिस पर रेखा $y = mx + c$ परवलय $y^2 = 4ax$ को स्पर्श करती है, है **[RPET 2001]**

(a) $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ (b) $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{-2a}{m}\right)$

(c) $\left(-\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ (d) $\left(-\frac{a}{m^2}, -\frac{2a}{m}\right)$

111. परवलय $y^2 = 4ax$ के किसी बिन्दु P से खींची स्पर्श रेखाएँ नियता के बिन्दु K पर मिलती है, तब KP द्वारा इसकी नाभि पर अन्तरित कोण होगा **[RPET 1996, 2002]**

(a) 30° (b) 45°

(c) 60° (d) 90°

112. बिन्दु t_1 तथा t_2 पर परवलय के प्रतिच्छेद बिन्दु है **[RPET 2002]**

(a) $(at_1t_2, a(t_1 + t_2))$ (b) $(2at_1t_2, a(t_1 + t_2))$

(c) $(2at_1t_2, 2a(t_1 + t_2))$ (d) इनमें से कोई नहीं

113. वक्रों $x^2 = 4(y + 1)$ तथा $x^2 = -4(y + 1)$ के बीच का कोण होगा **[UPSEAT 2002]**

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$

(c) 0 (d) $\frac{\pi}{2}$

114. वक्र $y^2 = 4(x + 1)$ तथा $x^2 = 4(y + 1)$ के बीच का कोण होगा **[UPSEAT 2002]**

(a) 0° (b) 90°

(c) 60° (d) 30°

115. यदि परवलय $y^2 = ax$ की स्पर्शी, x- अक्ष के साथ 45° का कोण बनाती है, तब स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक हैं **[RPET 1985, 90, 2003]**

(a) $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$

(c) $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{4}\right)$ (d) $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right)$

116. एक परवलय की किसी नाभीय जीवा के सिरों पर स्पर्श रेखायें प्रतिच्छेदित होती हैं

(a) समकोण पर (b) नियता पर

(c) शीर्ष की स्पर्शी पर (d) इनमें से कोई नहीं

117. परवलय $y^2 = 4x$ की नाभिलम्ब पर स्पर्श रेखा के प्रतिच्छेदन बिन्दु के सिरे के निर्देशांक हैं **[Pb. CET 2003]**

(a) (1, 0) (b) (–1, 0)

(c) (0, 1) (d) (0, –1)

118. बिन्दु (1, 4) से परवलय $y^2 = 4x$ पर खींची गयी स्पर्श रेखा के बीच कोण है **[IIT Screening 2004]**

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$

(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

119. परवलय $y^2 = 4ax$ की, उन जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ जो मूल बिन्दु से होकर जाती हैं, होगा **[RPET 1997; UPSEAT 1999]**

(a) $y^2 = ax$ (b) $y^2 = 2ax$
(c) $y^2 = 4ax$ (d) $x^2 = 4ay$

120. परवलय $y^2 = 8x$ पर वह बिन्दु जिस पर खींचा गया अभिलम्ब रेखा $x - 2y + 5 = 0$ के समान्तर है, है
(a) $\left(\frac{-1}{2}, 2\right)$ (b) $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$
(c) $\left(2, \frac{-1}{2}\right)$ (d) $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$

121. किसी बिन्दु से किसी परवलय पर खींचे जा सकने वाले अभिलम्बों की अधिकतम संख्या है [MP PET 1990]
(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

122. परवलय $y^2 = 8x$ के उस बिन्दु, जिस पर अभिलम्ब x-अक्ष से 60 का कोण बनाता है, के निर्देशांक होंगे [MP PET 1993]
(a) $(6, -4\sqrt{3})$ (b) $(6, 4\sqrt{3})$
(c) $(-6, -4\sqrt{3})$ (d) $(-6, 4\sqrt{3})$

123. परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु $(at^2, 2at)$ पर अभिलम्ब की प्रवणता है [MNR 1991; UPSEAT 2000]
(a) $\frac{1}{t}$ (b) t
(c) $-t$ (d) $-\frac{1}{t}$

124. परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु $\left(\frac{a}{4}, a\right)$ पर अभिलम्ब का समीकरण है [RPET 1984]
(a) $4x + 8y + 9a = 0$ (b) $4x + 8y - 9a = 0$
(c) $4x + y - a = 0$ (d) $4x - y + a = 0$

125. बिन्दु $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ पर परवलय $y^2 = 4ax$ के अभिलम्ब का समीकरण है [RPET 1987]
(a) $y = m^2x - 2mx - am^3$ (b) $m^3y = m^2x - 2am^2 - a$
(c) $m^3y = 2am^2 - m^2x + a$ (d) इनमें से कोई नहीं

126. यदि रेखा $2x + y + k = 0$ परवलय $y^2 = -8x$ पर अभिलम्ब हो, तो k का मान होगा [RPET 1986, 97]
(a) -16 (b) -8
(c) -24 (d) 24

127. यदि परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु $(a, 2a)$ पर अभिलम्ब खींचा जाए जो पुनः परवलय को बिन्दु $(at^2, 2at)$ पर मिले, तो t का मान होगा [RPET 1990]
(a) 1 (b) 3
(c) -1 (d) -3

128. परवलय $y^2 = 6x$ में शीर्ष व नाभिलम्ब के ऋणात्मक सिरे से जाने वाली जीवा का समीकरण है
(a) $y = 2x$ (b) $y + 2x = 0$
(c) $x = 2y$ (d) $x + 2y = 0$

129. बिन्दु (2, 5) से परवलय $y^2 = 8x$ पर खींची गयीं स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा की लम्बाई है [MNR 1976]
(a) $\frac{1}{2}\sqrt{41}$ (b) $\sqrt{41}$
(c) $\frac{3}{2}\sqrt{41}$ (d) $2\sqrt{41}$

130. यदि 'a' व 'c' एक परवलय की नाभीय जीवा के खण्ड हैं तथा b अर्धनाभिलम्ब है [MP PET 1995]
(a) a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं (b) a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हैं
(c) a, b, c हरात्मक श्रेणी में हैं (d) इनमें से कोई नहीं

131. यदि परवलय $y^2 = 4ax$ का रेखा $lx + my + n = 0$ से अन्तःखण्डित भाग, शीर्ष पर 90^o का कोण अन्तरित करता है, तो
(a) $4al + n = 0$ (b) $4al + 4am + n = 0$
(c) $4am + n = 0$ (d) $al + n = 0$

132. परवलय $y^2 = 4ax$ की समान्तर जीवाओं का मध्य बिन्दु स्थित होता है
(a) शीर्ष से जाने वाली किसी भी रेखा पर
(b) नाभि से जाने वाली किसी भी रेखा पर
(c) अक्ष के समान्तर एक रेखा पर
(d) अन्य परवलय पर

133. परवलय $y^2 = 4ax$ के नाभिलम्ब के सिरों पर खींचे गये अभिलम्बों का संयुक्त समीकरण है
(a) $x^2 - y^2 - 6ax + 9a^2 = 0$
(b) $x^2 - y^2 - 6ax - 6ay + 9a^2 = 0$
(c) $x^2 - y^2 - 6ay + 9a^2 = 0$
(d) इनमें से कोई नहीं

134. यदि परवलय $y^2 = 4ax$ के दो बिन्दुओं P व Q पर खींचे गये अभिलम्ब वक्र पर किसी तीसरे बिन्दु R पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो P व Q की कोटियों का गुणनफल है
(a) $4a^2$ (b) $2a^2$
(c) $-4a^2$ (d) $8a^2$

135. यदि $x = my + c$ परवलय $x^2 = 4ay$ का अभिलम्ब है, तो c =
(a) $-2am - am^3$ (b) $2am + am^3$
(c) $-\frac{2a}{m} - \frac{a}{m^3}$ (d) $\frac{2a}{m} + \frac{a}{m^3}$

136. यदि परवलय $y^2 = 8x$ की नाभीय जीवा PSQ इस प्रकार है कि $SP = 6$ तो SQ =
(a) 6 (b) 4
(c) 3 (d) इनमें से कोई नहीं

137. परवलय $y^2 = 4x$ के किस बिन्दु पर खींचा गया अभिलम्ब निर्देशाक्षों से बराबर कोण बनाता है [RPET 1994]
(a) (4, 4) (b) (9, 6)
(c) (4, – 4) (d) (1, – 2)

138. परवलय $y^2 = 4a(x - a)$ के अभिलम्ब का समीकरण है
(a) $y = mx - 2am - am^3$
(b) $y = m(x + a) - 2am - am^3$
(c) $y = m(x - a) + \frac{a}{m}$
(d) $y = m(x - a) - 2am - am^3$

139. परवलय $y^2 = 4ax$ के किसी नाभीय जीवा के सिरों से खींची गई स्पर्श रेखाएँ कौन सी रेखा में काटती हैं

(a) $y-a=0$ (b) $y+a=0$
(c) $x-a=0$ (d) $x+a=0$

140. किसी बिन्दु से परवलय $y^2=4ax$ पर खींचे गये अभिलम्बों के पाद से बना त्रिभुज का केन्द्रक स्थित है **[MP PET 1999]**
(a) अक्ष पर (b) नियता पर
(c) नाभिलम्ब पर (d) शीर्ष पर स्पर्श रेखा पर

141. परवलय $y^2=12x$ के बिन्दु (3, 6) पर खींचा गया अभिलम्ब यदि परवलय को पुनः (27, –18) पर मिले तो अभिलम्ब जीवा को व्यास मानकर खींचे गये वृत्त का समीकरण होगा **[Kurukshetra CEE 1998]**
(a) $x^2+y^2+30x+12y-27=0$
(b) $x^2+y^2+30x+12y+27=0$
(c) $x^2+y^2-30x-12y-27=0$
(d) $x^2+y^2-30x+12y-27=0$

142. परवलय $y^2=4x$ की अभिलम्ब जीवा की लम्बाई, जो शीर्ष पर समकोण अन्तरित करती है, होगी **[RPET 1999]**
(a) $6\sqrt{3}$ (b) $3\sqrt{3}$
(c) 2 (d) 1

143. यदि $x+y=k$ परवलय $y^2=12x$ का अभिलम्ब है, तो k का मान है **[IIT Screening 2000]**
(a) 3 (b) 9
(c) –9 (d) –3

144. यदि परवलय के बिन्दु $(bt_1^2, 2bt_1)$ पर अभिलम्ब खींचा जाये, जो पुनः परवलय को बिन्दु $(bt_2^2, 2bt_2)$ पर मिलता है, तो **[MNR 1986; RPET 2003; AIEEE 2003]**
(a) $t_2=-t_1-\frac{2}{t_1}$ (b) $t_2=-t_1+\frac{2}{t_1}$
(c) $t_2=t_1-\frac{2}{t_1}$ (d) $t_2=t_1+\frac{2}{t_1}$

145. परवलय $y^2=16x$ की नाभीय जीवा $(x-6)^2+y^2=2$ की स्पर्शी है, तब इस जीवा की प्रवणता (slope) के संभव मान हैं **[IIT Screening 2003]**
(a) $\{-1, 1\}$ (b) {–2, 2}
(c) {–2, 1/2} (d) {2, –1/2}

146. परवलय $y^2=8x$ के बिन्दु (2, 4) पर अभिलम्ब पुनः परवलय को किस बिन्दु पर मिलता है **[Orrisa JEE 2003]**
(a) (–18, –12) (b) (–18, 12)
(c) (18, 12) (d) (18, –12)

147. एक परवलय की नाभि की ध्रुवी (polar) है **[RPET 1999]**
(a) x-अक्ष (b) y- अक्ष
(c) नियता (d) नाभिलम्ब

148. परवलय $y^2=x$ के व्यास का समीकरण जीवा $x-y+1=0$ के अनुदिश होगा **[RPET 2003]**
(a) $2y=3$ (b) $2y=1$
(c) $2y=5$ (d) $y=1$

149. परवलय $x^2=12y$ के शीर्ष को इसके नाभिलम्ब के सिरों से मिलाने वाली रेखाओं द्वारा बने त्रिभुज का क्षेत्रफल है
(a) 12 वर्ग इकाई (b) 16 वर्ग इकाई
(c) 18 वर्ग इकाई (d) 24 वर्ग इकाई

150. परवलय $y^2=4x$ के अन्तर्गत निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल, जिसके शीर्षों की कोटियाँ 1, 2, 4 हैं, होगा **[RPET 1990]**
(a) $\frac{7}{2}$ (b) $\frac{5}{2}$
(c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{3}{4}$

151. परवलय $y^2=4ax$ के अन्दर एक समबाहु त्रिभुज बनाया गया है जिसके शीर्ष परवलय पर स्थित हैं, तो इसकी भुजा की लम्बाई है
(a) $8a$ (b) $8a\sqrt{3}$
(c) $a\sqrt{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

152. परवलय $y^2=4ax$ के अन्दर निर्मित त्रिभुज की कोटियाँ y_1, y_2, y_3 हैं तो त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा
(a) $\frac{1}{8a}(y_1+y_2)(y_2+y_3)(y_3+y_1)$
(b) $\frac{1}{4a}(y_1+y_2)(y_2+y_3)(y_3+y_1)$
(c) $\frac{1}{8a}(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)$
(d) $\frac{1}{4a}(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)$

153. बिन्दु (–1, 2) से परवलय $y^2=4x$ पर स्पर्श रेखायें खींची गयी हैं, तो स्पर्श जीवा का समीकरण है **[Roorkee 1994]**
(a) $y=x+1$ (b) $y=x-1$
(c) $y+x=1$ (d) इनमें से कोई नहीं

154. उपरोक्त प्रश्न के लिए, स्पर्श जीवा तथा स्पर्श रेखाओं द्वारा बने त्रिभुज का क्षेत्रफल है **[Roorkee 1994]**
(a) 8 (b) $8\sqrt{3}$
(c) $8\sqrt{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

155. परवलय $2y=x^2$ का बिन्दु, जो कि बिन्दु (0, 3) के समीप है, है **[J & K 2005]**
(a) (±4, 8) (b) $(\pm 1, 1/2)$
(c) (±2, 2) (d) इनमें से कोई नहीं

156. परवलय $y^2=4x$ पर बिन्दु (–1, –60) से दो स्पर्श रेखायें खींची जाती हैं तब स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण है **[J & K 2005]**
(a) 30° (b) 45°
(c) 60° (d) 90°

157. शांकव $x^2+10x-16y+25=0$ के नाभिलम्ब के सिरे के निर्देशांक हैं **[Karnataka CET 2005]**
(a) (3, – 4), (13, 4)
(b) (– 3, – 4), (13, – 4)
(c) (3, 4), (– 13, 4)
(d) (5, – 8), (– 5, 8)

158. परवलय $y=x^2+6$ के बिन्दु (1, 7) पर खींची गयी स्पर्श रेखा वृत्त $x^2+y^2+16x+12y+c=0$ को किस बिन्दु पर स्पर्श करती है **[IIT Screening 2005]**
(a) (– 6, – 9) (b) (– 13, – 9)
(c) (– 6, – 7) (d) (13, 7)

159. वक्र $x^2=8y$ तथा $y^2=8x$ के बीच मूलबिन्दु पर प्रतिच्छेद कोण होगा **[RPET 1997]**
(a) $\pi/4$ (b) $\pi/3$

(c) $\pi/6$ (d) $\pi/2$

160. यदि रेखा $y = 2x + k$ वक्र $x^2 = 4y$ की स्पर्श रेखा हो तब k बराबर है [AMU 2002]
(a) 4 (b) 1/2
(c) −4 (d) −1/2

161. उस परवलय का समीकरण जो रेखा $x + y = 0$ तथा वृत्त $x^2 + y^2 + 4y = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाता है, है [Orissa JEE 2005]
(a) $y^2 = 4x$ (b) $y^2 = x$
(c) $y^2 = 2x$ (d) इनमें से कोई नहीं

162. वृत्त परवलय $y^2 = 2ax$ की नियता को स्पर्श करता है जिसमें वृत्त का केन्द्र तथा परवलय की नाभि संपाती है तब वृत्त और परवलय का प्रतिच्छेद बिन्दु है [Orissa JEE 2005]
(a) $(a, -a)$ (b) $(a/2, a/2)$
(c) $(a/2, \pm a)$ (d) $(\pm a, a/2)$

163. वक्र $y^2 = 4x$ द्वारा अन्तःखण्ड की लम्बाई जो रेखा $\frac{dy}{dx} = 1$ द्वारा सन्तुष्ट है तथा दिए गए बिन्दु (0, 1) से होकर जाती है, है [Orissa JEE 2005]
(a) 1 (b) 2
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

164. परवलय $y^2 = -4x$ की नाभि से होकर जाने वाली सरल रेखा का समीकरण जो x-अक्ष के साथ 120° का कोण बनाती है
(a) $y + \sqrt{3}(x-1) = 0$ (b) $y - \sqrt{3}(x-1) = 0$
(c) $y + \sqrt{3}(x+1) = 0$ (d) $y - \sqrt{3}(x+1) = 0$

165. यदि नाभिलम्ब सिरों के निर्देशांक दिए गये हों, तो खीचें गए परवलयों की संख्या है [DCE 2005]
(a) 1 (b) 2
(c) 4 (d) 3

166. परवलय $y^2 = 4ax$ के उस बिन्दु के निर्देशांक जहाँ पर अभिलम्ब का भुज उसकी कोटि के बराबर है, है [DCE 2005]
(a) $(6a, -9a)$ (b) $(-9a, 6a)$
(c) $(-6a, 9a)$ (d) $(9a, -6a)$

दीर्घवृत्त

1. यदि दीर्घवृत्त का नाभिलम्ब उसकी लघु अक्ष के आधे के बराबर हो, तो उसकी उत्केन्द्रता है [MP PET 1991, 97; Karnataka CET 2000]
(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

2. यदि नियताओं के बीच की दूरी नाभियों के बीच की दूरी की तीन गुनी हो तो दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता होगी
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$
(c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{4}{5}$

3. उस दीर्घवृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र मूलबिन्दु है तथा जो बिन्दुओं (−3, 1) तथा (2, −2) से गुजरता है, है
(a) $5x^2 + 3y^2 = 32$ (b) $3x^2 + 5y^2 = 32$
(c) $5x^2 - 3y^2 = 32$ (d) $3x^2 + 5y^2 + 32 = 0$

4. यदि किसी दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता $\frac{5}{8}$ तथा नाभियों के बीच की दूरी 10 हो, तो उसका नाभिलम्ब होगा
(a) 39/4 (b) 12
(c) 15 (d) 37/2

5. यदि दीर्घवृत्त की नाभियाँ तथा शीर्ष क्रमशः $(\pm 1, 0)$ तथा $(\pm 2, 0)$ हों, तो उसका लघु अक्ष है
(a) $2\sqrt{5}$ (b) 2
(c) 4 (d) $2\sqrt{3}$

6. दीर्घवृत्त $16x^2 + 25y^2 = 400$ की नियताओं के समीकरण हैं
(a) $2x = \pm 25$ (b) $5x = \pm 9$
(c) $3x = \pm 10$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. एक दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता $\frac{2}{3}$, नाभिलम्ब 5 तथा केन्द्र (0, 0) हैं, तो दीर्घवृत्त का समीकरण है
(a) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1$ (b) $\frac{4x^2}{81} + \frac{4y^2}{45} = 1$
(c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ (d) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 5$

8. यदि दीर्घवृत्त का नाभिलम्ब 10 तथा लघु अक्ष नाभियों के बीच की दूरी के बराबर हो, तो दीर्घवृत्त का समीकरण है
(a) $x^2 + 2y^2 = 100$ (b) $x^2 + \sqrt{2}y^2 = 10$
(c) $x^2 - 2y^2 = 100$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ की नियताओं के बीच की दूरी है
(a) 8 (b) 12
(c) 18 (d) 24

10. दीर्घवृत्त $3x^2 + 4y^2 = 48$ की नाभियों के बीच की दूरी है
(a) 2 (b) 4
(c) 6 (d) 8

11. उस दीर्घवृत्त का समीकरण जिसके शीर्ष $(\pm 5, 0)$ तथा नाभियाँ $(\pm 4, 0)$ हैं, होगा
(a) $9x^2 + 25y^2 = 225$ (b) $25x^2 + 9y^2 = 225$
(c) $3x^2 + 4y^2 = 192$ (d) इनमें से कोई नहीं

12. उस दीर्घवृत्त का समीकरण जिसकी नाभियाँ $(\pm 5, 0)$ तथा एक नियता $5x = 36$ है, होगा
(a) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$ (b) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{\sqrt{11}} = 1$
(c) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{11} = 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. यदि किसी दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता $\frac{1}{\sqrt{2}}$ हो, तो उसका नाभिलम्ब होगा
(a) लघु अक्ष (b) अर्ध लघु अक्ष
(c) दीर्घ अक्ष (d) अर्ध दीर्घ अक्ष

14. दीर्घवृत्त $5x^2 + 9y^2 = 45$ के नाभिलम्ब की लम्बाई है [MNR 1978, 80, 81]
(a) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ (b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(c) $\frac{5}{3}$ (d) $\frac{10}{3}$

15. यदि एक दीर्घवृत्त की एक नाभि तथा संगत नियता के बीच की दूरी 8 तथा उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ हो, तो दीर्घवृत्त के लघुअक्ष की लम्बाई होगी

(a) 3 (b) $4\sqrt{2}$

(c) 6 (d) इनमें से कोई नहीं

16. शांकव $16x^2+7y^2=112$ की उत्केन्द्रता है [MNR 1981]

(a) $\frac{3}{\sqrt{7}}$ (b) $\frac{7}{16}$

(c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{4}{3}$

17. यदि किसी दीर्घवृत्त की नाभियों के बीच की दूरी उसकी लघु अक्ष के बराबर हो, तो उसकी उत्केन्द्रता होगी

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

18. एक दीर्घवृत्त बिन्दु (–3, 1) से गुजरता है तथा उसकी उत्केन्द्रता $\sqrt{\frac{2}{5}}$ है। दीर्घवृत्त का समीकरण होगा

(a) $3x^2+5y^2=32$ (b) $3x^2+5y^2=25$

(c) $3x^2+y^2=4$ (d) $3x^2+y^2=9$

19. एक दीर्घवृत्त के दीर्घ तथा लघु अक्षों की लम्बाइयाँ क्रमशः 10 तथा 8 हैं और उसका दीर्घ अक्ष y-अक्ष है। दीर्घवृत्त के केन्द्र को मूलबिन्दु मानते हुये दीर्घवृत्त का समीकरण है [Pb. CET 2003]

(a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ (b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

(c) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ (d) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$

20. यदि दीर्घवृत्त का केन्द्र (0, 0), एक नाभि (0, 3) तथा अर्ध दीर्घ अक्ष 5 हो, तो उसका समीकरण है [AMU 1981]

(a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ (b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

(c) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. उस दीर्घवृत्त का समीकरण जिसका एक शीर्ष (0,7) तथा संगत नियता $y=12$ है, होगा

(a) $95x^2+144y^2=4655$ (b) $144x^2+95y^2=4655$

(c) $95x^2+144y^2=13680$ (d) इनमें से कोई नहीं

22. समीकरण $2x^2+3y^2=30$ निरूपित करता है [MP PET 1988]

(a) एक वृत्त (b) एक दीर्घवृत्त

(c) एक अतिपरवलय (d) एक परवलय

23. मूल अक्षों के सापेक्ष दीर्घवृत्त जिसकी नाभिलम्ब 8 है और जिसकी उत्केन्द्रता $\frac{1}{\sqrt{2}}$ है, का समीकरण होगा [MP PET 1993]

(a) $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{32}=1$ (b) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1$

(c) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{32}=1$ (d) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{24}=1$

24. उस दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता जिसका नाभिलम्ब, नाभियों के बीच की दूरी के बराबर है, होगी

(a) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

25. दीर्घवृत्त $3x^2+4y^2=12$ के लिये नाभिलम्ब की लम्बाई है [MNR 1973]

(a) $\frac{3}{2}$ (b) 3

(c) $\frac{8}{3}$ (d) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

26. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$ की उत्केन्द्रता है [MNR 1974]

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$

(c) $\frac{2}{\sqrt{7}}$ (d) $\frac{1}{3}$

27. यदि एक दीर्घवृत्त के दीर्घ अक्ष की लम्बाई, इसके लघु अक्ष की लम्बाई की तिगुनी है, तो इसकी उत्केन्द्रता होगी [EAMCET 1990]

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

28. एक दीर्घवृत्त के नाभिलम्ब की लम्बाई दीर्घ अक्ष की $\frac{1}{3}$ है, तो इसकी उत्केन्द्रता होगी [EAMCET 1991]

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

(c) $\frac{5\times4\times3}{7^3}$ (d) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$

29. एक दीर्घवृत्त एक गोल धागे से बनाया जाता है जो दो पिनों के ऊपर से होकर गुजरता है । यदि इस प्रकार बने दीर्घवृत्त के अक्ष क्रमशः 6 सेमी व 4 सेमी हों, तो धागे की लम्बाई और पिनों के बीच की दूरी सेमी में क्रमशः होगी [MNR 1989]

(a) $6, 2\sqrt{5}$

(b) $6, \sqrt{5}$

(c) $4, 2\sqrt{5}$

(d) इनमें से कोई नहीं

30. समीकरण $\frac{x^2}{2-r}+\frac{y^2}{r-5}+1=0$ दीर्घवृत्त को प्रदर्शित करेगा यदि [MP PET 1995]

(a) $r > 2$ (b) $2 < r < 5$

(c) $r > 5$ (d) इनमें से कोई नहीं

31. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की लम्बवत् स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ है [MP PET 1995]

(a) $x^2+y^2=a^2-b^2$

(b) $x^2-y^2=a^2-b^2$

(c) $x^2+y^2=a^2+b^2$

(d) $x^2-y^2=a^2+b^2$

32. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{49}=1$ के नाभिलम्ब की लम्बाई होगी [Karnataka CET 1993]

(a) $\frac{98}{6}$ (b) $\frac{72}{7}$

(c) $\frac{72}{14}$ (d) $\frac{98}{12}$

33. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के बिन्दु 'θ' की नाभि से दूरी होगी

(a) $a(e+\cos\theta)$ (b) $a(e-\cos\theta)$

(c) $a(1+e\cos\theta)$ (d) $a(1+2e\cos\theta)$

34. उस दीर्घवृत्त का समीकरण, जिसकी एक नाभि (4,0) है एवं उत्केन्द्रता $\frac{4}{5}$ है, होगा [Karnataka CET 1993]

(a) $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ (b) $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$

(c) $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ (d) $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$

35. वक्र $16x^2+25y^2=400$ की नाभियाँ हैं [BIT Ranchi 1996]

(a) $(\pm 3, 0)$ (b) $(0, \pm 3)$

(c) $(3, -3)$ (d) $(-3, 3)$

36. दीर्घवृत्त $9x^2+25y^2=225$ की उत्क्रेन्द्रता है [Kerala (Engg.) 2002]

(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{4}{5}$

(c) $\frac{9}{25}$ (d) $\frac{\sqrt{34}}{5}$

37. दीर्घवृत्त $25x^2+16y^2=100$ की उत्केन्द्रता है

(a) $\frac{5}{14}$ (b) $\frac{4}{5}$

(c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{2}{5}$

38. दीर्घवृत्त $9x^2+4y^2=1$ के नाभिलम्ब की लम्बाई है [MP PET 1999]

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{8}{3}$

(c) $\frac{4}{9}$ (d) $\frac{8}{9}$

39. एक बिन्दु इस प्रकार गमन करता है कि उसकी बिन्दु (–2, 0) से दूरी रेखा $x=-\frac{9}{2}$ से दूरी की $\frac{2}{3}$ गुनी है तो उसका बिन्दुपथ होगा [IIT 1994]

(a) दीर्घवृत्त (b) परवलय

(c) अतिपरवलय (d) इनमें से कोई नहीं

40. यदि $P\equiv(x, y)$, $F_1\equiv(3, 0)$, $F_2\equiv(-3, 0)$ और $16x^2+25y^2=400$ तो PF_1+PF_2 का मान है [IIT 1998]

(a) 8 (b) 6

(c) 10 (d) 12

41. दीर्घवृत्त $9x^2+36y^2=324$, जिसकी नाभियाँ S तथा S' है, पर P कोई बिन्दु है, तब $SP+S'P$ का मान होगा [DCE 1999]

(a) 3 (b) 12

(c) 36 (d) 324

42. उस दीर्घवृत्त का समीकरण जिसकी नाभियाँ $(\pm 2, 0)$ तथा उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ है, होगा [DCE 1999]

(a) $3x^2+4y^2=48$ (b) $4x^2+3y^2=48$

(c) $3x^2+4y^2=0$ (d) $4x^2+3y^2=0$

43. दीर्घवृत्त $4x^2+9y^2=36$ की उत्केन्द्रता है [MP PET 2000]

(a) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(c) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (d) $\frac{\sqrt{5}}{6}$

44. दीर्घवृत्त $25x^2+16y^2=400$ की उत्केन्द्रता है [MP PET 2001]

(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{2}{5}$ (d) $\frac{1}{5}$

45. दीर्घवृत्त के नाभियों के बीच की दूरी 16 तथा उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ है। दीर्घवृत्त के दीर्घाक्ष की लम्बाई है [Karnataka CET 2001]

(a) 8 (b) 64

(c) 16 (d) 32

46. यदि दो दीर्घवृत्तों $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$ तथा $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की उत्केन्द्रतायें बराबर हो, तो $\frac{a}{b}$ का मान होगा [UPSEAT 2001]

(a) $\frac{5}{13}$ (b) $\frac{6}{13}$

(c) $\frac{13}{5}$ (d) $\frac{13}{6}$

47. यदि दीर्घवृत्त का लघुअक्ष 8, उत्केन्द्रता $\frac{\sqrt{5}}{3}$ हो, तब दीर्घाक्ष होगा [Karnataka CET 2002]

(a) 6 (b) 12

(c) 10 (d) 16

48. दीर्घवृत्त $9x^2 + 5y^2 = 45$ के नाभियों के बीच की दूरी है [Karnataka CET 2002]

(a) $4\sqrt{5}$ (b) $3\sqrt{5}$
(c) 3 (d) 4

49. दीर्घवृत्त का समीकरण जिसकी उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ तथा नाभियाँ $(\pm 1, 0)$ हैं, है [MP PET 2002]

(a) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ (b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$
(c) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = \frac{4}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

50. दीर्घवृत्त के किसी बिन्दु पर नाभीय दूरियों का योग क्या होगा, जबकि दीर्घवृत्त के दीर्घाक्ष व लघुअक्ष की लम्बाईयाँ क्रमशः $2a$ व $2b$ हैं [MP PET 2003]

(a) $2a$ (b) $\frac{2a}{b}$
(c) $\frac{2b}{a}$ (d) $\frac{b^2}{a}$

51. उस दीर्घवृत्त का समीकरण जिसकी नाभियाँ के बीच की दूरी 8 एवं नियताओं के बीच की दूरी 18 है, होगा

(a) $5x^2 - 9y^2 = 180$ (b) $9x^2 + 5y^2 = 180$
(c) $x^2 + 9y^2 = 180$ (d) $5x^2 + 9y^2 = 180$

52. किसी दीर्घवृत्त की नाभियों के बीच की दूरी 6 व लघुअक्ष 8 है तो इसकी उत्केन्द्रता होगी [EAMCET 1994]

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{52}}$
(c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{1}{2}$

53. यदि दी गई लम्बाई की एक छड़ दो परस्पर लम्बवत् रेखाओं के मध्य गतिमान है, तब छड़ पर स्थित किसी बिन्दु का बिन्दुपथ है [Orissa JEE 2003]

(a) वृत्त (b) परवलय
(c) दीर्घवृत्त (d) अतिपरवलय

54. दीर्घवृत्त $4x^2 + 9y^2 - 16x - 54y + 61 = 0$ का केन्द्र है [MP PET 1992]

(a) (1,3) (b) (2, 3)
(c) (3, 2) (d) (3, 1)

55. दीर्घवृत्त $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ की नाभिलम्ब जीवा है [MP PET 1989]

(a) $\frac{8}{3}$ (b) $\frac{4}{3}$
(c) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (d) $\frac{16}{3}$

56. दीर्घवृत्त $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$ की उत्केन्द्रता है

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(c) $\frac{1}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

57. उस दीर्घवृत्त का समीकरण जिसकी उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ और शीर्ष (4, 0) तथा (10, 0) हैं, होगा

(a) $3x^2 + 4y^2 - 42x + 120 = 0$
(b) $3x^2 + 4y^2 + 42x + 120 = 0$
(c) $3x^2 + 4y^2 + 42x - 120 = 0$
(d) $3x^2 + 4y^2 - 42x - 120 = 0$

58. उस दीर्घवृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र (2, –3), एक नाभि (3, –3) और संगत शीर्ष (4, – 3) है, होगा

(a) $\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$ (b) $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{3} = 1$
(c) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

59. समीकरण $14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$ प्रदर्शित करता है [BIT Ranchi 1986]

(a) वृत्त (b) दीर्घवृत्त
(c) अतिपरवलय (d) समकोणीय अतिपरवलय

60. दीर्घवृत्त $\frac{(x+y-2)^2}{9} + \frac{(x-y)^2}{16} = 1$ का केन्द्र है [EAMCET 1994]

(a) (0, 0) (b) (1, 1)
(c) (1, 0) (d) (0, 1)

61. दीर्घवृत्त का समीकरण जिसकी नाभि (–1,1) है जिसकी नियता $x - y + 3 = 0$ तथा जिसकी उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ है, होगा [MP PET 1993]

(a) $7x^2 + 2xy + 7y^2 + 10x - 10y + 7 = 0$
(b) $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 10x + 10y + 7 = 0$
(c) $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 10x - 10y - 7 = 0$
(d) $7x^2 - 2xy + 7y^2 + 10x + 10y - 7 = 0$

62. दीर्घवृत्त $25(x+1)^2 + 9(y+2)^2 = 225$ की नाभियाँ हैं [MNR 1991; MP PET 1998; UPSEAT 2000]

(a) (–1, 2) व (–1, –6) (b) (–1, 2) व (6, 1)
(c) (1, –2) व (1, –6) (d) (–1, –2) व (1, 6)

63. दीर्घवृत्त $9x^2 + 5y^2 - 30y = 0$ की उत्केन्द्रता है [MNR 1993; Pb. CET 2004]

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$
(c) $\frac{3}{4}$ (d) इनमें से कोई नहीं

64. $x = 3(\cos t + \sin t), y = 4(\cos t - \sin t)$ द्वारा निरूपित वक्र है [EAMCET 1988; DCE 2000]

(a) दीर्घवृत्त (b) परवलय
(c) अतिपरवलय (d) वृत्त

65. समीकरण $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta (a > b)$ एक शांकव निरूपित करता है जिसकी उत्केन्द्रता e निम्न प्रकार है

(a) $e^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}$ (b) $e^2 = \frac{a^2+b^2}{b^2}$

(c) $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ (d) $e^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}$

66. दीर्घवृत्त $4x^2+9y^2+8x+36y+4=0$ की उत्केन्द्रता है [MP PET 1996]

(a) $\frac{5}{6}$ (b) $\frac{3}{5}$

(c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (d) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

67. दीर्घवृत्त $3x^2+4y^2-12x-8y+4=0$ की नाभियों के निर्देशांक हैं

(a) (1, 2), (3, 4) (b) (1, 4), (3, 1)

(c) (1, 1), (3, 1) (d) (2, 3), (5, 4)

68. समीकरण $x^2+2y^2-2x+3y+2=0$ द्वारा प्रदर्शित वक्र की उत्केन्द्रता होगी [Roorkee 1998]

(a) 0 (b) 1/2

(c) $1/\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2}$

69. दीर्घवृत्त $25x^2+9y^2-150x-90y+225=0$ की उत्केन्द्रता $e=$ [Karnataka CET 2004]

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{3}{5}$

(c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{1}{5}$

70. दीर्घवृत्त $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$ की उत्केन्द्रता है [AMU 1999]

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{3}{5}$

(c) $\frac{5}{4}$ (d) अधिकल्पित

71. शांकव $9x^2+4y^2-6x+4y+1=0$ के अक्षों की लम्बाईयाँ हैं [Orissa JEE 2002]

(a) $\frac{1}{2}, 9$ (b) $3, \frac{2}{5}$

(c) $1, \frac{2}{3}$ (d) 3, 2

72. दीर्घवृत्त $9x^2+5y^2-18x-20y-16=0$ की उत्केन्द्रता है [EAMCET 2003]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$

73. शांकव $4x^2+16y^2-24x-3y=1$ की उत्केन्द्रता है [MP PET 2004]

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (d) $\sqrt{3}$

74. यदि रेखा $y=2x+c$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ को स्पर्श करती है, तो $c=$ [MNR 1979; DCE 2000]

(a) ±4 (b) ±6

(c) ±1 (d) ±8

75. दीर्घवृत्त $2x^2+5y^2=20$ के सापेक्ष बिन्दु (4, – 3) की स्थिति है

(a) दीर्घवृत्त के बाहर

(b) दीर्घवृत्त पर

(c) दीर्घ अक्ष पर

(d) इनमें से कोई नहीं

76. x अक्ष से 60^o का कोण बनाने वाली दीर्घवृत्त $x^2+16y^2=16$ की स्पर्श रेखा का समीकरण है

(a) $\sqrt{3}x-y+7=0$ (b) $\sqrt{3}x-y-7=0$

(c) $\sqrt{3}x-y\pm 7=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

77. दीर्घवृत्त $4x^2+9y^2-16x-54y+61=0$ के सापेक्ष बिन्दु (1, 3) की स्थिति है [MP PET 1991]

(a) दीर्घवृत्त के बाहर (b) दीर्घवृत्त पर

(c) दीर्घ अक्ष पर (d) लघु अक्ष पर

78. रेखा $lx+my-n=0$, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ को स्पर्श करेगी, यदि

(a) $a^2l^2+b^2m^2=n^2$ (b) $al^2+bm^2=n^2$

(c) $a^2l+b^2m=n$ (d) इनमें से कोई नहीं

79. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की परस्पर लम्ब स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ होगा

(a) एक सरल रेखा (b) एक परवलय

(c) एक वृत्त (d) इनमें से कोई नहीं

80. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{12}=1$ के बिन्दु (1/4, 1/4) पर स्पर्श रेखा का समीकरण है

(a) $3x+y=48$ (b) $3x+y=3$

(c) $3x+y=16$ (d) इनमें से कोई नहीं

81. दीर्घवृत्त $3x^2+2y^2=5$ पर बिन्दु (1, 2) से खींची गयीं स्पर्श रेखाओं के बीच कोण है [MNR 1984]

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$ (b) $\tan^{-1}(6\sqrt{5})$

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{12}{\sqrt{5}}\right)$ (d) $\tan^{-1}(12\sqrt{5})$

82. बिन्दु (2, 3) से जाने वाली दीर्घवृत्त $9x^2+16y^2=144$ की स्पर्श रेखाओं के समीकरण हैं [MP PET 1996]

(a) $y=3, x+y=5$ (b) $y=-3, x-y=5$

(c) $y=4, x+y=3$ (d) $y=-4, x-y=3$

83. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की कोई स्पर्श रेखा अक्षों पर h व k लम्बाई के अन्तः खण्ड काटती है, तो $\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}=$

(a) 0 (b) 1
(c) –1 (d) इनमें से कोई नहीं

84. यदि रेखा $y=mx+c$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ को स्पर्श करती है, तो $c=$ [MNR 1975; MP PET 1994, 95, 99]

(a) $\pm\sqrt{b^2m^2+a^2}$ (b) $\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$
(c) $\pm\sqrt{b^2m^2-a^2}$ (d) $\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

85. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ व सरल रेखा $y=mx+c$ वास्तविक बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं यदि [MNR 1995]

(a) $a^2m^2<c^2-b^2$ (b) $a^2m^2>c^2-b^2$
(c) $a^2m^2\ge c^2-b^2$ (d) $c\ge b$

86. यदि सरल रेखा $y=mx+c$, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ की स्पर्श रेखा हो, तो c का मान होगा

(a) 0 (b) $\frac{3}{m}$
(c) $\pm\sqrt{9m^2+4}$ (d) $\pm 3\sqrt{1+m^2}$

87. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ की लम्बवत् स्पर्शियों के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ होगा [Karnataka CET 2003]

(a) $x^2+y^2=9$ (b) $x^2+y^2=4$
(c) $x^2+y^2=13$ (d) $x^2+y^2=5$

88. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के नाभिलम्ब के सिरों के उत्केन्द्र कोण हैं

(a) $\tan^{-1}\left(\pm\frac{ae}{b}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\pm\frac{be}{a}\right)$
(c) $\tan^{-1}\left(\pm\frac{b}{ae}\right)$ (d) $\tan^{-1}\left(\pm\frac{a}{be}\right)$

89. दीर्घवृत्त $x^2+3y^2=6$ के केन्द्र से 2 इकाई दूरी पर दीर्घवृत्त पर स्थित किसी बिन्दु का उत्केन्द्र कोण है [WB JEE 1990]

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$
(c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

90. दीर्घवृत्त $9x^2+5y^2-30y=0$ के दीर्घ अक्ष के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के समीकरण हैं [MP PET 1999]

(a) $y=\pm 3$ (b) $x=\pm\sqrt{5}$
(c) $y=0, y=6$ (d) इनमें से कोई नहीं

91. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के बिन्दु $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ पर अभिलम्ब का समीकरण होगा

(a) $\frac{ax}{\sin\theta}-\frac{by}{\cos\theta}=a^2-b^2$
(b) $\frac{ax}{\sin\theta}-\frac{by}{\cos\theta}=a^2+b^2$
(c) $\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2$
(d) $\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2+b^2$

92. यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{14}+\frac{y^2}{5}=1$ के बिन्दु $P(\theta)$ पर खींचे गये अभिलम्ब इसे पुनः $Q(2\theta)$ पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो $\cos\theta$ बराबर है

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $-\frac{2}{3}$
(c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{3}{2}$

93. रेखा $y=mx+c$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ का अभिलम्ब है, यदि $c=$

(a) $-(2am+bm^2)$ (b) $\frac{(a^2+b^2)m}{\sqrt{a^2+b^2m^2}}$
(c) $-\frac{(a^2-b^2)m}{\sqrt{a^2+b^2m^2}}$ (d) $\frac{(a^2-b^2)m}{\sqrt{a^2+b^2}}$

94. दीर्घवृत्त $9x^2+5y^2=45$ के बिन्दु (0, 3) पर अभिलम्ब का समीकरण है [MP PET 1998]

(a) $y-3=0$ (b) $y+3=0$
(c) x-अक्ष (d) y-अक्ष

95. दीर्घवृत्त $9x^2+16y^2=180$ पर स्थित बिन्दु (2, 3) पर खींचे गये अभिलम्ब का समीकरण है [MP PET 2000]

(a) $3y=8x-10$ (b) $3y-8x+7=0$
(c) $8y+3x+7=0$ (d) $3x+2y+7=0$

96. यदि रेखा $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ पर अभिलम्ब है, तो [MP PET 2001]

(a) $p^2(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha)=a^2-b^2$
(b) $p^2(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha)=(a^2-b^2)^2$
(c) $p^2(a^2\sec^2\alpha+b^2\text{cosec}^2\alpha)=a^2-b^2$ s
(d) $p^2(a^2\sec^2\alpha+b^2\text{cosec}^2\alpha)=(a^2-b^2)^2$

97. रेखा $lx+my+n=0$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ पर अभिलम्ब है, यदि [DCE 2000]

(a) $\frac{a^2}{m^2}+\frac{b^2}{l^2}=\frac{(a^2-b^2)}{n^2}$ (b) $\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}=\frac{(a^2-b^2)^2}{n^2}$
(c) $\frac{a^2}{l^2}-\frac{b^2}{m^2}=\frac{(a^2-b^2)^2}{n^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

98. दीर्घवृत्त $4x^2+9y^2=36$ के बिन्दु (3, –2) पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब के समीकरण क्रमशः हैं **[MP PET 2004]**

(a) $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1, \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=\frac{5}{6}$ (b) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1, \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=\frac{5}{6}$

(c) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1, \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=\frac{5}{6}$ (d) इनमें से कोई नहीं

99. λ के किस मान के लिए, रेखा $2x-\frac{8}{3}\lambda y=-3$ शांकव $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ का अभिलम्ब है **[MP PET 2004]**

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{3}{8}$

100. सरल रेखा $x+4y=4$ का दीर्घवृत्त $x^2+4y^2=4$ के सापेक्ष ध्रुव है **[EAMCET 2002]**

(a) (1, 4) (b) (1, 1)

(c) (4, 1) (d) (4, 4)

101. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के व्यास $y=\frac{b}{a}x$ के संयुग्मी व्यास का समीकरण है

(a) $y=-\frac{b}{a}x$ (b) $y=-\frac{a}{b}x$

(c) $x=-\frac{b}{a}y$ (d) इनमें से कोई नहीं

102. किसी दीर्घवृत्त का अर्द्धलघु अक्ष *OB* तथा नाभियाँ *F* और *P* हैं तथा कोण *FBP* समकोण है तब दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता है **[AIEEE 2005]**

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{1}{2}$

103. यदि दीर्घवृत्त की नाभियाँ $(\pm\sqrt{5}, 0)$ तथा उत्केन्द्रता $\frac{\sqrt{5}}{3}$ है, तब दीर्घवृत्त का समीकरण है **[J & K 2005]**

(a) $9x^2+4y^2=36$ (b) $4x^2+9y^2=36$

(c) $36x^2+9y^2=4$ (d) $9x^2+36y^2=4$

104. शांकव $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ के किसी बिन्दु पर नाभीय दूरी का योग है **[Karnataka CET 2005]**

(a) 10 (b) 9

(c) 41 (d) 18

105. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा तथा अक्षों से निर्मित त्रिभुज का न्यूनतम क्षेत्रफल है **[IIT Screening 2005]**

(a) $\frac{a^2+b^2}{2}$ (b) $\frac{(a+b)^2}{2}$

(c) *ab* (d) $\frac{(a-b)^2}{2}$

106. दीर्घवृत्त $25x^2+16y^2-150x-175=0$ की उत्केन्द्रता है **[Kerala (Engg.) 2005]**

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{3}{4}$

(e) $\frac{3}{5}$

107. बिन्दु (4, –3) की दीर्घवृत्त $4x^2+5y^2=1$ के सापेक्ष स्थिति है **[Orissa JEE 2005]**

(a) वक्र पर स्थित है (b) वक्र के अंदर है

(c) वक्र के बाहर है (d) वक्र की नाभि पर है

108. उस बिन्दु का बिन्दुपथ जिसकी किसी नियत बिन्दु से रेखा $x=\frac{9}{2}$ की दूरी का अनुपात 2 : 3 है, है **[DCE 2005]**

(a) अतिपरवलय (b) दीर्घवृत्त

(c) परवलय (d) वृत्त

अतिपरवलय

1. वक्र $\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1$ पर स्थित एक बिन्दु है s **[MP PET 1988]**

(a) $(A\cos\theta, B\sin\theta)$ (b) $(A\sec\theta, B\tan\theta)$

(c) $(A\cos^2\theta, B\sin^2\theta)$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. यदि अतिपरवलयों $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ तथा $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ की उत्केन्द्रतायें क्रमशः *e* तथा e_1 हों, तो $\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e_1^2}=$ **[MNR 1984; MP PET 1995; DCE 2000]**

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) इनमें से कोई नहीं

3. अतिपरवलय $16x^2-9y^2=144$ पर कोई बिन्दु *P* है। यदि S_1 तथा S_2 इसकी नाभियाँ हों, तो $PS_1 \sim PS_2=$

(a) 4 (b) 6

(c) 8 (d) 12

4. यदि अतिपरवलय का नाभिलम्ब 8 तथा उत्केन्द्रता $\frac{3}{\sqrt{5}}$ हों, तो उसका समीकरण होगा

(a) $4x^2-5y^2=100$ (b) $5x^2-4y^2=100$

(c) $4x^2+5y^2=100$ (d) $5x^2+4y^2=100$

5. बिन्दुओं (3, 0) तथा $(3\sqrt{2}, 2)$ से गुजरने वाले अतिपरवलय की उत्केन्द्रता होगी **[MNR 1985; UPSEAT 2000]**

(a) $\sqrt{13}$ (b) $\frac{\sqrt{13}}{3}$

(c) $\frac{\sqrt{13}}{4}$ (d) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

6. निम्न में कौन अतिपरवलय निर्दिष्ट नहीं करता है **[MP PET 1992]**

(a) $xy = 1$ (b) $x^2 - y^2 = 5$

(c) $(x-1)(y-3) = 3$ (d) $x^2 - y^2 = 0$

7. उस अतिपरवलय, जिसका संयुग्मी अक्ष 5 तथा नाभियों के बीच की दूरी 13 है, का समीकरण होगा

(a) $25x^2 - 144y^2 = 900$ (b) $144x^2 - 25y^2 = 900$

(c) $144x^2 + 25y^2 = 900$ (d) $25x^2 + 144y^2 = 900$

8. एक अतिपरवलय की अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई 7 है तथा वह बिन्दु (5, –2) से गुजरता है। अतिपरवलय का समीकरण है

(a) $\frac{4}{49}x^2 - \frac{196}{51}y^2 = 1$ (b) $\frac{49}{4}x^2 - \frac{51}{196}y^2 = 1$

(c) $\frac{4}{49}x^2 - \frac{51}{196}y^2 = 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि किसी अतिपरवलय के शीर्ष (4, 0) तथा (– 4, 0) और नाभियाँ (6, 0) तथा (– 6, 0) हों, तो उत्केन्द्रता होगी

(a) $\frac{5}{2}$ (b) 2

(c) $\frac{3}{2}$ (d) $\sqrt{2}$

10. अतिपरवलय $x^2 - y^2 = 25$ की उत्केन्द्रता है **[MP PET 1987]**

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(c) 2 (d) $1+\sqrt{2}$

11. अतिपरवलय $16x^2 - y^2 + 64x + 4y + 44 = 0$ के अनुप्रस्थ अक्ष तथा संयुग्मी अक्ष के समीकरण हैं

(a) $x = 2, y + 2 = 0$ (b) $x = 2, y = 2$

(c) $y = 2, x + 2 = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

12. यदि किसी अतिपरवलय के अनुप्रस्थ तथा संयुग्मी अक्ष क्रमशः 8 तथा 6 हों, तो अतिपरवलय के किसी बिन्दु की नाभीय दूरियों का अन्तर होगा

(a) 8 (b) 6

(c) 14 (d) 2

13. यदि किसी अतिपरवलय की नाभि तथा शीर्ष $(0, \pm 4)$ तथा $(0, \pm 2)$ हों, तो उसका समीकरण होगा

(a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ (b) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

(c) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$ (d) $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{4} = 1$

14. रेखाओं $bxt - ayt = ab$ तथा $bx + ay = abt$ के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ है

(a) एक परवलय (b) एक दीर्घवृत्त

(c) एक अतिपरवलय (d) इनमें से कोई नहीं

15. रेखाओं $ax\sec\theta + by\tan\theta = a$ तथा $ax\tan\theta + by\sec\theta = b$, जहाँ θ प्राचल है, के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ है

(a) एक सरल रेखा (b) एक वृत्त

(c) एक दीर्घवृत्त (d) एक अतिपरवलय

16. यदि अतिपरवलय का केन्द्र, शीर्ष तथा नाभि क्रमशः (0, 0), (4, 0) तथा (6, 0) हों, तो अतिपरवलय का समीकरण होगा

(a) $4x^2 - 5y^2 = 8$ (b) $4x^2 - 5y^2 = 80$

(c) $5x^2 - 4y^2 = 80$ (d) $5x^2 - 4y^2 = 8$

17. अतिपरवलय की उत्केन्द्रता कभी भी निम्न के बराबर नहीं हो सकती

(a) $\sqrt{\frac{9}{5}}$ (b) $2\sqrt{\frac{1}{9}}$

(c) $3\sqrt{\frac{1}{8}}$ (d) 2

18. एक अतिपरवलय बिन्दुओं (3, 2) तथा (–17, 12) से गुजरता है और उसका केन्द्र मूलबिन्दु पर है तथा अनुप्रस्थ अक्ष x-अक्ष है। अतिपरवलय की अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई है

(a) 2 (b) 4

(c) 6 (d) इनमें से कोई नहीं

19. k के विभिन्न मानों के लिए रेखाओं $\sqrt{3}x - y - 4\sqrt{3}k = 0$ व $\sqrt{3}kx + ky - 4\sqrt{3} = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं का बिन्दुपथ होगा

(a) वृत्त (b) परवलय

(c) अतिपरवलय (d) दीर्घवृत्त

20. अतिपरवलय $9x^2 - 16y^2 = 144$ पर स्थित किसी बिन्दु की नाभीय दूरियों का अन्तर है **[MP PET 1995; Orissa JEE 2004]**

(a) 8 (b) 7

(c) 6 (d) 4

21. अतिपरवलय $4x^2 - 9y^2 = 16$ की उत्केन्द्रता है

(a) $\frac{8}{3}$ (b) $\frac{5}{4}$

(c) $\frac{\sqrt{13}}{3}$ (d) $\frac{4}{3}$

22. शांकव $x^2 - 4y^2 = 1$ की उत्केन्द्रता है **[MP PET 1999]**

(a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

23. उस वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ, जो दो दिये गये वृत्तों को बाह्यतः स्पर्श करता है, होगा **[Karnataka CET 1999]**

(a) वृत्त (b) परवलय

(c) अतिपरवलय (d) दीर्घवृत्त

24. अतिपरवलय $2x^2 - 3y^2 = 5$ की नाभि है **[MP PET 2000]**

(a) $\left(\pm\frac{5}{\sqrt{6}}, 0\right)$ (b) $\left(\pm\frac{5}{6}, 0\right)$

(c) $\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

25. अतिपरवलय $16x^2 - 9y^2 = 144$ का नाभिलम्ब है **[MP PET 2000]**

(a) $\frac{16}{3}$ (b) $\frac{32}{3}$

(c) $\frac{8}{3}$ (d) $\frac{4}{3}$

26. अतिपरवलय $9x^2 - 16y^2 = 144$ की नाभि है **[MP PET 2001]**

(a) $(\pm 4, 0)$ (b) $(0, \pm 4)$

(c) $(\pm 5, 0)$ (d) $(0, \pm 5)$

27. अतिपरवलय $3x^2 - 4y^2 = 32$ के अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई है **[Karnataka CET 2001]**

(a) $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

(c) $\frac{3}{32}$ (d) $\frac{64}{3}$

28. अतिपरवलय $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ की नियता है **[UPSEAT 2003]**

(a) $x = 9/\sqrt{13}$ (b) $y = 9/\sqrt{13}$

(c) $x = 6/\sqrt{13}$ (d) $y = 6/\sqrt{13}$

29. सरल रेखाओं $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = m$ तथा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{m}$ के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ होगा **[MP PET 1991, 2003]**

(a) एक दीर्घवृत्त (b) एक वृत्त

(c) एक अतिपरवलय (d) एक परवलय

30. उस बिन्दु का बिन्दुपथ, जो इस प्रकार गति करता है, कि दो स्थिर बिन्दुओं से उसकी दूरियों का अन्तर सदैव अचर रहे, है **[Karnataka CET 2003]**

(a) एक सरल रेखा (b) एक वृत्त

(c) एक दीर्घवृत्त (d) एक अतिपरवलय

31. अतिपरवलय $2x^2 - y^2 = 6$ की उत्केन्द्रता है **[MP PET 1992]**

(a) $\sqrt{2}$ (b) 2

(c) 3 (d) $\sqrt{3}$

32. एक अतिपरवलय की नाभियों के बीच की दूरी उसके शीर्षो के बीच की दूरी की दुगनी है और संयुग्मी अक्ष की लम्बाई 6 है। अतिपरवलय की अक्षों को निर्देशांक अक्ष लेते हुये अतिपरवलय का समीकरण है

(a) $3x^2 - y^2 = 3$ (b) $x^2 - 3y^2 = 3$

(c) $3x^2 - y^2 = 9$ (d) $x^2 - 3y^2 = 9$

33. समीकरण $13[(x-1)^2 + (y-2)^2] = 3(2x + 3y - 2)^2$ निरूपित करता है

(a) परवलय (b) दीर्घवृत्त

(c) अतिपरवलय (d) इनमें से कोई नहीं

34. यदि अतिपरवलय की नियता $x + 2y = 1$, नाभि (2, 1) तथा उत्केन्द्रता 2 हो तो उसका समीकरण होगा **[MP PET 1988, 89]**

(a) $x^2 - 16xy - 11y^2 - 12x + 6y + 21 = 0$

(b) $3x^2 + 16xy + 15y^2 - 4x - 14y - 1 = 0$

(c) $x^2 + 16xy + 11y^2 - 12x - 6y + 21 = 0$

(d) इनमें से कोई नहीं

35. एक अतिपरवलय के शीर्ष (0, 0) तथा (10, 0) और एक नाभि (18, 0) है। अतिपरवलय का समीकरण है

(a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ (b) $\frac{(x-5)^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$

(c) $\frac{x^2}{25} - \frac{(y-5)^2}{144} = 1$ (d) $\frac{(x-5)^2}{25} - \frac{(y-5)^2}{144} = 1$

36. समीकरण $x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$ निरूपित करता है

(a) एक दीर्घवृत्त (b) एक सरल रेखायुग्म

(c) एक अतिपरवलय (d) इनमें से कोई नहीं

37. शांकव $x^2 + 2x - y^2 + 5 = 0$ की नियताओं के समीकरण हैं

(a) $x = \pm 1$ (b) $y = \pm 2$

(c) $y = \pm\sqrt{2}$ (d) $x = \pm\sqrt{3}$

38. अतिपरवलय $\frac{x^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ की नाभियाँ हैं

(a) (5, 2), (– 5, 2) (b) (5, 2), (5, – 2)

(c) (5, 2), (– 5, – 2) (d) इनमें से कोई नहीं

39. अतिपरवलय $9x^2 - 16y^2 + 18x + 32y - 151 = 0$ का केन्द्र है

(a) (1, – 1) (b) (– 1, 1)

(c) (–1, – 1) (d) (1, 1)

40. अतिपरवलय जिसकी नाभियाँ (6, 4) तथा (– 4, 4) हैं तथा उत्केन्द्रता 2 हो, का समीकरण है **[MP PET 1993]**

(a) $12x^2 - 4y^2 - 24x + 32y - 127 = 0$

(b) $12x^2 + 4y^2 + 24x - 32y - 127 = 0$

(c) $12x^2 - 4y^2 - 24x - 32y + 127 = 0$

(d) $12x^2 - 4y^2 + 24x + 32y + 127 = 0$

41. अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के सहायक वृत्त का समीकरण है

(a) $x^2 + y^2 = a^2$ (b) $x^2 + y^2 = b^2$

(c) $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ (d) $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$

42. समीकरण $x^2-16xy-11y^2-12x+6y+21=0$ व्यक्त करता है

(a) परवलय (b) दीर्घवृत्त

(c) अतिपरवलय (d) दो सरल रेखायें

43. अतिपरवलय $9x^2-16y^2-18x-32y-151=0$ का नाभिलम्ब है **[MP PET 1996]**

(a) $\frac{9}{4}$ (b) 9

(c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{9}{2}$

44. अतिपरवलय जिसकी नियता $2x+y=1$, नाभि (1, 1) और उत्केन्द्रता $\sqrt{3}$ है, का समीकरण है

(a) $7x^2+12xy-2y^2-2x+4y-7=0$

(b) $11x^2+12xy+2y^2-10x-4y+1=0$

(c) $11x^2+12xy+2y^2-14x-14y+1=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

45. समीकरण $x^2-4y^2-2x+16y-40=0$ प्रदर्शित करता है **[DCE 1999]**

(a) एक रेखायुग्म (b) एक दीर्घवृत्त

(c) एक अतिरवलय (d) एक परवलय

46. अतिपरवलय $x=8\sec\theta,\ y=8\tan\theta$ की नियताओं के मध्य दूरी है **[Karnataka CET 2003]**

(a) $16\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{2}$

(c) $8\sqrt{2}$ (d) $4\sqrt{2}$

47. अतिपरवलय $5x^2-4y^2+20x+8y=4$ की उत्केन्द्रता है **[UPSEAT 2004]**

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{3}{2}$

(c) 2 (d) 3

48. अतिपरवलय $9x^2-16y^2+72x-32y-16=0$ का नाभिलम्ब है **[Pb. CET 2004]**

(a) $\frac{9}{2}$ (b) $-\frac{9}{2}$

(c) $\frac{32}{3}$ (d) $-\frac{32}{3}$

49. अतिपरवलय $5x^2-9y^2=45$ की स्पर्श रेखा $y=x+2$ का स्पर्श बिन्दु है

(a) (9/2, 5/2) (b) (5/2, 9/2)

(c) (– 9/2, – 5/2) (d) इनमें से कोई नहीं

50. रेखा $lx+my+n=0$ अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ की स्पर्श रेखा होगी, यदि **[MP PET 2001]**

(a) $a^2l^2+b^2m^2=n^2$ (b) $a^2l^2-b^2m^2=n^2$

(c) $am^2-b^2n^2=a^2l^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

51. यदि रेखा $y=2x+\lambda$ अतिपरवलय $36x^2-25y^2=3600$ की स्पर्श रेखा हो तो $\lambda=$

(a) 16 (b) –16

(c) ± 16 (d) इनमें से कोई नहीं

52. रेखा $3x-4y=5$ अतिपरवलय $x^2-4y^2=5$ की एक स्पर्श रेखा है तो स्पर्श बिन्दु है

(a) (3, 1) (b) (2, 1/4)

(c) (1, 3) (d) इनमें से कोई नहीं

53. शांकव $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ के बिन्दु $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण है

(a) $x\sec^2\theta-y\tan^2\theta=1$

(b) $\frac{x}{a}\sec\theta-\frac{y}{b}\tan\theta=1$

(c) $\frac{x+a\sec\theta}{a^2}-\frac{y+b\tan\theta}{b^2}=1$

(d) इनमें से कोई नहीं

54. रेखा $x+3y=2$ के लम्बवत् शांकव $3x^2-y^2=3$ की स्पर्श रेखाओं का समीकरण है

(a) $y=3x\pm\sqrt{6}$ (b) $y=6x\pm\sqrt{3}$

(c) $y=x\pm\sqrt{6}$ (d) $y=3x\pm 6$

55. अतिपरवलय $2x^2-3y^2=6$ की स्पर्श रेखा जो रेखा $y=3x+4$ के समान्तर है, होगी **[MNR 1993]**

(a) $y=3x+5$ (b) $y=3x-5$

(c) $y=3x+5$ व $y=3x-5$ (d) इनमें से कोई नहीं

56. अतिपरवलय की किन्हीं दो लम्बवत् स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ एक वृत्त होता है जिसे अतिपरवलय का नियामक वृत्त कहते है, तो इस वृत्त का समीकरण है

(a) $x^2+y^2=a^2+b^2$ (b) $x^2+y^2=a^2-b^2$

(c) $x^2+y^2=2ab$ (d) इनमें से कोई नहीं

57. अतिपरवलय $3x^2-4y^2=12$ की उन स्पर्शियों के समीकरण जो अक्षों से बराबर अन्तः खण्ड काटती हैं, है

(a) $y+x=\pm 1$ (b) $y-x=\pm 1$

(c) $3x+4y=\pm 1$ (d) $3x-4y=\pm 1$

58. यदि m_1 व m_2 अतिपरवलय $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ की स्पर्श रेखाओं की प्रवणतायें हों, जो बिन्दु (6, 2) से गुजरती हैं, तो

(a) $m_1+m_2=\frac{24}{11}$ (b) $m_1m_2=\frac{20}{11}$

(c) $m_1+m_2=\frac{48}{11}$ (d) $m_1m_2=\frac{11}{20}$

59. अतिपरवलय $4y^2=x^2-1$ के बिन्दु (1, 0) पर स्पर्श रेखा का समीकरण होगा **[Karnataka CET 1994]**

(a) $x=1$ (b) $y=1$

(c) $y=4$ (d) $x=4$

60. m का वह मान जिसके लिए रेखा $y = mx + 6$ अतिपरवलय $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{49} = 1$ की स्पर्श रेखा होगी, है **[Karnataka CET 1993]**

(a) $\sqrt{\frac{17}{20}}$ (b) $\sqrt{\frac{20}{17}}$

(c) $\sqrt{\frac{3}{20}}$ (d) $\sqrt{\frac{20}{3}}$

61. शांकव $x^2 - y^2 - 8x + 2y + 11 = 0$ के बिन्दु (2, 1) पर स्पर्शी का समीकरण होगा **[Karnataka CET 1993]**

(a) $x + 2 = 0$ (b) $2x + 1 = 0$

(c) $x - 2 = 0$ (d) $x + y + 1 = 0$

62. रेखा $y = x - 1$ का $3x^2 - 4y^2 = 12$ के साथ स्पर्श बिन्दु है **[BIT Mesra 1996]**

(a) (4, 3) (b) (3, 4)

(c) (4, –3) (d) इनमें से कोई नहीं

63. यदि सरल रेखा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्श रेखा हो, तब **[Karnataka CET 1999]**

(a) $a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = p^2$

(b) $a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha = p^2$

(c) $a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha = p^2$

(d) $a^2\sin^2\alpha - b^2\cos^2\alpha = p^2$

64. यदि अतिपरवलय $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ के बिन्दु $(2\sec\phi, 3\tan\phi)$ पर स्पर्शी $3x - y + 4 = 0$ के समान्तर है, तब ϕ का मान है **[MP PET 1998]**

(a) 45^o (b) 60^o

(c) 30^o (d) 75^o

65. अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के नियामक वृत्त (director circle) की त्रिज्या है **[MP PET 1999]**

(a) $a - b$ (b) $\sqrt{a - b}$

(c) $\sqrt{a^2 - b^2}$ (d) $\sqrt{a^2 + b^2}$

66. अतिपरवलय $xy = a(a \neq 0)$ के बिन्दु (a, 1) पर खींची गयी स्पर्शी की प्रवणता (slope) होगी **[AMU 2000]**

(a) $1/a$ (b) $-1/a$

(c) a (d) $-a$

67. सरल रेखा $y = mx + c$ वक्र $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ को स्पर्श करती है, यदि **[Kerala (Engg.) 2002]**

(a) $c^2 = a^2m^2 + b^2$ (b) $c^2 = a^2m^2 - b^2$

(c) $c^2 = b^2m^2 - a^2$ (d) $a^2 = b^2m^2 + c^2$

68. सरल रेखा $x + y = \sqrt{2}p$ अतिपरवलय $4x^2 - 9y^2 = 36$ को स्पर्श करती है, यदि **[Orissa JEE 2003]**

(a) $p^2 = 2$ (b) $p^2 = 5$

(c) $5p^2 = 2$ (d) $2p^2 = 5$

69. अतिपरवलय $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ के नियामक वृत्त का समीकरण है **[Karnataka CET 2004]**

(a) $x^2 + y^2 = 16$ (b) $x^2 + y^2 = 4$

(c) $x^2 + y^2 = 20$ (d) $x^2 + y^2 = 12$

70. अतिपरवलय $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ की स्पर्श रेखा, जो रेखा $y - x + 5 = 0$, के समान्तर है, का समीकरण है **[UPSEAT 2004]**

(a) $x - y - 1 = 0$ (b) $x - y + 2 = 0$

(c) $x + y - 1 = 0$ (d) $x + y + 2 = 0$

71. यदि E दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ है तथा C वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ है। P व Q दो बिन्दु क्रमशः (1, 2) एवं (2, 1) हों तो **[IIT 1994]**

(a) Q बिन्दु C के अन्दर किन्तु E के बाहर स्थित है

(b) Q बिन्दु C तथा E दोनों के बाहर स्थित है

(c) P बिन्दु C तथा E दोनों के अन्दर स्थित है

(d) P बिन्दु C के अन्दर किन्तु E के बाहर स्थित है

72. परवलय $y^2 = 4ax$ की उस जीवा की लम्बाई, जो शीर्ष से गुजरती है और परवलय के अक्ष के साथ कोण θ बनाती है, है

(a) $4a\cos\theta\,\text{cosec}^2\theta$ (b) $4a\cos^2\theta\,\text{cosec}\,\theta$

(c) $a\cos\theta\,\text{cosec}^2\theta$ (d) $a\cos^2\theta\,\text{cosec}\,\theta$

73. वक्र $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ के बिन्दु $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ पर अभिलम्ब का समीकरण है **[Karnataka CET 1999]**

(a) $\frac{ax}{\cos\theta} + \frac{by}{\sin\theta} = a^2 + b^2$ (b) $\frac{ax}{\tan\theta} + \frac{by}{\sec\theta} = a^2 + b^2$

(c) $\frac{ax}{\sec\theta} + \frac{by}{\tan\theta} = a^2 + b^2$ (d) $\frac{ax}{\sec\theta} + \frac{by}{\tan\theta} = a^2 - b^2$

74. सरल रेखा $lx + my = n$ का अतिपरवलय $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ पर अभिलम्ब होने का प्रतिबन्ध होगा **[MP PET 1993, 94]**

(a) $\frac{a^2}{l^2} - \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2+b^2)^2}{n^2}$ (b) $\frac{l^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2} = \frac{(a^2+b^2)^2}{n^2}$

(c) $\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2-b^2)^2}{n^2}$ (d) $\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} = \frac{(a^2-b^2)^2}{n^2}$

75. अतिपरवलय $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ के बिन्दु $(8, 3\sqrt{3})$ पर अभिलम्ब का समीकरण है **[MP PET 1996]**

(a) $\sqrt{3}x + 2y = 25$ (b) $x + y = 25$

(c) $y + 2x = 25$ (d) $2x + \sqrt{3}y = 25$

76. अतिपरवलय $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=3$ के बिन्दु (6, 4) पर अभिलम्ब का समीकरण होगा

(a) $3x+8y=50$ (b) $3x-8y=50$

(c) $8x+3y=50$ (d) $8x-3y=50$

77. अतिपरवलय $25x^2-16y^2=400$ की उस जीवा का समीकरण क्या होगा, जिसका मध्य बिन्दु (5, 3) है **[UPSEAT 1999]**

(a) $115x-117y=17$ (b) $125x-48y=481$

(c) $127x+33y=341$ (d) $15x+121y=105$

78. *m* के किस मान के लिए शांकव $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ का अभिलम्ब $y=mx+\frac{25\sqrt{3}}{3}$ है। **[MP PET 2004]**

(a) $\sqrt{3}$ (b) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

(c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 1

79. अतिपरवलय $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ के बिन्दु $(-4, 0)$ पर अभिलम्ब का समीकरण होगा **[UPSEAT 2002]**

(a) $y=0$ (b) $y=x$

(c) $x=0$ (d) $x=-y$

80. अतिपरवलय $x^2-3y^2=1$ के संयुग्मी अतिपरवलय की उत्केन्द्रता है **[MP PET 1999]**

(a) 2 (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(c) 4 (d) $\frac{4}{3}$

81. यदि किसी अतिपरवलय की उत्केन्द्रता तथा इसकी संयुग्मी की उत्केन्द्रता क्रमशः *e* तथा *e′* हो, तो **[UPSEAT 1999]**

(a) $\left(\frac{1}{e}\right)^2+\left(\frac{1}{e'}\right)^2=1$ (b) $\frac{1}{e}+\frac{1}{e'}=1$

(c) $\left(\frac{1}{e}\right)^2+\left(\frac{1}{e'}\right)^2=0$ (d) $\frac{1}{e}+\frac{1}{e'}=2$

82. अतिपरवलय $x^2-2y^2-2=0$ पर किसी बिन्दु से अनन्त स्पर्शियों पर खींचे गये लम्बों की लम्बाईयों का गुणनफल होगा **[EAMCET 2003]**

(a) 1/2 (b) 2/3

(c) 3/2 (d) 2

83. यदि अतिपरवलय की नाभियाँ (5, 0) तथा (– 5, 0) और संयुग्मी अक्ष 8 हो, तो अतिपरवलय का समीकरण होगा

(a) $9x^2-16y^2=144$ (b) $16x^2-9y^2=144$

(c) $9x^2-16y^2=12$ (d) $16x^2-9y^2=12$

84. उस अतिपरवलय, जिसकी नाभि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ की नाभि के बराबर है, तथा उत्केन्द्रता 2 है का समीकरण होगा

(a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{12}=1$ (b) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

(c) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$ (d) $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

85. समकोणीय अतिपरवलय $xy=c^2$ की नाभियों के निर्देशांक हैं

(a) $(\pm c, \pm c)$ (b) $(\pm c\sqrt{2}, \pm c\sqrt{2})$

(c) $\left(\pm\frac{c}{\sqrt{2}}, \pm\frac{c}{\sqrt{2}}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

86. वक्र $x^2-y^2=1$ की उत्केन्द्रता है **[MP PET 1995]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(c) 2 (d) $\sqrt{2}$

87. रेखाओं $(x+y)t=a$ तथा $x-y=at$, जहाँ *t* प्राचल है, के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ है

(a) एक वृत्त (b) एक दीर्घवृत्त

(c) एक समकोणीय अतिपरवलय (d) इनमें से कोई नहीं

88. उस अतिपरवलय का समीकरण जिसकी अक्ष, निर्देशाक्षों के सापेक्ष हों एवं जिसकी नाभियों के बीच की दूरी 16 तथा उत्केन्द्रता $\sqrt{2}$ हो, है **[MNR 1984]**

(a) $x^2-y^2=16$ (b) $x^2-y^2=32$

(c) $x^2-2y^2=16$ (d) $y^2-x^2=16$

89. यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की नाभियाँ व अतिपरवलय $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{81}=\frac{1}{25}$ की नाभियाँ सम्पाती हों तो b^2 का मान है

[MNR 1992; UPSEAT 2001; AIEEE 2003; Karnataka CET 2004; Kerala (Engg.) 2005]

(a) 1 (b) 5

(c) 7 (d) 9

90. अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ की स्पर्शी प्रत्येक निर्देशाक्ष से इकाई लम्बाई का अन्तः खण्ड काटता है, तो बिन्दु (*a, b*) निम्न समकोणीय अतिपरवलय पर होगा

(a) $x^2-y^2=2$ (b) $x^2-y^2=1$

(c) $x^2-y^2=-1$ (d) इनमें से कोई नहीं

91. वक्र $xy=c^2$ प्रदर्शित करता है

(a) परवलय (b) समकोणीय अतिपरवलय

(c) अतिपरवलय (d) दीर्घवृत्त

92. आयताकार अतिपरवलय की उत्केन्द्रता का व्युत्क्रम है

[MP PET 1994]

(a) 2 (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

93. अतिपरवलय $\frac{\sqrt{1999}}{3}(x^2 - y^2) = 1$ की उत्केन्द्रता है **[Karnataka CET 1999]**

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{2}$

(c) 2 (d) $2\sqrt{2}$

94. यदि किसी अतिपरवलय के अनुप्रस्थ तथा संयुग्मी अक्ष बराबर हो, तो उत्केन्द्रता है **[MP PET 2003]**

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{2}$

(c) $1/\sqrt{2}$ (d) 2

95. यदि $5x^2 + \lambda y^2 = 20$ एक समकोणीय अतिपरवलय निरूपित करता है, तो λ बराबर होगा

(a) 5

(b) 4

(c) – 5

(d) इनमें से कोई नहीं

96. उस अतिपरवलय का समीकरण जिसके अक्ष, निर्देशांक अक्ष है। इसकी नाभियों के बीच की दूरी 16 तथा उत्केन्द्रता $\sqrt{2}$ है, होगा **[UPSEAT 2000]**

(a) $x^2 - y^2 = 16$ (b) $x^2 - y^2 = 32$

(c) $x^2 - 2y^2 = 16$ (d) $y^2 - x^2 = 16$

97. यदि e तथा e' क्रमशः दीर्घवृत्त $5x^2 + 9y^2 = 45$ तथा अतिपरवलय $5x^2 - 4y^2 = 45$ की उत्केन्द्रता हो, तो $ee'=$ **[EAMCET 2002]**

(a) 9 (b) 4

(c) 5 (d) 1

98. समकोणिक अतिपरवलय की नियताओं के मध्य दूरी 10 इकाई है, तब इसकी नाभियों के मध्य दूरी है **[MP PET 2002]**

(a) $10\sqrt{2}$ (b) 5

(c) $5\sqrt{2}$ (d) 20

99. वक्र $x^2 - y^2 = a^2$ की उत्केन्द्रता होगी **[UPSEAT 2002]**

(a) 2 (b) $\sqrt{2}$

(c) 4 (d) इनमें से कोई नहीं

100. आयताकार अतिपरवलय की उत्केन्द्रता होगी **[UPSEAT 2002]**

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$

(c) $\sqrt{2}$ (d) > 2

101. अतिपरवलय $x^2 - 3y^2 = 2x + 8$ के संयुग्मी अतिपरवलय की उत्केन्द्रता होगी **[UPSEAT 2004]**

(a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (b) $\sqrt{3}$

(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

102. उस बिन्दु $P(\alpha, \beta)$ का बिन्दुपथ जो इस प्रकार गमन करता है कि रेखा $y = \alpha x + \beta$, अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्श रेखा है, है **[AIEEE 2005]**

(a) परवलय (b) अतिपरवलय

(c) दीर्घवृत्त (d) वृत्त

103. अतिपरवलय $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ की उत्केन्द्रता है **[Karnataka CET 2005]**

(a) 3/4 (b) 3/5

(c) $\sqrt{41}/4$ (d) $\sqrt{41/5}$

104. उस अतिपरवलय का समीकरण जिसकी उत्केन्द्रता 2 तथा नाभियों के बीच की दूरी 8 है, है **[Karnataka CET 2005]**

(a) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ (b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

(c) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$ (d) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

105. वृत्त $x^2 + y^2 = 5$ व परवलय $y^2 = 4x$ के वास्तविक प्रतिच्छेद बिन्दुओं के मध्य न्यूनकोण θ है तब $\tan\theta =$ **[Karnataka CET 2005]**

(a) 1 (b) $\sqrt{3}$

(c) 3 (d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

106. अतिपरवलय का मानक समीकरण (x-अक्ष के अनुदिश अनुप्रस्थ अक्ष) जिसकी नाभिलम्ब की लम्बाई 9 इकाई व उत्केन्द्रता $\frac{5}{4}$ है, है **[Kerala (Engg.) 2005]**

(a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{18} = 1$ (b) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{27} = 1$

(c) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ (d) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$

(e) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

107. यदि $4x^2 + py^2 = 45$ व $x^2 - 4y^2 = 5$ लाम्बिक प्रतिच्छेदित करते हैं तो p का मान है **[Kerala (Engg.) 2005]**

(a) 1/9 (b) 1/3

(c) 3 (d) 18

(e) 9

108. अतिपरवलय $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$ की उस स्पर्श रेखा का समीकरण, जो अक्षों से समान कोण बनाती है, है **[DCE 2005]**

(a) $y=x+1$ (b) $y=x-1$

(c) $y=x+2$ (d) $y=x-2$

Critical Thinking

Objective Questions

1. समीकरण $2x^2+3y^2-8x-18y+35=k$ प्रदर्शित करता है **[IIT 1994]**

(a) कोई बिन्दुपथ नहीं यदि $k>0$

(b) एक दीर्घवृत्त यदि $k<0$

(c) एक बिन्दु यदि $k=0$

(d) एक अतिपरवलय यदि $k>0$

2. दो वक्रों $y=2\sin x$ तथा $y=5x^2+2x+3$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं की संख्या होगी **[IIT 1994]**

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) ∞

3. यदि परवलय $y^2=4ax$ के बिन्दुओं $(at_1^2, 2at_1)$ तथा $(at_2^2, 2at_2)$ को मिलाने वाली जीवा परवलय की नाभि से गुजरती हो, तो **[MP PET 1993]**

(a) $t_1t_2=-1$ (b) $t_1t_2=1$

(c) $t_1+t_2=-1$ (d) $t_1-t_2=1$

4. परवलय $y^2=4ax$ पर स्थित एक गतिमान बिन्दु को नाभि से जोड़ने वाले रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ एक अन्य परवलय होता है, जिसकी नियता है **[IIT Screening 2002]**

(a) $x=-a$ (b) $x=-\frac{a}{2}$

(c) $x=0$ (d) $x=\frac{a}{2}$

5. परवलय $y=x^2$ पर, सरल रेखा $y=2x-4$ से न्यूनतम दूरी पर स्थित बिन्दु है **[AMU 2001]**

(a) (1, 1) (b) (1, 0)

(c) (1, –1) (d) (0, 0)

6. परवलय जिसकी नाभि $\left(\frac{u^2}{2g}\sin 2\alpha, -\frac{u^2}{2g}\cos 2\alpha\right)$ एवं नियता $y=\frac{u^2}{2g}$ है, के नाभिलम्ब की लम्बाई है

(a) $\frac{u^2}{g}\cos^2\alpha$ (b) $\frac{u^2}{g}\cos 2\alpha$

(c) $\frac{2u^2}{g}\cos^2 2\alpha$ (d) $\frac{2u^2}{g}\cos^2\alpha$

7. रेखा $x-1=0$ परवलय $y^2-kx+8=0$ की नियता है, तब *k*, का एक मान है **[IIT Screening 2000]**

(a) $\frac{1}{8}$ (b) 8

(c) 4 (d) $\frac{1}{4}$

8. बिन्दु (0, 1) से गुजरने वाले वृत्त का केन्द्र, जो कि वक्र $y=x^2$ को (2, 4) पर स्पर्श करता है, होगा **[IIT 1983]**

(a) $\left(\frac{-16}{5}, \frac{27}{10}\right)$ (b) $\left(\frac{-16}{7}, \frac{5}{10}\right)$

(c) $\left(\frac{-16}{5}, \frac{53}{10}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. माना कि एक वृत्त जिसका केन्द्र परवलय $y^2=2px$ की नाभि पर है तथा यह वृत्त परवलय की नियता को स्पर्श करता है, तो वृत्त व परवलय का प्रतिच्छेद बिन्दु है **[IIT 1995]**

(a) $\left(\frac{p}{2}, p\right)$ (b) $\left(\frac{p}{2}, -p\right)$

(c) $\left(\frac{-p}{2}, p\right)$ (d) $\left(\frac{-p}{2}, -p\right)$

10. निम्न में से कौन सा वक्र परवलय $y^2=4ax$ को समकोण पर काटेगा **[IIT 1994]**

(a) $x^2+y^2=a^2$ (b) $y=e^{-x/2a}$

(c) $y=ax$ (d) $x^2=4ay$

11. वक्र $y^2=2x/\pi$ तथा $y=\sin x$ के बीच प्रतिच्छेदन कोण होगा **[Roorkee 1998]**

(a) $\cot^{-1}(-1/\pi)$ (b) $\cot^{-1}\pi$

(c) $\cot^{-1}(-\pi)$ (d) $\cot^{-1}(1/\pi)$

12. वक्र $y^2=8x$ तथा $xy=-1$ की उभयनिष्ठ स्पर्शी का समीकरण है **[IIT Screening 2002]**

(a) $3y=9x+2$ (b) $y=2x+1$

(c) $2y=x+8$ (d) $y=x+2$

13. परवलय का समीकरण जिसकी नाभि (0, 0) तथा शीर्ष पर स्पर्शी का समीकरण $x-y+1=0$ है, है **[Orissa JEE 2002]**

(a) $x^2+y^2-2xy-4x+4y-4=0$

(b) $x^2+y^2-2xy+4x-4y-4=0$

(c) $x^2+y^2+2xy-4x+4y-4=0$

(d) $x^2+y^2+2xy-4x-4y+4=0$

14. यदि $a\neq 0$ तथा रेखा $2bx+3cy+4d=0$ परवलय $y^2=4ax$ तथा $x^2=4ay$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाती है, तब

[AIEEE 2004]

(a) $d^2+(3b-2c)^2=0$ (b) $d^2+(3b+2c)^2=0$

(c) $d^2+(2b-3c)^2=0$ (d) $d^2+(2b+3c)^2=0$

15. उस परवलय की जीवा के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ, जो परवलय के शीर्ष पर समकोण अन्तरित करती है, होगा [UPSEAT 1999]

(a) $y^2-2ax+8a^2=0$ (b) $y^2=a(x-4a)$

(c) $y^2=4a(x-4a)$ (d) $y^2+3ax+4a^2=0$

16. परवलय $y^2=8x$ के शीर्ष और नाभिलम्ब के सिरों से होकर जाने वाले वृत्त का समीकरण है [MP PET 1998]

(a) $x^2+y^2+10x=0$ (b) $x^2+y^2+10y=0$

(c) $x^2+y^2-10x=0$ (d) $x^2+y^2-5x=0$

17. किसी दीर्घवृत्त का केन्द्र *C* एवं *PN* कोई कोटि है, *A*, *A'* दीर्घवृत्त के सिरे हैं तो $\frac{PN^2}{AN\,.\,A'N}$ का मान होगा

(a) $\frac{b^2}{a^2}$ (b) $\frac{a^2}{b^2}$

(c) a^2+b^2 (d) 1

18. यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ जिसकी नाभियाँ F_1 व F_2 हैं पर एक चर बिन्दु *P* है। यदि *A*, त्रिभुज PF_1F_2 का क्षेत्रफल हो तो *A* का अधिकतम मान है [IIT 1994; Kerala (Engg.) 2005]

(a) *ab* (b) *abe*

(c) $\frac{e}{ab}$ (d) $\frac{ab}{e}$

19. एक व्यक्ति रेसकोर्स के चारों ओर दौड़ता हुआ यह नोट करता है कि उससे दो ध्वज स्तम्भों की दूरियों का योग सदैव 10 मीटर रहता है और ध्वज स्तम्भों के बीच दूरी 8 मीटर है। दौडने के मार्ग द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल, वर्ग मीटर में है

[MNR 1991; UPSEAT 2000]

(a) 15π (b) 12π

(c) 18π (d) 8π

20. यदि किसी दीर्घवृत्त के लघुअक्ष के दोनों सिरों को नाभियों से मिलाने वाली रेखाओं के मध्य कोण $\frac{\pi}{2}$ है, तो दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता है

[IIT Screening 1997; Pb. CET 2001; DCE 2002]

(a) 1/2 (b) $1/\sqrt{2}$

(c) $\sqrt{3}/2$ (d) $1/2\sqrt{2}$

21. दीर्घवृत्त, जिसका केन्द्र मूलबिन्दु पर है, की उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ है। यदि एक नियता $x=4$ है तब दीर्घवृत्त का समीकरण है [AIEEE 2004]

(a) $4x^2+3y^2=1$ (b) $3x^2+4y^2=12$

(c) $4x^2+3y^2=12$ (d) $3x^2+4y^2=1$

22. रेखा $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की एक स्पर्श रेखा होगी, यदि [Roorkee 1978]

(a) $p^2=a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha$

(b) $p^2=a^2+b^2$

(c) $p^2=b^2\sin^2\alpha+a^2\cos^2\alpha$

(d) इनमें से कोई नहीं

23. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ व वृत्त $x^2+y^2=ab$ का प्रतिच्छेद कोण है

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{a-b}{ab}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{a+b}{ab}\right)$

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)$ (d) $\tan^{-1}\left(\frac{a-b}{\sqrt{ab}}\right)$

24. दीर्घवृत्त $4x^2+9y^2=1$ पर वे बिन्दु, जहाँ पर इसकी स्पर्श रेखाएँ, रेखा $8x=9y$ के समान्तर हैं, है [IIT 1999]

(a) $\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$ (b) $\left(-\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$

(c) $\left(-\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)$ (d) $\left(\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)$

25. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ की नाभिलम्ब जीवा के सिरों पर स्पर्शियों से निर्मित चतुर्भुज का क्षेत्रफल होगा [IIT Screening 2003]

(a) $\frac{27}{4}$ वर्ग इकाई (b) 9 वर्ग इकाई

(c) $\frac{27}{2}$ वर्ग इकाई (d) 27 वर्ग इकाई

26. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{27}+y^2=1$ के बिन्दु $(3\sqrt{3}\cos\theta,\sin\theta)$ पर स्पर्शी खींची गयी है। (जहाँ $\theta\in(0,\pi/2)$ तब θ के किस मान के लिए स्पर्शी द्वारा अक्षों पर काटे गये अंतःखण्डो का योग न्यूनतम होगा

[IIT Screening 2003]

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{6}$

(c) $\frac{\pi}{8}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

27. दीर्घवृत्त $x^2+2y^2=2$ पर किसी बाह्य बिन्दु से खींची गयी स्पर्श रेखाओं द्वारा निर्देशांक अक्षों से काटे गये अन्तःखण्ड के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ है [IIT Screening 2004]

(a) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2y^2}=1$ (b) $\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{2y^2}=1$

(c) $\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4y^2}=1$ (d) $\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{y^2}=1$

28. यदि दीर्घवृत्त के बिन्दु *P* पर खींचा गया अभिलम्ब दीर्घअक्ष और लुघअक्ष को क्रमशः *G* तथा *g* पर काटे तथा *C* यदि उस दीर्घवृत्त का केन्द्र हो, तो [Kurukshetra CEE 1998]

(a) $a^2(CG)^2 + b^2(Cg)^2 = (a^2 - b^2)^2$

(b) $a^2(CG)^2 - b^2(Cg)^2 = (a^2 - b^2)^2$

(c) $a^2(CG)^2 - b^2(Cg)^2 = (a^2 + b^2)^2$

(d) इनमें से कोई नहीं

29. दीर्घवृत्त की जीवा के ध्रुवों का बिन्दुपथ होगा **[UPSEAT 2001]**

(a) $\frac{a^6}{x^2} + \frac{b^6}{y^2} = (a^2 - b^2)^2$ (b) $\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} = (a^2 - b^2)^2$

(c) $\frac{a^6}{x^2} + \frac{b^6}{y^2} = (a^2 + b^2)^2$ (d) $\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} = (a^2 + b^2)^2$

30. यदि θ तथा ϕ, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के संयुग्मी व्यासों के सिरों के उत्केन्द्र कोण हैं, तो $\theta - \phi$ बराबर होगा

(a) $\pm\frac{\pi}{2}$ (b) $\pm\pi$

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

31. यदि अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ की द्विगुणित कोटि *PQ* ,इस प्रकार है कि *OPQ* एक समबाहु त्रिभुज है, जबकि *O* अतिपरवलय का केन्द्र है, तब अतिपरवलय की उत्केन्द्रता *e* संतुष्ट करती है **[EAMCET 1999]**

(a) $1 < e < 2/\sqrt{3}$ (b) $e = 2/\sqrt{3}$

(c) $e = \sqrt{3}/2$ (d) $e > 2/\sqrt{3}$

32. समीकरण $\frac{1}{r} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cos\theta$ प्रदर्शित करता है **[EAMCET 2002]**

(a) एक समकोणिक अतिपरवलय (b) एक अतिरवलय

(c) एक दीर्घवृत्त (d) एक परवलय

33. यदि अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर दो स्पर्श रेखायें इस प्रकार खींची जाती हैं कि उनकी प्रवणताओं का गुणनफल c^2 है, तो वे निम्न वक्र पर प्रतिच्छेद करती हैं

(a) $y^2 + b^2 = c^2(x^2 - a^2)$ (b) $y^2 + b^2 = c^2(x^2 + a^2)$

(c) $ax^2 + by^2 = c^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

34. अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ का केन्द्र *C* है। इस अतिपरवलय के किसी भी बिन्दु *P* पर खींची गयी स्पर्श रेखा, सरल रेखाओं $bx - ay = 0$ व $bx + ay = 0$ को क्रमशः *Q* व *R* बिन्दुओं पर मिलती है, तो $CQ \,.\, CR =$

(a) $a^2 + b^2$ (b) $a^2 - b^2$

(c) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ (d) $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$

35. यदि अतिपरवलय $x^2 - y^2 = 9$ की एक स्पर्श जीवा $x = 9$ है, तो सम्बन्धित युगल स्पर्श रेखा (Pair of tangents) का समीकरण है **[IIT 1999]**

(a) $9x^2 - 8y^2 + 18x - 9 = 0$

(b) $9x^2 - 8y^2 - 18x + 9 = 0$

(c) $9x^2 - 8y^2 - 18x - 9 = 0$

(d) $9x^2 - 8y^2 + 18x + 9 = 0$

36. अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर दो बिन्दु $P(a\sec\theta, b\tan\theta)$ और $Q(a\sec\phi, b\tan\phi)$ हैं, जहाँ $\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$ है। यदि *P* और *Q* पर अभिलम्ब एक दूसरे को बिन्दु (*h, k*) पर काटते हैं, तो *k* का मान है **[IIT 1999; MP PET 2002]**

(a) $\frac{a^2 + b^2}{a}$ (b) $-\left(\frac{a^2 + b^2}{a}\right)$

(c) $\frac{a^2 + b^2}{b}$ (d) $-\left(\frac{a^2 + b^2}{b}\right)$

37. अतिपरवलय $2x^2 + 5xy + 2y^2 + 4x + 5y = 0$ की अनन्तस्पर्शियों का संयुक्त समीकरण है **[Karnataka CET 2002]**

(a) $2x^2 + 5xy + 2y^2 = 0$

(b) $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 4x + 5y + 2 = 0$

(c) $2x^2 + 5xy + 2y^2 + 4x + 5y - 2 = 0$

(d) $2x^2 + 5xy + 2y^2 + 4x + 5y + 2 = 0$

38. एक दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ और एक नाभि बिन्दु $P\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ है। इसकी एक नियता वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ और अतिपरवलय $x^2 - y^2 = 1$ की बिन्दु *P* के निकट स्थित उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है। दीर्घवृत्त का मानक रूप में समीकरण होगा **[IIT 1996]**

(a) $\frac{(x - 1/3)^2}{1/9} + \frac{(y-1)^2}{1/12} = 1$

(b) $\frac{(x - 1/3)^2}{1/9} + \frac{(y+1)^2}{1/12} = 1$

(c) $\frac{(x - 1/3)^2}{1/9} - \frac{(y-1)^2}{1/12} = 1$

(d) $\frac{(x - 1/3)^2}{1/9} - \frac{(y+1)^2}{1/12} = 1$

39. यदि एक वृत्त एक आयताकार अतिपरवलय $xy = c^2$ को क्रमशः बिन्दुओं *A, B, C* तथा *D* पर काटे तथा उनके प्राचल (parameter) क्रमशः t_1, t_2, t_3 तथा t_4 हों तो **[Kurukshetra CEE 1998]**

(a) $t_1 t_2 = t_3 t_4$ (b) $t_1 t_2 t_3 t_4 = 1$

(c) $t_1 = t_2$ (d) $t_3 = t_4$

40. परवलय $y^2 = 8x$ व अतिपरवलय $3x^2 - y^2 = 3$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं का समीकरण है

(a) $2x \pm y + 1 = 0$ (b) $2x \pm y - 1 = 0$

(c) $x \pm 2y + 1 = 0$ (d) $x \pm 2y - 1 = 0$

Answers

शांकव परिच्छेद : सामान्य

1	d	2	a	3	c	4	c	5	d
6	c	7	c						

परवलय

1	c	2	a	3	c	4	b	5	b,c
6	a	7	b	8	b	9	b	10	b
11	d	12	c	13	c	14	c	15	d
16	c	17	a	18	c	19	d	20	a
21	d	22	d	23	d	24	a	25	d
26	c	27	a	28	a	29	a	30	d
31	b	32	c	33	a	34	a	35	a
36	d	37	c	38	b	39	b	40	c
41	a	42	d	43	a	44	b	45	d
46	b	47	c	48	a	49	c	50	a
51	a	52	c	53	b	54	b	55	b
56	a	57	c	58	c	59	c	60	d
61	d	62	c	63	a	64	d	65	b
66	d	67	a	68	a	69	a	70	a
71	a	72	d	73	a	74	d	75	b
76	c	77	a	78	c	79	b	80	a
81	b	82	a	83	d	84	a	85	a
86	a	87	c	88	a	89	c	90	d
91	c	92	b	93	a	94	a	95	b
96	c	97	b	98	b	99	c	100	d
101	a	102	b	103	c	104	d	105	b
106	d	107	c, d	108	b	109	c	110	a
111	d	112	a	113	c	114	b	115	d
116	a,b	117	b	118	b	119	b	120	b
121	d	122	a	123	c	124	b	125	c
126	d	127	d	128	b	129	c	130	c
131	a	132	c	133	a	134	d	135	a
136	c	137	d	138	d	139	d	140	a
141	d	142	a	143	b	144	a	145	a
146	d	147	c	148	b	149	c	150	d
151	b	152	c	153	b	154	c	155	c
156	d	157	c	158	c	159	d	160	c
161	c	162	c	163	c	164	c	165	b
166	d								

दीर्घवृत्त

1	b	2	c	3	b	4	a	5	d
6	d	7	b	8	a	9	c	10	b
11	a	12	a	13	d	14	d	15	d
16	c	17	b	18	a	19	b	20	a
21	b	22	b	23	c	24	b	25	b
26	a	27	d	28	b	29	d	30	b
31	c	32	b	33	c	34	b	35	a
36	b	37	c	38	c	39	a	40	c
41	b	42	a	43	c	44	a	45	d
46	c	47	b	48	d	49	b	50	a
51	d	52	c	53	c	54	b	55	a
56	b	57	a	58	b	59	b	60	b
61	a	62	a	63	b	64	a	65	c
66	d	67	c	68	c	69	c	70	a
71	c	72	b	73	a	74	b	75	a
76	c	77	c	78	a	79	c	80	d
81	c	82	a	83	b	84	a	85	c
86	c	87	c	88	c	89	a,c	90	c
91	c	92	b	93	c	94	d	95	b
96	d	97	b	98	a	99	d	100	b
101	a	102	c	103	b	104	a	105	c
106	e	107	c	108	b				

अतिपरवलय

1	b	2	a	3	b	4	a	5	b
6	d	7	a	8	c	9	c	10	a
11	c	12	a	13	c	14	c	15	d
16	c	17	b	18	a	19	c	20	a
21	c	22	d	23	c	24	a	25	b
26	c	27	a	28	a	29	c	30	d
31	d	32	c	33	c	34	a	35	b
36	c	37	c	38	a	39	b	40	a
41	a	42	c	43	d	44	a	45	c
46	c	47	b	48	a	49	c	50	b
51	c	52	a	53	b	54	a	55	c
56	b	57	b	58	a,b	59	a	60	a
61	c	62	a	63	b	64	c	65	c
66	b	67	b	68	d	69	d	70	a
71	d	72	a	73	c	74	a	75	d
76	a	77	b	78	b	79	a	80	a
81	a	82	b	83	b	84	b	85	b
86	d	87	c	88	b	89	c	90	b
91	b	92	c	93	b	94	b	95	c
96	b	97	d	98	d	99	b	100	c
101	c	102	b	103	c	104	b	105	c
106	c	107	e	108	a				

Critical Thinking Questions

1	c	2	a	3	a	4	c	5	a
6	d	7	c	8	c	9	a,b	10	b
11	b	12	d	13	c	14	d	15	a
16	c	17	a	18	b	19	a	20	b
21	b	22	c	23	d	24	b,d	25	d
26	b	27	c	28	a	29	a	30	a
31	d	32	b	33	a	34	a	35	b
36	d	37	d	38	a	39	b	40	a

Answers and Solutions

शांकव परिच्छेद : सामान्य

1. (d) शाकंव का केन्द्र = $\left(\frac{hf-bg}{ab-h^2}, \frac{gh-af}{ab-h^2}\right)$

$= \frac{(-36)(-14)-(23)(-2)}{(2)(23)-(36)^2}, \frac{(-2)(-36)-(2)(-14)}{(2)(23)-(-36)^2}$

$= \left(-\frac{11}{25}, -\frac{2}{25}\right)$

2. (a) शांकव के केन्द्र का सूत्र उपयोग करने पर, अर्थात् , $\left(\frac{hf-bg}{ab-h^2}, \frac{gh-af}{ab-h^2}\right)$.

3. (c) माना $P(x, y)$ शांकव पर कोई बिन्दु है, तो $\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = \sqrt{2}\left(\frac{x-y+1}{\sqrt{2}}\right)$, [$SP = e.PM$ से]

$\Rightarrow 2xy - 4x + 4y + 1 = 0$.

4. (c) **ट्रिक:** $(x,y) \equiv (\tan\theta + \sin\theta, \tan\theta - \sin\theta)$ का मान विकल्प (c) में रखने पर, विकल्प संतुष्ट होता है।

5. (d) दिया गया समीकरण $\sqrt{(x-2)^2+y^2} + \sqrt{(x+2)^2+y^2} = 4$

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2} = 4 - \sqrt{(x-2)^2+y^2}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, प्राप्त समीकरण

$\sqrt{(x+2)^2+y^2} = x+2$

पुनः दोनों पक्षों का वर्ग करने पर $y^2 = 0$ मिलता है, जो कि रेखायुग्म का समीकरण है।

6. (c) यहाँ $r = \sin\theta + \cos\theta$ व $r = 2\sin\theta$

$\therefore \; 2\sin\theta = \sin\theta + \cos\theta \Rightarrow \sin\theta = \cos\theta$

$\Rightarrow \; \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

7. (c) दिया गया समीकरण $y^2 - x^2 + 2x - 1 = 0$ है।

दिये गये समीकरण की

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ से तुलना करने पर,

$a = 1$, $h = 0$, $b = 1$, $g = 1$, $f = 0$, $c = -1$

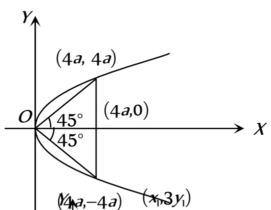
$\therefore \quad \Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$\Delta = 1 + 0 + 0 - 1 - 0 = 0$

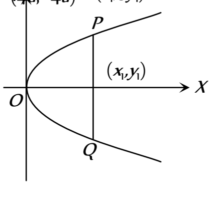
अतः दिया गया समीकरण दो सरल रेखाओं को निरूपित करता है।

परवलय

1. (c) यह चित्र से स्पष्ट है।



2. (a) अभीष्ट बिन्दुपथ $(3y)^2 = 4ax$



$\Rightarrow 9y^2 = 4ax$ है।

3. (c) $S \equiv (5,0)$, इसलिए नाभिलम्ब $= 4a = 20$ है।

4. (b) नाभि व नियता के बीच की दूरी

$= \left|\frac{3-4-2}{\sqrt{2}}\right| = \frac{\pm 3}{\sqrt{2}}$

अतः नाभिलम्ब $= 3\sqrt{2}$

(चूँकि नाभिलम्ब, नाभि से नियता की दूरी का दुगना होता है।)

5. (b,c) $y^2 = 6.24 \Rightarrow y = \pm 12$

अतः बिन्दु $(24,12), (24,-12)$ हैं।

अतः रेखायें $y = \pm\frac{12}{24}x \Rightarrow 2y = \pm x$ होंगी।

6. (a) $y_1 = 3x_1$, प्रश्नानुसार $9x_1^2 = 36x_1$

$\Rightarrow x_1 = 4, 0 \Rightarrow y_1 = 12, 0$

अतः बिन्दु (0,0) व (4,12) हैं।

7. (b) $a = 3$, अतः भुज $4 - 3 = 1$ व $y^2 = 12, y = \pm 2\sqrt{3}$ है।

अतः बिन्दु $(1, 2\sqrt{3}), (1, -2\sqrt{3})$ हैं।

8. (b) माना बिन्दु (h,k) है परन्तु $2h = k$, तो $k^2 = 16h$

$\Rightarrow 4h^2 = 16h \Rightarrow h = 0, h = 4 \Rightarrow k = 0, k = 8$

$\therefore$ अतः बिन्दु (0,0), (4,8) होंगे। अतः नाभीय दूरियाँ क्रमशः $0 + a = 4$, $4 + 4 = 8$ होंगी। $(\because a = 4)$

9. (b) $y^2 = 4.\frac{1}{5}x; a = \frac{1}{5}$. नाभि $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$ एवं नाभिलम्ब के निर्देशांक

$y^2 = \frac{4}{25} \Rightarrow y = \pm\frac{2}{5}$

या नाभिलम्ब के सिरों के निर्देशांक $\left(\frac{1}{5}, \pm\frac{2}{5}\right)$ होंगे।

10. (b) माना परवलय का समीकरण $x^2 = 4ay$ है, परन्तु $a = \frac{4}{-2} = -2$, अतः समीकरण $x^2 = -8y$ एवं नाभिलम्ब $= 4a = 8$ है।

11. (d) $a = 4$, शीर्ष $= (0,0)$, नाभि $= (0, -4)$

12. (c) शीर्ष $= (2,0) \Rightarrow$ नाभि $(2+2, 0) = (4,0)$ है।

13. (c) बिन्दु $(-3,2)$ परवलय $y^2 = 4ax$ पर स्थित है। अतः $4 = -12a \Rightarrow 4a = -\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$, (धनात्मक चिन्ह लेने पर)

14. (c) $x^2 = -8y \Rightarrow a = -2$, नाभि $= (0,-2)$

अतः नाभिलम्ब के सिरे $(4,-2), (-4,-2)$ हैं।

ट्रिक: चूँकि नाभिलम्ब के सिरे परवलय पर स्थित होते हैं और यहाँ केवल बिन्दु $(-4, -2)$ व $(4,-2)$ ही परवलय को सन्तुष्ट करते हैं।

15. (d) यह एक आधारभूत संकल्पना है।

16. (c) $\because$ परवलय का अक्ष y-अक्ष है।

$\therefore$ परवलय का समीकरण $x^2 = 4ay$ है।
$\because$ यह (6, – 3) से गुजरता है
$\therefore 36 = -12a \Rightarrow a = -3$
$\therefore$ परवलय का समीकरण $x^2 = -12y$ है।

17. (a) दिया गया समीकरण $x^2 = -8ay$, यहाँ $A = 2a$
परवलय की नाभि $(0, -A)$ अर्थात् (0, – 2*a*)
नियता $y = A$ अर्थात् $y = 2a$ है।

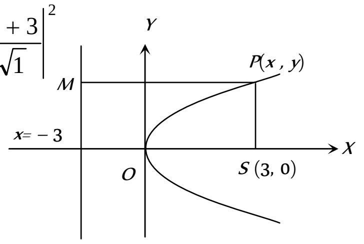
18. (c) $\because SP^2 = PM^2$

$\Rightarrow (x-3)^2 + y^2 = \left|\frac{x+3}{\sqrt{1}}\right|^2$

$\Rightarrow x^2 + 9 - 6x + y^2$

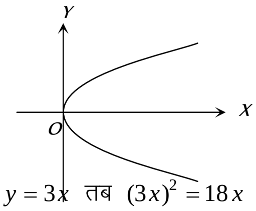
$= x^2 + 9 + 6x$

$\Rightarrow y^2 = 12x$.



19. (d) यह स्पष्ट है।

20. (a) परवलय $y^2 = x$, *x*-अक्ष के परितः सममित है।



21. (d) माना $y = 3x$ तब $(3x)^2 = 18x$
$\Rightarrow 9x^2 = 18x \Rightarrow x = 2$ तथा $y = 6$.

22. (d) स्पष्टतः $a = \left|\frac{-8}{\sqrt{1+1}}\right| - \left|\frac{-12}{\sqrt{1+1}}\right| = \frac{4}{\sqrt{2}}$

नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई $= 4a = 4 \times \frac{4}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$.

23. (d) दिये गये परवलय को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।
$(y+1)^2 = -(x-1)$
अतः शीर्ष (1, –1) हैं, जो कि चतुर्थ चतुर्थांश में हैं।

24. (a) $\Delta = (1)(1)(2) + 2\left(\frac{3}{2}\right)(0)(-1) - (1)(0)^2 - (1)\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2(-1)^2$

$= 2 - \frac{9}{4} - 2 < 0$ अर्थात् $h^2 - ab = 1 - 1 = 0$.

अर्थात् $h^2 = ab$, अतः यह परवलय है।

25. (d) यहाँ $\frac{y}{2} = t$ व $x - 2 = t^2$

$\Rightarrow (x-2) = \left(\frac{y}{2}\right)^2 \Rightarrow y^2 = 4(x-2)$.

26. (c) $(x+2)^2 = -2(y-2)$

नाभिलम्ब का समीकरण $y - 2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ है।

27. (a) समीकरण है, $(3x-1)^2 = -4(9y+2)$

स्पष्टतः शीर्ष $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{9}\right)$ है।

28. (a) परवलयों पर दिए गये बिन्दुओं को सन्तुष्ट करके देखें।

29. (a) $(x+1)^2 = 4a(y+2)$

यह (3, 6) से गुजरता है। अतः $16 = 4a.8 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow (x+1)^2 = 2(y+2) \Rightarrow x^2 + 2x - 2y - 3 = 0$.

30. (d) परवलय $(x-2)^2 = (3y-6)$ है, अतः अक्ष $x - 2 = 0$ है।

31. (b) माना परवलय पर स्थित बिन्दु (*x*, *y*) है तब परवलय की परिभाषा से, $\frac{\sqrt{(x+8)^2 + (y+2)^2}}{\left|\frac{2x - y - 9}{\sqrt{5}}\right|} = 1$

वर्ग करके हल करने पर,
$x^2 + 4y^2 + 4xy + 116x + 2y + 259 = 0$.

32. (c) नियता $x + 5 = 0$ है।
नाभि (– 3, 0) है अतः $2a = (-5+3) = 2 \Rightarrow a = 1$

शीर्ष $\left(\frac{-3 + (-5)}{2}, 0\right) = (-4, 0)$ है।

अतः समीकरण $(y-0)^2 = 4(x+4)$ है।

33. (a) समीकरण $y^2 = 4A(x-a)$ रूप का होगा जहाँ $A = (a' - a)$
अतः $y^2 = 4(a'-a)(x-a)$ है।

34. (a) $(y-2)^2 = -4x + 4 \Rightarrow (y-2)^2 = -4(x-1)$
शीर्ष (1, 2) एवं नाभि (0, 2) है।

35. (a) $(x+2)^2 = -2y + 7 + 4 \Rightarrow (x+2)^2 = -2\left(y - \frac{11}{2}\right)$

अतः शीर्ष $\left(-2, \frac{11}{2}\right)$ है।

36. (d) **ट्रिक** : (0, 0) से गुजरने वाले वक्र के समीकरण में कोई भी अचर पद नहीं होगा, अतः कोई भी विकल्प सही नहीं है।

37. (c) $(y+B)^2 = -2Ax - C + B^2 = -2A\left(x + \frac{C}{2A} - \frac{B^2}{2A}\right)$

नाभिलम्ब का समीकरण $x + \lambda = 0$

शीर्ष $= \left(\frac{-C + B^2}{2A}, B\right)$, नाभि $\equiv \left(\frac{-C + B^2}{2A} - \frac{A}{2}, B\right)$

नाभिलम्ब का समीकरण $x = \frac{-C + B^2}{2A} - \frac{A}{2} = \frac{B^2 - A^2 - C}{2A}$

होगा।

38. (b) $y^2 = 4ax$ के प्राचलिक समीकरण $x = at^2, y = 2at$ हैं।
अतः $y^2 = 8x$ के प्राचलिक समीकरण $x = 2t^2, y = 4t$ होंगे।

39. (b) *t* का विलोपन करने पर,

$16x^2 = 4y \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}y$ जो कि परवलय है।

40. (c) $\because$ शीर्ष $(0,4)$; नाभि $(0,2)$; $\therefore a = 2$
अतः परवलय $(x-0)^2 = -4.2(y-4)$ अर्थात् $x^2 + 8y = 32$ है।

41. (a) $\Delta \ne 0, h^2 = ab$ अर्थात् परवलय

42. (d) $9x^2 - 6x + 19 = -36y$

$\Rightarrow (3x-1)^2 = -36y - 18 = -36\left(y + \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = -36\left(y + \frac{1}{2}\right)$

अतः नाभिलम्ब 4 है।

43. (a) $\because\ 9y^2-16x-12y-57=0$

$\Rightarrow \left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{16}{9}\left(x+\frac{61}{16}\right)$

$y-\frac{2}{3}=Y$ तथा $x+\frac{61}{16}=X$ रखने पर,

$Y^2=4\left(\frac{4}{9}\right)X$

इस परवलय का अक्ष $Y=0$ होगा

$\Rightarrow y-\frac{2}{3}=0\Rightarrow 3y=2$.

44. (b) मूल बिन्दु को शीर्ष मानकर परवलय का समीकरण $X^2=lY$ है, जहाँ $x=X+a, y=Y+b$, अतः (a, b) को शीर्ष मानकर परवलय का समीकरण

$(x-a)^2=l(y-b)$ या $(x-a)^2=\frac{l}{2}(2y-2b)$.

45. (d) दिए गए समीकरण को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है $(x-4)^2=y-(c-16)$ । अतः परवलय का शीर्ष $(4, c-16)$ है। यह $x-$अक्ष पर स्थित होगा यदि $c-16=0\Rightarrow c=16$.

46. (b) $x=t^2+1, y=2t$ से t का विलोपन करने पर $y^2=4x-4$ होगा एवं s के विलोपन से $xy=4$ । अतः प्रतिच्छेद बिन्दु (2, 2) है।

47. (c) $y^2-4y+4=5x+5\Rightarrow (y-2)^2=5(x+1)$

स्पष्टतः नाभिलम्ब 5 है।

48. (a) प्रश्नानुसार, $(h-a)^2+k^2=h^2$

$\Rightarrow -2ah+a^2+k^2=0$

(h, k) को (x, y) से प्रतिस्थापित करने पर,

$y^2-2ax+a^2=0$

49. (c) परवलय $x^2-2x=2y$

या $x^2-2x+1=2y+1\Rightarrow (x-1)^2=2\left(y+\frac{1}{2}\right)$

यहाँ $4a=2\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

अब नाभि $\left(x-1=0, y+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\right)$ अर्थात् (1, 0) है।

50. (a) दिया गया समीकरण है,

$y^2-4y-2x-8=0\Rightarrow (y-2)^2=2(x+6)$

अतः नाभिलम्ब की लम्बाई = 2

51. (a) $(x-a)^2+(y-b)^2=\left(\frac{bx+ay-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2$

हल करने पर,

$(ax-by)^2-2a^3x-2b^3y+a^4+a^2b^2+b^4=0$.

52. (c) $4y^2+2x-20y+17=0$

$2\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=-(x-4)$

$\Rightarrow 4a=\frac{1}{2}$.

53. (b) परवलय की उत्केन्द्रता $e=1$.

54. (b) दिये गये समीकरण से, $(y+1)^2=\frac{3}{2}(x+3)$

अतः शीर्ष $(-3, -1)$ है।

55. (b) दिए गए समीकरण को मानक समीकरण के रूप में लिखने पर,

$4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=6(x+1)\Rightarrow \left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}(x+1)\Rightarrow Y^2=\frac{3}{2}X$

जहाँ, $Y=y-\frac{1}{2}, X=x+1$

$\therefore y=Y+\frac{1}{2},\ x=X-1$ .....(i)

नाभि के लिये $X=a, Y=0$

$\because 4a=\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{8}\Rightarrow x=\frac{3}{8}-1=-\frac{5}{8}$

$y=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, नाभि $=\left(-\frac{5}{8},\frac{1}{2}\right)$.

56. (a) दिया गया परवलय है, $x^2+8x+12y+4=0$

$\Rightarrow (x+4)^2=-12y+12$

$\Rightarrow (x+4)^2=-12(y-1)$, $\therefore$ शीर्ष $(-4, 1)$ है।

57. (c) परवलय का मानक समीकरण $(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$ है, मानक समीकरण से तुलना करने पर शीर्ष $(\alpha,\beta)=(-3,2)$ तथा $a=5$ । $\therefore$ परवलय की नाभि $(\alpha+a,\beta)=(2,2)$

58. (c) परवलय का समीकरण $x^2-4x-8y+12=0$ है

$\Rightarrow x^2-4x=8y-12\Rightarrow (x-2)^2=8(y-1)$

$\therefore$ नाभिलम्ब की लम्बाई $=4a=8$.

59. (c) दिये गये परवलय का समीकरण है,

$y=2x^2+x\Rightarrow x^2+\frac{x}{2}=\frac{y}{2}$

$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{y}{2}+\frac{1}{16}\Rightarrow \left(x+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{8}\right)$

$\Rightarrow X^2=\frac{1}{2}Y$ .....(i)

यहाँ $A=\frac{1}{8}$ $X=x+\frac{1}{4}, Y=y+\frac{1}{8}$, (i) की नाभि $\left(0,\frac{1}{8}\right)$ है

अर्थात् $X=0$, $Y=\frac{1}{8}$

$\Rightarrow x+\frac{1}{4}=0$, $y+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}\Rightarrow x=-\frac{1}{4},\ y=0$

अतः परवलय की नाभि $\left(-\frac{1}{4},0\right)$ है।

60. (d) परवलय का समीकरण है,

$y^2-2y-x+2=0\Rightarrow (y-1)^2=(x-1)$

माना $y-1=Y$ तथा $x-1=X$

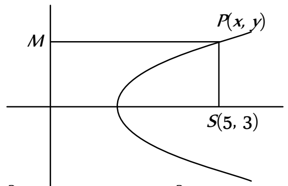
$Y^2=X, a=\frac{1}{4}$, नाभि $=\left(\frac{1}{4},0\right)$

अभीष्ट नाभि $=\left(\frac{1}{4}+1, 0+1\right)=\left(\frac{5}{4},1\right)$.

61. (d) परवलय का मानक समीकरण $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ है। मानक समीकरण से,दिये गये समीकरण की तुलना करने पर $h=1, k=2$ तथा $4a=16$ या $a=4$. परवलय का शीर्ष $\equiv (h,k) \equiv (1,2)$.

62. (c) परवलय का शीर्ष $(h, k) \equiv (1,1)$ तथा नाभि $(a+h,k) \equiv (3,1)$ या $a+h=3$ या $a=2$ है। हम जानते हैं कि शीर्ष का y-निर्देशांक तथा नाभि समान है।
अतः परवलय का समीकरण x-अक्ष के समान्तर है।
अतः परवलय का समीकरण
$(y-k)^2 = 4a(x-h)$ या $(y-1)^2 = 4 \times 2(x-1)$
या $(y-1)^2 = 8(x-1)$ है।

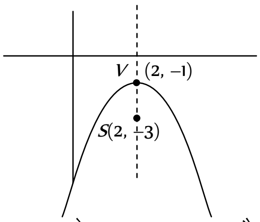
63. (a) $PM^2 = PS^2 \Rightarrow (x-5)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{3x-4y+1}{\sqrt{9+16}}\right)^2$



$\Rightarrow 25(x^2 + 25 - 10x + y^2 + 9 - 6x)$
$= 9x^2 + 16y^2 + 1 - 12xy + 6x - 8y - 12xy$
$\Rightarrow 16x^2 + 9y^2 - 256x - 142y + 24xy + 849 = 0$
$\Rightarrow (4x+3y)^2 - 256x - 142y + 849 = 0.$

64. (d) यह स्पष्ट है।

65. (b) $VS = \sqrt{(2-2)^2 + (-3+1)^2} = 2$; $(x-h)^2 = -4a(y-k)$ से
$\therefore$ परवलय है :
$(x-2)^2 = -4.2(y+1)$
$\Rightarrow (x-2)^2 = -8(y+1)$
$\Rightarrow x^2 + 4 - 4x = -8y - 8$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 8y + 12 = 0.$

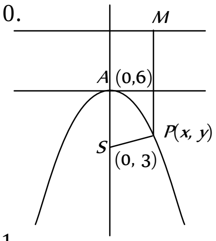


ट्रिक : केवल विकल्प (b) बिन्दु (2, –1) को सन्तुष्ट करता है क्योंकि यह परवलय पर स्थित है।

66. (d) परवलय का समीकरण $x^2 - 4x - 8y + 12 = 0$ है;
$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 8y - 8$
$\Rightarrow (x-2)^2 = 8(y-1) \Rightarrow X^2 = 8Y$
$X^2 = 4aY$ से तुलना करने पर, $a=2$
$\therefore$ नियता $Y = -a \Rightarrow y - 1 = -2 \Rightarrow y = -1$.

67. (a) $SP = PM \Rightarrow SP^2 = PM^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{x+y-4}{\sqrt{2}}\right)^2$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy + 8x + 8y - 16 = 0.$

68. (a) यहाँ शीर्ष $\equiv (0, 6)$ और नाभि $\equiv (0, 3)$
तब $Z \equiv (0,9)$ अर्थात् $y=9$
$\therefore$ परवलय का समीकरण $SP = PM$
$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} = |y-9|$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6y + 9 = y^2 - 18y + 81$
या $x^2 + 12y = 72$



69. (a) दिया है, परवलय का समीकरण
$x^2 + 8y - 2x = 7 \Rightarrow x^2 - 2x + 8y - 7 = 0$ है
$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + 8y - 7 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + 8y = 8$
$\Rightarrow (x-1)^2 = -8(y-1) \Rightarrow (x-1)^2 = -4.2(y-1)$
यहाँ, $a=2$
$\therefore$ नियता का समीकरण $y-1=2$ अर्थात् $y=3$ है।

70. (a) दिया है, परवलय का समीकरण $2x^2 + 5y - 3x + 4 = 0$ है।
$\Rightarrow x^2 - \frac{3}{2}x = -\frac{5}{2}y - 2 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{5}{2}y - \frac{23}{16}$
$\therefore$ अक्ष का समीकरण $x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$ है।

71. (a) दिया है, परवलय का समीकरण $x^2 + 6x + 20y - 51 = 0$ है।
$\Rightarrow x^2 + 6x = -20y + 51$
$\Rightarrow (x+3)^2 = -20y + 60 \Rightarrow (x+3)^2 = -20(y-3)$
$\Rightarrow (x+3)^2 = -4.5(y-3)$
$\therefore x+3=0$ परवलय का अक्ष है।

72. (d) बिन्दु $(1, 0) \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,0)} = 2 - 1 = 1$
अतः समीकरण $y - 0 = x - 1$ है।

73. (a) अभीष्ट बिन्दु कुछ और नहीं, दिये गये परवलय की नाभि है
अतः $(y+1)^2 = -(4x-9) = -4\left(x - \frac{9}{4}\right)$
$S \equiv \left(-1 + \frac{9}{4}, -1\right)$ या $\left(\frac{5}{4}, -1\right)$.

74. (d) माना स्पर्श बिन्दु (h, k) है, तब इस बिन्दु पर स्पर्शी $ky = x + h$ होगी।
$x - ky + h = 0 \equiv 18x - 6y + 1 = 0$
या $\frac{1}{18} = \frac{k}{6} = \frac{h}{1}$ या $k = \frac{1}{3}, h = \frac{1}{18}$.

75. (b) $S_1 \equiv x^2 - 108y = 0$
$T \equiv xx_1 - 2a(y + y_1) = 0 \Rightarrow xx_1 - 54\left(y + \frac{x_1^2}{108}\right) = 0$
$S_2 \equiv y^2 - 32x = 0$
$T \equiv yy_2 - 2a(x + x_2) = 0 \Rightarrow yy_2 - 16\left(x + \frac{y_2^2}{32}\right) = 0$
$\therefore \frac{x_1}{16} = \frac{54}{y_2} = \frac{-x_1^2}{y_2^2} = r \Rightarrow x_1 = 16r$ तथा $y_2 = \frac{54}{r}$
$\therefore \frac{-(16r)^2}{(54/r)^2} = r \Rightarrow r = -\frac{9}{4}$
$x_1 = -36, y_2 = -24, y_1 = \frac{(36)^2}{108} = 12, x_2 = 18$.
अतः उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण है,
$(y-12) = \frac{-36}{54}(x+36) \Rightarrow 2x + 3y + 36 = 0$
वैकल्पिक: सूत्र से, उभयनिष्ठ स्पर्शी $yb^{1/3} + xa^{1/3} + (ab)^{2/3} = 0$ जहाँ $a=8$, $b=27$, अतः अभीष्ट स्पर्शी $3y + 2x + 36 = 0$ होगी।

76. (c) $y=-\frac{l}{m}x-\frac{n}{m}$

यह रेखा $y^2=4ax$ पर लम्ब है तब प्रतिबंधानुसार

$-\frac{n}{m}=\frac{am}{-l}$ या $nl=am^2$.

77. (a) $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ .....(i)

$2ax-yy_1+2a(x_1+2a)=0$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से, $\frac{\cos\alpha}{2a}=\frac{\sin\alpha}{-y}=\frac{-p}{2a(x+2a)}$

$\Rightarrow y=-2a\tan\alpha$ तथा $x=-p\sec\alpha-2a$

$\therefore y^2=4a(x+a)\Rightarrow 4a^2\tan^2\alpha=-4a(p\sec\alpha+a)$

$\Rightarrow p\cos\alpha+a=0$.

78. (c) चूँकि $m=\tan\theta$ अतः स्पर्शी $y=x\tan\theta+c$ होगी।

यदि $c=\frac{a}{\tan\theta}=a\cot\theta$ तो स्पर्शी $y=x\tan\theta+a\cot\theta$ होगी।

79. (b) परवलय का समीकरण $Y^2=4X$ जहाँ $X=x+\frac{5}{4}$ है।

$Y=2X+7$ के समान्तर स्पर्शी $Y=2X+\frac{a}{m}$ है।

$\Rightarrow y=2\left(x+\frac{5}{4}\right)+\frac{1}{2}\Rightarrow y=2x+3$ अर्थात् $2x-y+3=0$.

80. (a) $m=\tan\theta=\tan 60°=\sqrt{3}$

(h,k) पर $y^2=4ax$ के स्पर्शी का समीकरण $yk=2a(x+h)$ है।

तुलना करने पर, $m=\sqrt{3}=\frac{2a}{k}$ या $k=\frac{2a}{\sqrt{3}}$ व $h=\frac{a}{3}$ है।

81. (b) $y=2x+\lambda$ स्पर्श नहीं करेगी यदि $\lambda>\frac{a}{m}=\frac{1}{2.2}=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \lambda>\frac{1}{4}$.

82. (a) $y^2=4ax$ पर कोई बिन्दु $(at^2,2at)$ है तो स्पर्शी $2aty=2a(x+t^2)\Rightarrow yt=x+at^2$ होगी।

83. (d) प्रश्नानुसार, $c=\frac{4}{2}=2$

84. (a) स्पर्शिता के प्रतिबंधानुसार, $1=\frac{1}{m}\Rightarrow m=1$.

85. (a) (16,8) पर स्पर्शी (दोनों पर)

$8y=2(x+16)$ .....(i) तथा $16x=16(y+8)$ .....(ii)

$\therefore m_1=\frac{1}{4}, m_2=1$

$\tan\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}=\left(\frac{3}{5}\right)\Rightarrow \theta=\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$.

वैकल्पिकः सूत्र से, $\theta=\tan^{-1}\frac{3a^{1/3}b^{1/3}}{2(a^{2/3}+b^{2/3})}$,

जहाँ $a=1$, $b=8$

$=\tan^{-1}\frac{6}{2(1+4)}=\tan^{-1}\frac{3}{5}$.

86. (a) परवलय की स्पर्शी है, $y=mx+\frac{a}{m}$ .....(i)

स्पर्शी के लम्बवत् तथा नाभि $(a,0)$ से गुजरने वाली रेखा का समीकरण है, $y=-\frac{x}{m}+\frac{a}{m}$ .....(ii)

(i) व (ii) को हल करने पर $\Rightarrow x=0$.

87. (c) स्पर्शी की $m=-1$ एवं परवलय के समीकरण से, बिन्दु (h,k) पर परवलय की प्रवणता $=\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2y-1}=\frac{-1}{2k-1}$

चूँकि रेखा व परवलय (h,k) पर स्पर्श करते हैं।

$\Rightarrow \frac{-1}{2k-1}=-1\Rightarrow -2k+1=-1\Rightarrow k=1$

यह मान $x+y=1$ में रखने पर, $h=0$, अतः स्पर्श बिन्दु $(0,1)$ हैं।

88. (a) $y^2=4ax$ की T पर स्पर्शी $y=mx+\frac{a}{m}$ है।

अतः $y^2=4a(x+a)$ के बिन्दु T पर स्पर्शी $y=m(x+a)+\frac{a}{m}$ होगी।

या $y=mx+ma+\frac{a}{m}\Rightarrow ma+\frac{a}{m}=c$.

89. (c) $m_1=\tan 45°=1,\ m_2=3$

स्पर्शी की प्रवणता $m=\frac{3\pm 1}{1\mp 3}=-2$ या $\frac{1}{2}$

अतः स्पर्शी $y=-2x+\frac{2}{-2}$ या $2x+y+1=0$ होगी।

90. (d) सिरों के निर्देशांक $(a,\pm 2a)$ हैं।

स्पर्शियाँ $\pm 2ay=2a(x+a)$ या $m=\pm\frac{2a}{2a}=\pm 1$ हैं।

अतः इनके बीच का कोण $\frac{\pi}{2}$ है।

91. (c) $x^2=4a(mx+c)\Rightarrow x^2-4amx-4ac=0$

यह स्पर्श करेगा यदि $B^2-4AC=0$

$\Rightarrow 16a^2m^2+16ac\Rightarrow ac=-a^2m^2\Rightarrow c=-am^2$.

92. (b) यह आधारभूत गुण है।

93. (a) मूलबिन्दु से जाने वाली रेखा $y=mx$ है। चूँकि यह परवलय $y^2=4a(x-a)$ की स्पर्शी है तो यह दो सम्पाती बिन्दुओं पर काटेगी।

अतः $m^2x^2-4ax+4a^2=0$ के मूल बराबर होंगे।

$\therefore 16a^2-16a^2m^2=0$ या $m^2=1$ या $m=1,-1$

प्रवणताओं का गुणनफल $=-1$.

अतः स्पर्श रेखाओं के बीच कोण $90°$ है।

94. (a) यदि हम x को y से तथा y को x से प्रतिस्थापित करें, तो रेखा $y=mx+k$ व परवलय $y^2=4ax$ होगा। अतः $k=\frac{a}{m}$

वैकल्पिक : यदि रेखा $x=my+k$, परवलय $x^2=4ay$ को स्पर्श करेगी तो वर्ग समीकरण $(my+k)^2=4ay$ के दो बराबर व वास्तविक मूल होंगे अर्थात् $B^2-4AC=0$ जिससे हमें $k=\frac{a}{m}$ प्राप्त होता है।

95. (b) माना P व Q के निर्देशांक क्रमशः $(at_1^2, 2at_1)$ व $(at_2^2, 2at_2)$ हैं तो $y_1 = 2at_1$ व $y_2 = 2at_2$. P व Q पर स्पर्शियों का प्रतिच्छेद बिन्दु $\{at_1t_2, a(t_1+t_2)\}$ हैं।

$\therefore y_3 = a(t_1+t_2) \Rightarrow y_3 = \frac{y_1+y_2}{2}$

अतः y_1, y_3 व y_2 समान्तर श्रेणी में हैं।

96. (c) $x^2 = 4y$ व $y^2 = 4x$, को हल करने पर, $x = 0, y = 0$ व $x = 4, y = 4$ अतः P के निर्देशांक (4,4) हैं। दोनों परवलयों के बिन्दु (4,4) पर स्पर्शियाँ $2x - y - 4 = 0$ .....(i)

व $x - 2y + 4 = 0$ .....(ii) हैं।

अब $m_1 =$ (i) की प्रवणता $= 2$, $m_2 =$ (ii) की प्रवणता $= \frac{1}{2}$

$\therefore m_1m_2 = 1$ अर्थात् $\tan\theta_1 \tan\theta_2 = 1$.

97. (b) $\because c = \frac{a}{m}, \therefore c = \frac{1}{2}$.

98. (b) यह सूत्र है।

99. (c) $\because$ परवलय बिन्दु (1,–2) से होकर गुजरता है,

$\therefore\ 4 = 4a \Rightarrow a = 1$

अतः स्पर्श रेखा का समीकरण $yy_1 = 2a(x + x_1)$

$\Rightarrow -2y = 2(x+1)$

$\Rightarrow x + y + 1 = 0$ अभीष्ट स्पर्श रेखा का समीकरण है।

100. (d) दी गई रेखा पर लम्बवत् रेखा $3y + x = \lambda$

$\Rightarrow y = \frac{-1}{3}x + \frac{\lambda}{3}$ है।

यहाँ $m = \frac{-1}{3}$, $c = \frac{\lambda}{3}$

$y^2 = 16x$ की तुलना $y^2 = 4ax$ से करने पर $a = 4$,

अतः स्पर्श करने की शर्त है,

$c = \frac{a}{m} \Rightarrow \frac{\lambda}{3} = \frac{4}{(-1/3)} \Rightarrow \lambda = -36$

अतः स्पर्श रेखा $x + 3y + 36 = 0$ है।

101. (a) परवलय $y^2 = 4ax$ की बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $yy_1 = 2a(x + x_1)$ है।

$\Rightarrow y.\frac{2a}{t} = 2a\left(x + \frac{a}{t^2}\right) \Rightarrow \frac{y}{t} = \left(x + \frac{a}{t^2}\right)$

$\Rightarrow \frac{y}{t} = \frac{t^2x + a}{t^2} \Rightarrow ty = t^2x + a$.

102. (b) $y^2 = 8x$, $\therefore 4a = 8 \Rightarrow a = 2$

परवलय की स्पर्श रेखा का समीकरण है,

$y = mx + \frac{a}{m}$ या $mx - y + \frac{2}{m} = 0$

यदि यह वृत्त $x^2 + y^2 = 2$ पर स्पर्श रेखा है। तो इसके केन्द्र (0,0) से डाले गए लम्ब की लम्बाई त्रिज्या के बराबर होगी।

$\therefore \frac{2/m}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{2}$ या $\frac{4}{m^2} = 2(m^2+1)$

$\Rightarrow m^4 + m^2 - 2 = 0 \Rightarrow (m^2+2)(m^2-1) = 0$ या $m = \pm 1$

अतः उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण है,

$y = \pm(x+2)$, $\therefore y = x + 2$.

103. (c) परवलय पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$ty = x + at^2$ .....(i)

स्पष्टतः $lx + my + n = 0$ भी स्पर्श रेखा की एक स्पर्श जीवा है अतः समीकरण (i) व दी गयी रेखा, एक ही रेखा को प्रदर्शित करते हैं अतः $ty = x + at^2$ तथा $lx + my + n = 0$

अतः $\frac{1}{l} = -\frac{t}{m} = \frac{at^2}{n} \Rightarrow t = \frac{-m}{l}$, $t^2 = \frac{n}{la}$

t विलुप्त करने पर, $m^2 = \frac{nl}{a}$ जो कि परवलय का समीकरण है।

104. (d) रेखा $x - y + 2 = 0$ और $y^2 = 8x$ का प्रतिच्छेदन बिन्दु है

$(x+2)^2 = 8x \Rightarrow x^2 + 4 - 4x = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0$

$\therefore x = 2$ और $y = x + 2 = 4$.

105. (b) परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु $(a, 2a)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $yy_1 = 2a(x + x_1)$ होगा।

$\Rightarrow 2ay = 2a(x + a) \Rightarrow y = x + a$

यह रेखा x-अक्ष के साथ $\frac{\pi}{4}$ का कोण बनाती है। अतः $m = \tan\theta = 1$.

106. (d) दिया गया है कि, $lx + my + n + 0$ .....(i)

व $x^2 = y$ .....(ii)

(i) तथा (ii) को हल करके रेखा तथा परवलय के प्रतिच्छेद बिन्दु प्राप्त कर सकते हैं। (i) से (ii) में x का मान रखने पर,

$\left(\frac{my+n}{l}\right)^2 = y \Rightarrow m^2y^2 + n^2 + 2mny = yl^2$

$\Rightarrow m^2y^2 + (2mn - l^2)y + n^2 = 0$ .....(iii)

यदि रेखा (iii), परवलय (ii), को स्पर्श करती है तो

विविक्तकर = 0 $\Rightarrow (2mn - l^2)^2 = 4m^2n^2$

$\Rightarrow 4m^2n^2 + l^4 - 4mnl^2 = 4m^2n^2 \Rightarrow l^2 = 4mn$.

107. (c, d) $y^2 = 9x$ यहाँ $a = \frac{9}{4}$.

परवलय $y^2 = 9x$ की स्पर्श रेखा का समीकरण है,

$y = mx + \frac{9/4}{m}$

यदि यह स्पर्श रेखा, बिन्दु (4,10) से जाती है तो

$10 = 4m + \frac{9}{4m} \Rightarrow (4m-9)(4m-1) = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{4}, \frac{1}{4}$

$\therefore$ स्पर्श रेखा के समीकरण हैं

$4y = x + 36$ तथा $4y = 9x + 4$

$\Rightarrow x - 4y + 36 = 0$ तथा $9x - 4y + 4 = 0$.

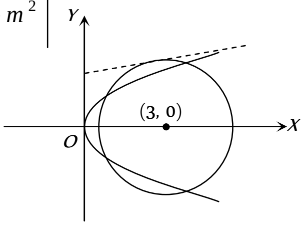
108. (b) हम जानते हैं कि बिन्दु t_1 व t_2 पर परवलय की स्पर्शियाँ $t_1y = x + at_1^2$ तथा $t_2y = x + at_2^2$ हैं, चूँकि स्पर्शियाँ, परवलय पर लम्ब हैं $\therefore\ \frac{1}{t_1}.\frac{1}{t_2} = -1$ या $t_1t_2 = -1$.

$\therefore$ इनके प्रतिच्छेद बिन्दु हैं,

$(at_1t_2, a(t_1+t_2)) = (-a, a(t_1+t_2))$.

इस प्रकार यह बिन्दु नियता $x = -a$ या $x + a = 0$ पर स्थित है।

109. (c) $y^2 = 4x$ की स्पर्शी का समीकरण $y = mx + \frac{1}{m}$ है। यह वृत्त को स्पर्श करेंगी यदि $3 = \left|\frac{3m + \frac{1}{m}}{\sqrt{1+m^2}}\right|$



$\Rightarrow 9(1+m^2) = \left(3m + \frac{1}{m}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{1}{m^2} = 3$, $\therefore m = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

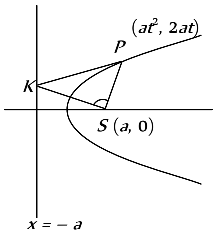
x-अक्ष के ऊपर उभयनिष्ठ स्पर्शी के लिए, $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ उभयनिष्ठ स्पर्शी $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}y = x + 3$ है।

110. (a) यह स्पष्ट है।

111. (d) यहाँ, $P(at^2, 2at)$ तथा $S(a, 0)$ हैं।

यदि *P* पर स्पर्श रेखा, $ty = x + at^2$ नियता $x = -a$ को *k* पर मिलती है तब



$k = \left(-a, \frac{at^2 - a}{t}\right)$

$m_1 = SP$ की प्रवणता $= \frac{2at}{a(t^2-1)}$

$m_2 = SK$ की प्रवणता $= \frac{a(t^2-1)}{-2at}$

स्पष्टतः $m_1 m_2 = -1$, $\therefore \angle PSK = 90^o$.

112. (a) परवलय पर बिन्दु 't_1', तथा 't_2' के प्रतिच्छेद बिन्दु $(at_1 t_2, a(t_1 + t_2))$ है।

113. (c) प्रतिच्छेद बिन्दु $= (0, -1)$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4}$ तथा $\frac{-2x}{4}$

$\therefore m_1 = 0, m_2 = 0 \Rightarrow \theta = 0^o$.

114. (b) परवलयों के मुख्य अक्ष (Principal axes) *x*-अक्ष तथा *y*-अक्ष हैं। अतः दोनों परवलयों के मध्य कोण 90^o होगा।

115. (d) परवलय $y^2 = ax \Rightarrow y^2 = 4\left(\frac{a}{4}\right)x$ .....(i)

माना स्पर्श बिन्दु (x_1, y_1) है

$\therefore$ स्पर्शी का समीकरण $y - y_1 = \frac{2\left(\frac{a}{4}\right)}{y_1}(x - x_1)$

$\Rightarrow y = \frac{a}{2y_1}(x) - \frac{ax_1}{2y_1} + y_1$

यहाँ, $m = \frac{a}{2y_1} = \tan 45^o \Rightarrow \frac{a}{2y_1} = 1 \Rightarrow y_1 = \frac{a}{2}$

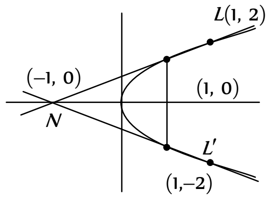
समीकरण (i) से, $x_1 = \frac{a}{4}$. $\therefore$ बिन्दु $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right)$ है।

116. (a,b) यह आधारभूत संकल्पना है।

117. (b) परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $yy_1 = 2a(x + x_1)$ है।

$\therefore$ प्रश्नानुसार $a = 1$

अतः परवलय $y^2 = 4x$ के नाभिलम्ब के सिरों के निर्देशांक $L(1, 2)$ एवं $L'(1, -2)$ हैं।



नाभिलम्ब *L* व L' पर स्पर्श रेखाओं का समीकरण

$2y = 2(x+1)$

और $-2y = 2(x+1)$ है, जो $x = -1$, $y = 0$ देता है।

अतः अभीष्ट प्रतिच्छेद बिन्दु (– 1, 0) है।

118. (b) परवलय $y^2 = 4x$ की स्पर्शी $y = mx + \frac{1}{m}$ है

चूँकि यह (1, 4) से गुजरती है अतः $4 = m + \frac{1}{m}$

$\Rightarrow m^2 - 4m + 1 = 0 \Rightarrow m_1 + m_2 = 4$, $m_1 m_2 = 1$

$\Rightarrow |m_1 - m_2| = 2\sqrt{3}$

यदि θ अभीष्ट कोण है, तब $\tan\theta = \frac{2\sqrt{3}}{1+1} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$.

119. (b) मूल बिन्दु (0,0) से जाने वाली कोई रेखा $y = mx$ है। यह $y^2 = 4ax$ को $\left(\frac{4a}{m^2}, \frac{4a}{m}\right)$ पर प्रतिच्छेदित करती है।

जीवा का मध्य बिन्दु $\left(\frac{2a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ है।

$x = \frac{2a}{m^2}$, $y = \frac{2a}{m} \Rightarrow \frac{2a}{x} = \frac{4a^2}{y^2}$ या $y^2 = 2ax$ जो कि परवलय है।

120. (b) माना बिन्दु (h, k) है। अभिलम्ब $y - k = \frac{-k}{4}(x - h)$

$\Rightarrow -kx - 4y + kh + 4k = 0$ है।

प्रवणता $= -\frac{k}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = -2$

(h, k) रखने पर $k = -2$, $h = \frac{1}{2}$

अतः बिन्दु $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ होगा।

ट्रिक : यहाँ केवल $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ बिन्दु $y^2 = 8x$ परवलय को सन्तुष्ट करता है।

121. (d) यह स्पष्ट है।

122. (a) बिन्दु (h, k) पर $y^2 = 8x$ का अभिलम्ब

$y - k = -\frac{k}{4}(x - h)$ है।

प्रवणता $= \tan 60° = \sqrt{3} = -\frac{k}{4} \Rightarrow k = -4\sqrt{3}$ व $h = 6$

अतः अभीष्ट बिन्दु $(6, -4\sqrt{3})$ है।

123. (c) अभिलम्ब $y - 2at_1 = \frac{-2at}{2a}(x - at^2)$ है।

अतः प्रवणता $= -t$.

124. (b) $y-a=\frac{-a}{2a}\left(x-\frac{a}{4}\right)$

$\Rightarrow 2y+x=2a+\frac{a}{4}=\frac{9a}{4} \Rightarrow 2y+x-\frac{9a}{4}=0$

अर्थात $4x+8y-9a=0$.

125. (c) $y-\frac{2a}{m}=-\frac{2a/m}{2a}\left(x-\frac{a}{m^2}\right)$

$\Rightarrow y-\frac{2a}{m}=\frac{-1}{m}\left(x-\frac{a}{m^2}\right)$

$\Rightarrow m^3y+m^2x-2am^2-a=0$.

126. (d) $y=-2x-k$, $y^2=-8x$ पर अभिलम्ब है।

या $-k=-\{-4(-2)-2(-2)^3\}=-(8+16) \Rightarrow k=24$.

127. (d) हम जानते हैं $t_2=-t_1-\frac{2}{t_1}$

$t_1=1$ एवं $t_2=t$ रखने पर, $t=-3$

128. (b) शीर्ष $\equiv(0,0)$, नाभिलम्ब के सिरे $(a,\pm 2a)$ हैं। यहाँ $a=\frac{6}{4}$

अतः नाभिलम्ब का ऋणात्मक सिरा $\left(\frac{3}{2},-3\right)$ है। इस बिन्दु से रेखा $y=\frac{-3}{3/2}x$ या $y+2x=0$ है।

129. (c) बिन्दु (x_1,y_1) से परवलय $y^2=4ax$ पर डाली गयी स्पर्शियों की स्पर्श जीवा का समीकरण $yy_1=2a(x+x_1)$ है। अतः $5y=2\times 2(x+2) \Rightarrow 5y=4x+8$, परवलय $y^2=8x$ व स्पर्श जीवा के प्रतिच्छेद बिन्दु $\left(\frac{1}{2},2\right),(8,8)$ हैं।

अतः लम्बाई $=\frac{3}{2}\sqrt{41}$

130. (c) अर्द्ध नाभिलम्ब, नाभीय जीवा के खण्डों का हरात्मक माध्य होता है।

$\therefore b=\frac{2ac}{a+c} \Rightarrow a, b, c$ ह.श्रे. में हैं।

131. (a) परवलय $y^2=4ax$ रेखा $lx+my+n=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को शीर्ष से जोड़ने पर प्राप्त रेखायुग्म का समीकरण

$y^2=4ax\left(\frac{lx+my}{-n}\right)$ या $4alx^2+4amxy+ny^2=0$

यह लम्बवत् रेखायुग्म प्रदर्शित करेगा यदि $4al+n=0$.

132. (c) माना $y=mx+c$ जीवा है, तथा c एक चर है।

$\Rightarrow y^2=4ax$ से $x=\left(\frac{y-c}{m}\right)$

जिससे प्रतिच्छेद बिन्दु प्राप्त होते हैं

$y^2=4a\left(\frac{y-c}{m}\right) \Rightarrow y^2-\frac{4ay}{m}+\frac{4ac}{m}=0$

$\Rightarrow y_1+y_2=\frac{4a}{m} \Rightarrow \frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2a}{m}$

जो कि अचर है तथा c से स्वतंत्र है।

133. (a) परवलय $y^2=4ax$ के नाभिलम्ब के सिरों के निर्देशांक $(a,2a)$ व $(a,-2a)$ हैं।

परवलय $y^2=4ax$ के बिन्दु $(a,2a)$ पर अभिलम्ब

$y-2a=-\frac{2a}{2a}(x-a)$ $\left[y-y_1=-\frac{y_1}{2a}(x-x_1) \text{ से}\right]$

या $x+y-3a=0$ .....(i)

इसी प्रकार बिन्दु $(a,-2a)$ पर अभिलम्ब

$x-y-3a=0$ .....(ii)

(i) व (ii) का संयुक्त समीकरण $x^2-y^2-6ax+9a^2=0$ है।

134. (d) चूँकि हम जानते हैं कि $t_1t_2=2 \Rightarrow 2at_1\times 2at_2=8a^2$.

135. (a) परवलय $x^2=4ay$ पर अभिलम्ब $x=my-2am-am^3$ प्रकार का होगा। अतः $c=-2am-am^3$.

136. (c) चूँकि अर्द्ध–नाभिलम्ब, नाभीय जीवा के खण्डों का हरात्मक माध्य होता है। अतः SP, 4, SQ हरात्मक श्रेणी में होंगे।

$\Rightarrow 4=2.\frac{SP.SQ}{SP+SQ} \Rightarrow 4=\frac{2(6)(SQ)}{6+SQ} \Rightarrow SQ=3$.

137. (d) परवलय $y^2=4x$ के बिन्दु $(m^2,-2m)$ पर अभिलम्ब $y=mx-2m-m^3$ है। यदि अभिलम्ब अक्षों से बराबर कोण बनाता है, तो $m=\tan\frac{\pi}{4}=1$ । अतः अभीष्ट बिन्दु (1, – 2) है।

138. (d) माना बिन्दु (h,k) पर अभिलम्ब $y=mx+c$ है,

तब $k=mh+c$, $k^2=4a(h-a)$

बिन्दु (h,k) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता m_1 है, तब परवलय के समीकरण का अवकलन करने पर

$2ym_1=4a \Rightarrow m_1=\frac{2a}{k}$ तथा $mm_1=-1$

$\Rightarrow m=-\frac{k}{2a}$, अतः हल करने पर तथा (h,k) को (x,y) से परिवर्तित करने पर $\Rightarrow y=m(x-a)-2am-am^3$

ट्रिक : परवलय $y^2=4aX$ के अभिलम्ब का समीकरण $y=mX-2am-am^3$ है। X को $x-a$ से स्थानान्तरित करने पर अभीष्ट समीकरण प्राप्त होता है।

139. (d) नाभीय जीवा के सिरों पर खींची गयी स्पर्शियाँ नियता पर अभिलम्बवत् काटती हैं अर्थात् $x=-a$ या $x+a=0$.

140. (a) परवलय पर अभिलम्ब का समीकरण $y=mx-2am-am^3$ है। m के तीन मानों के लिए $y^2=4ax$ पर 3 अभिलम्ब खींचे जा सकते हैं जिनसे 3 अभिलम्ब पाद प्राप्त होते हैं। उनसे बने त्रिभुज का केन्द्रक परवलय की अक्ष पर स्थित होता है।

141. (d) प्रश्नानुसार (3, 6) व (27, –18) अभीष्ट वृत्त के व्यास के सिरे होंगे।

$\therefore (x-3)(x-27)+(y-6)(y+18)=0$

$x^2+y^2-30x+12y-27=0$.

142. (a) परवलय $y^2=4x$ .....(i) के बिन्दु $P(t_1^2,2t_1)$ पर अभिलम्ब इसके बिन्दु $Q(t_2^2,2t_2)$ पर पुनः मिलता है,

जहाँ $t_2=-t_1-\frac{2}{t_1}$ .....(ii)

यदि PQ शीर्ष (0, 0) पर समकोण अन्तरित करता है, तब (OP की प्रवणता) (OQ की प्रवणता) $=-1$

$\Rightarrow \frac{2t_1}{t_1^2}.\frac{2t_2}{t_2^2}=-1 \Rightarrow t_2=-\frac{4}{t_1}$ .....(iii)

(ii) तथा (iii) से, $-t_1-\frac{2}{t_1}=-\frac{4}{t_1} \Rightarrow -t_1=-\frac{2}{t_1}$

$\Rightarrow t_1^2=2 \Rightarrow t_1=\pm\sqrt{2}$; $\therefore t_2=\mp 2\sqrt{2}$

$\therefore$ P तथा Q बिन्दु $(2,\pm 2\sqrt{2})$ तथा $(8,\mp 4\sqrt{2})$

$\therefore PQ=\sqrt{(8-2)^2+(\mp 4\sqrt{2}\mp 2\sqrt{2})^2}=\sqrt{36+72}$

$=\sqrt{108}=6\sqrt{3}.$

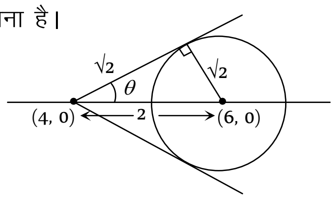
143. (b) अभिलम्ब का समीकरण $y+tx=6t+3t^3$ है। यह $x+y=k$ के समान है, यदि $\frac{t}{1}=\frac{1}{1}=\frac{6t+3t^3}{k}$

$\therefore t=1$ तथा $1=\frac{6+3}{k} \Rightarrow k=9.$

144. (a) यह आधारभूत संकल्पना है।

145. (a) चित्र से, $\theta=45^o$

$\Rightarrow$ प्रवणता $=\pm 1$.



146. (d) $t_2=-t_1-\frac{2}{t_1}$

$\because a=2,\ t_1=1 \ \therefore t_2=-3$

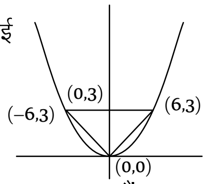
$\therefore$ दूसरे सिरे से निर्देशांक $(at_2^2, 2at_2)$ अर्थात् (18, – 12) हैं।

147. (c) यह स्पष्ट है।

148. (b) परवलय के व्यास का समीकरण $y=\frac{2a}{m}$

यहाँ $a=\frac{1}{4},\ m=1 \Rightarrow y=\frac{2\times 1/4}{1} \Rightarrow 2y=1$.

149. (c) $\Delta=\frac{1}{2}(12\times 3)=18$ वर्ग इकाई



150. (d) माना शीर्षों के निर्देशांक $(a,1),(b,2),(c,4)$ हैं।

$a=\frac{1}{4},\ b=1,\ c=4$

बिन्दुओं $\left(\frac{1}{4},1\right),(1,2),(4,4)$ द्वारा निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल

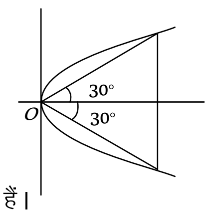
$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{1}{4} & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 4 & 4 & 1\end{vmatrix}=\frac{3}{4}$ है।

151. (b) $L_1=\sqrt{3}y-x=0$ व $S_1\equiv y^2-4ax=0$ को साथ में हल करने पर,

$y=4a\sqrt{3}$ व $x=12a$

अतः $L=\sqrt{144a^2+48a^2}$

$=a\sqrt{192}=8a\sqrt{3}$.



152. (c) बिन्दु $\left(\frac{y_1^2}{4a},y_1\right),\left(\frac{y_2^2}{4a},y_2\right),\left(\frac{y_3^2}{4a},y_3\right)$ हैं।

अतः क्षेत्रफल $\Delta=\frac{1}{8a}(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)$.

153. (b) $(-1,2)$ से खींची गयी स्पर्शियों की स्पर्श जीवा $yy_1=2a(x+x_1)$ या $y=x-1$ है।

154. (c) दिये गये समीकरण को परवलय $y^2=4x$ के साथ हल करने पर, बिन्दु $P(3+2\sqrt{2},2+2\sqrt{2}),\ Q(3-2\sqrt{2},2-2\sqrt{2})$ हैं।

$\therefore PQ^2=32+32=64 \Rightarrow PQ=8$ एवं यदि p, (–1, 2) से PQ पर लम्ब हो, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल

$=\frac{1}{2}PQ.\ p=\frac{1}{2}.8.\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)=8\sqrt{2}$ है।

155. (c) विकल्प से जाँच करें बिन्दु $(\pm 2,2)$ निकटतम है। अतः विकल्प (c) सही है।

156. (d) दिया गया बिन्दु (–1, – 60) परवलय $y^2=4x$ की नियता $x=-1$ पर स्थित है। अतः स्पर्शियाँ परस्पर लम्बवत् है।

157. (c) शांकव का समीकरण $x^2+10x-16y+25=0$ अर्थात् $(x+5)^2=16y$ है।

$\therefore$ शांकव परवलय है जिसकी नाभि (–5, 4) है।

$\because$ नाभि नाभिलम्ब की मध्य बिन्दु होती है।

$\therefore$ केवल विकल्प (c) के बिन्दु नाभिलम्ब के अन्तिम सिरे हो सकते हैं।

158. (c) परवलय $y=x^2+6$ के बिन्दु (1, 7) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $\frac{1}{2}(y+7)=x.1+6 \Rightarrow y=2x+5$ .....(i) है।

यह स्पर्श रेखा वृत्त

$\therefore x^2+y^2+16x+12y+c=0$ .....(ii)

को भी स्पर्श करती है।

(i) व (ii) को हल करने पर,

$\Rightarrow x^2+(2x+5)^2+16x+12(2x+5)+c=0$

$\Rightarrow 5x^2+60x+85+c=0$

चूँकि मूल बराबर हैं

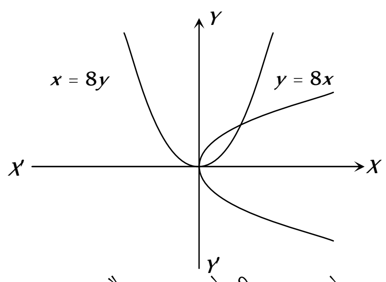
$\therefore b^2-4ac=0 \Rightarrow (60)^2-4\times 5\times(85+c)=0$

$\Rightarrow 85+c=180 \Rightarrow 5x^2+60x+180=0$

$\Rightarrow x=-\frac{60}{10}=-6 \Rightarrow y=-7$

अतः स्पर्श बिन्दु (–6, –7) हैं।

159. (d) चित्र से स्पष्ट है कि वक्रों के बीच का कोण



= x-अक्ष और y-अक्ष के बीच का कोण $=\frac{\pi}{2}$.

160. (c) दिया है $m=2$, $c=k$, $a=1$

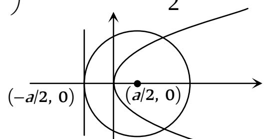
अतः $k=-4$.

161. (c) दिया है $x+y=0$ .....(i); $x^2+y^2+4y=0$ .....(ii)

(i) और (ii) को हल करने पर,

$x=0$, $y=0$; $x=2$, $y=-2$ इसका अर्थ है कि परवलय बिन्दु (0, 0) और (2, –2) से होकर गुजरता है और यह बिन्दु परवलय $y^2=2x$ को संतुष्ट करेंगे।

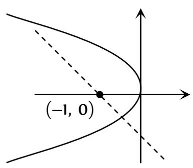
162. (c) दिया गया परवलय $y^2 = 2ax$ है।
चूँकि वृत्त नियता को स्पर्श करता है अतः नाभि $(a/2, 0)$ व नियता $x = -\frac{a}{2}$ होगी।
$\therefore$ वृत्त की त्रिज्या = बिन्दु $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ से रेखा $x = \frac{-a}{2}$ की दूरी
$= \frac{\left|\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right|}{\sqrt{1}} = a$



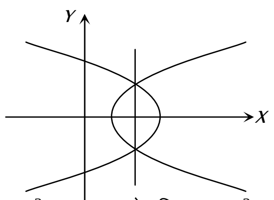
$\therefore$ वृत्त का समीकरण $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = a^2$ .....(i)
और $y^2 = 2ax$ .....(ii)
समीकरण (i) व (ii)को हल करने पर, $x = \frac{a}{2}, -\frac{3a}{2}$
ये मान $y^2 = 2ax$ में रखने पर, $y = \pm a$ एवं $x = -3a/2$, y का काल्पनिक मान देता है। $\therefore$अभीष्ट बिन्दु $(a/2, \pm a)$ है।

163. (c) माना रेखा का समीकरण $y = ax + b$ है।
$\therefore \frac{dy}{dx} = a = 1$ (दिया है)
$y = ax + b$ बिन्दु (0, 1) से गुजरती है $\therefore b = 1$
अतः अभीष्ट रेखा $y = x + 1$ है।
अब रेखा और परवलय का प्रतिच्छेद बिन्दु $x^2 + 2x + 1 = 4x$
$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x = 1$
$\therefore y = 2$। अतः रेखा परवलय को स्पर्श करती है। अतः अन्तःखण्ड की लम्बाई शून्य होगी।

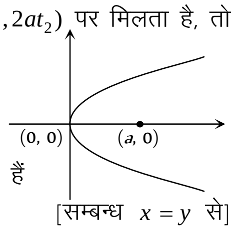
164. (c) $m = \tan(120°) = -\sqrt{3}$
= रेखा की प्रवणता
जो कि (–1, 0) से गुजरती है
अभीष्ट समीकरण $y - 0 = -\sqrt{3}(x+1)$
$y + \sqrt{3}(x+1) = 0$.



165. (b) दिये गये नाभिलम्ब से केवल दो परवलय जा सकते हैं।



166. (d) यदि परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु $(at_1^2, 2at_1)$ पर खींचा गया अभिलम्ब पुनः परवलय पर बिन्दु $(at_2^2, 2at_2)$ पर मिलता है, तो
$t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1}$
प्रश्नानुसार, $x = y$ (दिया है)
क्योंकि भुज व कोटि आपस में बराबर हैं



$\therefore y^2 = 4ax \Rightarrow y^2 = 4ay$ [सम्बन्ध $x = y$ से]
$\Rightarrow y^2 - 4ay = 0 \Rightarrow y(y - 4a) = 0 \Rightarrow y = 0$ या $y = 4a$
अतः बिन्दु $(x = 0, y = 0)$ एवं $(x = 4a, y = 4a)$
$2at_1 = 4a \Rightarrow t_1 = \frac{4a}{2a} = 2$; $t_2 = -2 - \frac{2}{2} = -2 - 1 = -3$
$\therefore (at_2^2, 2at_2) = [a \times (-3)^2, 2a(-3)) = (9a, -6a)$.

दीर्घवृत्त

1. (b) $\frac{2b^2}{a} = b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$
अतः $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. (c) प्रतिबन्धानुसार, $\frac{2a}{e} = 6ae \Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. (b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. चूँकि यह (– 3, 1) व (2, – 2) से गुजरता है।
अतः $\frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ तथा $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4}$
$\Rightarrow a^2 = \frac{32}{3}, b^2 = \frac{32}{5}$
अतः अभीष्ट दीर्घवृत्त $3x^2 + 5y^2 = 32$ है।
ट्रिक : चूँकि दिये गये समीकरणों में से केवल $3x^2 + 5y^2 = 32$ ही (– 3, 1) व (2, – 2) से गुजरता है।

4. (a) $a = \frac{10}{\frac{2.5}{8}} = 8$, $b = 8\sqrt{1 - \frac{25}{64}} = 8\frac{\sqrt{39}}{8} = \sqrt{39}$
नाभिलम्ब $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 39}{8} = \frac{39}{4}$ है।

5. (d) $ae = 1$, $a = 2$, $e = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \sqrt{4\left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \sqrt{3}$
अतः लघुअक्ष $= 2\sqrt{3}$.

6. (d) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$
अतः नियताएँ $x \pm \frac{5}{3/5} = 0$ या $3x \pm 25 = 0$ हैं।

7. (b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ व $\frac{2b^2}{a} = 5 \Rightarrow a = \frac{81}{4}$, $b = \frac{45}{4}$
अतः समीकरण $\frac{4x^2}{81} + \frac{4y^2}{45} = 1$ है।

8. (a) दिया है, $\frac{2b^2}{a} = 10$ व $2b = 2ae$
साथ ही $b^2 = a^2(1 - e^2) \Rightarrow e^2 = (1 - e^2) \Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\Rightarrow b = \frac{a}{\sqrt{2}}$ या $b = 5\sqrt{2}$, $a = 10$
अतः दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{(10)^2} + \frac{y^2}{(5\sqrt{2})^2} = 1$ अर्थात्
$x^2 + 2y^2 = 100$ होगा।

9. (c) $a = 6, b = 2\sqrt{5}$; $b^2 = a^2(1 - e^2)$
$\Rightarrow \frac{20}{36} = (1 - e^2) \Rightarrow e = \sqrt{\frac{16}{36}} = \frac{2}{3}$
परन्तु नियताएँ $x = \pm\frac{a}{e}$ हैं।
अतः उनके बीच की दूरी $2.\frac{6}{2/3} = 18$ हैं।

10. (b) $\frac{x^2}{(48/3)}+\frac{y^2}{(48/4)}=1$

$a^2=16, b^2=12 \Rightarrow e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{2}$

दूरी = $2ae=2\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=4$

11. (a) शीर्ष $(\pm 5,0)\equiv(\pm a,0) \Rightarrow a=5$

नाभियाँ $(\pm 4,0)\equiv(\pm ae,0) \Rightarrow e=\frac{4}{5}$, $\therefore b=(5)\left(\frac{3}{5}\right)=3$

अतः समीकरण $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ अर्थात् $9x^2+25y^2=225$ है।

12. (a) नाभियाँ $(\pm 5,0)\equiv(\pm ae,0)$ हैं। नियता$\left(x=\frac{36}{5}\right)\equiv x=\frac{a}{e}$

$\therefore \frac{a}{e}=\frac{36}{5}, ae=5 \Rightarrow a=6$ व $e=\frac{5}{6}$

इसलिए $b=6\sqrt{1-\frac{25}{36}}=6\frac{\sqrt{11}}{6}=\sqrt{11}$

अतः अभीष्ट समीकरण $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$ है।

13. (d) $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$; नाभिलम्ब $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2a^2}{a}\left(1-\frac{1}{2}\right)=a$ अर्थात् अर्ध लघुअक्ष है।

14. (d) यहाँ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ है।

नाभिलम्ब $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\cdot 5}{3}=\frac{10}{3}$

15. (d) $\frac{a}{e}-ae=8$ एवं $e=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{8e}{(1-e^2)}=\frac{8.4}{2(3)}=\frac{16}{3}$

$\therefore b=\frac{16}{3}\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{16}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

अतः लघुअक्ष की लम्बाई $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ है।

16. (c) $\frac{x^2}{\frac{112}{16}}+\frac{y^2}{\frac{112}{7}}=1$ इसलिए $e=\sqrt{1-\frac{112}{16}.\frac{7}{112}}=\frac{3}{4}$.

17. (b) नाभियाँ $(\pm ae,0)$, अतः प्रश्नानुसार $2ae=2b$ या $ae=b$

साथ ही, $b^2=a^2(1-e^2)\Rightarrow e^2=(1-e^2)\Rightarrow e=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

18. (a) माना दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ है

$\because$ यह बिन्दु (– 3, 1) से गुजरता है।

$\therefore \frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\Rightarrow 9+\frac{a^2}{b^2}=a^2$ .....(i)

उत्केन्द्रता $\sqrt{\frac{2}{5}}$ दी गयी है ।

$\therefore \frac{2}{5}=1-\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{5}$ .....(ii)

समी. (i) व (ii) से $a^2=\frac{32}{3}, b^2=\frac{32}{5}$

$\therefore$ अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण $3x^2+5y^2=32$ है।

19. (b) दिया है $2b=10, 2a=8 \Rightarrow b=5, a=4$

अतः अभीष्ट समीकरण $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ है।

20. (a) केन्द्र (0,0), नाभि (0,3), $b=5$

नाभि = (0,3) $\Rightarrow be=3\Rightarrow e=\frac{3}{5} \Rightarrow a=b\sqrt{1-e^2}=4$

अतः अभीष्ट समीकरण $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ है।

21. (b) शीर्ष (0,7), नियता $y=12$, $\therefore b=7$

साथ ही, $\frac{b}{e}=12\Rightarrow e=\frac{7}{12}, a=7\sqrt{\frac{95}{144}}$

अतः दीर्घवृत्त का समीकरण $144x^2+95y^2=4655$ होगा।

22. (b) $\frac{x^2}{(30/2)}+\frac{y^2}{(30/3)}=1\Rightarrow\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$ है।

23. (c) $\frac{2b^2}{a}=8, e=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow a^2=64, b^2=32$

अतः अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{32}=1$ है।

24. (b) $\frac{2b^2}{a}=2ae\Rightarrow b^2=a^2e$ या $e=\frac{b^2}{a^2}$

साथ ही $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ या $e^2=1-e$ या $e^2+e-1=0$

या $e=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ चूँकि $e<1, \therefore e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

25. (b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, नाभिलम्ब $=\frac{2b^2}{a}=3$.

26. (a) $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow e^2=\frac{36}{64}\Rightarrow e=\frac{3}{4}$.

27. (d) दीर्घ अक्ष = 3 (लघु अक्ष)

$\Rightarrow 2a=3(2b)\Rightarrow a^2=9b^2=9a^2(1-e^2)\Rightarrow e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

28. (b) नाभिलम्ब $=\frac{1}{3}$ (दीर्घअक्ष)

$\Rightarrow \frac{2b^2}{a}=\frac{2a}{3}\Rightarrow a^2=3b^2=3a^2(1-e^2)\Rightarrow e=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

29. (d) दिया है, $2a=6, 2b=4$ अर्थात् $a=3, b=2$

$e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{9}\Rightarrow e=\frac{\sqrt{5}}{3}$

पिनों के बीच की दूरी $=2ae=2\sqrt{5}$ से.मी.

धागे की लम्बाई $=2a+2ae=6+2\sqrt{5}$ से.मी.

30. (b) $\frac{x^2}{2-r}+\frac{y^2}{r-5}+1=0\Rightarrow\frac{x^2}{r-2}+\frac{y^2}{5-r}=1$

अतः $r>2$ व $r<5\Rightarrow 2<r<5$.

31. (c) माना बिन्दु (h,k) है, तब स्पर्शी युग्म का समीकरण है

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}-1\right)=\left(\frac{hx}{a^2}+\frac{yk}{b^2}-1\right)^2$$

स्पर्शी युग्म लम्बवत् होंगे यदि

x^2 का गुणांक + y^2 का गुणांक = 0

$\Rightarrow \frac{k^2}{a^2b^2}+\frac{h^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \Rightarrow h^2+k^2=a^2+b^2$

(h,k) को (x,y) से प्रतिस्थापित करने पर, $x^2+y^2=a^2+b^2$.

32. (b) यहाँ $a^2=36$, $b^2=49$. चूँकि $b>a$, अतः नाभिलम्ब की लम्बाई $=\frac{2a^2}{b}=2\times\frac{36}{7}=\frac{72}{7}$.

33. (c) दीर्घवृत्त के किसी बिन्दु $P(x,y)$ की नाभीय दूरी $SP=a+ex$ है। यहाँ $x=a\cos\theta$ अतः $SP=a+ae\cos\theta=a(1+e\cos\theta)$.

34. (b) यहाँ $ae=4$ व $e=\frac{4}{5}\Rightarrow a=5$

अब $b^2=a^2(1-e^2)\Rightarrow b^2=25\left(1-\frac{16}{25}\right)=9$

अतः दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ होगा।

35. (a) $16x^2+25y^2=400 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

यहाँ $a^2=25, b^2=16 \Rightarrow e=\frac{3}{5}$

अतः नाभियों के निर्देशांक $(ae, 0)$ तथा $(-ae, 0)$ अर्थात् $(\pm 3, 0)$ होंगे।

36. (b) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ है

$\therefore e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$.

37. (c) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{(25/4)}=1$ की मानक समीकरण से तुलना करने पर

$a=2,\ b=5/2$. $\therefore b>a$, अतः $a^2=b^2(1-e^2)$

$\Rightarrow 4=\frac{25}{4}(1-e^2)\Rightarrow \frac{16}{25}=1-e^2 \Rightarrow e^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$,

$\therefore e=\frac{3}{5}$.

38. (c) दिया गया दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$ है।

यहाँ $b>a$; $\therefore$ नाभिलम्ब $=\frac{2a^2}{b}=\frac{2\times\frac{1}{9}}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{9}$.

39. (a) माना बिन्दु $P(x_1,y_1)$ है।

अतः प्रश्नानुसार $\sqrt{(x_1+2)^2+y_1^2}=\frac{2}{3}\left(x_1+\frac{9}{2}\right)$

$\Rightarrow (x_1+2)^2+y_1^2=\frac{4}{9}\left(x_1+\frac{9}{2}\right)^2$

$\Rightarrow 9[x_1^2+y_1^2+4x_1+4]=4\left(x_1^2+\frac{81}{4}+9x_1\right)$

$\Rightarrow 5x_1^2+9y_1^2=45\Rightarrow \frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{5}=1$,

अतः (x_1,y_1) का बिन्दुपथ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ है, जो कि दीर्घवृत्त का समीकरण है।

40. (c) दिये गये वक्र का समीकरण $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ है।

$\Rightarrow -5\le x\le 5,\ -4\le y\le 4$

$PF_1+PF_2=\sqrt{[(x-3)^2+y^2]}+\sqrt{[(x+3)^2+y^2]}$

$=\sqrt{(x-3)^2+\frac{400-16x^2}{25}}+\sqrt{(x+3)^2+\frac{400-16x^2}{25}}$

$=\frac{1}{5}\left\{\sqrt{(9x^2+625-150x)}+\sqrt{(9x^2+625+150x)}\right\}$

$=\frac{1}{5}\left\{\sqrt{(3x-25)^2}+\sqrt{(3x+25)^2}\right\}=\frac{1}{5}\{25-3x+3x+25\}$

$=10 \quad (\because 25-3x>0, 25+3x>0)$

41. (b) $SP+S'P=2a=2.6=12$.

42. (a) $\because ae=\pm 2 \Rightarrow a=\pm 4 \quad (\because e=1/2)$

अब $b^2=a^2(1-e^2) \Rightarrow b^2=16(1-1/4)\Rightarrow b^2=12$

अतः दीर्घवृत्त का समीकरण

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1 \Rightarrow 3x^2+4y^2=48$ है।

43. (c) $4x^2+9y^2=36 \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. यहाँ $a^2=9, b^2=4$

अब $b^2=a^2(1-e^2)$; $\therefore \frac{4}{9}=1-e^2 \Rightarrow e=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

44. (a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1 \Rightarrow a^2=b^2(1-e^2)$

$\Rightarrow e^2=1-\frac{16}{25} \Rightarrow e=3/5$.

45. (d) नाभियों के बीच की दूरी $=2ae=16$ तथा उत्केन्द्रता $e=\frac{1}{2}$

दीर्घवृत्त के दीर्घाक्ष की लम्बाई $=2a=\frac{2ae}{e}=\frac{16}{1/2}=32$.

46. (c) प्रथम स्थिति में, $e=\sqrt{1-(25/169)}$

द्वितीय स्थिति में, $e'=\sqrt{1-(b^2/a^2)}$

प्रश्नानुसार, $\sqrt{1-b^2/a^2}=\sqrt{1-(25/169)}$

$\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{5}{13}$, $(\because a>0, b>0) \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{13}{5}$.

47. (b) दीर्घवृत्त का लघु अक्ष $(2b)=8$ या $b=4$ है तथा उत्केन्द्रता $(e)=\frac{\sqrt{5}}{3}$ हम जानते हैं कि दीर्घवृत्त में $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}$

$\Rightarrow \frac{5}{9}=1-\frac{16}{a^2}$ या $\frac{16}{a^2}=1-\frac{5}{9} \Rightarrow a^2=\frac{16\times 9}{4}=36$

$\Rightarrow a=6$; दीर्घवृत्त का दीर्घाक्ष $=2a=2\times 6=12$.

48. (d) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ की मानक समीकरण से तुलना करने पर, $a^2=5$ तथा $b^2=9$ दीर्घवृत्त में (जहाँ $b^2>a^2$)

$a^2=b^2(1-e^2)\lambda \Rightarrow e^2=\frac{b^2-a^2}{b^2}=\frac{9-5}{9}=\frac{4}{9}$

$\Rightarrow e=\frac{2}{3}$.

$\therefore$ नाभियों के बीच की दूरी $=2be=2\times 3\times\frac{2}{3}=4$.

49. (b) दिया गया है , $e=\frac{1}{2}$ तथा $(\pm ae,0)=(\pm 1,0)$

$\Rightarrow ae=1 \Rightarrow a=2$ अब $b^2=a^2(1-e^2)$

$\Rightarrow b^2=4\left(1-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow b^2=3$

अतः दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ है।

50. (a) दीर्घवृत्त में किसी बिन्दु की नाभीय दूरियों का योग, दीर्घअक्ष की लम्बाई के बराबर होता है। यह दीर्घवृत्त का गुण है।

51. (d) $2ae=8, \frac{2a}{e}=18 \Rightarrow a=\sqrt{4\times 9}=6$

$e=\frac{2}{3}, b=6\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{6}{3}\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

अतः समीकरण $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ अर्थात् $5x^2+9y^2=180$ है।

52. (c) नाभियों के बीच की दूरी $=6 \Rightarrow ae=3$.

लघु अक्ष $=8 \Rightarrow 2b=8 \Rightarrow b=4 \Rightarrow b^2=16$

$\Rightarrow a^2(1-e^2)=16 \Rightarrow a^2-a^2e^2=16$

$\Rightarrow a^2-9=16 \Rightarrow a=5$

अतः $ae=3 \Rightarrow e=\frac{3}{5}$.

53. (c) यह स्पष्ट है।

54. (b) $4(x-2)^2+9(y-3)^2=36$ अतः केन्द्र (2, 3) है।

55. (a) दीर्घवृत्त $4(x-1)^2+9(y-2)^2=36$ है।

अतः नाभिलम्ब $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2.4}{3}=\frac{8}{3}$.

56. (b) $4x^2-8x+y^2+2y+1=0$

$\Rightarrow (2x-2)^2+(y+1)^2=-1+4+1$

$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y+1)^2}{4}=1 \Rightarrow e=\sqrt{1-\frac{1}{4}} \Rightarrow e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

57. (a) दीर्घअक्ष $=6=2a \Rightarrow a=3$

$e=\frac{1}{2} \Rightarrow b=3\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ एवं केन्द्र (7, 0) है।

अभीष्ट समीकरण $\frac{(x-7)^2}{9}+\frac{y^2}{(27/4)}=1$

$\Rightarrow 3x^2+4y^2-42x+120=0$ है।

58. (b) नाभि $=(3,-3) \Rightarrow ae=3-2=1$

शीर्ष $=(4,-3) \Rightarrow a=4-2=2 \Rightarrow e=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow b=a\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{2}{2}\sqrt{3}=\sqrt{3}$

अतः केन्द्र (2,–3) वाले दीर्घवृत्त का समीकरण

$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{3}=1$ है।

59. (b) $\Delta \neq 0$ व $h^2<ab$ की जाँच करें।

60. (b) दिये गये दीर्घवृत्त का केन्द्र रेखाओं $x+y-2=0$ व $x-y=0$ का प्रतिच्छेद बिन्दु अर्थात् (1,1) है।

61. (a) माना कोई बिन्दु (x, y) दीर्घवृत्त पर है,

$\frac{\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(y-1)^2}}{\left|\frac{x-y+3}{\sqrt{2}}\right|}=\frac{1}{2}$

वर्ग करके सरल करने पर,

$7x^2+2xy+7y^2+10x-10y+7=0$.

62. (a) $\frac{(x+1)^2}{\frac{225}{25}}+\frac{(y+2)^2}{\frac{225}{9}}=1$

$a=\sqrt{\frac{225}{25}}=\frac{15}{5}, b=\sqrt{\frac{225}{9}}=\frac{15}{3} \Rightarrow e=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$

नाभि $=\left(-1,-2\pm\frac{15}{3}.\frac{4}{5}\right)=(-1,-2\pm 4)=(-1,2); (-1,-6)$.

63. (b) $9x^2+(\sqrt{5}y-3\sqrt{5})^2=45$ या $\frac{x^2}{5}+\frac{(y-3)^2}{9}=0$

$\Rightarrow a^2=5, b^2=9$ इसलिए $e=\frac{2}{3}$.

64. (a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=(1+\sin 2t)+(1-\sin 2t)=2$.

65. (c) स्पष्टतः यह एक दीर्घवृत्त है।

66. (d) $4x^2+8x+4+9y^2+36y+36=36$

$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$; $\therefore e=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

67. (c) $3x^2-12x+4y^2-8y=-4 \Rightarrow 3(x-2)^2+4(y-1)^2=12$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{3}=1 \Rightarrow \frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{3}=1$

$\therefore e=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$. $\therefore$ नाभियाँ $\left(X=\pm 2\times\frac{1}{2}, Y=0\right)$ हैं

अर्थात् $(x-2=\pm 1, y-1=0)=(3,1)$ व $(1,1)$.

68. (c) समीकरण $x^2+2y^2-2x+3y+2=0$ को निम्न तरह से भी लिख सकते हैं।

$\frac{(x-1)^2}{2}+\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{16} \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{(1/8)}+\frac{\left(y+\frac{3}{4}\right)^2}{(1/16)}=1$,

जो कि एक दीर्घवृत्त है, जिसमें $a^2=\frac{1}{8}$ और $b^2=\frac{1}{16}$

$\therefore \frac{1}{16}=\frac{1}{8}(1-e^2) \Rightarrow e^2=1-\frac{1}{2} \Rightarrow e=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

69. (c) समीकरण $25x^2+9y^2-150x-90y+225=0$ एक दीर्घवृत्त है।

$\Rightarrow 25(x-3)^2+9(y-5)^2=225$

$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$. यहाँ $b>a$

$\therefore$ उत्केन्द्रता $e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$.

70. (a) $a^2=b^2(1-e^2)$, $\{\because a<b\}$

$9=25(1-e^2) \Rightarrow \frac{9}{25}=1-e^2 \Rightarrow e^2=\frac{16}{25} \Rightarrow e=\frac{4}{5}$.

71. (c) शांकव का समीकरण $9x^2+4y^2-6x+4y+1=0$ है।

$\Rightarrow (3x-1)^2+(2y+1)^2=1 \Rightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}}+\frac{(y+1)^2}{\frac{1}{2}}=1$.

यहाँ $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$; $\therefore$ $2a=\frac{2}{3}$, $2b=1$.

अतः अक्षों की लम्बाईयाँ $\left(1,\frac{2}{3}\right)$ हैं।

72. (b) दिये गये दीर्घवृत्त का समीकरण है

$\frac{(x-1)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$; $e=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{9-5}{9}}=\frac{2}{3}$.

73. (a) दिये गये शांकव का समीकरण $4x^2+16y^2-24x-3y=1$

$\Rightarrow (2x-6)^2+(4y-4)^2=53$

$\Rightarrow 4(x-3)^2+16(y-1)^2=53 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{53/4}+\frac{(y-1)^2}{53/16}=1$

$\therefore$ $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{53/16}{53/4}}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

74. (b) $c=\pm\sqrt{b^2+a^2m^2}=\pm\sqrt{4+8.4}=\pm 6$.

75. (a) चूँकि $S_1>0$ अतः बिन्दु दीर्घवृत्त के बाहर है।

76. (c) $m=\tan 60°=\sqrt{3}$ अतः स्पर्शी का समीकरण

$y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{1+3\cdot 16} \Rightarrow y=\sqrt{3}x\pm 7$ है।

77. (c) $E\equiv 4+9(3)^2-16(1)-54(3)+61<0$

अतः बिन्दु दीर्घवृत्त $\frac{4(x-2)^2}{36}+\frac{9(y-3)^2}{36}=1$ के अन्दर है।

दीर्घ अक्ष का समीकरण $y-3=0$ एवं बिन्दु (1, 3) इस पर स्थित है।

78. (a) रेखा $y=\frac{-l}{m}x+\frac{n}{m}$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ पर स्पर्शी होगी

यदि $\frac{n}{m}=\pm\sqrt{b^2+a^2\left(\frac{l}{m}\right)^2}$ या $n^2=m^2b^2+l^2a^2$.

79. (c) यह आधारभूत संकल्पना है।

80. (d) दिया गया बिन्दु दीर्घवृत्त पर स्थित नहीं है।

81. (c) $SS_1=T^2$

$\tan\theta=2\frac{\sqrt{h^2-ab}}{a+b}, a=9$, $b=-4$ व $h=-12$.

82. (a) स्पर्शी $y-3=m(x-2) \Rightarrow y-mx=3-2m$. होगी परन्तु यह दिये गये दीर्घवृत्त पर स्पर्शी है। अतः $m=0,-1$ अतः अभीष्ट स्पर्शियाँ $y=3$ तथा $x+y=5$ हैं।

83. (b) दीर्घवृत्त के बिन्दु $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ पर स्पर्शी

$\frac{(a\cos\theta)x}{a^2}+\frac{(b\sin\theta)y}{b^2}=1$ या $\frac{x}{(a/\cos\theta)}+\frac{y}{(b/\sin\theta)}=1$

$\therefore$ अन्तःखण्ड $\Rightarrow h=\frac{a}{\cos\theta}, k=\frac{b}{\sin\theta} \Rightarrow \frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}=1$.

84. (a) चूँकि यहाँ a व b परस्पर बदले हैं।

85. (c) जैसा कि हम जानते हैं कि वास्तविक बिन्दुओं के प्रतिच्छेदन के लिये $c^2\le a^2m^2+b^2 \Rightarrow a^2m^2\ge c^2-b^2$.

86. (c) दिए गये दीर्घवृत्त के समीकरण की तुलना मानक समीकरण से करने पर, $a=3$, $b=2$. सूत्र से $c^2=b^2+a^2m^2$

$\therefore$ $c^2=4+9m^2$; $\therefore$ $c=\pm\sqrt{9m^2+4}$.

87. (c) दीर्घवृत्त पर डाली गयी दो लम्बवत् स्पर्शियों के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ $x^2+y^2=a^2+b^2$ होता है, इस वृत्त को "नियामक वृत्त" कहते हैं।

दिया गया दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ है।

$\therefore$ अभीष्ट बिन्दुपथ $x^2+y^2=13$ है।

88. (c) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ पर किसी बिन्दु जिसका उत्केन्द्र कोण θ है, के निर्देशांक $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ होंगे।

अतः नाभिलम्ब के सिरों के निर्देशांक $\left(ae,\pm\frac{b^2}{a}\right)$ हैं।

$\therefore a\cos\theta=ae$ तथा $b\sin\theta=\pm\frac{b^2}{a}$

$\Rightarrow \tan\theta=\pm\frac{b}{ae} \Rightarrow \theta=\tan^{-1}\left(\pm\frac{b}{ae}\right)$.

89. (a,c) माना उत्केन्द्र कोण θ है, तो इसके निर्देशांक $(\sqrt{6}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta)$ होंगे।

अतः $6\cos^2\theta+2\sin^2\theta=4$ या $\cos^2\theta=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$ या $\frac{3\pi}{4}$.

90. (c) $9x^2+5y^2-30y=0$ को मानक रूप में बदलने पर,

$\Rightarrow 9x^2+5(y^2-6y)=0$

$\Rightarrow 9x^2+5(y^2-6y+9)=45 \Rightarrow \frac{x^2}{5}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$

$\because a^2<b^2$, अतः दीर्घवृत्त की अक्ष y-अक्ष पर होगी।

$x=0$ रखने पर, $0+5y^2-30y=0 \Rightarrow y=0, y=6$

अतः शीर्षों पर स्पर्शियाँ $y=0$, $y=6$ हैं।

91. (c) $ax\sec\theta-by\operatorname{cosec}\theta=a^2-b^2$.

(दीर्घवृत्त के प्राचल बिन्दुओं पर स्पर्शी का सूत्र देखें)

92. (b) $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ पर अभिलम्ब

$ax\sec\theta-by\operatorname{cosec}\theta=a^2-b^2$, जहाँ $a^2=14, b^2=5$

यह वक्र को पुनः $Q(2\theta)$ अर्थात् $(a\cos 2\theta, b\sin 2\theta)$ पर मिलता है।

अतः $\frac{a}{\cos\theta}a\cos 2\theta-\frac{b}{\sin\theta}(b\sin 2\theta)=a^2-b^2$

$\Rightarrow \frac{14}{\cos\theta}\cos 2\theta-\frac{5}{\sin\theta}(\sin 2\theta)=14-5$

$\Rightarrow 18\cos^2\theta-9\cos\theta-14=0$

$\Rightarrow (6\cos\theta-7)(3\cos\theta+2)=0 \Rightarrow \cos\theta=-\frac{2}{3}$.

93. (c) हम जानते हैं कि रेखा $lx+my+n=0$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ पर अभिलम्ब होगी यदि $\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}=\frac{(a^2-b^2)^2}{n^2}$ परन्तु इस प्रतिबन्ध में हमें l को m से एवं m को -1 से तथा n को c से प्रतिस्थापित करना है तब अभीष्ट प्रतिबंध $c=\pm\frac{(a^2-b^2)m}{\sqrt{a^2+b^2m^2}}$ होगा।

94. (d) (x_1, y_1) पर $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के लिए अभिलम्ब का समीकरण

$\Rightarrow \frac{(x-x_1)a^2}{x_1}=\frac{(y-y_1)b^2}{y_1}$ होगा

$\therefore (x_1, y_1) \equiv (0,3),\ a^2=5,\ b^2=9$

$\Rightarrow \frac{(x-0)}{0}\ 5=\frac{(y-3).9}{3}$ या $x=0$ अर्थात् जो कि y-अक्ष का समीकरण है।

95. (b) $\frac{x-x_1}{x_1/a^2}=\frac{y-y_1}{y_1/b^2}$ यह बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब का मानक समीकरण है।

दिये गये दीर्घवृत्त में $a^2=20, b^2=\frac{180}{16}$ है।

अतः बिन्दु $(2,3)$ पर अभिलम्ब का समीकरण

$\frac{x-2}{2/20}=\frac{y-3}{48/180} \Rightarrow 40(x-2)=15(y-3)$

$\Rightarrow 8x-3y=7 \Rightarrow 3y-8x+7=0$.

96. (d) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के अभिलम्ब का समीकरण है

$ax\ \sec\phi - by\ \text{cosec}\ \phi = a^2-b^2$ .....(i)

सरल रेखा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की अभिलम्ब होगी, यदि (i) तथा $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ एक ही रेखा को निरूपित करें $\frac{a\sec\phi}{\cos\alpha}=\frac{-b\ \text{cosec}\phi}{\sin\alpha}=\frac{a^2-b^2}{p}$

$\Rightarrow \cos\phi=\frac{ap}{(a^2-b^2)\cos\alpha},\ \sin\phi=\frac{-bp}{(a^2-b^2)\sin\alpha}$

$\because \sin^2\phi+\cos^2\phi=1$

$\Rightarrow \frac{b^2p^2}{(a^2-b^2)^2\sin^2\alpha}+\frac{a^2p^2}{(a^2-b^2)^2\cos^2\alpha}=1$

$\Rightarrow p^2(b^2\text{cosec}^2\alpha+a^2\sec^2\alpha)=(a^2-b^2)^2$.

97. (b) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के अभिलम्ब का समीकरण है

$ax\sec\theta - by\ \text{cosec}\ \theta = a^2-b^2$ .....(i)

सरल रेखा $lx+my+n=0$ .....(ii)

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की अभिलम्ब होगी यदि (i) और (ii) एक ही सरल रेखा को निरूपित करें

$\therefore \frac{a\sec\theta}{l}=\frac{b\ \text{cosec}\theta}{-m}=\frac{a^2-b^2}{-n}$

$\Rightarrow \cos\theta=\frac{-an}{l(a^2-b^2)}$ तथा $\sin\theta=\frac{bn}{m(a^2-b^2)}$

$\because \cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

$\therefore \frac{a^2n^2}{l^2(a^2-b^2)^2}+\frac{b^2n^2}{m(a^2-b^2)^2}=1 \Rightarrow \frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}=\frac{(a^2-b^2)^2}{n^2}$.

98. (a) दिया गया समीकरण $4x^2+9y^2=36$ दीर्घवृत्त है।

बिन्दु $(3,-2)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण है,

$\frac{(3)x}{9}+\frac{(-2)y}{4}=1$ या $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$

$\therefore$ अभिलम्ब $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=k$ है जो कि बिन्दु $(3,-2)$ से होकर गुजरता है।

$\therefore \frac{3}{2}-\frac{2}{3}=k \Rightarrow k=\frac{5}{6}$

$\therefore$ अभिलम्ब का समीकरण $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=\frac{5}{6}$ है।

99. (d) हम जानते हैं कि वक्र $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ के बिन्दु $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ पर अभिलम्ब का समीकरण

$ax\sin\theta - by\text{cosec}\ \theta = a^2-b^2$ .....(i) है

समीकरण (i) की तुलना समीकरण $2x-\frac{8}{3}\lambda y=-3$ से करने पर,

$a\sin\theta=2$, $b\ \text{cosec}\ \theta=\frac{8}{3}\lambda$ या $ab=\frac{16}{3}\lambda$ .....(ii)

$\because a=1, b=2$; $\therefore 2=\frac{16}{3}\lambda$ या $\lambda=\frac{3}{8}$

100. (b) बिन्दु (h,k) पर ध्रुवी का समीकरण $\frac{hx}{a^2}+\frac{ky}{b^2}=1$

$\Rightarrow \frac{hx}{4}+\frac{ky}{1}=1 \Rightarrow hx+4ky=4$ .....(i) है।

जो दी गई सरल रेखा $x+4y=4$ के समरूप है।

(i) व (ii) की तुलना करने पर, $h=1, k=1$

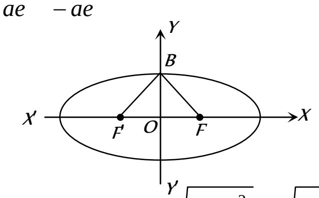
अतः बिन्दु $(1,1)$ है।

101. (a) दो व्यास $y=m_1x$ व $y=m_2x$ संयुग्मी होंगे यदि $m_1m_2=-\frac{b^2}{a^2}$, अतः संयुग्मी व्यास का समीकरण $y=\frac{-b}{a}x$ है।

102. (c) $\angle F'BF=90°$, $F'B \perp FB$ अर्थात्

$F'B$ की प्रवणता $\times$ FB की प्रवणता $=-1$

$\Rightarrow \frac{b}{ae}\times\frac{b}{-ae}=-1$, $b^2=a^2e^2$ .....(i)



हम जानते हैं कि $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{a^2e^2}{a^2}}=\sqrt{1-e^2}$

$e^2=1-e^2,\ 2e^2=1,\ e^2=\frac{1}{2},\ e=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

103. (b) $\because ae=\pm\sqrt{5} \Rightarrow a=\pm\sqrt{5}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)=\pm 3 \Rightarrow a^2=9$

$\therefore b^2=a^2(1-e^2)=9\left(1-\frac{5}{9}\right)=4$

अतः दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow 4x^2+9y^2=36$ है।

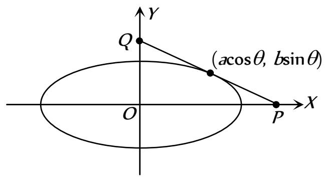
104. (a) दीर्घवृत्त पर किसी भी बिन्दु P के लिए नाभि S व S'
$SP + S'P = 2a$

$\therefore \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ के लिये नाभीय दूरी का योग`

$= 2 \times 5 = 10$.

105. (c) बिन्दु $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$



$P = \left(\frac{a}{\cos\theta}, 0\right)$

$Q = \left(0, \frac{b}{\sin\theta}\right)$

OPQ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)\right| = \frac{ab}{|\sin 2\theta|}$

$\therefore$ (क्षेत्रफल)$_{\text{निम्नतम}} = ab$.

106. (e) $25(x-3)^2 + 16y^2 = 400$

$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

$e = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$.

107. (c) दिये गये प्रतिबन्ध के अनुसार बिन्दु (x_1, y_1) स्थित है

(i) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ पर यदि $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0$

(ii) दीर्घवृत्त के बाहर यदि $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 > 0$

(iii) दीर्घवृत्त के अन्दर यदि $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 < 0$

दिया गया दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{1/4} + \frac{y^2}{1/5} = 1$ है

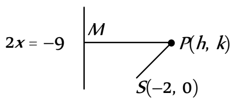
$\therefore \frac{16}{1/4} + \frac{9}{1/5} - 1 = 64 + 45 - 1 > 0$

बिन्दु (4, –3) दीर्घवृत्त के बाहर स्थित है।

108. (b) प्रश्न में, $PS = \frac{2}{3}PM$ (दिया है)

नाभि $S(-2, 0)$,

नियता का समीकरण $2x - 9 = 0$



$(PS)^2 = \frac{4}{9}(PM)^2$

$\Rightarrow (h+2)^2 + (k)^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{2h-9}{2}\right)^2$

$\Rightarrow 9[(h+2)^2 + (k)^2] = \frac{4(2h-9)^2}{4}$

$\Rightarrow 9h^2 + 9k^2 + 36h + 36 = 4h^2 + 81 + 36h$

$\Rightarrow \frac{5h^2}{45} + \frac{9k^2}{45} = 1 \Rightarrow \frac{h^2}{9} + \frac{k^2}{5} = 1$

बिन्दु $P(h, k)$ का बिन्दुपथ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ जो कि दीर्घवृत्त है।

अतिपरवलय

1. (b) यह स्पष्ट है।

2. (a) $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$

$e_1 = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} \Rightarrow e_1^2 = \frac{b^2 + a^2}{b^2} \Rightarrow \frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e^2} = 1$.

3. (b) $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$, इसलिए $PS_1 \sim PS_2 = 2(3) = 6$.

4. (a) $\frac{2b^2}{a} = 8$ व $\frac{3}{\sqrt{5}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ या $\frac{4}{5} = \frac{b^2}{a^2}$

$\Rightarrow a = 5$, $b = 2\sqrt{5}$.

अतः अभीष्ट अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{20} = 1$

$\Rightarrow 4x^2 - 5y^2 = 100$ है।

5. (b) $\frac{9}{a^2} = 1 \Rightarrow a = 3$ व $\frac{18}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 4$

इसलिए $e = \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

6. (d) अतिपरवलय के लिए $\Delta \neq 0$ एवं $h^2 > ab$
यहाँ $\Delta = 0$.

7. (a) संयुग्मी अक्ष 5 एवं नाभियों के बीच की दूरी 13 है।
$\Rightarrow 2b = 5$ व $2ae = 13$.
अब अतिपरवलय के लिए

$b^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow \frac{25}{4} = \frac{(13)^2}{4e^2}(e^2 - 1)$

$\Rightarrow \frac{25}{4} = \frac{169}{4} - \frac{169}{4e^2}$ या $e^2 = \frac{169}{144} \Rightarrow e = \frac{13}{12}$

या $a = 6, b = \frac{5}{2}$

अतः अभीष्ट अतिपरवलय $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25/4} = 1$

$\Rightarrow 25x^2 - 144y^2 = 900$ है।

8. (c) **ट्रिक :** $2a = 7$ या $a = \frac{7}{2}$ एवं (5, –2) इसे संतुष्ट करता है।

$\frac{4}{49}(25) - \frac{51}{196}(4) = 1$

तथा $a^2 = \frac{49}{4} \Rightarrow a = \frac{7}{2}$.

9. (c) शीर्ष $(\pm 4, 0) \equiv (\pm a, 0) \Rightarrow a = 4$

नाभियाँ $(\pm 6, 0) \equiv (\pm ae, 0) \Rightarrow e = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

10. (a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1$ उत्केन्द्रता $= \sqrt{2}$ चूँकि $a = b$.

11. (c) $(4x + 8)^2 - (y - 2)^2 = -44 + 64 - 4$

$\Rightarrow \frac{16(x+2)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

अतः अनुप्रस्थ अक्ष व संयुग्मी अक्ष $y = 2$ व $x = -2$ है।

12. (a) $2a = 8, 2b = 6$
अतिपरवलय के किसी बिन्दु की नाभीय दूरियों का अन्तर $= 2a = 8$.

13. (c) नाभियाँ $(0, \pm 4) \equiv (0, \pm be) \Rightarrow be = 4$
शीर्ष $(0, \pm 2) \equiv (0, \pm b) \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$
अतः समीकरण $\frac{-x^2}{(2\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(2)^2} = 1$ या $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$.

14. (c) दोनों समीकरणों का गुणा करने पर,
$(bx)^2 - (ay)^2 = (ab)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
जो कि अतिपरवलय का मानक समीकरण है।

15. (d) वर्ग करके घटाने पर, $a^2x^2 - b^2y^2 = a^2 - b^2$ जो कि अतिपरवलय का समीकरण है।

16. (c) केन्द्र (0, 0), शीर्ष $(4,0) \Rightarrow a = 4$ एवं नाभि $(6,0)$
$\Rightarrow ae = 4 \Rightarrow e = \frac{3}{2}$, इसलिए $b = 2\sqrt{5}$
अतः अभीष्ट समीकरण $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$
अर्थात् $5x^2 - 4y^2 = 80$

17. (b) अतिपरवलय के लिये हमेशा $e > 1$ होती है एवं $\frac{2}{3} < 1$ है।

18. (a) माना अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ है।
परन्तु यह (3, 2) से गुजरता है अतः $\frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$ .....(i)
इसी प्रकार (–17, 12) से, अतः $\frac{(-17)^2}{a^2} - \frac{(12)^2}{b^2} = 1$ .....(ii)
इन्हें सरल करने पर $a = 1$ या $b = \sqrt{2}$ प्राप्त होता है
अतः अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई $= 2a = 2$ होगी।

19. (c) दोनों समीकरणों का गुणा करने पर, $3x^2 - y^2 = 48$
या $\frac{x^2}{(48/3)} - \frac{y^2}{48} = 1$, जो कि अतिपरवलय है।

20. (a) अतिपरवलय $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ है।
नाभीय दूरियों का अन्तर $= 2a = 8$.

21. (c) दिए गए अतिपरवलय से, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{(16/9)} = 1$,
$\therefore a = 2, b = \frac{4}{3}$ हम जानते हैं $b^2 = a^2(e^2 - 1)$
$\Rightarrow \frac{16}{9} = 4(e^2 - 1) \Rightarrow e^2 = \frac{13}{9}$, $\therefore e = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

22. (d) दिया गया शांकव है, $\frac{x^2}{(1)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$
$\therefore b^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow \frac{1}{4} + 1 = e^2 \Rightarrow e = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

23. (c) हम जानते हैं कि यदि एक वृत्त दो दिये गये वृत्तों को बाह्यतः स्पर्श करता हैं तो वृत्त का बिन्दुपथ अतिपरवलय होता है।

24. (a) दिया गय समीकरण $2x^2 - 3y^2 = 5 \Rightarrow \frac{x^2}{5/2} - \frac{y^2}{5/3} = 1$ है।
अब $b^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{5}{2}(e^2 - 1) \Rightarrow e = \sqrt{\frac{5}{3}}$.
अतिपरवलय की नाभियाँ $(\pm ae, 0)$
$= \left(\pm \sqrt{\frac{5}{2}} . \sqrt{\frac{5}{3}}, 0\right) = \left(\pm \frac{5}{\sqrt{6}}, 0\right)$.

25. (b) अतिपरवलय का समीकरण
$16x^2 - 9y^2 = 144 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ है।
$\therefore$ नाभिलम्ब $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.16}{3} = \frac{32}{3}$.

26. (c) अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
अब $b^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow e = \frac{5}{4}$
अतः नाभियाँ $(\pm ae, 0) \Rightarrow \left(\pm 4 . \frac{5}{4}, 0\right)$ अर्थात् $(\pm 5, 0)$

27. (a) दिये गये समीकरण से $\frac{x^2}{32/2} - \frac{y^2}{8} = 1$
या $\frac{x^2}{\left(4\sqrt{2}/\sqrt{3}\right)^2} - \frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1$.
अतिपरवलय के मानक समीकरण $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ से तुलना करने पर, $a^2 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$ या $a = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.
अतः अतिपरवलय के अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई
$= 2a = 2 \times \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

28. (a) अतिपरवलय की नियता $x = \frac{a}{e}$,
जहाँ $e = \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{a}$
नियता $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{9}{\sqrt{9 + 4}} \Rightarrow x = \frac{9}{\sqrt{13}}$

29. (c) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = m$ .....(i)
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{m}$ .....(ii)
समीकरण (i) व (ii) का आपस में गुणा करने पर,
$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = m . \frac{1}{m}$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ जो कि अतिपरवलय का समीकरण है।

30. (d) यह स्पष्ट है।

31. (d) $\frac{x^2}{(6/2)}-\frac{y^2}{6}=1 \Rightarrow a^2=3$ व $b^2=6$

इसलिए $e=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}+1} \Rightarrow e=\sqrt{3}$.

32. (c) प्रश्नानुसार, $2ae=2.2a$ या $e=2$ व $2b=6 \Rightarrow b=3$.

अतः $a=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

अतः समीकरण $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$ अर्थात् $3x^2-y^2=9$ है।

33. (c) स्पष्टतः यहाँ x^2 का गुणांक धनात्मक एवं y^2 का गुणांक ऋणात्मक है। अतः यह एक अतिपरवलय है।

34. (a) $(x-2)^2+(y-1)^2=4\left[\frac{(x+2y-1)^2}{5}\right]$

$\Rightarrow 5[x^2+y^2-4x-2y+5]$

$=4[x^2+4y^2+1+4xy-2x-4y]$

$\Rightarrow x^2-11y^2-16xy-12x+6y+21=0$.

35. (b) $2a=10$, $\therefore a=5$

$ae-a=8$ या $e=1+\frac{8}{5}=\frac{13}{5}$

$\therefore b=5\sqrt{\frac{13^2}{5^2}-1}=5\times\frac{12}{5}=12$

एवं अतिपरवलय का केन्द्र $\equiv(5,0)$

$\therefore \frac{(x-5)^2}{5^2}-\frac{(y-0)^2}{12^2}=1$.

36. (c) स्पष्टतः $h^2>ab$ व

$\Delta=(1)(1)(2)+2(2)(1)(2)-(1)(2)^2-(1)(1)^2-2(2)^2<0$

अतः यह अतिपरवलय है।

37. (c) $(x+1)^2-y^2-1+5=0 \Rightarrow -\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$

$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ की नियताएँ $y=\pm\frac{b}{e}=0$ हैं।

यहाँ $b=2, e=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

अतः $y=\pm\frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$.

38. (a) $a=4, b=3 \Rightarrow \frac{9}{16}=(e^2-1) \Rightarrow e=\frac{5}{4}$

केन्द्र (0, 2) है। अतः नाभि $(\pm ae, 2)=(\pm 5, 2)$ है।

39. (b) केन्द्र $\left(\frac{hf-bg}{ab-h^2},\frac{gh-af}{ab-h^2}\right)=\left(\frac{16.9}{-9.16},\frac{-9(16)}{-9(16)}\right)=(-1,1)$ है।

40. (a) नाभियाँ (6,4) व (–4,4) एवं $e=2$ व केन्द्र $\left(\frac{6-4}{2},4\right)=(1,4)$ है।

$\Rightarrow 6=1+ae \Rightarrow ae=5 \Rightarrow a=\frac{5}{2}$ व $b=\frac{5}{2}(\sqrt{3})$

अतः अभीष्ट समीकरण $\frac{(x-1)^2}{(25/4)}-\frac{(y-4)^2}{(75/4)}=1$

या $12x^2-4y^2-24x+32y-127=0$ होगा।

41. (a) समीकरण $(x-0)^2+(y-0)^2=a^2$ है।

42. (c) $\Delta\neq 0, h^2>ab$.

43. (d) $9x^2-18x+9-16y^2-32y-16=144$

$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$

$\Rightarrow$ नाभिलम्ब $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 9}{4}=\frac{9}{2}$.

44. (a) $S(1,1)$, नियता $2x+y=1$ तथा $e=\sqrt{3}$ है। अब माना चर बिन्दु (h,k) है, तब प्रश्नानुसार $\frac{\sqrt{(h-1)^2+(k-1)^2}}{\frac{2h+k-1}{\sqrt{5}}}=\sqrt{3}$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$5[(h-1)^2+(k-1)^2]=3(2h+k-1)^2$

सरल करने पर अभीष्ट बिन्दुपथ

$7x^2+12xy-2y^2-2x+4y-7=0$.

45. (c) $x^2-2x-4y^2+16y-40=0$

$\Rightarrow (x^2-2x)-4(y^2-4y)-40=0$

$\Rightarrow (x-1)^2-1-4[(y-2)^2-4]-40=0$

$\Rightarrow (x-1)^2-4(y-2)^2=25$

$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{25}-\frac{(y-2)^2}{25/4}=1$, जो कि एक अतिपरवलय है।

46. (c) अतिपरवलय का समीकरण है,

$x=8\sec\theta, y=8\tan\theta \Rightarrow \frac{x}{8}=\sec\theta, \frac{y}{8}=\tan\theta$

$\because \sec^2\theta-\tan^2\theta=1 \Rightarrow \frac{x^2}{8^2}-\frac{y^2}{8^2}=1$.

यहाँ, $a=8, b=8$

अब $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{8^2}{8^2}}=\sqrt{1+1} \Rightarrow e=\sqrt{2}$

अतः नियताओं के मध्य दूरी $=\frac{2a}{e}=\frac{2\times 8}{\sqrt{2}}=8\sqrt{2}$.

47. (b) परवलय का दिया गया समीकरण

$5x^2-4y^2+20x+8y=4$ है

$5(x+2)^2-4(y-1)^2=20 \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{5}=1$

$b^2=a^2(e^2-1)$ से $5=4(e^2-1)$

$\Rightarrow e^2=9/4 \Rightarrow e=3/2$.

48. (a) अतिपरवलय का दिया गया समीकरण

$9x^2-16y^2+72x-32y-16=0$

$\Rightarrow 9(x^2+8x)-16(y^2+2y)-16=0$

$\Rightarrow 9(x+4)^2-16(y+1)^2=144$

$\Rightarrow \frac{(x+4)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$

अतः नाभिलम्ब $=\frac{2b^2}{a}=2\times\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$.

49. (c) अतिपरवलय $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{5}=1$.

अतः स्पर्श बिन्दु $\equiv\left[\frac{-9(1)}{\sqrt{9-5}},\frac{-5}{\sqrt{9-5}}\right]\equiv\left[\frac{-9}{2},\frac{-5}{2}\right]$.

ट्रिकः चूँकि बिन्दु $\left(-\frac{9}{2},-\frac{5}{2}\right)$ दोनों समीकरणों को सन्तुष्ट करता है।

50. (b) यह स्पष्ट है।

51. (c) यदि $y=2x+\lambda$ दिये गये अतिपरवलय पर स्पर्शी है, तो $\lambda=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}=\pm\sqrt{(100)(4)-144}=\pm\sqrt{256}=\pm16$.

52. (a) माना स्पर्श बिन्दु (h, k) है, तो स्पर्शी $hx-4ky-5=0\equiv 3x-4y-5=0$ या $h=3, k=1$

अतः स्पर्श बिन्दु (3, 1) है।

53. (b) $\frac{x(a\sec\theta)}{a^2}-\frac{y(b\tan\theta)}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x}{a}\sec\theta-\frac{y}{b}\tan\theta=1$.

54. (a) अतिपरवलय $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$ पर स्पर्शी, जो कि $x+3y-2=0$ पर लम्ब है, $y=3x\pm\sqrt{9-3}=3x\pm\sqrt{6}$ होगी।

55. (c) माना स्पर्शी $y=3x+c$

$c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}=\pm\sqrt{3.9-2}=\pm5 \Rightarrow y=3x\pm5$.

56. (b) अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ है।

इस पर स्पर्शी $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ है एवं चूँकि स्पर्शी इस पर लम्ब है। अतः $y=\frac{-1}{m}x\pm\sqrt{\frac{a^2}{m^2}-b^2}$

m के विलोपन से, $x^2+y^2=a^2-b^2$.

57. (b) (h,k) पर स्पर्शी $\frac{x}{4/h}-\frac{y}{3/k}=1$ है।

$\therefore \frac{4}{h}=\frac{3}{k}\Rightarrow\frac{h}{k}=\frac{4}{3}$ .....(i)

एवं $3h^2-4k^2=12$ .....(ii)

चूँकि बिन्दु (h,k) इस पर है। अतः (i) व (ii) से, स्पर्शियाँ $y-x=\pm1$ है।

58. (a,b) बिन्दु (6, 2) से जाने वाली रेखा

$y-2=m(x-6)\Rightarrow y=mx+2-6m$

अब स्पर्शी के प्रतिबन्ध से, $(2-6m)^2=25m^2-16$

$\Rightarrow 36m^2+4-24m-25m^2+16=0$

$\Rightarrow 11m^2-24m+20=0$

स्पष्टतः इसके मूल m_1 व m_2 हैं।

अतः $m_1+m_2=\frac{24}{11}$ व $m_1m_2=\frac{20}{11}$.

59. (a) $4y^2=x^2-1$ के बिन्दु (1, 0) पर स्पर्शी $4(y\times0)=x\times1-1$ या $x-1=0$ या $x=1$ है।

60. (a) यदि $y=mx+c$ अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ को स्पर्श करती है, तो $c^2=a^2m^2-b^2$ यहाँ $c=6, a^2=100, b^2=49$

$\therefore 36=100m^2-49\Rightarrow100m^2=85\Rightarrow m=\sqrt{\frac{17}{20}}$.

61. (c) $x^2-y^2-8x+2y+11=0$ के बिन्दु (2,1) पर स्पर्शी $2x-y-4(x+2)+(y+1)+11=0$ या $x=2$ है।

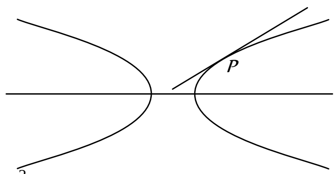
62. (a) रेखा $y=x-1$ .....(i)

व अतिपरवलय $3x^2-4y^2=12$ .....(ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से हम पाते हैं

$3x^2-4(x-1)^2=12$

$\Rightarrow 3x^2-4(x^2-2x+1)=12$



या $x^2-8x+16=0\Rightarrow x=4$ अतः $y=3$

अतः (4,3) रेखा एवं वक्र का स्पर्श बिन्दु होगा।

63. (b) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p\Rightarrow y=-\cot\alpha.\ x+p\operatorname{cosec}\alpha$

यह अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ की स्पर्शी है।

अत : $p^2\operatorname{cosec}^2\alpha=a^2\cot^2\alpha-b^2$

$\Rightarrow a^2\cos^2\alpha-b^2\sin^2\alpha=p^2$.

64. (c) $x=2\sec\phi$ के अवकलन से, $\frac{dx}{d\phi}=2\sec\phi\tan\phi$

$y=3\tan\phi$ के अवकलन से, $\frac{dy}{d\phi}=3\sec^2\phi$

अतः स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\phi}{dx/d\phi}=\frac{3\sec^2\phi}{2\sec\phi\tan\phi}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\operatorname{cosec}\phi$ .....(i)

किन्तु स्पर्श रेखा, $3x-y+4=0$ के समांतर है, अतः प्रवणता $m=3$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से, $\frac{3}{2}\operatorname{cosec}\phi=3$

$\Rightarrow \operatorname{cosec}\phi=2$, $\therefore\phi=30^\circ$.

65. (c) अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ के नियामक वृत्त का समीकरण, $x^2+y^2=a^2-b^2$

अतः नियामक वृत्त की त्रिज्या $=\sqrt{a^2-b^2}$.

66. (b) अतिपरवलय का समीकरण $xy=a$

बिन्दु $(x_1 y_1)$ पर स्पर्शी की प्रवणता

$m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}$, $\therefore\frac{xdy}{dx}+y=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x}$

बिन्दु $(a,1)$ पर, $m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,1)}=-\frac{1}{a}$.

67. (b) रेखा $y=mx+c$, वक्र $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ को स्पर्श करती है, यदि $c^2=a^2m^2-b^2$.

68. (d) सरल रेखा $y=mx+c$, अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ को स्पर्श करती है; यदि $c^2=a^2m^2-b^2$

यहाँ $m=-1$, $c=\sqrt{2}p$, $a^2=9, b^2=4$

इस प्रकार $2p^2=5$.

69. (d) अतिपरवलय के नियामक वृत्त का समीकरण $x^2+y^2=a^2-b^2$ हैं। यहाँ $a^2=16, b^2=4$

$\therefore$ अभीष्ट नियामक वृत्त $x^2+y^2=12$ है।

70. (a) दिये गये अतिपरवलय का समीकरण है,

$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$ .....(i)

$y-x+5=0$ के समान्तर स्पर्श रेखा का समीकरण है,

$y-x+\lambda=0 \Rightarrow y=x-\lambda$ .....(ii)

यदि समीकरण (ii) समीकरण (i) का स्पर्शी है, तब

$-\lambda=\pm\sqrt{3\times1-2}$ $(c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ से)

$-\lambda=\pm1 \Rightarrow \lambda=-1,+1$.

λ का मान समीकरण (ii) में रखने पर, $x-y-1=0$ और $x-y+1=0$ अभीष्ट स्पर्शी है।

71. (d) दिया गया दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ है, अतः व्यंजक $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1$ का मान $x=1, y=2$ के लिए धनात्मक है एवं $x=2, y=1$ के लिए ऋणात्मक है। अतः P, E के बाहर एवं Q, E के अन्दर स्थित है। व्यंजक x^2+y^2-9 का मान P, Q के लिए ऋणात्मक होगा। अतः P, C के अन्दर परन्तु E के बाहर है।

72. (a) $y=x\tan\theta$ जीवा का समीकरण होगा। जीवा व परवलय के प्रतिच्छेद बिन्दु (0, 0), $\left(\frac{4a}{\tan^2\theta},\frac{4a}{\tan\theta}\right)$ हैं।

अतः अभीष्ट जीवा की लम्बाई $=4a\sqrt{\left(\frac{1}{\tan^2\theta}\right)^2+\frac{1}{\tan^2\theta}}$

$=\frac{4a}{\tan\theta}\sqrt{\frac{1+\tan^2\theta}{\tan^2\theta}}=4a\,\text{cosec}^2\theta\cos\theta$.

73. (c) अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ के बिन्दु $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ पर अभिलम्ब का समीकरण $\frac{a^2x}{a\sec\theta}+\frac{b^2y}{b\tan\theta}=a^2+b^2$ होगा।

74. (a) दिये गये अतिपरवलय पर कोई भी अभिलम्ब

$\frac{ax}{\sec\theta}+\frac{by}{\tan\theta}=a^2+b^2$ .....(i)

है। परन्तु यह रेखा $lx+my-n=0$ .....(ii)

द्वारा दिया गया है अतः तुलना करने पर

$\sec\theta=\frac{a}{l}\left(\frac{-n}{a^2+b^2}\right)$ व $\tan\theta=\frac{b}{m}\left(\frac{-n}{a^2+b^2}\right)$

अतः θ का विलोपन करने पर, $\frac{a^2}{l^2}-\frac{b^2}{m^2}=\frac{(a^2+b^2)^2}{n^2}$.

75. (d) अभीष्ट अभिलम्ब $\frac{16x}{8}+\frac{9y}{3\sqrt{3}}=16+9$ अर्थात्

$2x+\sqrt{3}y=25$ है।

ट्रिक : दिये गये विकल्पों में यह केवल यही समीकरण है जिस पर बिन्दु $(8,3\sqrt{3})$ स्थित है।

76. (a) किसी बिन्दु (x_1,y_1) पर अतिपरवलय के अभिलम्ब का समीकरण $\frac{a^2(x-x_1)}{x_1}=\frac{b^2(y-y_1)}{-y_1}$

यहाँ $a^2=27, b^2=48$ व $(x_1,y_1)=(6,4)$

$\therefore \frac{27(x-6)}{6}=-\frac{48(y-4)}{4} \Rightarrow 3(x-6)=-8(y-4)$

$\Rightarrow 3x+8y=50$.

77. (b) प्रश्नानुसार, $S\equiv25x^2-16y^2-400=0$

अभीष्ट जीवा का समीकरण $S_1=T$ .....(i)

यहाँ $S_1=25(5)^2-16(3)^2-400$

$=625-144-400=81$

तथा $T\equiv25xx_1-16yy_1-400$, जहाँ $x_1=5, y_1=3$

$=25(x)(5)-16(y)(3)-400=125x-48y-400$

तथा समीकरण (i) से , अभीष्ट जीवा का समीकरण

$125x-48y-400=81$ या $125x-48y=481$ है।

78. (b) हम जानते हैं कि शांकव $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ के बिन्दु $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ पर अभिलम्ब का समीकरण है,

$ax\sec\theta+by\cot\theta=a^2+b^2$

या $y=\frac{-a}{b}\sin\theta\, x+\frac{a^2+b^2}{b\cot\theta}$

प्राप्त समीकरण की तुलना समीकरण $y=mx+\frac{25\sqrt{3}}{3}$ से करने पर और $a=4, b=3$ लेने पर, $\frac{a^2+b^2}{b\cot\theta}=\frac{25\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \tan\theta=\sqrt{3} \Rightarrow \theta=60^o$

और $m=-\frac{a}{b}\sin\theta=\frac{-4}{3}\sin60^o=\frac{-4}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-2}{\sqrt{3}}$.

79. (a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{2x}{16}-\frac{2y}{9}\frac{dy}{dx}=0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2x\times9}{16\times2y}=\frac{9}{16}\frac{x}{y} \Rightarrow \left(\frac{-dx}{dy}\right)_{(-4,0)}=\frac{-16}{9}\frac{y}{x}=0$

अतः अभिलम्ब का समीकरण $(y-0)=0(x+4) \Rightarrow y=0$.

80. (a) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ की उत्केन्द्रता $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$

संयुग्मी अतिपरवलय की उत्केन्द्रता, $e'=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}$

दिये गये अतिपरवलय को मानक रूप में लिखने पर,

$\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{1/3}=1 \Rightarrow a^2=1, b^2=\frac{1}{3}$

$\therefore e'=\sqrt{\frac{1+1/3}{1/3}}=\sqrt{4}=2$.

81. (a) माना अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ .....(i)

तब इसका संयुग्मी होगा $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ .....(ii)

अतिपरवलय (i) की उत्केन्द्रता e है। तब $b^2=a^2(e^2-1)$

या $\frac{1}{e^2}=\frac{a^2}{(a^2+b^2)}$ .....(iii)

इसी प्रकार अतिपरवलय (ii) की उत्केन्द्रता e' है। तब

$a^2=b^2(e'^2-1) \Rightarrow \frac{1}{e'^2}=\frac{b^2}{(a^2+b^2)}$ .....(iv)

(iii) व (iv) को जोड़ने पर,

$\frac{1}{(e')^2}+\frac{1}{e^2}=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=1.$

82. (b) दिया गया समीकरण $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{1}=1$ .....(i) है।

अतिपरवलय के किसी बिन्दु से अतिपरवलय की अनंतस्पर्शी पर डाले गए लम्बों की लम्बाईयों का गुणनफल =

$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{2\times 1}{2+1}=\frac{2}{3}$.

83. (b) $b=4 \Rightarrow 2ae=10 \Rightarrow 16=25-a^2 \Rightarrow a=3$

अतः अतिपरवलय $16x^2-9y^2=144$ है।

84. (b) यहाँ दिये गये दीर्घवृत्त के लिए $a=5, b=3, b^2=a^2(1-e^2)$

$\Rightarrow e=\frac{4}{5}$

अतः नाभियाँ (– 4, 0), (4, 0) हैं।

अतिपरवलय की उत्केन्द्रता = 2 है।

$a=\frac{ae}{e}=\frac{4}{2}=2$ व $b=2\sqrt{(4-1)}=2\sqrt{3}$

अतः अतिपरवलय $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ है।

85. (b) $xy=c^2$, $c^2=\frac{a^2}{2}$

नाभि के निर्देशांक

$(ae\cos 45°, ae\sin 45°)\equiv(c\sqrt{2}, c\sqrt{2}), \{\because e=\sqrt{2}, a=c\sqrt{2}\}$

इसी प्रकार दूसरी नाभि $(-c\sqrt{2}, -c\sqrt{2})$ होंगी।

नोट : विद्यार्थी इस प्रश्न को तथ्य मानकर याद रखें।

86. (d) चूँकि यह समकोणीय अतिपरवलय है, अतः इसकी उत्केन्द्रता $e=\sqrt{2}$ है।

87. (c) दोनों का गुणा करने पर, $x^2-y^2=a^2$, जो कि समकोणीय अतिपरवलय है चूँकि $a=b$ है।

88. (b) $2ae=16$, $e=\sqrt{2} \Rightarrow a=4\sqrt{2}$ व $b=4\sqrt{2}$

अतः समीकरण $\frac{x^2}{(4\sqrt{2})^2}-\frac{y^2}{(4\sqrt{2})^2}=1 \Rightarrow x^2-y^2=32$ है।

89. (c) अतिपरवलय $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{81}=\frac{1}{25}$

$a=\sqrt{\frac{144}{25}}, b=\sqrt{\frac{81}{25}}, e_1=\sqrt{1+\frac{81}{144}}=\sqrt{\frac{225}{144}}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$

अतः नाभि $=(ae_1, 0)=\left(\frac{12}{5}.\frac{5}{4}, 0\right)=(3,0)$

अतः दीर्घवृत्त की नाभि अर्थात् $=(4e, 0) \equiv (3,0)$

$\Rightarrow e=\frac{3}{4}$. अतः $b^2=16\left(1-\frac{9}{16}\right)=7$

90. (b) $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ पर स्पर्शी का समीकरण

$\frac{x}{(a/\sec\theta)}-\frac{y}{(b/\tan\theta)}=1$ या $\frac{a}{\sec\theta}=1, \frac{b}{\tan\theta}=1$

$\Rightarrow a=\sec\theta$, $b=\tan\theta$ या (a,b) , $x^2-y^2=1$ पर स्थित है।

91. (b) $xy=c^2$, समकोणीय अतिपरवलय $a^2=b^2$ है।

92. (c) चूँकि समकोणीय अतिपरवलय की उत्केन्द्रता $\sqrt{2}$ है।

93. (b) यहाँ $a=b$ अतः यह समकोणीय अतिपरवलय है इसलिए इसकी उत्केन्द्रता $e=\sqrt{2}$ होगी।

94. (b) माना अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ है। यहाँ अतिपरवलय के अनुप्रस्थ तथा संयुग्मी अक्ष बराबर हैं।

$\therefore$ $a=b$, $\therefore x^2-y^2=a^2$; जो कि समकोणीय अतिपरवलय है। अतः उत्केन्द्रता $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{2}$ है।

95. (c) चूँकि व्यापक द्विघात समीकरण समकोणीय अतिपरवलय निरूपित करेगा यदि $\Delta\neq 0, h^2>ab$ एवं x^2 का गुणांक + y^2 का गुणांक = 0। अतः दिया गया समीकरण एक समकोणीय अतिपरवलय प्रदर्शित करता है यदि $\lambda+5=0$ अर्थात् $\lambda=-5$.

96. (b) प्रश्नानुसार, अनुप्रस्थ अक्ष = संयुग्मी अक्ष

$e=\sqrt{2}, 2ae=16$; $\therefore a=4\sqrt{2}$

अतः अतिपरवलय का समीकरण $x^2-y^2=32$ है।

97. (d) स्पष्टतः $e=\frac{2}{3}$ तथा $e'=\frac{3}{2}$, $\therefore ee'=1$.

98. (d) $\because$ नियताओं के बीच की दूरी $=\frac{2a}{e}$.

$\because$ समकोणीय अतिपरवलय की उत्केन्द्रता $=\sqrt{2}$.

$\therefore$ नियताओं के बीच की दूरी $=\frac{2a}{\sqrt{2}}$.

दिया है, $\frac{2a}{\sqrt{2}}=10 \Rightarrow 2a=10\sqrt{2}$

अब, नाभियों के बीच की दूरी $=2ae=(10\sqrt{2})(\sqrt{2})=20$.

99. (b) आयताकार अतिपरवलय की उत्केन्द्रता $\sqrt{2}$ होती है।

100. (c) यह स्पष्ट है।

101. (c) दिया है अतिरवलय का समीकरण $x^2 - 3y^2 = 2x + 8$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 3y^2 = 8$

$\Rightarrow (x-1)^2 - 3y^2 = 9 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$

संयुग्मी अतिपरवलय का समीकरण है, $-\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$

और उत्केन्द्रता $(e) = \sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right)}$ है।

यहाँ, $a^2 = 9$, $b^2 = 3$; $\therefore$ $e = \sqrt{\frac{9+3}{3}} = 2$.

102. (b) यदि $y = mx + c$ अतिपरवलय की स्पर्शी है तब $c^2 = a^2m^2 - b^2$. यहाँ $\beta^2 = a^2\alpha^2 - b^2$ अतः बिन्दु $P(\alpha, \beta)$ का बिन्दुपथ $a^2x^2 - y^2 = b^2$ है, जो कि अतिपरवलय है।

103. (c) अतिपरवलय का समीकरण है, $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$

अब $e^2 = \frac{b^2}{a^2} + 1$ अर्थात् $e^2 = \frac{25}{16} + 1$

$\Rightarrow e^2 = \frac{41}{16} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{41}}{4}$.

104. (b) नाभियों के बीच की दूरी $= 8$

$\therefore$ $2ae = 8$ और $e = 2$; $\therefore$ $2a = 4$

$\Rightarrow a = 2 \Rightarrow a^2 = 4$; $\therefore b^2 = 4(4-1) = 12$

$\therefore$ अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ होगा।

105. (c) समीकरण $x^2 + y^2 = 5$ और $y^2 = 4x$ को हल करने पर,

$x^2 + 4x - 5 = 0$ अर्थात् $x = 1, -5$

$x = 1$ के लिए; $y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$x = -5$ के लिए ; $y^2 = -20$ (काल्पनिक मान)

$\therefore$ अभीष्ट बिन्दु (1, 2), (1, –2) हैं।

समीकरण $x^2 + y^2 = 5$ के बिन्दु (1, 2) पर m_1 के लिए

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\bigg|_{(1,2)} = -\frac{1}{2}$

इसी प्रकार $y^2 = 4x$ के लिए बिन्दु (1, 2) पर $m_2 = 1$ होगा।

$\therefore \tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{2} - 1}{1 - \frac{1}{2}}\right| = 3$.

106. (c) $\because \frac{2b^2}{a} = 9 \Rightarrow 2b^2 = 9a$ .....(i)

अब $b^2 = a^2(e^2 - 1) = \frac{9}{16}a^2 \Rightarrow a = \frac{4}{3}b$ .....(ii), ($\because e = \frac{5}{4}$)

(i) व (ii) से, $b = 6$, $a = 8$

अतः अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ है।

107. (e) पहले वक्र की प्रवणता $\left(\frac{dy}{dx}\right)_I = -\frac{4x}{py}$

दूसरे वक्र की प्रवणता $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{II} = \frac{x}{4y}$

लाम्बिक प्रतिच्छेदन के लिए $\left(-\frac{4x}{py}\right)\left(\frac{x}{4y}\right) = -1$

$\Rightarrow x^2 = py^2$

दिये गये वक्रों के समीकरणों को हल करने पर

$x = 3$, $y = 1$

$\therefore$ $p(1) = (3)^2 = 9 \Rightarrow p = 9$.

108. (a) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$

चूँकि स्पर्श रेखा अक्षों से समान कोण पर झुकी है अर्थात् $\tan\theta = 1 = m$.

$\therefore$ स्पर्श रेखा का समीकरण $y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

दिया गया समीकरण $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ अतिपरवलय है जो कि $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ प्रकार का है।

अब तुलना करने पर, $a^2 = 3$, $b^2 = 2$

$\therefore$ $y = 1.x + \sqrt{3 \times (1)^2 - 2} \Rightarrow y = x + 1$.

Critical Thinking Questions

1. (c) दिए गए समीकरण $2x^2 + 3y^2 - 8x - 18y + 35 - k = 0$ की तुलना $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ से करने पर,

$a = 2,\ b = 3,\ h = 0,\ g = -4,\ f = -9,\ c = 35 - k$

$\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$= 6(35 - k) + 0 - 162 - 48 - 0$

$\Delta = 210 - 6k - 210 = -6k$; $\Delta = 0$, यदि $k = 0$

अतः यह एक बिन्दु का समीकरण है, यदि $k = 0$.

2. (a) समीकरण $y = 5x^2 + 2x + 3$ में $y = 2\sin x$ रखने पर,

$\Rightarrow 2\sin x = 5x^2 + 2x + 3$

$\Rightarrow 5x^2 + 2x + 3 - 2\sin x = 0$ .....(i)

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20(3 - 2\sin x)}}{10}$.

यह स्पष्ट है कि प्रतिच्छेद बिन्दुओं की संख्या शून्य है। चूँकि $0 \le \sin x \le 1$ अतः सभी मानों के लिए यह अधिकल्पित है।

3. (a) $\frac{(y - 2at_2)}{(2at_2 - 2at_1)} = \frac{x - at_2^2}{(at_2^2 - at_1^2)}$ चूँकि नाभि अर्थात् $(a, 0)$ इस पर स्थित है। अतः,

$\frac{-2at_2}{2a(t_2 - t_1)} = \frac{a(1 - t_2^2)}{a(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)} \Rightarrow -t_2 = \frac{(1 - t_2^2)}{(t_2 + t_1)}$

$\Rightarrow -t_2^2 - t_1t_2 = 1 - t_2^2 \Rightarrow t_1t_2 = -1$.

4. (c) $\alpha = \frac{at^2 + a}{2}$, $\beta = \frac{2at + 0}{2} \Rightarrow 2\alpha = at^2 + a, at = \beta$

$\therefore$ $2\alpha = a.\frac{\beta^2}{a^2} + a$ या $2a\alpha = \beta^2 + a^2$

$\therefore$ बिन्दुपथ $y^2 = \frac{4a}{2}\left(x - \frac{a}{2}\right) = 4b(x - b), \left(b = \frac{a}{2}\right)$

$\therefore$ नियता $(x - b) + b = 0 \Rightarrow x = 0$ है।

5. (a) परवलय $y = x^2$ .....(i)

व सरल रेखा $y = 2x - 4$ .....(ii)

(i) व (ii) से, $x^2 - 2x + 4 = 0$

माना $f(x) = x^2 - 2x + 4$, $\therefore$ $f'(x) = 2x - 2$.

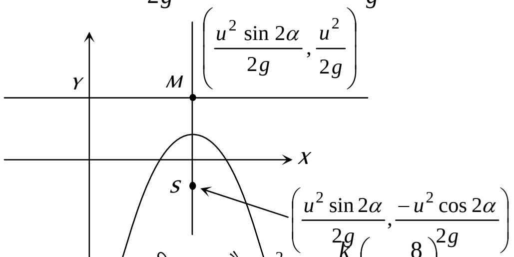
न्यूनतम दूरी के लिए $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

$y = x^2$ से $y = 1$

अतः रेखा से न्यूनतम दूरी पर स्थित बिन्दु (1, 1) है।

6. (d) चित्रानुसार, नाभिलम्ब की लम्बाई

$$2(SM) = 2 \times \frac{u^2}{2g}(1 + \cos 2\alpha) = \frac{2u^2 \cos^2 \alpha}{g}.$$



7. (c) परवलय का समीकरण है, $y^2 = 4.\frac{k}{4}\left(x - \frac{8}{k}\right)$

$y = Y, x - \frac{8}{k} = X$ रखने पर, $Y^2 = 4.\frac{k}{4}.X$

$\therefore$ नियता $X + \frac{k}{4} = 0$ अर्थात् $x - \frac{8}{k} + \frac{k}{4} = 0$ है।

किन्तु नियता $x - 1 = 0$ है अतः $\frac{8}{k} - \frac{k}{4} = 1 \Rightarrow k = -8, 4$.

8. (c) परवलय $y = x^2$ के बिन्दु (2,4) पर स्पर्श रेखा है,

$\frac{1}{2}(y + 4) = x.2 \Rightarrow 4x - y - 4 = 0$ यह वृत्त पर स्पर्शी भी है। अतः वृत्त का केन्द्र (2, 4) से जाने वाले अभिलम्ब पर स्थित होगा। जिसका समीकरण $x + 4y = \lambda$, जहाँ $2 + 16 = \lambda$

अतः $x + 4y = 18$ यह अभिलम्ब का समीकरण है जिस पर (h,k) स्थित है।

$\therefore h + 4k = 18$ .....(i)

पुनः (h,k) बिन्दुओं (2,4) व (0,1) से समदूरस्थ है।

अतः $(h-2)^2 + (k-4)^2 = h^2 + (k-1)^2$

$\Rightarrow 4h + 6k = 19$ .....(ii)

(i) व (ii) से, $h = \frac{-16}{5}, k = \frac{53}{10}$ अतः केन्द्र $= \left(\frac{-16}{5}, \frac{53}{10}\right)$.

9. (a,b) परवलय $y^2 = 2px$ की नाभि है, $(p/2, 0)$ .....(i)

अतः वृत्त की त्रिज्या जिसका केन्द्र $(p/2, 0)$ एवं जो नियता $x + (p/2) = 0$ को स्पर्श करता है, p है।

$\therefore$ वृत्त का समीकरण $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = p^2$ .....(ii)

(i) व (ii) को हल करने पर प्रतिच्छेद बिन्दु $\left(\frac{p}{2}, p\right), \left(\frac{p}{2}, -p\right)$ प्राप्त होते हैं।

10. (b) $y^2 = 4ax \Rightarrow 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = 4a \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \frac{2a}{y}$ .....(i)

वक्र $y = e^{-x/2a}$ लेने पर

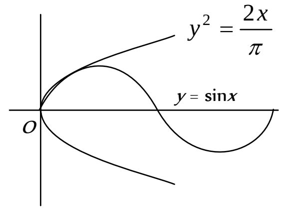
$\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = e^{-x/2a}\left(-\frac{1}{2a}\right) = -\frac{y}{2a}$ .....(ii)

दोनों वक्र एक दूसरे को समकोण पर काटते हैं, यदि

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = -1 \Rightarrow \left(-\frac{y}{2a}\right)\left(\frac{2a}{y}\right) = -1$.

11. (b) वक्र $y^2 = 2x/\pi$ और $y = \sin x$ एक दूसरे को (0,0) और $(\pi/2, 1)$ पर काटते हैं। माना कि वक्र पर स्पर्श रेखाओं की प्रवणता m_1 और m_2 है, तब $m_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\pi y}$ और

$m_2 = \frac{dy}{dx} = \cos x$



$(\pi/2, 1)$ पर $m_1 = \frac{1}{\pi}$,

$m_2 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

अतः $\tan\theta = \frac{(1/\pi) - 0}{1 + (1/\pi)(0)} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow \theta = \cot^{-1}\pi$.

12. (d) परवलय $y^2 = 8x$ पर कोई बिन्दु $(2t^2, 4t)$ हैं, जहाँ स्पर्शी $yt = x + 2t^2$ है।

इसे $xy = -1$, के साथ हल करने पर $y(yt - 2t^2) = -1$

या $ty^2 - 2t^2y + 1 = 0$.

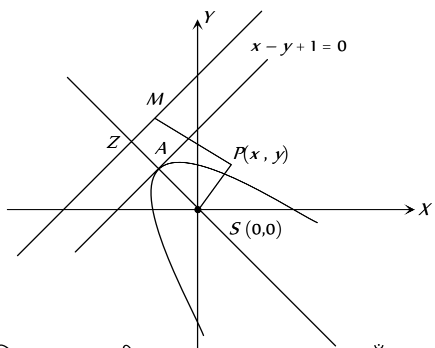
उभयनिष्ठ जीवा के लिए, इस समीकरण के मूल बराबर होंगे।

$\therefore 4t^4 - 4t = 0 \Rightarrow t = 0, 1$.

$\therefore$ उभयनिष्ठ जीवा $y = x + 2$ है। (जब $t = 0$, तब $x = 0$ जो $xy = -1$ को अनन्त पर स्पर्श करती है)

13. (c) माना नाभि $S(0,0)$ है तथा A परवलय का शीर्ष है। एक बिन्दु Z इस प्रकार लेते हैं कि $AS = AZ$. शीर्ष पर स्पर्शी का समीकरण $x - y + 1 = 0$ है।

$\therefore$ नियता, शीर्ष पर स्पर्शी के समान्तर होती है



$\therefore$ नियता का समीकरण $x - y + \lambda = 0$, जहाँ λ अचर है।

$\because$ SZ का मध्य बिन्दु A है, $\therefore$ $SZ = 2.SA$

$\Rightarrow \frac{|0 - 0 + \lambda|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2 \times \frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \Rightarrow |\lambda| = 2$

अर्थात् $\lambda = 2$

$\because$ नियता, II चतुर्थांश में है; $\therefore \lambda = 2$

अतः नियता का समीकरण $x - y + 2 = 0$ है

अब, माना परवलय पर कोई बिन्दु P है।

$\therefore SP = PM \Rightarrow SP^2 = PM^2$

$\Rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{|x - y + 2|}{\sqrt{2}}\right)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4y - 4 = 0.$

14. (d) दिये गये परवलय $y^2 = 4ax$ .....(i)

$x^2 = 4ay$ .....(ii)

समीकरण (ii) से y का मान (i) में रखने पर,

$\frac{x^4}{16a^2} = 4ax \Rightarrow x(x^3 - 64a^3) = 0 \Rightarrow x = 0, 4a$.

(ii) से, $y = 0, 4a$. माना $A \equiv (0,0); B \equiv (4a, 4a)$

चूँकि दी गयी रेखा $2bx + 3cy + 4d = 0$ है जो कि बिन्दु A तथा B से गुजरती है

$\therefore d = 0$ और $8ab + 12ac = 0 \Rightarrow 2b + 3c = 0$, ($\because a \neq 0$)

स्पष्टतः $d^2 + (2b + 3c)^2 = 0$.

15. (a) परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ .....(i)

उस जीवा का समीकरण जिसका मध्य बिन्दु (x_1, y_1) हैं,

$yy_1 - 2a(x + x_1) = y_1^2 - 4ax_1$

$\Rightarrow yy_1 - 2ax = y_1^2 - 2ax_1$ या $\frac{yy_1 - 2ax}{y_1^2 - 2ax_1} = 1$ .....(ii)

तब परवलय के शीर्ष तथा स्पर्शी के स्पर्श बिन्दु से जाने वाली स्पर्श रेखा का समीकरण $y^2 = 4ax\frac{yy_1 - 2ax}{y_1^2 - 2ax_1}$

$\Rightarrow y^2(y_1^2 - 2ax_1) = 4ax(yy_1 - 2ax)$

$\Rightarrow 8a^2x^2 - 4ay_1xy + (y_1^2 - 2ax_1)y^2 = 0$

यदि दोनों रेखायें परस्पर लम्बवत् हों तो

x^2 का गुणांक + y^2 का गुणांक = 0

तब, $8a^2 + (y_1^2 - 2ax_1) = 0$ या $y_1^2 - 2ax_1 + 8a^2 = 0$

$\therefore (x_1, y_1)$ का अभीष्ट बिन्दुपथ $y^2 - 2ax + 8a^2 = 0$ है।

16. (c) परवलय $y^2 = 8x \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$

परवलय $y^2 = 8x$ का शीर्ष $O \equiv (0,0)$

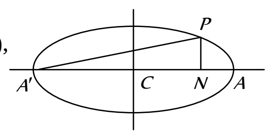
नाभिलम्ब जीवा के अन्तः बिन्दु $L(a, 2a); L'(a, -2a)$

$\Rightarrow L(2,4); L'(2,-4)$

वृत्त (0, 0), (2, 4) तथा (2, – 4) से होकर गुजरता है। माना वृत्त का मानक समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ को हल करने पर, अभीष्ट वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 - 10x = 0$

ट्रिकःविकल्प (c) बिन्दु (2, 4) तथा (2, – 4) से संतुष्ट होता है।

17. (a) माना दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ है।



$P = (a\cos\theta, b\sin\theta)$, A व

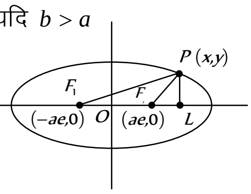
$PN = b\sin\theta$, $AN = a(1 - \cos\theta)$,

$A' \equiv (\pm a, 0)$, $N \equiv (a\cos\theta, 0)$,

$A'N = a(1 + \cos\theta)$

$\frac{(PN)^2}{AN\ A'N} = \frac{b^2\sin^2\theta}{a^2(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)} = \frac{b^2}{a^2}$.

18. (b) $b\sqrt{a^2 - b^2}$ यदि $a > b; a\sqrt{b^2 - a^2}$ यदि $b > a$



PF_1F_2 का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(F_1F_2) \times PL$

$= \frac{1}{2}(2ae) \times y = ae.\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

$A = eb\sqrt{a^2 - x^2}$

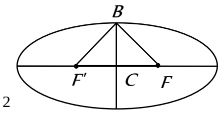
जो कि उच्चिष्ठ होगा यदि $x = 0$ हो। इस प्रकार A का उच्चिष्ठ मान eba है।

19. (a) यहाँ $2a = 10$ मी., $2ae = 8$ मी.; $\therefore e = \frac{4}{5}, a = 5$ मी.

$\therefore b^2 = a^2(1 - e^2) = 9 \Rightarrow b = 3$

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $= \pi ab = 15\pi$ वर्ग मी.

20. (b) चूँकि $\angle FBF' = \frac{\pi}{2}$ (दिया है)



$\therefore \angle FBC = \angle F'BC = \pi/4$

$CB = CF \Rightarrow b = ae \Rightarrow b^2 = a^2e^2$

$\Rightarrow a^2(1 - e^2) = a^2e^2$

$\Rightarrow 1 - e^2 = e^2 \Rightarrow 2e^2 = 1 \Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

21. (b) चूँकि नियता y-अक्ष के समान्तर है, अतः दीर्घवृत्त का अक्ष x-अक्ष के समान्तर है।

माना दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > b)$

$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{4}$.

एवं एक नियता $x = 4$ है

$\Rightarrow \frac{a}{e} = 4 \Rightarrow a = 4e = 4.\frac{1}{2} = 2$; $b^2 = \frac{3}{4}a^2 = \frac{3}{4}.4 = 3$

$\therefore$ अभीष्ट दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ या $3x^2 + 4y^2 = 12$ है।

22. (c) रेखा $y = -x\cot\alpha + \frac{p}{\sin\alpha}$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर स्पर्शी होगी यदि $\frac{p}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{b^2 + a^2\cot^2\alpha}$

या $p^2 = b^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha$.

23. (d) $\frac{ab - y^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ या $y^2\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2b^2}\right) = \frac{a - b}{a}$

या $y^2 = \left(\frac{ab^2}{a + b}\right)$ व $x^2 = \left(\frac{a^2b}{a + b}\right)$

$\Rightarrow (x, y) = \left(a\sqrt{\frac{b}{a + b}}, b\sqrt{\frac{a}{a + b}}\right)$

दीर्घवृत्त की स्पर्शी की प्रवणता $= \frac{-b^2x}{a^2y} = \frac{-b^2}{a^2}\sqrt{\frac{a}{b}}$

वृत्त की स्पर्शी की प्रवणता $= -\frac{x}{y} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left[\frac{-\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{b^2}{a^2}\sqrt{\frac{a}{b}}}{1 + \frac{b^2}{a^2}.\frac{a}{b}}\right]$ अर्थात्, $\theta = \tan^{-1}\left[\frac{a - b}{\sqrt{ab}}\right]$.

नोट : विद्यार्थी इस प्रश्न को सूत्र की तरह याद रखें।

24. (b,d) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4}$, $b^2 = \frac{1}{9}$

इसकी किसी स्पर्श रेखा का समीकरण $4xx' + 9yy' = 1$

$\therefore m = -\frac{4x'}{9y'} = \frac{8}{9} \Rightarrow x' = -2y'$

और $4x'^2 + 9y'^2 = 1 \Rightarrow 4x'^2 + 9\frac{x'^2}{4} = 1 \Rightarrow x' = \pm\frac{2}{5}$

जब $x' = \frac{2}{5}, y' = -\frac{1}{5}$ और जब $x' = -\frac{2}{5}, y' = \frac{1}{5}$

अतः बिन्दु $\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ व $\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ हैं।

25. (d) सममिति से, चतुर्भुज; समचतुर्भुज होगा। अतः समचतुर्भुज का क्षेत्रफल, प्रथम चतुर्थांश में स्पर्शी और अक्षों द्वारा बने समकोण त्रिभुज का चार गुना होगा। अब $ae = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow ae = 2$

प्रथम निर्देशांक्ष में नाभिलंब के सिरों $\left(2, \frac{5}{3}\right)$ पर स्पर्शी है

$\frac{2}{9}x + \frac{5}{3}\frac{y}{5} = 1$ अर्थात् $\frac{x}{9/2} + \frac{y}{3} = 1$

क्षेत्रफल $= 4.\frac{1}{2}.\frac{9}{2}.3 = 27$ वर्ग इकाई।

26. (b) $\frac{x\cos\theta}{3\sqrt{3}} + y\sin\theta = 1$.

अंतःखण्डों का योग $= 3\sqrt{3}\ \sec\theta + \text{cosec}\ \theta = f(\theta)$ (माना)

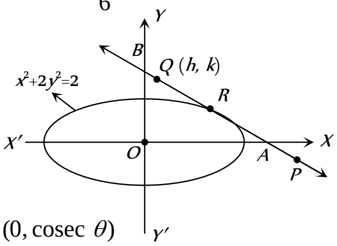
$f'(\theta) = \frac{3\sqrt{3}\sin^3\theta - \cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ पर $f(\theta)$ न्यूनतम है।

27. (c) माना स्पर्श बिन्दु

$R \equiv (\sqrt{2}\cos\theta, \sin\theta)$

स्पर्श रेखा *AB* का समीकरण

$\frac{x}{\sqrt{2}}\cos\theta + y\sin\theta = 1$



$\Rightarrow A \equiv (\sqrt{2}\sec\theta, 0); B \equiv (0, \text{cosec}\ \theta)$

माना *AB* का मध्य बिन्दु $Q\ (h, k)$ है

$\Rightarrow h = \frac{\sec\theta}{\sqrt{2}}, k = \frac{\text{cosec}\ \theta}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \sin\theta = \frac{1}{2k}$

$\Rightarrow \frac{1}{2h^2} + \frac{1}{4k^2} = 1$,

अतः अभीष्ट बिन्दुपथ $\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4y^2} = 1$ है।

ट्रिक : दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्श रेखाओं के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ अक्षों को $a^2y^2 + b^2x^2 = 4x^2y^2$ के बीच में काटता है।

अर्थात्, $\frac{a^2}{4x^2} + \frac{b^2}{4y^2} = 1$ या $\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4y^2} = 1$.

28. (a) बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब का समीकरण

$\frac{(x - x_1)a^2}{x_1} = \frac{(y - y_1)b^2}{y_1}$ है।

G पर, $y = 0 \Rightarrow x = CG = \frac{x_1(a^2 - b^2)}{a^2}$

g पर, $x = 0 \Rightarrow y = Cg = \frac{y_1(b^2 - a^2)}{b^2}$

$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2(CG)^2 + b^2(Cg)^2 = (a^2 - b^2)^2$.

29. (a) दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .....(i)

माना ध्रुव (h, k) है।

अब दीर्घवृत्त के सापेक्ष (h, k) की ध्रुवी का समीकरण

$$\frac{xh}{a^2} + \frac{yk}{b^2} = 1 \quad .....(ii)$$

यदि यह दीर्घवृत्त का अभिलम्ब है, तब

$ax\sec\theta - by\ \text{cosec}\ \theta = a^2 - b^2$ .....(iii)

(ii) तथा (iii) की तुलना करने पर,

$\frac{(h/a^2)}{a\sec\theta} = \frac{(k/b^2)}{-b\ \text{cosec}\ \theta} = \frac{1}{(a^2 - b^2)}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{a^3}{h(a^2 - b^2)}$ तथा $\sin\theta = \frac{b^3}{k(a^2 - b^2)}$

वर्ग करके जोड़ने पर, $1 = \frac{1}{(a^2 - b^2)^2}\left(\frac{a^6}{h^2} + \frac{b^6}{k^2}\right)$

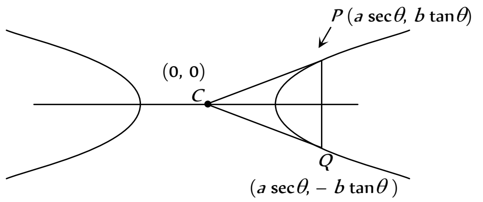
$\therefore$ अभीष्ट बिन्दुपथ है, $\frac{a^6}{x^2} + \frac{b^6}{y^2} = (a^2 - b^2)^2$.

30. (a) माना $y = m_1x$ व $y = m_2x$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के संयुग्मी व्यास हैं एवं माना $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ व $Q(a\cos\phi, b\sin\phi)$ इन व्यासों के सिरे हैं, तो $m_1m_2 = -\frac{b^2}{a^2}$

$\Rightarrow \frac{b\sin\theta - 0}{a\cos\theta - 0} \times \frac{b\sin\phi - 0}{a\cos\phi - 0} = -\frac{b^2}{a^2}$

$\Rightarrow \sin\theta\sin\phi = -\cos\theta\cos\phi \Rightarrow \cos(\theta - \phi) = 0 \Rightarrow \theta - \phi = \pm\frac{\pi}{2}$.

31. (d) माना $P(a\sec\theta, b\tan\theta); Q(a\sec\theta, -b\tan\theta)$ द्विगुणित कोटि के सिरे हैं तथा $C(0, 0)$ अतिपरवलय का केन्द्र है। अब $PQ = 2b\tan\theta$



$CQ = CP = \sqrt{a^2\sec^2\theta + b^2\tan^2\theta}$

चूँकि $CQ = CP = PQ$,

$\therefore 4b^2\tan^2\theta = a^2\sec^2\theta + b^2\tan^2\theta$

$\Rightarrow 3b^2\tan^2\theta = a^2\sec^2\theta \Rightarrow 3b^2\sin^2\theta = a^2$

$\Rightarrow 3a^2(e^2 - 1)\sin^2\theta = a^2 \Rightarrow 3(e^2 - 1)\sin^2\theta = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{3(e^2 - 1)} = \sin^2\theta < 1$, $(\because \sin^2\theta < 1)$

$\Rightarrow \frac{1}{e^2 - 1} < 3 \Rightarrow e^2 - 1 > \frac{1}{3} \Rightarrow e^2 > \frac{4}{3} \Rightarrow e > \frac{2}{\sqrt{3}}$.

32. (b) $\frac{1}{r} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cos\theta$ अथवा $\frac{8}{r} = 1 + 3\cos\theta$

जो कि $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ का रूप है।

$\because e = 3 > 0$, $\therefore$ दिया गया समीकरण अतिपरवलय है।

33. (a) माना (h, k) प्रतिच्छेद बिन्दु है। $SS_1 = T^2$ से,

$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} - 1\right) = \left[\frac{hx}{a^2} - \frac{ky}{b^2} - 1\right]^2$

$\Rightarrow x^2\left[\frac{h^2}{a^4} - \frac{k^2}{a^2b^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{h^2}{a^4}\right] - y^2\left[\frac{h^2}{a^2b^2} - \frac{k^2}{b^4} - \frac{1}{b^2} + \frac{k^2}{b^4}\right] + ... = 0$

हम जानते हैं, $m_1m_2 = \frac{x^2 \text{ का गुणांक}}{y^2 \text{ का गुणांक}}$

$$\Rightarrow m_1 m_2 = \frac{\frac{k^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{h^2}{a^2b^2}-\frac{1}{b^2}} = c^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{k^2+b^2}{h^2-a^2}\right) = c^2 \text{ या } (y^2+b^2) = c^2(x^2-a^2).$$

34. (a) $P\ (a\sec\theta, b\tan\theta)$ है।

P पर स्पर्शी $\frac{x\sec\theta}{a} - \frac{y\tan\theta}{b} = 1$ है।

यह $bx - ay = 0$ अर्थात्, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ को Q पर मिलती है।

$\therefore Q\left(\frac{a}{\sec\theta - \tan\theta}, \frac{-b}{\sec\theta-\tan\theta}\right)$ है।

यह $bx + ay = 0$ अर्थात् $\frac{x}{a} = -\frac{y}{b}$ को R पर मिलती है।

$\therefore R\left(\frac{a}{\sec\theta + \tan\theta}, \frac{-b}{\sec\theta+\tan\theta}\right)$ है।

$$\therefore CQ.CR = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{(\sec\theta-\tan\theta)}.\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{(\sec\theta+\tan\theta)}$$

$= a^2+b^2$, $\{\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1\}$.

35. (b) बिन्दु (h,k) की स्पर्श जीवा का समीकरण $xh - yk = 9$

$x = 9$ से तुलना करने पर $h = 1, k = 0$

बिन्दु (1, 0) पर स्पर्शी युग्म का समीकरण $SS_1 = T^2$ है

$\Rightarrow (x^2-y^2-9)(1^2-0^2-9) = (x-9)^2$

$\Rightarrow -8x^2+8y^2+72 = x^2-18x+81$

$\Rightarrow 9x^2-8y^2-18x+9=0$.

36. (d) दिया है, $P\ (a\sec\theta, b\tan\theta)$ और $Q(a\sec\phi, b\tan\phi)$

बिन्दु P पर स्पर्श रेखा का समीकरण है, $\frac{x\sec\theta}{a} - \frac{y\tan\theta}{b} = 1$

स्पर्श रेखा की प्रवणता $(m) = \frac{b}{\tan\theta}\times\frac{\sec\theta}{a} = \frac{b}{a}.\frac{1}{\sin\theta}$

अतः P पर अभिलम्ब का समीकरण है

$y - b\tan\theta = -\frac{a\sin\theta}{b}(x - a\sec\theta)$

या $by - b^2\tan\theta = -a\sin\theta\, x + a^2\tan\theta$

या $a\sin\theta\, x + by = (a^2+b^2)\tan\theta$ .....(i)

इसी प्रकार Q पर अभिलम्ब है,

$a\sin\phi\, x + by = (a^2+b^2)\tan\phi$ .....(ii)

(i) को $\sin\phi$ व (ii) को $\sin\theta$ से गुणा करने पर,

$a\sin\theta\sin\phi\, x + b\sin\phi y = (a^2+b^2)\tan\theta\sin\phi$

$a\sin\phi\sin\theta\, x + b\sin\theta y = (a^2+b^2)\tan\phi\sin\theta$

घटाने पर,

$by(\sin\phi - \sin\theta) = (a^2+b^2)(\tan\theta\sin\phi - \tan\phi\sin\theta)$

$$\therefore y = k = \frac{a^2+b^2}{b}.\frac{\tan\theta\sin\phi - \tan\phi\sin\theta}{\sin\phi-\sin\theta}$$

$\because \theta+\phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}-\theta$

$\Rightarrow \sin\phi = \cos\theta$ व $\tan\phi = \cot\theta$

$$\therefore y = k = \frac{a^2+b^2}{b}.\frac{\tan\theta\cos\theta - \cot\theta\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{b}\left(\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right) = -\frac{(a^2+b^2)}{b}.$$

37. (d) अतिपरवलय का समीकरण

$2x^2+5xy+2y^2+4x+5y=0$ तथा अनंतस्पर्शी का समीकरण है, $2x^2+5xy+2y^2+4x+5y+\lambda=0$ .....(i)

जो कि रेखायुग्म का समीकरण है। हम जानते हैं कि रेखायुग्म का मानक समीकरण $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ होता है। समीकरण (i) की मानक समीकरण से तुलना करने पर, $a=2, b=2,\ h=\frac{5}{2}, g=2, f=\frac{5}{2}$ तथा $c=\lambda$.

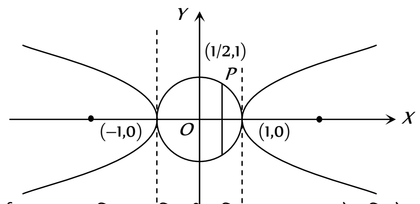
हम जानते हैं कि रेखायुग्म होने की शर्त है, $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$.

$\therefore\ 4\lambda+25-\frac{25}{2}-8-\frac{25}{4}\lambda=0 \Rightarrow -\frac{9\lambda}{4}+\frac{9}{2}=0$

$\Rightarrow \lambda = 2$, समीकरण (i) में λ का मान रखने पर,

$2x^2+5xy+2y^2+4x+5y+2=0$.

38. (a) वृत्त $x^2+y^2=1$ एवं अतिपरवलय $x^2-y^2=1$ को हल करने पर स्पर्श बिन्दु (1, 0) एवं (–1, 0) प्राप्त होते हैं। बिन्दु (1, 0) P के निकट है। अतः (1, 0) पर वृत्त एवं अतिपरवलय की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा $x=1$ होगी।



अतः दीर्घवृत्त पर स्थित किसी बिन्दु (x, y) के लिये (x, y) की नाभि से दूरी $= e[(x=1)$ की नियता की दूरी]

यदि $Q(x,y)$ दीर्घवृत्त पर कोई बिन्दु है, तब इसकी नाभि से दूरी $QP = \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2}$ और इसकी नियता $x=1$ से दूरी $|x-1|$ है।

दीर्घवृत्त की परिभाषानुसार, $QP = e|x-1|$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2} = \frac{1}{2}|x-1|$$

$$\Rightarrow 3x^2-2x+4y^2-8y+4=0 \text{ or } \frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}{1/9}+\frac{(y-1)^2}{1/12}=1.$$

39. (b) वृत्त का समीकरण $x^2+y^2=a^2$

समकोणिक अतिपरवलय $xy=c^2$ का प्राचलिक रूप हैं,

$x=ct,\ y=\frac{c}{t} \Rightarrow c^2t^2+\frac{c^2}{t^2}=a^2 \Rightarrow c^2t^4-a^2t^2+c^2=0$

अतः मूलों का गुणनफल है।

$\Rightarrow t_1t_2t_3t_4 = \frac{c^2}{c^2}=1$.

40. (a) $y^2=8x$ पर स्पर्शी $\Rightarrow y = mx+\frac{2}{m}$

$\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$ पर स्पर्शी $\Rightarrow y = mx\pm\sqrt{m^2-3}$

तुलना करने पर, $m=\pm 2$, अतः स्पर्शियाँ $2x\pm y+1=0$ हैं।

शांकव परिच्छेद

SET Self Evaluation Test -18

1. $x\cos\alpha - y\sin\alpha = a$ तथा $x\sin\alpha - y\cos\alpha = b$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं का बिन्दुपथ है [UPSEAT 2003]
   (a) दीर्घवृत्त (b) अतिपरवलय
   (c) परवलय (d) इनमें से कोई नहीं

2. उस परवलय के नाभिलम्ब की लम्बाई जिसकी नाभि (3, 3) तथा नियता $3x - 4y - 2 = 0$ है, है [UPSEAT 2001]
   (a) 2 (b) 1
   (c) 4 (d) इनमें से कोई नहीं

3. समीकरण $y^2 - 2x - 2y + 5 = 0$ प्रदर्शित करता है [Roorkee 1986, 95]
   (a) एक वृत्त जिसका केन्द्र (1, 1) है
   (b) एक परवलय जिसकी नाभि (1, 2) है
   (c) एक परवलय जिसकी नियता $x = \frac{3}{2}$ है
   (d) एक परवलय जिसकी नियता $x = -\frac{1}{2}$ है

4. परवलय $y^2 + 4y + 4x + 2 = 0$ की नियता का समीकरण है [IIT Screening 2001]
   (a) $x = -1$ (b) $x = 1$
   (c) $x = \frac{-3}{2}$ (d) $x = \frac{3}{2}$

5. प्राचलिक रूप से परिभाषित वक्र $x = t^2 + t + 1$, $y = t^2 - t + 1$ निम्नलिखित में से किसको निरूपित करता है [IIT 1999]
   (a) रेखाओं का युग्म (b) दीर्घवृत्त
   (c) परवलय (d) अतिपरवलय

6. परवलय $y^2 = 4x$ के नाभिलम्ब के सिरों पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु है [IIT 1994; Kurukshetra CEE 1998]
   (a) (1, 0) (b) (–1, 0)
   (c) (0, 1) (d) (0, –1)

7. यदि परवलय के बिन्दु P व Q पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं T पर काटती हैं, तो SP, ST व SQ हैं
   (a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
   (c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

8. परवलय $y^2 = 4ax$ व रेखा $x - y - a = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं पर खींची गयी स्पर्शियों के बीच का कोण होगा
   (a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{4}$
   (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

9. $y^2 = 12x$ के नाभिलम्ब के सिरों पर खींची गयी स्पर्श रेखाएँ मिलती हैं [RPET 2000]
   (a) नियता (b) शीर्ष
   (c) नाभि (d) इनमें से कोई नहीं

10. यदि परवलय के किसी बिन्दु P पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब अक्षो पर क्रमशः T तथा G पर मिलते हैं, तब [RPET 2001]
   (a) $ST \ne SG = SP$
   (b) $ST - SG \ne SP$
   (c) $ST = SG = SP$
   (d) $ST = SG \,.\, SP$

11. वृत्त $x^2 + y^2 = 2a^2$ तथा परवलय $y^2 = 8ax$ की दो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं का समीकरण है [AIEEE 2002]
   (a) $x = \pm(y + 2a)$ (b) $y = \pm(x + 2a)$
   (c) $x = \pm(y + a)$ (d) $y = \pm(x + a)$

12. $y^2 = x$ पर बिन्दु $(C, 0)$ से तीन अभिलम्ब खींचे जा सकते हैं, तो [IIT 1991]
   (a) $C = \frac{1}{4}$ (b) $C = \frac{1}{2}$
   (c) $C > \frac{1}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. यदि बिन्दु $(au^2, 2au)$ व $(av^2, 2av)$ परवलय $y^2 = 4ax$ की नाभीय जीवा के सिरें हैं, तब [MP PET 1998]
   (a) $uv - 1 = 0$ (b) $uv + 1 = 0$
   (c) $u + v = 0$ (d) $u - v = 0$

14. परवलय $y^2 = 4ax$ के किसी बिन्दु पर अधोलम्ब की लम्बाई होगी [UPSEAT 2000]
   (a) $\sqrt{2}a$ (b) $2\sqrt{2}$
   (c) $a/\sqrt{2}$ (d) $2a$

15. समीकरण $\frac{x^2}{1-r} - \frac{y^2}{1+r} = 1, r > 1$ प्रदर्शित करता है [IIT 1981]
   (a) एक दीर्घवृत्त (b) एक अतिपरवलय
   (c) एक वृत्त (d) एक काल्पनिक दीर्घवृत्त

16. वृत्त की त्रिज्या जिसका केन्द्र (0,3) व जो दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ की नाभि से गुजरता है, है [IIT 1995]
   (a) 3 (b) 3.5
   (c) 4 (d) $\sqrt{12}$

17. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के अक्ष तथा स्पर्शी के मध्य खींची गयी रेखा के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ होगा [UPSEAT 1999]

(a) $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1$ (b) $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=2$

(c) $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=3$ (d) $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=4$

18. यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{32}=1$ पर खींची गयी स्पर्शी जिसकी प्रवणता $-\frac{4}{3}$ है, क्रमशः दीर्घ व लघु अक्षों को A व B पर काटती है, तो ΔOAB का क्षेत्रफल होगा (O दीर्घवृत्त का केन्द्र है)

(a) 12 वर्ग इकाई (b) 48 वर्ग इकाई

(c) 64 वर्ग इकाई (d) 24 वर्ग इकाई

19. उस दीर्घवृत्त का समीकरण, जिसके शीर्ष (2, – 2), (2, 4) हैं तथा उत्केन्द्रता $\frac{1}{3}$ है, होगा [Karnataka CET 1999]

(a) $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{8}=1$ (b) $\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

(c) $\frac{(x+2)^2}{8}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$ (d) $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{8}=1$

20. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के केन्द्र से इसकी किसी स्पर्श रेखा पर डाले गये लम्ब के पाद का बिन्दुपथ है

(a) $(x^2+y^2)^2=b^2x^2+a^2y^2$

(b) $(x^2+y^2)^2=b^2x^2-a^2y^2$

(c) $(x^2+y^2)^2=a^2x^2-b^2y^2$

(d) $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$

21. दीर्घवृत्त $3x^2+2y^2=5$ पर बिन्दु (1, 2) से डाली गयी स्पर्शियों के बीच का कोण होगा [UPSEAT 2001]

(a) $\tan^{-1}(12/5)$ (b) $\tan^{-1}(6/\sqrt{5})$

(c) $\tan^{-1}(12/\sqrt{5})$ (d) $\tan^{-1}(6/5)$

22. c के उन मानों की संख्या, जिनके लिये सरल रेखा $y=4x+c$ वक्र $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ को स्पर्श करती है, है [IIT 1998]

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) अनन्त

23. यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के किसी बिन्दु P पर खींचे गये अभिलम्ब निर्देशांकों को G व g पर मिलते हैं, तो $PG : Pg =$

(a) $a:b$

(b) $a^2:b^2$

(c) $b^2:a^2$

(d) $b:a$

24. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ की जीवा का समीकरण, जो कि बिन्दु (2,1) से जाती है, तथा यह बिन्दु जीवा को दो बराबर बराबर भागों में विभाजित करता है, होगा [UPSEAT 1999]

(a) $x+y=2$ (b) $x+y=3$

(c) $x+2y=1$ (d) $x+2y=4$

25. अतिपरवलय $\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{\sin^2\alpha}=1$ के लिए 'α' का मान परिवर्तित करने पर निम्न में से क्या अचर रहेगा [IIT Screening 2003]

(a) शीर्षों के भुज (b) नाभियों के भुज

(c) उत्केन्द्रता (d) नियताएँ

26. शांकवों $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ तथा $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण है

(a) $x+y=a^2-b^2$ (b) $x+y=\sqrt{a^2-b^2}$

(c) $x-y=\sqrt{a^2-b^2}$ (d) $x+y=\sqrt{b^2-a^2}$

27. यदि वृत्त $x^2+y^2=a^2$ अतिपरवलय $xy=c^2$ को चार बिन्दुओं $P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2), R(x_3,y_3), S(x_4,y_4)$ पर काटता है, तो [IIT 1998]

(a) $x_1+x_2+x_3+x_4=0$

(b) $y_1+y_2+y_3+y_4=0$

(c) $x_1x_2x_3x_4=c^4$

(d) $y_1y_2y_3y_4=c^4$

28. अतिपरवलय $3x^2-2y^2+4x-6y=0$ की जीवाओं जो कि $y=2x$ के समान्तर हैं, के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ है [EAMCET 1989]

(a) $3x-4y=4$

(b) $3y-4x+4=0$

(c) $4x-4y=3$

(d) $3x-4y=2$

29. अतिपरवलय के किसी बिन्दु से इसकी अनन्तस्पर्शियों पर खींचे लम्बों का गुणनफल है [Karnataka CET 2000]

(a) $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ (b) $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$

(c) $\frac{ab}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ (d) $\frac{ab}{a^2+b^2}$

30. आयताकार अतिपरवलय $\int_0^1 e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)dx$ की उत्केन्द्रता है [UPSEAT 2002]

(a) 2 (b) $\sqrt{2}$

(c) 1 (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Answers and Solutions

(SET - 18)

1. (d) $x\cos\alpha - y\sin\alpha = a,\ x\sin\alpha - y\cos\alpha = b$

प्रतिच्छेद बिन्दु $h = \frac{a\cos\alpha - b\sin\alpha}{\cos 2\alpha}$, $k = \frac{a\sin\alpha - b\cos\alpha}{\cos 2\alpha}$ हैं

बिन्दु (h,k) का बिन्दुपथ $x^4 + y^4 - 2x^2y^2$

$= (a^2+b^2)(x^2+y^2) + 4abxy$ है जो कि दिए गए किसी भी वक्र का बिन्दुपथ नहीं है। अतः विकल्प (d) सही है।

2. (a) $\because$ परवलय की नाभि तथा नियता के मध्य दूरी अर्द्धनाभिलम्ब की लम्बाई के बराबर होती है।

अतः नाभिलम्ब की लम्बाई = 2 × (बिन्दु $(3,3)$ से रेखा $3x - 4y - 2 = 0$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई अर्थात्, $\left|\frac{9-12-2}{\sqrt{9+16}}\right| = 2.$

3. (c) समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$(y-1)^2 = 2(x-2)$.

स्पष्टतः, यह एक परवलय है जिसकी नाभि $\left(\frac{5}{2},1\right)$ एवं नियता $x = \frac{3}{2}$ है।

4. (d) दिया है $y^2 + 4y + 4 + 4x - 2 = 0$

या $(y+2)^2 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

माना $y + 2 = Y, \frac{1}{2} - x = X$ तब परवलय $Y^2 = 4X$ हैं

$\therefore$ नियता $X + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - x + 1 = 0\ \therefore\ x = \frac{3}{2}$.

5. (c) दिया है $x = t^2 + t + 1,\ y = t^2 - t + 1$

अतः, $x + y = 2(t^2+1)$ एवं $x - y = 2t$

$\therefore\ \frac{x+y}{2} = t^2 + 1 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + 1$

$\Rightarrow\ 2(x+y) = (x-y)^2 + 4$

$\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ से तुलना करने पर

$a = 1, h = -1, b = 1, g = -1, f = -1, c = 4$

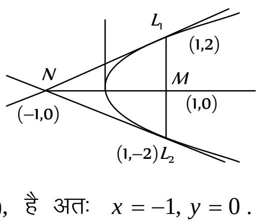
$\therefore abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$= 1.1.4 + 2(-1)(-1)(-1) - 1.1 - 1.1 - 1.4 = 4 - 2 - 2 - 4 \neq 0$

और $h^2 = ab$ अतः वक्र एक परवलय है।

6. (b) बिन्दु (x_1, y_1) पर परवलय $y^2 = 4ax$ की स्पर्शी $yy_1 = 2a(x + x_1)$ अतः $a = 1$

परवलय $y^2 = 4x$ के नाभिलम्ब के सिरों के निर्देशांक $L(1,2)$ व $L_1(1,-2)$ हैं।



L व L_1 पर स्पर्शियाँ $2y = 2(x+1)$ व $-2y = 2(x+1)$, है अतः $x = -1, y = 0$.

अतः प्रतिच्छेद बिन्दु $(-1, 0)$ है।

7. (b) माना $P(at_1^2, 2at_1)$ व $Q(at_2^2, 2at_2)$ परवलय $y^2 = 4ax$ पर दो बिन्दु हैं। इन बिन्दुओं P व Q पर स्पर्शियाँ बिन्दु $T\ \{at_1t_2, a(t_1+t_2)\}$ पर प्रतिच्छेद करती हैं।

अब $SP = \sqrt{(at_1^2 - a)^2 + (2at_1 - 0)^2} = a(t_1^2 + 1)$

$SQ = a(t_2^2 + 1)$

$ST = \sqrt{(at_1t_2 - a)^2 + (a(t_1+t_2) - 0)^2} = a\sqrt{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}$

$\therefore ST^2 = a^2(1+t_1^2)(1+t_2^2) = SP.SQ$

अतः SP, ST व SQ गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

8. (d) परवलय $y^2 = 4ax$ की नाभि $(a,0)$ है। रेखा $x - y - a = 0$ इस बिन्दु से गुजरती है। अतः यह परवलय की नाभीय जीवा है। अतः स्पर्शियाँ 90° पर प्रतिच्छेद करती हैं।

9. (a) नाभिलम्ब के सिरों के निर्देशांक $(a, 2a)$ तथा $(a, -2a)$ हैं।

दिये गये परवलय में ये बिन्दु $(3,6)$ तथा $(3,-6)$ हैं।

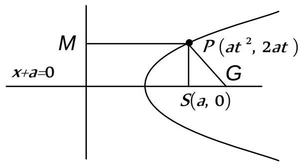
स्पर्श रेखा के समीकरण $6y = 6(x+3)$

तथा $-6y = 6(x+3)$ हैं $\Rightarrow x - y + 3 = 0$

तथा $x + y + 3 = 0$.

इन स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेदन $x = -6$ है, जो कि नियता का समीकरण है।

10. (c) माना $P(at^2, 2at)$ परवलय $y^2 = 4ax$, पर कोई बिन्दु है, तब $P(at^2, 2at)$ पर स्पर्शी तथा अभिलम्ब के समीकरण क्रमशः $ty = x + at^2$ तथा $y = -tx + 2at + at^3$ है।



$\because$ स्पर्शी तथा अभिलम्ब, अक्षों पर T तथा G पर मिलते है।

$\therefore$ T तथा G के निर्देशांक क्रमशः $(-at^2, 0)$ तथा $(2a + at^2, 0)$ हैं।

$SP = PM = a + at^2$, $SG = VG - VS = 2a + at^2 - a = a + at^2$

तथा $ST = VS + VT = a + at^2$. $\therefore$ $SP = SG = ST$.

11. (b) परवलय $y^2 = 8ax$ की किसी स्पर्शी का समीकरण $y = mx + \frac{2a}{m}$ हैं।

यह स्पर्शी वृत्त $x^2 + y^2 = 2a^2$ की भी स्पर्शी है।

$\therefore$ लम्ब की लम्बाईयाँ = r

$\Rightarrow \frac{2a/m}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{2}a \Rightarrow \frac{4a^2}{m^2(m^2+1)} = 2a^2$

$\Rightarrow m^2(m^2+1) = 2 \Rightarrow m^4 + m^2 - 2 = 0$

$\Rightarrow\ (m^2 - 1)(m^2 + 2) = 0 \Rightarrow m^2 = 1$ ग्राह्य है,

$\therefore m = \pm 1$

$\therefore$ उभयनिष्ठ स्पर्शी का समीकरण $y = \pm(x + 2a)$ है।

12. (c) परवलय $y^2 = 4ax$ का प्रवणता रूप अभिलम्ब $y = mx - 2am - am^3$ है।

दिये गये वक्र $y^2 = x$ के लिए $4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

अतः अभिलम्ब का समीकरण $y = mx - \frac{1}{2}m - \frac{1}{4}m^3$ है।

चूँकि अभिलम्ब का समीकरण $(C, 0)$ से गुजरता है, अतः

$0 = mC - \frac{1}{2}m - \frac{1}{4}m^3 \Rightarrow m = 0$

या $C - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 2\sqrt{C - \frac{1}{2}}$

तीन अभिलम्बों के लिए m का मान वास्तविक होना चाहिए।

अतः $C > \frac{1}{2}$.

13. (b) परवलय $y^2 = 4ax$ के लिए नाभीय जीवा, दो बिन्दुओं $(au^2, 2au)$ व $(av^2, 2av)$ से होकर जाने वाली रेखा है।

$\Rightarrow y - 2au = \frac{2av - 2au}{av^2 - au^2}(x - au^2)$

$\Rightarrow y - 2au = \frac{2a(v-u)}{a(v-u)(v+u)}(x - au^2)$

$\Rightarrow y - 2au = \frac{2}{(v+u)}(x - au^2)$

यदि यह नाभीय जीवा है, तो नाभि $(a, 0)$ से गुजरेगी।

$\Rightarrow 0 - 2au = \frac{2}{v+u}(a - au^2) \Rightarrow -uv - u^2 = 1 - u^2$, $\therefore uv + 1 = 0$.

14. (d) माना बिन्दु P के निर्देशांक $(am^2, -2am)$ हैं।

तब बिन्दु P पर अभिलम्ब का समीकरण है,

$y = mx - 2am - am^3$

यह अभिलम्ब x-अक्ष को बिन्दु N पर काटता है

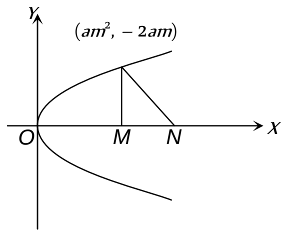
$y = 0$ रखने पर,

$0 = mx - 2am - am^3$

या $mx = am + am^3$

या $x = \frac{m(2a + am^2)}{m}$

या $x = 2a + am^2$



इसलिए $ON = 2a + am^2$ तथा $OM = am^2$

अधोलम्ब की लम्बाई $= MN$

$\therefore MN = ON - OM = 2a + am^2 - am^2 = 2a$.

15. (d) $\frac{x^2}{1-r} - \frac{y^2}{1+r} = 1$, जहाँ $r > 1$

या $\frac{x^2}{-p} - \frac{y^2}{q} = 1$, $1 - r = -p$ (माना) या $\frac{x^2}{-p} + \frac{y^2}{-q} = 1$

काल्पनिक दीर्घवृत्त, जिसके दीर्घ व लघु अक्ष काल्पनिक हैं।

16. (c) नाभियों के निर्देशांक $(\pm ae, 0)$ हैं। यहाँ $a = 4, b = 3$

$\therefore b^2 = a^2(1 - e^2) \Rightarrow 9 = 16(1 - e^2) \Rightarrow \frac{9}{16} = 1 - e^2$

$\Rightarrow e = \pm\sqrt{\frac{7}{4}}$; $\therefore$ बिन्दु $(\pm\sqrt{7}, 0)$ होगा।

$\therefore$ त्रिज्या $= \sqrt{(\sqrt{7} - 0)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{7 + 9} = \sqrt{16} = 4$.

17. (d) अक्षों के मध्य स्थित रेखा PQ का मध्य बिन्दु $R(x_1, y_1)$ तब P तथा Q के निर्देशांक क्रमशः $(2x_1, 0)$ तथा $(0, 2y_1)$ होंगे।

$\therefore$ रेखा PQ का समीकरण $\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1$

$\Rightarrow y = -\left(\frac{y_1}{x_1}\right)x + 2y_1$ है।

यदि यह रेखा दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, को स्पर्श करती है।

तब $c^2 = a^2m^2 + b^2$

अर्थात्, $(2y_1)^2 = a^2\left(\frac{-y_1}{x_1}\right)^2 + b^2$ या $4y_1^2 = \left\{\frac{a^2y_1^2}{x_1^2}\right\} + b^2$

या $4 = \left(\frac{a^2}{x_1^2}\right) + \left(\frac{b^2}{y_1^2}\right)$ या $\left(\frac{a^2}{x_1^2}\right) + \left(\frac{b^2}{y_1^2}\right) = 4$

$\therefore$ बिन्दु (x_1, y_1) का अभीष्ट बिन्दुपथ $\left(\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2}\right) = 4$ है।

18. (d) माना $P(x_1, y_1)$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{32} = 1$ पर कोई बिन्दु है।

$\Rightarrow \frac{x_1^2}{18} + \frac{y_1^2}{32} = 1$

बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $\frac{xx_1}{18} + \frac{yy_1}{32} = 1$

है। दिया गया है कि यह अक्षों को $A\left(\frac{18}{x_1}, 0\right)$ व $B\left(0, \frac{32}{y_1}\right)$ पर मिलती है।

यह दिया है कि (x_1, y_1) पर स्पर्शी की प्रवणता $-\frac{3}{4}$ है।

अतः $-\frac{x_1}{18} \cdot \frac{32}{y_1} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x_1}{3} = \frac{y_1}{4} = k$ (माना)

$\therefore x_1 = 3k, y_1 = 4k$

x_1, y_1 का मान (i) में रखने पर $k^2 = 1$.

अब त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}\frac{18}{x_1} \cdot \frac{32}{y_1} = \frac{1}{2}\frac{(18)(32)}{(x_1y_1)}$

$= \frac{1}{2}\frac{(18)(32)}{(3k)(4k)} = \frac{24}{k^2} = 24$ वर्ग इकाई, $(\because k^2 = 1)$.

19. (b) दीर्घवृत्त के शीर्षों (A तथा A') के निर्देशांक $\equiv (2, -2)$ तथा $(2, 4)$, उत्केन्द्रता $(e) = \frac{1}{3}$ हम जानते हैं कि AA' y-अक्ष के समान्तर रेखा के अनुदिश है। अतः AA' का मध्य बिन्दु केन्द्र $(C) = (h, k) = (2, 1)$ तथा $AA'(2b) = 6$ या $b = 3$ हम जानते हैं कि दीर्घवृत्त का मानक समीकरण

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, $a^2 = b^2(1 - e^2) = 9\left(1 - \frac{1}{9}\right) = 8.$

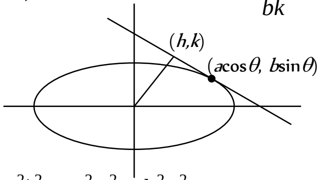
अतः दीर्घवृत्त का समीकरण है $\frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$

20. (d) $\frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} = 1$, ढाल या प्रवणता $\equiv -\frac{b\cot\theta}{a} \times \frac{k}{h} = -1$

$\frac{h\cos\theta}{a} + \frac{k\sin\theta}{b} = 1$

चूँकि $\text{cosec}\,\theta = \sqrt{1+\frac{a^2h^2}{k^2b^2}} \Rightarrow \frac{h^2}{kb}+\frac{k}{b} = \text{cosec}\,\theta$

$\Rightarrow (h^2+k^2) = bk\,\text{cosec}\,\theta = \frac{bk(\sqrt{k^2b^2+a^2h^2})}{bk}$



$\Rightarrow (x^2+y^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2$.

21. (c) बिन्दु (1, 2) से दीर्घवृत्त $3x^2+2y^2=5$ पर खींची गयी स्पर्शियों का संयुक्त समीकरण
$(3x^2+2y^2-5)(3+8-5) = (3x+4y-5)^2$ [$SS = T$ से]
$\Rightarrow 9x^2-24xy-4y^2+.....=0$ है
इस समीकरण की दोनों रेखाओं के बीच का कोण है,
$\tan\theta = \frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$, जहाँ $a=9, h=-12, b=-4$
$\Rightarrow \tan\theta = 12\sqrt{5} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(12/\sqrt{5})$.

22. (c) रेखा $y=4x+c$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ को स्पर्श करती है
$\therefore \frac{x^2}{4}+(4x+c)^2-1=0 \Rightarrow 65x^2+32cx+4c^2-4=0$
समान मूल के लिए $\Delta=0$
$\therefore 64c^2-4.65.4(c^2-1)=0 \Rightarrow 4c^2-65c^2+65=0$
$\Rightarrow c^2=\frac{65}{61} \Rightarrow c=\pm\sqrt{\frac{65}{61}}$.
अतः यहाँ पर c के दो मान हैं।

23. (c) माना $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ पर कोई बिन्दु है, तो P पर अभिलम्ब
$ax\sec\theta - by\,\text{cosec}\,\theta = a^2-b^2$ होगा।
यह निर्देशांक्षों को $G\left(\frac{a^2-b^2}{a}\cos\theta, 0\right)$
व $g\left(0, -\frac{a^2-b^2}{b}\sin\theta\right)$ पर काटता है।
$\Rightarrow PG^2 = \left(a\cos\theta-\frac{a^2-b^2}{a}\cos\theta\right)^2+b^2\sin^2\theta$
$=\frac{b^2}{a^2}(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)$
तथा $Pg^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)$, $\therefore PG:Pg=b^2:a^2$.

24. (d) माना अभीष्ट जीवा, दीर्घवृत्त P तथा Q पर मिलती है, तथा जिनके निर्देशांक (x_1,y_1) तथा (x_2,y_2) है।
$\therefore$ बिन्दु (2, 1) जीवा PQ का मध्य बिन्दु हैं।
$\therefore\ 2=\frac{1}{2}(x_1+x_2) \Rightarrow x_1+x_2=4$
तथा $1=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$ या $y_1+y_2=2$
पुनः बिन्दु (x_1,y_1) तथा (x_2,y_2) दीर्घवृत्त पर स्थित है
$\therefore\ \frac{x_1^2}{36}+\frac{y_1^2}{9}=1$ तथा $\frac{x_2^2}{36}+\frac{y_2^2}{9}=1$
घटाने पर, $\frac{x_2^2-x_1^2}{36}+\frac{y_2^2-y_1^2}{9}=0$
या $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-(x_2+x_1)}{4(y_2+y_1)}=\frac{-4}{4\times 2}=-\frac{1}{2}$
$\therefore$ जीवा PQ की प्रवणता $=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{1}{2}$
अतः जीवा PQ का समीकरण होगा $y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$
$\Rightarrow x+2y=4$.

25. (b) $ae=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1$.

26. (b) शांकव की स्पर्शियों की प्रवणतायें
$m_1=\frac{bx_1}{a\sqrt{x_1^2-a^2}}$ व $m_2=\frac{ax_1}{b\sqrt{x_1^2+b^2}}$
परन्तु स्पर्शियाँ एक ही हैं, अतः $m_1=m_2$
$\Rightarrow \frac{bx_1}{a\sqrt{x_1^2-a^2}}=\frac{ax_1}{b\sqrt{x_1^2+b^2}}$
इससे हमें x_1 का मान मिलेगा और फिर y_1 का। इन मानों को $y-y_1=m_1(x-x_1)$ में रखने पर अभीष्ट समीकरण प्राप्त होता है।

27. (a,b,c,d) हल करने पर, $x^2+\frac{c^4}{x^2}=a^2 \Rightarrow x^4-a^2x^2+c^4=0$
$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4=0;\ x_1x_2x_3x_4=c^4$ .....(i)
चूँकि दोनों वक्र x और y में सममित (symmetrical) हैं
$\therefore y_1+y_2+y_3+y_4=0;\ y_1y_2y_3y_4=c^4$ .....(ii)
नोट : परिणाम (ii) x को विलोपित करके भी प्राप्त कर सकते हैं।

28. (a) माना $P(x_1,y_1)$ अतिपरवलय $3x^2-2y^2+4x-6y=0$ की जीवा का मध्य बिन्दु है। जीवा का समीकरण $T=S_1$ है।
अर्थात् $3xx_1-2yy_1+2(x+x_1)-3(y+y_1)=0$
$\Rightarrow (3x_1+2)x-(2y_1+3)y+(2x_1-3y_1)=0$
यदि यह जीवा $y=2x$ के समान्तर है, तो
$m_1=m_2 \Rightarrow -\frac{3x_1+2}{-(2y_1+3)}=2 \Rightarrow 3x_1-4y_1=4$
अतः मध्य बिन्दुओं (x_1,y_1) का बिन्दुपथ $3x-4y=4$ है।

29. (a) अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ है। माना (x_1,y_1) अतिपरवलय पर कोई बिन्दु है।
$\therefore \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1 \Rightarrow b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2$.
दिये गये अतिपरवलय की अनन्त स्पर्शियाँ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ हैं
$\therefore$ बिन्दु (x_1,y_1) से रेखायुग्म $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ पर डाले गये लम्बों का गुणनफल $=\frac{|Ax_1^2+2Hx_1y_1+By_1^2|}{\sqrt{(A-B)^2+4H^2}}$
$=\frac{b^2x_1^2-a^2y_1^2}{\sqrt{(b^2+a^2)^2}}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

30. (b) आयताकार अतिपरवलय की उत्केन्द्रता $\sqrt{2}$ होती है।

* * *