Chapter

19

सदिश बीजगणित

प्रस्तावना (Introduction)

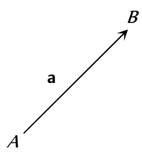
सदिश एक अत्यंत महत्वपूर्ण गणितीय पद्धति को व्यक्त करता है, जिसका उपयोग ज्यामिति, अभियांत्रिकी, भौतिकी तथा गणित के अन्य विभागों से सम्बन्धित समस्याओं के हल करने में होता है।

अदिश तथा सदिश राशियाँ % भौतिक राशियाँ दो श्रेणियों में विभाजित की जाती हैं – अदिश राशियाँ एवं सदिश राशियाँ। वे राशियाँ, जिनका केवल परिमाण होता है और जिनका सम्बन्ध त्रिविम में स्थित किसी स्थिर दिशा से नहीं होता, अदिश राशियाँ कहलाती हैं। द्रव्यमान, आयतन, घनत्व, कार्य, तापमान इत्यादि अदिश राशियों के उदाहरण हैं। किसी अदिश राशि को उपयुक्त इकाई के साथ किसी वास्तविक संख्या द्वारा व्यक्त किया जाता है।

दूसरे प्रकार की राशियाँ वे हैं, जिनमें परिमाण एवं दिशा दोनों होते हैं। ये राशियाँ सदिश कहलाती हैं। विस्थापन, वेग, त्वरण, संवेग, भार, बल इत्यादि सदिश राशियों के उदाहरण हैं।

सदिश का निरूपण (Representation of vectors)

ज्यामितीय रूप में सदिश को एक रेखा-खण्ड द्वारा व्यक्त किया जाता है। उदाहरणतः $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. यहाँ A प्रारम्भिक बिन्दु तथा B अन्तिम बिन्दु कहलाता है। $\mathbf{a}$ के परिमाण या मापांक को $|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{AB}| = AB$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।



सदिशों के प्रकार (Types of vector)

(1) **शून्य सदिश** (Zero or null vector) : एक सदिश, जिसका परिमाण शून्य है, शून्य सदिश कहलाता है तथा इसे $\vec{O}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

(2) **इकाई सदिश** (Unit vector) : एक सदिश, जिसका परिमाण इकाई हो, इकाई सदिश कहलाता है। किसी सदिश $\mathbf{a}$ की दिशा में इकाई सदिश को $\hat{\mathbf{a}}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है तथा इसे a कैप पढ़ते हैं। अतः $|\hat{\mathbf{a}}| = 1$.

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\text{सदिश } a}{a \text{ का परिमाण}}.$$

(3) **समदिश एवं असमदिश सदिश** (Like and unlike vectors) : सदिश समदिश कहलाते हैं, यदि उनकी अभिदिशाएँ समान हों तथा असमदिश, जब उनकी अभिदिशाएँ विपरीत हों।

(4) **समरेखीय या समान्तर सदिश** (Collinear or parallel vectors): सदिश, जिनके समान अथवा समान्तर आधार हों, समरेखीय सदिश कहलाते हैं।

(5) **सह-प्रारम्भिक सदिश** (Co-initial vectors) : सदिश, जिनके प्रारम्भिक बिन्दु समान हों, **सह-प्रारम्भिक सदिश** कहलाते हैं।

(6) **समतलीय सदिश** (Co-planar vectors) : सदिशों का एक निकाय समतलीय कहलाता है, यदि उनके आधार समान तल के समान्तर हों।

दो सदिश, जिनके प्रारम्भिक बिन्दु समान हों, सर्वथा समतलीय होते हैं किन्तु ऐसे तीन या अधिक सदिश समतलीय हो भी सकते हैं और नहीं भी।

(7) **संलग्न सदिश** (Coterminous vectors) : सदिश, जिनके सिरा बिन्दु समान हैं, **संलग्न सदिश** कहलाते हैं।

(8) **ऋण सदिश** (Negative of a vector) : सदिश, जिसका परिमाण सदिश $\mathbf{a}$ के बराबर हो, किन्तु दिशा विपरीत हो, $\mathbf{a}$ का ऋण सदिश कहलाता है तथा $-\mathbf{a}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। अतः यदि $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a}$, तो $\overrightarrow{QP} = -\mathbf{a}$.

(9) **व्युत्क्रम सदिश** (Reciprocal of a vector) : एक सदिश, जिसकी दिशा दिए गए सदिश $\mathbf{a}$ की दिशा के समान हो, किन्तु परिमाण दिए गए सदिश के परिमाण के व्युत्क्रम के बराबर हो, $\mathbf{a}$ का व्युत्क्रम सदिश कहलाता है तथा इसे $\mathbf{a}^{-1}$ द्वारा व्यक्त करते हैं। अतः यदि $|\mathbf{a}| = a, |\mathbf{a}^{-1}| = \frac{1}{a}$

(10) **स्थानीकृत एवं मुक्त सदिश** (Localized and free vectors) : एक सदिश, जो किसी दिए गए सदिश के समान्तर खींचा गया हो तथा त्रिविम में एक विशिष्ट बिन्दु से गुजरता हो, **स्थानीकृत सदिश** कहलाता है। उदाहरणतः किसी दृढ़ पिंड पर लगा बल एक स्थानीकृत सदिश है, क्योंकि इसका प्रभाव बल की क्रिया-रेखा पर निर्भर करता है। यदि किसी सदिश का मान केवल इसकी लम्बाई तथा दिशा पर निर्भर होता है तथा त्रिविम में इसकी स्थिति से स्वतंत्र है, मुक्त सदिश कहलाता है।

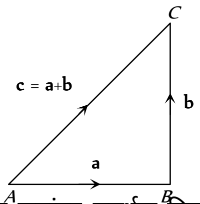
(11) **स्थिति सदिश** (Position vectors) : सदिश $\overrightarrow{OA}$, जो एक स्थिर बिन्दु O (मूल-बिन्दु) के सापेक्ष बिन्दु A की स्थिति को व्यक्त करता है, बिन्दु A का स्थिति सदिश कहलाता है। यदि बिन्दु A का कार्तीय निर्देशांक (x, y, z) हो, तो $\overrightarrow{OA} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

(12) **सदिशों की समानता** (Equality of vectors) : दो सदिश $\mathbf{a}$ एवं $\mathbf{b}$ समान कहलाएँगे, यदि (i) $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ (ii) उनके आधार समान अथवा समान्तर हों (iii) समान अभिदिशा हों।

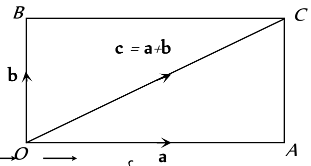
सदिशों के गुणधर्म (Properties of vectors)

(1) **सदिशों का योग** (Addition of vectors)

(i) **सदिश योग का त्रिभुज-नियमः** ΔABC में, $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$ तथा $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}$ तो $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ अर्थात् $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$.



(ii) **सदिश योग का समांतर चतुर्भुज-नियमः** समान्तर चतुर्भुज $OACB$ में, यदि $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a},\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ तथा $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$



तो $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ अर्थात् $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$, जहाँ OC, समान्तर चतुर्भुज $OABC$ का एक विकर्ण है।

(iii) **घटक रूप में योग :** यदि सदिश $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ तथा $\mathbf{k}$ के पदों में परिभाषित हों, अर्थात् यदि $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$ हों, तो उनका योग

$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1+b_1)\mathbf{i}+(a_2+b_2)\mathbf{j}+(a_3+b_3)\mathbf{k}$ द्वारा परिभाषित होगा।

सदिश योग के गुणधर्म : सदिश योग के निम्नलिखित गुणधर्म हैं।

(a) **द्विधारी संक्रिया :** दो सदिशों का योग सर्वथा एक सदिश होता है।

(b) **क्रमविनिमेयता :** किन्हीं दो सदिशों $\mathbf{a}$ एवं $\mathbf{b}$ के लिए $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

(c) **साहचर्यता :** किन्हीं तीन सदिशों $\mathbf{a},\mathbf{b}$ एवं $\mathbf{c}$ के लिए, $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$

(d) **तत्समकता :** शून्य सदिश योज्य तत्समक सदिश कहलाता है। किसी सदिश $\mathbf{a}$ के लिए, $\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}=\mathbf{a}+\mathbf{0}$

(e) **योज्य प्रतिलोम :** किसी सदिश $\mathbf{a}$ के लिए इसके ऋणात्मक सदिश $-\mathbf{a}$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=(-\mathbf{a})+\mathbf{a}=\mathbf{0}$ अर्थात् $(-\mathbf{a})$, सदिश $\mathbf{a}$ का योज्य प्रतिलोम कहलाता है।

(2) **सदिशों का व्यवकलन** (Subtraction of vectors) **:** यदि $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ दो सदिश हों, तो उनका व्यवकलन $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ निम्न प्रकार से परिभाषित होता है $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$, जहाँ $-\mathbf{b},\mathbf{b}$ का ऋण सदिश है, जिसका परिमाण, $\mathbf{b}$ के परिमाण के समान तथा दिशा, $\mathbf{b}$ की दिशा के विपरीत है।

यदि $\mathbf{a}=\mathbf{a}_1\mathbf{i}+\mathbf{a}_2\mathbf{j}+\mathbf{a}_3\mathbf{k}$

तथा $\mathbf{b}=\mathbf{b}_1\mathbf{i}+\mathbf{b}_2\mathbf{j}+\mathbf{b}_3\mathbf{k}$ तो

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=(\mathbf{a}_1-\mathbf{b}_1)\mathbf{i}+(\mathbf{a}_2-\mathbf{b}_2)\mathbf{j}+(\mathbf{a}_3-\mathbf{b}_3)\mathbf{k}$$

सदिश व्यवकलन के गुणधर्म

(i) $\mathbf{a}-\mathbf{b}\neq\mathbf{b}-\mathbf{a}$ (ii) $(\mathbf{a}-\mathbf{b})-\mathbf{c}\neq\mathbf{a}-(\mathbf{b}-\mathbf{c})$

(iii) चूँकि किसी त्रिभुज की कोई एक भुजा अन्य दो भुजाओं के योग से कम तथा उनके अन्तर से अधिक होती है। अतः दो सदिशों $\mathbf{a}$ एवं $\mathbf{b}$ के लिए,

(a) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\leq|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$ (b) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\geq|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|$

(c) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|\leq|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$ (d) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|\geq|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|$

(3) **एक सदिश का अदिश से गुणन** (Multiplication of a vector by a scalar) **:** यदि $\mathbf{a}$ एक सदिश है तथा m एक अदिश (अर्थात् एक वास्तविक संख्या) है, तो $m\mathbf{a}$ एक सदिश होगा, जिसका परिमाण $\mathbf{a}$ के परिमाण का m गुना होगा तथा जिसकी दिशा $\mathbf{a}$ की दिशा के समान होगी, यदि m धनात्मक है तथा $\mathbf{a}$ की दिशा के विपरीत होगी, यदि m ऋणात्मक है।

सदिश का अदिश से गुणन के गुणधर्म : सदिश के अदिश से गुणन के निम्नलिखित गुणधर्म हैं, जहाँ $\mathbf{a},\mathbf{b}$ सदिश हैं तथा m, n अदिश हैं।

(i) $m(-\mathbf{a})=(-m)\mathbf{a}=-(m\mathbf{a})$ (ii) $(-m)(-\mathbf{a})=m\mathbf{a}$

(iii) $m(n\mathbf{a})=(mn)\mathbf{a}=n(m\mathbf{a})$ (iv) $(m+n)\mathbf{a}=m\mathbf{a}+n\mathbf{a}$

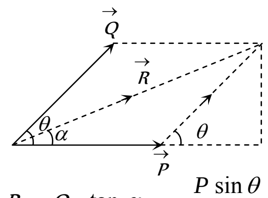
(v) $m(\mathbf{a}+\mathbf{b})=m\mathbf{a}+m\mathbf{b}$

(4) **दो बलों का परिणामी** (Resultant of two forces) **:** माना दो बल $\vec{P}$ व $\vec{Q}$ हैं तथा इनका परिणामी $\vec{R}$ है, तब $\vec{R}=\vec{P}+\vec{Q}$

$|\vec{R}|=R=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\theta}$

जहाँ, $|\vec{P}|=P, |\vec{Q}|=Q$,

$\tan\alpha=\dfrac{Q\sin\theta}{P+Q\cos\theta}$



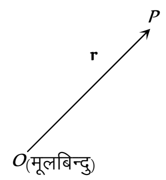
उप-साध्यः जब $|\vec{P}|=|\vec{Q}|$, अर्थात् $P=Q$, $\tan\alpha=\dfrac{P\sin\theta}{P+P\cos\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\tan\dfrac{\theta}{2}$; $\therefore\quad\alpha=\dfrac{\theta}{2}$

अतः दो इकाई सदिशों $\mathbf{a}$ एवं $\mathbf{b}$ का कोणार्धक सदिश योग $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ के अनुदिश होता है।

स्थिति सदिश (Position vector)

यदि O एक नियत बिन्दु है, जो त्रिविम (अथवा तल) में मूल बिन्दु है तथा P कोई बिन्दु है, तो $\overrightarrow{OP}$ को P का O के सापेक्ष स्थिति सदिश कहते हैं।



यदि P एक बिन्दु $\mathbf{r}$ है, तो इसका तात्पर्य है, कि P का किसी मूल बिन्दु O के सापेक्ष स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ है।

(1) **बिन्दु A तथा B के स्थिति सदिश के पदों में $\overrightarrow{AB}$** : यदि $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ क्रमशः बिन्दुओं A तथा B के स्थिति सदिश हैं, तो $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$

त्रिभुज OAB में, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ = (B का स्थिति सदिश) – (A का स्थिति सदिश)

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ = (अन्तिम बिन्दु का स्थिति सदिश) – (प्रारम्भिक बिन्दु का स्थिति सदिश)

(2) **विभाजन बिन्दु का स्थिति सदिश** (Position vector of a dividing point) : रेखा AB को $m:n$ के अनुपात में अंतः विभाजित तथा बाह्य विभाजित करने वाले बिन्दु के स्थिति सदिश क्रमशः $\dfrac{mb+na}{m+n}$ तथा $\dfrac{mb-na}{m-n}$ होंगे।

सदिशों का रेखीय संयोजन (Linear combination of vectors)

सदिश $\mathbf{r}$ को सदिशों $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$..... इत्यादि का रेखीय संयोजन कहते हैं, यदि x, y, z इत्यादि का अस्तित्व इस प्रकार हो, कि $\mathbf{r}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}+....$

उदाहरणार्थ: सदिश $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{a}+\mathbf{b}+3\mathbf{c}, \mathbf{r}_2 = \mathbf{a}+3\mathbf{b}+\sqrt{2}\mathbf{c}$ सदिशों $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ के रेखीय संयोजन हैं।

(1) **संरेखीय तथा असंरेखीय सदिश** (Collinear and Non-collinear vectors) : माना $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ दो संरेखीय सदिश हैं तथा माना $\hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{a}$ की दिशा में एक इकाई सदिश है, तब $\mathbf{b}$ की दिशा में इकाई सदिश $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के समदिश या असमदिश समान्तर सदिश होने के अनुसार, $\hat{\mathbf{x}}$ या $-\hat{\mathbf{x}}$ होगा। अब, $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\,\hat{\mathbf{x}}$ तथा $\mathbf{b} = \pm|\mathbf{b}|\,\hat{\mathbf{x}}$

$$\therefore\ \mathbf{a} = \left(\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}\right)|\mathbf{b}|\,\hat{\mathbf{x}} \Rightarrow \mathbf{a} = \left(\pm\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}\right)\mathbf{b}$$

$\Rightarrow \mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, जहाँ $\lambda = \pm\dfrac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$.

अतः यदि $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ समरेखीय सदिश हैं, तो $\mathbf{a} = \lambda\,\mathbf{b}$ या $\mathbf{b} = \lambda\,\mathbf{a}$, जहाँ λ एक अदिश है।

(2) **दो समान्तर सदिशों में सम्बन्ध** (Relation between two parallel vectors)

(i) यदि $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ दो समान्तर सदिश हैं, तो एक अदिश k का अस्तित्व इस प्रकार है, कि $\mathbf{a} = k\,\mathbf{b}$.

अर्थात्, दो अशून्य अदिश राशियाँ x तथा y इस प्रकार अस्तित्व रखती हैं, कि $x\,\mathbf{a} + y\,\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

यदि $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ दो अशून्य, असमान्तर सदिश हों, तो $x\mathbf{a}+y\mathbf{b} = \mathbf{0}$ $\Rightarrow x = 0$ तथा $y = 0$.

$$\text{स्पष्टतः } x\mathbf{a}+y\mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{0}, \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ \quad\text{या} \\ x = 0, y = 0 \\ \quad\text{या} \\ \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \end{cases}$$

(ii) यदि $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$ तब समान्तर सदिशों के गुणधर्म से, $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Rightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$

(3) **तीन बिन्दुओं के समरेखीय होने का प्रतिबंध** (Test of collinearity of three points): तीन बिन्दु, जिनके स्थिति सदिश $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ हैं, समरेखीय होंगे, यदि एवं केवल यदि अदिश x, y, z (सभी शून्य नहीं) इस प्रकार अस्तित्व रखते हैं, कि $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c} = \mathbf{0}$, जहाँ $x+y+z = 0$. यदि $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}$ तथा $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}$, तब वे बिन्दु जिनके स्थिति सदिश $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ हैं, समरेखीय होंगे, यदि एवं केवल यदि $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

(4) **तीन सदिशों के समतलीय होने का प्रतिबंध** (Test of coplanarity of three vectors) : माना $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ दिए गए दो अशून्य, असमरैखिक सदिश हैं, तब $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के समतलीय किसी सदिश $\mathbf{r}$ को अद्वितीय रूप में $\mathbf{r} = x\mathbf{a}+y\mathbf{b}$ द्वारा व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ x एवं y अदिश हैं।

(5) **चार बिन्दुओं के समतलीय होने का प्रतिबंध** (Test of coplanarity of Four points) : चार बिन्दु, जिनके स्थिति सदिश $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ हैं, समतलीय होंगे, यदि एवं केवल यदि, अदिश x, y, z, u (सभी शून्य नहीं) इस प्रकार अस्तित्व रखते हैं कि $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}+u\mathbf{d} = \mathbf{0}$, जहाँ $x+y+z+u = 0$.

चार बिन्दु जिनके स्थिति सदिश

$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$

$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$, $\mathbf{d} = d_1\mathbf{i}+d_2\mathbf{j}+d_3\mathbf{k}$ हैं,

समतलीय होंगे, यदि एवं केवल यदि $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

रैखिकतः स्वतन्त्रा तथा आश्रित सदिश
(Linear independence and dependence of vectors)

(1) **रैखिकतः स्वतंत्र सदिश** (Linearly independent vectors) : अशून्य सदिशों $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots.. \mathbf{a}_n$ का एक समुच्चय रैखिकतः स्वतन्त्र कहलाएगा, यदि $x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\ldots..+x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ $\Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots.. = x_n = 0$.

(2) **रैखिकतः आश्रित सदिश** (Linearly dependent vectors) : सदिशों $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots.. \mathbf{a}_n$ का एक समुच्चय रैखिकतः आश्रित कहलाएगा, यदि अदिश $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ (सभी शून्य नहीं) इस प्रकार अस्तित्व रखते हों, कि $x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\ldots\ldots..+x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$

तीन सदिश $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$ आश्रित सदिश होंगे, यदि एवं केवल $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

रैखिकतः स्वतंत्र एवं आश्रित सदिशों के गुणधर्म :

(i) दो अशून्य, असमरेखिक सदिश रैखिकतः स्वतंत्र होते हैं।

(ii) कोई दो समरेखिक सदिश रैखिकतः आश्रित होते हैं।

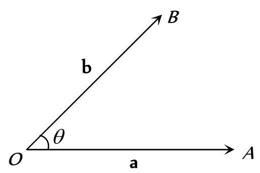
(iii) कोई तीन असमतलीय सदिश रैखिकतः स्वतंत्र होते हैं।

(iv) कोई तीन समतलीय सदिश रैखिकतः आश्रित होते हैं।

(v) त्रिविम में कोई भी चार सदिश रैखिकतः आश्रित होते हैं।

सदिशों का अदिश गुणनफल
(Scalar or dot product of two vectors)

(1) **दो सदिशों का अदिश गुणन** (Scalar or Dot product of two vectors) : यदि $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ दो अशून्य सदिश हैं तथा θ उनके बीच का कोण है, तो उनका अदिश गुणन $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है तथा इसे अदिश $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ के रूप में परिभाषित करते हैं, जहाँ $|\mathbf{a}|$ एवं $|\mathbf{b}|$ क्रमशः $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के मापांक हैं और $0 \le \theta \le \pi$.



दो सदिशों के बीच का कोण : यदि $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ दो सदिश हैं, जिनके बीच का कोण θ है, तब, $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}\right)$$

यदि $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$, तब

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}\right).$$

(2) **अदिश गुणन के गुणधर्म** (Properties of scalar product) :

(i) **क्रमविनिमेयता** : दो सदिशों का अदिश गुणनफल क्रमविनिमेय नियम का पालन करता है, अर्थात् $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = \mathbf{b}\,.\,\mathbf{a}$.

(ii) **अदिश गुणन का सदिश योग पर वितरण** : सदिशों का अदिश गुणन, सदिश योग पर वितरित होता है, अर्थात्

(a) $\mathbf{a}\,.(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}+\mathbf{a}\,.\,\mathbf{c}$ (वामावर्त वितरण)

(b) $(\mathbf{b}+\mathbf{c}).\mathbf{a}=\mathbf{b}.\mathbf{a}+\mathbf{c}.\mathbf{a}$ (दक्षिणावर्त वितरण)

(iii) माना **a** तथा **b** दो अशून्य सदिश हैं, तब $\mathbf{a}.\mathbf{b}=0 \Leftrightarrow \mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

चूँकि $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ निर्देशाक्षों के अनुदिश, एक-दूसरे के लम्बवत् इकाई सदिश हैं, अतः $\mathbf{i}.\mathbf{j}=\mathbf{j}.\mathbf{i}=0$; $\mathbf{j}.\mathbf{k}=\mathbf{k}.\mathbf{j}=0$; $\mathbf{k}.\mathbf{i}=\mathbf{i}.\mathbf{k}=0$.

(iv) किसी सदिश **a** के लिए, $\mathbf{a}.\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2$.

चूँकि $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ निर्देशाक्षों के अनुदिश इकाई सदिश हैं, अतः $\mathbf{i}.\mathbf{i}=|\mathbf{i}|^2=1$, $\mathbf{j}.\mathbf{j}=|\mathbf{j}|^2=1$ तथा $\mathbf{k}.\mathbf{k}=|\mathbf{k}|^2=1$

(v) यदि m एक अदिश है तथा $\mathbf{a},\mathbf{b}$ कोई दो सदिश हैं, तो $(m\mathbf{a}).\mathbf{b}=m(\mathbf{a}.\mathbf{b})=\mathbf{a}.(m\mathbf{b})$

(vi) यदि m, n अदिश हैं तथा $\mathbf{a},\mathbf{b}$ दो सदिश हैं, तब $m\mathbf{a}.n\mathbf{b}=mn(\mathbf{a}.\mathbf{b})=(mn\,\mathbf{a}).\mathbf{b}=\mathbf{a}.(mn\,\mathbf{b})$

(vii) कोई दो सदिश **a** तथा **b** के लिए,

(a) $\mathbf{a}.(-\mathbf{b})=-(\mathbf{a}.\mathbf{b})=(-\mathbf{a}).\mathbf{b}$ (b) $(-\mathbf{a}).(-\mathbf{b})=\mathbf{a}.\mathbf{b}$

(viii) कोई दो सदिश **a** तथा **b** के लिए,

(a) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+2\mathbf{a}.\mathbf{b}$

(b) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2\mathbf{a}.\mathbf{b}$

(c) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{a}-\mathbf{b})=|\mathbf{a}|^2-|\mathbf{b}|^2$

(d) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}| \Rightarrow \mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$

(e) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2 \Rightarrow \mathbf{a}\perp\mathbf{b}$

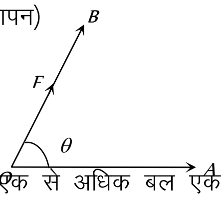
(f) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \Rightarrow \mathbf{a}\perp\mathbf{b}$

(g) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+2(\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}.\mathbf{c}+\mathbf{c}.\mathbf{a})$

(3) **घटकों के पदों में अदिश गुणन** (Scalar product in terms of components): यदि $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$, तब, $\mathbf{a}.\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. **a** के अनुदिश तथा लम्बवत्, **b** के घटक क्रमशः $\left(\frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\right)\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}-\left(\frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\right)\mathbf{a}$ होते हैं।

(4) **बल द्वारा किया गया कार्य** (Work done by a force) : किया गया कार्य $=|\vec{F}||\overrightarrow{OA}|\cos\theta=\vec{F}.\overrightarrow{OA}=\vec{F}.\vec{d}$ जहाँ $\vec{d}=\overrightarrow{OA}$

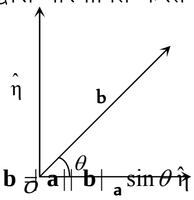
या कार्य = (बल).(विस्थापन)



यदि किसी कण पर एक से अधिक बल एक साथ आरोपित हैं, तो पृथक-पृथक बलों द्वारा किये गये कार्यों का योग परिणामी बल द्वारा किये गये कार्य के बराबर होगा।

सदिशों का सदिश गुणन (Vector or Cross product)

(1) **दो सदिशों का सदिश गुणन** (Vector or Cross product of two vectors) : माना $\mathbf{a},\mathbf{b}$ दो अशून्य, असमान्तर सदिश हैं। तब $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (इसी क्रम में) को उस सदिश द्वारा परिभाषित करते हैं, जिसका परिमाण $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$ है।



दूसरे शब्दों में, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta\,\hat{\eta}$ जहाँ θ, **a** तथा **b** के बीच का कोण है, $\hat{\eta}$ एक इकाई सदिश है, जो **a** तथा **b** के तल के लम्बवत् इस प्रकार है, कि $\mathbf{a},\mathbf{b},\hat{\eta}$ एक दक्षिणावर्त निकाय बनाते हैं।

(2) **सदिश गुणन के गुणधर्म** (Properties of vector product)

(i) सदिश गुणन क्रमविनिमेय नहीं है, अर्थात् यदि **a** तथा **b** दो सदिश हैं, तो $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\neq\mathbf{b}\times\mathbf{a}$, यद्यपि, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$.

(ii) यदि $\mathbf{a},\mathbf{b}$ दो सदिश हैं तथा m, n अदिश हैं, तो $m\mathbf{a}\times n\mathbf{b}=mn(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=m(\mathbf{a}\times n\mathbf{b})=n(m\,\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

(iii) सदिश गुणन का सदिश योग पर वितरण

माना $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ कोई तीन सदिश हैं, तब

(a) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$, (वामावर्त वितरण)

(b) $(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$, (दक्षिणावर्त वितरण)

(iv) किन्हीं तीन सदिशों $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ के लिए $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}-\mathbf{a}\times\mathbf{c}$

(v) दो अशून्य सदिशों का सदिश गुणनफल शून्य होता है, यदि और केवल यदि वे समान्तर रैखिक हैं अर्थात् $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$, **a** व **b** अशून्य सदिश हैं।

उपरोक्त गुण से यह निष्कर्ष निकलता है कि, किसी अशून्य सदिश **a** के लिए $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0}$.

(vi) इकाई लाम्बिक त्रिक सदिशों का सदिश गुणन, सदिश गुणन की परिभाषा से, $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}$ होता है।

(3) **घटकों के पदों में सदिश गुणन** (Vector product in terms of components): यदि $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$. तो,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k}$$

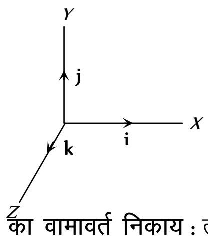
$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_2\\ b_1 & b_2 & b_2\end{vmatrix}$$

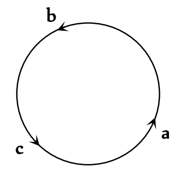
(4) **दो सदिशों के बीच का कोण** (Angle between two vectors): यदि θ, **a** तथा **b** के बीच का कोण है, तो $\sin\theta=\frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$.

(5) (i) **सदिशों का दक्षिणावर्त निकाय** : तीन परस्पर लम्बवत् सदिश $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ सदिशों के दक्षिणावर्त निकाय का निर्माण करते हैं, यदि एवं केवल यदि $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}$, $\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{a}$, $\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}$

उदाहरणार्थ : इकाई सदिश $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ दक्षिणावर्त निकाय बनाते हैं।

$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}, \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}, \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}, \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}, \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}$

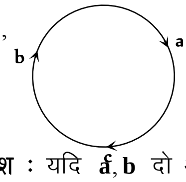




(ii) **सदिशों का वामावर्त निकाय** : तीन परस्पर लम्बवत् सदिश $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$, सदिशों के वामावर्त निकाय का निर्माण करते हैं,

यदि एवं केवल यदि $\mathbf{c}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}, \mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{b}$,

$\mathbf{b}\times\mathbf{a}=\mathbf{c}$.



(6) **दो सदिशों के तल के अभिलम्बवत् सदिश** : यदि $\mathbf{a},\mathbf{b}$ दो अशून्य, असमान्तर सदिश हैं तथा θ इनके मध्य कोण है, तब $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta\,\hat{\eta}$, जहाँ **a** तथा **b** के तल के लम्बवत् इकाई सदिश $\hat{\eta}$ इस प्रकार है, कि $\mathbf{a},\mathbf{b},\hat{\eta}$ एक दक्षिणावर्त निकाय बनाते हैं।

इस प्रकार a तथा b के तल के लम्बवत् इकाई सदिश $=\dfrac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}$ है।

ध्यान दें कि $-\dfrac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}$ भी a तथा b के तल में लम्बवत् इकाई सदिश हैं।

a तथा b के तल के लम्बवत् 'λ' परिमाण के सदिश $\pm\dfrac{\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}$ द्वारा प्राप्त होते हैं।

(7) **समान्तर चतुर्भुज तथा त्रिभुज का क्षेत्रफल** (Area of parallelogram and Triangle)

(i) संलग्न भुजाओं $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ वाले समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$.

(ii) विकर्णों $\mathbf{d}_1$ तथा $\mathbf{d}_2$ वाले समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $=\dfrac{1}{2}|\mathbf{d}_1\times\mathbf{d}_2|$.

(iii) चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल $=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}|$, जहाँ AC तथा BD विकर्ण हैं।

(iv) संलग्न भुजाओं $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल $=\dfrac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$

(v) त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ या $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}|$ या $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}|$

(vi) यदि $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ किसी त्रिभुज ABC के शीर्षों के स्थिति सदिश हैं, तो इसका क्षेत्रफल $=\dfrac{1}{2}|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})|$

(vii) तीन बिन्दु, जिनके स्थिति सदिश $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ हैं, समरैखिक होंगे, यदि $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{0}$

(8) **बल आघूर्ण** (Moment of a force): किसी बिन्दु O के परितः बल F का आघूर्ण $=\overrightarrow{OP}\times F$; जहाँ P, बल F की क्रिया रेखा पर कोई बिन्दु है।

अदिश त्रिक गुणन (Scalar triple product)

(1) **तीन सदिशों का अदिश त्रिक गुणन :** यदि $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ तीन सदिश हैं, तो उनका अदिश त्रिक गुणनफल दो सदिशों $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ के अदिश गुणन द्वारा परिभाषित होता है। इसे साधारणतः $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ या $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$ द्वारा निरूपित करते हैं।

(2) **अदिश त्रिक गुणन के गुणधर्म** (Properties of scalar triple product) **:**

(i) यदि $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ को चक्रीय क्रमचयित किया जाए, तो अदिश त्रिक गुणनफल का मान समान रहता है,

अर्थात् $(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\mathbf{c}=(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).\mathbf{a}=(\mathbf{c}\times\mathbf{a}).\mathbf{b}$

अथवा $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]=[\mathbf{b}\ \mathbf{c}\ \mathbf{a}]=[\mathbf{c}\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}]$

(ii) अदिश त्रिक गुणन में सदिशों का चक्रीय क्रम बदलने पर अदिश त्रिक गुणन का चिन्ह बदल जाता है, किन्तु परिमाण नहीं बदलता, अर्थात् $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]=-[\mathbf{b}\ \mathbf{a}\ \mathbf{c}]=-[\mathbf{c}\ \mathbf{b}\ \mathbf{a}]=-[\mathbf{a}\ \mathbf{c}\ \mathbf{b}]$

(iii) यदि सदिशों का चक्रीय क्रम अपरिवर्तित रहे, तब अदिश त्रिकगुणन में डॉट (Dot) तथा क्रॉस (Cross) चिन्ह का स्थान अन्तः परिवर्तित किया जा सकता है, अर्थात् $(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\mathbf{c}=\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

(iv) तीन सदिशों के अदिश त्रिक गुणनफल का मान शून्य होगा, यदि इनमें से कोई भी दो समान हो।

(v) तीन सदिश $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ तथा अदिश λ के लिए, $[\lambda\,\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]=\lambda[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$

(vi) तीन सदिशों के अदिश त्रिक गुणनफल का मान शून्य होगा, यदि इनमें से कोई दो समान्तर अथवा समरेखीय हो।

(vii) यदि $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$ चार सदिश हैं, तो

$[(\mathbf{a}+\mathbf{b})\ \mathbf{c}\ \mathbf{d}]=[\mathbf{a}\ \mathbf{c}\ \mathbf{d}]+[\mathbf{b}\ \mathbf{c}\ \mathbf{d}]$

(viii) तीन अशून्य, असमरैखिक सदिशों $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ के समतलीय होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]=0$ अर्थात् $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ समतलीय हैं $\Leftrightarrow[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]=0$.

(ix) चार बिन्दु जिनके स्थिति सदिश a, b, c तथा d हैं, समतलीय होंगे, यदि $[\mathbf{d}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]+[\mathbf{d}\ \mathbf{c}\ \mathbf{a}]+[\mathbf{d}\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}]=[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$.

(x) समांतर षट्फलक (Parallelopiped), जिसकी संलग्न कोरे a, b, c हैं, का आयतन $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$ या $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ होता है।

(3) **घटकों के पदों में अदिश त्रिक गुणनफल** (Scalar triple product in terms of components)

(i) यदि $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{c}=c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$ तीन सदिश हैं, तो $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$

(ii) यदि $\mathbf{a}=a_1\mathbf{l}+a_2\mathbf{m}+a_3\mathbf{n},\mathbf{b}=b_1\mathbf{l}+b_2\mathbf{m}+b_3\mathbf{n}$ तथा $\mathbf{c}=c_1\mathbf{l}+c_2\mathbf{m}+c_3\mathbf{n}$, तो $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}[\mathbf{l}\ \mathbf{m}\ \mathbf{n}]$

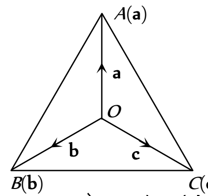
(iii) तीन सदिशों $\mathbf{a},\mathbf{b}$ तथा $\mathbf{c}$ के लिए,

(a) $[\mathbf{a}+\mathbf{b}\ \ \mathbf{b}+\mathbf{c}\ \ \mathbf{c}+\mathbf{a}]=2[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$

(b) $[\mathbf{a}-\mathbf{b}\ \ \mathbf{b}-\mathbf{c}\ \ \mathbf{c}-\mathbf{a}]=0$

(c) $[\mathbf{a}\times\mathbf{b}\ \ \mathbf{b}\times\mathbf{c}\ \ \mathbf{c}\times\mathbf{a}]=[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]^2$

(4) **चतुष्फलक** (Tetrahedron) **:** चतुष्फलक एक त्रिविमीय चित्र है, जो चार त्रिभुजों से बनता है। $OABC$ एक चतुष्फलक है, जिसका आधार ΔABC है। OA, OB, OC, AB, BC तथा CA को चतुष्फलक की कोर कहते हैं। $OA, BC; OB, CA$ तथा OC, AB को विपरीत कोरों का युग्म कहते हैं। एक चतुष्फलक, जिसकी कोरें समान लम्बाई की हैं, समचतुष्फलक कहलाता है।



चतुष्फलक का आयतन :

(i) चतुष्फलक का आयतन $=\dfrac{1}{3}$ (आधार का क्षेत्रफल) $\times$ (संगत ऊँचाई)

$=\dfrac{1}{6}[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{BC}\ \overrightarrow{AD}]$

(ii) यदि शीर्षों A, B तथा C के O के सापेक्ष स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ हों, तो चतुष्फलक $OABC$ का आयतन $=\dfrac{1}{6}[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$

(iii) यदि किसी चतुष्फलक $ABCD$ के शीर्षों A, B, C, D के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$ हों, तो उसका आयतन $=\dfrac{1}{6}[\mathbf{b}-\mathbf{a}\ \mathbf{c}-\mathbf{a}\ \mathbf{d}-\mathbf{a}]$

(5) **सदिशों का व्युत्क्रम निकाय** (Reciprocal system of vectors): माना $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ तीन असमतलीय सदिश हैं और माना

$$\mathbf{a}'=\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{[\mathbf{abc}]},\ \mathbf{b}'=\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{[\mathbf{abc}]},\ \mathbf{c}'=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{[\mathbf{abc}]}.$$

सदिश $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ के लिए $\mathbf{a}',\mathbf{b}',\mathbf{c}'$ सदिशों का व्युत्क्रम निकाय बनाते हैं।

यदि $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ तथा $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ सदिशों का व्युत्क्रम निकाय बनाते हैं, तो

(i) $\mathbf{a}.\mathbf{a}' = \mathbf{b}.\mathbf{b}' = \mathbf{c}.\mathbf{c}' = 1$

(ii) $\mathbf{a}.\mathbf{b}' = \mathbf{a}.\mathbf{c}' = 0; \mathbf{b}.\mathbf{c}' = \mathbf{b}.\mathbf{a}' = 0; \mathbf{c}.\mathbf{a}' = \mathbf{c}.\mathbf{b}' = 0$

(iii) $[\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'] = \dfrac{1}{[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]}$

(iv) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ असमतलीय होंगे यदि एवं केवल यदि $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ असमतलीय हों।

सदिश त्रिक गुणन (Vector triple product)

माना $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ कोई भी तीन सदिश हैं, तो सदिश $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ तथा $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ को $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ का सदिश त्रिक गुणन कहते हैं।

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}$

सदिश त्रिक गुणन के गुणधर्म (Properties of vector triple product)

(i) सदिश त्रिक गुणन $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ उन दो सदिशों का रेखीय संयोजन है, जो कोष्ठक में है।

(ii) सदिश $\mathbf{r} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, $\mathbf{a}$ पर लम्ब है तथा $\mathbf{b}$ एवं $\mathbf{c}$ के तल में स्थित है।

(iii) सूत्र $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}$ तभी सत्य है, जब कोष्ठक से बाहर का सदिश बाँयी ओर है। यदि ऐसा न हो, तो हम पहले इसे सदिश गुणन के गुणधर्म का उपयोग कर बाँयी ओर स्थानान्तरित करते हैं और तब उपरोक्त सूत्र का उपयोग करते हैं।

अतः $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = -\{\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\} = -\{(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}\}$

$= (\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}$

(iv) सदिश त्रिक गुणनफल एक सदिश राशि है।

(v) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

चार सदिशों का अदिश गुणन (Scalar product of four vectors)

$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).(\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ चार सदिशों का एक अदिश गुणन है। यह सदिशों $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ तथा $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ का अदिश गुणन है। यह सदिशों $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ तथा $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ का अदिश त्रिक गुणन है तथा सदिशों $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}$ तथा $\mathbf{d}$ का भी अदिश त्रिक गुणन है।

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}.\mathbf{c} & \mathbf{a}.\mathbf{d} \\ \mathbf{b}.\mathbf{c} & \mathbf{b}.\mathbf{d} \end{vmatrix}$$

चार सदिशों का सदिश गुणन (Vector product of four vectors)

(1) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ चार सदिशों का सदिश गुणन है। यह सदिशों $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ तथा $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ का सदिश गुणन है।

(2) $\mathbf{a} \times \{\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\}, \{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}\} \times \mathbf{d}$ भी चार सदिशों $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ तथा $\mathbf{d}$ के विभिन्न सदिश गुणन हैं।

सदिश का अक्ष के परितः घूर्णन
(Rotation of a vector about an axis)

माना $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$

(i) यदि निकाय को x-अक्ष के परितः α कोण से घूर्णित किया जाये, तब $\mathbf{a}$ के नये घटक $(a_1, a_2 \cos\alpha + a_3 \sin\alpha, -a_2 \sin\alpha + a_3 \cos\alpha)$ होंगे।

(ii) यदि निकाय को y-अक्ष के परितः α कोण से घूर्णित किया जाये, तब $\mathbf{a}$ के नये घटक $(-a_3 \sin\alpha + a_1 \cos\alpha, a_2, a_3 \cos\alpha + a_1 \sin\alpha)$ होंगे।

(iii) यदि निकाय को z-अक्ष के परितः α कोण से घूर्णित किया जाये, तब $\mathbf{a}$ के नये घटक $(a_1 \cos\alpha + a_2 \sin\alpha, -a_1 \sin\alpha + a_2 \cos\alpha, a_3)$ होंगे।

त्रिविमीय ज्यामिति में सदिश का अनुप्रयोग
(Application of vectors in 3-dimensional geometry)

(1) $\mathbf{r} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ की दिक् कोज्याएँ $\dfrac{a}{|\mathbf{r}|}, \dfrac{b}{|\mathbf{r}|}, \dfrac{c}{|\mathbf{r}|}$ हैं।

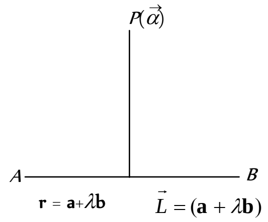
(2) **अन्तःकेन्द्र सूत्र** : ΔABC के अंतःकेन्द्र का स्थिति सदिश $\dfrac{a\,\mathbf{a} + b\,\mathbf{b} + c\,\mathbf{c}}{a + b + c}$ होता है।

(3) **लम्बकेन्द्र सूत्र** : ΔABC के लम्बकेन्द्र का स्थिति सदिश $\dfrac{\mathbf{a} \tan A + \mathbf{b} \tan B + \mathbf{c} \tan C}{\tan A + \tan B + \tan C}$ होता है।

(4) किसी स्थिर बिन्दु, जिसका स्थिति सदिश $\mathbf{a}$ है, से गुजरने वाली एक सरल रेखा, जो सदिश $\mathbf{b}$ के समान्तर है, का सदिश समीकरण $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$ है।

(5) दो बिन्दुओं जिनके स्थिति सदिश $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ हैं, से गुजरने वाली सरल रेखा का सदिश समीकरण $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ है।

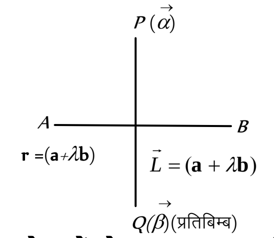
(6) **किसी रेखा से एक बिन्दु की लम्बवत् दूरी** : माना रेखा $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$ पर $P(\vec{\alpha})$ से खींचे गये लम्ब का पाद L है। चूँकि $\mathbf{r}$, रेखा $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$ पर किसी बिन्दु के स्थिति सदिश को व्यक्त करता है। इसलिए, माना L का स्थिति सदिश $\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$ है। तब $\overrightarrow{PL} = \mathbf{a} - \vec{\alpha} + \lambda \mathbf{b} = (\mathbf{a} - \vec{\alpha}) - \left(\dfrac{(\mathbf{a} - \vec{\alpha})\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\right)\mathbf{b}$



$\overrightarrow{PL}$ का मापांक लम्बाई PL, है जो कि अभीष्ट लम्ब की लम्बाई है।

(7) **किसी सरल रेखा में एक बिन्दु का प्रतिबिम्ब** : माना $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$ में P का प्रतिबिम्ब $Q(\vec{\beta})$ है

तो, $\vec{\beta} = 2\mathbf{a} - \left(\dfrac{2(\mathbf{a} - \vec{\alpha}).\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\right)\mathbf{b} - \vec{\alpha}$



(8) **दो समान्तर रेखाओं के मध्य न्यूनतम दूरी** : माना दो रेखायें l_1 व l_2 हैं, जिनके समीकरण क्रमशः $l_1 : r = \mathbf{a}_1 + \lambda \mathbf{b}_1$ तथा $l_2 : r = \mathbf{a}_2 + \mu \mathbf{b}_2$ हैं, तब न्यूनतम दूरी

$$PQ = \left|\frac{(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2).(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)}{|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2|}\right| = \left|\frac{[\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)]}{|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2|}\right|$$

यदि रेखाएँ $\mathbf{r}=\mathbf{a}_1+\lambda\mathbf{b}_1$ एवं $\mathbf{r}=\mathbf{a}_2+\lambda\mathbf{b}_2$ प्रतिच्छेद करती हैं, तो उनके बीच न्यूनतम दूरी शून्य होगी, इसलिए $[\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\,(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1)]=0$

$\Rightarrow [(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1)\ \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]=0$

$\Rightarrow (\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1).(\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2)=0$, $(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1).(\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2)=0$.

(9) यदि रेखाएँ $\mathbf{r}=\mathbf{a}_1+\lambda\mathbf{b}_1$ तथा $\mathbf{r}=\mathbf{a}_2+\lambda\mathbf{b}_2$ समतलीय हैं, तब $[\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]=[\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]$ एवं उस समतल का समीकरण, जो इसे समाहित करता है, $[\mathbf{r}\,\mathbf{b}_1\,\mathbf{b}_2]=[\mathbf{a}_1\,\mathbf{b}_1\,\mathbf{b}_2]$ या $[\mathbf{r}\,\mathbf{b}_1\,\mathbf{b}_2]=[\mathbf{a}_2\,\mathbf{b}_1\,\mathbf{b}_2]$ होगा।

(10) समतल, जो बिन्दु $A(\mathbf{a})$ से गुजरता है, एवं सदिश $\mathbf{n}$ के लम्बवत् है, का सदिश समीकरण $(\mathbf{r}-\mathbf{a}).\mathbf{n}=0$ या $\mathbf{r}.\mathbf{n}$ होगा।

जहाँ $d=\mathbf{a}.\mathbf{n}$, यह समतल का अदिश गुणन रूप में समीकरण कहलाता है।

(11) इकाई सदिश $\hat{\mathbf{n}}$ पर लम्ब और मूलबिन्दु से d दूरी पर स्थित समतल का सदिश समीकरण $\mathbf{r}.\hat{\mathbf{n}}=d$ है।

यदि $\mathbf{n}$ एक इकाई सदिश नहीं है, तो समीकरण $\mathbf{r}.\mathbf{n}=d$ को अभिलंब रूप में परिवर्तित करने के लिए दोनों तरफ $|\mathbf{n}|$ से भाग देते हैं, तब $\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}=\frac{d}{|\mathbf{n}|}$ या $\mathbf{r}.\hat{\mathbf{n}}=\frac{d}{|\mathbf{n}|}$.

(12) **किसी दिए हुए बिन्दु से गुजरने वाले एवं दो दिए हुए सदिशों के समान्तर समतल का समीकरणः** एक बिन्दु, जिसका स्थिति-सदिश $\mathbf{a}$ है, से गुजरने वाले तथा $\mathbf{b}$ और $\mathbf{c}$ के समान्तर समतल का समीकरण $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}$ या $[\mathbf{r}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]=[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$ होगा, जहाँ λ,μ अदिश हैं।

(13) बिन्दुओं $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ व $\mathbf{c}$ से होकर जाने वाले समतल का समीकरण $\mathbf{r}=(1-s-t)\mathbf{a}+s\,\mathbf{b}+t\,\mathbf{c}$ या $\mathbf{r}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b})=[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$ होता है।

(14) दो समतलों $\mathbf{r}.\mathbf{n}_1=\mathbf{d}_1$ व $\mathbf{r}.\mathbf{n}_2=\mathbf{d}_2$ के प्रतिच्छेदन से जाने वाले समतल का समीकरण $\mathbf{r}.(\mathbf{n}_1+\lambda\mathbf{n}_2)=\mathbf{d}_1+\lambda\mathbf{d}_2$ है, जहाँ λ एक स्वेच्छ नियतांक है।

(15) एक बिन्दु, जिसका स्थिति सदिश $\mathbf{a}$ है, से समतल $\mathbf{r}.\mathbf{n}=d$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई $p=\frac{|\mathbf{a}.\mathbf{n}-d|}{|\mathbf{n}|}$ होती है।

(16) समतलों $\mathbf{r}_1.\mathbf{n}_1=d_1$ तथा $\mathbf{r}_2.\mathbf{n}_2=d_2$ के बीच कोण θ निम्न द्वारा दिया जाता है, $\cos\theta=\pm\frac{\mathbf{n}_1.\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}$.

(17) $\mathbf{a}$ से जाने वाली एवं $\mathbf{b}$ के समान्तर रेखा की बिन्दु $P(r)$ से लम्बवत् दूरी $= PM=\frac{|(\mathbf{r}-\mathbf{a})|\times\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}$ या $PM=\left[(\mathbf{r}-\mathbf{a})^2\left\{\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{a})}{|\mathbf{b}|}\right\}^2\right]^{1/2}$

(18) समतलों $\mathbf{r}_1.\mathbf{n}_1=d_1$ तथा $\mathbf{r}_2.\mathbf{n}_2=d_2$ के बीच कोणार्धकों के समीकरण होंगे।

$$\frac{|\mathbf{r}.\mathbf{n}_1-d_1|}{|\mathbf{n}_1|}=\frac{|\mathbf{r}.\mathbf{n}_2-d_2|}{|\mathbf{n}_2|}$$

या $$\frac{\mathbf{r}.\mathbf{n}_1-d_1}{|\mathbf{n}_1|}=\pm\frac{\mathbf{r}.\mathbf{n}_2-d_2}{|\mathbf{n}_2|}$$

या $$\mathbf{r}.(\hat{\mathbf{n}}_1\pm\hat{\mathbf{n}}_2)=\frac{d_1}{|\mathbf{n}_1|}\pm\frac{d_2}{|\mathbf{n}_2|}.$$

(19) बिन्दु $\mathbf{a}$ से जाने वाले एवं $\mathbf{b}$ व $\mathbf{c}$ से के समान्तर समतल की बिन्दु $P(\mathbf{r})$ से लम्बवत् दूरी $PM=\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{a}).(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}{|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|}$

(20) बिन्दुओं $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ से जाने वाले समतल की बिन्दु $P(\mathbf{r})$ से लम्बवत् दूरी

$$PM=\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{a}).(\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{|\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}.$$

(21) **रेखा व समतल के मध्य कोण :** यदि रेखा $\mathbf{r}=(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b})$ एवं समतल $\mathbf{r}.\mathbf{n}=d$ के बीच कोण θ हो, तो

$$\sin\theta=\frac{\mathbf{b}.\mathbf{n}}{|\mathbf{b}||\mathbf{n}|}.$$

(i) **लम्ब होने का प्रतिबंध :** यदि रेखा समतल के लम्बवत् हो, तो यह समतल के अभिलंब के समान्तर होगी। अतः $\mathbf{b}$ एवं $\mathbf{n}$ समान्तर होंगे।

इसलिए $\mathbf{b}\times\mathbf{n}=0$ या $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{n}$, किसी अदिश λ के लिए।

(ii) **समान्तर होने का प्रतिबंध :** यदि रेखा समतल के समान्तर हो, तो यह समतल के अभिलम्ब के लम्बवत् होगी। अतः $\mathbf{b}$ तथा $\mathbf{n}$ लम्बवत् है। इसलिए $\mathbf{b}.\mathbf{n}=0$

(iii) यदि रेखा $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$ समतल $\mathbf{r}.\mathbf{n}=d$ में स्थित हो, तो

(a) $\mathbf{b}.\mathbf{n}=0$ तथा (b) $\mathbf{a}.\mathbf{n}=d$

(22) गोले का समीकरण, जिसका केन्द्र $C(\mathbf{c})$ एवं त्रिज्या 'a' है, $|\mathbf{r}-\mathbf{c}|=a$ होगा।

(23) समतल $\mathbf{r}.\mathbf{n}=d$, गोला $|\mathbf{r}-\mathbf{a}|=R$ को स्पर्श करेगा, यदि $\frac{|\mathbf{a}.\mathbf{n}-d|}{|\mathbf{n}|}=R$

(24) यदि गोले के व्यास के सिरों के स्थिति सदिश $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ हों, तो इसका समीकरण $(\mathbf{r}-\mathbf{a}).(\mathbf{r}-\mathbf{b})=0$ या $|\mathbf{r}|^2-\mathbf{r}.(\mathbf{a}-\mathbf{b})+\mathbf{a}.\mathbf{b}=0$ होगा।

Tips & Tricks

✍ x-अक्ष, y-अक्ष तथा z-अक्ष के समान्तर इकाई सदिश को क्रमशः $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ तथा $\mathbf{k}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

✍ दो इकाई सदिश समान होंगे, यदि उनकी दिशाएँ समान हों।

✍ इकाई सदिश स्व-व्युत्क्रमणीय होता है।

✍ दो सदिशों के बीच के कोण का अन्तःकोणार्धक, संगत इकाई सदिशों के सदिश योग के अनुदिश होता है।

✍ दो सदिशों के बीच के कोण का बाह्यःकोणार्धक, संगत इकाई सदिशों के सदिश अन्तर के अनुदिश होता है।

✍ यदि $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ किसी त्रिभुज के शीर्षों के स्थिति सदिश हों, तो इसके केन्द्रक का स्थिति सदिश $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$ होगा।

✍ यदि $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ किसी चतुष्फलक के शीर्षों के स्थिति सदिश हों, तो इसके केन्द्रक का स्थिति सदिश $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$ होगा।

✍ **लैगरेंज सर्वसमिका** : यदि $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ कोई दो सदिश हैं, तब $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}.\mathbf{b})^2$ या $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a}.\mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2$.

✍ $\mathbf{a}.\mathbf{b} \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$.

✍ $\mathbf{a}.\mathbf{b} > 0 \Rightarrow \mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के बीच का कोण न्यूनकोण है।

✍ $\mathbf{a}.\mathbf{b} < 0 \Rightarrow \mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के बीच का कोण अधिककोण है।

✍ एक शून्य सदिश तथा अशून्य सदिश का अदिश गुणनफल, अदिश शून्य है।

✍ यदि समचतुष्फलक, गोले के भीतर समाहित हो, तब गोले का केन्द्र, समचतुष्फलक का केन्द्रक होता है।

✍ समचतुष्फलक के दो फलकों के बीच कोण $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ होता है।

✍ समचतुष्फलक के किसी भी शीर्ष से उसके विपरीत फलक के बीच की दूरी $\sqrt{\frac{2}{3}}k$ होती है, जहाँ k कोर की लम्बाई है।

Ordinary Thinking

Objective Questions

सदिश का मापांक, सदिशों का बीजगणित

1. भुजाओं $3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$, $4\mathbf{i}-3\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ और $7\mathbf{i}+\mathbf{j}$ से निर्मित त्रिभुज का परिमाप होगा [MP PET 1991]
   (a) $\sqrt{450}$ (b) $\sqrt{150}$
   (c) $\sqrt{50}$ (d) $\sqrt{200}$
2. यदि किसी त्रिभुज के शीर्षों के स्थिति सदिश $2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $4\mathbf{i}+5\mathbf{j}+\mathbf{k}$ तथा $3\mathbf{i}+6\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ हों, तो त्रिभुज है [UPSEAT 2004]
   (a) समकोणीय (b) समद्विबाहु
   (c) समबाहु (d) समकोणीय समद्विबाहु
3. यदि किसी वर्ग की एक भुजा सदिश $3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ द्वारा निरूपित हो तो वर्ग का क्षेत्रफल है
   (a) 12 (b) 13
   (c) 25 (d) 50
4. यदि $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ और $|x\,\mathbf{a}| = 1$, तो $x =$
   (a) $\pm\frac{1}{3}$ (b) $\pm\frac{1}{4}$
   (c) $\pm\frac{1}{5}$ (d) $\pm\frac{1}{6}$
5. निम्न में से कौनसा सदिश θ के सभी मानों के लिये इकाई सदिश नहीं है
   (a) $(\cos\theta)\mathbf{i}-(\sin\theta)\mathbf{j}$ (b) $(\sin\theta)\mathbf{i}+(\cos\theta)\mathbf{j}$
   (c) $(\sin 2\theta)\mathbf{i}-(\cos\theta)\mathbf{j}$ (d) $(\cos 2\theta)\mathbf{i}-(\sin 2\theta)\mathbf{j}$
6. यदि $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ सदिशों $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के बीच के कोण को समद्विभाजित करता हो, तो $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ हैं
   (a) परस्पर लम्बवत् (b) असमदिश सदिश
   (c) परिमाण में बराबर (d) इनमें से कोई नहीं
7. यदि $\mathbf{a} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ और $\mathbf{b} = 3\mathbf{i}+6\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, तो एक सदिश जिसकी दिशा $\mathbf{a}$ की दिशा और जिसका परिमाण $|\mathbf{b}|$ के बराबर हो, है
   (a) $7(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ (b) $\frac{7}{3}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})$
   (c) $\frac{7}{9}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})$ (d) इनमें से कोई नहीं
8. यदि $\mathbf{p} = 7\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{q} = 3\mathbf{i}+\mathbf{j}+5\mathbf{k}$, तो $\mathbf{p}-2\mathbf{q}$ का परिमाण है [MP PET 1987]
   (a) $\sqrt{29}$ (b) 4
   (c) $\sqrt{62}-2\sqrt{35}$ (d) $\sqrt{66}$
9. माना कि $\mathbf{a} = \mathbf{i}$ एक सदिश है जो एकक (unit) सदिश $\mathbf{b}$ के साथ 120^o का कोण बनाता है, तब एकक सदिश $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ है [MP PET 1991]
   (a) $-\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{j}$
   (c) $\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}-\frac{1}{2}\mathbf{j}$

10. यदि एक त्रिभुज के शीर्षों के स्थिति सदिश $6\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$, $4\mathbf{i}+5\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ तथा $5\mathbf{i}+6\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ हों, तो त्रिभुज है

(a) समकोणीय (b) समद्विबाहु
(c) समबाहु (d) इनमें से कोई नहीं

11. किसी त्रिभुज के शीर्ष $(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $(5\mathbf{i}+3\mathbf{j}-3\mathbf{k})$ व $(2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+9\mathbf{k})$ हैं, तो उसका परिमाप होगा [MP PET 1993]

(a) $15+\sqrt{157}$ (b) $15-\sqrt{157}$
(c) $\sqrt{15}-\sqrt{157}$ (d) $\sqrt{15}+\sqrt{157}$

12. दो बिन्दुओं A व B के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ व $2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ हों, तो $|\overrightarrow{AB}|=$ [BIT Ranchi 1992]

(a) 2 (b) 3
(c) 4 (d) 5

13. परस्पर लम्बवत् बलों **a**, **b** व **c** के परिमाण क्रमशः 2, 10 व 11 हैं। तब इसके परिणामी का परिमाण होगा [IIT 1984]

(a) 12 (b) 15
(c) 9 (d) इनमें से कोई नहीं

14. सदिशों **i**, **j**, **k** का निकाय है

(a) लम्बकोणीय (b) समतलीय
(c) समरेखीय (d) इनमें से कोई नहीं

15. सदिशों $(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $(-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$ व $(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})$ के परिणामी की दिक् कोज्यायें हैं

(a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$
(c) $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

16. P व Q के स्थिति सदिश क्रमशः $5\mathbf{i}+4\mathbf{j}+a\mathbf{k}$ व $-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ हैं। यदि इन दोनों के बीच की दूरी 7 है, तो a का मान होगा

(a) – 5, 1 (b) 5, 1
(c) 0, 5 (d) 1, 0

17. एक शून्य सदिश रखता है

(a) कोई भी दिशा (b) कोई दिशा नहीं
(c) कई दिशायें (d) इनमें से कोई नहीं

18. एक इकाई सदिश **a**, z-अक्ष के साथ $\frac{\pi}{4}$ कोण बनाता है। यदि $\mathbf{a}+\mathbf{i}+\mathbf{j}$ एक इकाई सदिश हो, तो **a** का मान होगा [IIT 1988]

(a) $\frac{\mathbf{i}}{2}+\frac{\mathbf{j}}{2}+\frac{\mathbf{k}}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{\mathbf{i}}{2}+\frac{\mathbf{j}}{2}-\frac{\mathbf{k}}{\sqrt{2}}$
(c) $-\frac{\mathbf{i}}{2}-\frac{\mathbf{j}}{2}+\frac{\mathbf{k}}{\sqrt{2}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

19. बल है

(a) इकाई सदिश (b) स्थानीकृत सदिश
(c) शून्य सदिश (d) स्वतंत्र सदिश

20. किसी बिन्दु O के सापेक्ष चार बिन्दुओं A, B, C तथा D के स्थिति सदिश क्रमशः **a**, **b**, **c** व **d** इस प्रकार हैं कि इनमें से कोई भी तीन बिन्दु समरेखीय नहीं हैं एवं $\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{b}+\mathbf{d}$ तो चतुर्भुज $ABCD$ है

(a) वर्ग (b) समचतुर्भुज
(c) आयत (d) समान्तर चतुर्भुज

21. यदि A, B के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{i}+3\mathbf{j}-7\mathbf{k}$ व $5\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ हों, तो $\overrightarrow{AB}$ की दिक् कोज्या y-अक्ष के अनुदिश होगी [MNR 1989]

(a) $\frac{4}{\sqrt{162}}$ (b) $-\frac{5}{\sqrt{162}}$
(c) – 5 (d) 11

22. यदि दो बलों के परिणामी का परिमाण P है एवं उनमें से एक के बराबर व इस पर लम्ब है, तो दूसरा बल है [MNR 1986]

(a) $P\sqrt{2}$ (b) P
(c) $P\sqrt{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

23. सदिश $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ की दिक् कोज्या धनात्मक x-अक्ष की दिशा में होगी [MP PET 1991]

(a) $\pm\frac{3}{\sqrt{50}}$ (b) $\frac{4}{\sqrt{50}}$
(c) $\frac{3}{\sqrt{50}}$ (d) $-\frac{4}{\sqrt{50}}$

24. बिन्दु, जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, $3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $4\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ हैं, हैं [EAMCET 1988]

(a) समकोण त्रिभुज के शीर्ष (b) समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष
(c) समबाहु त्रिभुज के शीर्ष (d) समरेखीय

25. माना α,β,γ भिन्न वास्तविक संख्यायें हैं। बिन्दु जिनके स्थिति सदिश $\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}+\gamma\mathbf{k}$, $\beta\mathbf{i}+\gamma\mathbf{j}+\alpha\mathbf{k}$, $\gamma\mathbf{i}+\alpha\mathbf{j}+\beta\mathbf{k}$ हैं, तो ये [IIT Screening 1994]

(a) समरेखीय होंगे
(b) समबाहु त्रिभुज बनाते हैं
(c) विषमबाहु त्रिभुज बनाते हैं
(d) एक समकोण त्रिभुज बनाते हैं

26. यदि $|\mathbf{a}|=3$, $|\mathbf{b}|=4$ व $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=5$, तो $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=$ [EAMCET 1994]

(a) 6 (b) 5
(c) 4 (d) 3

27. यदि $OP=8$ तथा $\overrightarrow{OP}$, अक्ष OX व अक्ष OY के साथ क्रमशः 45^o व 60^o के कोण बनाता हो, तो $\overrightarrow{OP}=$

(a) $8(\sqrt{2}\mathbf{i}+\mathbf{j}\pm\mathbf{k})$ (b) $4(\sqrt{2}\mathbf{i}+\mathbf{j}\pm\mathbf{k})$
(c) $\frac{1}{4}(\sqrt{2}\mathbf{i}+\mathbf{j}\pm\mathbf{k})$ (d) $\frac{1}{8}(\sqrt{2}\mathbf{i}+\mathbf{j}\pm\mathbf{k})$

28. यदि **a** तथा **b** दो अशून्य एवं असरैखिक सदिश हों, तो $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ एवं $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ हैं [MP PET 1997]

(a) रैखिक परतन्त्र सदिश
(b) रैखिक स्वतन्त्र सदिश
(c) रैखिक परतन्त्र एवं स्वतन्त्र सदिश
(d) इनमें से कोई नहीं

29. यदि सदिश $6\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-6\mathbf{k}$ तथा $3\mathbf{i}+6\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ एक त्रिभुज बनाते हैं, तब यह है [Karnataka CET 1999]

(a) समकोण त्रिभुज (b) अधिककोण त्रिभुज
(c) समबाहु त्रिभुज (d) समद्विबाहु त्रिभुज

30. यदि दो बल P तथा Q, 60^o का कोण बनाते हुए किसी बिन्दु पर कार्यरत हैं तथा इनका परिणामी बल $\sqrt{7}Q$ है तब P/Q है [Roorkee 1999]

(a) 1 (b) $\frac{3}{2}$
(c) 2 (d) 4

31. सदिश $3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ की दिक् कोज्यायें हैं [Karnataka CET 2000]

(a) $\frac{3}{5},\frac{-4}{5},\frac{1}{5}$ (b) $\frac{3}{5\sqrt{2}},\frac{-4}{5\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}$

(c) $\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{-4}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{3}{5\sqrt{2}},\frac{4}{5\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}$

32. यदि A तथा B के स्थिति सदिश क्रमशः $2\mathbf{i}-9\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ तथा $6\mathbf{i}-3\mathbf{j}+8\mathbf{k}$ हैं, तब $\overrightarrow{AB}$ का परिमाण है [MP PET 2000]

(a) 11 (b) 12

(c) 13 (d) 14

33. यदि P तथा Q के स्थिति सदिश $(\mathbf{i}+3\mathbf{j}-7\mathbf{k})$ तथा $(5\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k})$ हों, तो $|\overrightarrow{PQ}| =$ [MP PET 2001, 03]

(a) $\sqrt{158}$ (b) $\sqrt{160}$

(c) $\sqrt{161}$ (d) $\sqrt{162}$

34. यदि **a**, मापांक a का अशून्य सदिश है तथा m एक अशून्य अदिश है, तब $m\mathbf{a}$ एक इकाई सदिश होगा यदि [MP PET 2002]

(a) $m=\pm 1$ (b) $m=|\mathbf{a}|$

(c) $m=\frac{1}{|\mathbf{a}|}$ (d) $m=\pm 2$

35. बिन्दुओं A, B, C के स्थिति सदिश क्रमशः $(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})$, $(3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})$ तथा $(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-3\mathbf{k})$ हैं। तब यह बिन्दु [Kurukshetra CEE 2002]

(a) एक समद्विबाहु त्रिभुज बनाते हैं

(b) एक समकोण त्रिभुज बनाते हैं

(c) समरेखीय हैं

(d) विषमबाहु त्रिभुज बनाते हैं

36. यदि सदिश $\overrightarrow{AB}=3\mathbf{i}+4\mathbf{k}$ तथा $\overrightarrow{AC}=5\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ त्रिभुज ABC की भुजाएँ हैं, तब A से जाने वाली माध्यिका की लम्बाई है [AIEEE 2003]

(a) $\sqrt{18}$ (b) $\sqrt{72}$

(c) $\sqrt{33}$ (d) $\sqrt{288}$

37. यदि एक त्रिभुज ABC के शीर्षों के स्थिति सदिश क्रमशः $7\mathbf{j}+10\mathbf{k}$, $-\mathbf{i}+6\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ और $-4\mathbf{i}+9\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ हैं, तब त्रिभुज है [UPSEAT 2004]

(a) समबाहु

(b) समद्विबाहु

(c) विषमबाहु

(d) समकोण त्रिभुज और समद्विबाहु भी

38. चार बिन्दुओं $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$, $3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ और $\mathbf{k}-\mathbf{j}$ द्वारा निर्मित आकृति है [MP PET 2004]

(a) आयत (b) समान्तर चतुर्भुज

(c) समलम्ब (d) इनमें से कोई नहीं

39. ABC, A पर समकोण समद्विबाहु त्रिभुज है। $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ तथा $\overrightarrow{AB}$ के अनुदिश क्रमशः $2\sqrt{2}, 5$ तथा 6 परिमाण के बल कार्यरत् हैं, तब इनके परिणामी बल का परिमाण है [Roorkee 1999]

(a) 4 (b) 5

(c) $11+2\sqrt{2}$ (d) 30

40. यदि $ABCDEF$ एक समषट्भुज हो तथा $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\lambda\,\overrightarrow{AD}$, तो $\lambda =$ [RPET 1985]

(a) 2 (b) 3

(c) 4 (d) 6

41. यदि P तथा Q समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ की भुजाओं BC तथा CD के मध्य बिन्दु हों, तो $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ} =$

(a) $\overrightarrow{AC}$ (b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

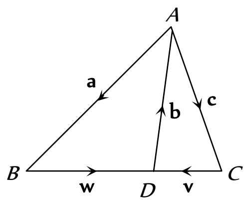
(c) $\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ (d) $\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

42. P, ΔABC की भुजा BC पर कोई बिन्दु है और Q एक ऐसा बिन्दु है कि $\overrightarrow{PQ}$, सदिशों $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ का परिणामी है, तब $ABQC$ है

(a) वर्ग (b) आयत

(c) समान्तर चतुर्भुज (d) समलम्ब चतुर्भुज

43. चित्र में; एक सदिश **x**, समीकरण $\mathbf{x}-\mathbf{w}=\mathbf{v}$ को संतुष्ट करता है, तब **x** =



(a) $2\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ (b) $\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c}$

(c) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+2\mathbf{c}$ (d) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$

44. असमरेखीय सदिशों **a** तथा **b** के साथ समतलीय सदिश है

(a) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$

(c) $\mathbf{a}.\mathbf{b}$ (d) इनमें से कोई नहीं

45. $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है। यदि $\overrightarrow{AB}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ तथा $\overrightarrow{AD}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ हो, तो BD की दिशा में एकक सदिश है [Roorkee 1976]

(a) $\frac{1}{\sqrt{69}}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-8\mathbf{k})$ (b) $\frac{1}{69}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-8\mathbf{k})$

(c) $\frac{1}{\sqrt{69}}(-\mathbf{i}-2\mathbf{j}+8\mathbf{k})$ (d) $\frac{1}{69}(-\mathbf{i}-2\mathbf{j}+8\mathbf{k})$

46. यदि **a**, **b** व **c** तीन अशून्य अदिश हैं जिनमें कोई दो समरेखीय नहीं हैं। यदि सदिश $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ तथा **c** समरेखीय हों एवं $\mathbf{b}+3\mathbf{c}$ तथा **a** समरेखीय हों, तो (λ अशून्य अदिश है) $\mathbf{a}+2\mathbf{b}+6\mathbf{c}$ का मान है [AIEEE 2004]

(a) $\lambda\mathbf{a}$ (b) $\lambda\mathbf{b}$

(c) $\lambda\mathbf{c}$ (d) 0

47. यदि $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}$ व $\mathbf{b}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}$, तो $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ के अनुदिश इकाई सदिश होगा [RPET 1985, 95]

(a) $\frac{\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$ (b) $\mathbf{i}+\mathbf{j}$

(c) $\sqrt{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$ (d) $\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$

48. सदिश $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ में क्या जोड़ा जाए कि इसका परिणामी एक इकाई सदिश **i** प्राप्त हो जाए [Roorkee 1977]

(a) $-2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ (b) $-2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

(c) $2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ (d) इनमें से कोई नहीं

49. यदि $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ व $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, तो इसके परिणामी के अनुदिश इकाई सदिश होगा [Roorkee 1980]

(a) $3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ (b) $\dfrac{3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{50}$

(c) $\dfrac{3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{5\sqrt{2}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

50. किसी समषट्भुज $ABCDEF$ में, $\overrightarrow{AE} =$ [MNR 1984]

(a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB}$ (b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$

(c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF}$ (d) इनमें से कोई नहीं

51. $3\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} =$ [IIT 1988]

(a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ (b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BD}$

(c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (d) इनमें से कोई नहीं

52. यदि $\mathbf{p} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\mathbf{q} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{r} = -3\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ जहाँ **a**, **b** तथा **c** अशून्य, असमतलीय सदिश हों, तो सदिश $-2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}$ का मान है

(a) $\mathbf{p} - 4\mathbf{q}$ (b) $\dfrac{(-7\mathbf{q} + \mathbf{r})}{5}$

(c) $2\mathbf{p} - 3\mathbf{q} + \mathbf{r}$ (d) $4\mathbf{p} - 2\mathbf{r}$

53. यदि किसी समलम्ब चतुर्भुज में $\overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{AD}$, तब हमें प्राप्त होता है कि $\mathbf{p} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD}$ के साथ समरेखीय है। यदि $\mathbf{p} = \mu \overrightarrow{AD}$, तो

(a) $\mu = \lambda + 1$ (b) $\lambda = \mu + 1$

(c) $\lambda + \mu = 1$ (d) $\mu = 2 + \lambda$

54. यदि सदिश $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 8\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ है, तो $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ का परिमाण है [MP PET 1996]

(a) 13 (b) $\dfrac{13}{3}$

(c) $\dfrac{3}{13}$ (d) $\dfrac{4}{13}$

55. A, B, C, D, E पांच समतलीय बिन्दु हैं, तब $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CE}$ =[RPET 1999]

(a) $\overrightarrow{DE}$ (b) $3\overrightarrow{DE}$

(c) $2\overrightarrow{DE}$ (d) $4\overrightarrow{ED}$

56. यदि $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, तब $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} =$ [MP PET 2001]

(a) $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ (b) $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

(c) $4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ (d) $4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

57. पाँच बिन्दु A, B, C, D, E एक तल में हैं। तीन बल $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ तथा $\overrightarrow{AE}$ बिन्दु A पर कार्यरत् हैं तथा तीन बल $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{EB}$ बिन्दु B पर कार्यरत् हैं, तब इन बलों का परिणामी है [AMU 2001]

(a) $2\overrightarrow{AC}$ (b) $3\overrightarrow{AB}$

(c) $3\overrightarrow{DB}$ (d) $2\overrightarrow{BC}$

58. दो बलों का योग 18 N है। इन दोनों बलों का तथा परिणामी 12 N है तथा जिसकी दिशा, छोटे वाले बल से समकोण पर है। दोनों बलों का परिमाण है [AIEEE 2002]

(a) 13, 5 (b) 12, 6

(c) 14, 4 (d) 11, 7

59. वह इकाई सदिश, जो कि सदिश $2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ के परिणामी सदिश के समान्तर है, है [MP PET 2003]

(a) $\dfrac{1}{7}(3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$ (b) $\dfrac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{3}}$

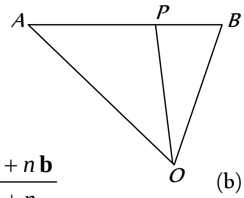
(c) $\dfrac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{6}}$ (d) $\dfrac{1}{\sqrt{69}}(-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 8\mathbf{k})$

60. यदि **a**, **b**, **c** त्रिभुज ABC के शीर्षों A, B, C के स्थिति सदिश हों, तो ΔABC के केन्द्रक का स्थिति सदिश है [MP PET 1987]

(a) $\dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$ (b) $\dfrac{1}{2}\left(\mathbf{a} + \dfrac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}\right)$

(c) $\mathbf{a} + \dfrac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}$ (d) $\dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}$

61. यदि दिये हुये चित्र में $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ और $AP : PB = m : n$, तो $\overrightarrow{OP} =$ [RPET 1981; MP PET 1988]



(a) $\dfrac{m\,\mathbf{a} + n\,\mathbf{b}}{m + n}$ (b) $\dfrac{n\,\mathbf{a} + m\,\mathbf{b}}{m + n}$

(c) $m\,\mathbf{a} - n\,\mathbf{b}$ (d) $\dfrac{m\,\mathbf{a} - n\,\mathbf{b}}{m - n}$

62. यदि D, E, F त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA तथा AB के मध्य बिन्दु हों, तो $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$ है

(a) एक शून्य सदिश (b) एक इकाई सदिश

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

63. यदि **a** तथा **b** क्रमशः A तथा B के स्थिति सदिश हों, तब एक बिन्दु का स्थिति सदिश, जो बढ़ाई गयी रेखा AB पर इस प्रकार स्थित है कि $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$, होगा [MNR 1980; MP PET 1995, 99]

(a) $3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ (b) $3\mathbf{b} - \mathbf{a}$

(c) $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ (d) $3\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$

64. बिन्दुओं A तथा B के स्थिति सदिश $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ तथा $3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ हैं। रेखा AB के मध्य बिन्दु का स्थिति सदिश होगा [MP PET 1988]

(a) $\dfrac{1}{2}\mathbf{i} - \dfrac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$ (b) $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \dfrac{5}{2}\mathbf{k}$

(c) $\dfrac{3}{2}\mathbf{i} - \dfrac{1}{2}\mathbf{j} + \dfrac{3}{2}\mathbf{k}$ (d) इनमें से कोई नहीं

65. यदि $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज हो और A, B, C के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ व $7\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ हों, तो D का स्थिति सदिश होगा

(a) $7\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ (b) $7\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$

(c) $9\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 13\mathbf{k}$ (d) $8\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

66. P, समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्णों का प्रतिच्छेद बिन्दु है। यदि O कोई बिन्दु हो, तो $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} =$ [RPET 1989; J & K 2005]

(a) $\overrightarrow{OP}$ (b) $2\,\overrightarrow{OP}$

(c) $3\,\overrightarrow{OP}$ (d) $4\,\overrightarrow{OP}$

67. यदि बिन्दुओं *A, B, C* के स्थिति सदिश क्रमशः **i, j, k** हों और *P* एक ऐसा बिन्दु हो कि $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CP}$, तो *P* का स्थिति सदिश है

(a) $-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ (b) $-\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ (d) इनमें से कोई नहीं

68. यदि बिन्दुओं *A, B, C, D* के स्थिति सदिश क्रमशः $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$, $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $-5\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{i}+10\mathbf{j}+10\mathbf{k}$ हो, तो [MNR 1982]

(a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (b) $\overrightarrow{AB} \,||\, \overrightarrow{CD}$

(c) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ (d) इनमें से कोई नहीं

69. यदि रेखाखण्ड *AB* के एक सिरे का स्थिति सदिश $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ हो और इसके मध्य बिन्दु का स्थिति सदिश $3(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ हो, तो दूसरे सिरे का स्थिति सदिश है

(a) $4\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ (b) $4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+7\mathbf{k}$

(c) $4\mathbf{i}+3\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ (d) $4\mathbf{i}+3\mathbf{j}-7\mathbf{k}$

70. यदि *G* तथा *G'* क्रमशः त्रिभुजों *ABC* तथा *A'B'C'* के केन्द्रक हों, तो $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'} =$

(a) $\frac{2}{3}\overrightarrow{GG'}$ (b) $\overrightarrow{GG'}$

(c) $2\overrightarrow{GG'}$ (d) $3\overrightarrow{GG'}$

71. यदि *O* तथा *O'* त्रिभुज *ABC* के क्रमशः परिकेन्द्र तथा लम्बकेन्द्र हों, तो $\overrightarrow{O'A}+\overrightarrow{O'B}+\overrightarrow{O'C} =$

(a) $\overrightarrow{OO'}$ (b) $2\overrightarrow{O'O}$

(c) $2\overrightarrow{OO'}$ (d) **0**

72. यदि समषट्भुज *ABCDEF* की भुजाओं *AB* तथा *BC* द्वारा निरूपित सदिश **a** तथा **b** हों, तो $\overrightarrow{AE}$ द्वारा निरूपित सदिश होगा

(a) $2\mathbf{b}-\mathbf{a}$ (b) $\mathbf{b}-\mathbf{a}$

(c) $2\mathbf{a}-\mathbf{b}$ (d) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$

73. यदि बिन्दु *C* का *B* के सापेक्ष स्थिति सदिश $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ तथा *B* का *A* के सापेक्ष स्थिति सदिश $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ हो, तो *C* का *A* के सापेक्ष स्थिति सदिश होगा [MP PET 1989]

(a) $2\mathbf{i}$ (b) $2\mathbf{j}$

(c) $-2\mathbf{j}$ (d) $-2\mathbf{i}$

74. *A* एवं *B* दो बिन्दु हैं। *A* का स्थिति सदिश $6\mathbf{b}-2\mathbf{a}$ है। एक बिन्दु *P*, रेखा *AB* को 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करती है। यदि *P* का स्थिति सदिश $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ हो, तो *B* का स्थिति सदिश है [MP PET 1993]

(a) $7\mathbf{a}-15\mathbf{b}$ (b) $7\mathbf{a}+15\mathbf{b}$

(c) $15\mathbf{a}-7\mathbf{b}$ (d) $15\mathbf{a}+7\mathbf{b}$

75. यदि बिन्दुओं *A* व *B* के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ व $3\mathbf{i}-\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ हों, तो *AB* के मध्य बिन्दु के स्थिति सदिश होंगे [MP PET 1992]

(a) $\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ (b) $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

(c) $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ (d) $\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

76. यदि *C, AB* का मध्य बिन्दु एवं *P, AB* के बाहर कोई बिन्दु है, तो [MNR 1991; UPSEAT 2000; AIEEE 2005]

(a) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC}$ (b) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PC}$

(c) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC} = 0$ (d) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC} = 0$

77. यदि त्रिभुज में $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ व *D, E* क्रमशः *AB* तथा *AC* के मध्य बिन्दु हों, तो $\overrightarrow{DE}$ का मान है [RPET 1986]

(a) $\frac{\mathbf{a}}{4}-\frac{\mathbf{b}}{4}$ (b) $\frac{\mathbf{a}}{2}-\frac{\mathbf{b}}{2}$

(c) $\frac{\mathbf{b}}{4}-\frac{\mathbf{a}}{4}$ (d) $\frac{\mathbf{b}}{2}-\frac{\mathbf{a}}{2}$

78. त्रिभुज *ABC* में, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$ तो [RPET 1984]

(a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0}$ (b) $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c} = \mathbf{0}$

(c) $\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0}$ (d) $-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0}$

79. *ABCDE* एक पंचभुज है। बल $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{ED}$ एक बिन्दु पर कार्यरत् हैं। इस निकाय में कौनसा बल जोड़ा जाए ताकि परिणामी $2\overrightarrow{AC}$ हो जाए [MNR 1984]

(a) $\overrightarrow{AC}$ (b) $\overrightarrow{AD}$

(c) $\overrightarrow{BC}$ (d) $\overrightarrow{BD}$

80. माना मूलबिन्दु *O* के सापेक्ष *A* व *B* के स्थिति सदिश क्रमशः **a** व **b** हैं। यदि बिन्दु *C, OA* पर इस प्रकार हैं कि $2AC = CO$ तथा *CD*, *OB* के समान्तर है एवं $|\overrightarrow{CD}| = 3|\overrightarrow{OB}|$, तो $\overrightarrow{AD}$ का मान है

(a) $3\mathbf{b}-\frac{\mathbf{a}}{2}$ (b) $3\mathbf{b}+\frac{\mathbf{a}}{2}$

(c) $3\mathbf{b}-\frac{\mathbf{a}}{3}$ (d) $3\mathbf{b}+\frac{\mathbf{a}}{3}$

81. त्रिभुज *ABC* में, यदि $2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{CB}$ तो $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$ का मान है [IIT 1988; Pb. CET 2003]

(a) $5\overrightarrow{OC}$ (b) $-\overrightarrow{OC}$

(c) $\overrightarrow{OC}$ (d) इनमें से कोई नहीं

82. यदि $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$, तो *A, B, C* बनाते हैं [IIT 1983]

(a) समबाहु त्रिभुज (b) समकोण त्रिभुज

(c) समद्विबाहु त्रिभुज (d) रेखा

83. तीन सदिश जो कि एक त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं से दिष्ट माध्यिकाओं से निर्धारित हैं, का योग है [MP PET 1997]

(a) 0 (b) 1

(c) -1 (d) $\frac{1}{3}$

84. बिन्दुओं $2\mathbf{a}-3\mathbf{b}$ व $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$ को मिलाने वाली रेखा को 2 : 3 में अन्तः विभाजित करने वाले बिन्दु का स्थिति सदिश है [AI CBSE 1985]

(a) $\frac{12}{5}\mathbf{a}+\frac{13}{5}\mathbf{b}$ (b) $\frac{12}{5}\mathbf{a}-\frac{13}{5}\mathbf{b}$

(c) $\frac{3}{5}\mathbf{a}-\frac{2}{5}\mathbf{b}$ (d) इनमें से कोई नहीं

85. यदि बिन्दुओं *A, B, C* के स्थिति सदिश क्रमशः **i, j, k** हैं तथा $AB = CX$, तो बिन्दु *X* का स्थिति सदिश है [MP PET 1994]

(a) $-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ (d) $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$

86. यदि बिन्दु A तथा B के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ हों तथा बिन्दु C, रेखा AB को 2 : 1 में विभाजित करे तो बिन्दु C का स्थिति सदिश होगा [RPET 1996]

(a) $\frac{\mathbf{a}+2\mathbf{b}}{3}$ (b) $\frac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3}$

(c) $\frac{\mathbf{a}+2}{3}$ (d) $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$

87. यदि A, B, C किसी त्रिभुज के शीर्ष हैं जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ तथा $\mathbf{c}$ हैं तथा G, ΔABC का केन्द्रक है, तो $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=$ [Karnataka CET 2000]

(a) $\mathbf{0}$ (b) $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$

(c) $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$ (d) $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}}{3}$

88. यदि O मूलबिन्दु है तथा C, $A(2,-1)$ तथा $B(-4,3)$ का मध्य बिन्दु है तो $\overrightarrow{OC}$ का मान है [RPET 2001]

(a) $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ (b) $\mathbf{i}-\mathbf{j}$

(c) $-\mathbf{i}+\mathbf{j}$ (d) $-\mathbf{i}-\mathbf{j}$

89. यदि $ABCDEF$ एक समषट्भुज हो, तो $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=$ [Karnataka CET 2002]

(a) 0 (b) $2\overrightarrow{AB}$

(c) $3\overrightarrow{AB}$ (d) $4\overrightarrow{AB}$

90. यदि बिन्दु A का स्थिति सदिश $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ है तथा सदिश $\mathbf{a}$, AB को अनुपात $2:3$ में विभाजित करता है, तब B का स्थिति सदिश है [MP PET 2002]

(a) $2\mathbf{a}-\mathbf{b}$ (b) $\mathbf{b}-2\mathbf{a}$

(c) $\mathbf{a}-3\mathbf{b}$ (d) $\mathbf{b}$

91. यदि किसी ΔABC में भुजाओं AB, AC तथा BC के मध्य बिन्दु क्रमशः D, E, F हैं, तब $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AF}=$ [EAMCET 2003]

(a) $\overrightarrow{DC}$ (b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$

(c) $2\overrightarrow{BF}$ (d) $\frac{3}{2}\overrightarrow{BF}$

92. यदि त्रिभुज ABC के शीर्षों A, B तथा C के स्थिति सदिश क्रमशः $4\mathbf{i}+7\mathbf{j}+8\mathbf{k}$, $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ व $2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ है, तब उस बिन्दु का स्थिति सदिश जिस पर कोण A का समद्विभाजक BC पर मिलता है, है [Pb. CET 2004]

(a) $\frac{1}{3}(6\mathbf{i}+13\mathbf{j}+18\mathbf{k})$ (b) $\frac{2}{3}(6\mathbf{i}+12\mathbf{j}-8\mathbf{k})$

(c) $\frac{1}{3}(-6\mathbf{i}-8\mathbf{j}-9\mathbf{k})$ (d) $\frac{2}{3}(-6\mathbf{i}-12\mathbf{j}+8\mathbf{k})$

93. यदि $\mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$ और $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{k}$, तो एक इकाई सदिश जो $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के साथ समतलीय हो और $\mathbf{a}$ पर लम्ब हो, होगा

(a) $\mathbf{i}$ (b) $\mathbf{j}$

(c) $\mathbf{k}$ (d) इनमें से कोई नहीं

94. यदि बिन्दुओं A, B, C के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ और $a\,\mathbf{i}+b\,\mathbf{j}+c\,\mathbf{k}$ हों, तो बिन्दु A, B, C समरेखीय होंगे यदि

(a) $a=b=c=1$

(b) $a=1$, b तथा c स्वेच्छ अदिश हों

(c) $a=b=c=0$

(d) $c=0$, $a=1$ तथा b स्वेच्छ अदिश हों

95. यदि बिन्दु $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ तथा $\mathbf{a}+k\,\mathbf{b}$ समरेखीय हों, तो $k=$

(a) 0 (b) 2

(c) -2 (d) कोई भी वास्तविक संख्या

96. यदि बिन्दुओं A, B, C के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ तथा $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$ हों, तो बिन्दु A, B, C हैं [MP PET 1989]

(a) समरेखीय (b) समरेखीय नहीं

(c) एक समकोण Δ बनाते हैं (d) इनमें से कोई नहीं

97. यदि $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ऐसे असमरेखीय सदिश हैं, कि अदिशों x, y, z के लिये $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}=\mathbf{0}$, तो [RPET 2002]

(a) $x=0, y=0, z=0$ (b) $x\neq 0, y\neq 0, z=0$

(c) $x=0, y\neq 0, z\neq 0$ (d) $x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0$

98. यदि सदिश $3\mathbf{i}+\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ तथा $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}-15\mathbf{k}$ समरेखीय हों, तो [RPET 1986; MP PET 1988]

(a) $a=3, b=1$ (b) $a=9, b=1$

(c) $a=3, b=3$ (d) $a=9, b=3$

99. बिन्दु, जिनके स्थिति सदिश $60\mathbf{i}+3\mathbf{j}$, $40\mathbf{i}-8\mathbf{j}$ तथा $a\mathbf{i}-52\mathbf{j}$ हैं, समरेखीय होंगे, यदि $a=$ [RPET 1991; IIT 1983; MP PET 2002]

(a) -40 (b) 40

(c) 20 (d) इनमें से कोई नहीं

100. यदि O मूलबिन्दु है और A का स्थिति सदिश $4\mathbf{i}+5\mathbf{j}$ है, तो $\overrightarrow{OA}$ के समान्तर एक इकाई सदिश है

(a) $\frac{4}{\sqrt{41}}\mathbf{i}$ (b) $\frac{5}{\sqrt{41}}\mathbf{i}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{41}}(4\mathbf{i}+5\mathbf{j})$ (d) $\frac{1}{\sqrt{41}}(4\mathbf{i}-5\mathbf{j})$

101. यदि बिन्दुओं A तथा B के स्थिति सदिश क्रमशः $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ तथा $-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ हों, तो रेखा AB समान्तर है

(a) xy-समतल के (b) yz-समतल के

(c) zx-समतल के (d) इनमें से कोई नहीं

102. बिन्दु, जिनके स्थिति सदिश $10\mathbf{i}+3\mathbf{j}, 12\mathbf{i}-5\mathbf{j}$ व $a\mathbf{i}+11\mathbf{j}$ हैं, समरेखीय होंगे यदि $a=$ [MNR 1992; Kurukshetra CEE 2002]

(a) -8 (b) 4

(c) 8 (d) 12

103. तीन बिन्दु, जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ व $\mathbf{a}+k\mathbf{b}$ हैं, समरेखीय होंगे यदि k का मान है [IIT 1984]

(a) शून्य

(b) केवल ऋणात्मक वास्तविक संख्या

(c) केवल धनात्मक वास्तविक संख्या

(d) प्रत्येक वास्तविक संख्या

104. यदि A, B, C, D के स्थिति सदिश क्रमशः $2\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{i}-3\mathbf{j}$, $3\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ व $\mathbf{i}+\lambda\mathbf{j}$ हों एवं $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$ तो λ का मान होगा [RPET 1988]

(a) -8 (b) -6

(c) 8 (d) 6

105. यदि सदिश $3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ व $6\mathbf{i}-4x\mathbf{j}+y\mathbf{k}$ समान्तर हों तो x व y का मान होगा [RPET 1985, 86]

(a) $-1, -2$ (b) $1, -2$

(c) $-1, 2$ (d) $1, 2$

106. यदि $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ व
$(\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k})x+(3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k})y+(-4\mathbf{i}+5\mathbf{j})z=\lambda(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$,
तो λ का मान होगा [IIT 1982; RPET 1984]
(a) – 2, 0 (b) 0, – 2
(c) – 1, 0 (d) 0, – 1

107. सदिश **a**, **b** व **a** + **b** हैं
(a) समरेखीय (b) समतलीय
(c) असमतलीय (d) इनमें से कोई नहीं

108. यदि **a**, **b**, **c** तीन समरेखीय बिन्दुओं के स्थिति सदिश हैं, तो x, y, z का अस्तित्व इस प्रकार है कि
(a) $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}=0,\ x+y+z\neq 0$
(b) $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}\neq 0,\ x+y+z=0$
(c) $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}\neq 0,\ x+y+z\neq 0$
(d) $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}=0,\ x+y+z=0$

109. यदि $\mathbf{a}=(2, 5)$ व $\mathbf{b}=(1, 4)$, तो $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ के समान्तर सदिश है
(a) (3, 5) (b) (1, 1)
(c) (1, 3) (d) (8, 5)

110. सदिश **a** व **b** असमरेखीय हैं। x का वह मान जिसके लिये सदिश $\mathbf{c}=(x-2)\mathbf{a}+\mathbf{b}$ व $\mathbf{d}=(2x+1)\mathbf{a}-\mathbf{b}$ समरेखीय हैं, है
(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$
(c) $\frac{1}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

111. सदिश $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\lambda\mathbf{i}+4\mathbf{j}+7\mathbf{k}$, $-3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ समरेखीय होंगे यदि λ का मान है [Kurukshetra CEE 1996]
(a) 3 (b) 4
(c) 5 (d) 6

112. यदि चार बिन्दुओं P, Q, R, S के स्थिति सदिश क्रमशः $2\mathbf{a}+4\mathbf{c}$, $5\mathbf{a}+3\sqrt{3}\,\mathbf{b}+4\mathbf{c}$, $-2\sqrt{3}\mathbf{b}+\mathbf{c}$ एवं $2\mathbf{a}+\mathbf{c}$ हैं, तो [MP PET 1997]
(a) $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ के समान्तर है
(b) $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ के समान्तर नहीं है
(c) $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ के बराबर है
(d) $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ के समान्तर तथा बराबर है

113. यदि $\mathbf{a}=(1,-1)$ तथा $\mathbf{b}=(-2,m)$ दो संरेख सदिश हैं, तब $m=$ [MP PET 1998]
(a) 4 (b) 3
(c) 2 (d) 0

114. यदि तीन बिन्दु A, B, C; जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{i}-2\mathbf{j}-8\mathbf{k}$, $5\mathbf{i}-2\mathbf{k}$ तथा $11\mathbf{i}+3\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ हैं; समरेखीय हैं, तो B, AC को किस अनुपात में विभाजित करता है [RPET 1999]
(a) 1 : 2 (b) 2 : 3
(c) 2 : 1 (d) 1 : 1

115. यदि **a** तथा **b** दो असमरेखीय सदिश हैं तथा $x\,\mathbf{a}+y\,\mathbf{b}=0$, तब [RPET 2001]
(a) $x=0$, लेकिन y आवश्यक रूप से शून्य नहीं है
(b) $y=0$, लेकिन x आवश्यक रूप से शून्य नहीं है
(c) $x=0$, $y=0$
(d) इनमें से कोई नहीं

116. तीन बिन्दुओं A, B तथा C के स्थिति सदिश क्रमशः $(1, x, 3)$, $(3, 4, 7)$ तथा $(y, -2, -5)$ हैं तथा यदि ये समरेखीय हों, तो $(x, y)=$ [EAMCET 2002]
(a) (2, – 3) (b) (– 2, 3)
(c) (2, 3) (d) (– 2, – 3)

117. **a** व **b** दो असमरेखीय सदिश हैं तब $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}$ (जहाँ x व y अदिश हैं) एक सदिश व्यक्त करता है, जो कि [MP PET 2003]
(a) **b** के समान्तर है (b) **a** के समान्तर है
(c) **a** व **b** के साथ समतलीय है (d) इनमें से कोई नहीं

118. यदि **a**, **b**, **c** तीन असमतलीय सदिश इस प्रकार हैं कि $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\alpha\mathbf{d}$ व $\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=\beta\mathbf{a}$, तो $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=$
(a) 0 (b) $\alpha\,\mathbf{a}$
(c) $\beta\,\mathbf{b}$ (d) $(\alpha+\beta)\mathbf{c}$

119. k का वह मान, जिसके लिये सदिश $\mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$ व $\mathbf{b}=-2\mathbf{i}+k\mathbf{j}$ समरेखीय हैं, है [Pb. CET 2004]
(a) 2 (b) $\frac{1}{2}$
(c) $\frac{1}{3}$ (d) 3

दो सदिशों का अदिश गुणन तथा उसके अनुप्रयोग

1. $(\mathbf{a}.\mathbf{i})\mathbf{i}+(\mathbf{a}.\mathbf{j})\mathbf{j}+(\mathbf{a}.\mathbf{k})\mathbf{k}=$ [Karnataka CET 2004]
(a) **a** (b) 2 **a**
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

2. यदि $\mathbf{r}.\mathbf{i}=\mathbf{r}.\mathbf{j}=\mathbf{r}.\mathbf{k}$ तथा $|\mathbf{r}|=3$, तो $\mathbf{r}=$
(a) $\pm 3(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ (b) $\pm\frac{1}{3}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$
(c) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ (d) $\pm\sqrt{3}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

3. यदि **a**, **b**, **c** ऐसे अशून्य सदिश हों कि $\mathbf{a}.\mathbf{b}=\mathbf{a}.\mathbf{c}$, तो कौनसा कथन सत्य है [RPET 2001]
(a) $\mathbf{b}=\mathbf{c}$ (b) $\mathbf{a}\perp(\mathbf{b}-\mathbf{c})$
(c) $\mathbf{b}=\mathbf{c}$ या $\mathbf{a}\perp(\mathbf{b}-\mathbf{c})$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. यदि **a** तथा **b** असमदिश सदिश हों, तो $\mathbf{a}.\mathbf{b}=$
(a) $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ (b) $-|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

5. यदि **a**, **b**, **c** ऐसे एकक सदिश हों कि $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$, तो $\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}.\mathbf{c}+\mathbf{c}.\mathbf{a}=$
[MP PET 1988; Karnataka CET 2000; UPSEAT 2003, 04]
(a) 1 (b) 3
(c) – 3/2 (d) 3/2

6. यदि **a**, **b**, **c** समान परिमाण के परस्पर लम्ब सदिश हों, तो **a** तथा $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ के बीच का कोण है
(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{6}$
(c) $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

7. यदि **a**, **b**, **c** परस्पर लम्बवत् इकाई सदिश हों, तो $|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|=$

[Karnataka CET 2002, 05; J & K 2005]

(a) $\sqrt{3}$ (b) 3

(c) 1 (d) 0

8. यदि $|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|$ तथा $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$, तो a तथा b के बीच का कोण है

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) π

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि a का परिमाण 5 तथा दिशा उत्तर–पूर्व है व b का परिमाण 5 तथा दिशा उत्तर–पश्चिम है, तो $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=$ [MNR 1984]

(a) 25 (b) 5

(c) $7\sqrt{3}$ (d) $5\sqrt{2}$

10. यदि इकाई सदिशों a तथा b के बीच का कोण θ हो, तो $\cos\frac{\theta}{2}=$

[MP PET 1998; Pb. CET 2002]

(a) $\frac{1}{2}|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ (b) $\frac{1}{2}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$

(c) $\frac{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|}$ (d) $\frac{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}$

11. यदि $|\mathbf{a}|=3, |\mathbf{b}|=4, |\mathbf{c}|=5$ तथा $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$, तो a तथा b के बीच का कोण है [MP PET 1989; Bihar CEE 1994]

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{6}$

(c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

12. यदि $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|>|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$, तो a तथा b के बीच का कोण है

(a) न्यून कोण (b) अधिक कोण

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) π

13. यदि a, b, c तीन सदिश इस प्रकार हैं कि $\mathbf{a}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$ तथा b व c के मध्य कोण $\pi/2$ है, तब [EAMCET 2003]

(a) $a^2=b^2+c^2$ (b) $b^2=c^2+a^2$

(c) $c^2=a^2+b^2$ (d) $2a^2-b^2=c^2$

(**नोट** : यहाँ $a=|\mathbf{a}|,\ b=|\mathbf{b}|,\ c=|\mathbf{c}|$)

14. यदि सदिशों a तथा b के बीच का कोण θ हो और $\mathbf{a}.\mathbf{b}=\cos\theta$, तो सत्य कथन है

(a) a तथा b बराबर सदिश हैं

(b) a तथा b समदिश सदिश हैं

(c) a तथा b असमदिश सदिश हैं

(d) a तथा b एकक सदिश हैं

15. यदि सदिश $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$; सदिशों $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ के साथ क्रमशः α,β,γ कोण बनाते हों, तो

(a) $\alpha=\beta\neq\gamma$ (b) $\alpha=\gamma\neq\beta$

(c) $\beta=\gamma\neq\alpha$ (d) $\alpha=\beta=\gamma$

16. $(\mathbf{r}.\mathbf{i})^2+(\mathbf{r}.\mathbf{j})^2+(\mathbf{r}.\mathbf{k})^2=$

(a) $3r^2$ (b) r^2

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

17. यदि सदिश $(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ एवं सदिशों $(2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k})$ व $(b\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ के योगफल के समान्तर इकाई सदिश का अदिश गुणन 1 हो तो b का मान है [MNR 1992; Roorkee 1985, 95; Kurukshetra CEE 1998; UPSEAT 2000]

(a) – 2 (b) – 1

(c) 0 (d) 1

18. यदि एक सदिश, जो yz–समतल में स्थित है, धनात्मक y-अक्ष तथा z-अक्ष के साथ क्रमशः 30^o तथा 60^o के कोण बनाता हो, तो निर्देशांक अक्षों के अनुदिश उसके घटक होंगे

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0$ (b) $0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{1}{2}$ (d) $0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}$

19. यदि $\vec{F_1}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\vec{F_2}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\vec{F_3}=\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\vec{A}=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ व $\vec{B}=6\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, तो $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}$ व $\vec{AB}$ का अदिश गुणनफल होगा [Roorkee 1980]

(a) 3 (b) 6

(c) 9 (d) 12

20. यदि a व b के मापांक बराबर एवं उनके बीच का कोण 120^o है तथा $\mathbf{a}.\mathbf{b}=-8$ हो, तो $|\mathbf{a}|$ का मान है [RPET 1986]

(a) – 5 (b) – 4

(c) 4 (d) 5

21. यदि $|\mathbf{a}|=3$, $|\mathbf{b}|=4$ और a तथा b के बीच का कोण 120^o हो, तो $|4\mathbf{a}+3\mathbf{b}|=$

(a) 25 (b) 12

(c) 13 (d) 7

22. एक सदिश, जिसका मापांक $\sqrt{51}$ है, सदिशों $\mathbf{a}=\frac{\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{3}$, $\mathbf{b}=\frac{-4\mathbf{i}-3\mathbf{k}}{5}$ व $\mathbf{c}=\mathbf{j}$ के साथ बराबर कोण बनाता है। तब सदिश है [Roorkee 1987]

(a) $5\mathbf{i}+5\mathbf{j}+\mathbf{k}$ (b) $5\mathbf{i}+\mathbf{j}-5\mathbf{k}$

(c) $5\mathbf{i}+\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ (d) $\pm(5\mathbf{i}-\mathbf{j}-5\mathbf{k})$

23. यदि a, b, c तीन समतलीय सदिश हों, तो [IIT 1989]

(a) $\begin{vmatrix}\mathbf{a}&\mathbf{b}&\mathbf{c}\\\mathbf{b}&\mathbf{c}&\mathbf{a}\\\mathbf{c}&\mathbf{a}&\mathbf{b}\end{vmatrix}=\mathbf{0}$ (b) $\begin{vmatrix}\mathbf{a}&\mathbf{b}&\mathbf{c}\\\mathbf{a}.\mathbf{a}&\mathbf{a}.\mathbf{b}&\mathbf{a}.\mathbf{c}\\\mathbf{b}.\mathbf{a}&\mathbf{b}.\mathbf{b}&\mathbf{b}.\mathbf{c}\end{vmatrix}=\mathbf{0}$

(c) $\begin{vmatrix}\mathbf{a}&\mathbf{b}&\mathbf{c}\\\mathbf{c}.\mathbf{a}&\mathbf{c}.\mathbf{b}&\mathbf{c}.\mathbf{c}\\\mathbf{b}.\mathbf{a}&\mathbf{b}.\mathbf{c}&\mathbf{b}.\mathbf{b}\end{vmatrix}=\mathbf{0}$ (d) $\begin{vmatrix}\mathbf{a}&\mathbf{b}&\mathbf{c}\\\mathbf{a}.\mathbf{b}&\mathbf{a}.\mathbf{a}&\mathbf{a}.\mathbf{c}\\\mathbf{c}.\mathbf{a}&\mathbf{c}.\mathbf{c}&\mathbf{c}.\mathbf{b}\end{vmatrix}=\mathbf{0}$

24. यदि सदिशों a व b के बीच कोण θ हो एवं इन दोनों के तल के लम्बवत् इकाई सदिश $\vec{\lambda}$ हो, तो a . b का मान होगा [RPET 1985]

(a) $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta\vec{\lambda}$ (b) $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta\vec{\lambda}$

(c) $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ (d) $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$

25. यदि $\mathbf{p}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ व $\mathbf{q}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ तब r के अनुदिश एक सदिश, जो कि p व q का रेखीय संयोजन एवं q पर लम्ब हो, है [MNR 1986]

(a) $\mathbf{i}+5\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{i}-5\mathbf{j}+4\mathbf{k}$

(c) $-\frac{1}{2}(\mathbf{i}+5\mathbf{j}-4\mathbf{k})$ (d) इनमें से कोई नहीं

26. यदि $\mathbf{d}=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+\mu(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\nu(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$ व $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]=\frac{1}{8}$, तो $\lambda+\mu+\nu=$

(a) $8\mathbf{d}.(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ (b) $8\mathbf{d}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$

(c) $\frac{\mathbf{d}}{8}.(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ (d) $\frac{\mathbf{d}}{8}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$

27. क्षैतिज बल व ऊर्ध्वाधर से 60^o के कोण पर झुके हुए बल, जिनका परिणामी ऊर्ध्वाधर दिशा में P कि.ग्रा. है, हैं [IIT 1983]

(a) $P, 2P$ (b) $P, P\sqrt{3}$

(c) $2P, P\sqrt{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

28. यदि **a** तथा **b** परस्पर लम्ब सदिश हों, तो $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 =$ [MP PET 1994; Pb. CET 2002]

(a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$

(c) a^2-b^2 (d) $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$

29. यदि $\mathbf{a}.\mathbf{b}=0$, तो [RPET 1995]

(a) $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$

(b) $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$

(c) **a** व **b** के बीच कोण 60^o है

(d) इनमें से कोई नहीं

30. यदि $|\mathbf{a}|=3, |\mathbf{b}|=1, |\mathbf{c}|=4$ तथा $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$, तो $\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}.\mathbf{c}+\mathbf{c}.\mathbf{a}=$ [MP PET 1995; RPET 2000]

(a) – 13 (b) – 10

(c) 13 (d) 10

31. यदि $ABCDEF$ एक समषट्भुज हो जिसकी भुजा a है, तो $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2 =$

(a) a (b) a^2

(c) $2a^2$ (d) 0

32. यदि समकोण त्रिभुज ABC में, कर्ण $AB=p$, तो $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ का मान होगा

(a) $2p^2$ (b) $\frac{p^2}{2}$

(c) p^2 (d) इनमें से कोई नहीं

33. यदि A, B, C, D कोई चार बिन्दु हैं, तो $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}=$ [MNR 1986]

(a) $2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$ (b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

(c) $5\sqrt{3}$ (d) 0

34. सदिश **a** जो सदिशों **i** व **j** के साथ समतलीय हैं एवं $\mathbf{b}=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ पर इस प्रकार लम्बवत् है कि $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$, तब सदिश **a** है

(a) $\sqrt{2}(3\mathbf{i}+4\mathbf{j})$ या $-\sqrt{2}(3\mathbf{i}+4\mathbf{j})$

(b) $\sqrt{2}(4\mathbf{i}+3\mathbf{j})$ या $-\sqrt{2}(4\mathbf{i}+3\mathbf{j})$

(c) $\sqrt{3}(4\mathbf{i}+5\mathbf{j})$ या $-\sqrt{3}(4\mathbf{i}+5\mathbf{j})$

(d) $\sqrt{3}(5\mathbf{i}+4\mathbf{j})$ या $-\sqrt{3}(5\mathbf{i}+4\mathbf{j})$

35. यदि **a** आकाश (space) में कोई सदिश है, तो [MP PET 1997]

(a) $\mathbf{a}=(\mathbf{a}.\mathbf{i})\mathbf{i}+(\mathbf{a}.\mathbf{j})\mathbf{j}+(\mathbf{a}.\mathbf{k})\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{a}=(\mathbf{a}\times\mathbf{i})+(\mathbf{a}\times\mathbf{j})+(\mathbf{a}\times\mathbf{k})$

(c) $\mathbf{a}=\mathbf{j}(\mathbf{a}.\mathbf{i})+\mathbf{k}(\mathbf{a}.\mathbf{j})+\mathbf{i}(\mathbf{a}.\mathbf{k})$

(d) $\mathbf{a}=(\mathbf{a}\times\mathbf{i})\times\mathbf{i}+(\mathbf{a}\times\mathbf{j})\times\mathbf{j}+(\mathbf{a}\times\mathbf{k})\times\mathbf{k}$

36. यदि सदिश $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ के लिए $|\mathbf{a}-\mathbf{c}|=|\mathbf{b}-\mathbf{c}|$, तब $(\mathbf{b}-\mathbf{a}).\left(\mathbf{c}-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{\mathbf{2}}\right)$ का मान है [AMU 1999]

(a) 0 (b) –1

(c) 1 (d) 2

37. (**a** .**b**) **c** तथा (**a**.**c**) **b** है [RPET 2000]

(a) दो समदिश सदिश

(b) दो समान सदिश

(c) **a** की दिशा में दो सदिश

(d) इनमें से कोई नहीं

38. यदि $\mathbf{a}=(1,-1,2), \mathbf{b}=(-2,3,5)$, $\mathbf{c}=(2,-2,4)$ तथा **i**, x-अक्ष की दिशा में इकाई सदिश है, तब $(\mathbf{a}-2\mathbf{b}+3\mathbf{c}).\mathbf{i}=$ [Karnataka CET 2001]

(a) 11 (b) 15

(c) 18 (d) 36

39. तीन अशून्य सदिशों $\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2$ तथा $\mathbf{r}_3$ के लिए $\begin{vmatrix}\mathbf{r}_1.\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_1.\mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_1.\mathbf{r}_3\\ \mathbf{r}_2.\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2.\mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_2.\mathbf{r}_3\\ \mathbf{r}_3.\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_3.\mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3.\mathbf{r}_3\end{vmatrix}=0$, तब निम्न में से असत्य कथन है [AMU 2000]

(a) तीनों सदिश परस्पर समान्तर हैं तथा एक ही तल में हैं

(b) तीनों सदिश रैखिकतः आश्रित हैं

(c) समीकरण का निकाय अशून्य हल रखता है

(d) तीनों सदिश परस्पर लम्बवत् हैं

40. माना **a**, **b** तथा **c** तीन सदिश हैं जिनके परिमाण क्रमशः 3, 4 तथा 5 हैं तथा **a** + **b** + **c** = 0, तब **a.b** + **b.c** + **c.a** का मान है [IIT 1995; DCE 2001; AIEEE 2002; UPSEAT 2002; Kerala (Engg.) 2005]

(a) 47 (b) 25

(c) 50 (d) – 25

41. यदि समचतुर्भुज की आसन्न भुजायें **a** तथा **b** हों, तो [RPET 2001]

(a) **a.b** = 0 (b) **a** × **b** = **0**

(c) **a.a** = **b.b** (d) इनमें से कोई नहीं

42. यदि **x** तथा **y** दो एकक सदिश हों तथा π उनके बीच का कोण हो, तब $\frac{1}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ का मान होगा [UPSEAT 2001]

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) 1 (d) $\frac{\pi}{4}$

43. यदि $\mathbf{a}.\mathbf{i}=\mathbf{a}.(\mathbf{i}+\mathbf{j})=\mathbf{a}.(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$, तब **a** = [EAMCET 2002]

(a) **i** (b) **k**

(c) **j** (d) **i** + **j** + **k**

44. यदि **i**, **j**, **k** इकाई सदिश हों, तो [MP PET 2001]

(a) **i** . **j** =1 (b) **i** . **i** =1

(c) $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=1$ (d) $\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{k})=1$

45. यदि $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$, तो $(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ है [MP PET 2002]

(a) धनात्मक (b) ऋणात्मक

(c) शून्य (d) इनमें से कोई नहीं

46. तीन सदिश **a, b, c** इस प्रकार हैं, कि $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$, $|\mathbf{a}|=1, |\mathbf{b}|=2, |\mathbf{c}|=3$, तब **a.b** + **b.c** + **c.a** का मान है [AIEEE 2003]

(a) 0 (b) – 7

(c) 7 (d) 1

47. एक इकाई सदिश, जो कि सदिशों $\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ व $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ के समतलीय एवं $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, के लम्बवत् है, होगा [IIT 1992; Kurukshetra CEE 2002]

(a) $\frac{\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$ (b) $\pm\left(\frac{\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{2}}\right)$

(c) $\frac{\mathbf{k}-\mathbf{i}}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$

48. यदि $|\mathbf{a}|=3, |\mathbf{b}|=4$. तब λ का एक मान, जिसके लिये $\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b}$ के लम्बवत् है, है [Karnataka CET 2004]

(a) $\frac{9}{16}$ (b) $\frac{3}{4}$

(c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{4}{3}$

49. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ और $\mathbf{c}$ तीन सदिश इस प्रकार हैं कि $|\mathbf{a}|=4$, $|\mathbf{b}|=4$, $|\mathbf{c}|=2$ व $\mathbf{a}$, $(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ के लम्बवत् है; $\mathbf{b}$, $(\mathbf{c}+\mathbf{a})$ के लम्बवत् है और $\mathbf{c}$, $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ के लम्बवत् है, तब $|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|=$ [UPSEAT 2004]

(a) 9 (b) 6

(c) 5 (d) 4

50. सदिशों $3\,\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\,\mathbf{k}$ तथा $2\,\mathbf{i}-2\,\mathbf{j}+4\,\mathbf{k}$ के बीच कोण है [MP PET 1990]

(a) $\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{7}}$ (b) $\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{7}}$

(c) $\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$ (d) $\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$

51. यदि बिन्दुओं *A, B, C, D* के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $2\,\mathbf{i}+5\,\mathbf{j}$, $3\,\mathbf{i}+2\,\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{i}-6\,\mathbf{j}-\mathbf{k}$ हों, तो सदिशों $\overrightarrow{AB}$ तथा $\overrightarrow{CD}$ के बीच का कोण है

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) π

52. यदि इकाई सदिशों $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के बीच का कोण θ हो, तो $\mathbf{a}-\sqrt{2}\,\mathbf{b}$ एक इकाई सदिश होगा यदि $\theta=$

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

53. यदि सदिशों $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के बीच का कोण 30^o हो, तो $3\mathbf{a}$ तथा $-4\mathbf{b}$ के बीच का कोण होगा

(a) 150^o (b) 90^o

(c) 120^o (d) 30^o

54. सदिशों $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ व $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ के बीच का कोण है [BIT Ranchi 1991]

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{15}}\right)$

(c) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{15}\right)$ (d) $\frac{\pi}{2}$

55. एक त्रिभुज *ABC* के शीर्षों के स्थिति सदिश क्रमशः $4\mathbf{i}-2\mathbf{j}, \mathbf{i}+4\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ व $-\mathbf{i}+5\mathbf{j}+\mathbf{k}$ हों, तो $\angle ABC=$ [RPET 1988, 97]

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

56. यदि सदिशों $\mathbf{a}=x\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2x\mathbf{i}+x\mathbf{j}-\mathbf{k}$ के बीच का कोण न्यूनकोण एवं $\mathbf{b}$ तथा कोटि के बीच का कोण अधिक कोण हो, तो x का मान है

(a) 1, 2 (b) – 2, – 3

(c) $x>0$ (d) इनमें से कोई नहीं

57. यदि $\mathbf{a}$ व $\mathbf{b}$ दो इकाई सदिश हैं व $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ भी इकाई सदिश है, तो $\mathbf{a}$ व $\mathbf{b}$ के बीच का कोण है [RPET 1991; MP PET 1995; Pb. CET 2001]

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

58. यदि दो सदिश $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के मध्य कोण θ है, तो $\mathbf{a}.\mathbf{b}\ge 0$ यदि [MP PET 1995]

(a) $0\le\theta\le\pi$ (b) $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi$

(c) $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

59. यदि $\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ व $\mathbf{b}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, तो सदिशों $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ व $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ के बीच कोण है [Karnataka CET 1994; Orissa JEE 2005]

(a) 30^o (b) 60^o

(c) 90^o (d) 0^o

60. x का वह मान, जिसके लिए सदिशों $\mathbf{a}=-3\mathbf{i}+x\mathbf{j}+\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{b}=x\mathbf{i}+2x\mathbf{j}+\mathbf{k}$ के बीच न्यून कोण है तथा $\mathbf{b}$ व x-अक्ष के बीच कोण $\frac{\pi}{2}$ व π के बीच है, है [Kurukshetra CEE 1996]

(a) $x>0$ (b) $x<0$

(c) केवल $x>1$ (d) केवल $x<-1$

61. सदिशों $(2\mathbf{i}+6\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ तथा $(12\mathbf{i}-4\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ के बीच का कोण है [MP PET 1996]

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{9}{11}\right)$

(c) $\cos^{-1}\left(\frac{9}{91}\right)$ (d) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{9}\right)$

62. यदि दो सदिश $\mathbf{i}+\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{i}-\mathbf{j}+a\mathbf{k}$ के बीच का कोण $\frac{\pi}{3}$ हो, तो $a=$

(a) 2 (b) 4

(c) – 2 (d) 0

63. यदि तीन सदिश $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ संबंध $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$ को संतुष्ट करते हैं तथा $|\mathbf{a}|=3$, $|\mathbf{b}|=5$, $|\mathbf{c}|=7$ तो $\mathbf{a}$ एवं $\mathbf{b}$ के बीच का कोण होगा [Kurukshetra CEE 1998; UPSEAT 2001; AIEEE 2002; MP PET 2002]

(a) 30^o (b) 45^o

(c) 60^o (d) 90^o

64. यदि a, b और c ऐसे इकाई सदिश हैं कि $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}=0$, तो a और b के बीच का कोण है [Roorkee Qualifying 1998; MP PET 1999; UPSEAT 2000; RPET 2002]

(a) $\pi/6$ (b) $\pi/3$

(c) $\pi/2$ (d) $2\pi/3$

65. यदि दो इकाई सदिशों का योग एक इकाई सदिश हो, तब उनके अन्तर का परिमाण होगा [Kurukshetra CEE 1996; RPET 1996]

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{3}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) 1

66. सदिशों $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ तथा $2\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$ के बीच का कोण होगा [MNR 1990; UPSEAT 2000]

(a) $\pi/2$ (b) $\pi/4$

(c) $\pi/3$ (d) 0

67. यदि सदिशों $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{b}=6\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ के मध्य कोण θ है, तो [MP PET 2001, 03]

(a) $\cos\theta=\frac{4}{21}$ (b) $\cos\theta=\frac{3}{19}$

(c) $\cos\theta=\frac{2}{19}$ (d) $\cos\theta=\frac{5}{21}$

68. यदि a तथा b दो इकाई सदिश इस प्रकार हों कि $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ तथा $5\mathbf{a}-4\mathbf{b}$ एक दूसरे पर लम्ब हों, तो a तथा b के मध्य कोण है [IIT Screening 2002]

(a) 45^o (b) 60^o

(c) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (d) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right)$

69. माना a तथा b दो इकाई सदिश हैं जो एक दूसरे पर θ कोण से झुके हों, तो $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ का मान होगा [BIT Ranchi 1991; Karnataka CET 2000, 01; UPSEAT 2002]

(a) $\frac{1}{2}|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ (b) $\frac{1}{2}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$

(c) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ (d) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$

70. सदिशों a + b तथा a – b के मध्य कोण का मान, जबकि $\mathbf{a}=(1,1,4)$ तथा $\mathbf{b}=(1,-1,4)$ हैं, है [Karnataka CET 2003]

(a) 90^o (b) 45^o

(c) 30^o (d) 15^o

71. लम्बाई 3 का एक सदिश, जो सदिशों $3\mathbf{i}+\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ तथा $6\mathbf{i}+5\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ में से प्रत्येक पर लम्ब है, है

(a) $2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ (b) $-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$

(c) $2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ (d) इनमें से कोई नहीं

72. यदि $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ और $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$, तो सदिश a और b हैं [Roorkee 1986; MNR 1988; IIT Screening 1989; MP PET 1990, 97; RPET 1984, 90, 96, 99; KCET 1999]

(a) एक–दूसरे के समान्तर

(b) एक–दूसरे के लम्बवत्

(c) 60^o कोण पर झुके हुए

(d) न लम्बवत् और न ही समान्तर

73. सदिश $2\mathbf{i}+a\mathbf{j}+\mathbf{k}$, सदिश $2\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$ के लम्बवत् होगा यदि $a=$ [MP PET 1987]

(a) 5 (b) – 5

(c) – 3 (d) 3

74. यदि $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{c}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}$, तो $\mathbf{a}+t\mathbf{b}$, c के लम्बवत् होगा यदि $t=$ [MNR 1979; MP PET 2002]

(a) 2 (b) 4

(c) 6 (d) 8

75. सदिश $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{i}-4\mathbf{j}+\lambda\mathbf{k}$ परस्पर लम्बवत् होंगे, यदि $\lambda=$ [MNR 1983; MP PET 1988]

(a) 0 (b) – 1

(c) – 2 (d) – 3

76. सदिश $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ तथा $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ लम्बवत् हैं, जब [MNR 1982; MP PET 1988; MP PET 2002]

(a) $a=2, b=3, c=-4$ (b) $a=4, b=4, c=5$

(c) $a=4, b=4, c=-5$ (d) इनमें से कोई नहीं

77. xy – समतल में स्थित सदिश $4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ पर लम्ब एक इकाई सदिश है [RPET 1991]

(a) $\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{5}(3\mathbf{i}+4\mathbf{j})$

(c) $\frac{1}{5}(3\mathbf{i}-4\mathbf{j})$ (d) इनमें से कोई नहीं

78. यदि $l\mathbf{a}+m\mathbf{b}+n\mathbf{c}=\mathbf{0}$, जहाँ l, m, n अदिश हैं और a, b, c परस्पर लम्ब सदिश हैं, तब

(a) $l=m=n=1$ (b) $l+m+n=1$

(c) $l=m=n=0$ (d) $l\neq 0, m\neq 0, n\neq 0$

79. $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ तथा $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ को मिलाने वाली रेखा पर, मूल बिन्दु की ओर निर्दिष्ट, एकक अभिलम्ब सदिश है [MP PET 1989]

(a) $\frac{4\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{17}}$ (b) $\frac{-4\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{17}}$

(c) $\frac{2\mathbf{i}-3\mathbf{j}}{\sqrt{13}}$ (d) $\frac{-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}}{\sqrt{13}}$

80. यदि सदिश $a\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ व $3\mathbf{i}+6\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ परस्पर लम्बवत् हों, तो a का मान है [MP PET 1993]

(a) 9 (b) 16

(c) 25 (d) 36

81. यदि सदिश $2\lambda\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ व $2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ परस्पर लम्बवत् हों, तो λ का मान है [MP PET 1992]

(a) कोई नहीं (b) – 1

(c) 1 (d) कोई भी मान

82. यदि सदिश $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ व $p\mathbf{i}+q\mathbf{j}+r\mathbf{k}$ परस्पर लम्बवत् हों, तो [RPET 1989]

(a) $(a+b+c)(p+q+r)=0$ (b) $(a+b+c)(p+q+r)=1$

(c) $ap+bq+cr=0$ (d) $ap+bq+cr=1$

83. यदि $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ व $\mathbf{b}=8\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\lambda\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, तब λ का मान होगा [RPET 1995]

(a) 2 (b) – 1

(c) – 2 (d) 1

84. सदिश $\frac{1}{3}(2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})$ है [IIT Screening 1994]

(a) एक इकाई सदिश

(b) सदिश $2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ से $\frac{\pi}{3}$ कोण बनाता है

(c) सदिश $-\mathbf{i}+\mathbf{j}-\frac{1}{2}\mathbf{k}$ के समान्तर है

(d) सदिश $3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ के लम्बवत् है

85. यदि सदिश $a\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ तथा $-\mathbf{i}+5\mathbf{j}+a\mathbf{k}$ परस्पर लम्ब हों, तो $a=$ [MP PET 1996]

(a) 6 (b) – 6
(c) 5 (d) – 5

86. निम्नलिखित में से कौनसा कथन सत्य है [Kurukshetra CEE 1996]

(a) **c** के साथ $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ समतलीय है

(b) **a**, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ पर लम्बवत् है

(c) **b**, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ पर लम्बवत् है

(d) **c**, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ पर लम्बवत् है

87. यदि $\mathbf{a}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ तथा $\mathbf{b}=2\mathbf{i}+\lambda\mathbf{j}$ समान्तर हों, तो λ का मान होगा [RPET 1996]

(a) 4 (b) 2
(c) – 2 (d) – 4

88. यदि $a\mathbf{i}+6\mathbf{j}-\mathbf{k}$ तथा $7\mathbf{i}-3\mathbf{j}+17\mathbf{k}$ परस्पर लम्बवत् सदिश हैं, तो $a=$ [Karnataka CET 2001]

(a) 5 (b) – 5
(c) 7 (d) $\frac{1}{7}$

89. यदि $4\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ तथा $3\mathbf{i}+m\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ समकोण पर हों, तो $m=$ [Karnataka CET 2002]

(a) – 6 (b) – 8
(c) – 10 (d) – 12

90. यदि सदिश $3\mathbf{i}+\lambda\mathbf{j}+\mathbf{k}$ तथा $2\mathbf{i}-\mathbf{j}+8\mathbf{k}$ लम्बवत् हैं, तब $\lambda=$ [Kerala (Engg.) 2002]

(a) – 14 (b) 7
(c) 14 (d) 1/7

91. यदि **a** तथा **b** दो अशून्य सदिश हों, तो **b** का **a** की दिशा में घटक है

(a) $\frac{(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{a}}{\mathbf{b}.\mathbf{b}}$ (b) $\frac{(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{b}}{\mathbf{a}.\mathbf{a}}$

(c) $\frac{(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{b}}{\mathbf{a}.\mathbf{b}}$ (d) $\frac{(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{a}}{\mathbf{a}.\mathbf{a}}$

92. परिमाण 14 का एक सदिश *xy*-समतल में स्थित है और *x*-अक्ष से 60^o का कोण बनाता है। *x*-अक्ष तथा *y*-अक्ष की दिशाओं में सदिश के घटक होंगे

(a) $7, 7\sqrt{3}$ (b) $7\sqrt{3}, 7$

(c) $14\sqrt{3}, 14/\sqrt{3}$ (d) $14/\sqrt{3}, 14\sqrt{3}$

93. यदि $\mathbf{a}=4\mathbf{i}+6\mathbf{j}$ तथा $\mathbf{b}=3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, तो **b** की दिशा में **a** का घटक होगा [IIT Screening 1989; MNR 1983, 87; UPSEAT 2000]

(a) $\frac{18}{10\sqrt{3}}(3\mathbf{j}+4\mathbf{k})$ (b) $\frac{18}{25}(3\mathbf{j}+4\mathbf{k})$

(c) $\frac{18}{\sqrt{3}}(3\mathbf{j}+4\mathbf{k})$ (d) $(3\mathbf{j}+4\mathbf{k})$

94. माना $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ तथा **a** के समान्तर तथा अभिलम्बित **b** के घटक $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ हैं। यदि $\mathbf{b}_1=\frac{3}{2}\mathbf{i}+\frac{3}{2}\mathbf{j}$, तो $\mathbf{b}_2=$ [MP PET 1989]

(a) $\frac{3}{2}\mathbf{i}+\frac{3}{2}\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ (b) $-\frac{3}{2}\mathbf{i}+\frac{3}{2}\mathbf{j}+4\mathbf{k}$

(c) $-\frac{3}{2}\mathbf{i}+\frac{3}{2}\mathbf{j}$ (d) इनमें से कोई नहीं

95. $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ का घटक $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ की दिशा में होगा

(a) $\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{2}$ (b) $\frac{\mathbf{j}+\mathbf{k}}{2}$

(c) $\frac{\mathbf{k}+\mathbf{i}}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

96. सदिश $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ का प्रक्षेप $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ पर होगा [RPET 1984, 90, 97, 99; Karnataka CET 2004]

(a) $\frac{1}{\sqrt{14}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{14}}$

(c) $\frac{3}{\sqrt{14}}$ (d) $\sqrt{14}$

97. यदि सदिश $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ तथा सदिश $\mathbf{b}=-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$, तो $\frac{\text{सदिश } \mathbf{a} \text{ का सदिश } \mathbf{b} \text{ पर प्रक्षेप}}{\text{सदिश } \mathbf{b} \text{ का सदिश } \mathbf{a} \text{ पर प्रक्षेप}}=$ [MP PET 1994, 99; Pb. CET 2000]

(a) $\frac{3}{7}$ (b) $\frac{7}{3}$

(c) 3 (d) 7

98. **b** के अनुदिश **a** का प्रक्षेप है [RPET 1995]

(a) $\frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$ (b) $\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$

(c) $\frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ (d) $\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$

99. यदि $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{b}=5\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$, तब **a** पर **b** का प्रक्षेप है [Karnataka CET 2002]

(a) 3 [MP PET 1991] (b) 4
(c) 5 (d) 6

100. सदिश $\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ का सदिश $4\mathbf{i}-4\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ पर प्रक्षेप होगा [RPET 1990; MNR 1980; MP PET 2002; UPSEAT 2002; Pb. CET 2004]

(a) $\frac{5\sqrt{6}}{10}$ (b) $\frac{19}{9}$

(c) $\frac{9}{19}$ (d) $\frac{\sqrt{6}}{19}$

101. सदिश $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ का सदिश $\mathbf{j}$ के अनुदिश प्रक्षेप होगा [Kerala (Engg.) 2002]

(a) 1 (b) 0
(c) 2 (d) –1

102. यदि बिन्दुओं A तथा B के स्थिति सदिश $6\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ तथा $4\mathbf{i}-3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ हों, तो बल $\vec{F}=\mathbf{i}-3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ द्वारा एक कण को A से B पर विस्थापित करने में किया गया कार्य होगा [MP PET 1987]

(a) 15 इकाई (b) 17 इकाई
(c) – 15 इकाई (d) इनमें से कोई नहीं

103. यदि बल $\vec{F}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ से $2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ तक विस्थापित होता है, तो किया गया कार्य होगा [BIT Ranchi 1992]

(a) 3 (b) 4
(c) 5 (d) 6

104. एक कण को बिन्दु (3,4,5) से बिन्दु (1, 2, 3) तक विस्थापित करने पर बल $F=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ द्वारा किया गया कार्य है [MP PET 1994; Kurukshetra CEE 2002]

(a) 2 इकाई (b) 3 इकाई
(c) 4 इकाई (d) 5 इकाई

105. बल $3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ और $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ एक कण पर क्रियाशील हैं तथा इसे बिन्दु $2\mathbf{i}-\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ से बिन्दु $4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ पर विस्थापित करते हैं, तो बल द्वारा किया गया कार्य है [MP PET 1995]

(a) 30 इकाई (b) 36 इकाई
(c) 24 इकाई (d) 18 इकाई

106. एक कण पर दो बल $3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ तथा $2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ कार्य करते हैं तथा उसे बिन्दु $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ से बिन्दु $5\mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ तक विस्थापित कर देते हैं। बलों द्वारा किया गया कुल कार्य है

(a) 63 इकाई (b) 39 इकाई
(c) 33 इकाई (d) 31 इकाई

107. यदि सदिश $3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ के अनुदिश गतिमान किसी वस्तु पर आरोपित बल $\vec{F}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$ हो, तो उसके द्वारा किया गया कार्य है [MP PET 1997, 2001]

(a) 7 (b) 8
(c) 9 (d) 10

108. एक 5 इकाई का बल सदिश $2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ के अनुदिश कार्यरत है, जो कि किसी बिन्दु को $(1,2,3)$ से $(5,3,7)$ तक विस्थापित करता है, तब किया गया कार्य है [Kerala (Engg.) 2002]

(a) 50/7 (b) 50/3
(c) 25/3 (d) 25/4

109. एक कण अचर बलों $4\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ तथा $3\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ द्वारा बिन्दु $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ से बिन्दु $5\mathbf{i}+4\mathbf{j}+\mathbf{k}$ तक विस्थापित होता है। बल द्वारा किया गया कुल कार्य है [AIEEE 2003, 04]

(a) 20 इकाई (b) 30 इकाई
(c) 40 इकाई (d) 50 इकाई

110. यदि सदिश $x\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ का सदिश $2\mathbf{i}-\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ पर अदिश प्रक्षेप $\frac{1}{\sqrt{30}}$ है, तब x का मान है [J & K 2005]

(a) $\frac{-5}{2}$ (b) 6
(c) -6 (d) 3

111. यदि $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}=0, |\mathbf{x}|=|\mathbf{y}|=|\mathbf{z}|=2$ तथा θ, $\mathbf{y}$ व $\mathbf{z}$ के बीच कोण है, तब $\text{cosec}^2\theta+\cot^2\theta=$ [J & K 2005]

(a) 4/3 (b) 5/3
(c) 1/3 (d) 1

112. सदिश $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ का सदिश $\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ पर प्रक्षेप है [Karnataka CET 2005]

(a) $-\frac{3}{\sqrt{14}}$ (b) $\frac{3}{\sqrt{14}}$
(c) $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ (d) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

113. यदि $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1$ और $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=\sqrt{3}$, तब $(3\mathbf{a}-4\mathbf{b}).(2\mathbf{a}+5\mathbf{b})$ का मान है [Kerala (Engg.) 2005]

(a) – 21 (b) –21/2
(c) 21 (d) 21/2
(e) 59/2

114. $2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ के लम्बवत् $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ और $\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ के तल में एक इकाई सदिश है [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $\mathbf{j}-\mathbf{k}$ (b) $\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$
(c) $\frac{\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{2}}$
(e) $5(\mathbf{j}-\mathbf{k})$

115. यदि $\mathbf{a},\mathbf{b}$ और $\mathbf{c}$ क्रमशः $\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{c}+\mathbf{a}$ और $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ के लम्बवत् हैं तथा $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=6, |\mathbf{b}+\mathbf{c}|=8$ और $|\mathbf{c}+\mathbf{a}|=10$, तब $|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|=$ [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $5\sqrt{2}$ (b) 50
(c) $10\sqrt{2}$ (d) 10
(e) 20

दो सदिशों का सदिश गुणन तथा उसके अनुप्रयोग

1. यदि $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ कोई तीन सदिश हों, तो सत्य कथन होगा [RPET 1988]

(a) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ (b) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}$
(c) $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{a}.\mathbf{c}$ (d) $\mathbf{a}.(\mathbf{b}-\mathbf{c})=\mathbf{a}.\mathbf{b}-\mathbf{a}.\mathbf{c}$

2. यदि $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ दो ऐसे इकाई सदिश हों कि $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ भी एक इकाई सदिश है, तो $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के बीच का कोण होगा

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{3}$
(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) π

3. बिन्दु $A(\mathbf{a}), B(\mathbf{b}), C(\mathbf{c})$ समरेख होंगे, यदि

(a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$ (b) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$
(c) $\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}.\mathbf{c}+\mathbf{c}.\mathbf{a}=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})=$ [MP PET 1987]

(a) $2(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ (b) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$
(c) a^2-b^2 (d) इनमें से कोई नहीं

5. यदि $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$, तो कौनसा सम्बन्ध सत्य है [RPET 1985; Roorkee 1981; AIEEE 2002]

(a) $\mathbf{a}=\mathbf{b}=\mathbf{c}=\mathbf{0}$ (b) $\mathbf{a}.\mathbf{b}=\mathbf{b}.\mathbf{c}=\mathbf{c}.\mathbf{a}$
(c) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ (d) इनमें से कोई नहीं

6. यदि सदिशों **a** तथा **b** के बीच का कोण θ हो और $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\mathbf{a}.\mathbf{b}$, तब $\theta=$ [RPET 1990; MP PET 1990; UPSEAT 2003]
(a) π (b) $\frac{\pi}{2}$
(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) 0

7. $(2\mathbf{a}+3\mathbf{b})\times(5\mathbf{a}+7\mathbf{b})=$ [MP PET 1988]
(a) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (b) $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$
(c) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ (d) $7\mathbf{a}+10\mathbf{b}$

8. यदि **a** तथा **b** दो ऐसे सदिश हों कि **a** . **b** = 0 तथा $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$, तो [IIT Screening 1989; MNR 1988; UPSEAT 2000, 01]
(a) **a** तथा **b** समान्तर हैं
(b) **a** तथा **b** परस्पर लम्ब हैं
(c) या तो **a** या **b** शून्य सदिश हैं
(d) इनमें से कोई नहीं

9. सदिश **a** के अशून्य सदिश **b** के अनुदिश एवं लम्बवत् घटक हैं [IIT 1988]
(a) $\frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|},\frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$ (b) $\frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|},\frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}$
(c) $\frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|},\frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$ (d) $\frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|},\frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}$

10. $|(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\mathbf{c}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$, यदि [MP PET 1994; BIT Ranchi 1990; IIT 1982; AMU 2002]
(a) $\mathbf{a}.\mathbf{b}=\mathbf{b}.\mathbf{c}=0$ (b) $\mathbf{b}.\mathbf{c}=\mathbf{c}.\mathbf{a}=0$
(c) $\mathbf{c}.\mathbf{a}=\mathbf{a}.\mathbf{b}=0$ (d) $\mathbf{a}.\mathbf{b}=\mathbf{b}.\mathbf{c}=\mathbf{c}.\mathbf{a}=0$

11. निम्न में से कौनसा सदिश का प्रगुण नहीं है [MP PET 1987]
(a) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{v}\times\mathbf{u}$
(b) $\mathbf{u}.\mathbf{v}=\mathbf{v}.\mathbf{u}$
(c) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})^2=\mathbf{u}^2.\mathbf{v}^2-(\mathbf{u}.\mathbf{v})^2$
(d) $\mathbf{u}^2=|\mathbf{u}|^2$

12. सदिशों $\mathbf{a}=(1,1,0)$ तथा $\mathbf{b}=(0,1,1)$ के लम्बवत् इकाई लम्बाई के सदिशों की संख्या है [BIT Ranchi 1991; IIT 1987; Kurukshetra CEE 1998; DCE 2000; MP PET 2002]
(a) तीन (b) एक
(c) दो (d) अनन्त

13. यदि $\mathbf{a}=(1,-1,1)$ तथा $\mathbf{c}=(-1,-1,0)$, तो $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}$ तथा $\mathbf{a}.\mathbf{b}=1$ को संतुष्ट करने वाला सदिश **b** है [MP PET 1989]
(a) (1, 0, 0) (b) (0, 0, 1)
(c) (0, –1, 0) (d) इनमें से कोई नहीं

14. यदि $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}\neq 0$, जहाँ **a**, **b** और **c** समतलीय सदिश हैं, तो किसी अदिश k के लिये [Roorkee 1985; RPET 1997]
(a) $\mathbf{a}+\mathbf{c}=k\,\mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=k\,\mathbf{c}$
(c) $\mathbf{b}+\mathbf{c}=k\,\mathbf{a}$ (d) इनमें से कोई नहीं

15. यदि $\mathbf{a}\neq\mathbf{0},\mathbf{b}\neq\mathbf{0},\mathbf{c}\neq\mathbf{0}$, तो सत्य कथन है [MP PET 1991]
(a) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{c}+\mathbf{b})\times\mathbf{a}$ (b) $\mathbf{a}.(\mathbf{b}+\mathbf{c})=-(\mathbf{b}+\mathbf{c}).\mathbf{a}$
(c) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})=(\mathbf{c}-\mathbf{b})\times\mathbf{a}$ (d) $\mathbf{a}.(\mathbf{b}-\mathbf{c})=(\mathbf{c}-\mathbf{b}).\mathbf{a}$

16. माना कि **a** और **b** दो एकक असंरेख सदिश हैं। यदि $\mathbf{u}=\mathbf{a}-(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{b}$ और $\mathbf{v}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ हों, तो $|\mathbf{v}|=$ [IIT 1999]
(a) $|\mathbf{u}|$ (b) $|\mathbf{u}|+|\mathbf{u}.\mathbf{a}|$
(c) $|\mathbf{u}|+|\mathbf{u}.\mathbf{b}|$ (d) $|\mathbf{u}|+\mathbf{u}.(\mathbf{a}+\mathbf{b})$

17. यदि $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}\neq 0$ तथा $\mathbf{a}+\mathbf{c}\neq 0$, तब [RPET 1999]
(a) $(\mathbf{a}+\mathbf{c})\perp\mathbf{b}$ (b) $(\mathbf{a}+\mathbf{c})\,||\,\mathbf{b}$
(c) $\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{b}$ (d) इनमें से कोई नहीं

18. बिन्दुओं (1, – 1, 2), (2, 0, – 1) तथा (0, 2, 1) से होकर जाने वाले समतल के लम्बवत् एक इकाई सदिश है [IIT 1983; MNR 1984]
(a) $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ (b) $\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})$
(c) $\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ (d) $\frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})$

19. यदि $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-5\mathbf{k},\ \mathbf{b}=m\mathbf{i}+n\mathbf{j}+12\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$, तब $(m,n)=$
(a) $\left(-\frac{24}{5},\frac{36}{5}\right)$ (b) $\left(\frac{24}{5},-\frac{36}{5}\right)$
(c) $\left(-\frac{24}{5},-\frac{36}{5}\right)$ (d) $\left(\frac{24}{5},\frac{36}{5}\right)$

20. एक इकाई सदिश जो $\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ व $-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ दोनों पर लम्ब हो, है [MP PET 1992]
(a) $\frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i}-\mathbf{k})$ (b) $\frac{1}{\sqrt{5}}(-2\mathbf{i}+\mathbf{k})$
(c) $\frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ (d) $\frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i}+\mathbf{k})$

21. यदि $A(-1,2,3), B(1,1,1)$ व $C(2,-1,3)$ एक समतल में बिन्दु हैं, तो समतल ABC पर इकाई अभिलम्ब सदिश होगा [BIT Ranchi 1988]
(a) $\pm\left(\frac{2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}}{3}\right)$ (b) $\pm\left(\frac{2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}}{3}\right)$
(c) $\pm\left(\frac{2\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}}{3}\right)$ (d) $-\left(\frac{2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}}{3}\right)$

22. सदिशों $6\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ व $3\mathbf{i}-6\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ के लम्बवत् इकाई सदिश है [IIT 1989; RPET 1996]
(a) $\frac{2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+6\mathbf{k}}{7}$ (b) $\frac{2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-6\mathbf{k}}{7}$
(c) $\frac{2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-6\mathbf{k}}{7}$ (d) $\frac{2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}}{7}$

23. किन्हीं भी दो सदिशों **a** व **b** के लिये, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2=$ [Roorkee 1975, 79, 81, 85]
(a) a^2-b^2 (b) a^2+b^2
(c) $a^2b^2-(\mathbf{a}.\mathbf{b})^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

24. सदिशों $3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ व $12\mathbf{i}+5\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ पर लम्ब इकाई सदिश है [Roorkee 1979; RPET 1989, 91]
(a) $\frac{5\mathbf{i}-3\mathbf{j}+9\mathbf{k}}{\sqrt{115}}$ (b) $\frac{5\mathbf{i}+3\mathbf{j}-9\mathbf{k}}{\sqrt{115}}$
(c) $\frac{-5\mathbf{i}+3\mathbf{j}-9\mathbf{k}}{\sqrt{115}}$ (d) $\frac{5\mathbf{i}+3\mathbf{j}+9\mathbf{k}}{\sqrt{115}}$

25. दो सदिशों $3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ व $12\mathbf{i}+5\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ की बीच कोण की ज्या (sine) है [Roorkee 1978]

(a) $\frac{\sqrt{115}}{\sqrt{14}\sqrt{194}}$ (b) $\frac{51}{\sqrt{14}\sqrt{144}}$

(c) $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{14}\sqrt{194}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

26. किन्हीं दो सदिशों **a** व **b** के लिये यदि $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$, तो [Roorkee 1984]

(a) $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ (b) $\mathbf{b}=\mathbf{0}$
(c) असमान्तर (d) इनमें से कोई नहीं

27. यदि **a** व **b** दो सदिश हों, तो $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2=$ [Roorkee 1975, 79, 81, 85]

(a) $\begin{vmatrix}\mathbf{a}.\mathbf{b} & \mathbf{a}.\mathbf{a}\\ \mathbf{b}.\mathbf{b} & \mathbf{b}.\mathbf{a}\end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix}\mathbf{a}.\mathbf{a} & \mathbf{a}.\mathbf{b}\\ \mathbf{b}.\mathbf{a} & \mathbf{b}.\mathbf{b}\end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\\ \mathbf{b} & \mathbf{a}\end{vmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं

28. किन्हीं भी सदिशों **a, b, c** के लिए,
$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}+\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})=$ [Roorkee 1981; Kerala (Engg.) 2002]

(a) 0 (b) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$
(c) $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$ (d) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}$

29. यदि $\mathbf{a}.\mathbf{b}=\mathbf{a}.\mathbf{c}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ व $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, तो [RPET 1990]

(a) $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ (b) $\mathbf{b}\neq\mathbf{c}$
(c) $\mathbf{b}=\mathbf{c}$ (d) इनमें से कोई नहीं

30. यदि $|\mathbf{a}|=2, |\mathbf{b}|=5$ व $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=8$, तो **a . b** का मान है [AI CBSE 1984; RPET 1991]

(a) 0 (b) 2
(c) 4 (d) 6

31. यदि $|\mathbf{a}.\mathbf{b}|=3$ तथा $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=4$, तो **a** तथा **b** के बीच का कोण है

(a) $\cos^{-1}\frac{3}{4}$ (b) $\cos^{-1}\frac{3}{5}$

(c) $\cos^{-1}\frac{4}{5}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

32. यदि $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ व $\mathbf{b}=6\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, तो $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ का मान होगा [MNR 1978; RPET 2001]

(a) $2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ (b) $6\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$
(c) $\mathbf{i}-10\mathbf{j}-18\mathbf{k}$ (d) $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$

33. यदि अदिश l व m इस प्रकार हों कि $l\mathbf{a}+m\mathbf{b}=\mathbf{c}$ जहाँ **a, b, c** दिये गये सदिश हैं, तो l व m हैं

(a) $l=\frac{(\mathbf{c}\times\mathbf{b}).(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2}, m=\frac{(\mathbf{c}\times\mathbf{a}).(\mathbf{b}\times\mathbf{a})}{(\mathbf{b}\times\mathbf{a})^2}$

(b) $l=\frac{(\mathbf{c}\times\mathbf{b}).(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}, m=\frac{(\mathbf{c}\times\mathbf{a}).(\mathbf{b}\times\mathbf{a})}{(\mathbf{b}\times\mathbf{a})}$

(c) $l=\frac{(\mathbf{c}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2}, m=\frac{(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a})}{(\mathbf{b}\times\mathbf{a})}$

(d) इनमें से कोई नहीं

34. $|\mathbf{a}\times\mathbf{i}|^2+|\mathbf{a}\times\mathbf{j}|^2+|\mathbf{a}\times\mathbf{k}|^2=$ [EAMCET 1988; MP PET 1994, 2004; RPET 2000; Pb. CET 2001; Orissa JEE 2003; AIEEE 2005]

(a) $|\mathbf{a}|^2$ (b) $2|\mathbf{a}|^2$

(c) $3|\mathbf{a}|^2$ (d) $4|\mathbf{a}|^2$

35. बिन्दुओं $P(1,-1,2), Q(2,0,-1)$ व $R(0,2,1)$ द्वारा निर्धारित समतल पर लम्ब इकाई सदिश है [IIT 1994]

(a) $\frac{2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{6}}$ (b) $\frac{2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{6}}$

(c) $\frac{-2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{6}}$ (d) $\frac{2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{6}}$

36. सदिश $4\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ व $-2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ के लम्बवत् इकाई सदिश है [MNR 1995]

(a) $\frac{1}{3}(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k})$ (b) $\frac{1}{3}(-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})$

(c) $\frac{1}{3}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k})$ (d) $\frac{1}{3}(2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k})$

37. दिया है $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}, \mathbf{b}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ व $\mathbf{c}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$, तब $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ व $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ दोनों के लम्बवत् इकाई सदिश है [Karnataka CET 1993]

(a) **i** (b) **j**

(c) **k** (d) $\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$

38. सदिश **c**, $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ व $\mathbf{b}=\mathbf{j}$ इस प्रकार है कि **a, c, b** एक दक्षिणावर्त निकाय बनाते हैं, तो **c** है [DCE 1999]

(a) $z\mathbf{i}-x\mathbf{k}$ (b) 0
(c) $y\mathbf{j}$ (d) $-z\mathbf{i}+x\mathbf{k}$

39. यदि A, B, C, D आकाश में कोई भी चार बिन्दु हैं, तो $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{BD}|=$

(a) 2Δ (b) 4Δ
(c) 3Δ (d) 5Δ
(जहाँ Δ, त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल प्रदर्शित करता है)

40. यदि $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2+(\mathbf{a}.\mathbf{b})^2=144$ व $|\mathbf{a}|=4$, तो $|\mathbf{b}|=$ [EAMCET 1994]

(a) 16 (b) 8
(c) 3 (d) 12

41. $\mathbf{r}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}; \mathbf{r}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}; \mathbf{a}\neq 0; \mathbf{b}\neq 0; \mathbf{a}\neq\lambda\mathbf{b}$, **a**, **b** पर लम्ब नहीं है, तो $\mathbf{r}=$ [EAMCET 1993]

(a) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$
(c) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}$ (d) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}$

42. दिया है, **i, j, k** लाम्बिक इकाई सदिश हैं व **a** एक सदिश है। यदि $\mathbf{a}\times\mathbf{r}=\mathbf{j}$, तो **a . r** है [EAMCET 1990]

(a) 0 (b) 1
(c) –1 (d) स्वेच्छ अदिश

43. सदिश $2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ तथा $3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}$ के लम्बवत् एकक सदिश है [MP PET 2003]

(a) $\frac{(-3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+11\mathbf{k})}{\sqrt{155}}$ (b) $\frac{(3\mathbf{i}-5\mathbf{j}+11\mathbf{k})}{\sqrt{155}}$

(c) $\frac{(6\mathbf{i}-4\mathbf{j}-\mathbf{k})}{\sqrt{53}}$ (d) $\frac{(5\mathbf{i}+3\mathbf{j})}{\sqrt{34}}$

44. यदि $\vec{A}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ व $\vec{B}=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ तथा $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के बीच का कोण θ हो, तो $\sin\theta$ का मान होगा

(a) $\frac{2}{\sqrt{7}}$ (b) $\sqrt{\frac{2}{7}}$

(c) $\frac{4}{\sqrt{7}}$ (d) $\frac{3}{\sqrt{7}}$

45. सदिश **c** के लम्बवत् तथा सदिशों **a** एवं **b** के समतलीय एक इकाई सदिश है [MP PET 1999]

(a) $\frac{\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}{|\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|}$ (b) $\frac{\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})}{|\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})|}$

(c) $\frac{\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{|\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})|}$ (d) इनमें से कोई नहीं

46. $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2+(\mathbf{a}.\mathbf{b})^2=$ [MP PET 1989, 97, 2004]

(a) $(\mathbf{a}\times\mathbf{a}).(\mathbf{b}\times\mathbf{b})$ (b) $(\mathbf{a}.\mathbf{a})(\mathbf{b}.\mathbf{b})$

(c) $|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})|\,(\mathbf{a}.\mathbf{b})$ (d) $2(\mathbf{a}.\mathbf{b})(\mathbf{a}.\mathbf{b})$

47. यदि तीन बिन्दुओं A, B तथा C के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ तथा $7\mathbf{i}+4\mathbf{j}+9\mathbf{k}$ हैं, तो ΔABC को अन्तर्विष्ट करने वाले समतल का इकाई सदिश है [DCE 1999]

(a) $31\mathbf{i}-18\mathbf{j}-9\mathbf{k}$ (b) $\frac{31\mathbf{i}-38\mathbf{j}-9\mathbf{k}}{\sqrt{2486}}$

(c) $\frac{31\mathbf{i}+18\mathbf{j}+9\mathbf{k}}{\sqrt{2486}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

48. यदि ΔABC के शीर्षों के स्थिति सदिश **a, b, c** हैं, तब इसके समतल के लम्बवत् इकाई सदिश है [RPET 1999]

(a) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ (b) $\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}|}$

(c) $\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}$ (d) इनमें से कोई नहीं

49. यदि θ, सदिश **a** तथा **b** के बीच का कोण है, तब $\frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}.\mathbf{b}|}$ का मान है [Karnataka CET 1999]

(a) $\tan\theta$ (b) $-\tan\theta$

(c) $\cot\theta$ (d) $-\cot\theta$

50. यदि सदिश $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ तथा **c** क्रमशः ΔABC की भुजाओं BC, CA तथा AB को प्रदर्शित करें, तब [IIT Screening 2000]

(a) $\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}.\mathbf{c}+\mathbf{c}.\mathbf{a}=0$ (b) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$

(c) $\mathbf{a}.\mathbf{b}=\mathbf{b}.\mathbf{c}=\mathbf{c}.\mathbf{a}$ (d) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}=0$

51. सदिशों $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ के लम्बवत् सदिश है [RPET 2000]

(a) $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ (b) $\mathbf{i}-\mathbf{j}$

(c) $c(\mathbf{i}-\mathbf{j})$, c एक अदिश है (d) इनमें से कोई नहीं

52. $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-6\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ के तल के लम्बवत् इकाई सदिश है [MP PET 2000]

(a) $\frac{4\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{26}}$ (b) $\frac{2\mathbf{i}-6\mathbf{j}-3\mathbf{k}}{7}$

(c) $\frac{3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+6\mathbf{k}}{7}$ (d) $\frac{2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-6\mathbf{k}}{7}$

53. सदिशों $\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ के लम्बवत् इकाई सदिश है [DCE 2001]

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ (b) $(-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

(c) $\frac{(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})}{\sqrt{3}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

54. सदिशों $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ तथा $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ के लम्बवत् इकाई सदिश है [Karnataka CET 2001]

(a) $\frac{-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}}{\sqrt{30}}$ (b) $\frac{-2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+6\mathbf{k}}{\sqrt{38}}$

(c) $\frac{-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}}{\sqrt{38}}$ (d) $\frac{-2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}}{\sqrt{38}}$

55. यदि $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{b}=\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, तब $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=$ [MP PET 2001]

(a) $10\mathbf{i}+2\mathbf{j}+11\mathbf{k}$ (b) $10\mathbf{i}+3\mathbf{j}+11\mathbf{k}$

(c) $10\mathbf{i}-3\mathbf{j}+11\mathbf{k}$ (d) $10\mathbf{i}-3\mathbf{j}-10\mathbf{k}$

56. यदि $|\mathbf{a}|=4, |\mathbf{b}|=2$ तथा **a** एवं **b** के मध्य कोण $\frac{\pi}{6}$ है, तो $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2=$ [AIEEE 2002]

(a) 48 (b) 16

(c) 8 (d) इनमें से कोई नहीं

57. यदि $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ तब $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ का मान होगा [UPSEAT 2002]

(a) $11\sqrt{5}$ (b) $11\sqrt{3}$

(c) $11\sqrt{7}$ (d) $11\sqrt{2}$

58. सदिशों $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ तथा $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ के लम्बवत् इकाई सदिश है [Kerala (Engg.) 2002]

(a) $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$

(c) $\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$

59. सदिशों $2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ के तल में और $5\mathbf{i}+2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ के लाम्बिक एक इकाई सदिश है [IIT Screening 2004]

(a) $\frac{6\mathbf{i}-5\mathbf{k}}{\sqrt{61}}$ (b) $\frac{3\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{10}}$

(c) $\frac{2\mathbf{i}-5\mathbf{j}}{\sqrt{29}}$ (d) $\frac{2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}}{3}$

60. माना $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ तीन सदिश इस प्रकार हैं कि $\mathbf{a}\neq 0$ और $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=2\mathbf{a}\times\mathbf{c}, |\mathbf{a}|=|\mathbf{c}|=1, |\mathbf{b}|=4$ और $|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|=15$. यदि $\mathbf{b}-2\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}$, तब $\lambda=$ [Orissa JEE 2004]

(a) 1 (b) ± 4

(c) 3 (d) -2

61. एक त्रिभुज, जिसके शीर्ष $A(1,-1,2)$, $B(2,1,-1)$ तथा $C(3,-1,2)$ हैं, का क्षेत्रफल होगा [MNR 1983; IIT 1983]

(a) 13 (b) $\sqrt{13}$

(c) 6 (d) $\sqrt{6}$

62. यदि एक त्रिभुज के शीर्ष $A(1,-1,2), B(2,0,-1)$ और $C(0,2,1)$ हैं, तब त्रिभुज का क्षेत्रफल है [RPET 2000]

(a) $\sqrt{6}$ (b) $2\sqrt{6}$

(c) $3\sqrt{6}$ (d) $4\sqrt{6}$

63. यदि एक त्रिभुज के शीर्ष $(1,2,3),(2,5,-1)$ तथा $(-1,1,2)$ हैं, तब त्रिभुज का क्षेत्रफल है [Kerala (Engg.) 2002]

(a) 150 वर्ग इकाई (b) 145 वर्ग इकाई

(c) $\frac{\sqrt{155}}{2}$ वर्ग इकाई (d) $\frac{155}{2}$ वर्ग इकाई

64. उस समान्तर चतुर्भुज, जिसकी दो आसन्न भुजाएँ सदिशों $3\mathbf{i}-\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ द्वारा निरूपित होती हैं, का क्षेत्रफल है [MNR 1981]

(a) $\frac{1}{2}\sqrt{17}$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{14}$

(c) $\sqrt{41}$ (d) $\frac{1}{2}\sqrt{7}$

65. उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल,जिसके विकर्ण $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ और $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ हैं, होगा [MP PET 1988, 93; MNR 1985]

(a) $10\sqrt{3}$ (b) $5\sqrt{3}$

(c) 8 (d) 4

66. बिन्दुओं *A, B, C* के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{k}+\mathbf{i}$ हैं। त्रिभुज *ABC* का सदिश क्षेत्रफल $= \pm\frac{1}{2}\vec{\alpha}$, जहाँ $\vec{\alpha} =$ [MP PET 1989]

(a) $-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ (d) $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$

67. यदि $\overrightarrow{OA} = 3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ तथा $\overrightarrow{OB} = \mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$, तो त्रिभुज *OAB* का क्षेत्रफल है

(a) $\sqrt{15}$ (b) $3\sqrt{5}$

(c) $\frac{3}{2}\sqrt{10}$ (d) $\frac{5\sqrt{5}}{3}$

68. यदि त्रिभुज *ABC* के शीर्षों के स्थिति सदिश **a, b, c** हों, तो त्रिभुज *ABC* का सदिश क्षेत्रफल होगा [MP PET 1990; EAMCET 2003]

(a) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ (b) $\frac{1}{4}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})$

(c) $\frac{1}{2}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})$ (d) $\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$

69. यदि $|\mathbf{a}|=2, |\mathbf{b}|=3$ और **a** तथा **b** परस्पर लम्ब हों, तो उस त्रिभुज का क्षेत्रफल जिसके शीर्ष $\mathbf{0}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ हैं, होगा

(a) 5 (b) 1

(c) 6 (d) 8

70. यदि $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ व $3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ एक समान्तर चतुर्भुज की आसन्न भुजाओं को निरूपित करते हों, तो इस प्रकार समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल है [Roorkee 1978, 79; MP PET 1990; RPET 1988, 89, 91]

(a) $4\sqrt{3}$ (b) $6\sqrt{3}$

(c) $8\sqrt{3}$ (d) $16\sqrt{3}$

71. यदि $3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ व $-5\mathbf{i}+7\mathbf{j}$ किसी त्रिभुज की सदिश भुजायें हैं, तो इसका क्षेत्रफल होगा [RPET 1987, 90]

(a) 41 (b) 47

(c) $\frac{41}{2}$ (d) $\frac{47}{2}$

72. यदि सदिश $\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ व $-\mathbf{i}+2\mathbf{j}$, समान्तर चतुर्भुज के विकर्णों को निरूपित करते हों, तो इसका क्षेत्रफल होगा [Roorkee 1976]

(a) $\sqrt{21}$ (b) $\frac{\sqrt{21}}{2}$

(c) $2\sqrt{21}$ (d) $\frac{\sqrt{21}}{4}$

73. उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसके विकर्ण $2\mathbf{a}-\mathbf{b}$ व $4\mathbf{a}-5\mathbf{b}$ हैं, जहाँ **a** व **b** इकाई सदिश हैं एवं एक–दूसरे से 45^o का कोण बनाते हैं, होगा

(a) $3\sqrt{2}$ (b) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

(c) $\sqrt{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

74. उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल, जिसकी आसन्न भुजाएँ $\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ तथा $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ हैं, है [MP PET 1996, 2000]

(a) $5\sqrt{3}$ (b) $10\sqrt{3}$

(c) $5\sqrt{6}$ (d) $10\sqrt{6}$

75. यदि किसी समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण सदिशों $3\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ एवं $\mathbf{i}+3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ से निरूपित हैं तब इसका क्षेत्रफल (वर्ग इकाई में) है [MP PET 1998]

(a) $5\sqrt{3}$ (b) $6\sqrt{3}$

(c) $\sqrt{26}$ (d) $\sqrt{42}$

76. समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल (वर्ग इकाई में), जिसकी आसन्न भुजाएँ $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ तथा $-3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ हैं, है [Karnataka CET 2001; Pb. CET 2004]

(a) $\sqrt{180}$ (b) $\sqrt{140}$

(c) $\sqrt{80}$ (d) $\sqrt{40}$

77. यदि $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{b}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{c}=7\mathbf{i}+9\mathbf{j}+11\mathbf{k}$ हों, तो विकर्ण **a + b** तथा **b + c** वाले समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल है [Kurukshetra CEE 2002]

(a) $4\sqrt{6}$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{21}$

(c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (d) $\sqrt{6}$

78. एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण $\frac{3}{2}\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{j}-\mathbf{k}$ तथा $2\mathbf{i}-6\mathbf{j}+8\mathbf{k}$ हों, तो समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल होगा [UPSEAT 2002]

(a) $5\sqrt{3}$ (b) $5\sqrt{2}$

(c) $25\sqrt{3}$ (d) $25\sqrt{2}$

79. $\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $4\mathbf{i}-7\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ शीर्षों वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल है [MP PET 2004]

(a) 26 (b) 11

(c) 36 (d) 0

80. संलग्न भुजाओं $\mathbf{i}-\mathbf{k}$ और $2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ वाले समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल है [UPSEAT 2004]

(a) 2 (b) 4

(c) $\sqrt{17}$ (d) $2\sqrt{13}$

81. बिन्दु *P* पर कार्यरत बल $\vec{F}$ का बिन्दु *C* के परितः आघूर्ण होगा [MP PET 1987]

(a) $\vec{F}\times\overrightarrow{CP}$

(b) $\overrightarrow{CP}.\vec{F}$

(c) एक सदिश, जिसकी दिशा $\vec{F}$ की दिशा के समान है

(d) $\overrightarrow{CP}\times\vec{F}$

82. तीन बल $\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ और $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ बिन्दु (0, 1, 2) पर स्थित एक कण पर कार्यरत हैं। बिन्दु $(1,-2,0)$ के परितः बलों के आघूर्ण का परिमाण है [MNR 1983]

(a) $2\sqrt{35}$ (b) $6\sqrt{10}$

(c) $4\sqrt{17}$ (d) इनमें से कोई नहीं

83. माना कि बिन्दु *A, B* तथा *P* क्रमशः (– 2, 2, 4), (2, 6, 3) तथा (1, 2, 1) हैं। $\overrightarrow{AB}$ द्वारा निरूपित तथा *A* पर कार्यरत बल के बिन्दु *P* के परितः आघूर्ण का परिमाण होगा [MP PET 1987]

(a) 15 (b) $3\sqrt{41}$

(c) $3\sqrt{57}$ (d) इनमें से कोई नहीं

84. यदि $\vec{F} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ तो बिन्दु $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ के परितः बल का आघूर्ण है [BIT Ranchi 1992]

(a) $5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ (b) $5\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

(c) $-5\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ (d) $-5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

85. एक 6 इकाई का बल जो सदिश $(9, 6, -2)$ के अनुदिश कार्य करता है और बिन्दु *A* (4, – 1, –7) से होकर जाता है। बिन्दु *O* (1, – 3, 2) के परितः बल का आघूर्ण है

(a) $\frac{150}{11}(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$ (b) $\frac{6}{11}(50\mathbf{i} - 75\mathbf{j} + 36\mathbf{k})$

(c) $150\,(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$ (d) $6(50\mathbf{i} - 75\mathbf{j} + 36\mathbf{k})$

86. एक बल $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ बिन्दु *A*, जिसका स्थिति सदिश $2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ है, पर कार्यरत् है, तब मूल बिन्दु के परितः **F** का आघूर्ण है [Karnataka CET 2000]

(a) $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ (d) $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

87. यदि $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j},\ \mathbf{c} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ और $\mathbf{n}$ एक इकाई सदिश इस प्रकार है कि $\mathbf{b}.\mathbf{n} = 0, \mathbf{a}.\mathbf{n} = 0$, तब $|\,\mathbf{c}\,.\,\mathbf{n}|$ का मान है [DCE 2005]

(a) 1 (b) 3

(c) 5 (d) 2

88. सदिशों $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ और $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ को सम्मिलित करने वाले समतल के लम्बवत् एक इकाई सदिश है [Karnataka CET 2005]

(a) $\frac{\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{\mathbf{i} + \mathbf{k}}{\sqrt{2}}$

(c) $\frac{\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}}$

अदिश त्रिगुणन तथा उसके अनुप्रयोग

1. यदि **a, b, c** तीन असमतलीय सदिश हों, तो $\frac{\mathbf{a}.\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{c} \times \mathbf{a}.\mathbf{b}} + \frac{\mathbf{b}.\mathbf{a} \times \mathbf{c}}{\mathbf{c}.\mathbf{a} \times \mathbf{b}} =$ [IIT 1985, 86; UPSEAT 2003]

(a) 0 (b) 2

(c) – 2 (d) इनमें से कोई नहीं

2. यदि **a, b, c** तीन असमतलीय सदिश हों, तो $[\mathbf{a} + \mathbf{b}\ \ \mathbf{b} + \mathbf{c}\ \ \mathbf{c} + \mathbf{a}] =$ [RPET 1988; MP PET 1990, 02; Kerala (Engg.) 2002]

(a) $|\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}|$ (b) $2[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$

(c) $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]^2$ (d) $2[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]^2$

3. यदि सदिश $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ तथा $3\mathbf{i} - \mathbf{k}$ एक समान्तर षट्फलक की तीन संगामी कोरें बनाते हों, तो समान्तर षट्फलक का आयतन होगा [IIT 1983; RPET 1995; DCE 2001; Kurukshetra CEE 1998; MP PET 2001]

(a) 8 (b) 10

(c) 4 (d) 14

4. यदि **a, b, c** कोई तीन समतलीय इकाई सदिश हों, तो

(a) $\mathbf{a}\,.(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 1$ (b) $\mathbf{a}\,.(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 3$

(c) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).\,\mathbf{c} = 0$ (d) $(\mathbf{c} \times \mathbf{a}).\,\mathbf{b} = 1$

5. यदि **a** तथा **b** समान्तर सदिश हों, तो $[\mathbf{a}\ \mathbf{c}\ \mathbf{b}] =$

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

6. यदि सदिश $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ तथा $3\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ समतलीय हों, तो $\lambda =$

[Roorkee 1986; RPET 1999, 02; Kurukshetra CEE 2002]

(a) – 1 (b) – 2

(c) – 3 (d) – 4

7. यदि **a, b, c** तीन असमतलीय सदिश हों और **p, q, r** इस प्रकार परिभाषित हों कि $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}, \mathbf{q} = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}, \mathbf{r} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}$ तब $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,.\,\mathbf{p} + (\mathbf{b}+\mathbf{c})\,.\,\mathbf{q} + (\mathbf{c}+\mathbf{a})\,.\,\mathbf{r} =$

[IIT 1988; BIT Mesra 1996; AMU 2002]

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 3

8. यदि बिन्दु जिनके स्थिति सदिश $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k},\ 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k},\ -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ तथा $4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$ एक समतल में स्थित हों, तो $\lambda =$ [IIT 1986; Pb. CET 2003]

(a) $-\frac{146}{17}$ (b) $\frac{146}{17}$

(c) $-\frac{17}{146}$ (d) $\frac{17}{146}$

9. यदि $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}, \mathbf{q} = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}, \mathbf{r} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}$, जहाँ **a, b, c** तीन असमतलीय सदिश हैं तो $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}).(\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r})$ का मान है

[MNR 1992; UPSEAT 2000]

(a) 3 (b) 2

(c) 1 (d) 0

10. एक समान्तर षट्फलक, जिसकी कोरें $-12\mathbf{i} + \alpha\mathbf{k}, 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ व $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 15\mathbf{k}$ हैं, का आयतन 546 है, तो $\alpha =$

[IIT Screening 1989; MNR 1987]

(a) 3 (b) 2

(c) – 3 (d) – 2

11. माना *a, b, c* अलग–अलग अऋणात्मक संख्यायें हैं। यदि सदिश $a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + c\mathbf{k},\ \mathbf{i} + \mathbf{k}$ व $c\mathbf{i} + c\mathbf{j} + b\mathbf{k}$ एक ही समतल में हों, तो *c* है

[IIT 1993; AIEEE 2005]

(a) *a* और *b* का समान्तर माध्य

(b) *a* और *b* का गुणोत्तर माध्य

(c) *a* और *b* का हरात्मक माध्य

(d) शून्य

12. यदि **a, b, c** कोई तीन सदिश हों तथा इनके व्युत्क्रम $\mathbf{a}^{-1}, \mathbf{b}^{-1}, \mathbf{c}^{-1}$ हैं एवं $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] \neq 0$ तो $[\mathbf{a}^{-1}\ \mathbf{b}^{-1}\ \mathbf{c}^{-1}]$ का मान होगा

[Roorkee 1989]

(a) शून्य (b) एक

(c) अशून्य (d) $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$

13. यदि $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k},\ \mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ व $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + p\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ समतलीय हों, तो *p* का मान होगा [RPET 1985, 86, 88, 91]

(a) – 6 (b) – 2

(c) 2 (d) 6

14. यदि $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ परस्पर लम्बवत् इकाई सदिश हों, तो $[\mathbf{i}\,\mathbf{k}\,\mathbf{j}] =$

[RPET 1986]

(a) 0 (b) – 1

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

15. यदि तीन सदिश $\mathbf{a} = 12\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 8\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$ व $\mathbf{c} = 33\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 24\mathbf{k}$ एक घनाभ (Cuboid) को प्रदर्शित करते हों तो इसका आयतन है [Roorkee 1988]

(a) 616 (b) 308
(c) 154 (d) इनमें से कोई नहीं

16. यदि $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ व $\mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, तो $\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) =$ [RPET 1989, 2001]

(a) 6 (b) 10
(c) 12 (d) 24

17. यदि किसी समान्तर षट्फलक की तीन संगामी कोरें *OA, OB, OC* क्रमशः सदिशों $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ तथा $-3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ द्वारा निरूपित हों, तो उसका आयतन होगा (घन इकाई में) [Kurukshetra CEE 1998]

(a) 5 (b) 6
(c) 7 (d) 8

18. यदि किसी अशून्य सदिश **x** के लिए $\mathbf{x}.\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{x}.\mathbf{b} = 0$ तथा $\mathbf{x}.\mathbf{c} = 0$ है, तब सत्य कथन होगा [IIT 1983; Karnataka CET 2002]

(a) $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}] = 0$ (b) $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}] \neq 0$
(c) $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}] = 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

19. यदि सदिश $(-bc, b^2 + bc, c^2 + bc)$, $(a^2 + ac, -ac, c^2 + ac)$ व $(a^2 + ab, b^2 + ab, -ab)$ समतलीय हैं, जहाँ *a, b* व *c* कोई भी शून्य नहीं है, तो

(a) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$
(b) $bc + ca + ab = 0$
(c) $a + b + c = 0$
(d) $a^2 + b^2 + c^2 = bc + ca + ab$

20. यदि **a, b, c** तीन समतलीय सदिश हों, तो $[\mathbf{a} + \mathbf{b}\ \ \mathbf{b} + \mathbf{c}\ \ \mathbf{c} + \mathbf{a}] =$ [MP PET 1995]

(a) [**a b c**] (b) 2 [**a b c**]
(c) 3 [**a b c**] (d) 0

21. $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \ \mathbf{a} \times \mathbf{b}] =$

(a) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ (b) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2$
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

22. यदि $\mathbf{a}.\mathbf{i} = 4$, तो $(\mathbf{a} \times \mathbf{j}).(2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) =$ [EAMCET 1994]

(a) 12 (b) 2
(c) 0 (d) – 12

23. यदि सदिश $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ व $x\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ समतलीय हैं, तो $x =$ [EAMCET 1994]

(a) $\frac{8}{5}$ (b) $\frac{5}{8}$
(c) 0 (d) 1

24. उस समांतर षट्फलक (Parallelopiped) का आयतन, जिसकी आसन्न कोरें $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ हैं, है [EAMCET 1993]

(a) 5 घन इकाई (b) 6 घन इकाई
(c) 7 घन इकाई (d) 8 घन इकाई

25. यदि $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, तो $\mathbf{a} \times (\mathbf{a}.\mathbf{b}) =$ [Karnataka CET 1994]

(a) 3**a** (b) $3\sqrt{14}$
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

26. $\mathbf{i}.(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + \mathbf{j}.(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + \mathbf{k}.(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) =$ [Karnataka CET 1994]

(a) 1 (b) 3
(c) – 3 (d) 0

27. यदि $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ हो, तो **a** तथा **b** के लम्बवत् इकाई सदिश है [MP PET 1996]

(a) $\frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{3}}$
(c) $\frac{-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{3}}$

28. यदि $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ एक समान्तर षट्फलक की संलग्न कोरें हैं, तो इसका आयतन है [MP PET 1996]

(a) 108 (b) 210
(c) 272 (d) 308

29. $\mathbf{a}.(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) =$ [MP PET 1996]

(a) **a . b** (b) $a^2 b$
(c) 0 (d) $a^2 + ab$

30. किसी समान्तर फलक की तीन संगामी कोरें $\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{b} - \mathbf{c}$ और $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ से निरूपित हों, तो उसका आयतन है [MP PET 1999; Pb. CET 2003]

(a) [**a b c**] (b) 2 [**a b c**]
(c) $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]^2$ (d) 0

31. तीन सदिश **u, v, w** के लिए निम्नलिखित व्यंजकों में से कौनसा व्यंजक शेष तीनों के बराबर नहीं है [IIT 1998]

(a) $\mathbf{u}.(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (b) $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}).\mathbf{u}$
(c) $\mathbf{v}.(\mathbf{u} \times \mathbf{w})$ (d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}).\mathbf{w}$

32. निम्नलिखित व्यंजकों में से कौनसे अर्थपूर्ण हैं [IIT 1998; RPET 2001]

(a) $\mathbf{u}.(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (b) $(\mathbf{u}.\mathbf{v}).\mathbf{w}$
(c) $(\mathbf{u}.\mathbf{v})\mathbf{w}$ (d) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v}.\mathbf{w})$

33. यदि **a, b, c** असमतलीय सदिश हैं तथा $\mathbf{d} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$, तब λ का मान है [Roorkee 1999]

(a) $\frac{[\mathbf{d\,b\,c}]}{[\mathbf{b\,a\,c}]}$ (b) $\frac{[\mathbf{b\,c\,d}]}{[\mathbf{b\,c\,a}]}$
(c) $\frac{[\mathbf{b\,d\,c}]}{[\mathbf{a\,b\,c}]}$ (d) $\frac{[\mathbf{c\,b\,d}]}{[\mathbf{a\,b\,c}]}$

34. यदि सदिश $\vec{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\vec{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ तथा $\vec{C}$, एक वामहस्त निकाय बनाते हैं, तो $\vec{C}$ हैं [Roorkee 1999]

(a) 11**i** – 6**j** – **k** (b) – 11**i** + 6**j** + **k**
(c) 11**i** – 6**j** + **k** (d) – 11**i** + 6**j** – **k**

35. किसी समान्तर षट्फलक (Parallelopiped) का आयतन क्या होगा जबकि उसकी भुजाएँ **a** = **i** – **j** + **k**, **b** = **i** – 3**j** + 4**k** तथा **c** = 2**i** – 5**j** + 3**k** हैं [UPSEAT 1999]

(a) 5 इकाई (b) 6 इकाई
(c) 7 इकाई (d) 8 इकाई

36. सदिश **a, b, c** इस प्रकार दिये गये हैं कि $\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \lambda \neq 0$, तब $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}).(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})/\lambda$ का मान है [AMU 1999]

(a) 3 (b) 1
(c) -3λ (d) $3/\lambda$

37. यदि **a, b** तथा **c** समतलीय इकाई सदिश हैं, तब अदिश त्रिक गुणनफल $[2\mathbf{a}-\mathbf{b}\ \ 2\mathbf{b}-\mathbf{c}\ \ 2\mathbf{c}-\mathbf{a}]$ का मान है [IIT Screening 2000; Kerala (Engg.) 2005]
(a) 0 (b) 1
(c) $-\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{3}$

38. यदि सदिश $\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $2\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ तथा $3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+x\mathbf{k}$ समतलीय हैं, तो x का मान है [Karnataka CET 2000]
(a) – 2 (b) 2
(c) 1 (d) 3

39. $[\mathbf{a}-\mathbf{b}\ \mathbf{b}-\mathbf{c}\ \mathbf{c}-\mathbf{a}]$ का मान, जहाँ $|\mathbf{a}|=1$, $|\mathbf{b}|=5$ तथा $|\mathbf{c}|=3$ है, होगा [RPET 2000]
(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 4

40. यदि $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{b}=2\mathbf{i}-4\mathbf{k}, \mathbf{c}=\mathbf{i}+\lambda\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ समतलीय हैं, तो λ का मान है [MP PET 2000]
(a) 5/2 (b) 3/5
(c) 7/3 (d) इनमें से कोई नहीं

41. माना $\vec{A}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\vec{B}=\mathbf{i}, \vec{C}=C_1\mathbf{i}+C_2\mathbf{j}+C_3\mathbf{k}$ I यदि $C_2=-1$ तथा $C_3=1$, तब तीनों सदिशों के समतलीय होने के लिए [AMU 2000]
(a) $C_1=0$
(b) $C_1=1$
(c) $C_1=2$
(d) C_1 का कोई भी मान प्राप्त नहीं कर सकते हैं

42. माना $\mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{k}, \mathbf{b}=x\mathbf{i}+\mathbf{j}+(1-x)\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+(1+x-y)\mathbf{k}$, तब $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$ निर्भर करता है [IIT Screening 2001; AIEEE 2005]
(a) केवल x पर (b) केवल y पर
(c) न x पर न ही y पर (d) x तथा y दोनों पर

43. यदि $\mathbf{a}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=6\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{c}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$, तब $\mathbf{a}\,.\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=$ [Karnataka CET 2001]
(a) 122 (b) – 144
(c) 120 (d) – 120

44. $(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=$ [EAMCET 2002]
(a) $-[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$ (b) $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$
(c) 0 (d) $2[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$

45. $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=$ [RPET 2001]
(a) $\mathbf{b}.(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$ (b) $\mathbf{c}.(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$
(c) $\mathbf{b}.(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$ (d) इनमें से कोई नहीं

46. यदि सदिश **a, b, c** इस प्रकार हैं कि $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]=4$, तब $[\mathbf{a}\times\mathbf{b}\ \ \mathbf{b}\times\mathbf{c}\ \ \mathbf{c}\times\mathbf{a}]=$ [AIEEE 2002]
(a) 16 (b) 64
(c) 4 (d) 8

47. उस घनाभ (Parallelopiped) का आयतन, जिसकी संलग्न कोरें $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ तथा $3\mathbf{i}-5\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ हैं, है [Kerala (Engg.) 2002]
(a) 4 (b) 3
(c) 2 (d) 8

48. $[\mathbf{i}\ \mathbf{k}\ \mathbf{j}]+[\mathbf{k}\ \mathbf{j}\ \mathbf{i}]+[\mathbf{j}\ \mathbf{k}\ \mathbf{i}]=$ [UPSEAT 2002]
(a) 1 (b) 3
(c) – 3 (d) – 1

49. यदि **u**, **v** तथा **w** तीन असमतलीय सदिश हैं, तब $(\mathbf{u}+\mathbf{v}-\mathbf{w}).[(\mathbf{u}-\mathbf{v})\times(\mathbf{v}-\mathbf{w})]=$ [AIEEE 2003; DCE 2005]
(a) 0 (b) $\mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$
(c) $\mathbf{u}.(\mathbf{w}\times\mathbf{v})$ (d) $3\mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$

50. $\mathbf{a}.[(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})]=$ [IIT 1981; UPSEAT 2003; RPET 1988, 2002; MP PET 2004]
(a) $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$ (b) $2[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$
(c) $3[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$ (d) 0

51. यदि सदिश $4\mathbf{i}+11\mathbf{j}+m\mathbf{k}, 7\mathbf{i}+2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{i}+5\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ समतलीय हैं, तब m का मान है [Karnataka CET 2003]
(a) 38 (b) 0
(c) 10 (d) – 10

52. सदिशों **i + j** तथा **j + k** के समतलीय तथा सदिश 2**i** – 2**j** – 4**k** के समान्तर सदिश है [Roorkee 2000]
(a) **i – k** (b) **i – j – 2k**
(c) **i + j – k** (d) 3**i** + 3**j** – 6**k**

53. λ के किस मान के लिए चार बिन्दु $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{i}-\lambda\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ समतलीय हैं [MP PET 2004]
(a) 8 (b) 0
(c) – 2 (d) 6

54. यदि **a**, **b**, **c** असमतलीय सदिश हैं और λ एक वास्तविक संख्या है, तब सदिश $\mathbf{a}+2\mathbf{b}+3\mathbf{c}, \lambda\,\mathbf{b}+4\mathbf{c}$ और $(2\lambda-1)\mathbf{c}$ असमतलीय हैं [AIEEE 2004]
(a) λ के किसी मान के लिए नहीं
(b) λ के एक मान को छोड़कर
(c) λ के दो मानों को छोड़कर
(d) λ के सभी मानों के लिए

55. माना **a**, **b** और **c** तीन सदिश हैं, तब अदिश त्रिगुणन $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]=$ [UPSEAT 2004]
(a) $[\mathbf{b}\ \mathbf{a}\ \mathbf{c}]$ (b) $[\mathbf{a}\ \mathbf{c}\ \mathbf{b}]$
(c) $[\mathbf{c}\ \mathbf{b}\ \mathbf{a}]$ (d) $[\mathbf{b}\ \mathbf{c}\ \mathbf{a}]$

56. यदि $\mathbf{a}.\mathbf{b}=\mathbf{b}.\mathbf{c}=\mathbf{c}.\mathbf{a}=0$ तब अदिश त्रिगुणन $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$ का मान है [Pb. CET 2000]
(a) 1 (b) – 1
(c) $|\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$ (d) 0

57. यदि $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ और $\mathbf{c}=\mathbf{i}+\alpha\mathbf{j}$ समतलीय सदिश हैं, तब α का मान है [UPSEAT 2004]
(a) $-\frac{4}{3}$ (b) $\frac{3}{4}$
(c) $\frac{4}{3}$ (d) 2

58. निम्न में से कौनसा एक सत्य नहीं है [Orissa JEE 2004]
(a) $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ (b) $(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).\mathbf{a}$
(c) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\mathbf{c}$ (d) $(\mathbf{a}.\mathbf{c})\times\mathbf{b}$

59. यदि $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ और $\mathbf{c}$ के लम्बवत् है तथा $|\mathbf{a}|=2, |\mathbf{b}|=3$, $|\mathbf{c}|=4$ तथा $\mathbf{b}$ व $\mathbf{c}$ के बीच कोण $\frac{2\pi}{3}$ है, तब $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]=$ [Kerala (Engg.) 2005]
(a) $4\sqrt{3}$ (b) $6\sqrt{3}$
(c) $12\sqrt{3}$ (d) $18\sqrt{3}$
(e) $8\sqrt{3}$

60. यदि $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ असमतलीय सदिश हैं और λ एक वास्तविक संख्या है, तब $[\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})\ \ \lambda^2\mathbf{b}\ \ \lambda\mathbf{c}]=[\mathbf{a}\ \ \mathbf{b}+\mathbf{c}\ \ \mathbf{b}]$ के लिए [AIEEE 2005]
(a) λ के तीन मान हैं
(b) λ के दो मान हैं
(c) λ का केवल एक मान है
(d) λ के किसी मान के लिए नहीं है

61. यदि सदिश $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}, -\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\lambda\mathbf{k}$ और $-5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ समतलीय हैं, तब λ का मान है [J & K 2005]
(a) – 13 (b) 13/9
(c) – 13/9 (d) – 9/13

62. यदि a,b,c तीन अशून्य, असमतलीय सदिश हैं और $\mathbf{b}_1=\mathbf{b}-\frac{\mathbf{b}.\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}, \mathbf{b}_2=\mathbf{b}+\frac{\mathbf{b}.\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$, $\mathbf{c}_1=\mathbf{c}-\frac{\mathbf{c}.\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}-\frac{\mathbf{c}.\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{c}-\frac{\mathbf{c}.\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}-\frac{\mathbf{c}.\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|^2}\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_3=\mathbf{c}-\frac{\mathbf{c}.\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}-\frac{\mathbf{c}.\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|^2}\mathbf{b}_2$, $\mathbf{c}_4=\mathbf{a}-\frac{\mathbf{c}.\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$ तब निम्न में से कौनसा परस्पर लम्बकोणीय सदिशों का समुच्चय है [IIT Screening 2005]
(a) $\{\mathbf{a},\mathbf{b}_1,\mathbf{c}_1\}$ (b) $\{\mathbf{a},\mathbf{b}_1,\mathbf{c}_2\}$
(c) $\{\mathbf{a},\mathbf{b}_2,\mathbf{c}_3\}$ (d) $\{\mathbf{a},\mathbf{b}_2,\mathbf{c}_4\}$

63. यदि एक सदिश α, β तथा γ तल में स्थित है, तब निम्न में से सत्य है [Orissa JEE 2005]
(a) $[\alpha\ \beta\ \gamma]=0$ (b) $[\alpha\ \beta\ \gamma]=1$
(c) $[\alpha\ \beta\ \gamma]=3$ (d) $[\beta\ \gamma\ \alpha]=1$

सदिश त्रिगुणन

1. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ किसके साथ समतलीय हैं
(a) b तथा c (b) c तथा a
(c) a तथा b (d) a, b तथा c

2. यदि $\mathbf{u}=\mathbf{i}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{i})+\mathbf{j}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{j})+\mathbf{k}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{k})$, तब [RPET 1989, 97; MNR 1986, 93; MP PET 1987, 98, 99, 2004; UPSEAT 2000, 02; Kerala (Engg.) 2002]
(a) $\mathbf{u}=0$ (b) $\mathbf{u}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$
(c) $\mathbf{u}=2\mathbf{a}$ (d) $\mathbf{u}=\mathbf{a}$

3. यदि $\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}, \mathbf{b}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ व $\mathbf{c}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$, तो $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=$ [RPET 1989]
(a) $20\mathbf{i}-3\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ (b) $20\mathbf{i}-3\mathbf{j}-7\mathbf{k}$
(c) $20\mathbf{i}+3\mathbf{j}-7\mathbf{k}$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. यदि $\alpha=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}, \beta=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ तथा $\gamma=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, तो $(\alpha\times\beta).(\alpha\times\gamma)=$ [MNR 1984; UPSEAT 2000; Orissa JEE 2005]
(a) 60 (b) 64
(c) 74 (d) – 74

5. यदि $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{0}$, तो [RPET 1995]
(a) $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|=1$ (b) $\mathbf{b}\parallel\mathbf{c}$
(c) $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$ (d) $\mathbf{b}\perp\mathbf{c}$

6. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=$ [RPET 1995; Kurukshetra CEE 1998; MP PET 2003]
(a) $(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}.\mathbf{a})\mathbf{b}$ (b) $(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{a}-(\mathbf{b}.\mathbf{c})\mathbf{a}$
(c) $(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}$ (d) $(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}-(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}$

7. यदि $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}, \mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{a}$ व *a, b, c* सदिशों a, b, c के मापांक हैं, तो
(a) $a=1, b=c$ (b) $c=1, a=1$
(c) $b=2, c=2a$ (d) $b=1, c=a$

8. यदि $\mathbf{a}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{c}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, तो $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ का मान होगा
(a) $24\mathbf{i}+7\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ (b) $7\mathbf{i}-24\mathbf{j}+5\mathbf{k}$
(c) $12\mathbf{i}+3\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ (d) $\mathbf{i}+\mathbf{j}-7\mathbf{k}$

9. $\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{k})=$ [RPET 1988; MP PET 1997]
(a) 1 (b) 0
(c) – 1 (d) इनमें से कोई नहीं

10. यदि a, b, c तीन मात्रक सदिश ऐसे हैं कि $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\frac{\mathbf{b}}{2}$, तब सदिश a, b एवं c से क्रमशः कोण बनाता है [MP PET 1998]
(a) $40^o, 80^o$ (b) $45^o, 45^o$
(c) $30^o, 60^o$ (d) $90^o, 60^o$

11. मान लीजिए कि सदिश $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ और $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$ हैं। यदि c एक ऐसा सदिश है कि $\mathbf{a}.\mathbf{c}=|\mathbf{c}|$, $|\mathbf{c}-\mathbf{a}|=2\sqrt{2}$ और $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ व c के बीच 30^o का कोण है, तो $|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}|=$ [IIT 1999]
(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{3}{2}$
(c) 2 (d) 3

12. $\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{k})+\mathbf{j}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{i})+\mathbf{k}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{j})=$ [RPET 1999]
(a) i (b) j
(c) k (d) 0

13. $[\mathbf{b}\times\mathbf{c}\ \ \mathbf{c}\times\mathbf{a}\ \ \mathbf{a}\times\mathbf{b}]=$ [MP PET 2004]
(a) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ (b) $2[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$
(c) $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]^2$ (d) $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$

14. तीन इकाई सदिश a, b, c इस प्रकार हैं, कि $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ तथा $\mathbf{a}\parallel\mathbf{c}$, तब $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=$ [AMU 1999]
(a) a (b) b
(c) c (d) 0

15. यदि $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}, \mathbf{b}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{c}=\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$, तब $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ है [MP PET 2000]
(a) i – j + k (b) 2i – 2j
(c) 3i – j + k (d) 2i + 2j – k

16. यदि $\vec{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \vec{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \vec{C} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, तब $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} =$ [MP PET 2001]

(a) $5(-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$ (b) $4(-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$

(c) $5(-\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k})$ (d) $4(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$

17. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) =$ [RPET 2003]

(a) 0 (b) $2[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$

(c) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ (d) $3[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$

18. माना $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ तीन सदिश हैं, तब $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ होगा, यदि [Orissa JEE 2003]

(a) $\mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = 0$ (b) $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$

(c) $\mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (d) $\mathbf{c} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$

19. यदि $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{c} = \mathbf{i}$ तथा $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$, तब $\lambda + \mu =$ [EAMCET 2003]

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 3

20. यदि सदिश **a** व **b** परस्पर लम्बवत् हैं, तो $\mathbf{a} \times \{\mathbf{a} \times \{\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\}\}$ का मान होगा

(a) $|\mathbf{a}|^2\ \mathbf{b}$ (b) $|\mathbf{a}|^3\ \mathbf{b}$

(c) $|\mathbf{a}|^4\ \mathbf{b}$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. यदि सदिश **a, b, c, d** समतलीय हैं, तब $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) =$ [MP PET 1998]

(a) $|\mathbf{a} \times \mathbf{c}|^2$ (b) $|\mathbf{a} \times \mathbf{d}|^2$

(c) $|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|^2$ (d) 0

22. $\mathbf{a} \times [\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] =$ [AMU 2001]

(a) $(\mathbf{a} \times \mathbf{a}).(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ (b) $\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - \mathbf{b}.(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

(c) $[\mathbf{a}.(\mathbf{a} \times \mathbf{b})]\mathbf{a}$ (d) $(\mathbf{a}.\mathbf{a})(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$

23. यदि **x** व **y** में निम्न युगपत समीकरण दिये गये हैं

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{a}$ .....(i)

$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{b}$ .....(ii)

$\mathbf{x}.\mathbf{a} = 1$ .....(iii)

तो $\mathbf{x}$ = ..., $\mathbf{y}$ = ... [Roorkee 1994]

(a) $\mathbf{a}, \mathbf{a} - \mathbf{x}$ (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{b}$

(c) $\mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}$ (d) इनमें से कोई नहीं

24. $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) =$ [MP PET 1997]

(a) $[\mathbf{b}\ \mathbf{c}\ \mathbf{a}]\ \mathbf{a}$ (b) $[\mathbf{c}\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}]\ \mathbf{b}$

(c) $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]\ \mathbf{c}$ (d) $[\mathbf{a}\ \mathbf{c}\ \mathbf{b}]\ \mathbf{b}$

त्रिविमीय ज्यामिति में सदिशों का अनुप्रयोग

1. **a** व **b** से बराबर दूरी पर स्थित बिन्दु का बिन्दुपथ है

(a) $[\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})].\ (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$

(b) $[\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})].\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 0$

(c) $[\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})].(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 0$

(d) $[\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})].\ (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$

2. यदि अशून्य सदिश **a** व **b** परस्पर लम्बवत् हैं, तो समीकरण $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$ का हल है

(a) $\mathbf{r} = x\mathbf{a} + \frac{1}{\mathbf{a}.\mathbf{a}}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (b) $\mathbf{r} = x\mathbf{b} - \frac{1}{\mathbf{b}.\mathbf{b}}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

(c) $\mathbf{r} = x\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (d) $\mathbf{r} = x\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

3. गोले पर स्थित किसी बिन्दु का स्थिति सदिश **r** है तथा एक व्यास के सिरों के स्थिति सदिश क्रमशः **a** तथा **b** हैं, तो [MP PET 1994]

(a) $\mathbf{r}.(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$ (b) $\mathbf{r}.(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = 0$

(c) $(\mathbf{r} + \mathbf{a}).(\mathbf{r} + \mathbf{b}) = 0$ (d) $(\mathbf{r} - \mathbf{a}).(\mathbf{r} - \mathbf{b}) = 0$

4. रेखा $\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) + \lambda(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$ एवं समतल $\mathbf{r}.(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) = 4$ के अभिलम्ब के बीच का कोण है [MP PET 1997]

(a) $\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ (d) $\cot^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

5. यदि किसी बिन्दु **a** से होकर जाने वाली तथा सदिश **b** के समान्तर सरल रेखा का समीकरण $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ है, जहाँ t कोई प्राचल है, तब इसकी बिन्दु **c** से लम्ब दूरी है [MP PET 1998]

(a) $|(\mathbf{c} - \mathbf{b}) \times \mathbf{a}| \div |\mathbf{a}|$ (b) $|(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \times \mathbf{b}| \div |\mathbf{b}|$

(c) $|(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{c}| \div |\mathbf{c}|$ (d) $|(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{c}| \div |\mathbf{a} + \mathbf{c}|$

6. यदि $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ तथा $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$ दो सदिश हैं, तब दो रेखाओं $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$ तथा $\mathbf{r} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ का प्रतिच्छेद बिन्दु है [RPET 2000]

(a) $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ (b) $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

(c) $3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ (d) $3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

7. यदि **a, b, c** तीन असमतलीय सदिश हैं, तब सदिश समीकरण $\mathbf{r} = (1 - \mathbf{p} - \mathbf{q})\mathbf{a} + p\mathbf{b} + q\mathbf{c}$ प्रदर्शित करता है [EAMCET 2003]

(a) सरल रेखा

(b) समतल

(c) मूल बिन्दु से गुजरने वाला समतल

(d) गोला

8. बिन्दुओं $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ तथा $-2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ को मिलाने वाली रेखा का सदिश समीकरण है [MP PET 2003]

(a) $\mathbf{r} = t(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

(b) $\mathbf{r} = t_1(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + t_2(3\mathbf{k} - 2\mathbf{j})$

(c) $\mathbf{r} = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + t(2\mathbf{k} - \mathbf{i})$

(d) $\mathbf{r} = t(2\mathbf{k} - \mathbf{i})$

9. दो गोले $\mathbf{r}^2 + 2\mathbf{u}_1.\mathbf{r} + 2d_1 = 0$ तथा $\mathbf{r}^2 + 2\mathbf{u}_2.\mathbf{r} + 2d_2 = 0$ परस्पर लाम्बिक हैं, यदि [AMU 1999]

(a) $\mathbf{u}_1.\mathbf{u}_2 = 0$

(b) $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = 0$

(c) $\mathbf{u}_1.\mathbf{u}_2 = d_1 + d_2$

(d) $(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2).(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = d_1^2 + d_2^2$

10. एक चतुष्फलक के शीर्ष $O(0, 0, 0), A(1, 2, 1), B(2, 1, 3)$ और $C(-1, 1, 2)$ हैं, तब फलक OAB और ABC के बीच कोण होगा [MNR 1994; UPSEAT 2000; AIEEE 2003]

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{19}{35}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{17}{31}\right)$

(c) $30°$ (d) $90°$

11. 8 इकाई परिमाण वाला एक सदिश $\mathbf{n}$, x-अक्ष पर 45^o, y-अक्ष पर 60^o तथा z-अक्ष पर न्यूनकोण बनाता है। यदि एक समतल बिन्दु $(\sqrt{2}, -1, 1)$ से होकर गुजरता है व $\mathbf{n}$ के लिये अभिलम्ब है, तो सदिश रूप में इसका समीकरण है

(a) $\mathbf{r}.(\sqrt{2}\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=4$ (b) $\mathbf{r}.(\sqrt{2}\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=2$
(c) $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=4$ (d) इनमें से कोई नहीं

12. एक समतल का सदिश समीकरण, जो कि मूलबिन्दु से 8 इकाई की दूरी पर है और सदिश $2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ पर अभिलम्ब है, है

(a) $\mathbf{r}.(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=24$ (b) $\mathbf{r}.(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k})=24$
(c) $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=24$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. समतल $\mathbf{r}.(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k})=9$ से बिन्दु $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ की दूरी है

(a) $\frac{13}{\sqrt{21}}$ (b) $\frac{3}{\sqrt{21}}$
(c) $\frac{13}{21}$ (d) $\frac{13}{3\sqrt{21}}$

14. $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})=15$ और $|\mathbf{r}-(\mathbf{j}+2\mathbf{k})|=4$ द्वारा दिये गये वृत्त का केन्द्र है

(a) (0, 1, 2) (b) (1, 3, 4)
(c) (–1, 3, 4) (d) इनमें से कोई नहीं

15. एक सदिश $\mathbf{r}$ निर्देशांक अक्षों के साथ समान कोण बनाता है। यदि $\mathbf{r}$ का सिरा (tip of r) धनात्मक अष्टांक में है व $|\mathbf{r}|=6$, तब $\mathbf{r}$ है

(a) $2\sqrt{3}(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$ (b) $2\sqrt{3}(-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$
(c) $2\sqrt{3}(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})$ (d) $2\sqrt{3}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

16. दो बिन्दुओं P और Q के स्थिति सदिश क्रमशः $3\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ और $\mathbf{i}-2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ हैं। Q से गुजरने वाले और PQ के लम्बवत् समतल का समीकरण है

(a) $\mathbf{r}.(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k})=28$ (b) $\mathbf{r}.(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k})=32$
(c) $\mathbf{r}.(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k})+28=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

17. मूल बिन्दु से गुजरने वाले तथा समतलों $\mathbf{r}.\mathbf{a}=\lambda$ व $\mathbf{r}.\mathbf{b}=\mu$ की प्रतिच्छेद रेखा से जाने वाले समतल का समीकरण है

(a) $\mathbf{r}.(\lambda\mathbf{a}-\mu\mathbf{b})=0$ (b) $\mathbf{r}.(\lambda\mathbf{b}-\mu\mathbf{a})=0$
(c) $\mathbf{r}.(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=0$ (d) $\mathbf{r}.(\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{a})=0$

18. बिन्दुओं A और B के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ और $3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ हैं। एक समतल का समीकरण $\mathbf{r}.(5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k})+9=0$ है, तब बिन्दु A और B

(a) समतल पर स्थित होंगे
(b) समतल के एक ओर हैं
(c) समतल के विपरीत ओर हैं
(d) इनमें से कोई नहीं

19. बिन्दु $2\mathbf{i}-\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ से होकर जाने वाले और समतल $\mathbf{r}.(4\mathbf{i}-12\mathbf{j}-3\mathbf{k})-7=0$ के समान्तर समतल का सदिश समीकरण है

(a) $\mathbf{r}.(4\mathbf{i}-12\mathbf{j}-3\mathbf{k})=0$ (b) $\mathbf{r}.(4\mathbf{i}-12\mathbf{j}-3\mathbf{k})=32$
(c) $\mathbf{r}.(4\mathbf{i}-12\mathbf{j}-3\mathbf{k})=12$ (d) इनमें से कोई नहीं

20. बिन्दु (2, 1, –1) से गुजरने वाले तथा समतल $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k})=0$ व $\mathbf{r}.(\mathbf{j}+2\mathbf{k})=0$ की प्रतिच्छेद रेखा से गुजरने वाले समतल का सदिश समीकरण है

(a) $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+9\mathbf{j}+11\mathbf{k})=0$ (b) $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+9\mathbf{j}+11\mathbf{k})=6$
(c) $\mathbf{r}.(\mathbf{i}-3\mathbf{j}-13\mathbf{k})=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. बिन्दु $\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ से होकर गुजरने वाले तथा समतलों $\mathbf{r}.(3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})=1$ व $\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}=2$ की प्रतिच्छेद रेखा के लम्बवत् गुजरने वाले समतल का सदिश समीकरण है

(a) $\mathbf{r}.(2\mathbf{i}+7\mathbf{j}-13\mathbf{k})=1$ (b) $\mathbf{r}.(2\mathbf{i}-7\mathbf{j}-13\mathbf{k})=1$
(c) $\mathbf{r}.(2\mathbf{i}+7\mathbf{j}+13\mathbf{k})=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

22. रेखाओं $\mathbf{r}=\mathbf{a}_1+\lambda\mathbf{a}_2$ और $\mathbf{r}=\mathbf{a}_2+\lambda\mathbf{a}_1$ को सम्मिलित करने वाले समतल का समीकरण है

(a) $[\mathbf{r}\ \mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]=0$ (b) $[\mathbf{r}\ \mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]=\mathbf{a}_1.\mathbf{a}_2$
(c) $[\mathbf{r}\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_1]=\mathbf{a}_1.\mathbf{a}_2$ (d) इनमें से कोई नहीं

23. रेखाओं $\mathbf{r}=(\mathbf{i}+\mathbf{j})+\lambda(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})$ और $\mathbf{r}=(\mathbf{i}+\mathbf{j})+\mu(-\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})$ को सम्मिलित करने वाले समतल का सदिश समीकरण है

(a) $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=0$ (b) $\mathbf{r}.(\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})=0$
(c) $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=3$ (d) इनमें से कोई नहीं

24. समतल $\mathbf{r}=(1+\lambda-\mu)\mathbf{i}+(2-\lambda)\mathbf{j}+(3-2\lambda+2\mu)\mathbf{k}$ का कार्तीय समीकरण है

(a) $2x+y=5$ (b) $2x-y=5$
(c) $2x+z=5$ (d) $2x-z=5$

25. तीन असमरेखीय बिन्दुओं $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ से गुजरने वाले समतल की मूल बिन्दु से लम्बवत् दूरी है

(a) $\frac{[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}|}$ (b) $\frac{2[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}|}$
(c) $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$ (d) इनमें से कोई नहीं

26. बिन्दु $\mathbf{a}$ से गुजरने वाले और रेखा $\mathbf{r}=\mathbf{b}+\lambda\mathbf{c}$ को सम्मिलित करने वाले समतल की मूल बिन्दु से लम्बवत् लम्बाई है

(a) $\frac{[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}|}$ (b) $\frac{[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}|}$
(c) $\frac{[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]}{|\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}|}$ (d) $\frac{[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]}{|\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}$

27. बिन्दुओं $\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ तथा $3\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ से होकर जाने वाली रेखा पर स्थित बिन्दु का स्थिति सदिश, जो कि $\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ से $3\sqrt{11}$ इकाई दूरी पर है, होगा

(a) $10\mathbf{i}+2\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ (b) $-8\mathbf{i}-4\mathbf{j}-\mathbf{k}$
(c) $8\mathbf{i}+4\mathbf{j}+\mathbf{k}$ (d) $-10\mathbf{i}-2\mathbf{j}-5\mathbf{k}$

28. बिन्दुओं $6\mathbf{a}-4\mathbf{b}+4\mathbf{c}$ व $-4\mathbf{c}$ को मिलाने वाली रेखा और बिन्दुओं $-\mathbf{a}-2\mathbf{b}-3\mathbf{c}$ व $\mathbf{a}+2\mathbf{b}-5\mathbf{c}$ को मिलाने वाली रेखा प्रतिच्छेद करती है

(a) $-4\mathbf{a}$ पर (b) $4\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}$
(c) $4\mathbf{c}$ पर (d) इनमें से कोई नहीं

29. रेखा $\mathbf{r}=(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})+\lambda(-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ और समतल $\mathbf{r}.(3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})=4$ के बीच कोण है

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{42}}\right)$
(c) $\sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right)$ (d) $\sin^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{42}}\right)$

30. उस रेखा का समीकरण, जो $\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ से होकर गुजरती है और रेखाओं $\mathbf{r}=(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})+\lambda(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ और $\mathbf{r}=(2\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\mathbf{k})+\mu(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ के लम्बवत् है, है

(a) $\mathbf{r}=(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})+\lambda(-\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k})$
(b) $\mathbf{r}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}+\lambda(\mathbf{i}-5\mathbf{j}+3\mathbf{k})$
(c) $\mathbf{r}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}+\lambda(\mathbf{i}+5\mathbf{j}+3\mathbf{k})$
(d) $\mathbf{r}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}+\lambda(-\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k})$

31. बिन्दु $-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ की सरल रेखा, जो कि (2, 3, –4) से गुजरती है तथा सदिश $6\mathbf{i}+3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ के समान्तर है, से दूरी है

(a) 7 (b) 10
(c) 9 (d) इनमें से कोई नहीं

32. उस बिन्दु का स्थिति सदिश, जिसमें बिन्दुओं $\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ व $3\mathbf{k}-2\mathbf{j}$ को मिलाने वाला रेखाखण्ड, मूल बिन्दु तथा $4\mathbf{j}$ व $2\mathbf{i}+\mathbf{k}$ से गुजरने वाले समतल को काटता है, हैं

(a) $6\mathbf{i}-10\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ (b) $\frac{1}{5}(6\mathbf{i}-10\mathbf{j}+3\mathbf{k})$
(c) $-6\mathbf{i}+10\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ (d) इनमें से कोई नहीं

33. समतलों $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k})+5=0$ और $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k})-8=0$ के बीच की दूरी है

(a) 1 इकाई (b) $\frac{13}{3}$ इकाई
(c) 13 इकाई (d) इनमें से कोई नहीं

34. रेखा $\mathbf{r}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\lambda(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k})$ को सम्मिलित करने वाले समतल का समीकरण है

(a) $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})=3$ (b) $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})=6$
(c) $\mathbf{r}.(-\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})=3$ (d) इनमें से कोई नहीं

35. समीकरण $|\mathbf{r}|^2-\mathbf{r}.(2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k})-10=0$ प्रदर्शित करता है

(a) वृत्त (b) समतल
(c) त्रिज्या 4 का गोला (d) त्रिज्या 3 का गोला
(e) इनमें से कोई नहीं

36. गोला $\alpha\,\mathbf{r}-2\mathbf{u}.\mathbf{r}=\beta,(\alpha\neq 0)$ का केन्द्र है [AMU 1999]

(a) $-\mathbf{u}/\alpha$ (b) $\mathbf{u}/\alpha$
(c) $\alpha\mathbf{u}/\beta$ (d) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\mathbf{u}$

37. रेखाओं $\mathbf{r}=(3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k})+\mathbf{i}t$ और $\mathbf{r}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}+\mathbf{j}s$ (t व s प्राचल है) के बीच न्यूनतम दूरी है [AMU 1999]

(a) $\sqrt{21}$ (b) $\sqrt{102}$
(c) 4 (d) 3

38. बिन्दुओं $a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ और $b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$ से होकर गुजरने वाली रेखा का समीकरण है [RPET 2002]

(a) $(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})+t(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})$
(b) $(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})-t(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})$
(c) $a_1(1-t)\mathbf{i}+a_2(1-t)\mathbf{j}+a_3(1-t)\mathbf{k}+(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})t$
(d) इनमें से कोई नहीं

39. रेखा $\mathbf{r}=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}+\lambda(\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k})$ और समतल $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+5\mathbf{j}+\mathbf{k})=5$ के बीच दूरी है [AIEEE 2005]

(a) $\frac{3}{10}$ (b) $\frac{10}{3}$
(c) $\frac{10}{9}$ (d) $\frac{10}{3\sqrt{3}}$

40. समतल $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=1$ में बिन्दु, जिसका स्थिति सदिश $\mathbf{i}+3\mathbf{k}$ है, का प्रतिबिम्ब है [J & K 2005]

(a) $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{i}-2\mathbf{i}+\mathbf{k}$
(c) $-\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ (d) $\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$

41. रेखा $\mathbf{r}=-3\mathbf{j}+\mathbf{k}+\lambda(2\mathbf{i}+5\mathbf{j}-\mathbf{k})$ के समान्तर व बिन्दुओं $(-1,-2,0),(2,3,5)$ से गुजरने वाले समतल का समीकरण है [J & K 2005]

(a) $\mathbf{r}.(-30\mathbf{i}+13\mathbf{j}+5\mathbf{k})=4$ (b) $\mathbf{r}.(30\mathbf{i}+13\mathbf{j}+5\mathbf{k})=4$
(c) $\mathbf{r}.(30\mathbf{i}+13\mathbf{j}-5\mathbf{k})=4$ (d) $\mathbf{r}.(30\mathbf{i}-13\mathbf{j}-5\mathbf{k})=4$

42. रेखाओं $\mathbf{r}_1=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k}+\lambda(\mathbf{i}-4\mathbf{j}+7\mathbf{k})$ और $\mathbf{r}_2=\mathbf{i}-\mathbf{j}-10\mathbf{k}+\lambda(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+8\mathbf{k})$ के बीच न्यूनतम दूरी है [J & K 2005]

(a) 3 (b) 1
(c) 2 (d) 0

43. उस बिन्दु का स्थिति सदिश, जहाँ रेखा $\mathbf{r}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}+t(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$, समतल $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=5$ से मिलती है, है [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $5\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ (b) $5\mathbf{i}+3\mathbf{j}-3\mathbf{k}$
(c) $2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ (d) $5\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$
(e) $4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

44. एक समतल, निर्देशांक अक्षों को P, Q व R पर इस प्रकार मिलता है; कि ΔPQR के केन्द्रक का स्थिति सदिश $2\mathbf{i}-5\mathbf{j}+8\mathbf{k}$ है, तब समतल का समीकरण है [J & K 2005]

(a) $\mathbf{r}.(20\mathbf{i}-8\mathbf{j}+5\mathbf{k})=120$ (b) $\mathbf{r}.(20\mathbf{i}-8\mathbf{j}+5\mathbf{k})=1$
(c) $\mathbf{r}.(20\mathbf{i}-8\mathbf{j}+5\mathbf{k})=2$ (d) $\mathbf{r}.(20\mathbf{i}-8\mathbf{j}+5\mathbf{k})=20$

45. समतलों $\mathbf{r}.(\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k})=1$ और $\mathbf{r}.(2\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k})=2$ की प्रतिच्छेद रेखा के समान्तर सदिश है

(a) $-4\mathbf{i}+5\mathbf{j}+11\mathbf{k}$ (b) $4\mathbf{i}+5\mathbf{j}+11\mathbf{k}$
(c) $4\mathbf{i}-5\mathbf{j}+11\mathbf{k}$ (d) $4\mathbf{i}-5\mathbf{j}-11\mathbf{k}$

46. बिन्दु $A(2,-1,3)$ से गुजरने वाले और सदिशों $\mathbf{a}=(3,0,-1)$ व $\mathbf{b}=(-3,2,2)$ के समान्तर समतल का समीकरण है [Orissa JEE 2005]

(a) $2x-3y+6z-25=0$ (b) $2x-3y+6z+25=0$
(c) $3x-2y+6z-25=0$ (d) $3x-2y+6z+25=0$

47. यदि दो बिन्दुओं P व Q के स्थिति सदिश क्रमशः $9\mathbf{i}-\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ व $\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ हैं तथा रेखाखण्ड PQ, समतल YOZ को बिन्दु R पर प्रतिच्छेद करता है, तब $PR:RQ=$ [J & K 2005]

(a) 9 : 1 (b) 1 : 9
(c) –1 : 9 (d) – 9 : 1

Critical Thinking

Objective Questions

1. तीन बल जिनके परिमाण 1, 2, 3 डाइन हैं, एक बिन्दु पर मिलते हैं एवं घन के तीन संलग्न फलकों के विकर्णों के अनुदिश कार्यरत् हैं, तो परिणामी बल है [MNR 1987]

(a) 114 डाइन (b) 6 डाइन
(c) 5 डाइन (d) इनमें से कोई नहीं

2. सदिश $\mathbf{b}$ तथा $\mathbf{c}$ क्रमशः उत्तर–पूर्व तथा उत्तर–पश्चिम दिशाओं में सदिश हैं तथा $|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|=4$, तब सदिश $\mathbf{d}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$ का परिमाण तथा दिशा है [Roorkee 2000]

(a) $4\sqrt{2}$, उत्तर की ओर (b) $4\sqrt{2}$, पश्चिम की ओर
(c) 4, पूर्व की ओर (d) 4, दक्षिण की ओर

3. यदि **a**, **b** तथा **c** इकाई सदिश हैं, तब $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2+|\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2+|\mathbf{c}-\mathbf{a}|^2$ अधिक नहीं हो सकता है [IIT Screening 2001]

(a) 4 से (b) 9 से
(c) 8 से (d) 6 से

4. सदिश $\overrightarrow{AB}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ और $\overrightarrow{AC}=5\mathbf{i}-5\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ हैं। A से गुजरने वाली माध्यिका की लम्बाई है [UPSEAT 2004]

(a) $\sqrt{13}$ इकाई (b) $2\sqrt{5}$ इकाई
(c) 5 इकाई (d) 10 इकाई

5. माना $\mathbf{p}=(x+4y)\mathbf{a}+(2x+y+1)\mathbf{b}$ व
$\mathbf{q}=(y-2x+2)\mathbf{a}+(2x-3y-1)\mathbf{b}$,
जहाँ **a** व **b** असमरैखिक सदिश हैं। यदि $3\mathbf{p}=2\mathbf{q}$, तो x व y के मान होंगे [RPET 1984; MNR 1984]

(a) – 1, 2 (b) 2, – 1
(c) 1, 2 (d) 2, 1

6. बिन्दु D, E, F; भुजाओं BC, CA व AB को क्रमशः 1:4, 3 : 2 व 3 : 7 के अनुपात में विभाजित करते हैं एवं बिन्दु K; AB को 1 : 3 के अनुपात में विभाजित करता है, तो $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}):\overrightarrow{CK}=$ [MNR 1987]

(a) 1 : 1 (b) 2 : 5
(c) 5 : 2 (d) इनमें से कोई नहीं

7. यदि एक त्रिभुज के दो शीर्ष $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ व $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ हों, तो तीसरा शीर्ष होगा [Roorkee 1995]

(a) $\mathbf{i}+\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}$
(c) $\mathbf{i}-\mathbf{k}$ (d) $2\mathbf{i}-\mathbf{j}$
(e) उपरोक्त सभी

8. यदि 50 परिमाण का सदिश **a**, सदिश $\mathbf{b}=6\,\mathbf{i}-8\,\mathbf{j}-\frac{15\,\mathbf{k}}{2}$ के साथ समरेखीय है और z-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ न्यूनकोण बनाता है, तब सदिश **a** है [Pb. CET 2004]

(a) $24\,\mathbf{i}-32\,\mathbf{j}+30\,\mathbf{k}$ (b) $-24\,\mathbf{i}+32\,\mathbf{j}+30\,\mathbf{k}$
(c) $16\,\mathbf{i}-16\,\mathbf{j}-15\,\mathbf{k}$ (d) $-12\,\mathbf{i}+16\,\mathbf{j}-30\,\mathbf{k}$

9. माना तीन अशून्य सदिश $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$,
$\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$ व $\mathbf{c}=c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$ हैं।
यदि **c** एक इकाई सदिश है जो **a** तथा **b** पर लम्ब है एवं **a** व **b** के बीच का कोण $\frac{\pi}{6}$ हो, तो $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2=$ [IIT 1986]

(a) 0 (b) $\frac{3(\Sigma a_1^2)(\Sigma b_1^2)(\Sigma c_1^2)}{4}$
(c) 1 (d) $\frac{(\Sigma a_1^2)(\Sigma b_1^2)}{4}$

10. माना इकाई सदिश **a** व **b** परस्पर लम्बवत् हैं व इकाई सदिश **c**, **a** व **b** से θ कोण पर झुका है। यदि $\mathbf{c}=\alpha\,\mathbf{a}+\beta\,\mathbf{b}+\gamma(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$, तो [Orissa JEE 2003]

(a) $\alpha=\beta=\cos\theta,\ \gamma^2=\cos 2\theta$
(b) $\alpha=\beta=\cos\theta,\ \gamma^2=-\cos 2\theta$
(c) $\alpha=\cos\theta,\ \beta=\sin\theta,\ \gamma^2=\cos 2\theta$
(d) इनमें से कोई नहीं

11. सदिश $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, सदिशों **a** तथा **b** के बीच कोण का अर्धक होगा, यदि

(a) $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$
(b) $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$ या **a** व **b** के बीच कोण शून्य है
(c) $|\mathbf{a}|=m|\mathbf{b}|$
(d) इनमें से कोई नहीं

12. बिन्दु O, A, B, C, D इस प्रकार हैं कि $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC}=2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ व $\overrightarrow{OD}=\mathbf{a}-2\mathbf{b}$. यदि $|\mathbf{a}|=3|\mathbf{b}|$, तो $\overrightarrow{BD}$ व $\overrightarrow{AC}$ के बीच कोण होगा

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{6}$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. यदि $\vec{A}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\vec{B}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ और $\vec{C}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}$, तो t के किस मान के लिए $\vec{A}+t\vec{B}$, सदिश $\vec{C}$ के लम्बवत् है [RPET 2002]

(a) 2 (b) 4
(c) 5 (d) 6

14. माना दो सदिश $\mathbf{b}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ व **c**, xy-तल में परस्पर लम्बवत् हैं। इसी तल में सभी सदिश, जिनके **b** तथा **c** के अनुदिश प्रक्षेप क्रमशः 1 व 2 हैं, हैं [IIT 1987]

(a) $2\mathbf{i}-\mathbf{j},\ \frac{2}{5}\mathbf{i}+\frac{11}{5}\mathbf{j}$ (b) $2\mathbf{i}+\mathbf{j},\ -\frac{2}{5}\mathbf{i}+\frac{11}{5}\mathbf{j}$
(c) $2\mathbf{i}+\mathbf{j},-\frac{2}{5}\mathbf{i}-\frac{11}{5}\mathbf{j}$ (d) $2\mathbf{i}-\mathbf{j},\ -\frac{2}{5}\mathbf{i}+\frac{11}{5}\mathbf{j}$

15. माना $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ व $\mathbf{c}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ तीन सदिश हैं। तब सदिश **b** व **c** के तल में वह सदिश, जिसका **a** पर प्रक्षेप का परिमाण $\sqrt{\frac{2}{3}}$ है, है [IIT 1993; Pb. CET 2004]

(a) $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ (b) $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+3\mathbf{k}$
(c) $-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ (d) $2\mathbf{i}+\mathbf{j}+5\mathbf{k}$

16. एक सदिश **a** के समकोणीय निर्देशांक पद्धति में घटक $2p$ व 1 हैं। निकाय को मूल बिन्दु के सापेक्ष एक निश्चित कोण से वामावर्त घुमा दिया जाता है। यदि अब नये निकाय के सापेक्ष **a** के घटक $p+1$ व 1 हैं, तो [IIT 1984]

(a) $p=0$ (b) $p=1$ या $-\frac{1}{3}$
(c) $p=-1$ या $\frac{1}{3}$ (d) $p=1$ या -1

17. यदि $\mathbf{u}=2\,\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ और $\mathbf{v}=6\,\mathbf{i}-3\,\mathbf{j}+2\,\mathbf{k}$, तो **u** तथा **v** दोनों के लम्बवत् एक इकाई सदिश है [MP PET 1987]

(a) $\mathbf{i}-10\,\mathbf{j}-18\,\mathbf{k}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{17}}\left(\frac{1}{5}\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\frac{18}{5}\mathbf{k}\right)$
(c) $\frac{1}{\sqrt{473}}(7\mathbf{i}-10\,\mathbf{j}-18\,\mathbf{k})$ (d) इनमें से कोई नहीं

18. माना $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ व $\mathbf{c}=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ । यदि $\mathbf{d}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}\times\mathbf{b}$ व $\mathbf{d}.\mathbf{a}=0$, तो **d** होगा [IIT 1990]

(a) $\mathbf{i}+8\,\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{i}-8\,\mathbf{j}+2\mathbf{k}$
(c) $-\mathbf{i}+8\,\mathbf{j}-\mathbf{k}$ (d) $-\mathbf{i}-8\,\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

19. यदि $\mathbf{a}\times\mathbf{r}=\mathbf{b}+\lambda\mathbf{a}$ व $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{r}=3$, जहाँ $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ व $\mathbf{b}=-\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ तो r व λ के मान हैं

(a) $\mathbf{r}=\frac{7}{6}\mathbf{i}+\frac{2}{3}\mathbf{j},\ \lambda=\frac{6}{5}$ (b) $\mathbf{r}=\frac{7}{6}\mathbf{i}+\frac{2}{3}\mathbf{j},\ \lambda=\frac{5}{6}$

(c) $\mathbf{r}=\frac{6}{7}\mathbf{i}+\frac{2}{3}\mathbf{j},\ \lambda=\frac{6}{5}$ (d) इनमें से कोई नहीं

20. माना सदिश a, b, c तथा d इस प्रकार हैं कि $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=0$ माना P_1 तथा P_2 क्रमशः सदिशों a, b तथा c, d के युग्मों द्वारा निर्धारित समतल हैं, तब P_1 तथा P_2 के मध्य कोण है

[IIT Screening 2000; MP PET 2004]

(a) 0^o (b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

21. यदि $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k},\ \mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}=1$ और $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{j}-\mathbf{k}$, तब $\mathbf{b}=$

[IIT Screening 2004]

(a) $\mathbf{i}$ (b) $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$

(c) $2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ (d) $2\mathbf{i}$

22. एक चतुर्भुज *ABCD* के शीर्षों के स्थिति सदिश क्रमशः **a, b, c** तथा **d** हैं। इसकी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बने चतुर्भुज का क्षेत्रफल है [Roorkee 2000]

(a) $\frac{1}{4}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{d}+\mathbf{d}\times\mathbf{a}|$

(b) $\frac{1}{4}|\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{d}+\mathbf{a}\times\mathbf{d}+\mathbf{b}\times\mathbf{a}|$

(c) $\frac{1}{4}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{d}+\mathbf{d}\times\mathbf{a}|$

(d) $\frac{1}{4}|\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{d}+\mathbf{d}\times\mathbf{b}|$

23. *A* तथा *B* के निर्देशांक क्रमशः $(1,2,-3)$ तथा $(3,-4,2)$ हैं। तब बल, जो परिमाण तथा स्थिति में $\overrightarrow{AB}$ से निरूपित हो, का आघूर्ण बिन्दु $M(-2,4,-6)$ के सापेक्ष होगा [MP PET 2000]

(a) 8i – 9j – 14k (b) 2i – 6j + 5k

(c) – 3i + 2j – 3k (d) – 5i + 8j – 8k

24. यदि सदिश $a\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k},\ \mathbf{i}+b\mathbf{j}+\mathbf{k}$ व $\mathbf{i}+\mathbf{j}+c\mathbf{k}$, $(a\ne b\ne c\ne 1)$ समतलीय सदिश हों, तो $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}=$

[BIT Ranchi 1988; RPET 1987; IIT 1987; DCE 2001; MP PET 2004; Orissa JEE 2005]

(a) – 1 (b) $-\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

25. यदि $\alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+\beta(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\gamma(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{0}$ तथा α,β व γ में से कम से कम एक अशून्य है, तो सदिश a, b, c हैं

(a) लम्बवत् (b) समान्तर

(c) समतलीय (d) इनमें से कोई नहीं

26. चतुष्फलक का आयतन, जिसके शीर्ष क्रमशः $-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k},\ \mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ तथा चौथा शीर्ष मूल बिन्दु है, है

(a) $\frac{5}{3}$ घन इकाई (b) $\frac{2}{3}$ घन इकाई

(c) $\frac{3}{5}$ घन इकाई (d) इनमें से कोई नहीं

27. माना $\mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{j},\ \mathbf{b}=\mathbf{j}-\mathbf{k},\ \mathbf{c}=\mathbf{k}-\mathbf{i}$. यदि $\hat{\mathbf{d}}$ एक इकाई सदिश इस प्रकार है कि $\mathbf{a}\,.\,\hat{\mathbf{d}}=0=[\mathbf{b}\ \mathbf{c}\ \hat{\mathbf{d}}]$, तो $\hat{\mathbf{d}}$ का मान है

[IIT 1995]

(a) $\pm\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$ (b) $\pm\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$

(c) $\pm\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}}{\sqrt{6}}$ (d) $\pm\,\mathbf{k}$

28. '*a*' का मान क्या होगा, जबकि सदिश $\mathbf{i}+a\mathbf{j}+\mathbf{k},\mathbf{j}+a\mathbf{k}$ तथा $a\mathbf{i}+\mathbf{k}$ से निर्मित घनाभ का आयतन न्यूनतम हो

[IIT Screening 2003]

(a) – 3 (b) 3

(c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{3}$

29. यदि b और c कोई भी दो असंरेख (Non-collinear) इकाई सदिश हैं और a कोई सदिश है, तो $(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\mathbf{b}+(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{c})\mathbf{c}+\frac{\mathbf{a}\,.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}{|\,\mathbf{b}\times\mathbf{c}\,|}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=$ [IIT 1996]

(a) a (b) b

(c) c (d) 0

30. यदि a, b, c असमतलीय इकाई सदिश इस प्रकार हैं कि $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{\sqrt{2}}$, तो a व b के बीच कोण है [IIT 1995]

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) π

31. $[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]=$

(a) $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]^2$ (b) $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]^3$

(c) $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]^4$ (d) इनमें से कोई नहीं

32. तीन इकाई सदिश a, b और c समतलीय हैं तथा एक इकाई सदिश d इनके लम्बवत् है। यदि $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\frac{1}{6}\mathbf{i}-\frac{1}{3}\mathbf{j}+\frac{1}{3}\mathbf{k}$ और a एवं b के बीच का कोण 30^o है, तो c =

[Roorkee Qualifying 1998]

(a) $\frac{(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k})}{3}$ (b) $\frac{(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})}{3}$

(c) $\frac{(-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k})}{3}$ (d) $\frac{(-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})}{3}$

33. समतल $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=3\sqrt{3}$ द्वारा गोले $|\,\mathbf{r}|=5$ में बने वृत्तीय भाग की त्रिज्या है [DCE 1999]

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

34. यदि $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ और $\mathbf{z}$ के समान्तर है जहाँ $\mathbf{x} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \alpha\mathbf{k}$, $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{i} + \mathbf{k}$ और $\mathbf{z} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$, तब $\alpha =$ [J & K 2005]

(a) $\pm\sqrt{5}$ (b) $\pm\sqrt{6}$

(c) $\pm\sqrt{7}$ (d) इनमें से कोई नहीं

35. सदिशों $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ व $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ के बीच कोण का अर्धक $\mathbf{c}$ द्वारा निर्देशित होता है जहाँ $|\mathbf{c}| = 5\sqrt{6}$, तो $\mathbf{c}$ है

(a) $\frac{5}{3}(\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

(b) $\frac{5}{3}(5\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

(c) $\frac{5}{3}(\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

(d) $\frac{5}{3}(-5\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

36. बिन्दु $B(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$ की $A(4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ से जाने वाली एवं सदिश $\vec{C} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ के समान्तर रेखा से दूरी है [Roorkee 1993]

(a) 10 (b) $\sqrt{10}$

(c) 100 (d) इनमें से कोई नहीं

37. माना $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ तीन असमतलीय सदिश इस प्रकार हैं कि

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c},\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a},\ \mathbf{r}_3 = \mathbf{c} + \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

$\mathbf{r} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$. यदि $\mathbf{r} = \lambda_1\mathbf{r}_1 + \lambda_2\mathbf{r}_2 + \lambda_3\mathbf{r}_3$, तो

(a) $\lambda_1 = 7$ (b) $\lambda_1 + \lambda_3 = 3$

(c) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4$ (d) $\lambda_3 + \lambda_2 = 2$

38. माना सदिश $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ और एकक सदिश $\mathbf{c}$ समतलीय हैं। यदि सदिश $\mathbf{c}$ और $\mathbf{a}$ लम्बवत् हैं, तो $\mathbf{c} =$ [IIT 1999; Pb. CET 2003; DCE 2005]

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{j} + \mathbf{k})$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$

(c) $\frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$ (d) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$

39. माना $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ समान परिमाण के तीन परस्पर लम्बवत् सदिश हैं। यदि सदिश $\mathbf{x}$, समीकरण $\mathbf{p} \times \{(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \times \mathbf{p}\} + \mathbf{q} \times \{(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \times \mathbf{q}\} + \mathbf{r} \times \{(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \times \mathbf{r}\} = 0$ को सन्तुष्ट करता है, तो $\mathbf{x}$ का मान होगा [IIT 1997 Cancelled]

(a) $\frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{q} - 2\mathbf{r})$

(b) $\frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r})$

(c) $\frac{1}{3}(\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r})$

(d) $\frac{1}{3}(2\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{r})$

40. $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$ और $\mathbf{r} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ का प्रतिच्छेद बिन्दु, जहाँ $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ और $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$ है, है [Orissa JEE 2004]

(a) $3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ (b) $3\mathbf{i} - \mathbf{k}$

(c) $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ (d) इनमें से कोई नहीं

Answers

सदिश का मापांक, सदिशों का बीजगणित

1	a	2	d	3	d	4	a	5	c
6	c	7	b	8	d	9	c	10	c
11	a	12	b	13	b	14	a	15	d
16	a	17	a	18	c	19	b	20	d
21	b	22	a	23	c	24	c	25	b
26	b	27	b	28	b	29	b	30	c
31	b	32	d	33	d	34	c	35	c
36	c	37	d	38	c	39	b	40	b
41	d	42	c	43	b	44	b	45	c
46	d	47	d	48	a	49	c	50	b
51	c	52	b	53	a	54	a	55	b
56	c	57	b	58	a	59	a	60	a
61	b	62	a	63	d	64	b	65	b
66	d	67	a	68	b	69	c	70	d
71	b	72	a	73	a	74	a	75	b
76	b	77	d	78	b	79	c	80	c
81	a	82	c	83	a	84	b	85	a
86	a	87	a	88	c	89	d	90	c
91	a	92	a	93	d	94	d	95	d
96	a	97	a	98	d	99	a	100	c
101	c	102	c	103	d	104	b	105	a
106	d	107	b	108	d	109	c	110	c
111	a	112	a	113	c	114	b	115	c
116	a	117	c	118	a	119	a		

दो सदिशों का अदिश गुणन तथा उसके अनुप्रयोग

1	a	2	d	3	c	4	b	5	c
6	c	7	a	8	c	9	d	10	b
11	d	12	a	13	a	14	d	15	d
16	b	17	d	18	b	19	c	20	c
21	b	22	d	23	b	24	c	25	c
26	a	27	c	28	d	29	a	30	a
31	d	32	c	33	d	34	a	35	a
36	a	37	d	38	a	39	a	40	d
41	c	42	c	43	a	44	b	45	c

46	b	47	b	48	b	49	b	50	b
51	d	52	b	53	a	54	d	55	d
56	b	57	b	58	c	59	c	60	b
61	c	62	d	63	c	64	d	65	b
66	a	67	a	68	b	69	a	70	a
71	a	72	b	73	d	74	d	75	c
76	b	77	b	78	c	79	b	80	a
81	a	82	c	83	c	84	a,c,d	85	d
86	d	87	d	88	a	89	c	90	c
91	d	92	a	93	b	94	b	95	b
96	b	97	b	98	c	99	a	100	b
101	a	102	a	103	a	104	a	105	c
106	d	107	c	108	b	109	c	110	a
111	b	112	c	113	b	114	d	115	d

दो सदिशों का सदिश गुणन तथा उसके अनुप्रयोग

1	d	2	c	3	b	4	a	5	c
6	c	7	b	8	c	9	b	10	d
11	a	12	c	13	b	14	a	15	c
16	a,c	17	b	18	a	19	c	20	d
21	a	22	c	23	c	24	c	25	a
26	d	27	b	28	a	29	c	30	d
31	b	32	c	33	a	34	b	35	b
36	b	37	c	38	a	39	b	40	c
41	b	42	d	43	a	44	a	45	c
46	b	47	b	48	b	49	a	50	b
51	c	52	c	53	a	54	c	55	b
56	b	57	a	58	d	59	b	60	b
61	b	62	b	63	c	64	c	65	b
66	d	67	c	68	c	69	c	70	c
71	c	72	b	73	b	74	c	75	d
76	a	77	a	78	a	79	d	80	c
81	d	82	b	83	b	84	d	85	a
86	c	87	c	88	d				

अदिश त्रिगुणन तथा उसके अनुप्रयोग

1	a	2	b	3	c	4	c	5	a
6	d	7	d	8	a	9	a	10	c
11	b	12	c	13	a	14	b	15	d
16	c	17	a	18	a	19	b	20	d
21	b	22	d	23	a	24	c	25	d
26	b	27	c,d	28	c	29	c	30	d
31	c	32	a,c	33	b	34	b	35	c
36	b	37	a	38	b	39	a	40	d
41	d	42	c	43	b	44	b	45	c
46	a	47	d	48	d	49	b	50	d
51	c	52	b	53	c	54	c	55	d
56	c	57	c	58	d	59	c	60	d
61	c	62	b	63	a				

सदिश त्रिगुणन

1	a	2	c	3	a	4	d	5	b
6	c	7	d	8	a	9	b	10	d
11	b	12	d	13	c	14	b	15	b
16	a	17	a	18	a	19	a	20	c
21	d	22	d	23	d	24	c		

त्रिविमीय ज्यामिति में सदिशों का अनुप्रयोग

1	a	2	a	3	d	4	a	5	b
6	c	7	b	8	c	9	c	10	a
11	b	12	b	13	a	14	b	15	d
16	c	17	b	18	c	19	b	20	a
21	b	22	a	23	b	24	c	25	a
26	c	27	b	28	d	29	d	30	d
31	a	32	b	33	b	34	a	35	c
36	d	37	c	38	c	39	d	40	c
41	a	42	d	43	b	44	a	45	b
46	a	47	d						

Critical Thinking Questions

1	c	2	b	3	b	4	c	5	b
6	b	7	e	8	b	9	d	10	b
11	b	12	d	13	c	14	d	15	a,c
16	b	17	b	18	d	19	b	20	a
21	a	22	c	23	a	24	d	25	c
26	b	27	c	28	c	29	a	30	c
31	c	32	a,c	33	d	34	c	35	a
36	b	37	b,c	38	a	39	b	40	a

Answers and Solutions

सदिश का मापांक, सदिशों का बीजगणित

1. (a) $l_1 = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2},\ l_2 = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2},\ l_3 = 5\sqrt{2}$.
अतः $l_1 + l_2 + l_3 = 3\sqrt{50} = \sqrt{450}$.

2. (d) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k} \Rightarrow |a| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9}$
$\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k} \Rightarrow |b| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18}$
$\mathbf{c} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \Rightarrow |c| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9}$
$|\mathbf{a}| = |\mathbf{c}|$ और $\mathbf{b}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2$
अतः यह समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है।

3. (d) $|\mathbf{a}| = \sqrt{9+16+25} = 5\sqrt{2}$
क्षेत्रफल $= |\mathbf{a}|^2 = 25 \times 2 = 50$.

4. (a) $|x\mathbf{a}| = |x||\mathbf{a}| = |x|\sqrt{4+4+1} = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{3}$

5. (c) चूँकि $\sin^2 2\theta + \cos^2\theta$ आवश्यक रूप से, 1 के बराबर नहीं होगा।

6. (c) परिमाण में बराबर समद्विभाजक $= \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{\sqrt{2}}$, यदि $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.

7. (b) $|\mathbf{b}|\,\hat{\mathbf{a}} = \sqrt{9+36+4}\left(\frac{\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\sqrt{1+4+4}}\right) = \frac{7}{3}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})$.

8. (d) $\mathbf{p} - 2\mathbf{q} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$
$|\mathbf{p} - 2\mathbf{q}| = \sqrt{49+16+1} = \sqrt{66}$.

9. (c) $\mathbf{b} = \cos 120°\,\mathbf{i} + \sin 120°\,\mathbf{j}$ या $\mathbf{b} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$
इसलिए, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$

10. (c) समबाहु, चूँकि प्रत्येक भुजा की लम्बाई $\sqrt{6}$ है।

11. (a) $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{a}| = \sqrt{16+16+4} = 6$
$\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 12\mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{b}| = \sqrt{144+4+9} = \sqrt{157}$
$\mathbf{c} = -\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{c}| = \sqrt{64+16+1} = 9$
अतः परिमाप $= 15 + \sqrt{157}$.

12. (b) $\overrightarrow{AB} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 3$

13. (b) $R = \sqrt{4+100+121} = 15$

14. (a) यह आधारभूत संकल्पना है।

15. (d) परिणामी सदिश $= 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.
अतः दिक्–कोज्यायें $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ हैं।

16. (a) $7 = \sqrt{(5+1)^2 + (4-2)^2 + (a+2)^2} \Rightarrow a+2 = \pm 3$ या
$a = -5,\ 1$.

17. (a) दिशा अनिर्धारित है।

18. (c) माना $\mathbf{a} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$, जहाँ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.
$\therefore$ सदिश **a**, z – अक्ष से $\frac{\pi}{4}$ कोण बनाता है
$\therefore n = \frac{1}{\sqrt{2}},\ l^2 + m^2 = \frac{1}{2}$ .....(i)
$\therefore \mathbf{a} = l\,\mathbf{i} + m\,\mathbf{j} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{2}}$
$\mathbf{a} + \mathbf{i} + \mathbf{j} = (l+1)\mathbf{i} + (m+1)\mathbf{j} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{2}}$
इसका परिमाण 1 है, $\therefore (l+1)^2 + (m+1)^2 = \frac{1}{2}$ .....(ii)
(i) व (ii) से, $2lm = \frac{1}{2} \Rightarrow l = m = -\frac{1}{2}$
अतः $\mathbf{a} = -\frac{\mathbf{i}}{2} - \frac{\mathbf{j}}{2} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{2}}$.

19. (b) यह आधारभूत संकल्पना है।

20. (d) दिया है, $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{d} \Rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{d})$
$\overrightarrow{AC}$ व $\overrightarrow{BD}$ के मध्य बिन्दु सम्पाती हैं, जहाँ $\overrightarrow{AC}$ व $\overrightarrow{BD}$ विकर्ण हैं। हम जानते हैं कि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक–दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। अतः चतुर्भुज, समान्तर चतुर्भुज है।

21. (b) $\overrightarrow{AB} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$
y – अक्ष के अनुदिश दिक्–कोज्या
$= \frac{-5}{\sqrt{16+25+121}} = \frac{-5}{\sqrt{162}}$.

22. (a) $|\overrightarrow{AB}| = |Q| = \sqrt{P^2 + P^2} = P\sqrt{2}$.

23. (c) $\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}} = \frac{3}{\sqrt{50}}$.

24. (c) $\overrightarrow{OA} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k},\ \overrightarrow{OB} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
$\overrightarrow{OC} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
$\therefore \overrightarrow{AB} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k},\ \overrightarrow{BC} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k},\ \overrightarrow{CA} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$
स्पष्टतः, $|AB| = |BC| = |CA| = \sqrt{6}$
अतः दिए गये बिन्दु समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

25. (b) माना P, Q व R के स्थिति सदिश क्रमशः $\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$, $\beta\mathbf{i} + \gamma\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k}$ व $\gamma\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j} + \beta\mathbf{k}$ हैं, तो
$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{QR}| = |\overrightarrow{RP}| = \sqrt{(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2}$
अतः ΔPQR, समबाहु त्रिभुज है।

26. (b) चूँकि $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2)$
$\therefore 25 + |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 2(9+16) \Rightarrow |\mathbf{a}-\mathbf{b}| = 5$.

27. (b) **ट्रिक :** यहाँ केवल सदिश $4(\sqrt{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} \pm \mathbf{k})$ है, जिसकी लम्बाई 8 है।

28. (b) चूँकि **a** व **b** असमरेखीय हैं, अतः $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ व $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ भी असमरेखीय होंगे। अतः $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ व $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ रेखीय स्वतंत्र सदिश होंगे।

29. (b) $\overrightarrow{AB} = \vec{B}$ का स्थिति सदिश – $\vec{A}$ का स्थिति सदिश

$= (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) - (6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16 + 25 + 81} = \sqrt{122}$,

$\overrightarrow{BC} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1 + 9 + 16} = \sqrt{26}$

व $\overrightarrow{AC} = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{98}$

अतः $AB^2 = 122$, $BC^2 = 26$ व $AC^2 = 98$.

$\Rightarrow AB^2 + BC^2 = 26 + 122 = 148$

$\because AC^2 < AB^2 + BC^2$, $\therefore \Delta ABC$ अधिककोण त्रिभुज है।

30. (c) $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$

$\Rightarrow (\sqrt{7}Q)^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 60°$

$\Rightarrow 7Q^2 = P^2 + Q^2 + PQ \Rightarrow P^2 + PQ - 6Q^2 = 0$

$\Rightarrow P^2 + 3PQ - 2PQ - 6Q^2 = 0$

$\Rightarrow P(P + 3Q) - 2Q(P + 3Q) = 0$

$\Rightarrow (P - 2Q)(P + 3Q) = 0$

$\Rightarrow P - 2Q = 0$ या $P + 3Q = 0$

$P - 2Q = 0$ से, $\frac{P}{Q} = 2$.

31. (b) सदिश $\vec{A} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, अतः $\vec{A}$ की दिक् कोज्यायें

$= \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}}, \frac{-4}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}}, \frac{5}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}}$

$= \frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{-4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$.

32. (d) $\overrightarrow{AB} = (6 - 2)\mathbf{i} + (-3 + 9)\mathbf{j} + (8 + 4)\mathbf{k} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16 + 36 + 144} = 14$.

33. (d) $\overrightarrow{PQ} = (5 - 1)\mathbf{i} + (-2 - 3)\mathbf{j} + (4 + 7)\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{16 + 25 + 121} = \sqrt{162}$.

34. (c) $m\mathbf{a}$ एक इकाई सदिश होगा यदि और केवल यदि $|m\,\mathbf{a}| = 1$

$\Rightarrow m\,|\mathbf{a}| = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{|\mathbf{a}|}$.

35. (c) $\overrightarrow{AB} = (3 - 2)\mathbf{i} + (-2 - 1)\mathbf{j} + (1 + 1)\mathbf{k} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$\overrightarrow{BC} = (1 - 3)\mathbf{i} + (4 + 2)\mathbf{j} + (-3 - 1)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

$\overrightarrow{CA} = (2 - 1)\mathbf{i} + (1 - 4)\mathbf{j} + (-1 + 3)\mathbf{k} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

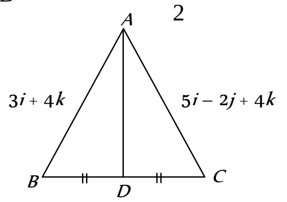
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4 + 36 + 16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$ और AB तथा BC के बीच कोण 180° है अर्थात् बिन्दु समद्विबाहु त्रिभुज नहीं बनाते हैं। अतः बिन्दु A, B, C समरेखीय हैं।

36. (c) $\overrightarrow{AD} = \frac{(3 + 5)\mathbf{i} + (0 - 2)\mathbf{j} + (4 + 4)\mathbf{k}}{2} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$



$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{16 + 16 + 1} = \sqrt{33}$.

37. (d) दिया है, A, B और C के स्थिति सदिश क्रमशः $7\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$, $-\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ और $-4\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ हैं।

$\therefore \quad |\overrightarrow{AB}| = |-\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}| = \sqrt{18}$

$|\overrightarrow{BC}| = |-3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}| = \sqrt{18}$

$|\overrightarrow{AC}| = |-4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}| = \sqrt{36}$

स्पष्टतः, $AB = BC$ और $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

अतः त्रिभुज, समकोण समद्विबाहु त्रिभुज है।

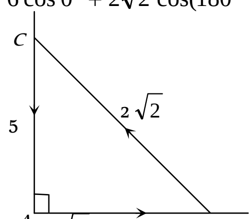
38. (c) माना $A \equiv (1, 1, -1), B \equiv (2, 3, 0), C \equiv (3, 5, -2), D \equiv (0, -1, 1)$

$\therefore \overrightarrow{AB} = (1, 2, 1), \overrightarrow{BC} = (1, 2, -2), \overrightarrow{CD} = (-3, -6, 3), \overrightarrow{DA} = (1, 2, -2)$

स्पष्टतः, $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA}$, लेकिन $AB \neq CD$

$\therefore$ यह एक समलम्ब चतुर्भुज है।

39. (b) $R\cos\theta = 6\cos 0° + 2\sqrt{2}\cos(180° - B) + 5\cos 270°$



$R\cos\theta = 6 - 2\sqrt{2}\cos B$ .....(i)

$R\sin\theta = 6\sin 0° + 2\sqrt{2}\sin(180° - B) + 5\sin 270°$

$R\sin\theta = 2\sqrt{2}\sin B - 5$ .....(ii)

(i) व (ii) से,

$R^2 = 36 + 8\cos^2 B - 24\sqrt{2}\cos B + 8\sin^2 B + 25 - 20\sqrt{2}\sin B$

$= 61 + 8(\cos^2 B + \sin^2 B) - 24\sqrt{2}\cos B - 20\sqrt{2}\sin B$

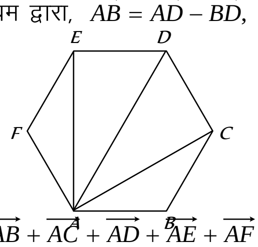
$\because ABC$ एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज है

अर्थात्, $\angle B = \angle C = 45°$

$\therefore R^2 = 61 + 8(1) - 24\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 20\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 25$

$\therefore R = 5$.

40. (b) त्रिभुज नियम द्वारा, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}$

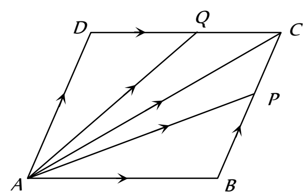


इसलिये $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

$= 3\overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{CD}) = 3\overrightarrow{AD}$

अतः $\lambda = 3$, [चूँकि $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD}$].

41. (d) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ .....(i)



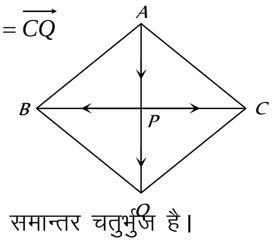
$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ .....(ii)

(i) व (ii) को जोड़ने पर,

$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

42. (c) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PQ}$ या $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{CP}$

या $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CQ}$



अतः यह समान्तर चतुर्भुज है।

43. (b) $\mathbf{v} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ .....(i)

$\mathbf{w} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ .....(ii)

अतः $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$.

44. (b) यह स्पष्ट है।

45. (c) चूँकि $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

$= (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) - (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

अतः $\overrightarrow{BD}$ की दिशा में इकाई सदिश

$= \frac{-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{|-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}|} = \frac{-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{\sqrt{69}}$.

46. (d) माना $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = x\mathbf{c}$ व $\mathbf{b} + 3\mathbf{c} = y\mathbf{a}$, तो

$\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 6\mathbf{c} = (x+6)\mathbf{c}$ व $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 6\mathbf{c} = (1+2y)\mathbf{a}$

अतः $(x+6)\mathbf{c} = (1+2y)\mathbf{a}$

चूँकि $\mathbf{a}$ व $\mathbf{c}$ अशून्य एवं असमरेखीय सदिश हैं, अतः

$x + 6 = 0$ तथा $1 + 2y = 0$ अर्थात् $x = -6$ एवं $y = -\frac{1}{2}$,

इस स्थिति में $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 6\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

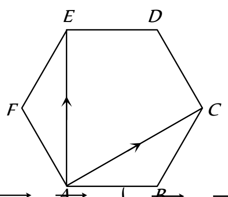
47. (d) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, अतः इकाई सदिश $\frac{4(\mathbf{i}+\mathbf{j})}{\sqrt{32}} = \frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$.

48. (a) माना $\mathbf{b}$ जोड़ा जाये, तब $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{i}$

$\Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{a} = \mathbf{i} - (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

49. (c) $\mathbf{R} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \Rightarrow \hat{\mathbf{R}} = \frac{3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{5\sqrt{2}}$.

50. (b) स्पष्टतः, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$



$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$, $\left\{\because \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} \text{ व } \overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{AB}\right\}$.

51. (c) $3\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

52. (b) माना $-2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c} = x\mathbf{p} + y\mathbf{q} + z\mathbf{r}$

$\Rightarrow -2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}$

$= (2x + y - 3z)\mathbf{a} + (-3x - 2y + z)\mathbf{b} + (y + 2z)\mathbf{c}$

$\therefore 2x + y - 3z = -2,\ -3x - 2y + z = 3$ व $y + 2z = -1$

इन्हें हल करने पर, $x = 0,\ y = -\frac{7}{5},\ z = \frac{1}{5}$

$\therefore -2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c} = \frac{(-7\mathbf{q} + \mathbf{r})}{5}$.

ट्रिक : विकल्पों का एक–एक करके परीक्षण करने पर,

अर्थात्, (a) $\mathbf{p} - 4\mathbf{q} = -2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 4\mathbf{c}$

(b) $\frac{-7\mathbf{q} + \mathbf{r}}{5} = -2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}$.

53. (a) चूँकि

$\mathbf{p} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$

$= \lambda\overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) = \lambda\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = (\lambda + 1)\overrightarrow{AD}$

अतः, $\mathbf{p} = \mu\overrightarrow{AD} \Rightarrow \mu = \lambda + 1$.

54. (a) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 12\mathbf{k}| = |\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}| = 13$

$\therefore \mathbf{a} + \mathbf{b} = 13$.

55. (b) A, B, C, D, E पाँच समतलीय बिन्दु हैं

$\therefore \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CE}$

$= (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE})$

$= \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{DE}$.

56. (c) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (3 + 2 - 1)\mathbf{i} + (-2 - 4 + 2)\mathbf{j} + (1 - 3 + 2)\mathbf{k}$

$= 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

57. (b) बिन्दु A, B, C, D, E एक तल में हैं।

$\therefore$ परिणामी $= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EB})$

$= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB})$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB}$

58. (a) $P + Q = 18,\ R = 12,\ \theta = 90^o$, (माना)

$\tan\theta = \tan 90^o = \infty$

$\Rightarrow P + Q\cos\alpha = 0$, $\therefore \cos\alpha = \frac{-P}{Q}$

अतः $(12)^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

या $144 = P^2 + Q^2 + (2P)(-P)$

$\Rightarrow 144 = Q^2 - P^2 = (Q + P)(Q - P)$

या $144 = 18(Q - P)$ या $Q - P = 8$

हल करने पर, $Q = 13$, $P = 5$.

59. (a) परिणामी सदिश

$= (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) + (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

इकाई सदिश $= \frac{3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{9 + 36 + 4}} = \frac{1}{7}(3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$

60. (a) यह स्पष्ट है।

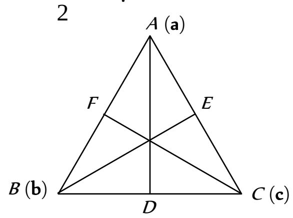
61. (b) यह स्पष्ट है।

62. (a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} - \mathbf{a} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c} - 2\mathbf{a}}{2}$,

(जहाँ O मूल बिन्दु के सन्दर्भ में है)

इसी प्रकार, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{a}}{2} - \mathbf{b} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{a} - 2\mathbf{b}}{2}$ तथा

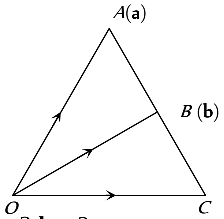
$\overrightarrow{CF} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}}{2}$.



अब, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$

$$=\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}-2\mathbf{a}}{2}+\frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}-2\mathbf{b}}{2}+\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}-2\mathbf{c}}{2}=\mathbf{0}\,.$$

63. (d) चूँकि हमें दिया गया है $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$. अतः स्पष्टतः बिन्दु C, AB को बाह्यतः विभाजित करता है। $\overrightarrow{AC}:\overrightarrow{BC}=3:2$



अतः $\overrightarrow{OC}=\dfrac{3.\mathbf{b}-2.\mathbf{a}}{3-2}=3\mathbf{b}-2\mathbf{a}$.

64. (b) $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\dfrac{5}{2}\mathbf{k}.$

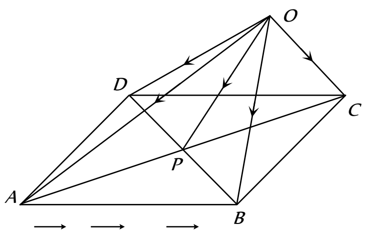
65. (b) माना D का स्थिति सदिश $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ है, तो $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow -2\mathbf{j}-4\mathbf{k}=(7-x)\mathbf{i}+(7-y)\mathbf{j}+(7-z)\mathbf{k}$

$\Rightarrow x=7,\ y=9,\ z=11$.

अतः D का स्थिति सदिश $7\mathbf{i}+9\mathbf{j}+11\mathbf{k}$ होगा।

66. (d) हम जानते हैं कि P, AC व BD मध्य बिन्दु होगा



$\therefore\quad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OP}$ ......(i)

व $\quad \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OP}$ .....(ii)

(i) व (ii) को जोड़ने पर, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OP}$.

67. (a) माना P का स्थिति सदिश $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ है, तो $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CP}\Rightarrow \mathbf{j}-\mathbf{i}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(z-1)\mathbf{k}$

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ व $\mathbf{k}$ के गुणांकों की तुलना करने पर $x=-1$, $y=1$ व $z-1=0\Rightarrow z=1$

अतः अभीष्ट स्थिति सदिश $-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ है।

68. (b) $\overrightarrow{AB}=-\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ व $\overrightarrow{CD}=6\mathbf{i}+6\mathbf{j}+12\mathbf{k}$

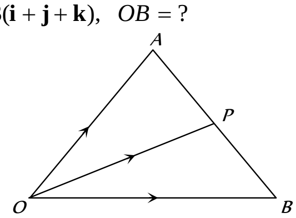
अतः $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$.

69. (c) $\overrightarrow{OA}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\overrightarrow{OP}=3(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $\overrightarrow{OB}=?$

चूँकि $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$

$\therefore\ \overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{OB}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}+7\mathbf{k}$



ट्रिक : निरीक्षण द्वारा, $4\mathbf{i}+3\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ व $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ का मध्यबिन्दु $3(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ है।

70. (d) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$ व $\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}=\mathbf{0}$

$\Rightarrow(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{G'A'})+(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{G'B'})+(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{G'C'})=\mathbf{0}$

$\Rightarrow(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{G'G}-\overrightarrow{G'A'})+(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G'G}-\overrightarrow{G'B'})$

$+(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{G'G}-\overrightarrow{G'C'})=3\overrightarrow{G'G}$

$\Rightarrow\{(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GA'})+(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GB'})+(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GC'})\}=3\overrightarrow{G'G}$

$\Rightarrow\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=3\overrightarrow{G'G}\Rightarrow\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$.

71. (b) $\overrightarrow{O'A}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{O'B}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OB}$

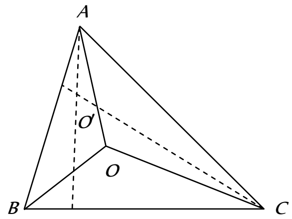
$\overrightarrow{O'C}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{O'A}+\overrightarrow{O'B}+\overrightarrow{O'C}$

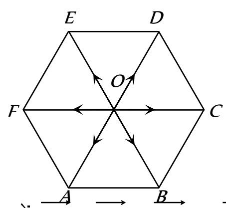
$=3\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$\because\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OO'}=-\overrightarrow{O'O}$

$\therefore\ \overrightarrow{O'A}+\overrightarrow{O'B}+\overrightarrow{O'C}=2\overrightarrow{O'O}$.



72. (a) चित्रानुसार $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$, अतः $\overrightarrow{AD}=2\mathbf{b}$ व $\overrightarrow{ED}=\mathbf{a}$



अब ΔAED में, $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{ED}=2\mathbf{b}-\mathbf{a}$.

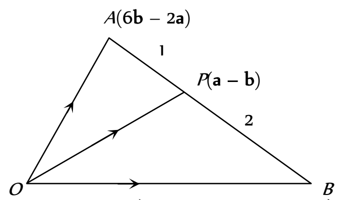
73. (a) चूँकि B के सापेक्ष C के स्थिति सदिश

$\overrightarrow{BC}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$ .....(i)

इसी प्रकार, $\overrightarrow{AB}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$ .....(ii)

अब (i) व (ii) से, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=2\mathbf{i}$.

74. (a) $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1(\overrightarrow{OB})+2(6\mathbf{b}-2\mathbf{a})}{1+2}$

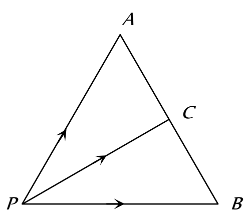


$\Rightarrow 3(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\overrightarrow{OB}+12\mathbf{b}-4\mathbf{a}\Rightarrow\overrightarrow{OB}=7\mathbf{a}-15\mathbf{b}$.

75. (b) $\dfrac{3\mathbf{i}-\mathbf{j}-3\mathbf{k}+\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}}{2}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}.$

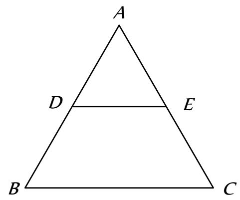
76. (b) चित्र से, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC})-(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})$

$=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB})=2\overrightarrow{PC}-0,\ (\because\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB})$



$\therefore\ \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PC}$.

77. (d) आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से, $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$



त्रिभुज में, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$; अतः $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$.

78. (b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0 \Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}=0$.

79. (c) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

स्पष्टतः, यदि इस निकाय में $\overrightarrow{BC}$ जोड़ दिया जाए, तो यह $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$ हो जायेगा।

80. (c) चूँकि $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a},\ \overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ व $2AC=CO$

खण्ड सूत्र से, $\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\mathbf{a}$.

अतः $|\overrightarrow{CD}|=3|\overrightarrow{OB}| \Rightarrow \overrightarrow{CD}=3\mathbf{b}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\frac{2}{3}\mathbf{a}+3\mathbf{b}$

इसलिए $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\mathbf{a}+3\mathbf{b}-\mathbf{a}=3\mathbf{b}-\frac{1}{3}\mathbf{a}$.

81. (a) $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=2(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA})+3(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB})$

$=5\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}=5\overrightarrow{OC}$, $\{\because 2\overrightarrow{CA}=-3\overrightarrow{CB}\}$.

82. (c) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ (दिये अनुसार). अतः यह समद्विबाहु त्रिभुज है।

83. (a) यह याद रखना चाहिये।

84. (b) बिन्दु का स्थिति सदिश जो अन्तः विभाजित करता है,

$\frac{3(2\mathbf{a}-3\mathbf{b})+2(3\mathbf{a}-2\mathbf{b})}{5}=\frac{12\mathbf{a}-13\mathbf{b}}{5}$.

85. (a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CX} \Rightarrow \mathbf{j}-\mathbf{i}=X$ का स्थिति सदिश $-\mathbf{k}$

$\Rightarrow X$ का स्थिति सदिश $=-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

86. (a) यह स्पष्ट है।

87. (a) ΔABC के शीर्षों A, B तथा C के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ तथा $\mathbf{c}$ हैं। हम जानते हैं, कि त्रिभुज के केन्द्रक का स्थिति सदिश $(G)=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$

अतः $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$

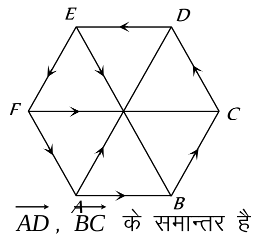
$=\left(\mathbf{a}-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}\right)+\left(\mathbf{b}-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}\right)+\left(\mathbf{c}-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}\right)$

$=\frac{1}{3}[2\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}+2\mathbf{b}-\mathbf{a}-\mathbf{c}+2\mathbf{c}-\mathbf{a}-\mathbf{b}]=\mathbf{0}$.

88. (c) C के निर्देशांक $=\left(\frac{2-4}{2},\frac{-1+3}{2}\right)=(-1,1)$

$\therefore \overrightarrow{OC}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}$

89. (d) दिया है, $ABCDEF$ एक समषट्भुज है।



षट्भुज में $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ के समान्तर है या $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{FA}$ के समान्तर है या $\overrightarrow{EB}=2\overrightarrow{FA}$ तथा $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{AB}$ के समान्तर है या $\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{AB}$

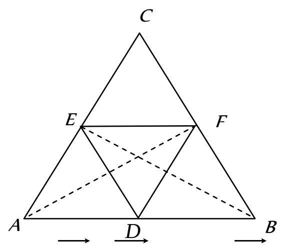
$=2(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=2(\overrightarrow{FC})=2(2\overrightarrow{AB})=4\overrightarrow{AB}$.

90. (c) यदि B का स्थिति सदिश $\mathbf{x}$ हो तब $\mathbf{a}$, AB को $2:3$ के अनुपात में विभाजित करता है।

$\mathbf{a}=\frac{2\mathbf{x}+3(\mathbf{a}+2\mathbf{b})}{2+3}$

$\Rightarrow 5\mathbf{a}-3\mathbf{a}-6\mathbf{b}=2\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}=\mathbf{a}-3\mathbf{b}$.

91. (a) $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA}$



$\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AF}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{2}-\overrightarrow{OB}+\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}-\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{OC}-\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DC}$.

92. (a) माना कोण A का समद्विभाजक BC को D पर मिलता है, तब AD, BC को $AB: AC$ के अनुपात में विभाजित करता है।

$\therefore D$ का स्थिति सदिश

$=\frac{|\overrightarrow{AB}|(2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+7\mathbf{k})+|\overrightarrow{AC}|(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k})}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}$

यहाँ $|\overrightarrow{AB}|=|-2\mathbf{i}-4\mathbf{j}-4\mathbf{k}|=6$ और $|\overrightarrow{AC}|=|-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}|=3$

$\therefore D$ का स्थिति सदिश $=\frac{6(2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+7\mathbf{k})+3(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k})}{6+3}$

$=\frac{(18\mathbf{i}+39\mathbf{j}+54\mathbf{k})}{9}=\frac{1}{3}(6\mathbf{i}+13\mathbf{j}+18\mathbf{k})$.

93. (d) $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}=(\lambda+\mu)\mathbf{i}-\lambda\mathbf{j}+\mu\mathbf{k}$

अब, $\mathbf{c}.\mathbf{a}=0 \Rightarrow 2\lambda+\mu=0 \Rightarrow \mu=-2\lambda$

इसलिए $\mathbf{c}=-\lambda\mathbf{i}-\lambda\mathbf{j}-2\lambda\mathbf{k}=(\sqrt{6})(-\lambda)\left[\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\sqrt{6}}\right]$

अतः, इकाई सदिश $=\frac{(\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k})}{\sqrt{6}}$.

94. (d) यहाँ $\overrightarrow{AB}=-2\mathbf{j},\ \overrightarrow{BC}=(a-1)\mathbf{i}+(b+1)\mathbf{j}+c\mathbf{k}$

बिन्दु समरेखीय हैं, तब $\overrightarrow{AB} = k(\overrightarrow{BC})$

$\Rightarrow -2\mathbf{j} = k\{(a-1)\mathbf{i} + (b+1)\mathbf{j} + c\mathbf{k}\}$

तुलना करने पर; $k(a-1) = 0$, $k(b+1) = -2$, $kc = 0$

$\therefore\ c = 0,\ a = 1$ व b स्वेच्छ अदिश हैं।

95. (d) $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$, (समरैखिकता के लिए)

यहाँ $\overrightarrow{AB} = -2\mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC} = (k+1)\mathbf{b}$

अतः $\forall\, k \in R \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$.

96. (a) यहाँ $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ व $\overrightarrow{AC} = (3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) - (\mathbf{a}) = -2(\mathbf{b} - \mathbf{a})$

स्पष्टतः यह $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AC}$ के रूप का है

इसलिए A, B, C समरेखीय हैं।

97. (a) यह स्पष्ट है।

98. (d) $\frac{3}{a} = \frac{1}{b} = \frac{-5}{-15} \Rightarrow a = 9,\ b = 3$.

99. (a) यदि दिये गये बिन्दु A, B, C हैं तो $\overrightarrow{AB} = k(\overrightarrow{BC})$

$\Rightarrow -20\mathbf{i} - 11\mathbf{j} = k[(a-40)\mathbf{i} - 44\mathbf{j}]$

तुलना करने पर, $-11 = -44k \Rightarrow k = \frac{1}{4}$

एवं $-20 = \frac{1}{4}(a-40) \Rightarrow a = -40$.

100. (c) $\overrightarrow{OA}$ के समान्तर इकाई सदिश $= \frac{4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}}{\sqrt{16+25}} = \frac{1}{\sqrt{41}}(4\mathbf{i} + 5\mathbf{j})$.

101. (c) $\overrightarrow{AB} = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$,जो कि यह xz -तल के समान्तर तल में स्थित एक सदिश है।

102. (c) यदि दिये गये बिन्दु A, B, C हों तो $\overrightarrow{AB} = k(\overrightarrow{BC})$ या

$2\mathbf{i} - 8\mathbf{j} = k[(a-12)\mathbf{i} + 16\mathbf{j}] \Rightarrow k = \frac{-1}{2}$

साथ ही, $2 = k(a-12) \Rightarrow a = 8$.

103. (d) $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$, (समरैखिकता के लिए)

यहाँ $\overrightarrow{AB} = -2\mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC} = (k+1)\mathbf{b}$

अतः $\forall\, k \in R \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$.

104. (b) $\overrightarrow{AB} = -\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, $\overrightarrow{CD} = -2\mathbf{i} + (\lambda - 2)\mathbf{j}$

$\because \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, $\frac{-1}{-2} = \frac{-4}{\lambda - 2} \Rightarrow \lambda - 2 = -8$ या $\lambda = -6$.

105. (a) स्पष्टतः, $\frac{3}{6} = \frac{2}{-4x} = -\frac{1}{y} \Rightarrow x = -1$ व $y = -2$.

106. (d) $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ व $\mathbf{k}$ के गुणांकों की तुलना करने पर,

$x + 3y - 4z = \lambda x$ या $(1-\lambda)x + 3y - 4z = 0$ ......(i)

$x - (\lambda + 3)y + 5z = 0$ ......(ii)

$3x + y - \lambda z = 0$ ......(iii)

समीकरणों (i), (ii) व (iii) का एक अशून्य हल होगा, यदि

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 3 & -4 \\ 1 & -(\lambda+3) & 5 \\ 3 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 0, -1.$$

107. (b) स्पष्टतः ये समतलीय हैं, क्योंकि $1(\mathbf{a}) + 1(\mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

108. (d) यह आधारभूत संकल्पना है।

109. (c) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 9\mathbf{j} = 3(\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$. अतः यह $(1, 3)$ के समान्तर है।

110. (c) चूँकि $\mathbf{c} = (x-2)\mathbf{a} + \mathbf{b}$ व $\mathbf{d} = (2x+1)\mathbf{a} - \mathbf{b}$ समरेखीय हैं, अतः $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{d}$

$\Rightarrow (x-2)\mathbf{a} + \mathbf{b} = \lambda(2x+1)\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}$

या $[(x-2) - \lambda(2x+1)]\mathbf{a} + (\lambda + 1)\mathbf{b} = 0$

$(x-2) - \lambda(2x+1) = 0, \lambda + 1 = 0$

($\because$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ रेखीय स्वतंत्र हैं)

$\Rightarrow x - 2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$.

111. (a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda & 4 & 7 \\ -3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 3$.

112. (a) $\overrightarrow{PQ} = 3\mathbf{a} + 3\sqrt{3}\mathbf{b}$ व $\overrightarrow{RS} = 2\mathbf{a} + 2\sqrt{3}\mathbf{b}$

अतः $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{RS}$.

113. (c) समरेखीयता की शर्त से, $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$

$\Rightarrow (-2\mathbf{i} + m\mathbf{j}) = \lambda(\mathbf{i} - \mathbf{j})$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}$ के गुणांकों की तुलना से,

$\lambda = -2$ तथा $-\lambda = m$. अतः $m = 2$.

114. (b) माना B, AC को $\lambda : 1$ में विभाजित करता है, तब

$5\mathbf{i} - 2\mathbf{k} = \frac{\lambda(11\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}) + \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 8\mathbf{k}}{\lambda + 1}$

$\Rightarrow 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$, अर्थात् अनुपात $= 2 : 3$.

115. (c) यदि $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ दो अशून्य असमरेखीय सदिश हों तथा x, y दो अदिश इस प्रकार हों, कि $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = 0$ तब $x = 0, y = 0$ होगा अन्यथा एक सदिश दूसरे का अदिश गुणक हो जाएगा तथा इस प्रकार दोनों सदिश समरेखीय होंगे, जो कि अर्न्तविरोधी कथन हैं।

116. (a) यदि A, B, C समरेखीय है, तो $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow\ 2\mathbf{i} + (4-x)\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = \lambda[(y-3)\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 12\mathbf{k}]$

$\Rightarrow\ 2 = (y-3)\lambda$ .....(i)

तथा $4 - x = -6\lambda$ .....(ii)

$\Rightarrow\ 4 = -12\lambda \ \Rightarrow \lambda = \frac{-1}{3}$

(i) से, $y = -3$ तथा (ii) से, $x = 2$; $\therefore\ (x, y) = (2, -3)$

117. (c) $x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$ एक सदिश प्रदर्शित करता है, जो कि $\mathbf{a}$ व $\mathbf{b}$ के साथ समतलीय है।

118. (a) यहाँ $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \alpha\,\mathbf{d}$ व $\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \beta\,\mathbf{a}$

$\therefore\ \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = (\alpha + 1)\mathbf{d}$ व $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = (\beta + 1)\mathbf{a}$

$\Rightarrow (\alpha + 1)\mathbf{d} = (\beta + 1)\mathbf{a}$

यदि $\alpha \ne -1$, तो $(\alpha + 1)\mathbf{d} = (\beta + 1)\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{d} = \frac{\beta + 1}{\alpha + 1}\mathbf{a}$

$\Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \alpha\,\mathbf{d} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \alpha\left(\frac{\beta + 1}{\alpha + 1}\right)\mathbf{a}$

$\Rightarrow \left(1 - \frac{\alpha(\beta + 1)}{\alpha + 1}\right)\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$

$\Rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ समतलीय हैं जो कि विरोधाभास है, $\therefore\ \alpha = -1$

अतः $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = 0$.

119. (a) $\because$ $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ समरेखीय हैं अतः किसी सदिश m के लिए $\mathbf{a} = m\mathbf{b}$

$\Rightarrow \mathbf{i} - \mathbf{j} = m(-2\mathbf{i} + k\mathbf{j}) \Rightarrow \mathbf{i} - \mathbf{j} = -2m\mathbf{i} + km\mathbf{j}$

$\Rightarrow -2m = 1, km = -1$

$\therefore m = -\frac{1}{2}, \therefore k = 2$.

दो सदिशों का अदिश गुणन तथा उसके अनुप्रयोग

1. (a) माना $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, तो $(\mathbf{a}.\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{a}.\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{a}.\mathbf{k})\mathbf{k} = \mathbf{a}$.

2. (d) माना $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

चूँकि $\mathbf{r}.\mathbf{i} = \mathbf{r}.\mathbf{j} = \mathbf{r}.\mathbf{k} \Rightarrow x = y = z$ .....(i)

एवं $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$, {(i) से}

अतः, अभीष्ट सदिश $\mathbf{r} = \pm\sqrt{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$.

ट्रिक : चूँकि सदिश $\pm\sqrt{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ दोनों स्थितियों को सन्तुष्ट करता है।

3. (c) $\mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{a}.\mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{a}.\mathbf{b} - \mathbf{a}.\mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathbf{a}.(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$

$\Rightarrow$ या तो $\mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$ या $\mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{c}$ या $\mathbf{a} \perp (\mathbf{b} - \mathbf{c})$.

4. (b) $\mathbf{a}.\mathbf{b} = -|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$, $(\because \cos\theta = -1)$

5. (c) $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{0}$ का वर्ग करने पर,

$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{a}.\mathbf{b} + 2\mathbf{b}.\mathbf{c} + 2\mathbf{c}.\mathbf{a} = 0$

$\Rightarrow |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + 2(\mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{b}.\mathbf{c} + \mathbf{c}.\mathbf{a}) = 0$

$\Rightarrow 2(\mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{b}.\mathbf{c} + \mathbf{c}.\mathbf{a}) = -3 \Rightarrow \mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{b}.\mathbf{c} + \mathbf{c}.\mathbf{a} = -\frac{3}{2}$.

6. (c) चूँकि $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ व $\mathbf{c}$ परस्पर लम्ब हैं, अतः

$\mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{b}.\mathbf{c} = \mathbf{c}.\mathbf{a} = 0$

यदि $\mathbf{a}$ व $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ के बीच कोण θ हो,

तब $\cos\theta = \frac{\mathbf{a}.(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})}{|\mathbf{a}||\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|}$ .....(i)

अब, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = a$

तथा

$|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{a}.\mathbf{b} + 2\mathbf{b}.\mathbf{c} + 2\mathbf{c}.\mathbf{a}$

$= a^2 + a^2 + a^2 + 0 + 0 + 0$

$\Rightarrow |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 = 3a^2 \Rightarrow |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}| = \sqrt{3}a$

यह मान (i) में रखने पर, $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. (a) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ तथा $\mathbf{c}$ तीन परस्पर लम्बवत् इकाई सदिश हैं।

$\therefore |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$ तथा $\mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{b}.\mathbf{c} = \mathbf{c}.\mathbf{a} = 0$

हम जानते हैं, कि

$|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}).(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$

$+ |\mathbf{c}|^2 + 2(\mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{b}.\mathbf{c} + \mathbf{c}.\mathbf{a}) = 1 + 1 + 1 + 0 = 3$

या $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}| = \sqrt{3}$.

8. (c) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c} \Rightarrow |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a}.\mathbf{b} = |\mathbf{c}|^2$

व $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| \Rightarrow |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|^2$

$\therefore \mathbf{a}.\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$.

9. (d) चूँकि $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a}.\mathbf{b} = 0$

$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = a^2 + b^2 - 2\mathbf{a}.\mathbf{b} = 25 + 25$

$\Rightarrow |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 5\sqrt{2}$.

10. (b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}).(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a}.\mathbf{b}$

या $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = 2.2\cos^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$.

11. (d) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = -\mathbf{c} \Rightarrow |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = |\mathbf{c}|^2$

$\Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.

12. (a) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| > |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$a^2 + b^2 + 2\mathbf{a}.\mathbf{b} > a^2 + b^2 - 2\mathbf{a}.\mathbf{b}$

$\Rightarrow 4\mathbf{a}.\mathbf{b} > 0 \Rightarrow \cos\theta > 0$. अतः $\theta < 90°$, (न्यूनकोण).

13. (a) दिया है, $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ तथा $\mathbf{b}$ एवं $\mathbf{c}$ के मध्य कोण $\frac{\pi}{2}$ है,

अतः $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{b}.\mathbf{c}$

अथवा $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\cos\frac{\pi}{2}$

अथवा $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 0$, $\therefore \mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$

अर्थात्, $a^2 = b^2 + c^2$.

14. (d) स्पष्टतः $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ इकाई सदिश हैं।

15. (d) $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ व $\mathbf{i}$ के बीच कोण

$= \cos^{-1}\left\{\frac{(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).\mathbf{i}}{|\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}||\mathbf{i}|}\right\} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

इस प्रकार $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ व $\mathbf{j}$ के बीच कोण $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ एवं

$\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ व $\mathbf{k}$ के बीच कोण $\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ होगा।

अतः $\alpha = \beta = \gamma$.

16. (b) माना $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}.\mathbf{i} = x, \mathbf{r}.\mathbf{j} = y, \mathbf{r}.\mathbf{k} = z$

$\Rightarrow (\mathbf{r}.\mathbf{i})^2 + (\mathbf{r}.\mathbf{j})^2 + (\mathbf{r}.\mathbf{k})^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

17. (d) समान्तर सदिश $= (2 + b)\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

इकाई सदिश $= \frac{(2 + b)\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{b^2 + 4b + 44}}$

प्रश्नानुसार, $1 = \frac{(2 + b) + 6 - 2}{\sqrt{b^2 + 4b + 44}}$

$\Rightarrow b^2 + 4b + 44 = b^2 + 12b + 36 \Rightarrow 8b = 8 \Rightarrow b = 1$.

18. (b) माना इकाई सदिश $y\mathbf{i} + z\mathbf{k}$ है, तो $\sqrt{y^2 + z^2} = 1$ .....(i)

चूँकि, दिया गया है, $\cos 30° = \frac{(y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).(y\mathbf{j})}{|y\mathbf{j} + z\mathbf{k}||y\mathbf{j}|}$

$\Rightarrow \frac{y^2}{\left(\sqrt{y^2 + z^2}\right)y} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$(\because$ (i) से, $\sqrt{y^2 + z^2} = 1)$

इसी प्रकार, $\cos 60° = \frac{(y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).z\mathbf{k}}{|y\mathbf{j} + z\mathbf{k}||z\mathbf{k}|} \Rightarrow z = \frac{1}{2}$

अतः इकाई सदिश के घटक $0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$ हैं।

ट्रिक : चूँकि सदिश yz – समतल में हैं इसलिए यह या तो $0\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}+\frac{1}{2}\mathbf{k}$ या $0\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{j}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{k}$ होगा। लेकिन सदिश $\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}+\frac{1}{2}\mathbf{k}$, y – अक्ष से $30°$ का कोण तथा z-अक्ष से $60°$ का कोण बनाता है।।

19. (c) $\Sigma\mathbf{F}=2\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\overrightarrow{AB}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\therefore (\Sigma\mathbf{F}.\overrightarrow{AB})=8+1=9$.

20. (c) $\mathbf{a}.\mathbf{b}=aa\cos 120°$, $\{\because |\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=a(\text{माना})\}$

$\Rightarrow -8=-\frac{a^2}{2}\Rightarrow a=4$,(मापांक में ऋण चिन्ह नहीं आता है)।

21. (b) $|4\mathbf{a}+3\mathbf{b}|=\sqrt{(4\mathbf{a}+3\mathbf{b}).(4\mathbf{a}+3\mathbf{b})}$

$$=\sqrt{16|\mathbf{a}|^2+9|\mathbf{b}|^2+24\mathbf{a}.\mathbf{b}}$$

$$=\sqrt{144+144+24\times 3\times 4\times\left(\frac{-1}{2}\right)}=12.$$

22. (d) माना अभीष्ट सदिश $\alpha=d_1\mathbf{i}+d_2\mathbf{j}+d_3\mathbf{k}$ है, जहाँ

$d_1^2+d_2^2+d_3^2=51$, (दिया है) .....(i)

अब, प्रत्येक दिया गया सदिश, $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ इकाई सदिश है, अतः

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{d}.\mathbf{a}}{|\mathbf{d}||\mathbf{a}|}=\frac{\mathbf{d}.\mathbf{b}}{|\mathbf{d}||\mathbf{b}|}=\frac{\mathbf{d}.\mathbf{c}}{|\mathbf{d}||\mathbf{c}|}$$

या $\mathbf{d}.\mathbf{a}=\mathbf{d}.\mathbf{b}=\mathbf{d}.\mathbf{c}$

$|\mathbf{d}|=\sqrt{51}$ हटाने पर, $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|=1$

$\therefore \frac{1}{3}(d_1-2d_2+2d_3)=\frac{1}{5}(-4d_1+0d_2-3d_3)=d_2$

$\Rightarrow d_1-5d_2+2d_3=0$ व $4d_1+5d_2+3d_3=0$

इन्हें हल करने पर, $\frac{d_1}{5}=\frac{d_2}{-1}=\frac{d_3}{-5}=\lambda$ (माना)

d_1,d_2 व d_3 के मान (i) में रखने पर, $\lambda=\pm 1$

अतः अभीष्ट सदिश $\pm(5\mathbf{i}-\mathbf{j}-5\mathbf{k})$ हैं।

ट्रिक : विकल्पों द्वारा जाँच करें।

23. (b) चूँकि $\mathbf{a},\mathbf{b}$ व $\mathbf{c}$ समतलीय हैं, अतः इनका (x,y,z सभी शून्य नहीं) अस्तित्व इस प्रकार है कि

$x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}=0$ .....(i)

$\mathbf{a}$ का अदिश गुणन करने पर,

$x(\mathbf{a}.\mathbf{a})+y(\mathbf{a}.\mathbf{b})+z(\mathbf{a}.\mathbf{c})=0$ .....(ii)

व $x(\mathbf{a}.\mathbf{b})+y(\mathbf{b}.\mathbf{b})+z(\mathbf{b}.\mathbf{c})=0$ .....(iii)

(i), (ii) व (iii) में से x,y,z का विलोपन करने पर,

$$\begin{vmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\\ \mathbf{a}.\mathbf{a} & \mathbf{a}.\mathbf{b} & \mathbf{a}.\mathbf{c}\\ \mathbf{a}.\mathbf{b} & \mathbf{b}.\mathbf{b} & \mathbf{b}.\mathbf{c}\end{vmatrix}=0.$$

नोटः विद्यार्थी इस प्रश्न को तथ्य या सूत्र मानकर याद रखें।

24. (c) यह स्पष्ट है।

25. (c) $\mathbf{r}=\mathbf{p}+\lambda\mathbf{q}\Rightarrow \mathbf{r}.\mathbf{q}=\mathbf{p}.\mathbf{q}+\lambda\mathbf{q}.\mathbf{q}$

$\Rightarrow 0=7+14\lambda\Rightarrow\lambda=-\frac{1}{2}$

इसलिए, $\mathbf{r}=-\frac{1}{2}(\mathbf{i}+5\mathbf{j}-4\mathbf{k})$.

26. (a) $\mathbf{d}.\mathbf{c}=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\mathbf{c}+\mu(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).\mathbf{c}+\nu(\mathbf{c}\times\mathbf{a}).\mathbf{c}$

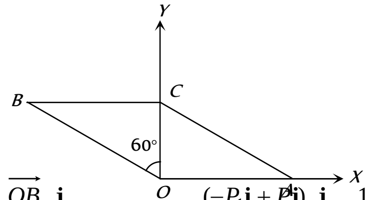
$$=\lambda[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]+0+0=\lambda[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]=\frac{\lambda}{8}$$

$\therefore \lambda=8(\mathbf{d}.\mathbf{c})$, इसी प्रकार $\mu=8(\mathbf{d}.\mathbf{a})$ एवं $\nu=8(\mathbf{d}.\mathbf{b})$

अतः, $\lambda+\mu+\nu=8\mathbf{d}.\mathbf{c}+8\mathbf{d}.\mathbf{a}+8\mathbf{d}.\mathbf{b}$

$=8\mathbf{d}.(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

27. (c) माना $\overrightarrow{OA}=P_1\mathbf{i}$, $\overrightarrow{CB}=-P_1\mathbf{i}$, $\overrightarrow{OB}=-P_1\mathbf{i}+P\mathbf{j}$



$\frac{\overrightarrow{OB}.\mathbf{j}}{OB}=\cos 60°\Rightarrow\frac{(-P_1\mathbf{i}+P\mathbf{j}).\mathbf{j}}{\sqrt{P_1^2+P^2}}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2P=\sqrt{P^2+P_1^2}\Rightarrow P_1=P\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{P^2+P_1^2}=\sqrt{P^2+3P^2}=2P$.

28. (d) यह स्पष्ट है, चूँकि $\mathbf{a}.\mathbf{b}=0$.

अतः $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2=a^2+b^2=(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$.

29. (a) यह आधारभूत संकल्पना है।

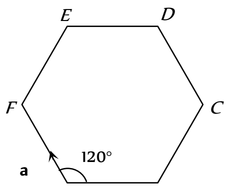
30. (a) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2=0$

$\Rightarrow |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+2\mathbf{a}.\mathbf{b}+2\mathbf{b}.\mathbf{c}+2\mathbf{c}.\mathbf{a}=0$

$\Rightarrow 9+1+16+2(\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}.\mathbf{c}+\mathbf{c}.\mathbf{a})=0$

$\Rightarrow \mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}.\mathbf{c}+\mathbf{c}.\mathbf{a}=-\frac{26}{2}=-13$.

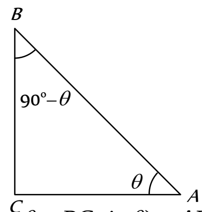
31. (d) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}=|\mathbf{a}||\mathbf{a}|\cos 120°=\frac{-1}{2}a^2$ व $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2=\frac{1}{2}a^2$



इसलिए $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2=0$.

32. (c) यहाँ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

$=(AB)(AC)\cos\theta+(BC)(BA)\cos(90^o-\theta)+0$



$=AB(AC\cos\theta+BC\sin\theta)=AB\left(\frac{(AC)^2}{AB}+\frac{(BC)^2}{AB}\right)$

$=AC^2+BC^2=AB^2=p^2$.

33. (d) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ या $\overrightarrow{CA} = -(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$

इसलिए, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}$

$= \mathbf{a}.\mathbf{c} + \mathbf{b}.(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) + (-\mathbf{a} - \mathbf{b}).(\mathbf{b} + \mathbf{c})$

$= \mathbf{a}.\mathbf{c} + \mathbf{b}.\mathbf{a} + \mathbf{b}.\mathbf{b} + \mathbf{b}.\mathbf{c} - \mathbf{a}.\mathbf{b} - \mathbf{a}.\mathbf{c} - \mathbf{b}.\mathbf{b} - \mathbf{b}.\mathbf{c} = 0$.

34. (a) माना $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, तो $\mathbf{a}.\mathbf{b} = 0$

$\Rightarrow 4x - 3y = 0 \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow x = 3\lambda,\ y = 4\lambda,\ \lambda \in R$.

अब, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| \Rightarrow x^2 + y^2 = 16 + 9 + 25$

$\Rightarrow 9\lambda^2 + 16\lambda^2 = 50$

$\Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = \pm 3\sqrt{2},\ y = \pm 4\sqrt{2}$

अतः $\mathbf{a} = \pm\sqrt{2}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$.

35. (a) माना $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, तो $\mathbf{a}.\mathbf{i} = a_1$, $\mathbf{a}.\mathbf{j} = a_2$, $\mathbf{a}.\mathbf{k} = a_3$

$\therefore\ \mathbf{a} = (\mathbf{a}.\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{a}.\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{a}.\mathbf{k})\mathbf{k}$.

36. (a) $(\mathbf{b} - \mathbf{a}).\left(\mathbf{c} - \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}\right) = \mathbf{b}.\mathbf{c} - \mathbf{b}.\left(\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}\right) - \mathbf{a}.\mathbf{c} + \frac{\mathbf{a}}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

तथा $|\mathbf{a} - \mathbf{c}| = |\mathbf{b} - \mathbf{c}| \Rightarrow |\mathbf{a} - \mathbf{c}|^2 = |\mathbf{b} - \mathbf{c}|^2$

$\therefore\ \mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\mathbf{c}$

अतः $(\mathbf{b} - \mathbf{a}).\left(\mathbf{c} - \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}\right) = 0$.

37. (d) यह स्पष्ट है।

38. (a) $\mathbf{a} = (1, -1, 2),\ \mathbf{b} = (-2, 3, 5), \mathbf{c} = (2, -2, 4)$

$\therefore\ \mathbf{a} = (1,-1,2) \equiv \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k};\ \mathbf{b} = (-2,3,5) \equiv -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

तथा $\mathbf{c} = (2,-2,4) \equiv 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

$\Rightarrow \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c} = (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) - 2(-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$
$+3(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$

$= 11\mathbf{i} - 13\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ तथा $(\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}).\mathbf{i} = 11$.

39. (a) यह स्पष्ट है।

40. (d) $\because\ \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + 2(\mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{b}.\mathbf{c} + \mathbf{c}.\mathbf{a}) = 0$

$\Rightarrow 2(\mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{b}.\mathbf{c} + \mathbf{c}.\mathbf{a}) = -(9 + 16 + 25)$

$\Rightarrow \mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{b}.\mathbf{c} + \mathbf{c}.\mathbf{a} = -25$.

41. (c) $\because\ \mathbf{a}.\mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|\cos\theta = |\mathbf{a}|^2$, $(\because \theta = 0^o)$

तथा $\mathbf{b}.\mathbf{b} = |\mathbf{b}||\mathbf{b}|\cos\theta = |\mathbf{b}|^2$, (यहाँ $\theta = 0^o$)

पुनः क्योंकि a तथा b समचतुर्भुज की भुजाएँ हैं,

$\therefore |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, अतः $\mathbf{a}.\mathbf{a} = \mathbf{b}.\mathbf{b}$.

42. (c) $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y}).(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 1 + 1 - 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos\pi$

$= 2 - 2\cos\pi,\ \therefore |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = 4$

$\therefore\ \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1$, $[\because |\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{y}|^2 = 1, |\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| = 1]$.

43. (a) माना $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

तब $\mathbf{a}.\mathbf{i} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).\mathbf{i} = x$ तथा $\mathbf{a}.(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = x + y$ तथा

$\mathbf{a}.(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = x + y + z$

$\because$ दिया है $x = x + y = x + y + z$

अब, $x = x + y \Rightarrow y = 0$ तथा $x + y = x + y + z \Rightarrow z = 0$

अतः $x = 1$; $\therefore\ \mathbf{a} = \mathbf{i}$.

44. (b) यह स्पष्ट है।

45. (c) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}).(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}.\mathbf{a} + \mathbf{b}.\mathbf{a} - \mathbf{b}.\mathbf{a} - \mathbf{b}.\mathbf{b}$

$= \mathbf{a}.\mathbf{a} - \mathbf{b}.\mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$

$= 0$, $(\because |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|)$.

46. (b) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0 \Rightarrow (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}).(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = 0$

$\Rightarrow |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + 2(\mathbf{a.b} + \mathbf{b.c} + \mathbf{c.a}) = 0$

$\Rightarrow\ \mathbf{a.b} + \mathbf{b.c} + \mathbf{c.a} = \frac{-1 - 4 - 9}{2} = -7$.

47. (b) माना सदिश $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ है। इस सदिश को $\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ व $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ के साथ समतलीय होने के लिए

$a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} = p(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + r(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$

अतः $a = p + r$ .....(i)

$b = p + 2r$ .....(ii)

$c = 2p + r$ .....(iii)

सदिश $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ को $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ पर लम्ब होने के लिए

$(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}).(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = 0$

$\Rightarrow a + b + c = 0$ ......(iv)

समीकरण (i), (ii) व (iii) को जोड़ने पर,

$4p + 4r = a + b + c$

$\Rightarrow 4(p + r) = 0 \Rightarrow p = -r$

अब (i), (ii) व (iii) की सहायता से,

$a = 0,\ b = r,\ c = p = -r$

अतः अभीष्ट सदिश $r(\mathbf{j} - \mathbf{k})$ है।

इसे इकाई सदिश होने के लिए, $r^2 + r^2 = 1 \Rightarrow r = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

होगा। अतः अभीष्ट इकाई सदिश $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j} - \mathbf{k})$ है।

ट्रिक : विकल्प (a) की जॉच करने पर, $\frac{\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{2}}$ इकाई सदिश है एवं $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ पर लम्बवत् है।

किन्तु $\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{4}{\sqrt{2}} \neq 0$

अतः यह दिये गये सदिश के साथ समतलीय नहीं है।

विकल्प (b) की जाँच करने पर, $\pm\left(\frac{\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{2}}\right)$ इकाई सदिश है व

$\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ पर लम्बवत् है एवं $\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

इसलिए यह दिये गये सदिश के साथ समतलीय है। अतः अभीष्ट परिणाम प्राप्त होता है।

48. (b) $\because\ \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}$ के लम्बवत् है, तब इनका गुणनफल शून्य होगा।

$\therefore\ (\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}).(\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}) = 0 \Rightarrow |\mathbf{a}|^2 - \lambda^2|\mathbf{b}|^2 = 0$

या $\lambda^2 = \frac{|\mathbf{a}|^2}{|\mathbf{b}|^2} \Rightarrow \lambda^2 = \frac{9}{16}$ या $\lambda = \pm\frac{3}{4}$, $[\because |\mathbf{a}|=3, |\mathbf{b}|=4]$.

49. (b) यहाँ $|\mathbf{a}|=4$; $|\mathbf{b}|=4$; $|\mathbf{c}|=2$

तथा $\mathbf{a}.(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = 0 \Rightarrow \mathbf{a.b} + \mathbf{a.c} = 0$ .....(i)

$\mathbf{b}.(\mathbf{c}+\mathbf{a}) = 0 \Rightarrow \mathbf{b.c} + \mathbf{b.a} = 0$ .....(ii)

$\mathbf{c}.(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = 0 \Rightarrow \mathbf{c.a} + \mathbf{c.b} = 0$ .....(iii)

समीकरण (i), (ii) तथा (iii) को जोड़ने पर,

$2[\mathbf{a.b} + \mathbf{b.c} + \mathbf{c.a}] = 0$

$\therefore |\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + 2(\mathbf{a.b}+\mathbf{b.c}+\mathbf{c.a})}$

$= \sqrt{|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2} = \sqrt{16+16+4}$

$\Rightarrow |\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}| = 6$.

50. (b) $\cos\theta = \frac{3(2)+(1)(-2)+2(4)}{\sqrt{9+1+4}\sqrt{4+4+16}} = \frac{12}{\sqrt{14}\sqrt{24}} = \frac{6}{\sqrt{14}\sqrt{6}}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \Rightarrow \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$.

51. (d) $\overrightarrow{AB} = \mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\overrightarrow{CD} = -2\mathbf{i}-8\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

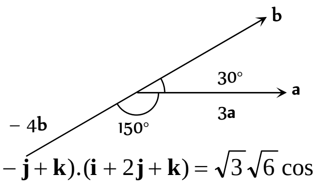
$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{CD}|} = \frac{-2-32-2}{\sqrt{18}.\sqrt{72}}$

$= \frac{-2-32-2}{2\times 18} = -1 \Rightarrow \theta = \pi$.

52. (b) $(\mathbf{a}-\sqrt{2}\mathbf{b})^2 = 1 \Rightarrow 1+2-2\sqrt{2}\mathbf{a}.\mathbf{b} = 1$

$\Rightarrow \mathbf{a}.\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

53. (a) यह चित्र से स्पष्ट है।



54. (d) $(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}).(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}) = \sqrt{3}\sqrt{6}\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{0}{\sqrt{3}\sqrt{6}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.

55. (d) यहाँ $\overrightarrow{AB} = -3\mathbf{i}+6\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $\overrightarrow{BC} = -2\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ व

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 6+6-12 = 0 \Rightarrow \angle ABC = 90°$.

56. (b) दिये गये प्रतिबन्धों के अनुसार $\mathbf{a}.\mathbf{b} > 0$ व $\mathbf{b}.\mathbf{c} < 0$, जहाँ $\mathbf{c} = (0, 1, 0)$

$\Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 > 0$ व $x < 0$

इस प्रकार अभीष्ट परिणाम प्राप्त होता है।

57. (b) $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = 1 \Rightarrow 2 - 2\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 60°$.

58. (c) चूँकि $\mathbf{a}.\mathbf{b} = ab\cos\theta$

स्पष्टतः, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ व $\frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$ के लिये, $\cos\theta \ge 0$.

59. (c) यहाँ $\mathbf{a}+\mathbf{b} = 4\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ व $\mathbf{a}-\mathbf{b} = -2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-5\mathbf{k}$.

स्पष्टतः, $(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 0$. अतः $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \perp (\mathbf{a}-\mathbf{b})$.

60. (b) न्यूनकोण के लिए, $\mathbf{a}.\mathbf{b} > 0$

अर्थात्, $-3x + 2x^2 + 1 > 0 \Rightarrow (x-1)(2x-1) > 0$

$\mathbf{b}$ तथा x-अक्ष के मध्य अधिककोण के लिए, $\mathbf{b}.\mathbf{i} < 0$

$\Rightarrow x < 0$.

61. (c) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2\times 12 + 6\times(-4) + 3(3)}{\sqrt{2^2+6^2+3^2}\sqrt{12^2+4^2+3^2}}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{9}{7\times 13}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{9}{91}\right)$.

62. (d) $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1+a}{\sqrt{2}\sqrt{2+a^2}} \Rightarrow a = 0$.

63. (c) दिया है, $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b} = -\mathbf{c}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$\Rightarrow |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = |-\mathbf{c}|^2$

$\Rightarrow 9 + 25 + 30\cos\theta = 49 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60°$.

64. (d) प्रतिबंधानुसार, $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{c}$

दोनों पक्षों के अदिश गुणनफल (dot product) के उपयोग से,

$(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{c}.\mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{a}.\mathbf{a} + \mathbf{b}.\mathbf{b} + 2\mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{c}.\mathbf{c}$

$\Rightarrow |\mathbf{a}|.|\mathbf{a}|\cos 0° + |\mathbf{b}|.|\mathbf{b}|\cos 0° + 2|\mathbf{a}|.|\mathbf{b}|\cos\alpha$

$= |\mathbf{c}|.|\mathbf{c}|\cos 0°$, $(\because |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1)$

$\Rightarrow 1 + 1 + 2\cos\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$.

65. (b) माना $|\mathbf{a}| = 1$ व $|\mathbf{b}| = 1$ एवं $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = 1^2$

$\Rightarrow 1 + 1 + 2\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 120°$

$\therefore |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 1 + 1 - 2\cos\theta = 3 \Rightarrow |\mathbf{a}-\mathbf{b}| = \sqrt{3}$.

66. (a) माना $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ व $\mathbf{b} = 2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$

अतः $\cos\theta = \frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$

$= \frac{(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}).(2\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})}{\sqrt{(2)^2+(3)^2+(1)^2}\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(-1)^2}}$

$= \frac{4-3-1}{\sqrt{(4+9+1)}\sqrt{(4+1+1)}} = 0$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$.

67. (a) $\cos\theta = \frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{12-6-2}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{36+9+4}} = \frac{4}{21}$.

68. (b) $(\mathbf{a}+2\mathbf{b}).(5\mathbf{a}-4\mathbf{b}) = 0$ या $5\mathbf{a}^2 + 6\mathbf{a}.\mathbf{b} - 8\mathbf{b}^2 = 0$

या $6\mathbf{a}.\mathbf{b} = 3$, $(\because \mathbf{a}^2 = 1, \mathbf{b}^2 = 1)$

$\therefore \mathbf{a}.\mathbf{b} = \frac{1}{2}$ या $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2}$, $\therefore \theta = 60^o$.

69. (a) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = \sqrt{1^2+1^2-2.1^2\cos\theta} = \sqrt{2(1-\cos\theta)}$

$= \sqrt{2}\times\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \frac{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}{2}$.

70. (a) $\mathbf{a} = (1,1,4) = \mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = (1,-1,4) = \mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k}$

$\therefore \mathbf{a}+\mathbf{b} = 2\mathbf{i}+8\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{a}-\mathbf{b} = 2\mathbf{j}$

$\because (\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{a}-\mathbf{b})=0$

$\therefore (\mathbf{a}+\mathbf{b})\perp(\mathbf{a}-\mathbf{b})$. अतः $\theta = 90°$.

71. (a) माना सदिश $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ है। अब प्रतिबन्ध के अनुसार,

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=3 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=9$ .....(i)

$6x+5y-2z=0$ .....(ii)

तथा $3x+y-4z=0$ .....(iii)

[$\because$ यह दोनों सदिशों पर लम्ब है, अतः $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$]

अब समीकरणों (i), (ii) व (iii) को हल करने पर, $x=2$, $y=-2$ व $z=1$

अतः अभीष्ट सदिश $2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ है।

ट्रिक :निरीक्षण द्वारा लम्बाई 3 का सदिश $2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ है एवं दिये गये सदिशों पर लम्बवत् है।

72. (b) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, $4\mathbf{a}.\mathbf{b}=0$

$\Rightarrow \mathbf{a}$ व $\mathbf{b}$ परस्पर लम्बवत् हैं।

73. (d) $\mathbf{a}.\mathbf{b}=0=4-a-1 \Rightarrow a=3.$

74. (d) $\mathbf{a}+t\mathbf{b}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}+(-t\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+t\mathbf{k})$

$=(2-t)\mathbf{i}+(2+2t)\mathbf{j}+(3+t)\mathbf{k}$

यह दिया गया है, कि यह $\mathbf{c}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}$ पर लम्ब है

अतः, $(2-t)3+(2+2t)1+(3+t)0=0$

$\Rightarrow 6-3t+2+2t=0 \Rightarrow t=8.$

75. (c) $\mathbf{a}.\mathbf{b}=(2-4-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=-2.$

76. (b) लम्ब होने के लिए, $2a+3b-4c=0$ तथा विकल्प (b) इस समीकरण को संतुष्ट करता है।

77. (b) $x^2+y^2=1$

माना सदिश $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ है, तो $4x-3y=0$

$\Rightarrow 4x=3y \Rightarrow x=\frac{3}{5},\ y=\frac{4}{5}$

अतः अभीष्ट सदिश $\frac{1}{5}(3\mathbf{i}+4\mathbf{j})$ है।

78. (c) $l\mathbf{a}+m\mathbf{b}+n\mathbf{c}=\mathbf{0}$

वर्ग करने पर,

$a^2l^2+m^2b^2+n^2c^2+2lm\,\mathbf{a}.\mathbf{b}+2ln\,\mathbf{a}.\mathbf{c}+2mn\,\mathbf{b}.\mathbf{c}=0$

लेकिन $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ परस्पर लम्बवत् हैं, अतः $\mathbf{a}.\mathbf{b}$, $\mathbf{b}.\mathbf{c}$, $\mathbf{c}.\mathbf{a}$ शून्य होंगे तथा इसलिए $a^2l^2+m^2b^2+n^2c^2=0$ अर्थात् l, m, n शून्य हैं क्योंकि a^2, b^2 व c^2 शून्य नहीं हो सकते हैं।

79. (b) $\vec{L}=\mathbf{i}+4\mathbf{j}$

अतः $\vec{L}$ के लम्बवत् सदिश $=\lambda(4\mathbf{i}-\mathbf{j})$

$\therefore$ इकाई सदिश $=\frac{4\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{17}}$

परन्तु इसकी दिशा मूलबिन्दु की ओर है,

अतः अभीष्ट सदिश $=\frac{-4\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{17}}$.

80. (a) स्पष्टतः, $3a-12-15=0 \Rightarrow a=9.$

81. (a) चूँकि $(2\lambda\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}).(2\mathbf{j}+\mathbf{k})=1$, $\forall\,\lambda$. अतः सदिश λ के किसी भी मान के लिए लम्बवत् नहीं होंगे।

82. (c) यह स्पष्ट है।

83. (c) स्पष्टतः, $8\times2-3\times4+2\times\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-2.$

84. (a, c, d) विकल्पों से परीक्षण करें।

85. (d) प्रश्नानुसार, $a\times(-1)+2(5)+3(a)=0 \Rightarrow a=-5$.

86. (d) यह स्पष्ट है।

87. (d) $\frac{1}{2}=\frac{-2}{\lambda} \Rightarrow \lambda=-4$.

88. (a) हम जानते हैं, कि यदि सदिश लम्बवत् हों, तो उनका अदिश (बिन्दु) गुणनफल शून्य होता है

अर्थात्, $(a\mathbf{i}+6\mathbf{j}-\mathbf{k}).(7\mathbf{i}-3\mathbf{j}+17\mathbf{k})=0$

$\Rightarrow 7a-18-17=0$ या $7a=35$ या $a=5$.

89. (c) सदिशों के मध्य कोण 90^o है, अतः सदिशों का अदिश गुणन शून्य होगा अर्थात् $(4\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}).(3\mathbf{i}+m\mathbf{j}+2\mathbf{k})=0$

$\Rightarrow 12+m-2=0 \Rightarrow m=-10.$

90. (c) माना $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+\lambda\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+8\mathbf{k}$

$\because \mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, $\therefore \mathbf{a}.\mathbf{b}=0$

$(3\mathbf{i}+\lambda\mathbf{j}+\mathbf{k}).(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+8\mathbf{k})=0$

$6-\lambda+8=0 \Rightarrow \lambda=14.$

91. (d) $(\mathbf{b}.\hat{\mathbf{a}})\hat{\mathbf{a}}=\left\{\frac{(\mathbf{a}.\mathbf{b})}{|\mathbf{a}|}\right\}\hat{\mathbf{a}}=\frac{(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{a}}{\mathbf{a}.\mathbf{a}}$.

92. (a) $14\cos60°,\ 14\sin60° \Rightarrow 7, \frac{14\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 7, 7\sqrt{3}.$

93. (b) सदिश $\mathbf{a}$ का $\mathbf{b}$ के अनुदिश घटक $=\frac{(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}=\frac{18}{25}(3\mathbf{j}+4\mathbf{k}).$

94. (b) $\mathbf{b}_2=\mathbf{b}-\mathbf{b}_1=-\frac{3}{2}\mathbf{i}+\frac{3}{2}\mathbf{j}+4\mathbf{k}$. अतः स्पष्टतः $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{a}$ के लम्बवत् है।

95. (b) $\left[(\mathbf{i}+\mathbf{j}).\frac{(\mathbf{j}+\mathbf{k})}{\sqrt{2}}\right]\frac{(\mathbf{j}+\mathbf{k})}{\sqrt{2}}=\frac{(\mathbf{j}+\mathbf{k})}{2}.$

96. (b) $(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}).\frac{(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})}{\sqrt{14}}=\frac{2}{\sqrt{14}}.$

97. (b) अभीष्ट मान $=\frac{\mathbf{b}.\mathbf{a}}{|\mathbf{b}|}\Big/\frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}=\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}=\frac{7}{3}.$

98. (c) यह आधारभूत संकल्पना है।

99. (a) दिये गये सदिश $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{b}=5\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ हैं।

हम जानते हैं कि $\mathbf{a}$ पर $\mathbf{b}$ का प्रक्षेप

$=\frac{\mathbf{b}.\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\frac{(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}).(5\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k})}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(2)^2}}=\frac{10-3+2}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3.$

100. (b) $\mathbf{b}$ पर $\mathbf{a}$ का प्रक्षेप $=|\mathbf{a}|\cos\theta=|\mathbf{a}|\frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=\frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$

$=\frac{4+8+7}{\sqrt{16+16+49}}=\frac{19}{\sqrt{81}}=\frac{19}{9}.$

101. (a) सदिश $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ का सदिश $\mathbf{j}$ के अनुदिश प्रक्षेप

$=\frac{(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}).\mathbf{j}}{|\mathbf{j}|}=\frac{1}{1}=1$.

102. (a) $|\mathbf{W}|=(\mathbf{i}-3\mathbf{j}+5\mathbf{k}).(-2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+\mathbf{k})=-2+12+5=15$ इकाई.

103. (a) $|\mathbf{W}|=(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}).(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k})=1-4+6=3.$

104. (a) यहाँ $\mathbf{F}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{d}=-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

अतः, किया गया कार्य $=\mathbf{F}.\mathbf{d}=-4+6-4=-2$ या 2 इकाई.

105. (c) परिणामी बल $=\mathbf{F}=5\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

व विस्थापन $d=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+10\mathbf{k}$

अतः किया गया कार्य $= \mathbf{F}.\mathbf{d} = 10 - 6 + 20 = 24$ इकाई.

106. (d) अभीष्ट कार्य

$= (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k} + 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}).(5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k} - \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$

$= (5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - \mathbf{k}).(4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 20 + 12 - 1 = 31$.

107. (c) $W = \mathbf{F}.\mathbf{d} = (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}).(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = 6 - 2 + 5 = 9$ इकाई.

108. (b) अभीष्ट कार्य = (बल सदिश).(विस्थापन सदिश)

बल सदिश $= 5.\left(\dfrac{2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{|2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}|}\right) = \dfrac{5}{3}(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$

$\therefore$ अभीष्ट कार्य

$= \dfrac{5}{3}(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}).[(5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}) - (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})]$

$= \dfrac{5}{3}[(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}).(4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k})] = \dfrac{5}{3}[8 - 2 + 4] = \dfrac{50}{3}$ इकाई.

109. (c) $\vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

$\mathbf{d} = \vec{B}$ का स्थिति सदिश $- \vec{A}$ का स्थिति सदिश

$= 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

$W = \mathbf{F}.\mathbf{d} = 28 + 4 + 8 = 40$ इकाई।

110. (a) $x\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ का $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ पर प्रक्षेप

$$= \frac{(x\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k})}{\sqrt{4 + 1 + 25}} = \frac{2x + 1 + 5}{\sqrt{30}}$$

लेकिन, दिया है $\dfrac{2x + 6}{\sqrt{30}} = \dfrac{1}{\sqrt{30}} \Rightarrow 2x + 6 = 1 \Rightarrow x = \dfrac{-5}{2}$.

111. (b) $\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = -(\mathbf{y} + \mathbf{z})$

$\Rightarrow |\mathbf{x}|^2 = (\mathbf{y} + \mathbf{z}).(\mathbf{y} + \mathbf{z})$

$\Rightarrow |\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{z}|^2 + 2\mathbf{y}.\mathbf{z}$

$\Rightarrow |\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{z}|^2 + 2|\mathbf{y}||\mathbf{z}| \cos\theta$

$\Rightarrow 4 = 4 + 4 + 2 \times 2 \times 2 \cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow \theta = 120^o$

$\therefore \operatorname{cosec}^2 120^o + \cot^2 120^o = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3}$.

112. (c) $\dfrac{(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}).(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})}{|\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}|} = \dfrac{2 - 2 - 3}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \dfrac{-3}{\sqrt{6}} = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

113. (b) $(3\mathbf{a} - 4\mathbf{b})(2\mathbf{a} + 5\mathbf{b}) = 6|\mathbf{a}|^2 - 20|\mathbf{b}|^2 + 7\mathbf{a}.\mathbf{b} = 6 - 20 + 7\mathbf{a}.\mathbf{b}$

दिया है, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a}.\mathbf{b} = 3$

$\Rightarrow 2\mathbf{a}.\mathbf{b} = 1 \Rightarrow \mathbf{a}.\mathbf{b} = \dfrac{1}{2}$

इसलिए, $(3\mathbf{a} - 4\mathbf{b}).(2\mathbf{a} + 5\mathbf{b})$

$= 6 - 20 + 7 \times \dfrac{1}{2} = -14 + \dfrac{7}{2} = \dfrac{-21}{2}$.

114. (d) सदिशों $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ और $\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ के तल में स्थिति सदिश

$= (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) - (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \mathbf{j} - \mathbf{k}$

$\therefore$ इकाई सदिश $= \dfrac{\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{2}}$

$\left(\because \left(\dfrac{\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{2}}\right).(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = \dfrac{-1 + 1}{\sqrt{2}} = 0\right)$.

115. (d) $\mathbf{a}.(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = 0 \Rightarrow \mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{c}.\mathbf{a} = 0$ .....(i)

$\mathbf{b}.(\mathbf{c} + \mathbf{a}) = 0 \Rightarrow \mathbf{b}.\mathbf{c} + \mathbf{a}.\mathbf{b} = 0$ .....(ii)

$\mathbf{c}.(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow \mathbf{c}.\mathbf{a} + \mathbf{b}.\mathbf{c} = 0$ .....(iii)

समीकरण (i), (ii) और (iii) से,

$2(\mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{b}.\mathbf{c} + \mathbf{c}.\mathbf{a}) = 0$

अब, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 + |\mathbf{c} + \mathbf{a}|^2 = 6^2 + 8^2 + 10^2$

$\Rightarrow 2[|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2] + 2[\mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{b}.\mathbf{c} + \mathbf{c}.\mathbf{a}] = 200$

$\Rightarrow 2|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 = 200 \Rightarrow |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}| = 10$.

दो सदिशों का सदिश गुणन तथा उसके अनुप्रयोग

1. (d) यह स्पष्ट है।

2. (c) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 1 \Rightarrow |\sin\theta| = 1 \Rightarrow \sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$.

3. (b) $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

4. (a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{a} - \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \mathbf{b}$

$= \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

5. (c) चूँकि $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$

$\Rightarrow \mathbf{a} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$

$\Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ .....(i)

इसी प्रकार, $\mathbf{b} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ .....(ii)

(i) व (ii) से, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.

6. (c) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = (\mathbf{a}.\mathbf{b}) \Rightarrow ab\sin\theta = ab\cos\theta$

$\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{ab}{ab} = 1 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$.

7. (b) $14(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + 15(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

8. (c) $\mathbf{a}.\mathbf{b} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ या $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ या $\mathbf{b} = \mathbf{0}$

या $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ या $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ या $\mathbf{b} = \mathbf{0}$

अतः या तो $\mathbf{a}$ या $\mathbf{b}$ शून्य सदिश हैं।

9. (b) $\mathbf{a}$ का $\mathbf{b}$ के अनुदिश घटक $= a\cos\theta = \dfrac{|\mathbf{a}.\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}$

इसी प्रकार $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ का घटक $= a\sin\theta = \dfrac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}$

10. (d) हम जानते हैं, कि $|(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$

$\Rightarrow \left| |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta\,\mathbf{n}.\mathbf{c}\right| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$

$\Rightarrow \left| |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|\sin\theta\cos\alpha\right| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$

$\Rightarrow |\sin\theta||\cos\alpha| = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ एवं $\alpha = 0$

$\Rightarrow \mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ व $\mathbf{c}||\mathbf{n}$

$\Rightarrow \mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ तथा $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$ व $\mathbf{b}$ दोनों के लम्बवत् है

$\therefore$ $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ परस्पर लम्बवत् हैं

$\Rightarrow \mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{b}.\mathbf{c} = \mathbf{c}.\mathbf{a} = 0$.

11. (a) सदिश गुणन क्रम विनिमेय नहीं है।

12. (c) $\mathbf{a}$ व $\mathbf{b}$ पर लम्ब सदिश $= \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = \mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$

चूँकि इस सदिश की लम्बाई $\sqrt{3}$ है, अतः $\mathbf{a}$ व $\mathbf{b}$ पर लम्ब इकाई सदिश $= \pm\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$

$\therefore$ इस प्रकार के दो सदिश हैं।

13. (b) माना $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$

लेकिन $(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}).(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}) = 1 \Rightarrow b_1-b_2+b_3 = 1$ ......(i)

व $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & -1 & 1\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$

$= -\mathbf{i}(b_2+b_3)+\mathbf{j}(b_1-b_3)+\mathbf{k}(b_2+b_1)$

$\Rightarrow \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{c}$

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ व $\mathbf{k}$ के गुणांकों की तुलना करने पर,

$b_2+b_3 = 1$ .....(ii)

$b_1-b_3 = -1$ .....(iii)

$b_2+b_1 = 0$ .....(iv)

समीकरणों (i), (ii), (iii) व (iv) को हल करने पर,

$b_1 = 0$, $b_2 = 0$ व $b_3 = 1$.

14. (a) चूँकि $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{b}\times\mathbf{c} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a}\times\mathbf{b}-\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{0}$

$\Rightarrow \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{c}\times\mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{a}+\mathbf{c})\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$

$\Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$ के समान्तर हैं, अतः $\mathbf{a}+\mathbf{c} = k\mathbf{b}$.

15. (c) यह स्पष्ट है।

16. (a,c) माना कि $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ के बीच कोण θ है।

$\mathbf{v} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta\,\hat{\mathbf{n}}$

$\therefore |\mathbf{v}| = \sin\theta$, $\left[\because |\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 1, \hat{\mathbf{n}} = \frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right]$

$\mathbf{u} = \mathbf{a}-(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{b} = \mathbf{a}-\cos\theta\,\mathbf{b}$

$(\because \mathbf{a}.\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = \cos\theta)$

$\mathbf{u}.\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 = 1+\cos^2\theta-2\cos\theta\cos\theta = \sin^2\theta$

$\therefore |\mathbf{u}| = \sin\theta$

$\mathbf{u}.\mathbf{a} = \mathbf{a}.\mathbf{a}-\cos\theta\,\mathbf{a}.\mathbf{b} = 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta$

$\mathbf{u}.\mathbf{b} = \mathbf{a}.\mathbf{b}-\cos\theta\,\mathbf{b}.\mathbf{b} = \cos\theta-\cos\theta = 0$

$\mathbf{u}.(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (\mathbf{a}-\cos\theta\,\mathbf{b}).(\mathbf{a}+\mathbf{b})$

$= 1+\cos\theta-\cos^2\theta-\cos\theta$

$= 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta$

अतः (a) और (c) सही हैं।

17. (b) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{b}\times\mathbf{c} \Rightarrow (\mathbf{a}+\mathbf{c})\times\mathbf{b} = 0$, लेकिन $\mathbf{a}+\mathbf{c} \neq 0$

$\Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{c}||\mathbf{b}$.

18. (a) $\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 1 & -3\\ -2 & 2 & 2\end{vmatrix} = 8\mathbf{i}+4\mathbf{j}+4\mathbf{k}$

अतः, इकाई सदिश $= \pm\frac{2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{6}}$.

19. (c) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 3 & -5\\ m & n & 12\end{vmatrix}$

$= (36+5n)\mathbf{i}-(24+5m)\mathbf{j}+(2n-3m)\mathbf{k} = 0$

$\Rightarrow m = \frac{-24}{5}$, $n = \frac{-36}{5}$.

20. (d) इकाई सदिश $= \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i}+\mathbf{k})$.

21. (a) $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\overrightarrow{AC} = 3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+0\mathbf{k}$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -1 & -2\\ 3 & -3 & 0\end{vmatrix} = (-6\mathbf{i}-6\mathbf{j}-3\mathbf{k})$

अतः, इकाई सदिश $= \pm\left(\frac{2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}}{3}\right)$.

22. (c) दोनों सदिशों पर लम्ब इकाई सदिश

$= \frac{(6\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})\times(3\mathbf{i}-6\mathbf{j}-2\mathbf{k})}{|(6\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})\times(3\mathbf{i}-6\mathbf{j}-2\mathbf{k})|} = \frac{2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-6\mathbf{k}}{7}$.

23. (c) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2 = (\mathbf{a}\times\mathbf{b}).(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (ab\sin\theta\,\hat{\mathbf{n}})(ab\sin\theta\,\hat{\mathbf{n}})$

$= a^2b^2\sin^2\theta = a^2b^2(1-\cos^2\theta)$

$= a^2b^2-a^2b^2\cos^2\theta = a^2b^2-(\mathbf{a}.\mathbf{b})^2$.

24. (c) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 12 & 5 & -5\end{vmatrix} = -5\mathbf{i}+3\mathbf{j}-9\mathbf{k}$

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ के अनुदिश इकाई सदिश $= \frac{-5\mathbf{i}+3\mathbf{j}-9\mathbf{k}}{\sqrt{115}}$.

25. (a) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 12 & 5 & -5\end{vmatrix} = -5\mathbf{i}+3\mathbf{j}-9\mathbf{k}$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{25+9+81}}{\sqrt{14}.\sqrt{194}} = \frac{\sqrt{115}}{\sqrt{14}.\sqrt{194}}$.

26. (d) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$ तब भी हो सकता है जबकि $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, अर्थात् $\mathbf{a}$ व $\mathbf{b}$ समान्तर हैं।

27. (b) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2 = a^2b^2-(\mathbf{a}.\mathbf{b})^2 = \begin{vmatrix}\mathbf{a}.\mathbf{a} & \mathbf{a}.\mathbf{b}\\ \mathbf{a}.\mathbf{b} & \mathbf{b}.\mathbf{b}\end{vmatrix}$.

28. (a) यह स्पष्ट है।

29. (c) $\mathbf{a}.(\mathbf{b}-\mathbf{c}) = 0$, $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}-\mathbf{c}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{c}$ या $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ परन्तु $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. अतः $\mathbf{b}-\mathbf{c} = \mathbf{0}$, अर्थात् $\mathbf{b} = \mathbf{c}$.

30. (d) $\mathbf{a}.\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$; लेकिन $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{5}$$

इसलिए $\mathbf{a}.\mathbf{b} = 2\times 5\times\frac{3}{5} = 6.$

31. (b) $|\mathbf{a}.\mathbf{b}| = ab\cos\theta = 3$ .....(i)

व $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = ab\sin\theta = 4$ .....(ii)

(ii) को (i) से भाग देने पर,

$$\tan\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{5} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{3}{5}.$$

32. (c) $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 18\mathbf{k}.$

33. (a) यहाँ $(l\mathbf{a}+m\mathbf{b})\times\mathbf{b} = \mathbf{c}\times\mathbf{b} \Rightarrow l\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{c}\times\mathbf{b}$

$$\Rightarrow l(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2 = (\mathbf{c}\times\mathbf{b}).(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \Rightarrow l = \frac{(\mathbf{c}\times\mathbf{b}).(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2}$$

इसी प्रकार, $m = \dfrac{(\mathbf{c}\times\mathbf{a}).(\mathbf{b}\times\mathbf{a})}{(\mathbf{b}\times\mathbf{a})^2}$.

34. (b) $|\mathbf{a}\times\mathbf{i}|^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}^2$, (चूँकि $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$)

$$= |a_3\mathbf{j} - a_2\mathbf{k}|^2 = a_3^2 + a_2^2$$

इसी प्रकार, $|\mathbf{a}\times\mathbf{j}|^2 = a_1^2 + a_3^2$ व $|\mathbf{a}\times\mathbf{k}|^2 = a_1^2 + a_2^2$

अतः अभीष्ट परिणाम $2(a_1^2+a_2^2+a_3^2) = 2|\mathbf{a}|^2$ है।

35. (b) बिन्दुओं $P(1,-1,2)$; $Q(2,0,-1)$ व $R(0,2,1)$ से निर्धारित समतल पर लम्ब सदिश $\overrightarrow{QR}\times\overrightarrow{PR}$

$= (-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})\times(-\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k})$ से प्राप्त होता है।

अतः, इकाई सदिश $= \dfrac{2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{6}}$.

36. (b) माना $\mathbf{a} = 4\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ व $\mathbf{b} = -2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

$\mathbf{a}$ व $\mathbf{b}$ पर लम्बवत् इकाई सदिश $= \dfrac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}$

किन्तु $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

$$= \mathbf{i}(2-3) - \mathbf{j}(-8+6) + \mathbf{k}(4-2) = -\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

$$\therefore \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|} = \frac{-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{3}.$$

ट्रिक : विकल्पों की जॉच करें। चूँकि सदिश $\dfrac{-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{3}$ इकाई सदिश है तथा दोनों दिये गये सदिशों पर लम्बवत है।

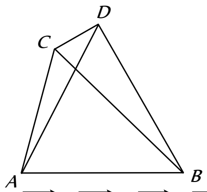
37. (c) स्पष्टतः, $\mathbf{b}+\mathbf{c} = -2\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ व $\mathbf{a}+\mathbf{b} = 3\mathbf{j}$. अतः इकाई सदिश $\mathbf{k}$, दोनों सदिशों $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ व $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ पर लम्बवत् है।

38. (a) चूँकि $\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}$ एक दक्षिणावर्त निकाय बनाते हैं,

$\therefore \mathbf{c} = \mathbf{b}\times\mathbf{a} = \mathbf{j}\times(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$

$= x(\mathbf{j}\times\mathbf{i}) + z(\mathbf{j}\times\mathbf{k}) = -x\mathbf{k}+z\mathbf{i} = z\mathbf{i}-x\mathbf{k}$.

39. (b) माना A मूलबिन्दु है एवं बिन्दुओं B, C व D के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{b},\mathbf{c}$ व $\mathbf{d}$ हैं, तो $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{d}-\mathbf{c}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c}-\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d}$, $\overrightarrow{CA} = -\mathbf{c}$ व $\overrightarrow{BD} = \mathbf{d}-\mathbf{b}$



$\therefore |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{BD}|$

$= |\mathbf{b}\times(\mathbf{d}-\mathbf{c}) + (\mathbf{c}-\mathbf{b})\times\mathbf{d} - \mathbf{c}\times(\mathbf{d}-\mathbf{b})|$

$= |\mathbf{b}\times\mathbf{d} - \mathbf{b}\times\mathbf{c} + \mathbf{c}\times\mathbf{d} - \mathbf{b}\times\mathbf{d} - \mathbf{c}\times\mathbf{d} + \mathbf{c}\times\mathbf{b}|$

$= |-\mathbf{b}\times\mathbf{c} + \mathbf{c}\times\mathbf{b}| = |-2\mathbf{b}\times\mathbf{c}| = 2|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$

$= 4$ (त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल).

40. (c) हम जानते हैं, कि $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2 + (\mathbf{a}.\mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2$

$\therefore 144 = 16|\mathbf{b}|^2 \Rightarrow |\mathbf{b}| = 3.$

41. (b) $\mathbf{r}\times\mathbf{a} - \mathbf{b}\times\mathbf{a} = 0$ व $\mathbf{r}\times\mathbf{b} + \mathbf{b}\times\mathbf{a} = 0$

जोड़ने पर, $\mathbf{r}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = 0$

परन्तु जैसा दिया गया है कि $\mathbf{a} \ne \lambda\mathbf{b}$, अतः $\mathbf{r} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$.

42. (d) चूँकि $|\mathbf{a}\times\mathbf{r}|^2 + |\mathbf{a}.\mathbf{r}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{r}|^2$

$$\Rightarrow |\mathbf{j}|^2 + (\mathbf{a}.\mathbf{r})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{r}|^2 \Rightarrow (\mathbf{a}.\mathbf{r}) = \pm\sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{r}|^2 - 1}$$

इससे सिद्ध होता है कि $\mathbf{a}.\mathbf{r}$ का मान दिये गये $\mathbf{a}$ के लिए $|\mathbf{r}|$ पर निर्भर करता है, अतः $\mathbf{a}.\mathbf{r}$ स्वेच्छ अदिश है।

43. (a) माना $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{b} = 3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}$, तो $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ पर लम्ब इकाई सदिश $\dfrac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}$ होगा।

यहाँ $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+11\mathbf{k}$

अतः इकाई सदिश $\dfrac{-3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+11\mathbf{k}}{\sqrt{155}}$ होगा।

44. (a) $\cos\theta = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \dfrac{6-2+8}{\sqrt{14}\times\sqrt{24}}$

$$\cos\theta = \frac{12}{\sqrt{14}\times\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{3}{7}}, \therefore \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

45. (c) सदिश $\mathbf{a},\mathbf{b}$ के तल में कोई सदिश $(\mathbf{r})$, $\mathbf{a}$ व $\mathbf{b}$ के रैखिक सम्बन्ध के रूप में होगा।

$\mathbf{r} = x\mathbf{a}+y\mathbf{b}$, जो कि विकल्प (c) में संभव है।

$\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{c}.\mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{c}.\mathbf{a})\mathbf{b}$ .....(i)

समीकरण (i), $\mathbf{c}$ के लम्बवत् है

$\therefore \mathbf{c}.\{(\mathbf{c}.\mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{c}.\mathbf{a})\mathbf{b}\} = (\mathbf{c}.\mathbf{a})(\mathbf{c}.\mathbf{b}) - (\mathbf{c}.\mathbf{b})(\mathbf{c}.\mathbf{a}) = 0$

अतः सदिश $\mathbf{c}$ के लम्बवत् एवं सदिशों $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ के समतलीय इकाई सदिश $\frac{\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{|\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})|}$ है।

इसी प्रकार,

(1) सदिश $\mathbf{a}$ के लम्बवत् तथा सदिशों $\mathbf{b}$ व $\mathbf{c}$ के समतलीय इकाई सदिश $\mathbf{r}=\frac{\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}{|\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|}$.

(2) सदिश $\mathbf{b}$ के लम्बवत् तथा सदिशों $\mathbf{c}$ तथा $\mathbf{a}$ के समतलीय इकाई सदिश $\mathbf{r}=\frac{\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})}{|\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})|}$.

46. (b) जैसा कि हम जानते हैं, कि

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2+(\mathbf{a}.\mathbf{b})^2=a^2b^2=(\mathbf{a}.\mathbf{a})(\mathbf{b}.\mathbf{b})$.

47. (b) ΔABC के तल के लम्बवत् इकाई सदिश $=\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}$,

जहाँ $\overrightarrow{AB}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ तथा $\overrightarrow{AC}=6\mathbf{i}+3\mathbf{j}+8\mathbf{k}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=31\mathbf{i}-38\mathbf{j}-9\mathbf{k}$ तथा $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2486}$

$\therefore$ अभीष्ट सदिश $=\frac{31\mathbf{i}-38\mathbf{j}-9\mathbf{k}}{\sqrt{2486}}$.

48. (b) तल के लम्बवत् इकाई सदिश

$$=\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}=\frac{(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})}{|(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})|}$$

$$=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}|}$$

49. (a) सदिशों $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के बीच कोण θ है।

हम जानते हैं कि $\frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}.\mathbf{b}|}=\frac{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta}=\tan\theta.$

50. (b) यहाँ $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$. अतः $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ से एक-एक करके सदिश गुणन करने पर विकल्प (b) प्राप्त होता है।

51. (c) सदिशों $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ और $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ के लम्बवत सदिश

$=\frac{(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+\mathbf{j})}{|(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+\mathbf{j})|}=\frac{-\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}-\mathbf{j})$ या $c(\mathbf{i}-\mathbf{j})$,

जहाँ c एक अदिश है।

52. (c) $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के लम्बवत् सदिश $=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$

तथा लम्बवत् इकाई सदिश $=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&-6&-3\\4&3&-1\end{vmatrix}=15\mathbf{i}-10\mathbf{j}+30\mathbf{k}$$

तथा $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{225+100+900}=35$.

$\therefore$ अभीष्ट सदिश $=\frac{15\mathbf{i}-10\mathbf{j}+30\mathbf{k}}{35}=\frac{3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+6\mathbf{k}}{7}$.

53. (a) इकाई सदिश $=\frac{(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})}{|(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})|}=\frac{-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$.

54. (c) दिया है, $\mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ व $\mathbf{b}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$

हम जानते हैं कि, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{i}(1-3)-\mathbf{j}(-1-2)+\mathbf{k}(3+2)$

$=-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$

तथा $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{(-2)^2+(3)^2+(5)^2}=\sqrt{38}$

अतः, इकाई सदिश $\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}=\frac{-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}}{\sqrt{38}}$.

55. (b) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&-3&-1\\1&4&-2\end{vmatrix}=\mathbf{i}(6+4)-\mathbf{j}(-4+1)+\mathbf{k}(8+3)$

$=10\mathbf{i}+3\mathbf{j}+11\mathbf{k}.$

56. (b) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2=(|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta)^2$

$=(4.2\sin 30^{o})^2=\left(8.\frac{1}{2}\right)^2=4^2=16$.

57. (a) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&4&-5\\1&2&3\end{vmatrix}=22\mathbf{i}-11\mathbf{j}+0\mathbf{k}$

$\therefore|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})|=\sqrt{(22)^2+(11)^2}=11\sqrt{2^2+1}=11\sqrt{5}$.

58. (d) दोनों सदिशों के लम्बवत् इकाई सदिश

$=\frac{(\mathbf{i}+\mathbf{j})\times(\mathbf{j}+\mathbf{k})}{|(\mathbf{i}+\mathbf{j})\times(\mathbf{j}+\mathbf{k})|}=\frac{\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$.

59. (b) माना $2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ और $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ के तल में एक इकाई सदिश है, $\hat{\mathbf{a}}=\alpha(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})+\beta(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$

या $\hat{\mathbf{a}}=(2\alpha+\beta)\mathbf{i}+(\alpha-\beta)\mathbf{j}+(\alpha+\beta)\mathbf{k}$

$\because$ $\hat{\mathbf{a}}$ एक इकाई सदिश है,

$\Rightarrow\ (2\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2+(\alpha+\beta)^2=1$

$\Rightarrow\ 6\alpha^2+4\alpha\beta+3\beta^2=1$ .....(i)

$\because$ $\hat{\mathbf{a}}$, $5\mathbf{i}+2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ के लाम्बिक है

$\therefore\ 5(2\alpha+\beta)+2(\alpha-\beta)+6(\alpha+\beta)=0$

$\Rightarrow 18\alpha+9\beta=0\Rightarrow\beta=-2\alpha$

समीकरण (i) से, $6\alpha^2-8\alpha^2+12\alpha^2=1$

$\Rightarrow\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\Rightarrow\beta=\mp\frac{2}{\sqrt{10}}$.

इस प्रकार $\hat{\mathbf{a}}=\pm\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{j}-\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{k}\right)$.

60. (b) यदि α , $\mathbf{b}$ तथा $\mathbf{c}$ के मध्य कोण है तथा $|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|=\sqrt{15}$

$\Rightarrow|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\sin\alpha=\sqrt{15}$

$\Rightarrow\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$; $\therefore\ \cos\alpha=\frac{1}{4}$

अब, $\mathbf{b}-2\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}\Rightarrow|\mathbf{b}-2\mathbf{c}|^2=\lambda^2|\mathbf{a}|^2$

$\Rightarrow|\mathbf{b}|^2+4|\mathbf{c}|^2-4\,\mathbf{b}.\mathbf{c}=\lambda^2|\mathbf{a}|^2$

$\Rightarrow\ 16+4-4\{|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\cos\alpha\}=\lambda^2$

$\Rightarrow\ 16+4-4\times4\times1\times\frac{1}{4}=\lambda^2\Rightarrow\lambda^2=16\Rightarrow\lambda=\pm4$.

61. (b) यहाँ, $\overrightarrow{OA}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\overrightarrow{OB}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$

व $\overrightarrow{OC}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ व $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=2\mathbf{i}$

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

चूँकि $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&2&-3\\2&0&0\end{vmatrix}=-2(3\mathbf{j}+2\mathbf{k})$

अतः, त्रिभुज का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}\times2|3\mathbf{j}+2\mathbf{k}|=\sqrt{13}$.

62. (b) $\Delta = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2}$

जहाँ $\Delta_x = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$ इत्यादि।

वैकल्पिक : सदिशों $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{AC}$ से,

$\Delta = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{matrix}\right\|$

$= \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{64 + 16 + 16} = \frac{\sqrt{96}}{2} = 2\sqrt{6}$.

63. (c) त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$= \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{matrix}\right\|$

यहाँ, $(x_1, y_1, z_1) \equiv (1, 2, 3)$, $(x_2, y_2, z_2) \equiv (2, 5, -1)$, $(x_3, y_3, z_3) \equiv (-1, 1, 2)$

$= \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -4 \\ -2 & -1 & -1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|(-7\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 5\mathbf{k})|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{49 + 81 + 25} = \frac{\sqrt{155}}{2}$ वर्ग इकाई.

64. (c) समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}|$

यहाँ हमें आसन्न भुजायें दी गयी हैं, अतः

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

अतः, अभीष्ट क्षेत्रफल $= |2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}| = \sqrt{41}$.

65. (b) $\Delta = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$,

किन्तु $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 14\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

अतः, $\Delta = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 196 + 100} = 5\sqrt{3}$.

66. (d) सदिश क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}|(-\mathbf{i} + \mathbf{k}) \times (-\mathbf{j} + \mathbf{k})|$

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

अतः तुलना करने पर, $\vec{\alpha} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

67. (c) $\Delta = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|(5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k})|$

$\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{25 + 16 + 49} = \frac{1}{2}\sqrt{90} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$.

68. (c) यह स्पष्ट है।

69. (c) माना बिन्दुओं A, B, C के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{0}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ हैं एवं $\theta = 90°$

अतः, त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$= \frac{1}{2}|(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})| = \frac{1}{2}2|\mathbf{b} \times \mathbf{a}|$

$= |b||a|\sin\theta = 3 \times 2 \sin 90° = 6$.

70. (c) $\Delta = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \left\|\begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{matrix}\right\| = |8\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 8\mathbf{k}| = 8\sqrt{3}$.

71. (c) त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \times (-5\mathbf{i} + 7\mathbf{j})|$

$= \frac{1}{2}|(41)\mathbf{k}| = \frac{41}{2}$.

72. (b) माना $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

$\Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

अतः समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

73. (b) माना $\mathbf{p} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ व $\mathbf{q} = 4\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$

तो $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = (2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (4\mathbf{a} - 5\mathbf{b}) = -6(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

$= -6|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\frac{\pi}{4}\hat{\mathbf{n}} = -6 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{n}} = -3\sqrt{2}\,\hat{\mathbf{n}}$

अतः, दिये गये समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\mathbf{p} \times \mathbf{q}| = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

74. (c) अभीष्ट क्षेत्रफल $= \left\|\begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{matrix}\right\|$

$= |5\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 5\mathbf{k}| = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$.

75. (d) समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2|$

अब, $\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} \Rightarrow \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = 2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

$\therefore \frac{1}{2}|\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2| = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 100 + 64} = \frac{1}{2}\sqrt{168} = \sqrt{42}$.

76. (a) समान्तर चतुर्भुज की आसन्न भुजायें $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ हैं, अतः समान्तर चतुर्भुज का सदिश क्षेत्रफल

$= \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(2+6)-\mathbf{j}(1+9)+\mathbf{k}(-2+6)$

$= 8\mathbf{i}-10\mathbf{j}+4\mathbf{k}$

$\therefore$ समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$= |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{(8)^2+(-10)^2+(4)^2} = \sqrt{64+100+16}$

$= \sqrt{180}$ वर्ग इकाई.

77. (a) $\mathbf{a}+\mathbf{b} = 2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+6\mathbf{k},\ \mathbf{b}+\mathbf{c} = 8\mathbf{i}+12\mathbf{j}+16\mathbf{k}$

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{B}|$, (जहाँ $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ विकर्ण हैं)

$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 12 & 16 \end{vmatrix}\right|$

$= \frac{1}{2}|\mathbf{i}(64-72)-\mathbf{j}(32-48)+\mathbf{k}(24-32)|$

$= \frac{1}{2}|-8\mathbf{i}+16\mathbf{j}-8\mathbf{k}| = |-4\mathbf{i}+8\mathbf{j}-4\mathbf{k}|$

$= \sqrt{16+64+16} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$.

78. (a) $A = \frac{1}{2}|\mathbf{d}_1\times\mathbf{d}_2| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & -6 & 8 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}|-2\mathbf{i}-14\mathbf{j}-10\mathbf{k}|$

$A = \frac{1}{2}\sqrt{4+(14)^2+100} = \frac{1}{2}\sqrt{300} = \frac{1}{2}.10\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

79. (d) त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \Delta = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$\Delta = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2-1 & 3+2 & -1-3 \\ 4-1 & -7+2 & 7-3 \end{vmatrix}\right|$

$\Delta = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 5 & -4 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix}\right| = 0$.

80. (c) समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \left|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}\right|$

$= |2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$.

81. (d) बल आघूर्ण $= \mathbf{r}\times\mathbf{F}$ या $\overrightarrow{CP}\times F$.

82. (b) माना $\mathbf{F}_1 = \mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k},\ \mathbf{F}_2 = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k},\ \mathbf{F}_3 = \mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

$O(0,1,2)$ व $P(1,-2,0) \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \mathbf{i}-3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

परिणामी बल $(\mathbf{F}) = \mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\mathbf{F}_3 = 4\mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

$\therefore$ बल का आघूर्ण $= \overrightarrow{OP}\times\mathbf{F}$

$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -3 & -2 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i}-10\mathbf{j}+16\mathbf{k}$

अतः बल के आघूर्ण का परिमाण

$= |\overrightarrow{OP}\times\mathbf{F}| = \sqrt{4+100+256} = 6\sqrt{10}$.

83. (b) $\mathbf{F} = \overrightarrow{AB} = 4\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}$ व $\overrightarrow{AP} = 3\mathbf{i}-3\mathbf{k}$

बल आघूर्ण $= \overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 12\mathbf{i}-9\mathbf{j}+12\mathbf{k}$

$\therefore$ परिमाण $= \sqrt{144+81+144} = 3\sqrt{41}$.

84. (d) $\mathbf{r}\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5\mathbf{i}-5\mathbf{j}+5\mathbf{k}$.

85. (a) $\overrightarrow{OA} = 3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-9\mathbf{k};\ \mathbf{F} = (9\mathbf{i}+6\mathbf{j}-2\mathbf{k})\times\frac{6}{11}$

$\therefore$ बल का आघूर्ण $= \overrightarrow{OA}\times\mathbf{F} = \frac{6}{11}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -9 \\ 9 & 6 & -2 \end{vmatrix}$

$= \frac{6}{11}(50\mathbf{i}-75\mathbf{j}) = \frac{150}{11}(2\mathbf{i}-3\mathbf{j})$.

86. (c) बल $(\vec{F}) = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ तथा बिन्दु A का स्थिति सदिश $= 2\mathbf{i}-\mathbf{j}$ है। हम जानते हैं, कि मूल बिन्दु के परितः बल का स्थिति सदिश $(\mathbf{r}) = (2\mathbf{i}-\mathbf{j})-(0\mathbf{i}+0\mathbf{j}+0\mathbf{k})$ या $\mathbf{r} = 2\mathbf{i}-\mathbf{j}$

$\therefore$ मूलबिन्दु के परितः बल आघूर्ण

$= \mathbf{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$.

87. (c) $\because$ **n**, **a** और **b** के लम्बवत् है

$\mathbf{n} = \mathbf{a}\times\mathbf{b};\ \mathbf{n} = \dfrac{\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{2\mathbf{k}}{2} = \mathbf{k}$

$\therefore |\mathbf{c}.\mathbf{n}| = |(\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}).(\mathbf{k})| = |5| = 5$.

88. (d) **a** और **b** के तल के लम्बवत् इकाई सदिश $= \pm\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}$

$\therefore$ अभीष्ट सदिश $= \pm\frac{(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})}{|(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})|}$

$= \pm\frac{(-(\mathbf{i}+\mathbf{j}))}{\sqrt{2}}$, अर्थात् $\frac{-(\mathbf{i}+\mathbf{j})}{\sqrt{2}}$ तथा $\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$.

अदिश त्रिगुणन तथा उसके अनुप्रयोग

1. (a) $\frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{c}\times\mathbf{a}.\mathbf{b}}+\frac{\mathbf{b}.\mathbf{a}\times\mathbf{c}}{\mathbf{c}.\mathbf{a}\times\mathbf{b}} = \frac{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}{[\mathbf{c}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}]}+\frac{[\mathbf{b}\,\mathbf{a}\,\mathbf{c}]}{[\mathbf{c}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}]} = \frac{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}{[\mathbf{c}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}]}-\frac{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}{[\mathbf{c}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}]} = 0.$

2. (b) $[\mathbf{a}+\mathbf{b}\ \ \mathbf{b}+\mathbf{c}\ \ \mathbf{c}+\mathbf{a}] = (\mathbf{a}+\mathbf{b}).\{(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{c}+\mathbf{a})\}$

$= (\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})$

$= (\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}),\ \{\because \mathbf{c}\times\mathbf{c} = 0\}$

$= \mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}.\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{b}.\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}.\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{b}.\mathbf{c}\times\mathbf{a}$

$= [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]+[\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}] = 2[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$.

3. (c) यहाँ, $\overrightarrow{OA} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} = \mathbf{a}$ (माना)

$\overrightarrow{OB} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} = \mathbf{b}$ (माना)

व $\overrightarrow{OC} = 3\mathbf{i} - \mathbf{k} = \mathbf{c}$ (माना)

अतः, आयतन $= [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = \mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4$.

4. (c) $\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$ या $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).\mathbf{c} = 0$.

5. (a) $\mathbf{a}.(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = \mathbf{c}.(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = 0$, (चूँकि $\mathbf{a}$ व $\mathbf{b}$ समान्तर हैं)।

6. (d) यदि दिये गये सदिश समतलीय हैं, तो उनका अदिश त्रिगुणन शून्य होगा, अर्थात् $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & \lambda & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = -4$.

7. (d) यहाँ $\mathbf{p}.(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{p}.\mathbf{a} + \mathbf{p}.\mathbf{b}$

$= \frac{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}).\mathbf{a}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]} + \frac{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}).\mathbf{b}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]} = \frac{[\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]} + \frac{[\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{b}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}$

$= 1 + 0 = 1$, $\{\because [\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}] = [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$ व $[\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{b}] = 0\}$

इसी प्रकार, $\mathbf{q}.(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = 1$ व $\mathbf{r}.(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = 1$

अतः, अभीष्ट परिणाम $= 1+1+1 = 3$.

8. (a) माना $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{d} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$ हैं।

चूँकि बिन्दु समतलीय हैं,

अतः $[\mathbf{d}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] + [\mathbf{d}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}] + [\mathbf{d}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}] = [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 5 & \lambda \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 & \lambda \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 & \lambda \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow 40 + 5\lambda + 37 - \lambda + 94 + 13\lambda = 25 \Rightarrow \lambda = \frac{-146}{17}$.

9. (a) $\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}$

$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}).(\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r}) = \frac{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] + [\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}] + [\mathbf{c}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]} = 3$.

10. (c) चूँकि $\begin{vmatrix} -12 & 0 & \alpha \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -15 \end{vmatrix} = 546 \Rightarrow \alpha = -3$.

11. (b) $\begin{vmatrix} a & a & c \\ 1 & 0 & 1 \\ c & c & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 1 & -1 & 1 \\ c & 0 & b \end{vmatrix} = 0$

$\{C_2 \to C_2 - C_1$ के प्रयोग से$\}$

$\Rightarrow a(-b) + c(c) = 0 \Rightarrow c^2 = ab$

अतः c, a व b का गुणोत्तर माध्य है।

12. (c) $\mathbf{a}^{-1} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}$, $\mathbf{c}^{-1} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}$, $\mathbf{b}^{-1} = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}$

$\Rightarrow [\mathbf{a}^{-1}\,\mathbf{b}^{-1}\,\mathbf{c}^{-1}] = \frac{(\mathbf{b} \times \mathbf{c})}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}.\left(\frac{(\mathbf{c} \times \mathbf{a})}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]} \times \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}\right)$

$= \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}.\left[\frac{\mathbf{a}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}\right] = \frac{1}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]} \neq 0$.

13. (a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & p & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3 + 2p + 3(5) = 0 \Rightarrow p = -6$

14. (b) $|\,\mathbf{i}\,\mathbf{k}\,\mathbf{j}| = \mathbf{i}.(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i}.(-\mathbf{i}) = -1$.

15. (d) घनाभ का आयतन $= [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$

$= \begin{vmatrix} 12 & 4 & 3 \\ 8 & -12 & -9 \\ 33 & -4 & -24 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 8 & -3 & -3 \\ 33 & -1 & -8 \end{vmatrix} = 3696$.

16. (c) $\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a}.\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{a}.(5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k})$

$= (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}).(5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}) = 10 - 1 + 3 = 12$.

17. (a) समांतर षट्फलक का आयतन

$= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{c}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2(5) - 1(1 + 9) - 1(5) = |-5| = 5$ घन इकाई।

18. (a) चूँकि $\mathbf{x}$ एक अशून्य सदिश है, अतः दिये गये प्रतिबन्ध सन्तुष्ट होंगे, यदि (i) सदिशों $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ में से या तो एक शून्य हो या (ii) $\mathbf{x}$ सभी दिशाओं $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ पर लम्बवत् हो।

स्थिति (ii) में, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ समतलीय होंगे, अतः $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = 0$.

19. (b) प्रश्नानुसार, $\begin{vmatrix} -bc & b^2 + bc & c^2 + bc \\ a^2 + ac & -ac & c^2 + ac \\ a^2 + ab & b^2 + ab & -ab \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (ab + bc + ca)^3 = 0 \Rightarrow ab + bc + ca = 0$.

20. (d) $[\mathbf{a} + \mathbf{b}\;\; \mathbf{b} + \mathbf{c}\;\; \mathbf{c} + \mathbf{a}] = [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] + [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a}] + [\mathbf{a}\,\mathbf{c}\,\mathbf{c}]$

$+ [\mathbf{a}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}] + [\mathbf{b}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] + [\mathbf{b}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a}] + [\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{c}] + [\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}]$

$= [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] + [\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}] = 2[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = 0$, (चूँकि $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ समतलीय हैं)।

21. (b) चूँकि $[\mathbf{a}\;\mathbf{b}\;\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2$.

22. (d) $(\mathbf{a} \times \mathbf{j}).(2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) = \mathbf{a}.\{\mathbf{j} \times (2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})\}$

$= \mathbf{a}.\{-3(\mathbf{j} \times \mathbf{k})\} = -3(\mathbf{a}.\mathbf{i}) = -12$.

23. (a) दिये गये सदिश समतलीय हैं

$\therefore \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ x & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{5}$.

24. (c) $V = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = |-7| = 7$ घन इकाई.

25. (d) $\mathbf{a} \times (\mathbf{a}.\mathbf{b})$ अर्थहीन है।

26. (b) $\mathbf{i}.(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + \mathbf{j}.(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + \mathbf{k}.(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i}.\mathbf{i} + \mathbf{j}.\mathbf{j} + \mathbf{k}.\mathbf{k} = 3$.

27. (c,d) चूँकि विकल्पों (c) व (d) में दिये गये सदिश इकाई एवं दोनों दिये गये सदिशों पर लम्ब हैं।

28. (c) आयतन $= \begin{vmatrix} -3 & 7 & 5 \\ -3 & 7 & -3 \\ 7 & -5 & -3 \end{vmatrix}$

$= -3(-21 - 15) - 7(9 + 21) + 5(15 - 49)$

$= 180 - 210 - 170 = 272$.

29. (c) चूँकि $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ दोनों के लम्बवत् है, अतः $\mathbf{a}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$.
($\because$ दो परस्पर लम्बवत् सदिशों का अदिश गुणन शून्य होता है)।

30. (d) $(\mathbf{a}-\mathbf{b}).(\mathbf{b}-\mathbf{c})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})=(\mathbf{a}-\mathbf{b}).(\mathbf{b}\times\mathbf{c}-\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})$
$=\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})-\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{a})+\mathbf{a}.(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$
$-\mathbf{b}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}.(\mathbf{b}\times\mathbf{a})-\mathbf{b}.(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=0$.

31. (c) विकल्प (a), (b) और (d) $=[\mathbf{u}\ \mathbf{v}\ \mathbf{w}]$, जबकि विकल्प (c) $=-[\mathbf{u}\ \mathbf{v}\ \mathbf{w}]$.

32. (a,c) $\because$ $(\mathbf{u}.\mathbf{v})$ अदिश है, अतः अदिश गुणन एंव सदिश गुणन विकल्प (b) तथा (d) के लिए परिभाषित नहीं हैं।
अतः विकल्प (a) व (c) सही हैं।

33. (b) चूँकि $\mathbf{d}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}$
$\therefore \mathbf{d}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\lambda\,\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mu\,\mathbf{b}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mu\,\mathbf{c}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$
$=\lambda[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$
$\Rightarrow \lambda=\dfrac{[\mathbf{d}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}=\dfrac{[\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}]}{[\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}]}$.

34. (b) $\vec{A}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ तथा $\vec{B}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+5\mathbf{k}$
$\vec{A},\vec{B}$ तथा $\vec{C}$ क्रमशः $[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]<0$ या >0 के अनुसार वामावर्त या दक्षिणावर्त निकाय बनाते हैं,
$\therefore$ $[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]<0$, अतः $\vec{C}=-11\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

35. (c) समान्तर षट्फलक (घनाभ) का आयतन $=[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$
$=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&-3&4\\2&-5&3\end{vmatrix}=(-9+20)-(8-3)+(-5+6)=7$ घन इकाई.

36. (b) $\dfrac{(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})}{\lambda}=\dfrac{(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).\mathbf{a}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).\mathbf{b}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).\mathbf{c}}{\lambda}$
$=\dfrac{(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).\mathbf{a}+0+0}{\lambda}=\dfrac{\lambda}{\lambda}=1$,
($\because$ दिया है $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\lambda=(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).\mathbf{a}$).

37. (a) यहाँ $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]=0$
अतः दिया गया अदिश त्रिगुणन $=k[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]=0$.

38. (b) दिया है, $\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$; $2\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ तथा $3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+x\mathbf{k}$
चूँकि सदिश समतलीय हैं,
$\therefore \begin{vmatrix}1&3&-2\\2&-1&4\\3&2&x\end{vmatrix}=0$
$\Rightarrow 1(-x-8)-3(2x-12)-2(4+3)=0$
$\Rightarrow -x-8-6x+36-14=0 \Rightarrow 7x=14 \Rightarrow x=2$.

39. (a) $[\mathbf{a}-\mathbf{b}\ \ \mathbf{b}-\mathbf{c}\ \ \mathbf{c}-\mathbf{a}]=\{(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})\}.(\mathbf{c}-\mathbf{a})$
$=(\mathbf{a}\times\mathbf{b}-\mathbf{a}\times\mathbf{c}-\mathbf{b}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}).(\mathbf{c}-\mathbf{a})$
$=(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}).(\mathbf{c}-\mathbf{a})$
$=(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\mathbf{c}-(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\mathbf{a}+(\mathbf{c}\times\mathbf{a}).\mathbf{c}-(\mathbf{c}\times\mathbf{a}).\mathbf{a}$
$+(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).\mathbf{c}-(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).\mathbf{a}$
$=[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]-[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a}]+[\mathbf{c}\,\mathbf{a}\,\mathbf{c}]-[\mathbf{c}\,\mathbf{a}\,\mathbf{a}]+[\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{c}]-[\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}]=0$.

40. (d) $\because$ $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}-4\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}+\lambda\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ समतलीय हैं
$\therefore [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&-4\\1&\lambda&3\end{vmatrix}=0$
$\Rightarrow 4\lambda-(6+4)+2\lambda=0 \Rightarrow 6\lambda=10 \Rightarrow \lambda=\dfrac{5}{3}$.

41. (d) तीन सदिशों के समतलीय होने के लिए, $[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]=0$
इस प्रकार $[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]$ का मान C_1 से स्वतंत्र है, अतः C_1 का कोई मान प्राप्त नहीं हो सकता है।

42. (c) $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]=\begin{vmatrix}1&0&-1\\x&1&1-x\\y&x&1+x-y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\x&1&1\\y&x&1+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\x&1+x\end{vmatrix}=1$.

43. (b) $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix}3&-2&2\\6&4&-2\\3&-2&-4\end{vmatrix}$
$=3[-16-4]+2[-24+6]+2[-12-12]$
$=-60-36-48=-144$.

44. (b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$
$=(\mathbf{a}+\mathbf{b}).\{-\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{b}\times\mathbf{b}+\mathbf{c}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{c}\}$
$=(\mathbf{a}+\mathbf{b}).\{-\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{b}\}$
$[\because \mathbf{b}\times\mathbf{b}=0$ व $\mathbf{c}\times\mathbf{c}=0]$
$=(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(-\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})$
$=-[\mathbf{a}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}]+[\mathbf{a}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}]-[\mathbf{b}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}]+[\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}]$
$=0+0-0+[\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}]=[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$.

45. (c) यह स्पष्ट है।

46. (a) $[\mathbf{a}\times\mathbf{b}\ \ \mathbf{b}\times\mathbf{c}\ \ \mathbf{c}\times\mathbf{a}]=(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})]$
$=(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).([\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}]\mathbf{c}-[\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{c}]\mathbf{a})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).([\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}]\mathbf{c}-0)$
$=[\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}][\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]=[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}][\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]=4.4=16$.

47. (d) समान्तर षट्फलक का आयतन $=V=[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$
$\therefore V=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&-4&5\\3&-5&2\end{vmatrix}$
$V=1(-8+25)+1(4-15)+1(-10+12)$
$V=17-11+2=8$ घन इकाई.

48. (d) $[\mathbf{i}\,\mathbf{k}\,\mathbf{j}]+[\mathbf{k}\,\mathbf{j}\,\mathbf{i}]+[\mathbf{j}\,\mathbf{k}\,\mathbf{i}]=[\mathbf{i}\,\mathbf{k}\,\mathbf{j}]+[\mathbf{i}\,\mathbf{k}\,\mathbf{j}]-[\mathbf{i}\,\mathbf{k}\,\mathbf{j}]=[\mathbf{i}\,\mathbf{k}\,\mathbf{j}]=-1$.

49. (b) $(\mathbf{u}+\mathbf{v}-\mathbf{w}).(\mathbf{u}\times\mathbf{v}-\mathbf{u}\times\mathbf{w}-\mathbf{v}\times\mathbf{v}+\mathbf{v}\times\mathbf{w})$
$=(\mathbf{u}+\mathbf{v}-\mathbf{w})(\mathbf{u}\times\mathbf{v}-\mathbf{u}\times\mathbf{w}+\mathbf{v}\times\mathbf{w})$
$=\mathbf{u}.(\mathbf{u}\times\mathbf{v})-\mathbf{u}.(\mathbf{u}\times\mathbf{w})+\mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w})+\mathbf{v}.(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$
$-\mathbf{v}.(\mathbf{u}\times\mathbf{w})+\mathbf{v}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w})-\mathbf{w}.(\mathbf{u}\times\mathbf{v})+\mathbf{w}.(\mathbf{u}\times\mathbf{w})$
$-\mathbf{w}.(\mathbf{u}\times\mathbf{w})=\mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w})-\mathbf{v}.(\mathbf{u}\times\mathbf{w})-\mathbf{w}.(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$
$=[\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}]+[\mathbf{v}\,\mathbf{w}\,\mathbf{u}]-[\mathbf{w}\,\mathbf{u}\,\mathbf{v}]=\mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$.

50. (d) $\mathbf{a}.[(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})]$
$=\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{b}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{a}.(\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{b}+\mathbf{c}\times\mathbf{c})$
$=[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a}]+[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{b}]+[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]+[\mathbf{a}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}]+[\mathbf{a}\,\mathbf{c}\,\mathbf{b}]+[\mathbf{a}\,\mathbf{c}\,\mathbf{c}]$
$=0+0+[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]+0-[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]+0=0$.

51. (c) $\because$ सदिश $4\mathbf{i}+11\mathbf{j}+m\mathbf{k}, 7\mathbf{i}+2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{i}+5\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ समतलीय हैं

$$\therefore \begin{vmatrix} 4 & 11 & m \\ 7 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 4(8-30)-11(28-6)+m(35-2)=0$

$\Rightarrow -88-11\times 22+33m=0 \Rightarrow -8-22+3m=0$

$\Rightarrow 3m=30 \quad \Rightarrow m=10$.

52. (b) माना सदिश $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ है।

$\because a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{j}, \mathbf{j}+\mathbf{k}$ समतलीय हैं

$$\therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a-b+c=0$$

चूँकि $(a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}) || (2\mathbf{i}-2\mathbf{j}-4\mathbf{k})$

$\therefore (a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k})\times(2\mathbf{i}-2\mathbf{j}-4\mathbf{k})=0$

अर्थात्, $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \mathbf{i}(-4b+2c)-\mathbf{j}(-4a-2c)+\mathbf{k}(-2a-2b)=0$

$\Rightarrow -4b+2c=0,\ 4a+2c=0,\ 2a+2b=0$

$\Rightarrow \dfrac{c}{2}=\dfrac{b}{1},\ \dfrac{c}{2}=\dfrac{a}{-1},\ \dfrac{a}{-1}=\dfrac{b}{1}$

अर्थात्, $\dfrac{a}{-1}=\dfrac{b}{1}=\dfrac{c}{2}$ या $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{-1}=\dfrac{c}{-2}$

$\therefore$ अभीष्ट सदिश $\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ है।

53. (c) माना चार बिन्दु A, B, C, D दिये गये बिन्दुओं को प्रदर्शित करते हैं।

$\therefore \overrightarrow{AB}=-\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k},\ \overrightarrow{BC}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-5\mathbf{k},$

$\overrightarrow{CD}=-2\mathbf{i}-(\lambda+4)\mathbf{j}+3\mathbf{k}$

प्रश्नानुसार, $[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{BC}\ \overrightarrow{CD}]=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -5 \\ -2 & -(\lambda+4) & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow -1[2.3-5(\lambda+4)]+1[6-10]+4[-2(\lambda+4)+4]=0$

$\Rightarrow \lambda=-2$.

54. (c) $\because$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ असमतलीय सदिश हैं ; $\therefore [\mathbf{a\,b\,c}]\neq 0$.

अब $\mathbf{a}+2\mathbf{b}+3\mathbf{c},\ \lambda\mathbf{b}+4\mathbf{c}$ तथा $(2\lambda-1)\mathbf{c}$ असमतलीय होंगे, यदि और केवल यदि

$(\mathbf{a}+2\mathbf{b}+3\mathbf{c}).\{(\lambda\mathbf{b}+4\mathbf{c})\times(2\lambda-1)\mathbf{c}\}\neq 0$

अर्थात् $(\mathbf{a}+2\mathbf{b}+3\mathbf{c})\{\lambda(2\lambda-1)(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\}\neq 0$

अर्थात् $\lambda(2\lambda-1)[\mathbf{a\,b\,c}]\neq 0$, $\therefore \lambda\neq 0, \dfrac{1}{2}$

इस प्रकार दिये हुये सदिश λ के केवल दो मानों ($\lambda=0$ तथा $\lambda=\dfrac{1}{2}$) को छोड़कर λ के सभी मानों के लिए असमतलीय होंगे।

ट्रिक : समतलीय के लिए $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2\lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda=0, \dfrac{1}{2}$

$\therefore \lambda$ के दो मानों $\lambda=0, \dfrac{1}{2}$ को छोड़कर सभी मानों के लिए सदिश असमतलीय होंगे।

55. (d) यह स्पष्ट है।

56. (c) दिया है, $\mathbf{a}.\mathbf{b}=\mathbf{b}.\mathbf{c}=\mathbf{c}.\mathbf{a}=0$ और तीन सदिशों का अदिशत्रिक गुणन इस प्रकार है कि, $[\mathbf{a\,b\,c}]=(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\mathbf{c}$

$\because \mathbf{a}.\mathbf{b}=0, \quad \therefore \mathbf{a}\perp\mathbf{b}$

इसलिए $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ के मध्य कोण $\theta=90^\circ$ है।

इसी प्रकार $[\mathbf{a\,b\,c}]=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{c}$, जहाँ $\hat{\mathbf{n}}$ एक अभिलम्ब सदिश है।

$\therefore [\mathbf{a\,b\,c}]=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\hat{\mathbf{n}}\ \mathbf{c}$

$\because \hat{\mathbf{n}}$ और $\mathbf{c}$ एक दूसरे के समान्तर है

$\therefore [\mathbf{a\,b\,c}]=|\mathbf{a}||\mathbf{b}||\hat{\mathbf{n}}||\mathbf{c}|\cos\theta=|\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$.

57. (c) $\because$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ और $\mathbf{c}$ समतलीय सदिश हैं

$$\therefore [\mathbf{a\,b\,c}]=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 1[0-\alpha]-1[0-1]-1[2\alpha-3]=0$

$\Rightarrow -3\alpha+4=0 \Rightarrow \alpha=\dfrac{4}{3}$.

58. (d) यह स्पष्ट है।

59. (c) $[\mathbf{a\,b\,c}]=\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{a}.(|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\sin\theta\,\hat{\mathbf{n}})$

$=\mathbf{a}(3\times 4\sin\dfrac{2\pi}{3}.\hat{\mathbf{n}})=\mathbf{a}.(12\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{n}})$

$=6\sqrt{3}|\mathbf{a}||\hat{\mathbf{n}}|=6\sqrt{3}\times 2\times 1 \Rightarrow 12\sqrt{3}$.

60. (d) $[\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})\ \lambda^2\mathbf{b}\ \lambda\mathbf{c}]=[\mathbf{a}\ \ \mathbf{b}+\mathbf{c}\ \ \mathbf{b}]$

$\Rightarrow \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\lambda^2\mathbf{b}\times\lambda\mathbf{c})=\mathbf{a}.((\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{b})$

$\Rightarrow \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}).\lambda^3(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{b}+\mathbf{c}\times\mathbf{b})$

$\Rightarrow \lambda^4[\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]=\mathbf{a}.(\mathbf{c}\times\mathbf{b})$

$\Rightarrow \lambda^4[\mathbf{a\ b\ c}]=-[\mathbf{a\ b\ c}] \Rightarrow [\mathbf{a\ b\ c}](\lambda^4+1)=0$

$\because$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ असमतलीय हैं, अतः $[\mathbf{a\ b\ c}]\neq 0$

$\therefore \lambda^4=-1$. अतः λ का कोई वास्तविक मान नहीं है।

61. (c) $\because$ दिये हुये सदिश समतलीय हैं

$$\therefore \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda \\ -5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow -4-4\lambda-5\lambda-1-8=0$

$\Rightarrow -9\lambda-13=0 \Rightarrow \lambda=\dfrac{-13}{9}$.

62. (b) हमें दिया है $\mathbf{a}.\mathbf{b}_1=0$, $\mathbf{b}_1.\mathbf{c}_2=0$, $\mathbf{a}.\mathbf{c}_2=0$

$\therefore$ लाम्बिक सदिशों का समुच्चय $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}_1\ \mathbf{c}_2]=0$

$\therefore$ विकल्प (b) सही उत्तर है।

63. (a) $\because$ सदिश $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ और $\boldsymbol{\gamma}$ के तल में विद्यमान है।

$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ समतलीय है।

$\Rightarrow [\boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{\gamma}]=0$.

सदिश त्रिगुणन

1. (a) $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$ व $\mathbf{c}$ के लम्बवत् सदिश है। अतः $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ पुनः $\mathbf{b},\mathbf{c}$ के तल में एक सदिश होगा।

2. (c) माना $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

$\mathbf{i}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{i})+\mathbf{j}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{j})+\mathbf{k}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{k})$

$=(\mathbf{i}.\mathbf{i})\mathbf{a}-\mathbf{i}(\mathbf{a}.\mathbf{i})+(\mathbf{j}.\mathbf{j})\mathbf{a}-\mathbf{j}(\mathbf{a}.\mathbf{j})+(\mathbf{k}.\mathbf{k})\mathbf{a}-\mathbf{k}(\mathbf{a}.\mathbf{k})$

$=3\mathbf{a}-\mathbf{a}=2\mathbf{a}.$

3. (a) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&-1&1\\1&3&-1\end{vmatrix}=\mathbf{a}\times(-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+7\mathbf{k})$

$=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&2&-2\\-2&3&7\end{vmatrix}=20\mathbf{i}-3\mathbf{j}+7\mathbf{k}.$

4. (d) $\alpha.[\gamma\times(\alpha\times\beta)]=\alpha.[(\gamma.\beta)\alpha-(\gamma.\alpha)\beta]$

$=(\alpha)\cdot(\gamma.\beta)-(\gamma.\alpha)(\beta.\alpha)=14(-3)-(4)(8)=-74$.

5. (b) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{a}\parallel(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ या $\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{0}$

अर्थात् $\mathbf{b}\parallel\mathbf{c}$ या $\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

6. (c) यह आधारभूत संकल्पना है।

7. (d) $\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ व $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}$

$\therefore$ $\mathbf{a},\mathbf{b}$ व $\mathbf{c}$ पर लम्बवत् है एवं $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$ व $\mathbf{b}$ पर लम्बवत् है।

$\therefore$ $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ परस्पर लम्बवत् हैं

अब, $\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{b}.\mathbf{b})\mathbf{a}-(\mathbf{b}.\mathbf{a})\mathbf{b}$

या $\mathbf{a}=b^2\mathbf{a}-(\mathbf{b}.\mathbf{a})\mathbf{b}=b^2\mathbf{a}$, $\{\because\mathbf{a}\perp\mathbf{b}\}$

$\Rightarrow 1=b^2$, $\therefore\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}=ab\sin 90^\circ\,\hat{\mathbf{n}}$

दोनों तरफ मापांक लेने पर,

$\therefore$ $c=ab$ परन्तु $b=1\Rightarrow c=a$.

8. (a) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}.\mathbf{c})\mathbf{a}$

$=(3+2+4)(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})-(2-2-2)(3\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k})$

$=18\mathbf{i}+9\mathbf{j}-9\mathbf{k}+6\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}=24\mathbf{i}+7\mathbf{j}-5\mathbf{k}$.

9. (b) $\mathbf{i}\times\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0$.

10. (d) हम जानते हैं कि $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}$ ......(i)

$\because$ $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\dfrac{\mathbf{b}}{2}$, (दिया है)

समीकरण (i) से,

$(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}=\dfrac{\mathbf{b}}{2}$ या $\left(\mathbf{a}.\mathbf{c}-\dfrac{1}{2}\right)\mathbf{b}-(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}=\mathbf{c}$

$\mathbf{b}$ तथा $\mathbf{c}$ के गुणांकों की तुलना करने पर,

$\mathbf{a}.\mathbf{c}-\dfrac{1}{2}=0,\ \mathbf{a}.\mathbf{b}=0$

$\Rightarrow|\mathbf{a}||\mathbf{c}|\cos\theta=\dfrac{1}{2}\Rightarrow(1)(1)\cos\theta=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ$

या $\mathbf{a}.\mathbf{b}=0$, $\therefore$ $\theta=90^\circ$.

अतः $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ व $\mathbf{c}$ से क्रमशः 90° व 60° कोण बनाता है।

11. (b) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&1&-2\\1&1&0\end{vmatrix}=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$

$\therefore|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{4+4+1}=3$

$|\mathbf{c}-\mathbf{a}|=2\sqrt{2}\Rightarrow|\mathbf{c}-\mathbf{a}|^2=(\mathbf{c}-\mathbf{a})^2=8$

$\Rightarrow|\mathbf{c}|^2-2\mathbf{a}.\mathbf{c}+|\mathbf{a}|^2=8\Rightarrow|\mathbf{c}|^2-2|\mathbf{c}|+9=8$

$\Rightarrow|\mathbf{c}|^2-2|\mathbf{c}|+1=0\Rightarrow|\mathbf{c}|=1$

$\therefore|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}|=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}||\mathbf{c}|\sin 30^\circ=\dfrac{3}{2}$.

12. (d) $(\mathbf{i}\times\mathbf{i})+(\mathbf{j}\times\mathbf{j})+(\mathbf{k}\times\mathbf{k})=0$.

13. (c) $[\mathbf{b}\times\mathbf{c}\ \ \mathbf{c}\times\mathbf{a}\ \ \mathbf{a}\times\mathbf{b}]=(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).[(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]$

माना $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{d}$

इस प्रकार, $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})[(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times\mathbf{d}]=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})[(\mathbf{d}.\mathbf{a})\mathbf{c}-(\mathbf{d}.\mathbf{c}).\mathbf{a}]$

$=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})[\mathbf{a}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\mathbf{c}-(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}.\mathbf{a}]$

$=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]\mathbf{a}=\mathbf{a}.[\mathbf{b}\times\mathbf{c}].[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$

$=[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}][\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]=[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]^2$.

14. (b) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}$

$\because$ $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, $\therefore$ $\mathbf{a}.\mathbf{b}=0$

$\because$ $\mathbf{a}\parallel\mathbf{c}$, $\therefore$ $\mathbf{a}.\mathbf{c}=1$ ($\mathbf{a},\mathbf{b}$ तथा $\mathbf{c}$ इकाई सदिश हैं)

$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(1)\mathbf{b}-(0)\mathbf{c}=\mathbf{b}$.

15. (b) $\because\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}$

$\because\mathbf{a}.\mathbf{c}=(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}).(\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})=1-1+1=1$

$\mathbf{a}.\mathbf{b}=(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}).(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})=1-1-1=-1$

$\therefore\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(1)\mathbf{b}-(-1)\mathbf{c}=\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}+\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$

$=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}$.

16. (a) $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&-2&-3\\2&1&-1\end{vmatrix}=\mathbf{i}(2+3)-\mathbf{j}(-1+6)+\mathbf{k}(1+4)$

$=5\mathbf{i}-5\mathbf{j}+5\mathbf{k}$

अब $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\5&-5&5\\1&3&-2\end{vmatrix}$

$=\mathbf{i}(10-15)-\mathbf{j}(-10-5)+\mathbf{k}(15+5)$

$=-5\mathbf{i}+15\mathbf{j}+20\mathbf{k}=5(-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k})$.

17. (a) $\because\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{b}.\mathbf{c})\mathbf{a}-(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}$

$\therefore\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

$=(\mathbf{b}.\mathbf{c})\mathbf{a}-(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}+(\mathbf{b}.\mathbf{a})\mathbf{c}-(\mathbf{b}.\mathbf{c})\mathbf{a}+(\mathbf{b}.\mathbf{c})\mathbf{a}-(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}$

$=0$, $\{\because$ $\mathbf{a}.\mathbf{b}=\mathbf{b}.\mathbf{a}$ इत्यादि$\}$.

18. (a) $\because$ $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$

$\Rightarrow(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}=(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}.\mathbf{c})\mathbf{a}$

$\Rightarrow-(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}=-(\mathbf{b}.\mathbf{c})\mathbf{a}\Rightarrow(\mathbf{b}.\mathbf{c})\mathbf{a}-(\mathbf{b}.\mathbf{a})\mathbf{c}=0$

$\Rightarrow\mathbf{b}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=0.$

19. (a) $\mathbf{a}.\mathbf{c}=1$ तथा $\mathbf{b}.\mathbf{c}=1$

दिया है; $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{c}.\mathbf{a})\mathbf{b}-(\mathbf{c}.\mathbf{b})\mathbf{a}=\mu\,\mathbf{b}+\lambda\mathbf{a}$

जहाँ $\mu=\mathbf{c}.\mathbf{a}=1,\ \lambda=-(\mathbf{c}.\mathbf{b})=-1$

$\Rightarrow \mu+\lambda=1-1=0$.

20. (c) $\mathbf{a}\times[\mathbf{a}\times\{\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\}]=\mathbf{a}\times[\mathbf{a}\times\{\mathbf{a}\times ab\,\hat{\mathbf{n}}\}]$

$=\mathbf{a}\times[\mathbf{a}\times a^2\mathbf{b}]=\mathbf{a}\times a^3 b\,\hat{\mathbf{n}}=|\mathbf{a}|^4\ \mathbf{b}$.

21. (d) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{d}]\mathbf{c}-[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]\mathbf{d}$

$\because$ $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$ समतलीय सदिश हैं,

$\therefore$ $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{d}]=[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]=0$. अतः $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\mathbf{0}$.

22. (d) $\mathbf{a}\times[\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]=\mathbf{a}\times\{(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{a}-(\mathbf{a}.\mathbf{a})\mathbf{b}\}$

$=(\mathbf{a}.\mathbf{b})(\mathbf{a}\times\mathbf{a})-(\mathbf{a}.\mathbf{a})(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{a}.\mathbf{b})0+(\mathbf{a}.\mathbf{a})(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$

$=(\mathbf{a}.\mathbf{a})\,(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$.

23. (d) समीकरण (i) को $\mathbf{a}$ से अदिश गुणा करने पर,

$\mathbf{a}.\mathbf{x}+\mathbf{a}.\mathbf{y}=\mathbf{a}^2$

$\therefore \mathbf{a}.\mathbf{y}=\mathbf{a}^2-1$ .....(iv), {(iii)से}

पुनः $\mathbf{a}\times(\mathbf{x}\times\mathbf{y})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ या $(\mathbf{a}.\mathbf{y})\mathbf{x}-(\mathbf{a}.\mathbf{x})\mathbf{y}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$

$(\mathbf{a}^2-1)\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ .....(v), {(iii) तथा (iv)से}

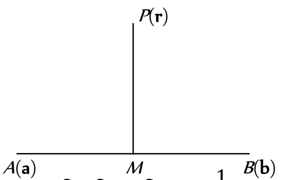
(i) व (v) को जोड़ने व घटाने पर, $\mathbf{x}=\dfrac{\mathbf{a}+(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{\mathbf{a}^2}$ व

$\mathbf{y}=\mathbf{a}-\mathbf{x}$ इत्यादि।

24. (c) $(\mathbf{b}\times\mathbf{c}.\mathbf{a})\mathbf{c}-(\mathbf{b}\times\mathbf{c}.\mathbf{c})\mathbf{a}=[\mathbf{b}\ \mathbf{c}\ \mathbf{a}]\mathbf{c}-\mathbf{0}=[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]\mathbf{c}$.

त्रिविमीय ज्यामिति में सदिशों का अनुप्रयोग

1. (a) माना $P(\mathbf{r})$, $A(\mathbf{a})$ व $B(\mathbf{b})$ से समान दूरी पर है एवं PM, AB पर लम्ब है। तब M, AB का मध्यबिन्दु होगा।



$\therefore$ M का स्थिति सदिश $=\dfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$

अतः $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{BA}=0$ या $\left[\mathbf{r}-\dfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\right].(\mathbf{a}-\mathbf{b})=0$.

2. (a) चूँकि $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ व $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ असमतलीय हैं अतः अदिशों x, y, z के लिए, $\mathbf{r}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

अब, $\mathbf{b}=\mathbf{r}\times\mathbf{a}=\{x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\}\times\mathbf{a}$

$=y(\mathbf{b}\times\mathbf{a})+z[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}]=-y(\mathbf{a}\times\mathbf{b})-z[\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]$

$=-y(\mathbf{a}\times\mathbf{b})-z[(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{a}-(\mathbf{a}.\mathbf{a})\mathbf{b}]$

$=-y(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+z(\mathbf{a}.\mathbf{a})\mathbf{b}$, $\{\because \mathbf{a}.\mathbf{b}=0\}$

$\Rightarrow y=0$ तथा $z=\dfrac{1}{(\mathbf{a}.\mathbf{a})}\Rightarrow \mathbf{r}=x\mathbf{a}+\dfrac{1}{\mathbf{a}.\mathbf{a}}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

3. (d) यह आधारभूत संकल्पना है।

4. (a) समतल $2x-y+z=4$ व रेखा $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ है।

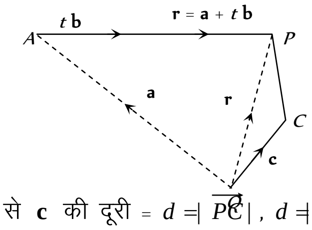
$\therefore \sin\theta=\dfrac{2+1+1}{\sqrt{6}\sqrt{3}}=\dfrac{4}{\sqrt{18}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow\theta=\sin^{-1}\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

5. (b) रेखा पर बिन्दु P के लिए, $\mathbf{r}=\mathbf{a}+t\mathbf{b}$

$\therefore$ $\overrightarrow{PC}=(\mathbf{c}-\mathbf{a})-t\mathbf{b}$,

$\because$ $\overrightarrow{PC}\perp\mathbf{b}$

$\therefore |(\mathbf{c}-\mathbf{a})-t\mathbf{b}|.\mathbf{b}=0$ या $t=\dfrac{(\mathbf{c}-\mathbf{a}).\mathbf{b}}{\mathbf{b}^2}$ .....(i)



रेखा से $\mathbf{c}$ की दूरी $=d=|\overrightarrow{PC}|$, $d=|\mathbf{c}-\mathbf{a}-t\mathbf{b}|$

$$d=\left|\mathbf{c}-\mathbf{a}-\frac{(\mathbf{c}-\mathbf{a}).\mathbf{b}\mathbf{b}}{\mathbf{b}^2}\right|=\left|\frac{(\mathbf{c}-\mathbf{a})\mathbf{b}.\mathbf{b}-(\mathbf{c}-\mathbf{a}).\mathbf{b}\mathbf{b}}{\mathbf{b}^2}\right|$$

$$d=\left|\frac{\mathbf{b}\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})\times\mathbf{b}}{\mathbf{b}^2}\right|=\frac{|\mathbf{b}||(\mathbf{c}-\mathbf{a})\times\mathbf{b}|\sin 90^\circ}{|\mathbf{b}|^2},$$

$(\because \mathbf{b}\perp(\mathbf{c}-\mathbf{a})\times\mathbf{b})$

$$d=\frac{|(\mathbf{c}-\mathbf{a})\times\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}.$$

6. (c) माना $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, तो $\mathbf{r}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}$

$$\Rightarrow (\mathbf{r}-\mathbf{b})\times\mathbf{a}=0\ \Rightarrow\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ x-2&y&z+1\\ 1&1&0\end{vmatrix}=0,$$

$\therefore z=-1,\ x-y=2$

अब $\mathbf{r}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}\Rightarrow(\mathbf{r}-\mathbf{a})\times\mathbf{b}=0$

$\therefore y=1,\ x+2z=1\Rightarrow x=3,\ y=1,\ z=-1$

$\therefore \mathbf{r}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

7. (b) यदि $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ तीन असमतलीय सदिश हैं, तब सदिश समीकरण $\mathbf{r}=(1-p-q)\mathbf{a}+p\mathbf{b}+q\mathbf{c}$ समतल को प्रदर्शित करता है।

8. (c) दो बिन्दुओं $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ से गुजरने वाली सरल रेखा का सदिश समीकरण है, $\mathbf{r}=\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})$

$\Rightarrow$ $\mathbf{r}=(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})+t(2\mathbf{k}-\mathbf{i})$.

9. (c) यह स्पष्ट है।

10. (a) दो समतल फलकों के बीच का कोण, समतलों के अभिलम्बों का

अभिलम्ब $\mathbf{n}_1=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&2&1\\2&1&3\end{vmatrix}=5\mathbf{i}-\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ ....(i) $\mathbf{n}_1$

व $\mathbf{n}_2$ के बीच के कोण के बराबर होता है। फलक OAB

यहाँ $\overrightarrow{AB}$ तथा $\overrightarrow{AC}$ क्रमशः $2-1,\ 1-2,\ 3-1$ तथा $-1-1,\ 1-2,\ 2-1$ अर्थात् $1,-1,\ 2$ तथा $-2,-1,\ 1$ हैं।

फलक ABC का अभिलम्ब $\mathbf{n}_2=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

$$\therefore\ \mathbf{n}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&-1&2\\-2&-1&1\end{vmatrix}=\mathbf{i}-5\mathbf{j}-3\mathbf{k}\qquad .....(ii)$$

यदि $\mathbf{n}_1$ व $\mathbf{n}_2$ के बीच कोण θ है, तो

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{n}_1.\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|.|\mathbf{n}_2|}=\frac{5+5+9}{\sqrt{35}.\sqrt{35}}=\frac{19}{35}$$

$$\Rightarrow\theta=\cos^{-1}\left(\frac{19}{35}\right).$$

11. (b) माना $\mathbf{n}$, z-अक्ष के साथ γ कोण बनाता है, तब $\mathbf{n}$ की दिक् कोज्यायें $l=\cos 45^o=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $m=\cos 60^o=\frac{1}{2}$ व $n=\cos\gamma$ हैं।

$\therefore\ l^2+m^2+n^2=1 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+n^2=1$

$\Rightarrow n^2=\frac{1}{4}\Rightarrow n=\frac{1}{2}$,

[$\because\ \gamma$ न्यूनकोण हैं, $\therefore\ n=\cos\gamma>0$]

हमें ज्ञात है कि $|\mathbf{n}|=8$, $\therefore\ \mathbf{n}=|\mathbf{n}|\,(l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k})$

$\Rightarrow \mathbf{n}=8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{j}+\frac{1}{2}\mathbf{k}\right)=4\sqrt{2}\mathbf{i}+4\mathbf{j}+4\mathbf{k}$

अभीष्ट समतल बिन्दु $(\sqrt{2},-1,1)$ से गुजरता है व इसका स्थिति सदिश $\mathbf{a}=\sqrt{2}\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ है।

अतः इसका सदिश समीकरण $(\mathbf{r}-\mathbf{a}).\mathbf{n}=0$ या $\mathbf{r}.\mathbf{n}=\mathbf{a}.\mathbf{n}$ है।

$\Rightarrow \mathbf{r}.(4\sqrt{2}\mathbf{i}+4\mathbf{j}+4\mathbf{k})=(\sqrt{2}\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})-(4\sqrt{2}\mathbf{i}+4\mathbf{j}+4\mathbf{k})$

$\Rightarrow\ \mathbf{r}.(\sqrt{2}\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=2$.

12. (b) यहाँ $d=8$ व $\mathbf{n}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

$\therefore\ \hat{\mathbf{n}}=\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}=\frac{2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{2}{3}\mathbf{i}+\frac{1}{3}\mathbf{j}+\frac{2}{3}\mathbf{k}$

अतः, अभीष्ट समतल का समीकरण

$\mathbf{r}.\left(\frac{2}{3}\mathbf{i}+\frac{1}{3}\mathbf{j}+\frac{2}{3}\mathbf{k}\right)=8$ या $\mathbf{r}.(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k})=24$ है।

13. (a) हम जानते हैं कि बिन्दु P जिसका स्थिति सदिश $\mathbf{a}$ है, से समतल $\mathbf{r}.\mathbf{n}=d$ की लम्बवत् दूरी $=\frac{|\mathbf{a}.\mathbf{n}-d|}{|\mathbf{n}|}$

यहाँ $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}, \mathbf{n}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ व $d=9$.

$\therefore$ अभीष्ट दूरी $=\frac{|(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}).(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k})-9|}{\sqrt{1+4+16}}$

$=\frac{|2-2-4-9|}{\sqrt{21}}=\frac{13}{\sqrt{21}}$.

14. (b) केन्द्र $\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ व दिये गये समतल के अभिलम्ब से जाने वाली रेखा का समीकरण

$\mathbf{r}=\mathbf{j}+2\mathbf{k}+\lambda(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})$ .....(i)

यह समतल पर उस बिन्दु पर मिलता है जहाँ

$((\mathbf{j}+2\mathbf{k})+\lambda(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})).(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})=15$

$\Rightarrow\ 6+\lambda(9)=15\Rightarrow \lambda=1$

$\lambda=1$ का मान समीकरण (i) में रखने पर, हमें केन्द्र का स्थिति सदिश $\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ प्राप्त होता है। अतः वृत्त के केन्द्र के निर्देशांक (1, 3, 4) हैं।

15. (d) माना $\mathbf{r}$ की दिक् कोज्यायें l,m,n हैं तब $l=m=n$, (दिया है)

$\therefore\ l^2+m^2+n^2=1\Rightarrow 3l^2=1\Rightarrow l=\frac{1}{\sqrt{3}}=m=n$

अब, $\mathbf{r}=|\mathbf{r}|\,(l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k})=6\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right)$

$\therefore\ \mathbf{r}=2\sqrt{3}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$.

16. (c) अभीष्ट समतल का समीकरण $\{\mathbf{r}-(\mathbf{i}-2\mathbf{j}-4\mathbf{k})\}.\overrightarrow{PQ}=0$ है।

17. (b) समतलों $\mathbf{r}.\mathbf{a}=\lambda$ व $\mathbf{r}.\mathbf{b}=\mu$ की प्रतिच्छेदी रेखा से जाने वाले समतल का समीकरण है, $(\mathbf{r}.\mathbf{a}-\lambda)+k(\mathbf{r}.\mathbf{b}-\mu)=0$ या

$\mathbf{r}.(\mathbf{a}+k\mathbf{b})=\lambda+k\mu$ .....(i)

यह मूलबिन्दु से गुजरता है, अतः

$\mathbf{0}.(\mathbf{a}+k\mathbf{b})=\lambda+\mu k\Rightarrow k=\frac{-\lambda}{\mu}$

k का मान (i) में रखने पर हमें अभीष्ट समतल का समीकरण $\mathbf{r}.(\mu\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b})=0\Rightarrow\ \mathbf{r}.(\lambda\mathbf{b}-\mu\mathbf{a})=0$ प्राप्त होता है।

18. (c) दो दिये हुये बिन्दुओं के स्थिति सदिश $\mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ व $\mathbf{b}=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ हैं। दिये गये समतल का समीकरण $\mathbf{r}.(5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k})+9=0$ या $\mathbf{r}.\mathbf{n}+d=0$ है।

$\therefore\ \ \mathbf{a}.\mathbf{n}+d=(\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}).(5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k})+9$

$=5-2-21+9<0$

व $\mathbf{b}.\mathbf{n}+d=(3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+3\mathbf{k}).(5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k})+9$

$=15+6-21+9>0$

अतः बिन्दु $\mathbf{a}$ व $\mathbf{b}$ समतल के विपरीत ओर हैं।

19. (b) समतल $\mathbf{r}.(4\mathbf{i}-12\mathbf{j}-3\mathbf{k})-7=0$ के समान्तर समतल का समीकरण $\mathbf{r}.(4\mathbf{i}-12\mathbf{j}-3\mathbf{k})+\lambda=0$ है। यह $2\mathbf{i}-\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ से गुजरता है।

$\therefore\ (2\mathbf{i}-\mathbf{j}-4\mathbf{k}).(4\mathbf{i}-12\mathbf{j}-3\mathbf{k})+\lambda=0$

$\Rightarrow\ 8+12+12+\lambda=0\Rightarrow\lambda=-32$

अतः अभीष्ट समतल का समीकरण $\mathbf{r}.(4\mathbf{i}-12\mathbf{j}-3\mathbf{k})-32=0$ है।

20. (a) समतलों $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k})=0$ व $\mathbf{r}.(\mathbf{j}+2\mathbf{k})=0$ की प्रतिच्छेदी रेखा से जाने वाले समतल का समीकरण है,

$(\mathbf{r}.(\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}))+\lambda(\mathbf{r}.(\mathbf{j}+2\mathbf{k}))=0$ .....(i)

यह $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ से गुजरता है,

$\therefore\ (2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}).(\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k})+\lambda(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}).(\mathbf{j}+2\mathbf{k})=0$

या $(2+3+1)+\lambda(0+1-2)=0\Rightarrow\lambda=6$

λ का मान (i) में रखने पर

$\mathbf{r}.(\mathbf{i}+9\mathbf{j}+11\mathbf{k})=0$, जो कि अभीष्ट समतल का समीकरण है।

21. (b) समतलों $\mathbf{r}.(3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})=1$ व $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k})=2$ की प्रतिच्छेदी रेखा दोनों समतलों के लिये उभयनिष्ठ है। अतः यह दोनों समतलों के अभिलम्बों के लम्बवत् होगी अर्थात् $\mathbf{n}_1=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ व $\mathbf{n}_2=\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$। अतः यह सदिश $\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=-2\mathbf{i}+7\mathbf{j}+13\mathbf{k}$ के समान्तर होगी। अतः $\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ से गुजरने वाले व सदिश $\mathbf{n}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$ के अनुदिश अभिलम्ब वाले समतल का समीकरण $(\mathbf{r}-\mathbf{a}).\mathbf{n}=0$ या $\mathbf{r}.\mathbf{n}=\mathbf{a}.\mathbf{n}$

अर्थात् $\mathbf{r}.(-2\mathbf{i}+7\mathbf{j}+13\mathbf{k})=(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}).(-2\mathbf{i}+7\mathbf{j}+13\mathbf{k})$

या $\mathbf{r}.(2\mathbf{i}-7\mathbf{j}-13\mathbf{k})=1$ होगा।

22. (a) अभीष्ट समतल एक बिन्दु जिसका स्थिति सदिश $\mathbf{a}_1$ है, से गुजरता है व सदिश $\mathbf{a}_1$ तथा $\mathbf{a}_2$ के समान्तर है। यदि समतल पर किसी बिन्दु का स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ है, तो $\mathbf{r}-\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ समतलीय होंगे।

$\therefore\ (\mathbf{r}-\mathbf{a}_1).(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)=0$

$\Rightarrow [\mathbf{r}\ \mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]=[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]\Rightarrow[\mathbf{r}\,\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2]=0$

अतः, अभीष्ट समतल $[\mathbf{r}\ \mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]=0$ है।

23. (b) दी गयी रेखायें $\mathbf{r}=(\mathbf{i}+\mathbf{j})+\lambda(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})$ व $\mathbf{r}=(\mathbf{i}+\mathbf{j})+\mu(-\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})$, $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$ से गुजरती हैं तथा क्रमशः सदिशों $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ व $\mathbf{c}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ के समान्तर हैं। अतः इनको सम्मिलित करने वाला समतल $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$ से गुजरता है,

व $\mathbf{n}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(-\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})=-3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ के लम्बवत् है।

$\therefore$ अभीष्ट समतल का समीकरण है,

$(\mathbf{r}-\mathbf{a}).\mathbf{n}=0\Rightarrow\mathbf{r}.\mathbf{n}=\mathbf{a}.\mathbf{n}\Rightarrow\mathbf{r}.(\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})=0$.

24. (c) हमें ज्ञात है कि $\mathbf{r}=(1+\lambda-\mu)\mathbf{i}+(2-\lambda)\mathbf{j}+(3-2\lambda+2\mu)\mathbf{k}$

$\Rightarrow$ $\mathbf{r}=(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})+\lambda(\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k})+\mu(-\mathbf{i}+2\mathbf{k})$, जो कि $\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ से होकर गुजरने वाले व सदिश $b=\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ व $\mathbf{c}=-\mathbf{i}+2\mathbf{k}$ के समान्तर समतल का समीकरण है, अतः यह सदिश $\mathbf{n}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=-2\mathbf{i}-\mathbf{k}$ के लम्बवत् है।

अतः इसका सदिश समीकरण हैं, $(\mathbf{r}-\mathbf{a}).\mathbf{n}=0$

$\Rightarrow\mathbf{r}.\mathbf{n}=\mathbf{a}.\mathbf{n}\Rightarrow\mathbf{r}.(-2\mathbf{i}-\mathbf{k})=-2-3\Rightarrow\mathbf{r}.(2\mathbf{i}+\mathbf{k})=5$

अतः कार्तीय समीकरण है, $(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}).(2\mathbf{i}+\mathbf{k})=5$ या $2x+z=5$.

25. (a) समतल का सदिश समीकरण जो बिन्दुओं $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ से गुजरता है, $\mathbf{r}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})=[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$ है।

अतः मूलबिन्दु से इस समतल पर डाला गया लम्ब

$=\dfrac{[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}|}$.

26. (c) दिया गया समतल $\mathbf{a}$ से गुजरता है व सदिशों $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ व $\mathbf{c}$ के समान्तर है। अतः यह $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times\mathbf{c}$ पर अभिलम्ब है।

$\therefore$ इसका समीकरण $(\mathbf{r}-\mathbf{a}).((\mathbf{b}-\mathbf{a})\times\mathbf{c})=0$ या

$\mathbf{r}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})=[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$ है।

अतः मूलबिन्दु से इस समतल पर डाला गया लम्ब

$=\dfrac{[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]}{|\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}|}$ है।

27. (b) बिन्दुओं $A(\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k})$ व $B(3\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ से जाने वाली रेखा का समीकरण $\mathbf{r}=(\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k})+\lambda(3\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ है। इस रेखा पर कोई बिन्दु P जो कि चर है, का स्थिति सदिश $(\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k})+\lambda(3\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ है।

$\therefore$ $\overrightarrow{AP}=\lambda(3\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\Rightarrow|\overrightarrow{AP}|=\lambda\sqrt{11}$

यदि $\lambda\sqrt{11}=3\sqrt{11}$, अर्थात् $\lambda=3$ तब बिन्दु P का स्थिति सदिश $10\mathbf{i}+2\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ है।

यदि $\lambda\sqrt{11}=-3\sqrt{11}$, अर्थात् $\lambda=-3$ तब बिन्दु P का स्थिति सदिश $-8\mathbf{i}-4\mathbf{j}-\mathbf{k}$ है।

28. (d) बिन्दुओं $6\mathbf{a}-4\mathbf{b}+4\mathbf{c}$ व $-4\mathbf{c}$ से होकर जाने वाली तथा बिन्दुओं $-\mathbf{a}-2\mathbf{b}-3\mathbf{c}$ व $\mathbf{a}+2\mathbf{b}-5\mathbf{c}$ से होकर जाने वाली रेखाओं के समीकरण क्रमशः हैं,

$\mathbf{r}=6\mathbf{a}-4\mathbf{b}+4\mathbf{c}+m(-6\mathbf{a}-4\mathbf{b}-8\mathbf{c})$ .....(i)

व $\mathbf{r}=-\mathbf{a}-2\mathbf{b}-3\mathbf{c}+n(2\mathbf{a}+4\mathbf{b}-2\mathbf{c})$ .....(ii)

प्रतिच्छेद बिन्दु के लिये, समीकरण (i) व (ii) में $\mathbf{r}$ के समान मान होने चाहिए। अतः (i) व (ii) में सदिशों $\mathbf{a},\mathbf{b}$ व $\mathbf{c}$ के गुणांकों की तुलना करने पर; $6m+2n=7$, $2m-2n=1$ व $8m-2n=7$. प्रथम दो समीकरणों को हल करने पर, $m=1$, $n=\dfrac{1}{2}$. m व n के यह मान तृतीय समीकरण को भी संतुष्ट करते हैं। अतः रेखायें प्रतिच्छेद करती हैं। m का मान (i) में रखने पर हमें प्रतिच्छेद बिन्दु का स्थिति सदिश $-4\mathbf{c}$ प्राप्त होता है।

29. (d) सूत्र $\sin\theta=\dfrac{\mathbf{n}.\mathbf{b}}{|\mathbf{n}||\mathbf{b}|}$ के प्रयोग से ज्ञात करते हैं।

30. (d) अभीष्ट रेखा बिन्दु $\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ से गुजरती है तथा रेखाओं

$\mathbf{r}=(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})+\lambda(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

व $\mathbf{r}=(2\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\mathbf{k})+\mu(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ के लम्बवत् है, अतः यह सदिश $\mathbf{b}=(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})=(\mathbf{i}-5\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ के समान्तर होगी।

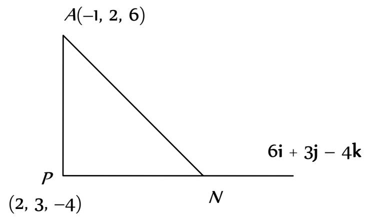
अतः अभीष्ट रेखा का समीकरण है,

$\mathbf{r}=(\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k})+\lambda'(\mathbf{i}-5\mathbf{j}+3\mathbf{k})$

$\Rightarrow\mathbf{r}=(\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k})+\lambda(-\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k})$, जहाँ $\lambda=-\lambda'$.

31. (a) हमें ज्ञात है, कि $\overrightarrow{AP}=-3\mathbf{i}-\mathbf{j}+10\mathbf{k}$

$\therefore$ $|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{9+1+100}=\sqrt{110}$



$PN=$ $\overrightarrow{AP}$ का $6\mathbf{i}+3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ पर प्रक्षेप

$=\left|\dfrac{\overrightarrow{AP}.(6\mathbf{i}+3\mathbf{j}-4\mathbf{k})}{|6\mathbf{i}+3\mathbf{j}-4\mathbf{k}|}\right|=\left|\dfrac{-18-3-40}{\sqrt{61}}\right|=\sqrt{61}$

$\therefore$ $AN=\sqrt{AP^2-PN^2}=\sqrt{110-61}=7$.

32. (b) बिन्दुओं $\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ व $-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ को मिलाने वाली रेखा का समीकरण है, $\mathbf{r}=(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})+\lambda(-\mathbf{i}+2\mathbf{k})$ .....(i)

तथा मूलबिन्दु, 4j व $2\mathbf{i}+\mathbf{k}$ से होकर जाने वाले समतल का सदिश समीकरण है, $\mathbf{r}.(4\mathbf{i}-8\mathbf{k})=0$ .....(ii)

($\mathbf{r}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})=[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$ के प्रयोग से)

समीकरण (i) पर किसी बिन्दु का स्थिति सदिश $(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})+\lambda(-\mathbf{i}+2\mathbf{k})$ है।

यदि यह (ii) पर स्थित है, तब

$((\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})+\lambda(-\mathbf{i}+2\mathbf{k})).(4\mathbf{i}-8\mathbf{k})=0$

$\Rightarrow -4-20\lambda=0\Rightarrow\lambda=-\dfrac{1}{5}$

λ का मान $(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})+\lambda(-\mathbf{i}+2\mathbf{k})$ में रखने पर अभीष्ट बिन्दु के स्थिति सदिश $\dfrac{1}{5}(6\mathbf{i}-10\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ प्राप्त होंगे।

33. (b) दोनों समतल मूलबिन्दु के विपरीत ओर हैं। अब यदि p_1 व p_2 क्रमशः मूलबिन्दु से समतलों $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k})+5=0$ व $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k})-8=0$ पर डाले गये लम्ब की लंबाई हैं, तब अभीष्ट दूरी $=p_1+p_2=\dfrac{5}{3}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{13}{3}$ इकाई.

34. (a) दी गयी रेखा पर किसी बिन्दु का स्थिति सदिश $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\lambda(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k})$ या $(2\lambda+1)\mathbf{i}+(\lambda+1)\mathbf{j}+4\lambda\mathbf{k}$ है जो कि $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})=3$ पर स्थित है।

अतः, समतल $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})=3$ दी गयी रेखा को सम्मिलित करता है।

35. (c) चूँकि समीकरण $|\mathbf{r}|^2-2(\mathbf{r}.\mathbf{a})+\lambda=0$, $\sqrt{|\mathbf{a}|^2-\lambda}$ त्रिज्या के गोले को प्रदर्शित करता है।

अतः $|\mathbf{r}|^2-\mathbf{r}.(2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k})-10=0$, एक गोले को प्रदर्शित करता है, जिसकी त्रिज्या $=\sqrt{|\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}|^2+10}$ $=\sqrt{6+10}=4$ है।

36. (d) यह स्पष्ट है।

37. (c) दी गयी रेखायें $\mathbf{r}=\mathbf{a}_1+\lambda\mathbf{b}_1, \mathbf{r}=\mathbf{a}_2+\mu\mathbf{b}_2$ हैं,

जहाँ $\mathbf{a}_1=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k},\ \mathbf{b}_1=\mathbf{i}$

$\mathbf{a}_2=\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k},\ \mathbf{b}_2=\mathbf{j}$

$|\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2|=|\mathbf{i}\times\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=1$

अब, $[(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1)\ \mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2]=(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1).(\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2)$

$=(-2\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k})(\mathbf{k})=4$

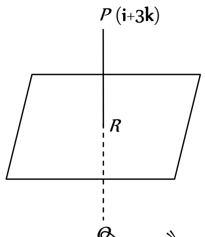
$\therefore$ न्यूनतम दूरी $=\dfrac{[(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1)(\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2)]}{|\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2|}=\dfrac{4}{1}=4$.

38. (c) यह स्पष्ट है।

39. (d) अभीष्ट दूरी $=\left|\dfrac{d-\mathbf{a}.\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right|=\left|\dfrac{5-(2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}).(\mathbf{i}+5\mathbf{j}+\mathbf{k})}{\sqrt{1+25+1}}\right|$

$=\left|\dfrac{5-(2-10+3)}{\sqrt{27}}\right|=\dfrac{10}{3\sqrt{3}}$.

40. (c) माना समतल $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=1$ में बिन्दु $P(\mathbf{i}+3\mathbf{k})$ का प्रतिबिम्ब Q है, तब PQ समतल का अभिलम्ब होगा। चूँकि PQ, P से गुजरता है व दिये गये समतल का अभिलम्ब है अतः PQ का समीकरण $\mathbf{r}=(\mathbf{i}+3\mathbf{k})+\lambda(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ होगा।



चूँकि Q, रेखा PQ पर स्थित है अतः माना Q का स्थिति सदिश $(\mathbf{i}+3\mathbf{k})+\lambda(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\Rightarrow(1+\lambda)\mathbf{i}+\lambda\mathbf{j}+(3+\lambda)\mathbf{k}$ है।

चूँकि R, PQ का मध्य बिन्दु है। अतः R का स्थिति सदिश $=\dfrac{(1+\lambda)\mathbf{i}+\lambda\mathbf{j}+(3+\lambda)\mathbf{k}+\mathbf{i}+3\mathbf{k}}{2}$

$=\left(\dfrac{\lambda+2}{2}\right)\mathbf{i}+\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)\mathbf{j}+\left(\dfrac{6+\lambda}{2}\right)\mathbf{k}$

$=\left(\dfrac{\lambda}{2}+1\right)\mathbf{i}+\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)\mathbf{j}+\left(3+\dfrac{\lambda}{2}\right)\mathbf{k}$

चूँकि R, समतल $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=1$ पर स्थित है।

अतः $\left[\left(\dfrac{\lambda}{2}+1\right)\mathbf{i}+\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)\mathbf{j}+\left(3+\dfrac{\lambda}{2}\right)\mathbf{k}\right].[\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}]=1$

$\Rightarrow\left[\dfrac{\lambda}{2}+1+\dfrac{\lambda}{2}+3+\dfrac{\lambda}{2}\right]=1\Rightarrow\lambda=-2$

$\therefore Q$ का स्थिति सदिश

$=(\mathbf{i}+3\mathbf{k})-2(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=-\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

41. (a) माना समतल का समीकरण है,

$a(x+1)+b(y+2)+c(z-0)=0$ .....(i)

चूँकि यह (2, 3, 5) से गुजरता है

अतः, $3a+5b+5c=0$ .....(ii)

साथ ही, $2a+5b-c=0$ .....(iii)

$\therefore \dfrac{a}{-5-25}=\dfrac{b}{10+3}=\dfrac{c}{15-10}$

$\therefore \dfrac{a}{-30}=\dfrac{b}{13}=\dfrac{c}{5}$

अतः, समतल का समीकरण है, $-30x+13y+5z=4$

या $\mathbf{r}.(-30\mathbf{i}+13\mathbf{j}+5\mathbf{k})=4$.

42. (d) दी गयी रेखायें $\mathbf{r}_1=\mathbf{a}_1+\lambda\mathbf{b}_1,\ \mathbf{r}_2=\mathbf{a}_2+\mu\mathbf{b}_2$ हैं,

जहाँ $\mathbf{a}_1=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k};\ \mathbf{b}_1=\mathbf{i}-4\mathbf{j}+7\mathbf{k}$

$\mathbf{a}_2=\mathbf{i}-\mathbf{j}-10\mathbf{k};\ \mathbf{b}_2=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+8\mathbf{k}$

$|\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2|=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&-4&7\\2&-3&8\end{vmatrix}=-11\mathbf{i}+6\mathbf{j}+5\mathbf{k}$

अब $[(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1)\ \mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2]=(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1).(\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2)$

$=(-3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-9\mathbf{k})(-11\mathbf{i}+6\mathbf{j}+5\mathbf{k})=0$

$\therefore$ न्यूनतम दूरी $=\dfrac{[(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1)\ \mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2]}{|\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2|}=0$.

43. (b) दी गयी रेखा पर बिन्दु $(1+t,-1+t,1-t)$ है। समतल का समीकरण $x+y+z=5$ है।

चूँकि बिन्दु, समतल को संतुष्ट करता है

$\therefore (1+t)(-1+t)+(1-t)=5\Rightarrow 1+t=5\Rightarrow t=4$

$\therefore$ बिन्दु $(5, 3, -3)$ है।

$\therefore$ बिन्दु का स्थिति सदिश $5\mathbf{i}+3\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ है।

44. (a) ΔPQR का केन्द्रक $2\mathbf{i}-5\mathbf{j}+8\mathbf{k}$ है।

x, y व **z** अक्षों पर अन्तःखण्ड क्रमशः $6\mathbf{i}, -15\mathbf{j}$ व $24\mathbf{k}$ हैं।

अतः समतल का समीकरण है,

$[\mathbf{r}-15\mathbf{j}\ 24\mathbf{k}]+[\mathbf{r}\ 24\mathbf{k}\ 6\mathbf{i}]+[\mathbf{r}\ 6\mathbf{i}\ -15\mathbf{j}]=[6\mathbf{i}\ -15\mathbf{j}\ 24\mathbf{k}]$

$\therefore -\mathbf{r}.(20\mathbf{i}-8\mathbf{j}+5\mathbf{k})=-120$

$\therefore \mathbf{r}.(20\mathbf{i}-8\mathbf{j}+5\mathbf{k})=120$.

45. (b) समतलों $\mathbf{r}.(\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k})=1$ व $\mathbf{r}.(2\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k})=2$ की प्रतिच्छेदी रेखा, प्रत्येक अभिलम्ब सदिश $\mathbf{n}_1=\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ व $\mathbf{n}_2=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ के लम्बवत् है। अतः यह सदिश $\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$ के समान्तर है। $\because\ \mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=(\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(2\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k})$

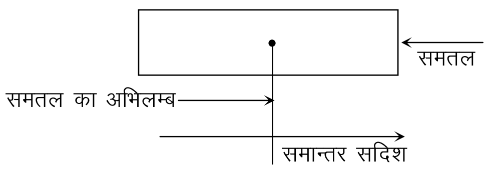
$=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&-3&1\\2&5&-3\end{vmatrix}=4\mathbf{i}+5\mathbf{j}+11\mathbf{k}$

$\therefore$ यह $4\mathbf{i}+5\mathbf{j}+11\mathbf{k}$ के समान्तर है।

46. (a) चूँकि समतल दिये गये सदिश के समान्तर है $\Rightarrow$ समतल का अभिलम्ब, दिये गये सदिशों के लम्बवत् होगा। बिन्दु (2, –1,3) से समतल गुजरता है।

माना A, B, C समतल के अभिलम्ब के दिक् अनुपात हैं।

$\therefore$ समतल का समीकरण है, $A(x-2)+B(y+1)+C(z-3)=0$ .....(i)



अब, समतल $A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ का अभिलम्ब दिये गये सदिशों $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+0\mathbf{j}-\mathbf{k}$ व $\mathbf{b}=-3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ के लम्बवत् है।

$\therefore \quad 3A+0B-C=0$ .....(i)

$-3A+2B+2C=0$ .....(ii)

(i) व (ii) को हल करने पर, $\frac{A}{2}=\frac{B}{-3}=\frac{C}{6}$

$\therefore$ अभीष्ट समतल का समीकरण है,

$2(x-2)-3(y+1)+6(z-3)=0$,

अर्थात् $2x-3y+6z-25=0$.

47. (d) अभीष्ट अनुपात $=-\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=\frac{-9}{1}$, अर्थात् $-9:1$.

Critical Thinking Questions

1. (c) तीन सदिश $\mathbf{i}+\mathbf{j}, \mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{k}+\mathbf{i}$ एक बिन्दु पर मिलते हैं व क्रमशः 1, 2, 3 डाइन के बल इस दिशा में कार्यरत् हैं।

अतः परिणामी बल

$=\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}+\frac{2(\mathbf{j}+\mathbf{k})}{\sqrt{2}}+\frac{3(\mathbf{k}+\mathbf{i})}{\sqrt{2}}=\frac{4\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ परिमाण $=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=5$ डाइन.

2. (b) स्पष्टतः $\mathbf{b}\perp\mathbf{c}$, $\therefore$ $\mathbf{b}.\mathbf{c}=0$

अब, $\mathbf{d}=\mathbf{c}-\mathbf{b} \Rightarrow |\mathbf{d}|^2=|\mathbf{c}-\mathbf{b}|^2$

$=|\mathbf{c}|^2+|\mathbf{b}|^2-2\mathbf{b}.\mathbf{c}=16+16-0$

$\Rightarrow |\mathbf{d}|=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$, पश्चिम की ओर।

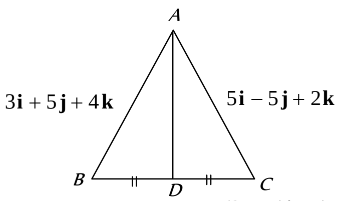
3. (b) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2+|\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2+|\mathbf{c}-\mathbf{a}|^2$

$=2(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2)-2(\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}.\mathbf{c}+\mathbf{c}.\mathbf{a})$

$=2\times 3-2(\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}.\mathbf{c}+\mathbf{c}.\mathbf{a})$

$=6-\{(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2-\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2-\mathbf{c}^2\}=9-|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2\leq 9$.

4. (c)



$\overrightarrow{AD}$ का स्थिति सदिश $=\frac{(3+5)\mathbf{i}+(5-5)\mathbf{j}+(4+2)\mathbf{k}}{2}$

$\overrightarrow{AD}=\frac{8\mathbf{i}+6\mathbf{k}}{2}=4\mathbf{i}+3\mathbf{k}$

$\therefore$ माध्यिका की लम्बाई $=|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{16+9}=5$ इकाई.

5. (b) यहाँ, $3\mathbf{p}=(3x+12y)\mathbf{a}+(6x+3y+3)\mathbf{b}$

$2\mathbf{q}=(2y-4x+4)\mathbf{a}+(4x-6y-2)\mathbf{b}$

तुलना करने पर, $3x+12y=2y-4x+4$

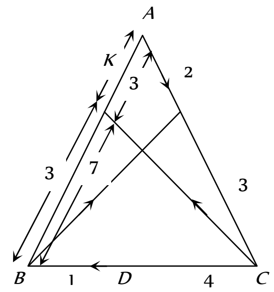
$\Rightarrow \quad 7x+10y=4$ .....(i)

तथा $2x+9y=-5$ .....(ii)

हल करने पर, $x=2,-1$.

6. (b) माना $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$

अतः, $\overrightarrow{AD}=\frac{4\mathbf{a}+\mathbf{b}}{5}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{2\mathbf{b}}{5}$, $\overrightarrow{AF}=\frac{3\mathbf{a}}{10}$ व $\overrightarrow{AK}=\frac{\mathbf{a}}{4}$



$\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{CK}}=\frac{\frac{\mathbf{b}+4\mathbf{a}}{5}+\frac{2\mathbf{b}-5\mathbf{a}}{5}+\frac{3\mathbf{a}-10\mathbf{b}}{10}}{\frac{\mathbf{a}-4\mathbf{b}}{4}}$

$=\frac{6\mathbf{b}-2\mathbf{a}+3\mathbf{a}-10\mathbf{b}}{10(\mathbf{a}-4\mathbf{b})}\times 4=\frac{2}{5}$.

7. (e) चूँकि विकल्पों में दिया गया कोई भी सदिश, दिये गये सदिशों के साथ समरेखीय नहीं है। अतः सभी सदिश त्रिभुज का तीसरा शीर्ष हो सकते हैं।

8. (b) माना $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

$|\mathbf{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=50$, $\mathbf{b}=6\mathbf{i}-8\mathbf{j}-\frac{15}{2}\mathbf{k}$

$\because$ $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ समरेखीय हैं

$\therefore \mathbf{a}=k\mathbf{b}$ और $\frac{x}{6}=\frac{y}{-8}=\frac{2z}{-15}=k$, (अचर)

$\Rightarrow \quad 2500=k^2\left[\frac{144+256+225}{4}\right]$

$\Rightarrow \quad k=\pm\sqrt{\frac{2500\times 4}{625}}=\pm 4$

$\because$ z-अक्ष की दिशा के साथ $\mathbf{a}$ एक न्यूनकोण बनाता है। अतः इसका z-घटक धनात्मक होना चाहिए। यह सम्भव है केवल जब $k=-4$.

$\therefore$ $\mathbf{a}=k\left[6\mathbf{i}-8\mathbf{j}-\frac{15}{2}\mathbf{k}\right]$, $[\because \mathbf{a}=k\mathbf{b}]$

अतः, $\mathbf{a}=-24\mathbf{i}+32\mathbf{j}+30\mathbf{k}$.

9. (d) $|\mathbf{c}|=1$, अतः $|\mathbf{c}|^2=1$ या $c_1^2+c_2^2+c_3^2=1$ .....(i)

पुनः चूँकि $\mathbf{c}\perp\mathbf{a}$ व $\mathbf{c}\perp\mathbf{b}$, अतः $\mathbf{c}.\mathbf{a}=0$

$\Rightarrow a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0$ .....(ii)

व $\mathbf{c}.\mathbf{b}=0 \Rightarrow b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0$ .....(iii)

एवं $\mathbf{a}$ व $\mathbf{b}$ के बीच कोण $\frac{\pi}{6}$ है, अतः

$\mathbf{a}.\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

$\Rightarrow |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\frac{\pi}{6}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

$\Rightarrow \frac{3}{4}(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$ .....(iv)

अब $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2+a_3^2 & a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 & 0 \\ b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3 & b_1^2+b_2^2+b_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$,

{(i), (ii) व (iii)का उपयोग करने पर}

$=\frac{1}{4}(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$,

{(iv) का उपयोग करने पर}

$=\frac{(\Sigma a_1^2)(\Sigma b_1^2)}{4}$,

जहाँ $\Sigma a_1^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$ व $\Sigma b_1^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2$.

10. (b) $\mathbf{c}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\Rightarrow \mathbf{c}.\mathbf{a}=\alpha$ व $\mathbf{c}.\mathbf{b}=\beta$

$\Rightarrow \alpha=\beta=\cos\theta$ एवं $1=\mathbf{c}.\mathbf{c}$,

$\therefore [\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma(\mathbf{a}\times\mathbf{b})].[(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b})+\gamma(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]=1$

$\Rightarrow 2\alpha^2+\gamma^2(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2=1$, $\{\because \alpha=\beta\}$

$\Rightarrow 2\alpha^2+\gamma^2[\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2-(\mathbf{a}.\mathbf{b})^2]=1\Rightarrow 2\alpha^2+\gamma^2=1$

इसलिए $\gamma^2=1-2\alpha^2=1-2\cos^2\theta=-\cos 2\theta$.

11. (b) चूँकि $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ व $\mathbf{a}$ एवं $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ व $\mathbf{b}$ के बीच के कोण बराबर हैं, अतः $\frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b}).\mathbf{a}}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}||\mathbf{a}|}=\frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b}).\mathbf{b}}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}||\mathbf{b}|}$

$\Rightarrow \frac{|\mathbf{a}|^2}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}||\mathbf{a}|}+\frac{\mathbf{b}.\mathbf{a}}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}||\mathbf{a}|}=\frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}||\mathbf{b}|}+\frac{|\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}||\mathbf{b}|}$

$\Rightarrow \frac{|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|}\left(1-\frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}\right)=0$

अतः $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$ या $\mathbf{a}$ व $\mathbf{b}$ के बीच कोण 0^o है।

12. (d) यहाँ, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=\mathbf{a}-2\mathbf{b}-\mathbf{b}=\mathbf{a}-3\mathbf{b}$

व $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=2\mathbf{a}+3\mathbf{b}-\mathbf{a}=\mathbf{a}+3\mathbf{b}$.

माना θ, $\overrightarrow{BD}$ व $\overrightarrow{AC}$ के बीच कोण है, अतः

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{|\mathbf{a}|^2-9|\mathbf{b}|^2}{|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{AC}|}$$

$$=\frac{9|\mathbf{b}|^2-9|\mathbf{b}|^2}{|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{AC}|},\quad (\because |\mathbf{a}|=3|\mathbf{b}|)$$

$\Rightarrow \cos\theta=0°\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$.

13. (c) $\vec{A}+t\vec{B}=(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})+t(-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})$

$=\mathbf{i}(1-t)+\mathbf{j}(2+2t)+\mathbf{k}(3+t)$

परन्तु यह $\vec{C}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}$, के लम्बवत् है, अतः

$\vec{C}.(\vec{A}+t\vec{B})=0\Rightarrow 3(1-t)+2+2t=0\Rightarrow t=5$.

14. (d) माना $\mathbf{r}=\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}$ व $\mathbf{c}=\pm(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})$. चूँकि $\mathbf{c}$ व $\mathbf{b}$ परस्पर लम्बवत् हैं, अतः $4x+3y=0$

$\Rightarrow \mathbf{c}=\pm x\left(\mathbf{i}-\frac{4}{3}\mathbf{j}\right)$, $\{\because y=-\frac{4}{3}x\}$

अब, $\mathbf{r}$ का $\mathbf{b}$ पर प्रक्षेप $=\frac{\mathbf{r}.\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}=1$

$\Rightarrow \frac{(\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}).\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}=\frac{\lambda\mathbf{b}.\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}=1\Rightarrow\lambda=\frac{1}{5}$

अब, $\mathbf{r}$ का $\mathbf{c}$ पर प्रक्षेप $=\frac{\mathbf{r}.\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}=2$

या $\mu x=\frac{6}{5}\Rightarrow \mathbf{r}=\frac{1}{5}(4\mathbf{i}+3\mathbf{j})+\frac{6}{5}\left(\mathbf{i}-\frac{4}{3}\mathbf{j}\right)=2\mathbf{i}-\mathbf{j}$

या $\mathbf{r}=\frac{1}{5}(4\mathbf{i}+3\mathbf{j})-\frac{6}{5}\left(\mathbf{i}-\frac{4}{3}\mathbf{j}\right)=-\frac{2}{5}\mathbf{i}+\frac{11}{5}\mathbf{j}$.

15. (a,c) सदिश $\mathbf{b}$ व $\mathbf{c}$ के तल में कोई सदिश $\mathbf{r}=\mathbf{b}+t\mathbf{c}$ या $\mathbf{r}=(1+t)\mathbf{i}+(2+t)\mathbf{j}-(1+2t)\mathbf{k}$ है ......(i)

अब, $\mathbf{a}$ पर $\mathbf{r}$ का प्रक्षेप $=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)}\Rightarrow\frac{\mathbf{r}.\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)}$

या $\frac{2(1+t)-(2+t)-(1+2t)}{\sqrt{6}}=\pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)}$

$\therefore -t-1=\pm 2\Rightarrow t=-3, 1$

(i) में रखने पर,

$\therefore \mathbf{r}=-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ या $\mathbf{r}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-3\mathbf{k}$.

16. (b) यदि x, y मूल घटक एवं X, Y नये घटक हों तथा α घूर्णन कोण है, तो $x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha$ व $y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha$

$\therefore 2p=(p+1)\cos\alpha-\sin\alpha$ व $1=(p+1)\sin\alpha+\cos\alpha$

वर्ग करके जोड़ने पर, $4p^2+1=(p+1)^2+1$

$\Rightarrow p+1=\pm 2p\Rightarrow p=1$ या $-\frac{1}{3}$.

17. (b) $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ व $\mathbf{v}=6\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

माना सदिश $\mathbf{c}=c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$, $\mathbf{u}$ तथा $\mathbf{v}$ दोनों पर लम्ब है, तो $\mathbf{c}.\mathbf{u}=0\Rightarrow 2c_1+2c_2-c_3=0$ .....(i)

व $\mathbf{c}.\mathbf{v}=0\Rightarrow 6c_1-3c_2+2c_3=0$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) को वज्रगुणन विधि से हल करने पर,

$\frac{c_1}{4-3}=\frac{c_2}{-6-4}=\frac{c_3}{-6-12}=\lambda$, (माना)

$\Rightarrow \frac{c_1}{1}=\frac{c_2}{-10}=\frac{c_3}{-18}=\lambda$

$\Rightarrow c_1=\lambda,\ c_2=-10\lambda$ व $c_3=-18\lambda$

अतः $\mathbf{c}=\lambda(\mathbf{i}-10\mathbf{j}-18\mathbf{k})$

$|\mathbf{c}|=\lambda\sqrt{1+100+324}=\lambda\sqrt{425}$

अतः, अभीष्ट इकाई सदिश $=\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}$

$=\frac{\lambda(\mathbf{i}-10\,\mathbf{j}-18\,\mathbf{k})}{\lambda\sqrt{425}}=\frac{1}{\sqrt{425}}(\mathbf{i}-10\,\mathbf{j}-18\,\mathbf{k})$

$=\frac{1}{5\sqrt{17}}(\mathbf{i}-10\,\mathbf{j}-18\,\mathbf{k})=\frac{1}{\sqrt{17}}\left(\frac{1}{5}\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\frac{18}{5}\mathbf{k}\right).$

वैकल्पिक : अभीष्ट सदिश $=\frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|}=\frac{\mathbf{i}-10\,\mathbf{j}-18\,\mathbf{k}}{\sqrt{425}}.$

18. (d) $\mathbf{d}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}\times\mathbf{b}\Rightarrow\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x&y&z\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\4&-3&7\\1&1&1\end{vmatrix}$,

जहाँ $\mathbf{d}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ (माना)

हल करने पर, $x=-1,\ y=-8,\ z=2$

अतः $\mathbf{d}=-\mathbf{i}-8\,\mathbf{j}+2\mathbf{k}.$

19. (b) दिया है, $\mathbf{a}\times\mathbf{r}=\mathbf{b}+\lambda\,\mathbf{a}\Rightarrow(\mathbf{a}\times\mathbf{r}).\mathbf{a}=\mathbf{b}.\mathbf{a}+\lambda\,\mathbf{a}.\mathbf{a}$

$\Rightarrow 0=\mathbf{b}.\mathbf{a}+\lambda|\mathbf{a}|^2\Rightarrow\lambda=-\frac{\mathbf{b}.\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}=\frac{5}{6}$

एवं $(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\lambda\,\mathbf{a}\times\mathbf{a}\Rightarrow\mathbf{r}=\frac{7}{6}\mathbf{i}+\frac{2}{3}\mathbf{j}.$

20. (a) **a**, **b** के समतल P_1 के लम्बवत् सदिश $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ है।

c, **d** के समतल P_2 के लम्बवत् सदिश $\mathbf{c}\times\mathbf{d}$ है।

$\Rightarrow(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=0\Rightarrow(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\parallel(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$

$\Rightarrow$ समतलों के बीच कोण $0°$ है।

21. (a) माना $\mathbf{b}=b_1\,\mathbf{i}+b_2\,\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$

अब, $\mathbf{j}-\mathbf{k}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&1&1\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$

$\Rightarrow b_3-b_2=0, b_1-b_3=1, b_2-b_1=-1$

$\Rightarrow b_3=b_2, b_1=b_2+1$

अब, $\mathbf{a}.\mathbf{b}=1\Rightarrow b_1+b_2+b_3=1$

$\Rightarrow 3b_2+1=1\Rightarrow b_2=0\Rightarrow b_1=1, b_3=0.$

अतः $\mathbf{b}=\mathbf{i}.$

22. (c) दिया है, चतुर्भुज *ABCD* के शीर्षों के स्थिति सदिश क्रमशः **a**, **b**, **c** तथा **d** हैं।

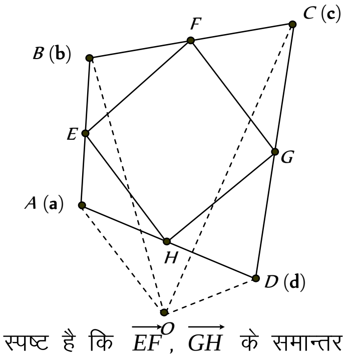
माना भुजाओं *AB, BC, CD* तथा *DA* के मध्य बिन्दु क्रमशः *E, F, G* व *H* हैं। इन बिन्दुओं के स्थिति सदिश क्रमशः

$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}),\quad\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}),$

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d}),\quad\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{d})$ होंगे।

तब $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}=\left(\frac{\mathbf{c}-\mathbf{a}}{2}\right)$

तथा $\overrightarrow{FG}=\frac{1}{2}(\mathbf{d}-\mathbf{b}),\overrightarrow{GH}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{c}),\overrightarrow{GH}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{d})$



यह स्पष्ट है कि $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$ के समान्तर है तथा $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{HE}$ के समान्तर है। अतः *EFGH* एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore\quad\overrightarrow{EF}\times\overrightarrow{FG}=\frac{1}{4}\{(\mathbf{c}-\mathbf{a})\times(\mathbf{d}-\mathbf{b})\}$

$=\frac{1}{4}(\mathbf{c}\times\mathbf{d}-\mathbf{c}\times\mathbf{b}-\mathbf{a}\times\mathbf{d}+\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

$=\frac{1}{4}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{d}+\mathbf{d}\times\mathbf{a})$

$\therefore$ समान्तर चतुर्भुज *EFGH* का क्षेत्रफल है,

$A=|\overrightarrow{EF}\times\overrightarrow{FG}|=\frac{1}{4}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{d}+\mathbf{d}\times\mathbf{a}|.$

23. (a) बल $\mathbf{F}=\overrightarrow{AB}=(3-1)\mathbf{i}+(-4-2)\mathbf{j}+(2+3)\mathbf{k}$

$=2\mathbf{i}-6\mathbf{j}+5\mathbf{k}$

M के सापेक्ष बल $\vec{F}$ का आघूर्ण $=\overrightarrow{MA}\times\vec{F}$

$\because\ \overrightarrow{MA}=(1+2)\mathbf{i}+(2-4)\mathbf{j}+(-3+6)\mathbf{k}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$

अतः $\overrightarrow{MA}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\3&-2&3\\2&-6&5\end{vmatrix}$

$=\mathbf{i}(-10+18)+\mathbf{j}(6-15)+\mathbf{k}(-18+4)=8\mathbf{i}-9\mathbf{j}-14\mathbf{k}.$

24. (d) चूँकि $\begin{vmatrix}a&1&1\\1&b&1\\1&1&c\end{vmatrix}=0$

$R_2\to R_2-R_1$ व $R_3\to R_3-R_1$ का प्रयोग करने पर,

$\begin{vmatrix}a&1&1\\1-a&b-1&0\\1-a&0&c-1\end{vmatrix}=0$

सारणिक का विस्तार करने पर,

$a(b-1)(c-1)-(1-a)(c-1)-(1-a)(b-1)=0$

अब, $(1-a)(1-b)(1-c)$ से भाग देने पर,

$\frac{a}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}=0$

$\Rightarrow\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}=\frac{1}{1-a}-\frac{a}{1-a}=1.$

25. (c) मानाा $\alpha\neq0$, तो $\alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\mathbf{c}+\beta(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).\mathbf{c}+\gamma(\mathbf{c}\times\mathbf{a}).\mathbf{c}=0$

$\Rightarrow\alpha[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]=0\Rightarrow[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]=0,\ \{\because\alpha\neq0\}$

अतः **a**, **b**, **c** समतलीय हैं।

26. (b) चतुष्फलक $ABCD$ का आयतन $= \frac{1}{6}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} . \overrightarrow{AD}|$, जहाँ $A(-1,1,1)$, $B(1,-1,1)$, $C(1,1,-1)$ व $D(0,0,0)$ हैं

$= \frac{1}{6}|(2\mathbf{i}-2\mathbf{j}) \times (2\mathbf{i}-2\mathbf{k}).(\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})|$

$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-4) = -\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ घन इकाई.

27. (c) माना $\mathbf{a} = \mathbf{i}-\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j}-\mathbf{k}$ व $\mathbf{c} = \mathbf{k}-\mathbf{i}$

माना $\hat{\mathbf{d}} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $|\hat{\mathbf{d}}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$

$\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ ......(i)

$\mathbf{a}.\hat{\mathbf{d}} = 0 \Rightarrow a_1 - a_2 = 0$ .....(ii)

$[\mathbf{b}\ \mathbf{c}\ \hat{\mathbf{d}}] = 0 \Rightarrow \mathbf{b}.(\mathbf{c} \times \hat{\mathbf{d}}) = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -1(-a_3 - a_1) - 1(-a_2)$

$\therefore a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow a_1 - a_2 + 0a_3 = 0$, {(ii) से}

$\therefore \frac{a_1}{0+1} = \frac{a_2}{1-0} = \frac{a_3}{-1-1} \Rightarrow \frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{1} = \frac{a_3}{-2} = \lambda$, (माना)

$\Rightarrow a_1 = \lambda$, $a_2 = \lambda$, $a_3 = -2\lambda$

$\therefore \lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2 = 1$, {(i)से}

$\Rightarrow 6\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$; $\therefore \hat{\mathbf{d}} = \pm\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}}{\sqrt{6}}$.

28. (c) $V = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^3 - a \Rightarrow \frac{dV}{da} = 3a^2 - 1$

$= 3\left(a + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(a - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}$ पर न्यूनतम है।

29. (a) माना $\mathbf{i}$, $\mathbf{b}$ की दिशा में तथा $\mathbf{j}$, $\mathbf{c}$ की दिशा में इकाई सदिश है। यहाँ $\mathbf{b} = \mathbf{i}$ व $\mathbf{c} = \mathbf{j}$

दिया है $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = |\mathbf{b}||\mathbf{c}|\sin\alpha\,\mathbf{k} = \sin\alpha\,\mathbf{k}$ जहाँ $\mathbf{k}$, $\mathbf{b}$ व $\mathbf{c}$ के लम्बवत् इकाई सदिश है।

$\Rightarrow |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \sin\alpha \Rightarrow \mathbf{k} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|}$

कोई सदिश $\mathbf{a}$ सदिशों $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ व $\mathbf{k}$ के रेखीय संयोजन के रूप में लिखा जा सकता है।

माना $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$

अब $\mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{a}.\mathbf{i} = a_1$, $\mathbf{a}.\mathbf{c} = \mathbf{a}.\mathbf{j} = a_2$

तथा $\mathbf{a}.\frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|} = \mathbf{a}.\mathbf{k} = a_3$

इस प्रकार, $(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{b} + (\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{c} + \frac{\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c})}{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

$= a_1\mathbf{b} + a_2\mathbf{c} + a_3\frac{(\mathbf{b} \times \mathbf{c})}{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = \mathbf{a}$.

30. (c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \left[(\mathbf{a}.\mathbf{c}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\mathbf{b} - \left[(\mathbf{a}.\mathbf{b}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\mathbf{c} = 0$

$\Rightarrow \mathbf{a}.\mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\mathbf{a}.\mathbf{b} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow |\mathbf{a}||\mathbf{c}|\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\phi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\phi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$, $\phi = \frac{3\pi}{4}$.

अतः $\mathbf{a}$ व $\mathbf{b}$ के बीच कोण $\frac{3\pi}{4}$ है।

31. (c) चूँकि $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

$= ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}).\mathbf{c})\mathbf{b} - ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}).\mathbf{b})\mathbf{c} = [\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]\mathbf{b}$

$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = ((\mathbf{b} \times \mathbf{c}).\mathbf{a})\mathbf{c} - ((\mathbf{b} \times \mathbf{c}).\mathbf{c})\mathbf{a} = [\mathbf{b}\ \mathbf{c}\ \mathbf{a}]\mathbf{c}$

$(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = ((\mathbf{c} \times \mathbf{a}).\mathbf{b})\mathbf{a} - ((\mathbf{c} \times \mathbf{a}).\mathbf{a})\mathbf{b} = [\mathbf{c}\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}]\mathbf{a}$

$\therefore [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})]$

$= [[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]\mathbf{a}\,[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]\mathbf{b}\,[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]\mathbf{c}] = [\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]^3[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}] = [\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]^4$.

32. (a,c) चूँकि $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ समतलीय हैं, अतः $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}] = 0$

दिया है, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \frac{1}{6}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$

$\Rightarrow [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).\mathbf{d}]\mathbf{c} - [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).\mathbf{c}]\mathbf{d} = \frac{1}{6}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$

$\Rightarrow [(|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin 30°)\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{d}]\mathbf{c} - 0 = \frac{1}{6}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$

$\Rightarrow \left[(1)(1)\left(\frac{1}{2}\right)\right][|\hat{\mathbf{n}}||\mathbf{d}|\cos\theta]\mathbf{c} = \frac{1}{6}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cos\theta(\mathbf{c}) = \frac{1}{6}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$,

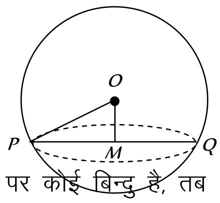
जहाँ $\hat{\mathbf{n}}$ और $\hat{\mathbf{d}}$ लम्बवत् इकाई सदिश हैं तथा $\hat{\mathbf{n}}$ और $\mathbf{d}$ के बीच का कोण 0 अथवा π हो सकता है।

जब $\theta = 0°$, $\mathbf{c} = \frac{1}{3}[\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}]$

जब $\theta = \pi$, $\mathbf{c} = \frac{1}{3}[-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}]$.

33. (d) गोला $|\mathbf{r}| = 5$ का केन्द्र मूल बिन्दु पर है, तथा त्रिज्या $= 5$ है। माना O से दिये गये समतल पर डाले लम्ब का पाद M है, तब OM = O से समतल पर डाले गये लम्ब की लम्बाई

$= \frac{|\overrightarrow{OM}.(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) - 3\sqrt{3}|}{|\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}|} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = 3$



माना P वृत्त पर कोई बिन्दु है, तब P, समतल तथा गोले दोनों पर स्थित होगा।

$\therefore$ OP = गोले की त्रिज्या = 5

ΔOPM में, $OP^2 = OM^2 + PM^2$

$\Rightarrow PM = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

34. (c) दिया है $\mathbf{x}$, सदिश $\mathbf{y}$ और $\mathbf{z}$ के समान्तर है।

$\therefore\ \mathbf{x}.(\mathbf{y}\times\mathbf{z})=0 \Rightarrow [\mathbf{x}\ \mathbf{y}\ \mathbf{z}]=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \alpha=\pm\sqrt{7}.$$

35. (a) अभीष्ट सदिश $\mathbf{c}=\lambda\left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}+\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right)$

अब, $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\frac{1}{9}(7\mathbf{i}-4\mathbf{j}-4\mathbf{k})$

व $\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}=\frac{1}{3}(-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k})$

$\Rightarrow \mathbf{c}=\lambda\left(\frac{1}{9}\mathbf{i}-\frac{7}{9}\mathbf{j}+\frac{2}{9}\mathbf{k}\right)$

$\Rightarrow |\mathbf{c}|^2=\lambda^2.\frac{54}{81}$

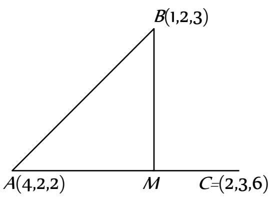
$\Rightarrow \lambda^2=225$ या $\lambda=\pm 15$.

इसलिए, $\mathbf{c}=\pm\frac{5}{3}(\mathbf{i}-7\mathbf{j}+2\mathbf{k})$.

36. (b) $BM^2=AB^2-AM^2$ .....(i)

$\overrightarrow{AB}=-3\mathbf{i}+0\mathbf{j}+\mathbf{k}$

$\overrightarrow{AB}^2=9+1=10$



$AM=$ $\overrightarrow{AB}$ का $\vec{C}=(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k})$ की दिशा में प्रक्षेप

$\therefore\ AM=\frac{\overrightarrow{AB}.\vec{C}}{|\vec{C}|}=\frac{(-3\mathbf{i}+0\mathbf{j}+\mathbf{k}).(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k})}{7}=0$

$\therefore\ BM^2=10-0=10$

$\Rightarrow BM=\sqrt{(10)}$, {(i)से}

37. (b,c) यहाँ $\mathbf{r}=\lambda_1\mathbf{r}_1+\lambda_2\mathbf{r}_2+\lambda_3\mathbf{r}_3$

$\Rightarrow 2\mathbf{a}-3\mathbf{b}+4\mathbf{c}=(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)\mathbf{a}$
$+(-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\mathbf{b}+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\mathbf{c}$

$\Rightarrow \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=2, -\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-3, \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=4$

($\because$ $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ असमतलीय हैं)

$\Rightarrow \lambda_1=\frac{7}{2},\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \lambda_1+\lambda_3=3$ व $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=4$.

38. (a) $\mathbf{c}$, $\mathbf{a},\mathbf{b}$ के साथ समतलीय है

$\therefore\ \mathbf{c}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}$

$\Rightarrow \mathbf{c}=x(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})+y(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})$

$\Rightarrow \mathbf{c}=(2x+y)\mathbf{i}+(x+2y)\mathbf{j}+(x-y)\mathbf{k}$

$\because\ \mathbf{a}.\mathbf{c}=0$

$\therefore\ 2(2x+y)+x+2y+x-y=0$

$\Rightarrow y=-2x$

$\mathbf{c}=-3x\mathbf{j}+3x\mathbf{k}=3x(-\mathbf{j}+\mathbf{k})$

$\because\ |\mathbf{c}|=1$

$\therefore\ 9x^2+9x^2=1$

$\Rightarrow x=\pm\frac{1}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \mathbf{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{j}+\mathbf{k})$.

39. (b) $|\mathbf{p}|=|\mathbf{q}|=|\mathbf{r}|=c$, (माना)

और $\mathbf{p}.\mathbf{q}=0=\mathbf{p}.\mathbf{r}=\mathbf{q}.\mathbf{r}$

$\mathbf{p}\times|(\mathbf{x}-\mathbf{q})\times\mathbf{p}|+\mathbf{q}\times|(\mathbf{x}-\mathbf{r})\times\mathbf{q}|+\mathbf{r}\times|(\mathbf{x}-\mathbf{p})\times\mathbf{r}|=0$

$\Rightarrow (\mathbf{p}.\mathbf{p})(\mathbf{x}-\mathbf{q})-\{\mathbf{p}.(\mathbf{x}-\mathbf{q})\}\mathbf{p}+.........=0$

$\Rightarrow c^2(\mathbf{x}-\mathbf{q}+\mathbf{x}-\mathbf{r}+\mathbf{x}-\mathbf{p})-(\mathbf{p}.\mathbf{x})\mathbf{p}-(\mathbf{q}.\mathbf{x})\mathbf{q}-(\mathbf{r}.\mathbf{x})\mathbf{r}=0$

$\Rightarrow c^2\{3\mathbf{x}-(\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r})\}-[(\mathbf{p}.\mathbf{x})\mathbf{p}+(\mathbf{q}.\mathbf{x})\mathbf{q}+(\mathbf{r}.\mathbf{x})\mathbf{r}]=0$,

जो कि $\mathbf{x}=\frac{1}{2}(\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r})$ से संतुष्ट है।

40. (a) हमें दिया है, $\mathbf{r}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ और $\mathbf{r}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}$

जोड़ने पर, $\mathbf{r}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})=0$ अर्थात् $\mathbf{r}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ के समान्तर है।

या $\mathbf{r}=\lambda(\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{i}-\mathbf{k})$

$\mathbf{r}=\lambda(3\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})$, $\lambda=1$ के लिए $\Rightarrow \mathbf{r}=(3\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})$.

सदिश बीजगणित

SET Self Evaluation Test -19

1. यदि सदिशों **a, b, c** के मापांक क्रमशः 3, 4, 5 हैं। **a** व $\mathbf{b}+\mathbf{c}$, **b** व $\mathbf{c}+\mathbf{a}$ तथा **c** व $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ परस्पर लम्बवत् हैं तो $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ का मापांक है [IIT 1981; Kerala (Engg.) 2005]
   (a) $\sqrt{12}$ (b) 12
   (c) $5\sqrt{2}$ (d) 50

2. किसी समान्तर चतुर्भुज की दो भुजायें क्रमशः $5\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ तथा $\mathbf{a}-3\mathbf{b}$ है। यदि $|\mathbf{a}|=2\sqrt{2}, |\mathbf{b}|=3$ तथा **a** एवं **b** के बीच का कोण $\frac{\pi}{4}$ है, तब सबसे बड़े विकर्ण की लम्बाई होगी [UPSEAT 2002]
   (a) 15 (b) $\sqrt{113}$
   (c) $\sqrt{593}$ (d) $\sqrt{369}$

3. यदि $|\mathbf{a}|=a$ तथा $|\mathbf{b}|=b$, तब $\left(\frac{\mathbf{a}}{a^2}-\frac{\mathbf{b}}{b^2}\right)^2=$
   (a) $\left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{ab}\right)^2$ (b) $\frac{(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2}{ab}$
   (c) $\left(\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{ab}\right)^2$ (d) $\frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2}{ab}$

4. एक बिन्दु B किसी वृत्त के चतुर्थांश के चाप AC को 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करता है। यदि O केन्द्र है व $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ व $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ तो सदिश $\overrightarrow{OC}$ है [MNR 1988]
   (a) $\mathbf{b}-2\mathbf{a}$ (b) $2\mathbf{a}-\mathbf{b}$
   (c) $3\mathbf{b}-2\mathbf{a}$ (d) इनमें से कोई नहीं

5. यदि किसी त्रिभुज ABC का परिकेन्द्र S, केन्द्रक G तथा लम्बकेन्द्र O है, तो $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=$ [MNR 1987; EAMCET 1994]
   (a) $\overrightarrow{SG}$ (b) $\overrightarrow{OS}$
   (c) $\overrightarrow{SO}$ (d) $\overrightarrow{OG}$

6. यदि $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ और $\mathbf{c}=\mathbf{i}+\alpha\mathbf{j}+\beta\mathbf{k}$ रैखिक परतंत्र सदिश (Linear inependent vectors) हैं और $|\mathbf{c}|=\sqrt{3}$, तो [IIT 1998]
   (a) $\alpha=1, \beta=-1$ (b) $\alpha=1, \beta=\pm 1$
   (c) $\alpha=-1, \beta=\pm 1$ (d) $\alpha=\pm 1, \beta=1$

7. सदिश **a, b, c** एक–दूसरे से 60^o के कोण पर झुके हैं और $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=2$ तथा $|\mathbf{c}|=2$, तो $(2\mathbf{a}+3\mathbf{b}-5\mathbf{c}).(4\mathbf{a}-6\mathbf{b}+10\mathbf{c})=$
   (a) 167 (b) – 167
   (c) 120 (d) – 120

8. सदिश **a, b** व **c** समान लम्बाई के हैं एवं प्रत्येक दो के बीच समान कोण है। यदि $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$ व $\mathbf{b}=\mathbf{j}+\mathbf{k}$, तो **c** के निर्देशांक हैं
   (a) (1, 0, 1) (b) (1, 2, 3)
   (c) (–1, 1, 2) (d) इनमें से कोई नहीं

9. समतलीय बिन्दुओं A, B, C, D के स्थिति सदिश क्रमशः **a, b, c** व **d** इस प्रकार हैं कि $(\mathbf{a}-\mathbf{d}).(\mathbf{b}-\mathbf{c})=(\mathbf{b}-\mathbf{d}).(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$, तो ΔABC का बिन्दु D होगा [IIT 1984]
   (a) अन्तःकेन्द्र (b) परिकेन्द्र
   (c) लम्बकेन्द्र (d) इनमें से कोई नहीं

10. माना बिन्दुओं P व Q के O के सापेक्ष स्थिति सदिश क्रमशः **p** व **q** हैं तथा $|\mathbf{p}|=p, |\mathbf{q}|=q$. बिन्दु R व S, PQ को 2 : 3 के अनुपात में क्रमशः अंतः व बाह्य विभाजित करते हैं। यदि $\overrightarrow{OR}$ व $\overrightarrow{OS}$ परस्पर लम्बवत् हों, तो [IIT Screening 1994]
   (a) $9p^2=4q^2$ (b) $4p^2=9q^2$
   (c) $9p=4q$ (d) $4p=9q$

11. xy-समतल में एक इकाई सदिश, जो सदिश $(\mathbf{i}+\mathbf{j})$ के साथ 45^o का कोण तथा सदिश $(3\mathbf{i}-4\mathbf{j})$ के साथ 60^o का कोण बनाता है, होगा [Kurukshetra CEE 2002]
   (a) **i** (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}-\mathbf{j})$
   (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$ (d) इनमें से कोई नहीं

12. सदिश $\mathbf{u}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$ तथा $\mathbf{w}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ है। यदि एक इकाई सदिश **n** इस प्रकार है, कि $\mathbf{u.n}=0$ तथा $\mathbf{v.n}=0$ तब $|\mathbf{w}.\mathbf{n}|=$
   (a) 0 (b) 1
   (c) 2 (d) 3

13. c का (x के सभी वास्तविक मानों के लिए) वह मान, जिसके लिए सदिश $cx\mathbf{i}-6\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $x\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2cx\mathbf{k}$ के बीच अधिककोण है, है [EAMCET 1994]
   (a) $c<0$ (b) $0<c<\frac{4}{3}$
   (c) $-\frac{4}{3}<c<0$ (d) $c>0$

14. सदिश $\mathbf{b}=3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ को दो सदिशों $\mathbf{b}_1 \parallel (\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j})$ व $\mathbf{b}_2 \perp \mathbf{a}$, के योग के रूप में लिखा जाता है, तो $\mathbf{b}_1=$ [MNR 1993; UPSEAT 2000]
   (a) $\frac{3}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$ (b) $\frac{2}{3}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$
   (c) $\frac{1}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$ (d) $\frac{1}{3}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$

15. माना **u, v, w** इस प्रकार हैं, कि $|\mathbf{u}|=1, |\mathbf{v}|=2, |\mathbf{w}|=3$. यदि **u** के अनुदिश प्रक्षेप **v**, **u** के अनुदिश प्रक्षेप **w** के बराबर है तथा **v** व **w** परस्पर लम्बवत् है, तब $|\mathbf{u}-\mathbf{v}+\mathbf{w}|=$ [AIEEE 2004]
   (a) 14 (b) $\sqrt{7}$
   (c) $\sqrt{14}$ (d) 2

16. किसी कण पर 3 तथा 2 इकाई परिमाण के बल क्रमशः $5\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ तथा $3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ दिशाओं में कार्यरत है तथा कण को बिन्दु (1, –1, –1) से (3, 3, 1) तक विस्थापित करते हैं, तब बलों द्वारा किया गया कार्य है [Pb. CET 2004]

(a) $50\sqrt{2}$ इकाई (b) $40\sqrt{2}$ इकाई

(c) $\frac{57}{5}\sqrt{2}$ इकाई (d) $8\sqrt{2}$ इकाई

17. यदि $\mathbf{a}=(1, 1, 1)$, $\mathbf{c}=(0, 1, -1)$ दो सदिश हैं एवं **b** एक सदिश इस प्रकार है कि $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}$ व $\mathbf{a}.\mathbf{b}=3$, तो **b** का मान है [IIT 1985, 91]

(a) $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$ (b) $\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$

(c) (5, 2, 2) (d) $\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

18. $\mathbf{a}=3\mathbf{i}-5\mathbf{j}$ तथा $\mathbf{b}=6\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ दो सदिश हैं तथा **c** एक सदिश इस प्रकार है कि $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, तब $|\mathbf{a}|:|\mathbf{b}|:|\mathbf{c}|=$ [AIEEE 2002]

(a) $\sqrt{34}:\sqrt{45}:\sqrt{39}$

(b) $\sqrt{34}:\sqrt{45}:39$

(c) 34 : 39 : 45

(d) 39 : 35 : 34

19. यदि $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=4$ तथा $|\mathbf{a}.\mathbf{b}|=2$, तब $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2=$ [Karnataka CET 2003]

(a) 2 (b) 6

(c) 8 (d) 20

20. यदि **a, b, c** तीन अशून्य असमतलीय सदिश हों एवं **p, q, r** तीन अन्य सदिश इस प्रकार हैं, कि $\mathbf{p}=\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{c}}$, $\mathbf{q}=\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{c}}$, $\mathbf{r}=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{c}}$, तो $[\mathbf{p}\,\mathbf{q}\,\mathbf{r}]=$ [CEE 1993]

(a) $\mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ (b) $\frac{1}{\mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{c}}$

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

21. यदि **a, b** व **c** तीन असमतलीय सदिश हों, तो $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).[(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}+\mathbf{c})]$ का मान है [IIT 1995; UPSEAT 2004]

(a) $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$ (b) $2\,[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$

(c) $-[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$ (d) 0

22. यदि $\mathbf{V}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ व $\mathbf{W}=\mathbf{i}+3\mathbf{k}$ तथा **U** एक इकाई सदिश हो, तो अदिश त्रिक गुणन $[\mathbf{U}\,\mathbf{V}\,\mathbf{W}]$ का अधिकतम मान होगा [IIT Screening 2002]

(a) –1 (b) $\sqrt{10}+\sqrt{6}$

(c) $\sqrt{59}$ (d) $\sqrt{60}$

23. यदि $\begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix}=0$ तथा $\mathbf{a}=(1,a,a^2)$, $\mathbf{b}=(1,b,b^2)$ एवं $\mathbf{c}=(1,c,c^2)$ असमतलीय सदिश हैं, तो abc का मान है [IIT 1985; AIEEE 2003; Pb. CET 2003]

(a) –1 (b) 0

(c) 1 (d) 4

24. माना **a, b** व **c** अशून्य सदिश इस प्रकार हैं कि

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\frac{1}{3}|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\,\mathbf{a}.$$

यदि सदिशों **b** और **c** के बीच न्यूनकोण θ है, तब $\sin\theta$ का मान है [AIEEE 2004]

(a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{1}{3}$

25. एक शून्येतर सदिश **a**, सदिशों **i** व $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ द्वारा निर्धारित समतल और सदिशों $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ व $\mathbf{i}+\mathbf{k}$ द्वारा निर्धारित समतल की प्रतिच्छेद रेखा के समान्तर है। सदिश **a** और सदिश $\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ के मध्य कोण है [IIT 1996]

(a) $\frac{\pi}{4}$ या $\frac{3\pi}{4}$ (b) $\frac{2\pi}{4}$ या $\frac{3\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{2}$ या $\frac{3\pi}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

Answers and Solutions

(SET - 19)

1. (c) दिये गये प्रतिबन्धों के अनुसार,

$\mathbf{a}.(\mathbf{b}+\mathbf{c})=0$ .....(i)

$\mathbf{b}.(\mathbf{c}+\mathbf{a})=0$ .....(ii)

$\mathbf{c}.(\mathbf{a}+\mathbf{b})=0$ .....(iii)

(i), (ii) व (iii) को जोड़ने पर,

$2(\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}.\mathbf{c}+\mathbf{c}.\mathbf{a})=0$, $\{\because \mathbf{a}.\mathbf{b}=\mathbf{b}.\mathbf{a}$ इत्यादि$\}$

अतः $|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2=a^2+b^2+c^2+2(\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}.\mathbf{c}+\mathbf{c}.\mathbf{a})$

$=3^2+4^2+5^2$

$\Rightarrow |\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

2. (c) माना दोनों विकर्णों की लम्बाई d_1 व d_2 है,

तब $\mathbf{d}_1=|(5\mathbf{a}+2\mathbf{b})+(\mathbf{a}-3\mathbf{b})|$

व $\mathbf{d}_2=|(5\mathbf{a}+2\mathbf{b})-(\mathbf{a}-3\mathbf{b})| \Rightarrow \mathbf{d}_2=|4\mathbf{a}+5\mathbf{b}|$

इस प्रकार,

$$\mathbf{d}_1=\sqrt{|6\mathbf{a}|^2+|-\mathbf{b}|^2+2|6\mathbf{a}||-\mathbf{b}|\cos(\pi-\frac{\pi}{4})}$$

$$=\sqrt{36(2\sqrt{2})^2+9+12.2\sqrt{2}.3\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)}=15$$

$$\mathbf{d}_2=\sqrt{|4\mathbf{a}|^2+|5\mathbf{b}|^2+2|4\mathbf{a}||5\mathbf{b}|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\sqrt{16\times 8+25\times 9+40\times 2\sqrt{2}\times 3\times\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$=\sqrt{593}$.

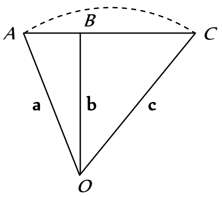
$\therefore$ बड़े विकर्ण की लम्बाई $=\sqrt{593}$.

3. (c) $\left(\frac{\mathbf{a}}{a^2}-\frac{\mathbf{b}}{b^2}\right)^2=\frac{a^2}{a^4}+\frac{b^2}{b^4}-\frac{2\mathbf{a}.\mathbf{b}}{a^2b^2}$, $\{\because \mathbf{a}^2=a^2$ इत्यादि$\}$

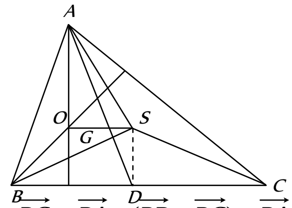
$$=\frac{a^2+b^2-2\mathbf{a}.\mathbf{b}}{a^2b^2}=\left(\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{ab}\right)^2.$$

4. (c) $\overrightarrow{OC}=\frac{3\mathbf{b}-2\mathbf{a}}{3-2}=3\mathbf{b}-2\mathbf{a}$

$\{\because AC:BC=3:2$ (बाह्यतः)$\}$



5. (c) माना P, त्रिभुज ABC के तल में कोई बिन्दु है, तो



$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PD}$

$=(1+2)\overrightarrow{PG}=3\overrightarrow{PG}$

चूँकि G, AD को $2:1$ में विभाजित करता है

$\therefore \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SG}=3\overrightarrow{SG}=2\overrightarrow{SG}+\overrightarrow{SG}$

$=\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SO}$, $(\because OG=2SG)$.

6. (d) $|\mathbf{c}|=1+\alpha^2+\beta^2=3\Rightarrow \alpha^2+\beta^2=2$

चूँकि $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ रेखीय परतंत्र (linearly dependent) हैं, इसलिए

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 4\\ 1 & \alpha & \beta\end{vmatrix}=1-\beta=0\Rightarrow \beta=1$$

$\therefore \alpha^2=1\Rightarrow \alpha=\pm 1$.

7. (d) $(2\mathbf{a}+3\mathbf{b}-5\mathbf{c}).(4\mathbf{a}-6\mathbf{b}+10\mathbf{c})$

$=8\mathbf{a}.\mathbf{a}-18\mathbf{b}.\mathbf{b}-50\mathbf{c}.\mathbf{c}-12\mathbf{a}.\mathbf{b}+20\mathbf{a}.\mathbf{c}$

$+12\mathbf{b}.\mathbf{a}+30\mathbf{b}.\mathbf{c}-20\mathbf{c}.\mathbf{a}+30\mathbf{c}.\mathbf{b}$

$=8a^2-18b^2-50c^2+60\mathbf{c}.\mathbf{b}$

$=32-72-200+60.|\mathbf{b}|.|\mathbf{c}|\cos 60^\circ=-120$.

8. (a) माना $\mathbf{c}=(c_1,c_2,c_3)$, तो

$|\mathbf{c}|=|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=\sqrt{2}=\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}$

यह दिया गया है कि सदिशों के बीच कोण समान है तथा ϕ (माना) है,

तो $\cos\phi=\frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=\frac{0+1+0}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

$\frac{\mathbf{a}.\mathbf{c}}{|\mathbf{a}||\mathbf{c}|}=\frac{c_1+c_2}{2}=\frac{1}{2}$ व $\frac{\mathbf{b}.\mathbf{c}}{|\mathbf{b}||\mathbf{c}|}=\frac{c_2+c_3}{2}=\frac{1}{2}$

अतः $c_1+c_2=1, c_2+c_3=1$ व $c_1^2+c_2^2+c_3^2=2$

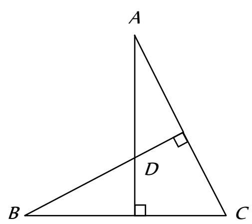
समीकरणों को हल करने पर,

$c_1=1,-\frac{1}{3}; c_2=0,\frac{4}{3}; c_3=1,-\frac{1}{3}$

अतः $\mathbf{c}$ के निर्देशांक (1, 0, 1) या $\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{-1}{3}\right)$ हैं।

ट्रिक : स्पष्टतः सदिश (1, 0, 1) अर्थात् $\mathbf{i}+\mathbf{k}$ की लम्बाई $\mathbf{a}$ व $\mathbf{b}$ की लम्बाई के बराबर है। यह $\mathbf{a}$ व $\mathbf{b}$ के साथ समान कोण भी बनाता है तथा $\mathbf{a}$ व $\mathbf{b}$ के बीच कोण अर्थात् $\frac{\pi}{3}$ के बराबर है।

9. (c) $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow \overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{CB}$ व $\overrightarrow{DB}\perp\overrightarrow{AC}$.



अतः बिन्दु D, ΔABC का लम्बकेन्द्र है।

10. (a) बिन्दुओं R व S के स्थिति सदिश क्रमशः $\frac{3\mathbf{p}+2\mathbf{q}}{5}$ व $3\mathbf{p}-2\mathbf{q}$ हैं, $\therefore$ $\overrightarrow{OR}=\frac{3\mathbf{p}+2\mathbf{q}}{5}$ व $\overrightarrow{OS}=3\mathbf{p}-2\mathbf{q}$

चूँकि $\overrightarrow{OR}\perp\overrightarrow{OS}$, अतः $\overrightarrow{OR}.\overrightarrow{OS}=0$

$\Rightarrow\left(\frac{3\mathbf{p}+2\mathbf{q}}{5}\right).(3\mathbf{p}-2\mathbf{q})=0$

$\Rightarrow 9|\mathbf{p}|^2-4|\mathbf{q}|^2=0$

$\Rightarrow 9|\mathbf{p}|^2=4|\mathbf{q}|^2\Rightarrow 9p^2=4q^2$.

11. (d) माना सदिश $x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}$ है।

$\therefore\cos 45^o=\frac{x+y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow 1=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\Rightarrow x+y=\sqrt{x^2+y^2}$ साथ ही $\sqrt{x^2+y^2}=1\Rightarrow x+y=1$

पुनः $\cos 60^o=\frac{3x-4y}{5}\Rightarrow\frac{5}{2}=3x-4y$

$5=6x-8y$ .....(i)

$1=x+y$ .....(ii)

दिये गये विकल्पों में से कोई भी मान (ii) तथा (iii) को संतुष्ट नहीं करता है। अतः विकल्प (d) सही है।

12. (d) $\because$ $\mathbf{n}$, $\mathbf{u}$ तथा $\mathbf{v}$ के लम्बवत् है।

$\mathbf{n}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}$

$$\mathbf{n}=\frac{\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{-2\mathbf{k}}{2}=-\mathbf{k}$$

$|\mathbf{w}.\mathbf{n}|=|(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}).(-\mathbf{k})|=|-3|=3$.

13. (c) चूँकि सदिश $\mathbf{a}=cx\mathbf{i}-6\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ व $\mathbf{b}=x\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2cx\mathbf{k}$ परस्पर अधिक कोण बनाते हैं, अतः

$\mathbf{a}.\mathbf{b}<0\Rightarrow cx^2-12+6cx<0,\forall x$

$\Rightarrow c<0$ व विविक्तकर <0 $\Rightarrow c<0$ व $36c^2+48c<0$

$\Rightarrow c<0$ व $3c+4>0\Rightarrow c<0$ व $3c+4>0$

$\Rightarrow -\frac{4}{3}<c<0.$

14. (a) चूँकि $\mathbf{b}_1\|\ \mathbf{a}$, इसलिए $\mathbf{b}_1=a(\mathbf{i}+\mathbf{j})$

$\mathbf{b}_2=\mathbf{b}-\mathbf{b}_1=(3-a)\mathbf{i}-a\mathbf{j}+4\mathbf{k}$

एवं $\mathbf{b}_2.\mathbf{a}=0\Rightarrow(3-a)-a\Rightarrow a=\frac{3}{2}$

अतः $\mathbf{b}_1=\frac{3}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$.

15. (c) माना $\mathbf{v}=2\mathbf{i}$ और $\mathbf{w}=3\mathbf{j}$, $(\because\mathbf{v}\perp\mathbf{w})$.

तथा $\mathbf{u}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

$|\mathbf{u}|=1\Rightarrow x^2+y^2+z^2=1$

प्रश्नानुसार, $\mathbf{u}$ के अनुदिश $\mathbf{v}$ का प्रक्षेप = $\mathbf{u}$ के अनुदिश $\mathbf{w}$ का प्रक्षेप

$\Rightarrow\mathbf{v}.\mathbf{u}=\mathbf{w}.\mathbf{u}\Rightarrow 2\mathbf{i}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})=3\mathbf{j}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$

$\Rightarrow 2x=3y\Rightarrow 3y-2x=0$

अब, $|\mathbf{u}-\mathbf{v}+\mathbf{w}|=|x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}|$

$=|(x-2)\mathbf{i}+(y+3)\mathbf{j}+z\mathbf{k}|=\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2+z^2}$

$=\sqrt{(x^2+y^2+z^2+2(3y-2x)+13}$

$=\sqrt{1+2(0)+1(3)}=\sqrt{14}$.

16. (c) $5\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ की दिशा में इकाई सदिश $=\frac{5\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}}{\sqrt{25+9+16}}$

$3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ की दिशा में इकाई सदिश $=\frac{3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k}}{\sqrt{9+16+25}}$

परिमाण 3 का बल, अर्थात् $\mathbf{F}_1=\frac{3(5\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k})}{5\sqrt{2}}$

परिमाण 2 का बल, अर्थात् $\mathbf{F}_2=\frac{2(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k})}{5\sqrt{2}}$

$\therefore$ परिणामी बल = $\mathbf{F}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2$

$\Rightarrow\mathbf{F}=\frac{1}{5\sqrt{2}}(21\mathbf{i}+17\mathbf{j}+2\mathbf{k})$

विस्थापन = $\mathbf{d}=\mathbf{d}_2-\mathbf{d}_1=(3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k})-(\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})$

$\Rightarrow\mathbf{d}=(2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k})$

$\therefore$ किया गया कार्य

$=\mathbf{F}.\mathbf{d}=\frac{1}{5\sqrt{2}}(21\mathbf{i}+17\mathbf{j}+2\mathbf{k}).(2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k})$

$=\frac{57\sqrt{2}}{5}$ इकाई.

17. (d) माना $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$

$\mathbf{a}.\mathbf{b}=b_1+b_2+b_3=3$ ......(i)

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(b_3-b_2)\mathbf{i}+(b_1-b_3)\mathbf{j}+(b_2-b_1)\mathbf{k}=\mathbf{c}$

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ व $\mathbf{c}$ में $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ के गुणांकों की तुलना करने पर,

$b_3-b_2=0$ ......(ii)

$b_1-b_3=1$ .....(iii)

$b_2-b_1=-1$ .....(iv)

हल करने पर, $b_1=\frac{5}{3}$, $b_2=\frac{2}{3}$, $b_3=\frac{2}{3}$,

अतः $\mathbf{b}=\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

18. (b) $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\3&-5&0\\6&3&0\end{vmatrix}=\mathbf{i}(0)-\mathbf{j}(0)+\mathbf{k}(9+30)\;=39\mathbf{k}$

अब, $|\mathbf{a}|=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

$|\mathbf{b}|=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}$

$|\mathbf{c}|=\sqrt{(39)^2}=39.$

19. (d) दिया है, $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=4\Rightarrow\left||\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta\,\hat{\mathbf{n}}\right|=4$

$\Rightarrow\left||\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta\right|=4$ .....(i)

$\because|\mathbf{a}.\mathbf{b}|=2\Rightarrow\left||\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta\right|=2$

$\Rightarrow\left||\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta\right|=2$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$|\mathbf{a}|^2.|\mathbf{b}|^2\sin^2\theta+|\mathbf{a}|^2.|\mathbf{b}|^2\cos^2\theta=4^2+2^2$

$\therefore|\mathbf{a}|^2.|\mathbf{b}|^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=16+4$

$\Rightarrow|\mathbf{a}|^2.|\mathbf{b}|^2\times1=20.$

20. (b) $[\mathbf{p}\,\mathbf{q}\,\mathbf{r}]=\mathbf{p}.(\mathbf{q}\times\mathbf{r})$

$=\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{c}}.\left[\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\right]$

$=\frac{(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).[(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]}{[\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]^3}$

$\frac{(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).[\{(\mathbf{c}\times\mathbf{a}).\mathbf{b}\}\mathbf{a}-\{(\mathbf{c}\times\mathbf{a}).\mathbf{a}\}\mathbf{b}]}{[\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]^3}$

$=\frac{(\mathbf{b}\times\mathbf{c})[\{(\mathbf{c}\times\mathbf{a}).\mathbf{b}\}\mathbf{a}]}{[\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]^3}$, $\{\because(\mathbf{c}\times\mathbf{a}).\mathbf{a}=0\}$

$=\frac{(\mathbf{b}\times\mathbf{c})[\{(\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\}\mathbf{a}]}{[\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]^3}=\frac{[\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\,[(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).\mathbf{a}]}{[\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]^3}$

$=\frac{1}{\mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{c}}.$

21. (c) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).[(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}+\mathbf{c})]$

$=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).(\mathbf{a}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

$=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).(\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

$=[\mathbf{a}\,\mathbf{a}\,\mathbf{c}]+[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a}]+[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]+[\mathbf{b}\,\mathbf{a}\,\mathbf{c}]+[\mathbf{b}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a}]$

$+[\mathbf{b}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]+[\mathbf{c}\,\mathbf{a}\,\mathbf{c}]+[\mathbf{c}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a}]+[\mathbf{c}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$

$=-[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}].$

22. (c) $\mathbf{V}\times\mathbf{W}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&1&-1\\1&0&3\end{vmatrix}=3\mathbf{i}-7\mathbf{j}-\mathbf{k}$

किन्तु $\mathbf{U}$ एक इकाई सदिश है, $\therefore\;\mathbf{U}=\frac{3\mathbf{i}-7\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{59}}$

अतः $[\mathbf{U}\,\mathbf{V}\,\mathbf{W}]=\frac{3^2+7^2+1^2}{\sqrt{59}}=\sqrt{59}$.

23. (a) चूँकि $(1,a,a^2),(1,b,b^2)$ व $(1,c,c^2)$ असमतलीय हैं, अतः

$\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}\neq0=\Delta$, (माना)

एवं $\begin{vmatrix}a&a^2&1+a^3\\b&b^2&1+b^3\\c&c^2&1+c^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&a^2&1\\b&b^2&1\\c&c^2&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&a^2&a^3\\b&b^2&b^3\\c&c^2&c^3\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow\Delta+abc\,\Delta=0$

$\Rightarrow\Delta(abc+1)=0\Rightarrow abc=-1.$

24. (a) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\frac{1}{3}|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\,\mathbf{a}$

$\Rightarrow\;(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}.\mathbf{c})\mathbf{a}=\frac{1}{3}|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\,\mathbf{a}$

$\Rightarrow\;(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}=\left\{(\mathbf{b}.\mathbf{c})+\frac{1}{3}|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\right\}\mathbf{a}$

$\Rightarrow\;(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}=|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\left\{\cos\theta+\frac{1}{3}\right\}\mathbf{a}$

$\because\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ समान्तर नहीं हैं,

$\therefore\;\mathbf{a}.\mathbf{c}=0$ और $\cos\theta+\frac{1}{3}=0$

$\Rightarrow\;\cos\theta=-\frac{1}{3}$. अतः $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

25. (a) सदिशों $\mathbf{i}$ व $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ को सम्मिलित करने वाले समतल का समीकरण है, $|\mathbf{r}-\mathbf{i}\;\;\mathbf{i}\;\;\mathbf{i}+\mathbf{j}|=0$

$\Rightarrow(\mathbf{r}-\mathbf{i}).[\mathbf{i}\times(\mathbf{i}+\mathbf{j})]=0$

$\Rightarrow[(x-1)\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}].\mathbf{k}=0\Rightarrow z=0$ .....(i)

सदिशों $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ व $\mathbf{i}+\mathbf{k}$ को सम्मिलित करने वाले समतल का समीकरण है, $[\mathbf{r}-(\mathbf{i}-\mathbf{j})\;\;\mathbf{i}-\mathbf{j}\;\;\mathbf{i}+\mathbf{k}]=0$

$\Rightarrow(\mathbf{r}-\mathbf{i}+\mathbf{j}).[(\mathbf{i}-\mathbf{j})\times(\mathbf{i}+\mathbf{k})]=0$

$\Rightarrow[(x-1)\mathbf{i}+(y+1)\mathbf{j}+z\mathbf{k}].(-\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})=0$

$\Rightarrow x+y-z=0$ .....(ii)

माना $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$. चूँकि $\mathbf{a}$, (i) व (ii) के समान्तर है अतः $a_3=0$ व $a_1+a_2-a_3=0\Rightarrow a_1=-a_2$

इस प्रकार, $\mathbf{a}$ की दिशा में एक सदिश = $\mathbf{u}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$

यदि $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ के बीच कोण θ हो, तो

$\cos\theta=\pm\frac{(1)(1)+(-1)(-2)}{\sqrt{1+1}\sqrt{1+4+4}}=\pm\frac{3}{(\sqrt{2})(3)}$

$\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$ या $\frac{3\pi}{4}$.

* * *