Chapter

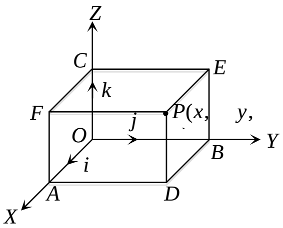
20

त्रिविमीय निर्देशांक ज्यामिति

निर्देशांक पद्धति

(Co-ordinates of a point in space)

(1) **कार्तीय निर्देशांक :** माना O एक स्थिर बिन्दु है, जिसे मूलबिन्दु कहते हैं तथा माना OX, OY एवं OZ तीन परस्पर लम्बवत् रेखायें, जो कि क्रमशः x-अक्ष, y-अक्ष तथा z-अक्ष कहलाती हैं, इस प्रकार हैं, कि ये दाँया पक्ष–पद्धति बनाती हैं।

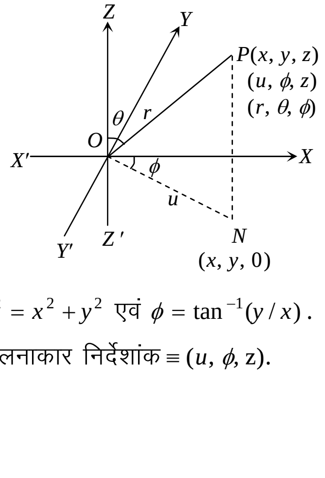


तल XOY, YOZ एवं ZOX को क्रमशः xy-तल, yz-तल और zx-तल कहते हैं तथा $OA = x, OB = y, OC = z$.

तीन निर्देशांक तल (XOY, YOZ तथा ZOX) त्रिविम को आठ भागों में विभाजित करते हैं एवं ये भाग अष्टांशक (octants) कहलाते हैं।

बिन्दु के निर्देशांक का चिन्ह : त्रिविम में किसी बिन्दु के निर्देशांकों के चिन्ह इस परिपाटी का अनुसरण करते हैं, कि OX, OY, OZ के अनुदिश अथवा समान्तर मापी गई दूरियाँ धनात्मक होंगी तथा OX', OY', OZ' के अनुदिश अथवा समान्तर तय की गई दूरियाँ ऋणात्मक होंगी।

(2) **बेलनाकार निर्देशांक :** यदि P के समकोणिक कार्तीय निर्देशांक (x, y, z) हैं, तो N के निर्देशांक (x, y, 0) होंगे एवं निम्न सम्बंध स्थापित होंगे : $x = u\cos\phi$, $y = u\sin\phi$ तथा $z = z$.



अतः $u^2 = x^2 + y^2$ एवं $\phi = \tan^{-1}(y/x)$.

P का बेलनाकार निर्देशांक $\equiv (u, \phi, z)$.

(3) **गोलाकार ध्रुवीय निर्देशांक :** राशियों r, θ, ϕ के माप बिन्दु P के गोलाकार या त्रिविम ध्रुवीय निर्देशांक कहलाते हैं। यदि P के समकोणिक कार्तीय निर्देशांक (x, y, z) हों, तो $z = r\cos\theta$, $u = r\sin\theta$

$\therefore$ $x = u\cos\phi = r\sin\theta\cos\phi$, $y = u\sin\phi = r\sin\theta\sin\phi$

तथा $z = r\cos\theta$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ एवं } \tan\theta = \frac{u}{z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\ ;\ \tan\phi = \frac{y}{x} .$$

दूरी का सूत्र (Distance formula)

(1) **दूरी-सूत्र :** दो बिन्दुओं $A(x_1, y_1, z_1)$ एवं $B(x_2, y_2, z_2)$ के बीच की दूरी $AB = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]}$

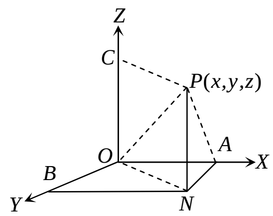
(2) **मूलबिन्दु से दूरी :** माना O मूलबिन्दु एवं $P(x, y, z)$ कोई बिन्दु है, तो $OP = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$.

(3) **निर्देशांक-अक्षों से बिन्दु की दूरी :** माना त्रिविम में कोई बिन्दु $P(x, y, z)$ है। माना अक्षों OX, OY और OZ पर बिन्दु P से डाले गये लम्बों की लम्बाईयाँ क्रमशः PA, PB एवं PC हैं,

तो $PA = \sqrt{(y^2 + z^2)}$

$PB = \sqrt{(z^2 + x^2)}$

$PC = \sqrt{(x^2 + y^2)}$



विभाजन सूत्र (Section formula)

(1) **अन्तः विभाजन तथा बाह्य विभाजन के लिए विभाजन सूत्र :** माना $P(x_1, y_1, z_1)$ एवं $Q(x_2, y_2, z_2)$ दो बिन्दु हैं। माना P और Q को मिलाने वाली रेखा पर बिन्दु R इस प्रकार है, कि यह P और Q को मिलाने वाली रेखा को अनुपात $m_1 : m_2$ में अन्तः विभाजित या बाह्यतः विभाजित करता है, तो R के निर्देशांक हैं,

$$\left(\frac{m_1x_2 \pm m_2x_1}{m_1 \pm m_2}, \frac{m_1y_2 \pm m_2y_1}{m_1 \pm m_2}, \frac{m_1z_2 \pm m_2z_1}{m_1 \pm m_2}\right).$$

धनात्मक चिन्ह अन्तः विभाजन के लिए तथा ऋणात्मक चिन्ह बाह्यः विभाजन के लिये प्रयुक्त होता है।

(2)**व्यापक बिन्दु के निर्देशांकः** बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ एवं $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा पर स्थित कोई बिन्दु, जो रेखा को अनुपात $k : 1$ में विभाजित करता है, के निर्देशांक $\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1}, \frac{kz_2 + z_1}{k+1}\right)$ होंगे। यह रेखा PQ पर व्यापक बिन्दु कहलाता है।

त्रिभुज तथा चतुष्फलक (Triangle and tetrahedron)

(1) **केन्द्रक के निर्देशांक**

(i) यदि $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ एवं (x_3, y_3, z_3) किसी त्रिभुज के शीर्ष हों, तो इसके केन्द्रक के निर्देशांक

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right) \text{ होंगे।}$$

(ii) यदि (x_r, y_r, z_r) ; $r = 1, 2, 3, 4$ किसी चतुष्फलक के शीर्ष हों, तो इसके केन्द्रक के निर्देशांक

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}, \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}\right) \text{ होंगे।}$$

(2) **त्रिभुज का क्षेत्रफल :** माना $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ एवं $C(x_3, y_3, z_3)$ किसी त्रिभुज के शीर्ष हों, तो

$$\Delta_x = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

अब, ΔABC का क्षेत्रफल $\Delta = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2}$.

(3) **समरैखिकता का प्रतिबन्ध :** बिन्दु $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ तथा $C(x_3, y_3, z_3)$ समरेखीय होंगे,

यदि $\frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_2}{y_2 - y_3} = \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}$.

(4) **चतुष्फलक का आयतन :** शीर्षों (x_r, y_r, z_r) ; $r = 1, 2, 3, 4$ वाले

चतुष्फलक का आयतन $V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$.

दिक् कोज्याएँ एवं दिक् अनुपात
(Direction cosines and direction ratios)

(1) **दिक् कोज्याएँ :** यदि एक निर्देशित रेखा x, y, z अक्षों की धनात्मक दिशा से क्रमशः α, β, γ कोण बनाती है, तब $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ उस रेखा की दिक् कोज्याएँ कहलाती हैं, जिन्हें हम प्रायः l, m, n से व्यक्त करते हैं।

इस प्रकार $l = \cos\alpha, m = \cos\beta$ तथा $n = \cos\gamma$, $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

परिभाषा से, x अक्ष की दि्क कोज्याएँ $\cos 0^o$, $\cos 90^o$, $\cos 90^o$ अर्थात् (1, 0, 0) हैं। इसी प्रकार y-अक्ष एवं z-अक्ष की दिक् कोज्याएँ क्रमशः (0, 1, 0) एवं (0, 0, 1) हैं।

(2) **दिक् अनुपात :** किसी रेखा की दिक् कोज्याओं के समानुपाती तीन संख्याएँ उस रेखा के दिक् अनुपात कहलाते हैं। यदि किसी रेखा की दिक् कोज्याओं l, m, n के समानुपाती तीन संख्याएँ a, b, c हों, तो a, b, c उस रेखा के दिक् अनुपात कहलाते हैं।

अतः परिभाषा से,

$$l = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, m = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, n = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

जहाँ सभी चिन्ह् या तो धनात्मक हैं या सभी ऋणात्मक हैं।

दिक् अनुपात अद्वितीय नहीं होते, जबकि दिक् कोज्यायें अद्वितीय होती हैं, अर्थात् $a^2 + b^2 + c^2 \neq 1$.

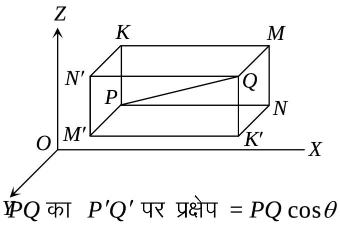
(3) **दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा की दिक् कोज्याएँ एवं दिक् अनुपातः** बिन्दुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ एवं $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा PQ के दिक् अनुपात हैं, $x_2 - x_1 = a$, $y_2 - y_1 = b$ तथा $z_2 - z_1 = c$, (माना) तब दिक् कोज्याएँ,

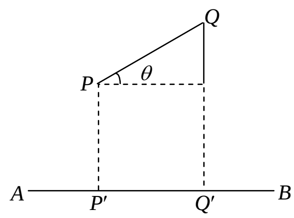
$$l = \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{\Sigma(x_2 - x_1)^2}}, m = \frac{(y_2 - y_1)}{\sqrt{\Sigma(x_2 - x_1)^2}}, n = \frac{(z_2 - z_1)}{\sqrt{\Sigma(x_2 - x_1)^2}}$$

अर्थात् $l = \frac{x_2 - x_1}{PQ}, m = \frac{y_2 - y_1}{PQ}, n = \frac{z_2 - z_1}{PQ}$.

प्रक्षेप (Projection)

दो बिन्दुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ एवं $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा का अन्य रेखा, जिसकी दिक् कोज्याएँ l, m, n हैं, पर प्रक्षेप : माना PQ एक रेखाखण्ड है, जहाँ $P \equiv (x_1, y_1, z_1)$ एवं $Q = (x_2, y_2, z_2)$ एवं दी हुई रेखा AB है, जिसकी दिक् कोज्याएँ l, m, n हैं। यदि रेखाखण्ड PQ, रेखा AB के साथ θ कोण बनाता है, तो





PQ का $P'Q'$ पर प्रक्षेप $= PQ\cos\theta$

$$= (x_2 - x_1)\cos\alpha + (y_2 - y_1)\cos\beta + (z_2 - z_1)\cos\gamma$$

$$= (x_2 - x_1)\, l + (y_2 - y_1)m + (z_2 - z_1)n$$

x-अक्ष के लिए, $l = 1, m = 0, n = 0$

अतः x-अक्ष पर PQ का प्रक्षेप $= x_2 - x_1$, y-अक्ष पर PQ का प्रक्षेप $= y_2 - y_1$ तथा z-अक्ष पर PQ का प्रक्षेप $= z_2 - z_1$.

दो रेखाओं के बीच कोण (Angle between two lines)

माना दो सरल रेखाओं AB तथा AC, जिनकी दिक् कोज्याएँ क्रमशः l_1, m_1, n_1 एवं l_2, m_2, n_2 हैं, के बीच कोण θ है, तो $\cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$.

यदि दो रेखाओं के दिक् अनुपात a_1, b_1, c_1 एवं a_2, b_2, c_2 हों तथा रेखाओं के बीच कोण θ हो, तब $\cos\theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$

विशेष परिणाम :

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2) - (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)^2$$

$$= (l_1 m_2 - l_2 m_1)^2 + (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2$$

$\Rightarrow \sin\theta = \pm\sqrt{\Sigma(l_1 m_2 - l_2 m_1)^2}$, जो कि लैंगरेंज सर्वसमिका है।

$\sin\theta$ का मान निम्न रूप में आसानी से ज्ञात किया जा सकता है।

$$\sin\theta = \sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2}$$

जब दी गई दो रेखाओं के दिक् अनुपात a_1, b_1, c_1 एवं a_2, b_2, c_2 हों एवं उनके बीच कोण θ हो, तो $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{\sum(a_1b_2 - a_2b_1)^2}}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$

लम्बवत् होने का प्रतिबंध : यदि दी हुई रेखाएँ लम्बवत् हों, तो $\theta = 90°$, अर्थात् $\cos\theta = 0$

$\Rightarrow l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$ या $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

समान्तर होने का प्रतिबंध : यदि दी हुई रेखाएँ समान्तर हों, तो $\theta = 0^o$, अर्थात् $\sin\theta = 0$

$\Rightarrow \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$. इसी प्रकार, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

सरल रेखा

त्रिविम में सरल रेखा (Straight line in space)

प्रथम घात का प्रत्येक समीकरण एक समतल को व्यक्त करता है। प्रथम घात के दो समीकरण, इनके द्वारा व्यक्त किये गये समतलों की प्रतिच्छेद रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु के निर्देशांकों द्वारा संतुष्ट होते हैं, इसलिए, ये दो समीकरण एक साथ इस रेखा को व्यक्त करते हैं। अतः समीकरण $ax + by + cz + d = 0$ एवं $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ एक साथ एक सरल रेखा को निरूपित करते हैं।

(1) **एक दिये हुए बिन्दु से गुजरने वाली रेखा का समीकरण :** एक स्थिर बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से गुजरने वाली सरल रेखा, जिसके दिक् अनुपात a, b, c हैं, का कार्तीय समीकरण $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ होगा।

(2) **दिये हुए दो बिन्दुओं से गुजरने वाली सरल रेखा का समीकरणः** यदि दिये हुए दो बिन्दु $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ हैं, तो रेखा AB का समीकरण $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ होगा।

असममित रूप से सममित रूप में परिवर्तन
(Changing unsymmetrical form to symmetrical form)

रेखा के असममित रूप $ax + by + cz + d = 0,\ a'x + b'y + c'z + d' = 0$ को सममित रूप में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$$\frac{x - \dfrac{bd' - b'd}{ab' - a'b}}{bc' - b'c} = \frac{y - \dfrac{da' - d'a}{ab' - a'b}}{ca' - c'a} = \frac{z}{ab' - a'b}.$$

दो रेखाओं का प्रतिच्छेदन (Intersection of two lines)

सर्वप्रथम हम देखते हैं, कि दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करेंगी या नहीं। यदि रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं, तो उनका प्रतिच्छेदन बिन्दु ज्ञात करने के लिए निम्न क्रिया–विधि का उपयोग करते हैं।

क्रिया विधि : माना दो रेखाएँ हैं,

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1} \quad ......(i)$$

एवं $$\frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2} \quad ......(ii)$$

स्थिति I : समीकरण (i) व (ii) पर स्थित व्यापक बिन्दु के निर्देशांक क्रमशः निम्न प्रकार दिये जाते हैं, $\dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{b_1} = \dfrac{z - z_1}{c_1} = \lambda$

तथा $\dfrac{x - x_2}{a_2} = \dfrac{y - y_2}{b_2} = \dfrac{z - z_2}{c_2} = \mu$

अर्थात् $(a_1\lambda + x_1, b_1\lambda + y_1, c_1\lambda + z_1)$

तथा $(a_2\mu + x_2, b_2\mu + y_2, c_2\mu + z_2)$.

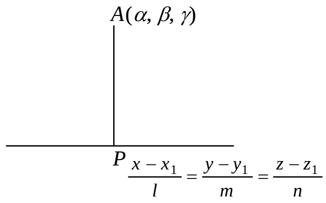
स्थिति II : यदि रेखाएँ (i) व (ii) प्रतिच्छेद करती हैं, तब उनका एक उभयनिष्ठ बिन्दु $a_1\lambda + x_1 = a_2\mu + x_2, b_1\lambda + y_1 = b_2\mu + y_2$ तथा $c_1\lambda + z_1 = c_2\mu + z_2$ होगा।

स्थिति III : Step II से λ एवं μ में प्राप्त समीकरणों में से किसी दो को हल करने पर λ तथा μ के मान ज्ञात करते हैं। यदि λ एवं μ के ये मान तीसरे संबंध को सन्तुष्ट करते हैं, तब रेखाएँ (i) व (ii) एक दूसरे को प्रतिच्छेद करेंगी, अन्यथा नहीं।

स्थिति IV : प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात करने के लिए λ (या μ) का मान Step I से प्राप्त व्यापक बिन्दु के निर्देशांक में रखते हैं।

बिन्दु से रेखा पर डाले गये लम्ब का पाद
(Foot of perpendicular from a point to the line)

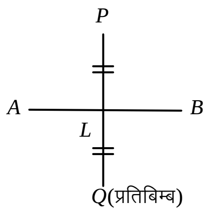
बिन्दु $A(\alpha, \beta, \gamma)$ से रेखा $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$ पर डाले गये लम्ब का पाद :



यदि P लम्ब-पाद हो, तो $P(lr + x_1, mr + y_1, nr + z_1)$ होगा। AP के दिक् अनुपात ज्ञात करते हैं एवं दी हुई रेखा एवं AP के लम्बवत् होने का प्रतिबंध लगाते हैं, जिससे r का मान प्राप्त होता है और इस प्रकार बिन्दु P प्राप्त होता है, जो लम्ब-पाद है।

लम्ब की लम्बाई एवं लम्ब का समीकरण : लम्ब की लम्बाई AP है एवं बिन्दुओं A तथा P को मिलाने वाली रेखा इसका समीकरण है। किसी रेखा से दिये हुये बिन्दु की लम्बवत् दूरी ही लम्ब की लम्बाई होती है।

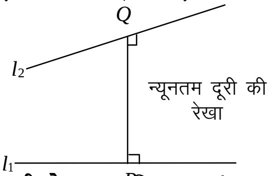
सरल रेखा में बिन्दु का प्रतिबिम्ब : यदि दी हुई रेखा पर बिन्दु P से लम्ब PL को Q तक इस प्रकार बढ़ाया जाये कि $PL = QL$ हो, तो दी हुई रेखा में P का प्रतिबिम्ब Q होगा। L लम्बपाद है या रेखा पर P का प्रक्षेप है।



दो सरल रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी
(Shortest distance between two straight lines)

(1) **विषम रेखाएँ** (Skew lines) **:** दो सरल रेखाएँ जो न समान्तर हैं, और न ही प्रतिच्छेद करती हैं, विषम रेखाएँ कहलाती हैं।

अतः विषम रेखाएँ वे रेखायें हैं, जो एक ही समतल में स्थित नहीं हैं।



(2) **न्यूनतम दूरी की रेखा :** यदि l_1 एवं l_2 दो विषम रेखाएँ हों, तो वह रेखा, जो इन दोनों अप्रतिच्छेदित रेखाओं के लम्बवत् है, न्यूनतम दूरी की रेखा कहलाती है।

रेखाओं l_1 व l_2 के लम्बवत् केवल एक ही रेखा होती है।

(3) **दो विषम रेखाओं की न्यूनतम दूरी :** माना दो विषम रेखाएँ $\dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1}$ एवं $\dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}$ हैं।

अतः इन रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी

$$d=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-l_1n_2)^2+(l_1m_2-m_1l_2)^2}}$$ है।

समतल

समतल की परिभाषा एवं इसके समीकरण
(Definition of plane and its equations)

यदि बिन्दु $P(x, y, z)$ किसी विशेष प्रतिबन्ध के अन्तर्गत गति करता है, तो यह त्रिविमीय क्षेत्र में किसी सतह पर या किसी रेखा पर स्थित होगा अथवा यह केवल एक बिन्दु मात्र होगा। प्रतिबन्ध आरोपित करने के पश्चात् P के क्षेत्र के रूप में जो कुछ भी हमें प्राप्त होता है, उसे P का बिन्दुपथ कहते हैं। अब हम समतल या वक्र-पृष्ठ की चर्चा करते हैं। यदि बिन्दुपथ पर Q कोई अन्य बिन्दु है, तथा सरल रेखा PQ के सभी बिन्दु, बिन्दुपथ पर स्थित हैं, तो यह एक समतल होगा। दूसरे शब्दों में, सरल रेखा PQ, जितनी भी छोटी व जिस दिशा में भी हो, पूर्णतः यदि बिन्दुपथ पर स्थित हो, तब बिन्दुपथ एक समतल होगा, अन्यथा कोई वक्र-पृष्ठ।

(1) **समतल का व्यापक समीकरण :** $Ax+By+Cz+D=0$ रूप का प्रत्येक एक घातीय समीकरण किसी समतल को व्यक्त करता है। x, y, z के गुणांक, अर्थात् A, B, C समतल के अभिलंब के दिक् अनुपात हैं।

(2) **निर्देशांक-समतलों के समीकरण**

समतल $XOY: z=0$

समतल $YOZ: x=0$

समतल $ZOX: y=0$

(3) **विभिन्न रूपों में समतल का समीकरण**

(i) **अन्तःखण्ड रूप :** यदि समतल निर्देशांक अक्षों पर a, b, c लम्बाई का अन्तःखण्ड काटता है, तो इसका समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ है।

(ii) **अभिलम्ब रूप :** समतल के समीकरण का अभिलम्ब रूप $lx+my+nz=p$ हैं,

जहाँ l, m, n समतल के अभिलंब की दिक् कोज्याएँ हैं एवं p मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई है।

(4) **विशेष स्थिति में समतल का समीकरण :** मूलबिन्दु से गुजरने वाले समतल का समीकरण $Ax+By+Cz=0$ है अर्थात् यदि $D=0$ तो समतल मूल बिन्दु से गुजरता है।

(5) **निर्देशांक-अक्षों के लम्बवत् या निर्देशांक-समतलों के समान्तर समतल का समीकरण**

(i) YOZ-समतल के समान्तर (या x-अक्ष के लम्बवत्) तथा 'a' दूरी पर समतल का समीकरण $x=a$ होगा।

(ii) ZOX-समतल के समान्तर (या y-अक्ष के लम्बवत्) तथा 'b' दूरी पर समतल का समीकरण $y=b$ होगा।

(iii) XOY-समतल के समान्तर (या z-अक्ष के लम्बवत्) तथा 'c' दूरी पर समतल का समीकरण $z=c$ होगा।

(6) **निर्देशांक-अक्षों के समान्तर या निर्देशांक समतल के लम्बवत् समतल का समीकरण**

(i) x-अक्ष के समान्तर या YOZ-समतल के लम्बवत् समतल का समीकरण $By+Cz+D=0$ होगा।

(ii) y-अक्ष के समान्तर या ZOX-समतल के लम्बवत् समतल का समीकरण $Ax+Cz+D=0$ होगा।

(iii) z-अक्ष के समान्तर या XOY-समतल के लम्बवत् समतल का समीकरण $Ax+By+D=0$ होगा।

(7) **दिये हुए समतल के समान्तर समतल का समीकरण :** दिये हुए समतल $ax+by+cz+d=0$ के समान्तर समतल $ax+by+cz+d'=0$ है, अर्थात् केवल स्थिरांक पद को परिवर्तित करते हैं।

(8) **दो समतलों के प्रतिच्छेदन से जाने वाले समतल का समीकरणः** दो समतलों $P=a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ एवं $Q=a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ के प्रतिच्छेदन से जाने वाले समतल का समीकरण $P+\lambda Q=0$ होगा, जहाँ λ प्राचल है।

दिये हुए बिन्दु से गुजरने वाले समतल का समीकरण
(Equation of plane passing through the given point)

(1) **एक दिये हुए बिन्दु से गुजरने वाले समतल का समीकरण :** बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से गुजरने वाले समतल का समीकरण $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ होता है, जहाँ A, B, C समतल के अभिलंब के दिक् अनुपात हैं।

(2) **तीन बिन्दुओं से गुजरने वाले समतल का समीकरण :** तीन असमरेखीय बिन्दुओं $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ एवं (x_3, y_3, z_3) से गुजरने वाले समतल का समीकरण है, $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$ या $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$

बिन्दु $A(\alpha, \beta, \gamma)$ से दिये हुए समतल $ax+by+cz+d=0$ पर डाले गये लम्ब का पाद (Foot of perpendicular from a point $A(\alpha, \beta, \gamma)$ to a given plane $ax+by+cz+d=0$)

यदि दिये हुए समतल पर A से खींचा गया एक लम्ब AP है, तो यह अभिलम्ब के समान्तर होगा। अतः इसका समीकरण होगा

$$\frac{x-\alpha}{a}=\frac{y-\beta}{b}=\frac{z-\gamma}{c}=r, \quad \text{(माना)}$$

इस पर कोई बिन्दु $P(ar+\alpha, br+\beta, cr+\gamma)$ है, जो कि दिये हुए समतल पर स्थित है, जिससे r का मान प्राप्त होता है, अतः बिन्दु P प्राप्त होता है।

(1) **लम्बवत् दूरीः** बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ से समतल $ax+by+cz+d=0$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई $\left|\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$ होती है।

दो समान्तर समतलों $Ax+By+Cz+D_1=0$ एवं $Ax+By+Cz+D_2=0$ के बीच की दूरी $\frac{D_2 \sim D_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ होती है।

(2) **समतल के सापेक्ष दो बिन्दुओं की स्थितिः** दो बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$, समतल $ax+by+cz+d=0$ के एक ही तरफ या विपरीत ओर होते हैं, यदि $ax_1+by_1+cz_1+d$ तथा $ax_2+by_2+cz_2+d$ क्रमशः समान या विपरीत चिन्ह के हैं। बिन्दु P तथा Q को जोड़ने वाली रेखा को समतल बाह्यतः या अन्तः विभाजित करता है, यदि P तथा Q क्रमशः समतल के एक ओर हैं, या विपरीत ओर हैं।

दो समतलों के बीच कोण (Angle between two planes)

कार्तीय रूप : समतलों के बीच कोण, किसी बिन्दु से समतलों पर खींचे गये अभिलंबों के मध्य कोण के बराबर होता है। समतलों

$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ तथा $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ के मध्य कोण

$\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}}\right)$ है।

(i) यदि $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$, तो समतल एक-दूसरे के लम्बवत् होंगे।

(ii) यदि $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$, तो समतल एक-दूसरे के समान्तर होंगे।

दिये गये दो समतलों के बीच कोणार्धक समतलों के समीकरण (Equation of planes bisecting angle between two given planes)

समतलों $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

एवं $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

के बीच कोणार्धक समतलों के समीकरण हैं,

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{\sqrt{(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}}.$$

(i) यदि कोणार्धक समतल एवं दिये गये समतलों में से एक के बीच कोण 45° से कम हो, तो यह कोणार्धक, न्यून कोणार्धक कहलाता है, अन्यथा यह अधिक कोणार्धक होगा।

(ii) यदि $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$ ऋणात्मक हो, तब मूलबिन्दु न्यूनकोण में स्थित होगा तथा यदि $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$ धनात्मक हो, तब मूलबिन्दु अधिककोण में स्थित होगा, जबकि d_1 तथा d_2 समान चिन्ह रखते हों।

समतल में किसी बिन्दु का प्रतिबिम्ब (Image of a point in a plane)

माना P और Q दो बिन्दु हैं एवं π एक समतल इस प्रकार है, कि

(i) रेखा PQ, समतल π के लम्बवत् है।

(ii) PQ का मध्य बिन्दु समतल π पर स्थित है।

तब दोनों बिन्दु समतल π में एक-दूसरे के प्रतिबिम्ब होंगे।

प्रतिबिम्ब ज्ञात करने की क्रिया-विधिः

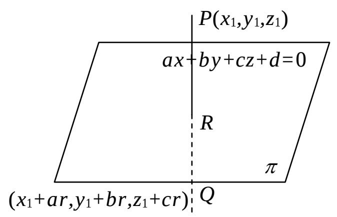
(i) P से गुजरने वाली तथा दिये हुये समतल पर अभिलम्ब रेखा का समीकरण निम्न रूप में लिखते हैं $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}=r$

(ii) प्रतिबिम्ब Q के निर्देशांक (x_1+ar, y_1+br, z_1+cr) के रूप में लिखते हैं।

(iii) PQ के मध्य बिन्दु R के निर्देशांक ज्ञात करते हैं ।

(iv) मध्य बिन्दु R के निर्देशांक को समतल के समीकरण में रखकर r का मान ज्ञात करते हैं।

(v) r का मान Q के निर्देशांक में रखते हैं।



समतलीय रेखाएँ (Coplanar lines)

रेखाएँ समतलीय कहलायेंगी, यदि वे एक ही समतल में स्थित हों या एक तल इन रेखाओं से गुजरता हो।

रेखाओं के समतलीय होने का प्रतिबंध : यदि रेखाएँ $\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ तथा $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$ समतलीय हों, तो $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$ तथा समतल का समीकरण

$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$ या $\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$ होगा।

रेखा एवं समतल

एक दी हुई रेखा से गुजरने वाला समतल (Equation of plane through a given line)

(1) यदि सममित रूप में रेखा का समीकरण

$\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ हो, तो

समतल का समीकरण है, $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ ... (i)

जहाँ $al+bm+cn=0$ .....(ii)

(2) यदि व्यापक रूप में रेखा का समीकरण

$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0=a_2x+b_2y+c_2z+d_2$ हो, तो इन रेखाओं से गुजरने वाले समतल का समीकरण $(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$ होगा।

(3) **एक दी गई रेखा से गुजरने वाले तथा दूसरी रेखा के समान्तर किसी समतल का समीकरण :** माना दूसरी रेखा की दिक् कोज्याएँ l_2, m_2, n_2 हैं, तो चूँकि समतल दी हुई रेखा के समान्तर है, अतः समतल पर अभिलम्ब, इस रेखा के लम्बवत् होगा।

$\therefore \quad al_2+bm_2+cn_2=0$ .....(iii)

अतः (i), (ii) व (iii) से, समतल का समीकरण होगा,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

किसी रेखा और समतल का प्रतिच्छेदन बिन्दु (Intersection point of a line and a plane)

एक रेखा और समतल के प्रतिच्छेद बिन्दु को ज्ञात करने के लिए निम्न क्रिया–विधि का उपयोग करते हैं

Step I : प्राचल r के पदों में रेखा पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक लिखते हैं।

Step II : इस बिन्दु के निर्देशांक को समतल के समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर r का मान प्राप्त होता है।

Step III : Step I से प्राप्त बिन्दु के निर्देशांक में r का मान रखते हैं।

रेखा और समतल के बीच कोण (Angle between line and plane)

रेखा $\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$ एवं समतल $ax+by+cz+d=0$ के बीच कोण θ हो, तो $\sin\theta=\frac{al+bm+cn}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}\sqrt{(l^2+m^2+n^2)}}$.

(i) रेखा, समतल के लम्बवत् होगी, यदि $\frac{a}{l}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}$.

(ii) रेखा, समतल के समान्तर होगी, यदि $al+bm+cn=0$.

(iii) रेखा, समतल में स्थित होगी, यदि $al+bm+cn=0$ एवं $a\alpha+b\beta+c\gamma+d=0$.

एक समतल पर किसी रेखा का प्रक्षेप
(Projection of a line on a plane)

यदि P दी हुई रेखा तथा समतल का प्रतिच्छेद बिन्दु हो तथा रेखा पर स्थित किसी बिन्दु से समतल पर डाले गये लम्ब का पाद Q हो, तो PQ दिये हुए समतल पर दी गई रेखा का प्रक्षेप कहलाता है।

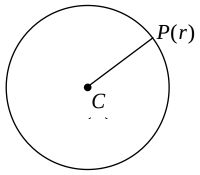
समतल के परितः रेखा का प्रतिबिम्बः माना रेखा $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ है तथा समतल $a_2x+b_2y+c_2z+d=0$ है।

रेखा और समतल का प्रतिच्छेद बिन्दु (माना P) ज्ञात करते हैं। बिन्दु (x_1, y_1, z_1) का प्रतिबिम्ब (माना Q) समतल के परितः ज्ञात करते हैं। रेखा PQ परावर्तित रेखा होती है।

गोला

गोला उस बिन्दु का बिन्दुपथ है, जो त्रिविम में इस प्रकार गतिशील है, कि यह एक स्थिर बिन्दु से सर्वथा अचर दूरी पर रहता है।

स्थिर बिन्दु को गोले का केन्द्र तथा अचर दूरी को त्रिज्या कहते हैं।



गोले का व्यापक समीकरण (General equation of sphere)

गोले का व्यापक समीकरण है,

$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$, जिसका केन्द्र $(-u,-v,-w)$ है।

अर्थात्, $\left(\frac{-x \text{ का गुणांक}}{2}, \frac{-y \text{ का गुणांक}}{2}, \frac{-z \text{ का गुणांक}}{2}\right)$

एवं त्रिज्या $=\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$.

विभिन्न रूपों में गोले का समीकरण
(Equation of sphere in various forms)

(1) **दिये हुए केन्द्र तथा त्रिज्या के साथ गोले का समीकरण :** गोले का समीकरण, जिसका केन्द्र (a, b, c) है तथा त्रिज्या R है, होगा $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ ......(i)

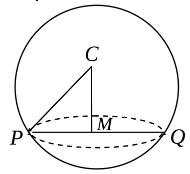
यदि केन्द्र मूलबिन्दु हो, तो गोले का समीकरण $x^2+y^2+z^2=R^2$ होगा, जो कि गोले के समीकरण का मानक रूप कहलाता है।

(2) **गोले के समीकरण का व्यास-रूप :** यदि (x_1, y_1, z_1) एवं (x_2, y_2, z_2) गोले के व्यास के सिरों के निर्देशांक हों, तो इसका समीकरण $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0$ होगा।

एक समतल द्वारा गोले का विभाजन
(Section of a sphere by a plane)

माना कि किसी गोले को एक समतल द्वारा काटा जाता है। गोले एवं समतल दोनों के उभयनिष्ठ बिन्दुओं के समुच्चय को गोले का समतलीय खण्ड कहते हैं। गोले का समतल खण्ड हमेशा एक वृत्त होता है। गोले तथा समतल के समीकरण को एक साथ लेने पर समतल खण्ड प्रदर्शित होता है।

माना C गोले का केन्द्र है एवं समतल पर C से डाले गये लम्ब का पाद M है, तो M वृत्त का केन्द्र होगा एवं वृत्त की त्रिज्या $PM=\sqrt{CP^2-CM^2}$ होगी।



रेखा CM, जो C से गुजरती है एवं समतल के लम्बवत् है, तथा समतल का प्रतिच्छेद बिन्दु ही वृत्त का केन्द्र M है।

वृत्त का केन्द्र : गोले के केन्द्र से समतल पर डाले गये लम्ब का लम्बपाद वृत्त का केन्द्र होता है।

(वृत्त की त्रिज्या)^2 = (गोले की त्रिज्या)^2 – (वृत्त से समतल पर डाला गया लम्ब)^2

वृहद् वृत्त (Great circle) **:** गोले के केन्द्र से जाने वाले समतल द्वारा गोले का विभाजन खण्ड वृहद् वृत्त होता है। इसके केन्द्र तथा त्रिज्या दिये हुये गोले के केन्द्र तथा त्रिज्या के समान होते हैं।

गोले से किसी समतल के स्पर्शी होने का प्रतिबंध
(Condition of tangency of a plane to a sphere)

एक समतल दिये हुए गोले को स्पर्श करेगा, यदि गोले के केन्द्र से समतल पर डाले गये लम्ब की लम्बाई, गोले की त्रिज्या के बराबर हो।

समतल $lx+my+nz=p$, गोला

$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ को स्पर्श करेगा, यदि

$(ul+vm+wn-p)^2=(l^2+m^2+n^2)(u^2+v^2+w^2-d)$.

सरल रेखा एवं गोले का प्रतिच्छेदन
(Intersection of straight line and a sphere)

माना गोले तथा सरल रेखा के समीकरण क्रमशः हैं,

$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ .....(i)

तथा $\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}=r$, (माना) .....(ii)

रेखा (ii) पर कोई बिन्दु $(\alpha+lr, \beta+mr, \gamma+nr)$ है।

यदि यह बिन्दु गोले (i) पर स्थित हो, तो

$(\alpha+lr)^2+(\beta+mr)^2+(\gamma+nr)^2+2u(\alpha+lr)$
$+2v(\beta+mr)+2w(\gamma+nr)+d=0$

या $r^2[l^2+m^2+n^2]+2r[l(u+\alpha)+m(v+\beta)+n(w+\gamma)]$
$+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2u\alpha+2v\beta+2w\gamma+d)=0$ ....(iii)

यह r में एक द्विघात समीकरण है, जिससे r के दो मान प्राप्त होंगे। इसलिए रेखा (ii), गोला (i) से दो बिन्दुओं पर मिलती है, जो कि समीकरण (iii) के मूल के अनुसार वास्तविक, संपाती तथा अधिकल्पित हो सकते हैं।

यदि l, m, n रेखा की वास्तविक दिक् कोज्याएँ हैं, तो $l^2+m^2+n^2=1$ तथा तब समीकरण (iii) को हल कर सकते हैं।

दो गोलों का प्रतिच्छेद कोण

(Angle of intersection of two spheres)

दो गोलों का प्रतिच्छेदी कोण उनके प्रतिच्छेदन बिन्दु पर स्पर्शी तलों के बीच के कोण के बराबर होता है। चूँकि उभयनिष्ठ बिन्दु पर गोलों की त्रिज्याएँ स्पर्शी समतलों पर अभिलम्ब होती हैं, इसलिए यह कोण उनके प्रतिच्छेद बिन्दु पर गोलों की त्रिज्याओं के बीच कोण के बराबर होता है।

यदि दो गोलों का प्रतिच्छेदी कोण समकोण हो, तो गोले लाम्बिक कहलाते हैं।

दो गोलों के लाम्बिक होने का प्रतिबंध :

माना दो गोलों के समीकरण हैं,

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0 \quad ....(i)$$

एवं $x^2+y^2+z^2+2u'x+2v'y+2w'z+d'=0 \quad .....(ii)$

यदि गोले (i) तथा (ii) लाम्बिक रूप से काटते हैं, तो $2uu'+2vv'+2ww'=d+d'$, जो कि अभीष्ट प्रतिबंध है।

- यदि गोले $x^2+y^2+z^2=a^2$ तथा $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ लाम्बिक काटें, तो $d=a^2$.
- यदि r_1 तथा r_2 त्रिज्या के दो गोले लाम्बिक काटें, तो उभयनिष्ठ वृत्त की त्रिज्या $\frac{r_1r_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$ होती है।

Tips & Tricks

- निर्देशांक–अक्षों के साथ समान कोण पर झुकी रेखाओं की संख्या 4 होती है।
- यदि रेखा की दिक् कोज्याएँ l, m, n हों, तो lmn का अधिकतम मान $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ होगा।
- xy-तल पर किसी बिन्दु के निर्देशांक $(x, y, 0)$, yz-तल पर $(0, y, z)$ तथा zx-तल पर $(x, 0, z)$ होते हैं।
- x-अक्ष पर किसी बिन्दु के निर्देशांक $(x, 0, 0)$, y-अक्ष पर $(0, y, 0)$ एवं z-अक्ष पर $(0, 0, z)$ होते हैं।
- यदि कोई बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ है, तो एक रेखा जिसकी दिक् कोज्याएँ l, m, n हैं, पर OP का प्रक्षेप $l_1x_1 + m_1y_1 + n_1z_1$ होगा, जहाँ O मूलबिन्दु है।
- यदि दो संगामी रेखाओं की दिक् कोज्याएँ l_1, m_1, n_1 एवं l_2, m_2, n_2 हों, तो रेखाओं के बीच कोण को समद्विभाजित करने वाली रेखाओं की दिक् कोज्याएँ $l_1 \pm l_2, m_1 \pm m_2, n_1 \pm n_2$. के समानुपाती होंगी ।
- किसी घन के दो विकर्णों के बीच कोण $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ होता है।
- किसी घन के फलकों के विकर्ण एवं घन के विकर्ण के बीच का कोण $\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ होता है।
- यदि किसी समकोणिक घनाभ की कोरें a, b, c हों, तो दो विकर्णों के बीच का कोण $\cos^{-1}\left[\frac{\pm a^2 \pm b^2 \pm c^2}{a^2+b^2+c^2}\right]$ होगा।
- चूँकि x, y तथा z-अक्ष मूल बिन्दु से गुजरते हैं, तथा इनकी दिक् कोज्याएँ क्रमशः 1, 0, 0; 0, 1, 0 एवं 0, 0, 1 होती हैं, इसलिए x-अक्ष का समीकरण :

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-0}{0} \text{ या } y=0 \text{ तथा } z=0.$$

y-अक्ष का समीकरण: $\frac{x-0}{0}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{0}$ या $x=0$ तथा $z=0$;

z-अक्ष का समीकरण: $\frac{x-0}{0}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-0}{1}$ या $x=0$ तथा $y=0$.

- विषम रेखाएँ असमतलीय रेखाएँ होती हैं।
- समान्तर रेखाएँ विषम रेखाएँ नहीं होती हैं।
- यदि दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करें, तो उनके बीच न्यूनतम दूरी शून्य होती है।
- दो विषम रेखाओं की न्यूनतम दूरी दोनों रेखाओं के लम्बवत् होती है।
- **समतल द्वारा विभाजन :** एक समतल $ax+by+cz+d=0$, बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ व $Q(x_2, y_2, z_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड PQ को $-\left(\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{ax_2+by_2+cz_2+d}\right)$ के अनुपात में विभाजित करता है।
- यदि $ax+by+cz+d=0$ एक समतल है, तब बिन्दु (x_1,y_1,z_1) तथा (x_2,y_2,z_2), $\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{ax_2+by_2+cz_2+d}>0$ या <0 के अनुसार क्रमशः एक ही ओर या विपरीत ओर होंगे।
- **निर्देशांक समतलों द्वारा विभाजन :** निर्देशांक समतल, बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ व $Q(x_2, y_2, z_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड PQ को निम्न अनुपात में विभाजित करते हैं :

(i) yz-समतल : $-\frac{x_1}{x_2}$

(ii) zx-समतल : $-\frac{y_1}{y_2}$

(iii) xy-समतल : $-\frac{z_1}{z_2}$

- जब दो गोले एक दूसरे को स्पर्श करते हैं, तो उनका उभयनिष्ठ स्पर्श समतल $S_1-S_2=0$ होगा तथा जब वे एक वृत्त में काटते हैं, तो वृत्त का समतल $S_1-S_2=0$ होगा। दोनों स्थितियों में x^2,y^2,z^2 के गुणांक को इकाई रखते हैं।
- माना गोला $x^2+y^2+z^2=r^2$ के केन्द्र से समतल $Ax+By+Cz+D=0$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई p हो, तो

(i) समतल गोले को एक वृत्त में काटेगा, यदि एवं केवल यदि $p<r$ तथा इस स्थिति में, वृत्त की त्रिज्या $\sqrt{r^2-p^2}$ होगी।

(ii) समतल, गोले को स्पर्श करेगा, यदि एवं केवल यदि $p=r$.

(iii) समतल, गोले से नहीं मिलेगा, यदि एवं केवल यदि $p>r$.

- **संकेन्द्री गोले का समीकरण:**

गोला $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ का संकेन्द्री गोला $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+\lambda=0$ होता है, जहाँ λ एक वास्तविक संख्या है, जिससे कि गोले का समीकरण प्राप्त होता है।

Ordinary Thinking

Objective Questions

निर्देशांक निकाय, दिक् अनुपात तथा दिक् कोज्याएँ, प्रक्षेप

1. यदि बिन्दु (0, 1, 2), (2, –1, 3) तथा (1, –3, 1) एक त्रिभुज के शीर्ष हों, तो त्रिभुज है

(a) समकोणीय (b) समद्विबाहु समकोणीय

(c) समबाहु (d) इनमें से कोई नहीं

2. यदि बिन्दु (–1, 3, 2), (–4, 2, –2) तथा (5, 5, λ) समरेखीय हों तो $\lambda =$

(a) – 10 (b) 5

(c) – 5 (d) 10

3. समतल $2x + 3y - 6z = 5$ के अभिलम्ब की दिक् कोज्यायें हैं

(a) 2, 3, – 6 (b) $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}$

(c) $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{6}{5}$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. बिन्दुओं (1, 2, 3) तथा (3, – 5, 6) को मिलाने वाली रेखा को $3 : -5$ के अनुपात में विभाजित करने वाला बिन्दु है

(a) $\left(2, \frac{-25}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (b) $\left(-2, \frac{25}{2}, \frac{-3}{2}\right)$

(c) $\left(2, \frac{25}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

5. निम्नलिखित में से किससे बिन्दु (1, 2, 3) की दूरी $\sqrt{10}$ है

(a) मूलबिन्दु (b) x-अक्ष

(c) y-अक्ष (d) z-अक्ष

6. यदि एक रेखा निर्देशांक अक्षों की धनात्मक दिशा से α, β, γ कोण बनाती हो, तो $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$ का मान है

[RPET 2000; AMU 2002; MP PET 1989, 98, 2000, 03; Pb. CET 2001]

(a) 2 (b) 1

(c) 3 (d) 0

7. यदि α, β, γ एक सदिश के दिक् कोण हों और $\cos\alpha = \frac{14}{15}$ तथा $\cos\beta = \frac{1}{3}$, तो $\cos\gamma =$

(a) $\pm\frac{2}{15}$ (b) $\frac{1}{5}$

(c) $\pm\frac{1}{15}$ (d) इनमें से कोई नहीं

8. x-अक्ष पर स्थित सभी बिन्दुओं के लिये [MP PET 1988]

(a) $x = 0$ (b) $y = 0$

(c) $x = 0, y = 0$ (d) $y = 0, z = 0$

9. बिन्दुओं (1, 3, 2) तथा (2, 1, 3) के बीच की दूरी है [MP PET 1988]

(a) 12 (b) $\sqrt{12}$

(c) $\sqrt{6}$ (d) 6

10. रेखा $x = y = z$ की दिक् कोज्यायें हैं [MP PET 1989]

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

(c) 1, 1, 1 (d) इनमें से कोई नहीं

11. बिन्दु (1, 2, 3) की निर्देशांक अक्षों से दूरियाँ हैं

(a) 13, 10, 5 (b) $\sqrt{13}, \sqrt{10}, \sqrt{5}$

(c) $\sqrt{5}, \sqrt{13}, \sqrt{10}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{5}}$

12. यदि त्रिभुज जिसके शीर्ष (a,1, 3), (– 2, b, –5) तथा (4, 7, c) हैं, का केन्द्रक मूलबिन्दु हो, तो a, b, c के मान क्रमशः होंगे

(a) – 2, – 8, –2 (b) 2, 8, –2

(c) –2, – 8, 2 (d) 7, –1, 0

13. निम्न बिन्दुओं के समूह में से कौनसा समरैखिक नहीं है [MP PET 1990]

(a) (1, –1, 1), (–1, 1, 1), (0, 0, 1)

(b) (1, 2, 3), (3, 2, 1), (2, 2, 2)

(c) (–2,4, –3), (4, –3, –2), (–3, –2, 4)

(d) (2, 0, –1), (3, 2, –2), (5, 6, –4)

14. यदि एक सरल रेखा तीनों अक्षों से बराबर कोण बनाती है, तो किसी भी एक अक्ष से बनाए गये कोण की कोज्या (cosine) का मान होगा [MP PET 1992]

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

15. यदि कोई रेखा x-अक्ष तथा y-अक्ष से क्रमशः 30° तथा 45° के कोण बनाये तो उसके द्वारा z-अक्ष से बनाया गया कोण है

(a) 45° (b) 60°

(c) 120° (d) इनमें से कोई नहीं

16. बिन्दुओं (0, 1, 1), (1, 1, 2) तथा (–1, 2, – 2) से होकर जाने वाले समतल के अभिलम्ब के दिक् अनुपात हैं

(a) (1, 1, 1) (b) (2, 1, –1)

(c) (1, 2, –1) (d) (1, – 2, – 1)

17. यदि एक सदिश की लम्बाई 21 तथा दिक् अनुपात 2, – 3, 6 हो, तो उसकी दिक् कोज्यायें हैं

(a) $\frac{2}{21}, \frac{-1}{7}, \frac{2}{7}$ (b) $\frac{2}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{6}{7}$

(c) $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}$ (d) इनमें से कोई नहीं

18. यदि बिन्दुओं P, Q, R तथा S के निर्देशांक क्रमशः (1, 2, 3), (4, 5, 7), (– 4, 3, – 6) तथा (2, 0, 2) हों, तो

(a) $PQ \| RS$ (b) $PQ \perp RS$

(c) $PQ = RS$ (d) इनमें से कोई नहीं

19. यदि बिन्दुओं A, B, C, D के निर्देशांक क्रमशः (2, 3, –1), (3, 5, –3), (1, 2, 3) तथा (3, 5, 7) हों, तो AB का CD पर प्रक्षेप होगा

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) $\sqrt{3}$

20. यदि बिन्दुओं P तथा Q के निर्देशांक (1, –2, 1) तथा (2, 3, 4) हों और O मूलबिन्दु हो, तो

(a) $OP = OQ$ (b) $OP \perp OQ$

(c) $OP \parallel OQ$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. यदि एक रेखा के अक्षों पर प्रक्षेप 2, –1, 2 हों, तो रेखा की लम्बाई होगी

(a) 3 (b) 4

(c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

22. *xy*-समतल, बिन्दुओं (2, 4, 5) तथा (– 4, 3, – 2) को मिलाने वाली रेखा को किस अनुपात में विभाजित करता है [MP PET 1988]

(a) 3 : 5 (b) 5 : 2

(c) 1 : 3 (d) 3 : 4

23. यदि $A(1, 2, -1)$ तथा $B(-1, 0, 1)$ दिए गये हों, तो एक बिन्दु *P* के निर्देशांक जो AB को $1:2$ के अनुपात में बाह्य विभाजित करते हों, निम्न हैं [MP PET 1989]

(a) $\frac{1}{3}(1, 4, -1)$ (b) (3, 4, –3)

(c) $\frac{1}{3}(3, 4, -3)$ (d) इनमें से कोई नहीं

24. बिन्दुओं (3, 4, 1) तथा (5, 1, 6) को मिलाने वाली रेखा और *xy*-तल का प्रतिच्छेद बिन्दु है

(a) $(13, 23, 0)$ (b) $\left(\frac{13}{5}, \frac{23}{5}, 0\right)$

(c) (–13, 23, 0) (d) $\left(-\frac{13}{5}, \frac{23}{5}, 0\right)$

25. यदि बिन्दुओं *A* तथा *B* के निर्देशांक क्रमशः (1, 2, 3) तथा (7, 8, 7) हों, तो रेखाखण्ड *AB* के अक्षों पर प्रक्षेप होंगे

(a) 6, 6, 4 (b) 4, 6, 4

(c) 3, 3, 2 (d) 2, 3, 2

26. बिन्दु *P* के निर्देशांक (x, y, z) हैं तथा रेखा *OP*, जहाँ *O* मूलबिन्दु है, की दिक् कोज्यायें l, m, n हैं। यदि $OP = r$, तो

(a) $l = x, m = y, n = z$ (b) $l = xr, m = yr, n = zr$

(c) $x = lr, y = mr, z = nr$ (d) इनमें से कोई नहीं

27. एक रेखा निर्देशांक अक्षों से α, β, γ कोण बनाती है। यदि $\alpha + \beta = 90^o$, तो $\gamma =$

(a) 0 (b) 90°

(c) 180° (d) इनमें से कोई नहीं

28. बिन्दु (–2, 4, 7), (3, –6, –8) तथा (1, –2, –2) हैं [AI CBSE 1982]

(a) समरेखीय (b) समबाहु त्रिभुज के शीर्ष

(c) समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष (d) इनमें से कोई नहीं

29. यदि बिन्दु $A(9, 8, -10)$, $B(3, 2, -4)$ तथा $C(5, 4, -6)$ समरेखीय हों, तो बिन्दु *C*, रेखा AB को किस अनुपात में विभाजित करता है

(a) 2 : 1 (b) 3 : 1

(c) 1 : 2 (d) –1 : 2

30. एक रेखा के निर्देशांक अक्षों पर प्रक्षेप क्रमशः 4, 6, 12 हैं। रेखा की दिक् कोज्यायें हैं

(a) $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}$ (b) 2, 3, 6

(c) $\frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \frac{6}{11}$ (d) इनमें से कोई नहीं

31. यदि किसी बिन्दु की निर्देशांक अक्षों से दूरियों के वर्गों का योग 36 हो, तो उसकी मूलबिन्दु से दूरी होगी

(a) 6 (b) $3\sqrt{2}$

(c) $2\sqrt{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

32. बिन्दुओं $(-2, 1, -8)$ तथा (a, b, c) को मिलाने वाली रेखा उस रेखा के समान्तर है, जिसके दिक् अनुपात 6, 2, 3 हैं। तब a, b, c के मान क्रमशः हैं

(a) 4, 3, – 5 (b) $1, 2, -\frac{13}{2}$

(c) 10, 5, – 2 (d) इनमें से कोई नहीं

33. बिन्दुओं (4, 3, –5) तथा (–2, 1, –8) को मिलाने वाली रेखा के दिक् अनुपात हैं [AI CBSE 1984; MP PET 1988]

(a) $\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}$ (b) 6, 2, 3

(c) 2, 4, –13 (d) इनमें से कोई नहीं

34. बिन्दुओं $(3, 5, -7)$ तथा $(-2, 1, 8)$ को मिलाने वाली रेखा को *yz*-समतल निम्न बिन्दु पर प्रतिच्छेद करेगा [MP PET 1993]

(a) $\left(0, \frac{13}{5}, 2\right)$ (b) $\left(0, -\frac{13}{5}, -2\right)$

(c) $\left(0, -\frac{13}{5}, \frac{2}{5}\right)$ (d) $\left(0, \frac{13}{5}, \frac{2}{5}\right)$

35. उस बिन्दु के निर्देशांक, जो बिन्दुओं $(0, 0, 0), (a, 0, 0), (0, b, 0)$ व $(0, 0, c)$ से समान दूरी पर है, होंगे [MP PET 1993]

(a) $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ (b) $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

(c) $\left(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ (d) $\left(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$

36. बिन्दुओं (–1, 0, 3) व (2, 5, 1) को मिलाने वाली रेखाखण्ड का उस रेखा पर प्रक्षेप, जिसके दिक् अनुपात क्रमशः 6, 2, 3 हैं, होगा [AI CBSE 1985]

(a) $\frac{10}{7}$ (b) $\frac{22}{7}$

(c) $\frac{18}{7}$ (d) इनमें से कोई नहीं

37. बिन्दु (1, 1, 1), (–2, 4, 1), (–1, 5, 5) व (2, 2, 5) शीर्ष हैं

(a) आयत के (b) वर्ग के

(c) समान्तर चतुर्भुज के (d) समलम्ब चतुर्भुज के

38. यदि l_1, m_1, n_1 व l_2, m_2, n_2 दो परस्पर लम्बवत् रेखाओं की दिक् कोज्यायें हों, तो दोनों रेखाओं पर लम्ब रेखा की दिक् कोज्यायें होंगी

(a) $(m_1n_2 - m_2n_1), (n_1l_2 - n_2l_1), (l_1m_2 - l_2m_1)$

(b) $(l_1l_2 - m_1m_2), (m_1m_2 - n_1n_2), (n_1n_2 - l_1l_2)$

(c) $\frac{1}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}, \frac{1}{\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

(d) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

39. यदि एक रेखा त्रिविमीय निर्देशांक अक्षों के साथ क्रमशः α, β, γ कोण बनाती है, तो $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma =$ [MP PET 1994, 95,99; RPET 2003; Kerala (Engg.) 2005]

(a) – 2 (b) – 1

(c) 1 (d) 2

40. बिन्दु (3, 4, 5) की *y*-अक्ष से लम्बवत् दूरी है [MP PET 1994, Pb. CET 2002]

(a) $\sqrt{34}$ (b) $\sqrt{41}$
(c) 4 (d) 5

41. परस्पर लम्बवत् एवं $l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2$ तथा l_3, m_3, n_3 दिक् कोज्याओं वाली रेखाओं से बराबर कोण बनाने वाली रेखा की दिक् कोज्यायें होंगी
(a) $l_1 + l_2 + l_3, m_1 + m_2 + m_3, n_1 + n_2 + n_3$
(b) $\frac{l_1 + l_2 + l_3}{\sqrt{3}}, \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\sqrt{3}}, \frac{n_1 + n_2 + n_3}{\sqrt{3}}$
(c) $\frac{l_1 + l_2 + l_3}{3}, \frac{m_1 + m_2 + m_3}{3}, \frac{n_1 + n_2 + n_3}{3}$
(d) इनमें से कोई नहीं

42. एक बिन्दु (x, y, z) x-अक्ष के समान्तर गति करता है, तो x, y, z में से कौनसा चर अपरिवर्तित रहेगा
(a) x (b) y व z
(c) x व y (d) z व x

43. यदि रेखा की दिक् कोज्यायें $\left(\frac{1}{c}, \frac{1}{c}, \frac{1}{c}\right)$ हैं, तो [JET 1989; CET 1993]
(a) $c > 0$ (b) $c = \pm\sqrt{3}$
(c) $0 < c < 1$ (d) $c > 2$

44. समतल XOZ, बिन्दुओं $(1, -1, 5)$ व $(2, 3, 4)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को $\lambda : 1$ में विभाजित करता है, तो λ = [Pb. CET 1988]
(a) – 3 (b) 3
(c) $-\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{3}$

45. मूलबिन्दु O के सापेक्ष किसी बिन्दु P के निर्देशांक (3, 12, 4) हैं, तब OP की दिक् कोज्यायें हैं [MP PET 1996]
(a) 3, 12, 4 (b) $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$
(c) $\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}$ (d) $\frac{3}{13}, \frac{12}{13}, \frac{4}{13}$

46. x, y, z में एकघातीय समीकरण का बिन्दुपथ है
(a) सरल रेखा (b) गोला
(c) समतल (d) इनमें से कोई नहीं

47. समतल $x + 2y - 3z + 4 = 0$ के अभिलम्ब की दिक् कोज्यायें हैं [MP PET 1996; Pb. CET 2000]
(a) $-\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$
(c) $-\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}$

48. रेखा $\frac{3x+1}{-3} = \frac{3y+2}{6} = \frac{z}{-1}$ की दिक् कोज्यायें हैं
(a) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$ (b) $\left(-1, \frac{2}{3}, 1\right)$
(c) $\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$ (d) $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

49. बिन्दुओं (2, –1, 3) और (4, 3, 1) को जोड़ने वाली रेखा को 3 : 4 के अनुपात में अन्तः विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक हैं [MP PET 1997]
(a) $\frac{2}{7}, \frac{20}{7}, \frac{10}{7}$ (b) $\frac{15}{7}, \frac{20}{7}, \frac{3}{7}$
(c) $\frac{10}{7}, \frac{15}{7}, \frac{2}{7}$ (d) $\frac{20}{7}, \frac{5}{7}, \frac{15}{7}$

50. यदि एक रेखा के दिक् अनुपात $1, -3, 2$ हों, तो उस रेखा की दिक् कोज्यायें हैं [MP PET 1997, Pb. CET 2002]
(a) $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$
(c) $\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}$ (d) $\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}$

51. एक रेखा धनात्मक X एवं Y अक्षों से क्रमशः $45°$ व $60°$ का कोण बनाती है। उसी रेखा द्वारा धनात्मक Z अक्ष से बने कोण का मान है [MP PET 1997]
(a) $30°$ या $60°$ (b) $60°$ या $90°$
(c) $90°$ या $120°$ (d) $60°$ या $120°$

52. समतल $3x + 4y + 12z = 52$ के अभिलम्ब की दिक् कोज्याएँ हैं [MP PET 1997]
(a) 3, 4, 12 (b) – 3, – 4, – 12
(c) $\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}$ (d) $\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{12}{\sqrt{13}}$

53. बिन्दु (a, b, c) की x-अक्ष से न्यूनतम दूरी है [MP PET 1999; DCE 1999]
(a) $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ (b) $\sqrt{(b^2 + c^2)}$
(c) $\sqrt{(c^2 + a^2)}$ (d) $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$

54. रेखा $x - y + z - 5 = 0 = x - 3y - 6$ के दिक् अनुपात हैं [MP PET 1999; Pb. CET 2000]
(a) 3, 1, – 2 (b) 2, – 4, 1
(c) $\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}$ (d) $\frac{2}{\sqrt{41}}, \frac{-4}{\sqrt{41}}, \frac{1}{\sqrt{41}}$

55. यदि O मूलबिन्दु है व $OP = 3$ तथा दिक्–अनुपात $-1, 2, -2$ हैं, तब P के निर्देशांक हैं [RPET 2000; DCE 2005]
(a) (1, 2, 2) (b) $(-1, 2, -2)$
(c) (–3, 6, –9) (d) $(-1/3, 2/3, -2/3)$

56. यदि बिन्दुओं Q (2, 2, 1) तथा R (5, 2, –2) को जोड़ने वाली रेखा के बिन्दु P का x-निर्देशांक 4 है, तो P का z-निर्देशांक होगा [RPET 2000]
(a) – 2 (b) –1
(c) 1 (d) 2

57. बिन्दु $A(5, -1, 1)$; $B(7, -4, 7)$; $C(1, -6, 10)$ तथा $D(-1, -3, 4)$ शीर्ष हैं [RPET 2000]
(a) वर्ग के (b) समचतुर्भज के
(c) आयत के (d) इनमें से कोई नहीं

58. बिन्दुओं (4, 3, – 5) तथा (– 2, 1, – 8) को मिलाने वाली रेखा की दिक्–कोज्यायें हैं [MP PET 2001]
(a) $\left(\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$ (b) $\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$
(c) $\left(\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

59. यदि एक रेखा अष्टांश (Octant) $OXYZ$ में स्थित है तथा अक्षों से बराबर कोण बनाती है, तब [MP PET 2001]

(a) $l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $l = m = n = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

(c) $l = m = n = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $l = m = n = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

60. बिन्दुओं (0, 7, 10), (–1, 6, 6), (– 4, 9, 6) से बना त्रिभुज है [RPET 2001]

(a) समबाहु (b) समद्विबाहु
(c) समकोण (d) समकोण समद्विबाहु

61. यदि बिन्दु $A(1,2,3)$ तथा $B(-1,-1,-1)$ हों, तो दूरी AB है [MP PET 2001; Pb. CET 2001]

(a) $\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{21}$
(c) $\sqrt{29}$ (d) इनमें से कोई नहीं

62. यदि एक रेखा निर्देशाक्षों के साथ α, β, γ कोण बनाती है, तो [MP PET 2002; Orissa JEE 2002]

(a) $\sin^2\alpha + \cos^2\beta + \sin^2\gamma = 1$
(b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
(c) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$
(d) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \sin^2\gamma = 1$

63. यदि $P(3,4,5)$, $Q(4,6,3)$, $R(-1,2,4)$, तथा $S(1,0,5)$ है, तो PQ पर RS का प्रक्षेप है [Orissa JEE 2002; RPET 2002]

(a) – 2/3 (b) – 4/3
(c) 1/2 (d) 2

64. यदि एक रेखा x, y तथा z-अक्षों की धनात्मक दिशा से α, β, γ कोण बनाती है, तब $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma =$ [Orissa JEE 2002]

(a) 1/2 (b) –1/2
(c) –1 (d) 1

65. यदि एक रेखा के निर्देशांक अक्षों पर प्रक्षेप 2, 3, 6 हैं, तब रेखा की लम्बाई है [Orissa JEE 2002]

(a) 7 (b) 5
(c) 1 (d) 11

66. यदि एक रेखा y-अक्ष तथा z-अक्ष के साथ 60° का कोण बनाती है, तब यह x-अक्ष के साथ कोण बनायेगी [RPET 2002; AMU 2005]

(a) 45° (b) 60°
(c) 75° (d) 30°

67. बिन्दु (5, – 4, 2), (4, –3, 1), (7, – 6, 4) तथा (8, –7, 5) शीर्ष हैं [RPET 2002]

(a) आयत के (b) वर्ग के
(c) समान्तर चतुर्भुज के (d) इनमें से कोई नहीं

68. यदि $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, n\right)$ एक रेखा की दिक् कोज्यायें हैं, तब n का मान है [Kerala (Engg.) 2002]

(a) $\frac{\sqrt{23}}{6}$ (b) $\frac{23}{6}$

(c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{2}$

69. y-अक्ष से बिन्दु (4, 3, 5) की दूरी है [MP PET 2003]

(a) $\sqrt{34}$ (b) 5
(c) $\sqrt{41}$ (d) $\sqrt{15}$

70. यदि किसी रेखा के निर्देशांक अक्षों पर प्रक्षेप 3, 4 और 5 हैं, तब रेखा की लम्बाई है [Pb. CET 2000]

(a) 12 (b) 50
(c) $5\sqrt{2}$ (d) $3\sqrt{2}$

71. यदि एक रेखा, घन के चारों विकर्णों के साथ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ कोण बनाती है, तब $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + \sin^2\delta$ का मान है [MP PET 2004]

(a) $\frac{4}{3}$ (b) 1

(c) $\frac{8}{3}$ (d) $\frac{7}{3}$

72. यदि रेखा AB व CD के मध्य कोण θ है, तो रेखाखण्ड AB का रेखाखण्ड CD पर प्रक्षेप है [MP PET 1995]

(a) $AB \sin\theta$ (b) $AB \cos\theta$
(c) $AB \tan\theta$ (d) $CD \cos\theta$

73. बिन्दुओं A, B, C, D के निर्देशांक क्रमशः (a, 2, 1), (1, –1, 1), (2, –3, 4) तथा (a+1, a+2, a+3) हैं। यदि $AB = 5$ तथा $CD = 6$, तो a =

(a) 2 (b) 3
(c) – 2 (d) – 3

74. यदि बिन्दुओं A, B, C के निर्देशांक क्रमशः $(-1,3,2)$, $(2,3,5)$ तथा (3, 5,–2) हों, तो $\angle A =$

(a) 0° (b) 45°
(c) 60° (d) 90°

75. उन सरल रेखाओं की संख्या, जो त्रिविम निर्देशांक अक्षों पर समान कोण से झुकी हों, है [MP PET 1994]

(a) 2 (b) 4
(c) 6 (d) 8

रेखा

1. बिन्दु (x_1, y_1, z_1) की रेखा $\frac{x-x_2}{l} = \frac{y-y_2}{m} = \frac{z-z_2}{n}$ से दूरी, जहाँ l, m, n रेखा की दिक् कोज्यायें हैं, है

(a) $\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2 - [l(x_1-x_2) + m(y_1-y_2) + n(z_1-z_2)]^2}$

(b) $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$

(c) $\sqrt{(x_2-x_1)l + (y_2-y_1)m + (z_2-z_1)n}$

(d) इनमें से कोई नहीं

2. यदि बिन्दुओं A, B, C, D के निर्देशांक क्रमशः (1, 2, 3), (4, 5, 7), (–4, 3, –6) तथा (2, 9, 2) हों, तो रेखाओं AB तथा CD के बीच का कोण है

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

3. रेखाओं $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$ तथा $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ के बीच का कोण है [Pb. CET 2002]

(a) $\cos^{-1}\frac{1}{5}$ (b) $\cos^{-1}\frac{1}{3}$

(c) $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ (d) $\cos^{-1}\frac{1}{4}$

4. यदि (1, 2, –1) तथा (–1, 0, 1) को मिलाने वाली रेखा $\frac{x-1}{l} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+1}{n}$ हो, तो (l, m, n) का मान होगा [MP PET 1992]

(a) (–1, 0, 1) (b) (1, 1, –1)
(c) (1, 2, –1) (d) (0, 1, 0)

5. यदि दो रेखाओं के दिक् अनुपात 2,–1 , 2 एवं *a*, 3, 5 हैं तथा उनके बीच का कोण $45°$ है। तो *a* का मान है
(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

6. रेखाओं $\frac{x-4}{5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$ तथा $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ का प्रतिच्छेद बिन्दु हैं [AISSE 1986; AMU 2005]
(a) (–1, –1, –1) (b) (–1, –1, 1)
(c) (1, –1, –1) (d) (–1, 1, –1)

7. यदि दो रेखाओं के दिक् अनुपात *a, b, c* तथा $\frac{1}{bc},\frac{1}{ca},\frac{1}{ab}$ हों, तो रेखायें होंगी
(a) परस्पर लम्बवत् (b) समान्तर
(c) सम्पाती (d) इनमें से कोई नहीं

8. उन रेखाओं के बीच का कोण, जिनकी दिक् कोज्यायें (1, 2, 1) और (2, –3, 6) के समानुपाती हैं, होगा
(a) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{7\sqrt{6}}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{7\sqrt{6}}\right)$
(c) $\cos^{-1}\left(\frac{3}{7\sqrt{6}}\right)$ (d) $\cos^{-1}\left(\frac{5}{7\sqrt{6}}\right)$

9. समीकरणों $x=ay+b,\ \ z=cy+d$ द्वारा निरूपित रेखा के दिक् अनुपात हैं
(a) (*a*, 1, *c*) (b) (*a*, *b* – *d*, *c*)
(c) (*c*, 1, *a*) (d) (*b*, *ac*, *d*)

10. बिन्दु (–3, 2, – 4) से जाने वाली तथा निर्देशांक अक्षों से समान कोण पर झुकी रेखा के समीकरण हैं
(a) $x-3=y+2=z-4$ (b) $x+3=y-2=z+4$
(c) $\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+4}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

11. मूलबिन्दु से बिन्दुओं (–9, 4, 5) तथा (10, 0, –1) को मिलाने वाली रेखा पर डाले गये लम्ब के पाद के निर्देशांक होंगे
(a) (– 3, 2, 1) (b) (1, 2, 2)
(c) (4, 5, 3) (d) इनमें से कोई नहीं

12. रेखा $3x+2y+z-5=0$ व $x+y-2z-3=0$ का सममित समीकरण है
(a) $\frac{x-1}{5}=\frac{y-4}{7}=\frac{z-0}{1}$ (b) $\frac{x+1}{5}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-0}{1}$
(c) $\frac{x+1}{-5}=\frac{y-4}{7}=\frac{z-0}{1}$ (d) $\frac{x-1}{-5}=\frac{y-4}{7}=\frac{z-0}{1}$

13. उन सरल रेखाओं के बीच का कोण, जिनकी दिक् कोज्यायें समीकरणों $l+m+n=0\,, l^2+m^2-n^2=0$ को सन्तुष्ट करती हैं, होगा [MP PET 1993; RPET 2001]
(a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{6}$
(c) $\frac{5\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

14. बिन्दुओं (*a, b, c*) तथा (*a* – *b*, *b* – *c*, *c* – *a*) से होकर गुजरने वाली सरल रेखा का समीकरण है [MP PET 1994]
(a) $\frac{x-a}{a-b}=\frac{y-b}{b-c}=\frac{z-c}{c-a}$ (b) $\frac{x-a}{b}=\frac{y-b}{c}=\frac{z-c}{a}$
(c) $\frac{x-a}{a}=\frac{y-b}{b}=\frac{z-c}{c}$ (d) $\frac{x-a}{2a-b}=\frac{y-b}{2b-c}=\frac{z-c}{2c-a}$

15. बिन्दु (*a, b, c*) से गुजरने वाली तथा *z*-अक्ष के समान्तर सरल रेखा का समीकरण है [MP PET 1995; Pb. CET 2000]
(a) $\frac{x-a}{1}=\frac{y-b}{1}=\frac{z-c}{0}$ (b) $\frac{x-a}{0}=\frac{y-b}{1}=\frac{z-c}{1}$
(c) $\frac{x-a}{1}=\frac{y-b}{0}=\frac{z-c}{0}$ (d) $\frac{x-a}{0}=\frac{y-b}{0}=\frac{z-c}{1}$

16. बिन्दु (5, 4, –1) से रेखा $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{9}=\frac{z}{5}$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई है
(a) $\sqrt{\frac{110}{2109}}$ (b) $\sqrt{\frac{2109}{110}}$
(c) $\frac{2109}{110}$ (d) 54

17. बिन्दु (1, 2, 3) से रेखा $\frac{x-6}{3}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-7}{-2}$ की लम्बवत् दूरी है [MP PET 1997]
(a) 5 (b) 6
(c) 7 (d) 8

18. यदि रेखाओं की दिक् कोज्यायें समीकरणों $l+m+n=0$ व $2lm+2nl-mn=0$ द्वारा दी गयी हैं, तो इन रेखाओं के बीच का कोण होगा
(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$
(c) π (d) इनमें से कोई नहीं

19. रेखा $\frac{x+5}{1}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-6}{-9}$ से बिन्दु (2, 4, –1) की लम्बवत् दूरी है [Kurukshetra CEE 1996]
(a) 3 (b) 5
(c) 7 (d) 9

20. दो रेखाओं $\frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{-1}$ तथा $\frac{x-4}{1}=\frac{y+4}{2}=\frac{z+1}{2}$ के बीच का कोण है [MP PET 1996]
(a) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{9}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$
(c) $\cos^{-1}\left(\frac{3}{9}\right)$ (d) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{9}\right)$

21. सरल रेखायें $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$ और $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-2}$
(a) समान्तर हैं (b) $60°$ पर काटती हैं
(c) विषम रेखायें हैं (d) समकोण पर काटती हैं

22. बिन्दुओं (3, 2, 4) और (4, 5, 2) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण है
(a) $\frac{x+3}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+4}{-2}$ (b) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{-2}$
(c) $\frac{x+3}{7}=\frac{y+2}{7}=\frac{z+4}{6}$ (d) $\frac{x-3}{7}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-4}{6}$

23. रेखाओं $\frac{x+4}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{3}$ तथा $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ के मध्य कोण है
(a) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right)$

(c) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

24. रेखायुग्म, जिनके दिक् अनुपात (1,1,2) एवं $(\sqrt{3}-1,-\sqrt{3}-1,4)$ हैं, के बीच का कोण है [MP PET 1997, 2000]

(a) $30°$ (b) $45°$

(c) $60°$ (d) $90°$

25. बिन्दुओं (2,1,–3), (–3,1,7) को मिलाने वाली रेखा तथा बिन्दु (–1, 0, 4) से गुजरने वाली व $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z+3}{5}$ के समान्तर रेखा के बीच बना न्यूनकोण है [MP PET 1998]

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{7}{5\sqrt{10}}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

(c) $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5\sqrt{10}}\right)$ (d) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{5\sqrt{10}}\right)$

26. सरल रेखाओं $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+3}{4}$ तथा $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-3}$ के मध्य कोण है [MP PET 2000]

(a) $45°$ (b) $30°$

(c) $60°$ (d) $90°$

27. यदि दो रेखाओं की दिक्–कोज्यायें $5,-12,13$ तथा $-3,4,5$ हैं, तो उनके मध्य कोण है [RPET 2001]

(a) $\cos^{-1}(1/65)$ (b) $\cos^{-1}(2/65)$

(c) $\cos^{-1}(3/65)$ (d) $\pi/2$

28. रेखाओं $\frac{x-3}{3}=\frac{y-8}{-1}=\frac{z-3}{1}$ तथा $\frac{x+3}{-3}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-6}{4}$ के मध्य न्यूनतम दूरी है [RPET 2001; MP PET 2002]

(a) $\sqrt{30}$ (b) $2\sqrt{30}$

(c) $5\sqrt{30}$ (d) $3\sqrt{30}$

29. यदि दो रेखाओं की दिक्–कोज्यायें समीकरण $3lm-4ln+mn=0$ तथा $l+2m+3n=0$ द्वारा दी जाती हैं, तब दोनों रेखाओं के मध्य कोण है [EAMCET 2003]

(a) $\pi/2$ (b) $\pi/3$

(c) $\pi/4$ (d) $\pi/6$

30. x-अक्ष का समीकरण है [MP PET 2002]

(a) $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ (b) $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$

(c) $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$ (d) $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$

31. सरल रेखा $\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{0}$ है [RPET 2002]

(a) x-अक्ष के समान्तर (b) y-अक्ष के समान्तर

(c) z-अक्ष के समान्तर (d) z-अक्ष के लम्बवत्

32. बिन्दुओं (3, 1, 4) तथा (7, 2, 12) को मिलाने वाली रेखा तथा रेखा जिसके दिक्–अनुपात 2 : 2 : 1 हैं, के मध्य कोण होगा [DCE 2002]

(a) $\cos^{-1}(2/3)$ (b) $\cos^{-1}(-2/3)$

(c) $\tan^{-1}(2/3)$ (d) इनमें से कोई नहीं

33. रेखाएँ $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{-k}$ तथा $\frac{x-1}{k}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-5}{1}$ समतलीय होंगी, यदि [AIEEE 2003]

(a) $k=0$ या –1 (b) $k=0$ या 1

(c) $k=0$ या –3 (d) $k=3$ या –3

34. यदि दो रेखाओं की दिक्कोज्यायें (2, 3, – 6) तथा (3, – 4, 5) के समानुपाती हैं, तो दोनों रेखाओं के मध्य न्यूनकोण होगा [MP PET 2003]

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{49}{36}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{18\sqrt{2}}{35}\right)$

(c) $96°$ (d) $\cos^{-1}\left(\frac{18}{35}\right)$

35. बिन्दुओं (4, –5, –2) तथा (–1, 5, 3) से होकर जाने वाली सरल रेखा का समीकरण है [MP PET 2003]

(a) $\frac{x-4}{1}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z+2}{-1}$ (b) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-3}{-1}$

(c) $\frac{x}{-1}=\frac{y}{5}=\frac{z}{3}$ (d) $\frac{x}{4}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{-2}$

36. यदि बिन्दुओं A,B,C तथा D के निर्देशांक क्रमशः (2, 3, –1), (3, 5, –3), (1, 2, 3), तथा (3, 5, 7) हैं, तब AB व CD के मध्य कोण है [Orissa JEE 2003]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$

(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

37. रेखाओं $\frac{x-5}{3}=\frac{y-7}{-1}=\frac{z+2}{1}$ व $\frac{x+3}{-36}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-6}{4}$ के प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक हैं [MP PET 2004]

(a) $\left(21,\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right)$ (b) $(2,10,4)$

(c) $(-3,3,6)$ (d) $(5,7,-2)$

38. एक रेखा x-अक्ष व z-अक्ष के साथ समान कोण θ बनाती है। यदि y-अक्ष के साथ β कोण इस प्रकार बनाये कि $\sin^2\beta=3\sin^2\theta$, तब $\cos^2\theta$ का मान है [AIEEE 2004]

(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{1}{5}$ (d) इनमें से कोई नहीं

39. रेखाओं $2x=3y=-z$ तथा $6x=-y=-4z$ के मध्य कोण है [MP PET 1994, 99; AIEEE 2005]

(a) $0°$ (b) $30°$

(c) $45°$ (d) $90°$

40. यदि रेखाएँ $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2k}=\frac{z-3}{2}$ तथा $\frac{x-1}{3k}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-6}{-5}$ एक–दूसरे से समकोण बनाती हों, तो $k=$ [MP PET 1997, 2001]

(a) –10 (b) $\frac{10}{7}$

(c) $\frac{-10}{7}$ (d) $\frac{-7}{10}$

41. मूलबिन्दु से जाने वाली तीन रेखाओं की दिक् कोज्यायें $l_1,m_1,n_1;l_2,m_2,n_2$ तथा l_3,m_3,n_3 हैं। रेखायें समतलीय होंगी, यदि

(a) $\begin{vmatrix} l_1 & n_1 & m_1 \\ l_2 & n_2 & m_2 \\ l_3 & n_3 & m_3 \end{vmatrix} = 0$

(b) $\begin{vmatrix} l_1 & m_2 & n_3 \\ l_2 & m_3 & n_1 \\ l_3 & m_1 & n_2 \end{vmatrix} = 0$

(c) $l_1l_2l_3 + m_1m_2m_3 + n_1n_2n_3 = 0$

(d) इनमें से कोई नहीं

42. बिन्दु (2, 3, 4) से रेखा $1 - x = \frac{y}{2} = \frac{1}{3}(1+z)$ की दूरी है **[J & K 2005]**

(a) $\frac{1}{7}\sqrt{35}$ (b) $\frac{4}{7}\sqrt{35}$

(c) $\frac{2}{7}\sqrt{35}$ (d) $\frac{3}{7}\sqrt{35}$

43. सरल रेखाओं $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-3}$ और $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$ के बीच का कोण है **[DCE 2005]**

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{13}{9\sqrt{38}}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$

(c) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{38}}\right)$ (d) $\cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{19}}\right)$

समतल

1. समतलों $3x - 4y + 5z = 0$ तथा $2x - y - 2z = 5$ के बीच का कोण है **[MP PET 1988]**

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{\pi}{6}$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. उस समतल का समीकरण जो y-अक्ष के समान्तर है और x-अक्ष तथा z-अक्ष से क्रमशः 2 तथा 3 लम्बाई के अन्तःखण्ड काटता है, है

(a) $3x + 2z = 1$ (b) $3x + 2z = 6$

(c) $2x + 3z = 6$ (d) $3x + 2z = 0$

3. यदि एक समतल निर्देशांक अक्षों से –6, 3, 4 लम्बाई के अन्तःखण्ड काटता हो तो मूलबिन्दु से समतल पर डाले गये लम्ब की लम्बाई होगी

(a) $\frac{1}{\sqrt{61}}$ (b) $\frac{13}{\sqrt{61}}$

(c) $\frac{12}{\sqrt{29}}$ (d) $\frac{5}{\sqrt{41}}$

4. उस समतल का समीकरण, जो xy-समतल के समान्तर है तथा z-अक्ष पर 3 लम्बाई का अन्तःखण्ड काटता है, है

(a) $x = 3$ (b) $y = 3$

(c) $z = 3$ (d) $x + y + z = 3$

5. उस समतल का समीकरण, जो समतलों $3x - 6y + 2z + 5 = 0$ तथा $4x - 12y + 3z - 3 = 0$ के बीच के उस कोण को समद्विभाजित करता है जिसमें मूलबिन्दु स्थित है, होगा

(a) $33x - 13y + 32z + 45 = 0$ (b) $x - 3y + z - 5 = 0$

(c) $33x + 13y + 32z + 45 = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

6. यदि समतल $3x - 6y - 2z = 7$ व $2x + y - kz = 5$ एक–दूसरे के लम्बवत् हों, तो k का मान होगा **[MP PET 1992]**

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 3

7. बिन्दु (–1, 3, 2) से होकर जाने वाले और समतलों $x + 2y + 3z = 5$ तथा $3x + 3y + z = 0$ में से प्रत्येक के लम्बवत् समतल का समीकरण है

(a) $7x - 8y + 3z - 25 = 0$ (b) $7x - 8y + 3z + 25 = 0$

(c) $-7x + 8y - 3z + 5 = 0$ (d) $7x - 8y - 3z + 5 = 0$

8. समतलों $x + 2y + 3z + 7 = 0$ तथा $2x + 4y + 6z + 7 = 0$ के बीच की दूरी है **[MP PET 1991]**

(a) $\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$ (b) $\frac{7}{2}$

(c) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (d) $\frac{7}{2\sqrt{2}}$

9. यदि एक समतल निर्देशांक अक्षों से $OA = a, OB = b,\ OC = c$ अन्तः खण्ड काटता हो, तो त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल है

(a) $\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$

(b) $\frac{1}{2}(bc + ca + ab)$

(c) $\frac{1}{2}abc$

(d) $\frac{1}{2}\sqrt{(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2}$

10. यदि बिन्दु (1, 1, 1) की मूलबिन्दु तथा समतल $x - y + z + k = 0$ से दूरियों का गुणनफल 5 हो, तो $k =$

(a) – 2 (b) –3

(c) 4 (d) 7

11. उस समतल का समीकरण, जो समतल $x - 2y + 2z = 5$ के समान्तर है तथा जिसकी बिन्दु $(1, 2, 3)$ से दूरी 1 है, है

(a) $x - 2y + 2z = 3$ (b) $x - 2y + 2z + 3 = 0$

(c) $x - 2y + 2z = 6$ (d) $x - 2y + 2z + 6 = 0$

12. एक समतल बिन्दु (1, 2, 3) से होकर जाता है तथा समतल $2x + 3y - 4z = 0$ के समान्तर है। उस समतल का समीकरण है **[MP PET 1990]**

(a) $2x + 3y + 4z = 4$ (b) $2x + 3y + 4z + 4 = 0$

(c) $2x - 3y + 4z + 4 = 0$ (d) $2x + 3y - 4z + 4 = 0$

13. बिन्दु (2,3,4) की समतल $3x - 6y + 2z + 11 = 0$ से दूरी है **[MP PET 1990, 96]**

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 0

14. समतलों $2x - y = 0$ तथा $y - 3z = 0$ की प्रतिच्छेद रेखा को रखने वाले तथा समतल $4x + 5y - 3z - 8 = 0$ के लम्बवत् समतल का समीकरण है

(a) $28x - 17y + 9z = 0$ (b) $28x + 17y + 9z = 0$

(c) $28x - 17y - 9z = 0$ (d) $7x - 3y + z = 0$

15. एक बिन्दु इस प्रकार गति करता है कि xy-समतल तथा yz-समतल से इसकी दूरियों का योग इसकी zx-समतल से दूरी के बराबर है। बिन्दु का बिन्दुपथ है

(a) $x-y+z=2$ (b) $x+y-z=0$

(c) $x-y+z=0$ (d) $x-y-z=2$

16. एक बिन्दु इस प्रकार गति करता है कि इसकी बिन्दुओं (3, 4, –2) तथा (2, 3, – 3) से दूरियाँ बराबर रहती हैं। बिन्दु का बिन्दुपथ है

(a) एक रेखा

(b) एक समतल, जिसका अभिलम्ब अक्षों पर समान रूप से झुका है

(c) एक समतल, जो मूलबिन्दु से होकर जाता है

(d) एक गोला

17. बिन्दु (α, β, γ) से समतल $ax+by+cz+d=0$ पर डाले गये लम्ब का समीकरण है [MP PET 2003]

(a) $a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)=0$

(b) $\frac{x-\alpha}{a}=\frac{y-\beta}{b}=\frac{z-\gamma}{c}$

(c) $a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)=abc$

(d) इनमें से कोई नहीं

18. *yz*-समतल का समीकरण है [MP PET 1988]

(a) $x=0$ (b) $y=0$

(c) $z=0$ (d) $x+y+z=0$

19. समतलों $2x-y+z=6$ तथा $x+y+2z=7$ के बीच का कोण है [MP PET 1991, 98, 2000, 01, 03; RPET 2001]

(a) $30°$ (b) $45°$

(c) $0°$ (d) $60°$

20. समतलों $x+y+z=1$ तथा $2x+3y-z+4=0$ की प्रतिच्छेद रेखा से होकर जाने वाले तथा *x*-अक्ष के समान्तर समतल का समीकरण है

(a) $y-3z-6=0$ (b) $y-3z+6=0$

(c) $y-z-1=0$ (d) $y-z+1=0$

21. मूलबिन्दु से एक समतल पर डाले गये लम्ब के पाद के निर्देशांक (2, 4, –3) हैं। समतल का समीकरण है

(a) $2x-4y-3z=29$ (b) $2x-4y+3z=29$

(c) $2x+4y-3z=29$ (d) इनमें से कोई नहीं

22. उस समतल का समीकरण जो (2, –3, 1) से गुजरता है एवं बिन्दुओं (3, 4, –1) व (2, –1, 5) को मिलाने वाली रेखा पर लम्ब है, होगा [AI CBSE 1990; MP PET 1993]

(a) $x+5y-6z+19=0$ (b) $x-5y+6z-19=0$

(c) $x+5y+6z+19=0$ (d) $x-5y-6z-19=0$

23. बिन्दु (7, 14, 5) से समतल $2x+4y-z=2$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई एवं पाद बिन्दु के निर्देशांक होंगे [AISSE 1987]

(a) $\sqrt{21},(1,2,8)$ (b) $3\sqrt{21},(3,2,8)$

(c) $21\sqrt{3},(1,2,8)$ (d) $3\sqrt{21},(1,2,8)$

24. समतलों $x+y+z=6$ व $2x+3y+4z+5=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं एवं बिन्दु (1, 1, 1) से जाने वाले समतल का समीकरण होगा

(a) $20x+23y+26z-69=0$

(b) $20x+23y+26z+69=0$

(c) $23x+20y+26z-69=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

25. तीन बिन्दुओं (1, 1, 1), (1, –1, 1) एवं (–7,–3,–5) से जाने वाले समतल का समीकरण होगा [AISSE 1984]

(a) $3x-4z+1=0$ (b) $3x-4y+1=0$

(c) $3x+4y+1=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

26. बिन्दुओं (–2, 4, 7) व (3,–5, 8) को मिलाने वाली रेखा को समतल $x-2y+3z=17$ निम्न अनुपात में विभाजित करेगा [AISSE 1988]

(a) 10 : 3 (b) 3 : 1

(c) 3 : 10 (d) 10 : 1

27. समतल $2x-y+z+3=0$ में बिन्दु (1,3,4) का प्रतिबिम्ब बिन्दु होगा

(a) (– 3, 5, 2) (b) (3, 5, – 2)

(c) (3, – 5, 3) (d) इनमें से कोई नहीं

28. समान्तर समतलों $2x-2y+z+3=0$ तथा $4x-4y+2z+5=0$ के मध्य दूरी है [MP PET 1994, 95]

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{1}{6}$ (d) 2

29. यदि समतल $ax+by+cz+d=0$ तथा $a'x+b'y+c'z+d'=0$ परस्पर लम्बवत् हों, तो [MP PET 1994]

(a) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ (b) $\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}=0$

(c) $aa'+bb'+cc'+dd'=0$ (d) $aa'+bb'+cc'=0$

30. बिन्दु (*x, y, z*), *xy*-समतल के समान्तर गति करता है, तो तीनों चरों *x, y, z* में से कौनसा चर अपरिवर्तित रहेगा

(a) *z* (b) *y*

(c) *x* (d) *x* तथा *y*

31. दो समतलों के बीच कोण बराबर होता है

(a) किसी बिन्दु से उस पर खींची गयी स्पर्श रेखा के बीच कोण के

(b) किसी बिन्दु से उस पर डाले गये अभिलम्बों के बीच कोण के

(c) किसी भी बिन्दु से जाने वाले समतल के समान्तर रेखाओं के बीच कोण के

(d) इनमें से कोई नहीं

32. त्रिविमीय निर्देशांक पद्धति में, समीकरण $3y+4z=0$ प्रदर्शित करता है

(a) एक समतल जिसमें *x*-अक्ष निहित है

(b) एक समतल जिसमें *y*-अक्ष निहित है

(c) एक समतल जिसमें *z*-अक्ष निहित है

(d) एक रेखा जिसके दिक् अनुपात 0, 3, 4 हैं

33. एक समतल पर निर्देशाक्षों को A, B, C पर मिलता है तथा त्रिभुज ABC का केन्द्रक (α, β, γ) है, तब समतल का समीकरण है [MP PET 2004]

(a) $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=3$ (b) $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$

(c) $\frac{3x}{\alpha}+\frac{3y}{\beta}+\frac{3z}{\gamma}=1$ [AISSE 1983] (d) $\alpha x+\beta y+\gamma z=1$

34. यदि समतल $3x-2y+2z+17=0$ तथा $4x+3y-kz=25$ परस्पर लम्बवत् हैं, तो $k=$ [MP PET 1995]

(a) 3 (b) – 3

(c) 9 (d) – 6

35. यदि *O* मूलबिन्दु एवं *A* (*a, b, c*) है, तो *A* से जाने वाले एवं *OA* पर लम्बवत् समतल का समीकरण होगा [AMU 2005]

(a) $a(x-a)-b(y-b)-c(z-c)=0$

(b) $a(x+a)+b(y+b)+c(z+c)=0$

(c) $a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

36. यदि बिन्दु $P(a,b,c)$ से *yz* व *zx*–समतलों पर डाले गये लम्ब क्रमशः PA व PB हैं, तो समतल OAB का समीकरण है

(a) $bcx+cay+abz=0$ (b) $bcx+cay-abz=0$

(c) $bcx-cay+abz=0$ (d) $-bcx+cay+abz=0$

37. समीकरण $y^2+z^2=0$ का त्रिविमीय ग्राफ होगा

(a) *x*-अक्ष (b) *z*-अक्ष

(c) *y*-अक्ष (d) *yz*-समतल

38. एक चर समतल मूलबिन्दु से नियत दूरी p पर है जो अक्षों को क्रमशः *A*, *B* व *C* पर काटता है, तो चतुष्फलक $OABC$ के केन्द्रक का बिन्दुपथ होगा

(a) $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}=16p^{-2}$ (b) $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}=16p^{-1}$

(c) $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}=16$ (d) इनमें से कोई नहीं

39. समतल $ax+by+cz=1$ अक्षों को *A*, *B* व *C* पर मिलता है, तो त्रिभुज का केन्द्रक होगा [CET 1992]

(a) $(3a,3b,3c)$ (b) $\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3},\frac{c}{3}\right)$

(c) $\left(\frac{3}{a},\frac{3}{b},\frac{3}{c}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{3a},\frac{1}{3b},\frac{1}{3c}\right)$

40. उस समतल का समीकरण जो अक्षों से इकाई लम्बाई के अन्तःखण्ड काटता है, है [MP PET 1996]

(a) $x+y+z=0$ (b) $x+y+z=1$

(c) $x+y-z=1$ (d) $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$

41. उस समतल का समीकरण जो (2, 3, 4) से होकर जाता है तथा समतल $x+2y+4z=5$ के समान्तर है, है [MP PET 1996]

(a) $x+2y+4z=10$ (b) $x+2y+4z=3$

(c) $x+y+2z=2$ (d) $x+2y+4z=24$

42. समतल $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$ अक्षों को A,B,C में काटता है, तो त्रिभुज *ABC* के केन्द्रक के निर्देशांक हैं [DCE 2005]

(a) $\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3},\frac{c}{3}\right)$ (b) $\left(\frac{3}{a},\frac{3}{b},\frac{3}{c}\right)$

(c) $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ (d) (a,b,c)

43. समतल $x=cy+bz, y=az+cx, z=bx+ay$ एक रेखा से होकर गुजरते हैं, यदि

(a) $a+b+c=0$ (b) $a+b+c=1$

(c) $a^2+b^2+c^2=1$ (d) $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

44. यदि किसी समतल पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई 7 इकाई है और इसके दिक्–अनुपात –3, 2, एवं 6 हैं, तब वह समतल है [MP PET 1998]

(a) $-3x+2y+6z-7=0$ (b) $-3x+2y+6z-49=0$

(c) $3x-2y+6z+7=0$ (d) $-3x+2y-6z-49=0$

45. यदि समतल $x-3y+5z=d$, बिन्दु (1, 2, 4) से गुजरता है, तब इससे *x, y, z* अक्षों पर काटे गये अन्तःखण्डों की लम्बाइयाँ क्रमशः हैं

(a) 15, –5, 3 (b) 1, –5, 3

(c) –15, 5, –3 (d) 1, –6, 20

46. यदि समतल $x+2y+kz=0$ और $2x+y-2z=0$ लम्बवत् हैं, तो k का मान है [MP PET 1999]

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) – 2 (d) 2

47. यदि दो समतल एक दूसरे को प्रतिच्छेद करें तो उनके बीच की न्यूनतम दूरी है [Kurukshetra CEE 1998]

(a) $\cos\theta$ (b) $\cos 90^o$

(c) $\sin 90^o$ (d) इनमें से कोई नहीं

48. मूलबिन्दु से समतल $3x+4y+12z=52$ पर खीचें गये लम्ब की लम्बाई है [MP PET 2000; Pb. CET 2001]

(a) 3 (b) –4

(c) 5 (d) इनमें से कोई नहीं

49. यदि कोई बिन्दु *P*(2, 6, 3) है, तब *P* से जाने वाले समतल का समीकरण जो *OP* पर समकोण है, जबकि *O* मूलबिन्दु है, है [MP PET 2000; Pb. CET 2001]

(a) $2x+6y+3z=7$ (b) $2x-6y+3z=7$

(c) $2x+6y-3z=49$ (d) $2x+6y+3z=49$

50. समतल $x+2y-2z=9$ से बिन्दु (2, 3, – 5) की दूरी है [MP PET 2001]

(a) 4 (b) 3

(c) 2 (d) 1

51. समतल $5x-3y+6z=60$ के निर्देशाक्षों पर अन्तःखण्ड हैं [Pb. CET 2000 ; MP PET 2001]

(a) $(10, 20, -10)$ (b) (10, – 20, 12)

(c) (12, – 20, 10) (d) (12, 20, – 10)

52. *x*-अक्ष के समान्तर समतल का समीकरण है [DCE 2001]

(a) $ax+by+cz+d=0$ (b) $ax+by+d=0$

(c) $by+cz+d=0$ (d) $ax+cz+d=0$

53. बिन्दु $A(-1,3,0)$, $B(2,2,1)$ तथा $C(1,1,3)$ एक समतल निर्मित करते हैं, तब समतल से बिन्दु $D(5,7,8)$ की दूरी है [AMU 2001]

(a) $\sqrt{66}$ (b) $\sqrt{71}$

(c) $\sqrt{73}$ (d) $\sqrt{76}$

54. त्रिविमीय आकाश *xyz* में समीकरण $x^2-5x+6=0$ प्रदर्शित करता है [Orissa JEE 2002]

(a) बिन्दु (b) समतल

(c) वक्र (d) रेखायुग्म

55. *xyz*-आकाश में समीकरण $|x|=p, |y|=p, |z|=p$ प्रदर्शित करता है [Orissa JEE 2002]

(a) घन (b) समचतुर्भुज

(c) *p* त्रिज्या का गोला (d) बिन्दु (*p, p, p*)

56. त्रिविमीय आकाश में, समीकरण $by+cz+d=0$ निम्न समतल के लम्बवत् समतल को प्रदर्शित करता है [EAMCET 2002]

(a) YOZ (b) $Z=k$

(c) ZOX (d) XOY

57. उस समतल का समीकरण, जो बिन्दु (1, 2, 3) से होकर जाता है तथा समतल $x+2y+5z=0$ के समान्तर है, है [DCE 2002]

(a) $(x-1)+2(y-2)+5(z-3)=0$

(b) $x+2y+5z=14$ [MP PET 1998]

(c) $x+2y+5z=6$

(d) इनमें से कोई नहीं

58. उस समतल का समीकरण, जो समतलों $x+2y+3z+4=0$ तथा $4x+3y+2z+1=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं तथा मूलबिन्दु से होकर जाता है, है [Kerala (Engg.) 2002]
(a) $3x+2y+z+1=0$ (b) $3x+2y+z=0$
(c) $2x+3y+z=0$ (d) $x+y+z=0$

59. उस समतल का समीकरण, जो बिन्दु (2, 3, 4) से होकर जाता है तथा समतल $5x-6y+7z=3$ के समान्तर है, है [Kerala (Engg.) 2002]
(a) $5x-6y+7z+20=0$ (b) $5x-6y+7z-20=0$
(c) $-5x+6y-7z+3=0$ (d) $5x+6y+7z+3=0$

60. मूलबिन्दु से समतल $6x-3y+2z-14=0$ की दूरी है [MP PET 2003]
(a) 2 (b) 1
(c) 14 (d) 8

61. यदि $aa'+bb'+cc'$ का मान ऋणात्मक हो तो समतलों $ax+by+cz+d=0$ तथा $a'x+b'y+c'z+d'=0$ के मध्य न्यूनकोण में मूलबिन्दु स्थित होगा, यदि [MP PET 2003]
(a) $a=a'=0$
(b) d तथा d' समान चिन्ह के हैं
(c) d तथा d' विपरीत चिन्ह के हैं
(d) इनमें से कोई नहीं

62. उस समतल का समीकरण, जो बिन्दुओं (1, 1, 1) और (1, –1, –1) से होकर जाता है तथा $2x-y+z+5=0$ के लम्बवत् है, है [EAMCET 2003]
(a) $2x+5y+z-8=0$ (b) $x+y-z-1=0$
(c) $2x+5y+z+4=0$ (d) $x-y+z-1=0$

63. एक समतल π ; z-अक्ष व x-अक्ष से क्रमशः 3 व 4 अन्तःखण्ड काटता है। यदि π , y-अक्ष के समान्तर है, तब समतल का समीकरण है [EAMCET 2003]
(a) $3x+4z=12$ (b) $3z+4x=12$
(c) $3y+4z=12$ (d) $3z+4y=12$

64. XOZ समतल, बिन्दुओं (2, 3, 1) तथा (6, 7, 1) को मिलाने वाली रेखा को किस अनुपात में विभाजित करता है [EAMCET 2003]
(a) 3 : 7 (b) 2 : 7
(c) – 3 : 7 (d) – 2 :7

65. उस समतल का समीकरण, जो समतलों $x+y+z=1$ तथा $2x+3y-z+4=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से होकर जाता है तथा x-अक्ष के समान्तर है, है [Orissa JEE 2003]
(a) $y-3z+6=0$ (b) $3y-z+6=0$
(c) $y+3z+6=0$ (d) $3y-2z+6=0$

66. दो समान्तर समतलों $2x+y+2z=8$ तथा $4x+2y+4z+5=0$ के बीच की दूरी है [AIEEE 2004]
(a) $\frac{9}{2}$ (b) $\frac{5}{2}$
(c) $\frac{7}{2}$ (d) $\frac{3}{2}$

67. दो समतलों $x+2y+2z=3$ तथा $-5x+3y+4z=9$ के बीच का कोण है [MP PET 2004]
(a) $\cos^{-1}\frac{3\sqrt{2}}{10}$ (b) $\cos^{-1}\frac{19\sqrt{2}}{30}$
(c) $\cos^{-1}\frac{9\sqrt{2}}{20}$ (d) $\cos^{-1}\frac{3\sqrt{2}}{5}$

68. यदि बिन्दु $(1,1,k)$ तथा $(-3,0,1)$ समतल $3x+4y-12z+13=0$ से बराबर दूरी पर हों, तो $k=$
(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

69. यदि O मूलबिन्दु हो और P के निर्देशांक (1, 2, –3) हों, तो P से जाने वाले तथा OP के लम्बवत् समतल का समीकरण है
(a) $x-2y+3z+12=0$ (b) $2x+3y-z-11=0$
(c) $x+2y-3z-14=0$ (d) $x+2y-3z=0$

70. उस समतल का समीकरण, जो बिन्दु (0, 1, 2) तथा (–1, 0, 3) से होकर जाता है व समतल $2x+3y+z=5$ पर लम्ब है, है [J & K 2005]
(a) $3x-4y+18z+32=0$ (b) $3x+4y-18z+32=0$
(c) $4x+3y-17z+31=0$ (d) $4x-3y+z+1=0$

71. यदि दो बिन्दुओं (1, 2, 0) तथा (4, 13, 5) को मिलाने वाली रेखा समतल पर लम्ब है, तब समतल के समीकरण में x, y व z के गुणांक क्रमशः हैं [J & K 2005]
(a) 5, 15, 5 (b) 3, 11, 5
(c) 3, –11, 5 (d) – 5, – 15, 5

72. यदि बिन्दु (1,1,1) की मूलबिन्दु से दूरी इस बिन्दु की समतल $x+y+z+k=0$ से दूरी की आधी है, तब $k=$ [Kerala (Engg.)2005]
(a) ± 3 (b) ± 6
(c) $-3, 9$ (d) $3, -9$
(e) 3, 9

73. यदि समतल निर्देशांक अक्षों को A, B और C पर इस प्रकार मिलता है कि त्रिभुज का केन्द्रक (1, 2, 4) है, तब समतल का समीकरण है [Kerala (Engg.) 2005]
(a) $x+2y+4z=12$ (b) $4x+2y+z=12$
(c) $x+2y+4z=3$ (d) $4x+2y+z=3$
(e) $x+y+z=12$

74. यदि समतल निर्देशांक अक्षों पर 8, 4, 4 लम्बाईयों का अन्तःखण्ड काटता है, तब समतल पर मूलबिन्दु से लम्ब की लम्बाई है [Kerala (Engg.) 2005]
(a) $\frac{8}{3}$ (b) $\frac{3}{8}$
(c) 3 (d) $\frac{4}{3}$
(e) $\frac{4}{5}$

रेखा व समतल

1. बिन्दुओं (2, –3, 1) तथा (3, –4, –5) को मिलाने वाली रेखा समतल $2x+y+z=7$ को जिस बिन्दु पर काटती है, वह बिन्दु है [DSSE 1987; MP PET 1991]
(a) (1, 2, 7) (b) (1, –2, 7)
(c) (–1, 2, 7) (d) (1, –2, –7)

2. रेखा $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}$ तथा समतल $2x+3y+z=0$ का प्रतिच्छेद बिन्दु है [MP PET 1989]
(a) (0, 1, –2) (b) (1, 2, 3)
(c) (–1, 9, –25) (d) $\left(\frac{-1}{11},\frac{9}{11},\frac{-25}{11}\right)$

3. रेखा $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{0}$ समान्तर है

(a) *xy*-समतल के (b) *yz*-समतल के

(c) *zx*-समतल के (d) इनमें से कोई नहीं

4. मूलबिन्दु से जाने वाले तथा रेखा $x=2y=3z$ के लम्बवत् समतल का समीकरण है

(a) $6x+3y+2z=0$ (b) $x+2y+3z=0$

(c) $3x+2y+z=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

5. यदि रेखा तथा समतल के समीकरण क्रमशः $\frac{x+3}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+5}{2}$ तथा $4x-2y-z=1$ हों, तो

(a) रेखा, समतल के समान्तर है

(b) रेखा, समतल के लम्बवत् है

(c) रेखा, समतल में स्थित है

(d) इनमें से कोई नहीं

6. बिन्दु (1, 2, 3) से जाने वाली तथा समतल $x+2y-5z+9=0$ पर लम्ब रेखा का समीकरण है [MP PET 1991]

(a) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-5}$ (b) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+5}{3}$

(c) $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{-5}$ (d) $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-5}{3}$

7. रेखाओं $\frac{x-4}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{2}$ तथा $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z}{5}$ से होकर जाने वाले समतल का समीकरण है

(a) $11x-y-3z=35$ (b) $11x+y-3z=35$

(c) $11x-y+3z=35$ (d) इनमें से कोई नहीं

8. बिन्दु (3,2,2) तथा (1,0,–1) से होकर जाने वाले तथा रेखा $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{3}$ के समान्तर समतल का समीकरण है

(a) $4x-y-2z+6=0$ (b) $4x-y+2z+6=0$

(c) $4x-y-2z-6=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. बिन्दुओं (–1, 2, 3) तथा (3, –5, 6) को मिलाने वाली रेखा को लम्बवत् समद्विभाजित करने वाले समतल का समीकरण है

(a) $4x-7y-3z=8$ (b) $4x+2y-3z=28$

(c) $4x-7y+3z=28$ (d) $4x-7y-3z=28$

10. रेखा $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{5}$ निम्न में से किस समतल के समान्तर है [BIT Ranchi 1991; Pb. CET 1991]

(a) $3x+4y+5z=7$ (b) $2x+y-2z=0$

(c) $x+y-z=2$ (d) $2x+3y+4z=0$

11. उस बिन्दु के निर्देशांक, जहाँ रेखा $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{4}$, समतल $2x+4y-z=1$ को मिलती है, होंगे [DSSE 1981]

(a) (3, –1, 1) (b) (3, 1, 1)

(c) (1, 1, 3) (d) (1, 3, 1)

12. समतल $x-y+z=5$ व रेखा $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{12}$ के प्रतिच्छेद बिन्दु एवं बिन्दु (–1, –5, –10) के बीच की दूरी है [AISSE 1985; DSSE 1984; MP PET 2002]

(a) 10 (b) 11

(c) 12 (d) 13

13. बिन्दु (1,2,3) से होकर गुजरने वाली एवं समतलों $x-y+2z=5$ व $3x+y+z=6$ के समान्तर रेखा का समीकरण होगा [DSSE 1986]

(a) $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{4}$ (b) $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-1}{4}$

(c) $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-1}{-4}$ (d) इनमें से कोई नहीं

14. बिन्दु (4, –1, 2) से बिन्दु (–3, 2, 3) पर खींची गयी रेखा एक समतल को बिन्दु (–10, 5, 4) पर 90° के कोण पर मिलती है, तो समतल का समीकरण है [DSSE 1985]

(a) $7x-3y-z+89=0$ (b) $7x+3y+z+89=0$

(c) $7x-3y+z+89=0$ (d) इनमें कोई नहीं

15. बिन्दुओं (*a, b, c*) तथा (–*a*, –*c*, –*b*) को मिलाने वाली रेखा को *xy*-तल किस अनुपात में विभाजित करता है [MP PET 1994]

(a) $a:b$ (b) $b:c$

(c) $c:a$ (d) $c:b$

16. रेखा $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{1}$ व समतल $4x+5y+3z-5=0$ का प्रतिच्छेद बिन्दु है

(a) (3, 1, –2) (b) (3, – 2, 1)

(c) (2, –1, 3) (d) (–1, –2, –3)

17. यदि रेखा $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ समतल $ax+by+cz+d=0$ के समान्तर है, तो [MNR 1995; MP PET 1995]

(a) $\frac{a}{l}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}$ (b) $al+bm+cn=0$

(c) $\frac{a}{l}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

18. समतलों $ax+by+cz+d=0$ व $a'x+b'y+c'z+d'=0$ की प्रतिच्छेदी रेखा से जाने वाले एवं रेखा $y=0, z=0$ के समान्तर समतल का समीकरण होगा [Kurukshetra CEE 1998]

(a) $(ab'-a'b)x+(bc'-b'c)y+(ad'-a'd)=0$

(b) $(ab'-a'b)x+(bc'-b'c)y+(ad'-a'd)z=0$

(c) $(ab'-a'b)y+(ac'-a'c)z+(ad'-a'd)=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

19. बिन्दुओं (2, 3, 4) व (6, 7, 8) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को समद्विभाजित करने वाले समतल का समीकरण है [CET 1991, 93]

(a) $x+y+z-15=0$ (b) $x-y+z-15=0$

(c) $x-y-z-15=0$ (d) $x+y+z+15=0$

20. रेखा $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{5}$ निम्न में से किस समतल के समान्तर है

(a) $2x+3y+4z=29$ (b) $3x+4y-5z=10$

(c) $3x+4y+5z=38$ (d) $x+y+z=0$

21. रेखा $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{2}$ और समतल $2x+2y-z=6$ के बीच की दूरी है

(a) 9 इकाई (b) 1 इकाई
(c) 2 इकाई (d) 3 इकाई

22. मूल बिन्दु से होकर जाने वाला समतल, जिसमें कि रेखा $\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$ स्थित है, का समीकरण है

(a) $2x+5y-6z=0$ (b) $x+5y-5z=0$
(c) $x-5y+3z=0$ (d) $x+y-z=0$

23. रेखा $\frac{x-2}{a}=\frac{y-2}{b}=\frac{z-2}{c}$ और समतल $ax+by+cz+6=0$ के मध्य कोण है

(a) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$ (b) 45^o
(c) 60^o (d) 90^o

24. बिन्दु $P(3,4,1)$ एवं बिन्दु $Q(5,1,6)$ से होकर जाने वाली रेखा, *xy* समतल को किस बिन्दु पर काटती है, [MP PET 1997]

(a) $\left(\frac{3}{5},\frac{13}{5},\frac{23}{5}\right)$ (b) $\left(\frac{13}{5},\frac{23}{5},\frac{3}{5}\right)$
(c) $\left(\frac{13}{5},\frac{23}{5},0\right)$ (d) $\left(\frac{13}{5},0,0\right)$

25. उस बिन्दु के निर्देशांक, जहाँ रेखा $\frac{x-6}{-1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z+3}{4}$ समतल $x+y-z=3$ को मिलती है, हैं [MP PET 1998; Pb. CET 2002]

(a) (2, 1, 0) (b) (7, –1, –7)
(c) (1, 2, –6) (d) (5, –1, 1)

26. यदि एक समतल बिन्दु (1,1,1) से होकर गुजरता है और रेखा $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{4}$ के लम्बवत् है, तब इसकी मूल बिन्दु से लम्बवत् दूरी है [MP PET 1998]

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$
(c) $\frac{7}{5}$ (d) 1

27. रेखा $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{-2}$ और समतल $x+y+4=0$ के मध्य कोण है [MP PET 1999]

(a) 0° (b) 30°
(c) 45° (d) 90°

28. समतल का समीकरण, जो रेखा $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{1}$ तथा बिन्दु (0, 7, –7) को अन्तर्विष्ट (containing) करता है, है [Roorkee 1999]

(a) $x+y+z=1$ (b) $x+y+z=2$
(c) $x+y+z=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

29. *xy*-समतल, बिन्दुओं (–1, 3, 4) तथा (2, –5, 6) को मिलाने वाली रेखा को किस अनुपात में विभाजित करता है [RPET 2000]

(a) 2 : 3 में अन्तः विभाजन (b) 3 : 2 में अन्तः विभाजन
(c) 2 : 3 में बाह्य विभाजन (d) 3 : 2 में बाह्य विभाजन

30. रेखा $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, *xy* समतल के समान्तर होगी यदि [AMU 2000]

(a) $l=0$ (b) $m=0$
(c) $n=0$ (d) $l=0, m=0$

31. रेखा $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-3}{4}$ तथा बिन्दु (4, 3, 7) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण है [MP PET 2001]

(a) $4x+8y+7z=41$ (b) $4x-8y+7z=41$
(c) $4x-8y-7z=41$ (d) $4x-8y+7z=39$

32. बिन्दु (3, 2, 0) तथा रेखा $\frac{x-3}{1}=\frac{y-6}{5}=\frac{z-4}{4}$ से गुजरने वाले समतल का समीकरण है [AIEEE 2002]

(a) $x-y+z=1$ (b) $x+y+z=5$
(c) $x+2y-z=0$ (d) $2x-y+z=5$

33. (2, 4, 5) तथा (3, 5, –4) को मिलाने वाली रेखा को *yz*-समतल किस अनुपात में विभाजित करता है [MP PET 2002; RPET 2002]

(a) 2 : 3 (b) 3 : 2
(c) –2 : 3 (d) 4 : –3

34. रेखा $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ तथा समतल $3x+2y-3z=4$ के मध्य कोण है [MP PET 2003]

(a) 45° (b) 0°
(c) $\cos^{-1}\left(\frac{24}{\sqrt{29}\sqrt{22}}\right)$ (d) 90°

35. बिन्दुओं (3, 5, –7) तथा (–2, 1, 8) को मिलाने वाली रेखा, *yz*-समतल को किस बिन्दु पर मिलती है [RPET 2003]

(a) $\left(0,\frac{13}{5},2\right)$ (b) $\left(2,0,\frac{13}{5}\right)$
(c) $\left(0,2,\frac{13}{5}\right)$ (d) (2, 2, 0)

36. समतल $2x-y+3z-1=0$ और रेखा $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{-2}$ के प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक हैं [Orissa JEE 2005]

(a) $(10,\,-10,3)$ (b) $(10,\,10,-3)$
(c) $(-10,\,10,3)$ (d) इनमें से कोई नहीं

37. उस समतल का समीकरण, जो बिन्दु $(2,-1,-3)$ से होकर जाता है तथा रेखाओं $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-4}$ तथा $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-2}{2}$ के समान्तर है, है [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $8x+14y+13z+37=0$
(b) $8x-14y+13z+37=0$
(c) $8x+14y-13z+37=0$
(d) $8x+14y+13z-37=0$
(e) $8x-14y-13z-37=0$

गोला

1. समीकरण $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gxz+2hxy$

$+2ux+2vy+2wz+d=0$

एक गोला निरूपित करेगा, यदि [MP PET 1990]

(a) $a=b=c$

(b) $f=g=h=0$

(c) $v=u=w$

(d) $a=b=c$ तथा $f=g=h=0$

2. एक बिन्दु इस प्रकार गति करता है कि बिन्दुओं (4, 0, 0) तथा (– 4, 0, 0) से इसकी दूरियों का योग 10 है। बिन्दु का बिन्दुपथ है [MP PET 1988]

(a) $9x^2-25y^2+25z^2=225$

(b) $9x^2+25y^2-25z^2=225$

(c) $9x^2+25y^2+25z^2=225$

(d) $9x^2+25y^2+25z^2+225=0$

3. एक बिन्दु इस प्रकार गति करता है कि दो दिये हुये बिन्दुओं से इसकी दूरियों के वर्गों का योग अचर रहता है। बिन्दु का बिन्दुपथ है

(a) एक रेखा (b) एक समतल

(c) एक गोला (d) इनमें से कोई नहीं

4. समीकरण $x^2+y^2+z^2=0$ प्रदर्शित करता है

(a) (0, 0, 0) (b) वृत्त

(c) समतल (d) इनमें से कोई नहीं

5. समीकरण $x^2+y^2+z^2+1=0$ का बिन्दुपथ है

(a) रिक्त समुच्चय

(b) गोला

(c) डिजनरेट समुच्चय (Degenerate set)

(d) समतलों का युग्म

6. चार बिन्दुओं (0, 0, 0), (0, 2, 0), (1, 0, 0) तथा (0, 0, 4) से गुजरने वाले गोले का केन्द्र है [MP PET 2002]

(a) $\left(\frac{1}{2},1,2\right)$ (b) $\left(-\frac{1}{2},1,2\right)$

(c) $\left(\frac{1}{2},1,-2\right)$ (d) $\left(1,\frac{1}{2},2\right)$

7. उस गोले का समीकरण, जो तीनों निर्देशांक समतलों को स्पर्श करता है, है [AMU 2002]

(a) $x^2+y^2+z^2+2a(x+y+z)+2a^2=0$

(b) $x^2+y^2+z^2-2a(x+y+z)+2a^2=0$

(c) $x^2+y^2+z^2\pm 2a(x+y+z)+2a^2=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

8. यदि बिन्दु (3, 4, –1) तथा (–1, 2, 3) गोले के व्यास के सिरे हैं, तब गोले की त्रिज्या है [Orissa JEE 2003]

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 9

9. उस बिन्दु के निर्देशांक, जो बिन्दुओं (0,0,0), (*a*, 0, 0), (0, *b*, 0), (0, 0, *c*) से समान दूरी पर स्थित हैं, है [RPET 2003]

(a) $\left(\frac{a}{4},\frac{b}{4},\frac{c}{4}\right)$ (b) $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{4},\frac{c}{4}\right)$

(c) $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$ (d) (*a*, b, c)

10. '*r*' त्रिज्या वाले ऐसे कितने विभिन्न गोले खींचे जा सकते हैं, जो तीनों अक्षों को स्पर्श करते हैं

(a) 4 (b) 2

(c) 6 (d) 8

11. एक समतल स्थिर बिन्दु (p,q,r) से होकर जाता है और अक्षों को *A,B,C* पर काटता है। तब गोला $OABC$ के केन्द्र का बिन्दुपथ है

(a) $\frac{p}{x}+\frac{q}{y}+\frac{r}{z}=2$ (b) $\frac{p}{x}+\frac{q}{y}+\frac{r}{z}=1$

(c) $\frac{p}{x}+\frac{q}{y}+\frac{r}{z}=3$ (d) इनमें से कोई नहीं

12. गोला $x^2+y^2+z^2=504$, बिन्दुओं $A(12,-4,8)$ तथा $B(27,-9,18)$ को मिलाने वाले रेखा खण्ड *AB* को किस अनुपात में विभाजित करता है

(a) 2 : 3 बाह्यतः (b) 2 : 3 अन्तः

(c) 1 : 2 बाह्यतः (d) इनमें से कोई नहीं

13. r_1 व r_2 त्रिज्या के दो गोले लम्बकोणीय प्रतिच्छेद करते हैं, तब उभयनिष्ठ वृत्त की त्रिज्या होगी

(a) r_1r_2 (b) $\sqrt{(r_1^2+r_2^2)}$

(c) $r_1r_2\sqrt{(r_1^2+r_2^2)}$ (d) $\frac{r_1r_2}{\sqrt{(r_1^2+r_2^2)}}$

14. यदि समतल $2ax-3ay+4az+6=0$,

गोलों $x^2+y^2+z^2+6x-8y-2z=13$

तथा $x^2+y^2+z^2-10x+4y-2z=8$ के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु से होकर गुजरता है, तब $a=$ [AIEEE 2005]

(a) – 2 (b) 2

(c) – 1 (d) 1

15. समतल $x+2y-z=4$, गोले $x^2+y^2+z^2-x+z-2=0$ को किस त्रिज्या के वृत्त में काटता है [AIEEE 2005]

(a) 2 (b) $\sqrt{2}$

(c) 3 (d) 1

16. गोले $x+2y+2z=15$ तथा $x^2+y^2+z^2-2y-4z=11$ की त्रिज्या है [AMU 2005]

(a) 2 (b) $\sqrt{7}$

(c) 3 (d) $\sqrt{5}$

17. उस गोले का समीकरण, जो गोले $2x^2+2y^2+2z^2-6x+2y-4z=1$ के संकेन्द्रीय है व जिसकी त्रिज्या दिये गये गोले की त्रिज्या की दुगनी है, है [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $x^2+y^2+z^2-x+y-z=1$

(b) $x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z=1$

(c) $2x^2+2y^2+2z^2-6x+2y-4z-15=0$

(d) $x^2+y^2+z^2-3x+y-2z=1$

(e) $2x^2+2y^2+2z^2-3x+2y-4z-25=0$

18. यदि गोले $x^2+y^2+z^2-6x-12y-2z+20=0$ के व्यास के एक सिरे के निर्देशांक (2, 3, 5) हैं, तो दूसरे सिरे के निर्देशांक हैं [Kerala (Engg.) 2005]

(a) (4, 3, 5) (b) (4, 9, –3)

(c) (4, 9, 3) (d) (4, 3, –3)

(e) (4, 9, 5)

Critical Thinking

Objective Questions

1. एक रेखाखण्ड AB की दिक् कोज्यायें $\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}$ हैं। यदि $AB = \sqrt{17}$ तथा A के निर्देशांक (3, –6, 10) हों, तो B के निर्देशांक होंगे
(a) (1, –2, 4) (b) (2, 5, 8)
(c) (–1, 3, –8) (d) (1, – 3, 8)

2. किसी रेखा के निर्देशांक अक्षों पर प्रक्षेप क्रमशः 3, 4, 5 हैं, तो रेखा की लम्बाई है [MP PET 1995; RPET 2001]
(a) 12 (b) 50
(c) $5\sqrt{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

3. यदि चतुष्फलक $OABC$, जहाँ A, B, C क्रमशः (a, 2, 3),(1, b, 2) व (2, 1, c) हैं, का केन्द्रक (1, 2, –1) है, तो बिन्दु $P(a,b,c)$ की मूलबिन्दु से दूरी होगी
(a) $\sqrt{107}$ (b) $\sqrt{14}$
(c) $\sqrt{107/14}$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. यदि $P \equiv (0,1,0), Q \equiv (0,0,1)$ हो, तब PQ का समतल $x+y+z=3$ पर प्रक्षेप है [EAMCET 2002]
(a) $\sqrt{3}$ (b) 3
(c) $\sqrt{2}$ (d) 2

5. बिन्दु $A(4,5,1), B(0,-1,-1), C(3,9,4)$ तथा $D(-4,4,4)$ हैं [Kurukshetra CEE 2002]
(a) समरेखीय (b) समतलीय
(c) असमतलीय (d) असमरेखीय तथा असमतलीय

6. किसी घन के दो विकर्णों के बीच कोण होगा [MP PET 1996, 2000; RPET 2000, 02; UPSEAT 2004]
(a) $\sin^{-1}\frac{1}{3}$ (b) $\cos^{-1}\frac{1}{3}$
(c) चर (d) इनमें से कोई नहीं

7. बिन्दु (1,2,–4) से गुजरने वाली एवं रेखाओं $\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7}$ व $\frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$ पर लम्ब रेखा का समीकरण है [AI CBSE 1983]
(a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{6}$ (b) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{8}$
(c) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{8}$ (d) इनमें से कोई नहीं

8. यदि तीन परस्पर लम्बवत् रेखाओं की दिक् कोज्यायें $(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2)$ व (l_3, m_3, n_3) हैं, तो रेखा जिसकी दिक् कोज्यायें $l_1+l_2+l_3, m_1+m_2+m_3$ व $n_1+n_2+n_3$ हों, परस्पर कोण बनायेंगी
(a) 0° (b) 30°
(c) 60° (d) 90°

9. सरल रेखायें, जिनकी दिक्–कोज्यायें $al+bm+cn=0$, $fmn+gnl+hlm=0$ द्वारा दी गयी हैं, लम्बवत् होंगी यदि
(a) $\frac{f}{a}+\frac{g}{b}+\frac{h}{c}=0$ (b) $\sqrt{\frac{a}{f}}+\sqrt{\frac{b}{g}}+\sqrt{\frac{c}{h}}=0$
(c) $\sqrt{af}=\sqrt{bg}=\sqrt{ch}$ (d) $\sqrt{\frac{a}{f}}=\sqrt{\frac{b}{g}}=\sqrt{\frac{c}{h}}$

10. यदि रेखायें $x=1+s, y=-3-\lambda s, z=1+\lambda s$ व $x=\frac{t}{2}$, $y=1+t, z=2-t$, जहाँ s व t प्राचल हैं, समतलीय हैं, तब $\lambda=$ [AIEEE 2004]
(a) 0 (b) –1
(c) –1/2 (d) – 2

11. बिन्दुओं $A(4,7,1)$ तथा $B(3,5,3)$ को मिलाने वाली रेखा पर बिन्दु $P(1,0,3)$ से खींचे गये लम्ब के पाद के निर्देशांक हैं [RPET 2001]
(a) (5, 7, 1) (b) $\left(\frac{5}{3},\frac{7}{3},\frac{17}{3}\right)$
(c) $\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)$ (d) $\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$

12. यदि रेखायें $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{4}$ तथा $\frac{x-3}{1}=\frac{y-k}{1}=\frac{z}{1}$ प्रतिच्छेद करती हैं, तो $k=$ [IIT Screening 2004]
(a) $\frac{2}{9}$ (b) $\frac{9}{2}$
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

13. वर्ग $ABCD$, जिसके विकर्ण की लम्बाई $2a$ है, को विकर्ण AC की दिशा में इस प्रकार मोड़ा जाता है कि समतल DAC और BAC एक दूसरे के लम्बवत् रहते हैं, तो AB व DC के मध्य न्यूनतम दूरी होगी [Kurukshetra CEE 1998]
(a) $\sqrt{2}a$ (b) $2a/\sqrt{3}$
(c) $2a/\sqrt{5}$ (d) $(\sqrt{3}/2)a$

14. एक रेखा, जिसकी दिक् कोज्यायें 2, 1, 2 के समानुपाती हैं, रेखाओं $x=y+a=z$ व $x+a=2y=2z$ पर मिलती है। प्रत्येक प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक हैं [AIEEE 2004]
(a) $(2a, a, 3a), (2a, a, a)$ (b) $(3a, 2a, 3a), (a, a, a)$
(c) $(3a, 2a, 3a), (a, a, 2a)$ (d) $(3a, 3a, 3a), (a, a, a)$

15. समतलों $3x-y-4z=0$ तथा $x+3y+6=0$ की प्रतिच्छेदी रेखा से होकर जाने वाले उन समतलों के समीकरण जिनकी मूल बिन्दु से दूरी 1 है, होंगे
(a) $x-2y-2z-3=0$, $2x+y-2z+3=0$
(b) $x-2y+2z-3=0$, $2x+y+2z+3=0$
(c) $x+2y-2z-3=0$, $2x-y-2z+3=0$
(d) इनमें से कोई नहीं

16. बिन्दुओं A तथा B के निर्देशांक क्रमशः (2, 3, 4) तथा (–2, 5,– 4) हैं। यदि एक बिन्दु P इस प्रकार गति करता है कि $PA^2-PB^2=k$ जहाँ k अचर है, तो P का बिन्दुपथ है
(a) एक रेखा (b) एक समतल
(c) एक गोला (d) इनमें से कोई नहीं

17. समतलों $x+2y+2z=5$ व $3x+3y+2z=8$ पर लम्ब एवं बिन्दु (1,–3,–2) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण है [AISSE 1987]
(a) $2x-4y+3z-8=0$ (b) $2x-4y-3z+8=0$
(c) $2x+4y+3z+8=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

18. एक चर समतल, जो मूल बिन्दु से नियत दूरी p पर है, निर्देशाक्षों को बिन्दुओं A, B, C पर मिलता है। यदि इन बिन्दुओं से होकर, निर्देशांक समतलों के समान्तर समतल खींचे जाते हैं, तो प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ है
(a) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{p^2}$ (b) $x^2+y^2+z^2=p^2$
(c) $x+y+z=p$ (d) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=p$

19. मूलबिन्दु से जाने वाली तथा अक्षों से बराबर कोण बनाने वाली रेखा पर एक स्थिर बिन्दु $P(a, a, a)$ है तो P से जाने वाले तथा OP पर लम्बवत् समतल द्वारा अक्षों पर काटे गये अन्तःखण्डों के व्युत्क्रमों का योग है

(a) a (b) $\frac{3}{2a}$
(c) $\frac{3a}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

20. समतलों $x + 2y + 3z - 4 = 0$, $4x + 3y + 2z + 1 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु एवं मूल बिन्दु से होकर जाने वाले समतल का समीकरण है [MP PET 1998]

(a) $x + y + z = 0$ (b) $17x + 14y + 11z = 0$
(c) $7x + 4y + z = 0$ (d) $17x + 14y + z = 0$

21. $(1, 0, 0)$ तथा $(0,1,0)$ से जाने वाले उस समतल का अभिलम्ब, जो समतल $x + y = 3$ के साथ $\frac{\pi}{4}$ का कोण बनाता है, के दिक्–अनुपात हैं [AIEEE 2002]

(a) $1, \sqrt{2}, 1$ (b) $1, 1, \sqrt{2}$
(c) 1, 1, 2 (d) $\sqrt{2}, 1, 1$

22. समकोणिक अक्षों के दो निकायों का मूल बिन्दु एक ही है; यदि समतल इन्हें मूल बिन्दु से a, b, c तथा a', b', c' दूरियों पर काटता है, तब [AIEEE 2003]

(a) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} + \frac{1}{c'^2} = 0$
(b) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} - \frac{1}{c'^2} = 0$
(c) $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a'^2} - \frac{1}{b'^2} - \frac{1}{c'^2} = 0$
(d) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a'^2} - \frac{1}{b'^2} - \frac{1}{c'^2} = 0$

23. यदि रेखा $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4}$ मूलबिन्दु से होकर जाने वाले समतल $4x + 4y - kz = 0$ पर स्थित हो, तो $k =$ [MP PET 1992]

(a) 1 (b) 3
(c) 5 (d) 7

24. रेखा $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-6}$ के समान्तर मापी गयी, बिन्दु (1, –2, 3) की समतल $x - y + z = 5$ से दूरी है [AI CBSE 1984]

(a) 1 (b) $\frac{6}{7}$
(c) $\frac{7}{6}$ (d) इनमें से कोई नहीं

25. रेखा $\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{2}$ तथा समतल $x + y + z = 17$ के प्रतिच्छेद बिन्दु की बिन्दु (3, 4, 5) से दूरी है

(a) 3 (b) $\frac{3}{2}$
(c) $\sqrt{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

26. यदि रेखायें $\frac{x-a+d}{\alpha-\delta} = \frac{y-a}{\alpha} = \frac{z-a-d}{\alpha+\delta}$ व $\frac{x-b+c}{\beta-\gamma} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-b-c}{\beta+\gamma}$ समतलीय हैं। तो वह समतल, जिस पर ये स्थित हैं, है

(a) $x + y + z = 0$ (b) $x - y + z = 0$
(c) $x - 2y + z = 0$ (d) $x + y - 2z = 0$

27. रेखा $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-5}{4}$, समतल $4x + 4y - kz - d = 0$ में स्थित है। तब k तथा d के मान क्रमशः हैं

(a) 4, 8 (b) –5, – 3
(c) 5, 3 (d) – 4, – 8

28. यदि रेखा $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-k}{2}$, समतल $2x - 4y + z = 7$ में स्थित है, तो k का मान है [IIT Screening 2003]

(a) 7 (b) – 7
(c) कोई वास्तविक मान नहीं (d) 4

29. समतल $12x + 4y + 3z = 327$ से गोले $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z = 155$ की न्यूनतम दूरी है [AIEEE 2003]

(a) 26 (b) $11\frac{4}{13}$
(c) 13 (d) 39

30. उस वृत्त की त्रिज्या, जिसमें की समतल $x + 2y + 2z + 7 = 0$ द्वारा गोला $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 19 = 0$ काटा जाता है, है [AIEEE 2003]

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

31. रॉकेट की गति के समीकरण हैं : $x = 2t, y = -4t, z = 4t$ जहाँ समय, सेकण्ड में दिया गया है और गतिक बिन्दु के निर्देशांक किमी. में हैं। रॉकेट का पथ क्या है तथा 10 सेकण्ड में प्रारम्भिक बिन्दु $O(0,0,0)$ से रॉकेट कितनी दूरी तय करेगा

(a) सरल रेखा, 60 किमी (b) सरल रेखा, 30 किमी
(c) परवलय, 60 किमी (d) दीर्घवृत्त, 60 किमी

32. एक समतल $lx + my = 0$ को समतल $z = 0$ के साथ उसकी प्रतिच्छेद रेखा के परितः α कोण से घुमाया जाता है, तब नयी स्थिति में समतल का समीकरण होगा

(a) $lx + my \pm z\sqrt{(l^2 + m^2)} \tan\alpha = 0$
(b) $lx - my \pm z\sqrt{(l^2 + m^2)} \tan\alpha = 0$
(c) $lx + my \pm z\sqrt{(l^2 + m^2)} \cos\alpha = 0$
(d) $lx - my \pm z\sqrt{(l^2 + m^2)} \cos\alpha = 0$

33. दो बिन्दुओं के बीच की दूरी d है और निर्देशांक अक्षों पर PQ के प्रक्षेपों की लम्बाईयाँ d_1, d_2, d_3 है तब $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = kd^2$, जहाँ $k =$

(a) 1 (b) 5
(c) 3 (d) 2

34. यदि बिन्दुओं (2,3,4) व (1,1,4) से समतल $3x - 6y + 2z + 11 = 0$ पर डाले गये लम्बों की लम्बाईयाँ क्रमशः P_1 व P_2 है, तब P_1, P_2 निम्न में से किस समीकरण के मूल हैं

(a) $P^2 - 23P + 7 = 0$ (b) $7P^2 - 23P + 16 = 0$
(c) $P^2 - 17P + 16 = 0$ (d) $P^2 - 16P + 7 = 0$

35. यदि घन की कोर की लम्बाई 'a' है, तब घन के विकर्ण व विषम कोर (edge skew) के बीच की न्यूनतम दूरी है

(a) $a\sqrt{2}$ (b) a
(c) $\frac{\sqrt{2}}{a}$ (d) $\frac{a}{\sqrt{2}}$

Answers

निर्देशांक निकाय, दिक् अनुपात तथा दिक् कोज्याएँ, प्रक्षेप

1	b	2	d	3	b	4	b	5	c
6	a	7	a	8	d	9	c	10	a
11	b	12	c	13	c	14	c	15	d
16	d	17	b	18	d	19	a	20	b
21	a	22	b	23	b	24	b	25	a
26	c	27	b	28	a	29	a	30	a
31	b	32	a	33	b	34	a	35	a
36	b	37	b	38	a	39	b	40	a
41	b	42	b	43	b	44	d	45	d
46	c	47	a, d	48	d	49	d	50	a
51	d	52	c	53	b	54	a	55	b
56	b	57	b	58	a	59	b	60	d
61	c	62	b	63	b	64	d	65	a
66	a	67	d	68	a	69	c	70	c
71	c	72	b	73	d	74	d	75	b

रेखा

1	a	2	d	3	a	4	b	5	d
6	a	7	b	8	a	9	a	10	b
11	d	12	c	13	d	14	b	15	d
16	b	17	c	18	b	19	c	20	d
21	d	22	b	23	c	24	c	25	a
26	d	27	a	28	d	29	a	30	c
31	d	32	a	33	c	34	b	35	a
36	a	37	a	38	a	39	d	40	c
41	a	42	d	43	b				

समतल

1	b	2	b	3	c	4	c	5	d
6	a	7	b	8	a	9	a	10	c
11	c	12	d	13	a	14	a	15	c
16	b	17	b	18	a	19	d	20	b
21	c	22	a	23	d	24	a	25	a
26	c	27	a	28	c	29	d	30	a
31	b	32	a	33	a	34	a	35	c
36	b	37	a	38	a	39	d	40	b
41	d	42	d	43	d	44	b	45	a
46	d	47	b	48	d	49	d	50	b
51	c	52	c	53	a	54	b	55	a
56	a	57	a	58	b	59	b	60	a
61	b	62	b	63	a	64	c	65	a
66	c	67	a	68	b	69	c	70	d
71	b	72	d	73	b	74	a		

रेखा व समतल

1	b	2	d	3	a	4	a	5	a
6	a	7	d	8	d	9	c	10	b
11	a	12	d	13	a	14	a	15	d
16	b	17	b	18	c	19	a	20	b
21	d	22	c	23	d	24	c	25	d
26	c	27	c	28	c	29	c	30	c
31	b	32	a	33	c	34	b	35	a
36	b	37	a						

गोला

1	d	2	c	3	c	4	a	5	a
6	a	7	b	8	c	9	c	10	d
11	a	12	a	13	d	14	a	15	d
16	b	17	e	18	b				

Critical Thinking Questions

1	d	2	c	3	a	4	c	5	b
6	b	7	a	8	a	9	a	10	d
11	b	12	b	13	b	14	b	15	a
16	b	17	a	18	a	19	d	20	b
21	b	22	d	23	c	24	a	25	a
26	c	27	c	28	a	29	c	30	c
31	a	32	a	33	d	34	b	35	d

Answers and Solutions

निर्देशांक निकाय, दिक् अनुपात तथा दिक् कोज्याएँ, प्रक्षेप

1. (b) यहाँ $a=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}$, $b=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}$ व $c=\sqrt{1+16+1}=\sqrt{18}$
स्पष्टतः, यह समकोणीय समद्विबाहु त्रिभुज है।

2. (d) $\frac{-4+1}{5+4}=\frac{2-3}{5-2}=\frac{-2-2}{\lambda+2}$ या $\lambda+2=12$ या $\lambda=10$.

3. (b) समतल के अभिलम्ब के दिक् अनुपात (2, 3, – 6) हैं।
$\therefore$ दिक् कोज्यायें $\left(\frac{2}{\sqrt{49}},\frac{3}{\sqrt{49}},-\frac{6}{\sqrt{49}}\right)$ या $\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{-6}{7}\right)$ हैं।

4. (b) $x=\frac{-5+9}{-2}=-2$, $y=\frac{-5(2)+3(-5)}{-2}=\frac{25}{2}$
$z=\frac{-5(3)+3(6)}{-2}=-\frac{3}{2}$.

5. (c) मूल बिन्दु से दूरी $=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$
तथा y-अक्ष से दूरी $=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$.

6. (a) चूँकि $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$
$\Rightarrow \Sigma\sin^2\alpha=3-1=2$.

7. (a) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$
$\Rightarrow \cos\gamma=\sqrt{1-\left(\frac{14}{15}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{8}{9}-\left(\frac{196}{225}\right)}=\pm\frac{2}{15}$.

8. (d) यह स्पष्ट है।

9. (c) $d=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$.

10. (a) दिक् कोज्यायें $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ हैं।

11. (b) x-अक्ष से दूरी $=\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$
y-अक्ष से दूरी $=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$
z-अक्ष से दूरी $=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$.

12. (c) $0=\frac{a-2+4}{3}\Rightarrow a=-2$, $0=\frac{1+b+7}{3}\Rightarrow b=-8$
व $0=\frac{3-5+c}{3}\Rightarrow c=2$.

13. (c) विकल्प (c) के परीक्षण से, $\frac{4-(-2)}{-3-4}\neq\frac{-3-4}{-2-(-3)}$
अतः इन बिन्दुओं का समूह असमरेखीय है।

14. (c) यहाँ, $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$
$\therefore\ 3\cos^2\alpha=1\Rightarrow\alpha=\cos^{-1}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

15. (d) $\cos\gamma=\sqrt{1-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{-1}{4}}$, जो कि सम्भव नहीं है।

16. (d) $l(1)+m(0)+n(2-1)=0\Rightarrow l+n=0$
व $l(-2)+m(1)+n(-4)=0 \Rightarrow 2l-m+4n=0$
$\therefore\ l=-\frac{m}{2}=-n$.
अतः दिक् अनुपात (1, – 2, – 1) हैं।

17. (b) दिक् कोज्यायें $\frac{2}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}},\frac{-3}{\sqrt{49}},\frac{6}{\sqrt{49}}$ या $\frac{2}{7},\frac{-3}{7},\frac{6}{7}$ हैं।

18. (d) रेखाओं PQ व RS के बीच कोण ज्ञात करने पर पाते हैं कि न तो $PQ\parallel RS$ और ना ही $PQ\perp RS$ साथ ही $PQ\neq RS$.

19. (a) चूँकि AB व CD परस्पर लम्बवत् हैं अतः AB का CD पर प्रक्षेप 0 (शून्य) होगा।

20. (b) $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$, अतः $OP\perp OQ$.

21. (a) $r=\sqrt{4+1+4}=3$.

22. (b) अनुपात $=-\left(\frac{5}{-2}\right)=\frac{5}{2}$, अर्थात् 5 : 2.

23. (b) $\left[\frac{2+1}{1},\frac{4-0}{1},\frac{-2-1}{1}\right]=(3,4,-3)$.

24. (b) xy-तल के लिये, $z=0\Rightarrow\frac{6\lambda+1}{\lambda+1}=0\Rightarrow\lambda=-\frac{1}{6}$
$\therefore\ x=\frac{-5+18}{5}=\frac{13}{5}$, $y=\frac{-1+24}{5}=\frac{23}{5}$.

25. (a) यहाँ, $x_2-x_1=6$, $y_2-y_1=6$, $z_2-z_1=4$ और x,y,z-अक्षों की दिक् कोज्यायें क्रमशः (1,0,0), (0,1,0), (0, 0, 1) हैं।
अतः प्रक्षेप $=(x_2-x_1)l+(y_2-y_1)m+(z_2-z_1)n$
$\therefore$ रेखा AB का निर्देशांक अक्षों पर प्रक्षेप क्रमशः 6, 6, 4 है।

26. (c) यह स्पष्ट है।

27. (b) यहाँ, $\cos^2\alpha+\cos^2(90-\alpha)+\cos^2\gamma=1$
$\Rightarrow\ \cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\gamma=1$
$\Rightarrow\ \cos^2\gamma+1=1\Rightarrow\gamma=90^o$.

28. (a) यहाँ, $\frac{(3-(-2))}{1-3}=\frac{-6-4}{-2-(-6)}=\frac{-8-7}{-2-(-8)}$
$\Rightarrow\ -\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}$. स्पष्टतः बिन्दु समरेखीय हैं।

29. (a) माना बिन्दु C, रेखा AB को $1:\lambda$ के अनुपात में विभाजित करता है, $\therefore 5=\frac{9\lambda+3}{\lambda+1}\Rightarrow 4\lambda=2\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}$
अतः अभीष्ट अनुपात 2 : 1 है।

30. (a) दिक्-कोज्यायें $=\left(\frac{4}{\sqrt{16+36+144}},\frac{6}{14},\frac{12}{14}\right)$ या $\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right)$.

31. (b) माना $P(x,y,z)$. अब प्रश्नानुसार,
$\left[\sqrt{(x^2+y^2)}\right]^2+\left[\sqrt{(y^2+z^2)}\right]^2+\left[\sqrt{(z^2+x^2)}\right]^2=36$
$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=18$
तब, मूल बिन्दु से बिन्दु (x,y,z) की दूरी
$=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

32. (a) प्रश्नानुसार, $\frac{a+2}{6}=\frac{b-1}{2}=\frac{c+8}{3}$
$\Rightarrow a=4,\ b=3,\ c=-5$.

33. (b) दिक् अनुपात $l=4-(-2)=6$, $m=3-1=2$ व $n=-5+8=3$ हैं।

34. (a) अनुपात $=-\left(\frac{3}{-2}\right)=\frac{3}{2}$
$\therefore$ अभीष्ट निर्देशांक $=\left[\frac{6-6}{5},\frac{10+3}{5},\frac{-14+24}{5}\right]=\left(0,\frac{13}{5},2\right)$.

35. (a) माना बिन्दु (x,y,z) है, तो $x^2+y^2+z^2$
$=(x-a)^2+y^2+z^2=x^2+(y-b)^2+z^2=x^2+y^2+(z-c)^2$
अतः $x=\frac{a}{2},\ y=\frac{b}{2}$ व $z=\frac{c}{2}$.

36. (b) स्पष्टतः, प्रक्षेप $=[2-(-1)]\frac{6}{7}+[5-0]\frac{2}{7}+[1-3]\frac{6}{7}$
$=\frac{18+10-6}{7}=\frac{22}{7}$.

37. (b) माना $A=(1,1,1)$; $B=(-2,4,1)$; $C=(-1,5,5)$ व $D=(2,2,5)$
$AB=\sqrt{9+9+0}=3\sqrt{2},\ BC=\sqrt{1+1+16}=3\sqrt{2}$ व
$CD=3\sqrt{2}$ व $AD=3\sqrt{2}$. अतः यह एक वर्ग है।

38. (a) माना रेखायें हैं, $l_1x+m_1y+n_1z+d=0$ .....(i)
व $l_2x+m_2y+n_2z+d=0$ .....(ii)
यदि $lx+my+nz+d=0$, (i) व (ii) पर लम्ब है
तो $ll_1+mm_1+nn_1=0,\ ll_2+mm_2+nn_2=0$
$\Rightarrow \frac{l}{m_1n_2-m_2n_1}=\frac{m}{n_1l_2-l_1n_2}=\frac{n}{l_1m_2-l_2m_1}=d$
अतः दिक् कोज्यायें
$(m_1n_2-m_2n_1),(n_1l_2-l_1n_2),(l_1m_2-l_2m_1)$ हैं।

39. (b) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma$
$=2\cos^2\alpha-1+2\cos^2\beta-1+2\cos^2\gamma-1$
$=2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)-3=2-3=-1$.

40. (a) अभीष्ट दूरी $=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$.

41. (b) चूँकि तीनों रेखायें परस्पर लम्बवत् हैं
$\therefore$ $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$
$l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3=0$
$l_3l_1+m_3m_1+n_3n_1=0$
साथ ही,
$l_1^2+m_1^2+n_1^2=1,\ l_2^2+m_2^2+n_2^2=1,\ l_3^2+m_3^2+n_3^2=1$
$(l_1+l_2+l_3)^2+(m_1+m_2+m_3)^2+(n_1+n_2+n_3)^2$
$=(l_1^2+m_1^2+n_1^2)+(l_2^2+m_2^2+n_2^2)+(l_3^2+m_3^2+n_3^2)$
$+2(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)+2(l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3)$
$+2(l_3l_1+m_3m_1+n_3n_1)=3$
$\Rightarrow (l_1+l_2+l_3)^2+(m_1+m_2+m_3)^2+(n_1+n_2+n_3)^2=3$
अतः अभीष्ट रेखा की दिक् कोज्यायें
$\left(\frac{l_1+l_2+l_3}{\sqrt{3}},\frac{m_1+m_2+m_3}{\sqrt{3}},\frac{n_1+n_2+n_3}{\sqrt{3}}\right)$ हैं।
नोट : विद्यार्थी इसे तथ्य समझकर याद रखें।

42. (b) x-अक्ष का समीकरण $y=0,\ z=0$. अतः y व z नियत रहेंगे।

43. (b) चूँकि रेखा की दिक् कोज्यायें $\left(\frac{1}{c},\frac{1}{c},\frac{1}{c}\right)$ हैं
$\therefore \frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^2}=1\Rightarrow c^2=3\Rightarrow c=\pm\sqrt{3}$.

44. (d) चूँकि ZOX समतल अर्थात् $y=0$ बिन्दुओं (1,–1, 5) तथा (2, 3, 4) को जोड़ने वाली रेखा को $\lambda:1$ में विभाजित करता है।
अतः $\frac{3\lambda-1}{\lambda+1}=0\Rightarrow \lambda=\frac{1}{3}$.

45. (d) अभीष्ट दिक् कोज्यायें
$\frac{3}{\sqrt{3^2+12^2+4^2}},\frac{12}{\sqrt{3^2+12^2+4^2}},\frac{4}{\sqrt{3^2+12^2+4^2}}$
अर्थात् $\frac{3}{13},\frac{12}{13},\frac{4}{13}$ हैं।

46. (c) $Ax+By+Cz+D=0$ सदैव एक समतल निरूपित करता है।

47. (a,d) समतल के अभिलम्ब की दिक् कोज्यायें
$\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}},\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}},\frac{-3}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}$
अर्थात् $\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{-3}{\sqrt{14}}$ हैं।
परन्तु $x+2y-3z+4=0$ को $-x-2y+3z-4=0$ भी लिखा जा सकता है, अतः दिक् कोज्यायें $\frac{-1}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}$ हैं।

48. (d) दिए गये समीकरण को मानक रूप में लिखने पर, $\frac{x+\frac{1}{3}}{-1}=\frac{y+\frac{2}{3}}{2}=\frac{z}{-1}$
अतः दिक् कोज्यायें $\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$ हैं।

49. (d) $x=\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2},\ y=\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$,
$z=\frac{m_1z_2+m_2z_1}{m_1+m_2}$ से; $x=\frac{20}{7},\ y=\frac{5}{7},\ z=\frac{15}{7}$.

50. (a) दिक् अनुपात (1, – 3, 2) हैं अतः दिक् कोज्यायें
$=\left(\frac{1}{\sqrt{1+9+4}},\frac{-3}{\sqrt{1+9+4}},\frac{2}{\sqrt{1+9+4}}\right)$
$\Rightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-3}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$.

51. (d) दिया है, $\alpha=45^o,\ \beta=60^o$ तथा $\gamma=?$
$\because \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$
$\therefore \cos^2\gamma=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow\gamma=60^o$ या 120^o.

52. (c) समतल $3x+4y+12z=52$ के अभिलम्ब के दिक् अनुपात 3, 4, 12 हैं, अतः दिक् कोज्यायें
$=\left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}},\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}},\frac{12}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}}\right)$
$=\left(\frac{3}{13},\frac{4}{13},\frac{12}{13}\right)$.

53. (b) x-अक्ष से दूरी = $\sqrt{y^2+z^2} = \sqrt{(b^2+c^2)}$.

54. (a) यदि l, m, n रेखा के दिक् अनुपात हैं, तो

$Al + Bm + Cn = 0$

$x - y + z - 5 = 0$ के लिए, $l - m + n = 0$ .....(i)

$x - 3y - 6 = 0$ के लिए, $l - 3m + 0n = 0$ .....(ii)

अथवा $\frac{l}{0+3} = \frac{m}{1-0} = \frac{n}{-3+1}$ या $\frac{l}{3} = \frac{m}{1} = \frac{n}{-2}$

$\therefore$ दिक् अनुपात $(3, 1, -2)$ हैं।

नोट : विकल्प (c) अर्थात्, $\left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$ भी संभव है, किन्तु सही विकल्प $A(3, 1, -2)$ है क्योंकि विकल्प (c) में दिक् कोज्याऐं दी गई हैं।

55. (b) P के निर्देशांक (lr, mr, nr) हैं।

यहाँ $l = \frac{-1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{-1}{3}, m = \frac{2}{3}, n = \frac{-2}{3}$

तथा $r = 3$, (दिया है)

$\therefore P$ के निर्देशांक $(-1, 2, -2)$ हैं।

56. (b) माना P , QR को $\lambda : 1$ में विभाजित करता है, तब P के निर्देशांक $\left(\frac{5\lambda+2}{\lambda+1}, \frac{\lambda+2}{\lambda+1}, \frac{-2\lambda+1}{\lambda+1}\right)$ हैं।

P का x निर्देशांक 4 है, अर्थात् $\frac{5\lambda+2}{\lambda+1} = 4 \Rightarrow \lambda = 2$

अतः P का z निर्देशांक = $\frac{-2\lambda+1}{\lambda+1} = \frac{-4+1}{2+1} = -1$.

57. (b) $\because AB = BC = CD = DA = 7$ तथा $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} \ne 0$

$\therefore ABCD$ वर्ग नहीं है। यह समचतुर्भुज है।

58. (a) रेखा PQ की दिक् कोज्यायें हैं,

$l = \frac{x_2 - x_1}{|PQ|}, m = \frac{y_2 - y_1}{|PQ|}, n = \frac{z_2 - z_1}{|PQ|}$

$\because x_2 - x_1 = -6, y_2 - y_1 = -2, z_2 - z_1 = -3$

तथा $|PQ| = \sqrt{36+4+9} = 7$

$\therefore l = \frac{6}{7}, m = \frac{2}{7}, n = \frac{3}{7}$.

59. (b) यह स्पष्ट है।

60. (d) माना A (0, 7, 10), B (–1, 6, 6) तथा C (– 4, 9, 6) हैं,

तब $AB = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$

स्पष्टतः, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\therefore \Delta$, समकोण त्रिभुज है। $\because AB = BC$

अतः Δ, समकोण समद्विबाहु त्रिभुज है।

61. (c) $AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-2)^2 + (-1-3)^2}$

$AB = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$.

62. (b) यह स्पष्ट है।

63. (b) यहाँ, $x_2 - x_1 = 2, y_2 - y_1 = -2, z_2 - z_1 = 1$

अर्थात् RS के दिक्अनुपात (2, –2, 1) हैं।

अब PQ के लिए दिक् कोज्यायें $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}$ हैं

अतः, PQ पर RS का प्रक्षेप = $\sum l(x_2 - x_1)$

$= \frac{2}{3} - \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-4}{3}$.

64. (d) यह स्पष्ट है।

65. (a) माना d रेखा की लम्बाई है, तब x-अक्ष पर प्रक्षेप= dl = 2,

y-अक्ष पर प्रक्षेप = dm = 3,

z- अक्ष पर प्रक्षेप = dn = 6

$\therefore d^2(l^2 + m^2 + n^2) = 4 + 9 + 36$

$\Rightarrow d^2(1) = 49 \Rightarrow d = 7$.

66. (a) $\cos^2\alpha = 1 - \cos^2 60^o - \cos^2 60^o$

$= 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 45^o$.

67. (d) माना $A(5, -4, 2)$, $B(4, -3, 1)$, $C(7, -6, 4)$ व $D(8, -7, 5)$ हैं। तब $AB = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$,

$BC = \sqrt{9+9+9} = 3\sqrt{3}$, $CD = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$AD = \sqrt{9+9+9} = 3\sqrt{3}$.

किन्तु $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} \ne 0$

माना AB व BC के बीच कोण θ है तब $\cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi$.

अतः विकल्प (d) सही है।

68. (a) यदि $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, n\right)$ रेखा की दिक् कोज्यायें हैं, तब

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + n^2 = 1 \Rightarrow n^2 = \frac{23}{36} \Rightarrow n = \frac{\sqrt{23}}{6}$.

69. (c) y-अक्ष से दूरी = $\sqrt{x^2 + z^2}$

= $\sqrt{4^2 + 5^2}$ = $\sqrt{16+25}$ = $\sqrt{41}$.

70. (c) माना रेखा की लम्बाई d है, तब x-अक्ष पर रेखा का प्रक्षेप = $dl = 3$, y-अक्ष पर प्रक्षेप = $dm = 4$ और z-अक्ष पर प्रक्षेप = $dn = 5$

$\therefore d^2(l^2 + m^2 + n^2) = 50 \Rightarrow d^2(1) = 50 \Rightarrow d = 5\sqrt{2}$.

71. (c) माना घन की भुजा a है, तब OG, BE और AD, CF चार विकर्ण होगें ।

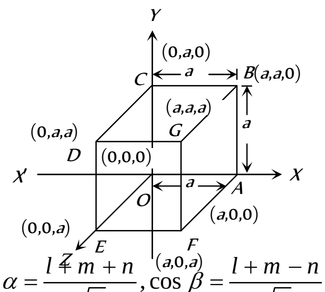
विकर्ण OG के दिक् अनुपात = a, a, a = 1, 1, 1

विकर्ण BE के दिक् अनुपात = $-a, -a, a$ = 1, 1, –1

विकर्ण AD के दिक् अनुपात = $-a, a, a$ = –1, 1, 1

विकर्ण CF के दिक् अनुपात = $a, -a, a$ = 1, –1, 1

माना रेखा के दिक् अनुपात l, m, n हैं तथा रेखा और विकर्णों के बीच कोण α, β, γ व δ हैं, तब



$\cos\alpha = \frac{l + m + n}{\sqrt{3}}, \cos\beta = \frac{l + m - n}{\sqrt{3}}$,

$\cos\gamma = \dfrac{-l+m+n}{\sqrt{3}}, \cos\delta = \dfrac{l-m+n}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta$

$= \dfrac{1}{3}[(l+m+n)^2 + (l+m-n)^2 + (-l+m+n)^2 + (l-m+n)^2]$

$= \dfrac{4}{3} \Rightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + \sin^2\delta = \dfrac{8}{3}$.

72. (b) यह आधारभूत संकल्पना है।

73. (d) $AB = \sqrt{(a-1)^2 + 3^2 + 0} = 5$

$\Rightarrow a - 1 = \pm 4 \Rightarrow a = -3, 5$

$CD = \sqrt{(a-1)^2 + (a+5)^2 + (a-1)^2} = 6$

$\Rightarrow a^2 - 2a - 15 = 0 \Rightarrow a = -3, 5$

स्पष्टतः, $a = -3$.

74. (d) AB का समीकरण है, $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-3}{0} = \dfrac{z-2}{3}$ .....(i)

AC का समीकरण है, $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{-4}$ .....(ii)

अतः $\angle A = \cos^{-1}\left(\dfrac{12+0-12}{\sqrt{9+9}\sqrt{16+4+16}}\right) = 90^o$.

75. (b) चूँकि $\alpha = \beta = \gamma \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

इस प्रकार चार रेखायें हैं, जिनकी दिक् कोज्यायें निम्न हैं,

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),$

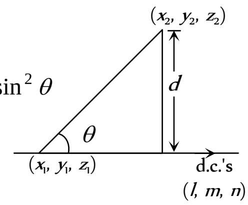
$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.

रेखा

1. (a) माना $\mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$,

$\mathbf{r}_2 = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{\mathbf{r}_2.\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2|}$



तथा $d = |\mathbf{r}_1|\sin\theta$, $d^2 = |\mathbf{r}_1|^2\sin^2\theta$

$\Rightarrow d^2 = |\mathbf{r}_1|^2(1 - \cos^2\theta)$

$\Rightarrow d^2 = |\mathbf{r}_1|^2\left(1 - \dfrac{\mathbf{r}_1.\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1|^2|\mathbf{r}_2|^2}\right)$

$\Rightarrow d^2 = |\mathbf{r}_1|^2 - (\mathbf{r}_1.\mathbf{r}_2)^2$, {जहाँ $|\mathbf{r}_2| = 1$}

$\Rightarrow d = \sqrt{|\mathbf{r}_1|^2 - (\mathbf{r}_1.\mathbf{r}_2)^2}$

अतः रेखा से बिन्दु (x_1, y_1, z_1) की दूरी $= d$

$= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2 - [l(x_2-x_1) + m(y_2-y_1) + n(z_2-z_1)]^2}$.

2. (d) यहाँ AB व CD के दिक् अनुपात क्रमशः 3, 3, 4 व 6, 6, 8 हैं।

$\therefore \theta = \cos^{-1}\left[\dfrac{(3)(6)+(3)(6)+(4)(8)}{\sqrt{34}.\sqrt{136}}\right] = \cos^{-1}\left[\dfrac{68}{2\times 34}\right] = 0^o$.

3. (a) $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{3+0-5}{\sqrt{1+1}\sqrt{9+16+25}}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\dfrac{-2}{\pm 10}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{5}\right)$.

4. (b) $\dfrac{-2}{l} = \dfrac{-2}{m} = \dfrac{2}{n}$; $\therefore$ $(l, m, n) = (1, 1, -1)$.

5. (d) $\cos\theta = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2a - 3 + 10}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}\sqrt{a^2 + 3^2 + 5^2}}$

$\Rightarrow 9(a^2 + 34) = 2[2a+7]^2 = 2[4a^2 + 28a + 49]$

$\Rightarrow a^2 - 56a + 208 = 0 \Rightarrow a = 4$.

6. (a) **ट्रिक :** दोनों रेखायें बिन्दु $(-1, -1, -1)$ से सन्तुष्ट होती हैं।

7. (b) चूँकि $\dfrac{a}{(1/bc)} = \dfrac{b}{(1/ca)} = \dfrac{c}{(1/ab)}$, अतः रेखायें समान्तर हैं।

8. (a) $\theta = \cos^{-1}\left[\dfrac{(1)(2) + (2)(-3) + (1)(6)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}}\right]$

$\cos^{-1}\left[\dfrac{2-6+6}{\sqrt{6}\sqrt{49}}\right] = \cos^{-1}\left[\dfrac{2}{7\sqrt{6}}\right]$.

9. (a) दिया है, $x - ay - b = 0$ व $cy - z + d = 0$

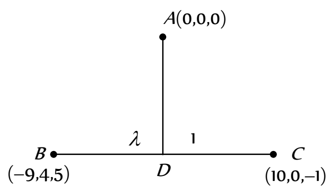
यदि l, m, n दिक् कोज्यायें हैं, तो $\dfrac{l}{a} = \dfrac{m}{1} = \dfrac{n}{c}$

अतः, दिक् अनुपात $= (a, 1, c)$.

10. (b) अभीष्ट रेखा का समीकरण $\dfrac{(x+3)}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+4}{1}$ है।

11. (d) माना AD लम्ब है एवं D लम्ब पाद है जो कि BC को $\lambda : 1$ के अनुपात में विभाजित करता है, अतः

$D\left(\dfrac{10\lambda - 9}{\lambda + 1}, \dfrac{4}{\lambda + 1}, \dfrac{-\lambda + 5}{\lambda + 1}\right)$ .....(i)



AD के दिक् अनुपात $\dfrac{10\lambda - 9}{\lambda + 1}, \dfrac{4}{\lambda + 1}, \dfrac{-\lambda + 5}{\lambda + 1}$ हैं एवं BC के दिक् अनुपात 19, – 4, – 6 हैं।

चूँकि $AD \perp BC$

$\therefore 19\left(\dfrac{10\lambda - 9}{\lambda + 1}\right) - 4\left(\dfrac{4}{\lambda + 1}\right) - 6\left(\dfrac{-\lambda + 5}{\lambda + 1}\right) = 0$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{31}{28}$

अतः λ का मान (i) में रखने पर, अभीष्ट लम्ब पाद के निर्देशांक $\left(\dfrac{58}{59}, \dfrac{112}{59}, \dfrac{109}{59}\right)$ हैं।

ट्रिक: दिये गये बिन्दुओं से जाने वाली रेखा $\frac{x+9}{19}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z-5}{-6}$ है। अब लम्बपाद बिन्दु इस रेखा पर स्थित होगा, अतः यह इस रेखा को सन्तुष्ट करेगा परन्तु विकल्पों में दिया गया कोई भी बिन्दु इस रेखा को सन्तुष्ट नहीं करता है। अतः विकल्प (d) सही है।

12. (c) माना अभीष्ट रेखा के दिक् अनुपात a, b, c हैं।

$\therefore\ 3a+2b+c=0$ व $a+b-2c=0$

$\frac{a}{-4-1}=\frac{b}{1+6}=\frac{c}{3-2}$ या $\frac{a}{-5}=\frac{b}{7}=\frac{c}{1}$

अभीष्ट रेखा के बिन्दु ज्ञात करने के लिये दिये गये समीकरण में $z=0$ रखने पर, $3x+2y=5$ व $x+y=3$. इन दोनों समीकरणों को हल करने पर, $x=-1, y=4$

$\therefore$ अभीष्ट रेखा पर बिन्दु के निर्देशांक $(-1,4,0)$ हैं। अतः रेखा का समीकरण $\frac{x+1}{-5}=\frac{y-4}{7}=\frac{z-0}{1}$ है।

13. (d) $l+m+n=0,\ l^2+m^2-n^2=0$ व $l^2+m^2+n^2=1$

दिये गये समीकरणों को हल करने पर,

$m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, n=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ व $l=0$, $\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}$ या $\frac{\pi}{2}$.

14. (b) अभीष्ट रेखा $\frac{x-a}{a-b-a}=\frac{y-b}{b-c-b}=\frac{z-c}{c-a-c}$

अर्थात्, $\frac{x-a}{b}=\frac{y-b}{c}=\frac{z-c}{a}$ है।

15. (d) बिन्दु (a, b, c) से जाने वाली रेखा है, $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$ .....(i)

चूँकि रेखा, z-अक्ष के समान्तर है, अतः इस पर कोई भी बिन्दु (a, b, z_1) प्रकार का होगा।

एवं रेखा (i) पर कोई बिन्दु $(lr+a,\ mr+b,\ nr+c)$ होगा।

$\therefore\ \begin{matrix} lr+a=a \\ mr+b=b \end{matrix} \Rightarrow l=m=0$

अतः रेखा $\frac{x-a}{0}=\frac{y-b}{0}=\frac{z-c}{1}$ होगी।

16. (b) अभीष्ट दूरी

$=\sqrt{(5-1)^2+(4-0)^2+(-1-0)^2-\left[\frac{(5-1)2+(4-0)9+(-1-0)5}{\sqrt{4+81+25}}\right]^2}$

$=\sqrt{33-\frac{39\times 39}{110}}=\sqrt{\frac{2109}{110}}$.

17. (c) रेखा के अनुदिश प्रक्षेप

$=(1-6).\frac{3}{\sqrt{17}}+(2-7).\frac{2}{\sqrt{17}}+(3-7).\left(\frac{-2}{\sqrt{17}}\right)$

$=\frac{-15-10+8}{\sqrt{17}}=\frac{-17}{\sqrt{17}}=-\sqrt{17}$

$\therefore$ लम्बवत् दूरी $=\sqrt{(5^2+5^2+4^2)-17}=\sqrt{49}=7$.

18. (b) n का विलोपन करने पर, $(2l+m)(l-m)=0$

जब $2l+m=0$, तो $\frac{l}{1}=\frac{m}{-2}=\frac{n}{1}$

जब $l-m=0$, तो $\frac{l}{1}=\frac{m}{1}=\frac{n}{-2}$

अतः दिक् अनुपात 1, – 2, 1 व 1, 1, – 2 हैं।

$\therefore\ \cos\theta=\frac{\sum a_1a_2}{\sqrt{(\sum a_1^2)}.\sqrt{(\sum a_2^2)}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=120^o=\frac{2\pi}{3}$.

19. (c) रेखा $\frac{x+5}{1}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-6}{-9}$ से बिन्दु (2, 4, –1) की लम्बवत् दूरी $=\{(2+5)^2+(4+3)^2+(-1-6)^2$

$-\left[\frac{1(2+5)+4(4+3)-9(-1-6)}{\sqrt{1+16+81}}\right]^2\Bigg\}^{1/2}$

$=\sqrt{147-\left(\frac{98}{\sqrt{98}}\right)^2}=\sqrt{147-98}=\sqrt{49}=7$.

20. (d) $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{(2)(1)+(2)(2)+(-1)(2)}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2+2^2}}\right)=\cos^{-1}\frac{4}{9}$.

21. (d) चूँकि $2(1)+2(2)+(-2)(3)=0$

अतः रेखायें समकोण पर प्रतिच्छेद करती हैं।

22. (b) अभीष्ट रेखा है, $\frac{x-3}{4-3}=\frac{y-2}{5-2}=\frac{z-4}{2-4}$

अर्थात् $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{-2}$.

23. (c) हम जानते हैं, दो रेखाओं के बीच कोण के लिये

$\cos\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{1\times 3+2\times -2+3\times 1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{14}\sqrt{14}}$

$\therefore\ \theta=\cos^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$.

24. (c) $\cos\theta=\frac{1(\sqrt{3}-1)-1(\sqrt{3}+1)+2\times 4}{\sqrt{6}\sqrt{24}}=\frac{6}{12}\Rightarrow\theta=60^o$.

25. (a) बिन्दुओं $(2, 1, -3)$ व $(-3, 1, 7)$ को मिलाने वाली रेखा के दिक् अनुपात (a_1, b_1, c_1) हैं

$\Rightarrow(-3-2, 1-1, 7-(-3))\Rightarrow(-5, 0, 10)$

रेखा $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z+3}{5}$ के समान्तर रेखा के दिक् अनुपात (a_2, b_2, c_2) हैं $\Rightarrow(3, 4, 5)$

यदि दोनों रेखाओं के बीच कोण θ हो, तब

$\cos\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$

$\cos\theta=\frac{(-5\times 3)+(0\times 4)+(10\times 5)}{\sqrt{25+0+100}\sqrt{9+16+25}}$

$\cos\theta=\frac{35}{25\sqrt{10}}\Rightarrow\theta=\cos^{-1}\left(\frac{7}{5\sqrt{10}}\right)$.

26. (d) $\theta=\cos^{-1}\frac{(2+10-12)}{\sqrt{4+25+16}\sqrt{1+4+9}}=\cos^{-1}(0)$

$\Rightarrow\theta=90^o$.

27. (a) $\theta = \cos^{-1}\frac{(-15-48+65)}{\sqrt{25+144+169}\sqrt{9+16+25}}$

$= \cos^{-1}\left(\frac{2}{(13\sqrt{2})(5\sqrt{2})}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{65}\right)$.

28. (d) न्यूनतम दूरी $= \frac{\begin{vmatrix} 6 & 15 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{\sqrt{(-4-2)^2+(12+3)^2+(6-3)^2}}$

$= \frac{270}{\sqrt{270}} = \sqrt{270} = 3\sqrt{30}$.

29. (a) दोनों समीकरणों को हल करने पर,

$(l_1, m_1, n_1) = (2\sqrt{2}-3, -\sqrt{2}, 1)$

$(l_2, m_2, n_2) = (-2\sqrt{2}-3, \sqrt{2}, 1)$

$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$

$\therefore$ रेखाओं के मध्य कोण $\frac{\pi}{2}$ है।

30. (c) यह स्पष्ट है।

31. (d) यह स्पष्ट है।

32. (a) दिक् अनुपात 2, 2, 1 हैं

तथा $(7-3,\ 2-1,\ 12-4) \equiv (4,1,8)$

$\therefore \cos\theta = \frac{2\times 4+2\times 1+1\times 8}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}\sqrt{4^2+1^2+8^2}} = \frac{18}{9\times 3} = \frac{2}{3}$

अत: $\theta = \cos^{-1}(2/3)$.

33. (c) $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -k \\ k & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1+k & -k \\ k+2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow k^2 + 3k^2 = 0 \Rightarrow k(k+3) = 0 \Rightarrow k = 0$ या -3 .

34. (b) $\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right|$

$\Rightarrow \cos\theta = \left|\frac{(2)(3)+(3)(-4)+(-6)(5)}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}.\sqrt{3^2+(-4)^2+(5)^2}}\right|$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{18\sqrt{2}}{35} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{18\sqrt{2}}{35}\right)$.

35. (a) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ से,

$\frac{x-4}{1} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+2}{-1}$,

जो कि अभीष्ट रेखा का समीकरण है।

36. (a) AB की दिक् कोज्यायें $\equiv (1,2,-2)$,

CD की दिक् कोज्यायें $\equiv (2,3,4)$

$\therefore a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$, अत: $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$.

37. (a) दी गई रेखायें हैं,

$\frac{x-5}{3} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z+2}{1} = r_1$, (माना)

और $\frac{x+3}{-36} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-6}{4} = r_2$, (माना)

$\therefore x = 3r_1 + 5 = -36r_2 - 3$, $y = -r_1 + 7 = 3 + 2r_2$

व $z = r_1 - 2 = 4r_2 + 6$

हल करने पर, $x = 21, y = \frac{5}{3}, z = \frac{10}{3}$

ट्रिक: विकल्पों द्वारा जाँच करें।

38. (a) यहाँ, $l = \cos\theta, m = \cos\beta, n = \cos\theta$, $(\because l = n)$

अब, $l^2 + m^2 + n^2 = 1 \Rightarrow 2\cos^2\theta + \cos^2\beta = 1$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta = \sin^2\beta$

दिया है, $\sin^2\beta = 3\sin^2\theta \Rightarrow 2\cos^2\theta = 3\sin^2\theta$

$\Rightarrow 5\cos^2\theta = 3$, $\therefore \cos^2\theta = \frac{3}{5}$.

39. (d) रेखायें $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-6}$ व $\frac{x}{2} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{-3}$ हैं

$\therefore a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 6 - 24 + 18 = 0 \Rightarrow \theta = 90^o$.

40. (c) रेखायें लम्बवत् होंगी, यदि $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

अत:, $-3(3k) + 2k(1) + 2(-5) = 0 \Rightarrow k = -\frac{10}{7}$.

41. (a) यहाँ दी गयी तीनों रेखायें समतलीय होंगी,, यदि उनका लम्ब उभयनिष्ठ हो।

माना उभयनिष्ठ लम्ब की दिक् कोज्यायें l, m, n हैं, तब

$ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0$ .....(i)

$ll_2 + mm_2 + nn_2 = 0$ .....(ii)

व $ll_3 + mm_3 + nn_3 = 0$ .....(iii)

(ii) व (iii) को हल करने पर,

$\frac{l}{m_2n_3 - n_2m_3} = \frac{m}{n_2l_3 - n_3l_2} = \frac{n}{l_2m_3 - l_3m_2} = k$

$\Rightarrow l = k(m_2n_3 - n_2m_3), m = k(n_2l_3 - n_3l_2), n = k(l_2m_3 - l_3m_2)$

यह मान (i) में प्रतिस्थापित करने पर,

$l_1(m_2n_3 - n_2m_3) + m_1(n_2l_3 - n_3l_2) + n_1(l_2m_3 - l_3m_2) = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\begin{vmatrix} l_1 & n_1 & m_1 \\ l_2 & n_2 & m_2 \\ l_3 & n_3 & m_3 \end{vmatrix} = 0$.

42. (d) अभीष्ट दूरी $= \sqrt{\Sigma(x_1-x_2)^2 - [\Sigma l(x_1-x_2)]^2}$

$= \frac{3}{7}\sqrt{35}$.

43. (b) $\cos\theta = \frac{2\times(-1)+5\times 8+(-3)\times 4}{\sqrt{2^2+5^2+(-3)^2}\sqrt{(-1)^2+8^2+4^2}}$

$\cos\theta = \frac{-2+40-12}{9\sqrt{38}} = \left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$.

समतल

1. (b) $\theta = \cos^{-1}\left[\frac{6+4-10}{\sqrt{50}\sqrt{9}}\right] = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$.

2. (b) y-अक्ष के समान्तर समतल का समीकरण है, $ax + bz + 1 = 0$

अब $2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$ व $3b + 1 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{3}$

$\therefore 3x + 2z = 6$.

वैकल्पिक : समतल का समीकरण है, $\frac{x}{2} + \frac{z}{3} = 1$

अर्थात् $3x + 2z = 6$.

3. (c) समतल का समीकरण है, $\frac{x}{-6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$

या $-2x + 4y + 3z = 12$

$\therefore$ मूलबिन्दु से लम्ब की लम्बाई $= \frac{12}{\sqrt{4+16+9}} = \frac{12}{\sqrt{29}}$.

4. (c) xy-समतल के समान्तर समतल का समीकरण $z = k$ है,

$\therefore z = 3$.

5. (d) मूल बिन्दु को सम्मिलित करने वाले कोण को समद्विभाजित करने वाले समतल का समीकरण (अचर पद को एक ही चिन्ह का बनाने पर) है,

$$\frac{-3x + 6y - 2z - 5}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2}} = +\left[\frac{4x - 12y + 3z - 3}{\sqrt{4^2 + 12^2 + 3^2}}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{-3x + 6y - 2z - 5}{7} = \frac{4x - 12y + 3z - 3}{13}$$

$\Rightarrow 67x - 162y + 47z + 44 = 0$.

6. (a) समतल लम्बवत् हैं, यदि $6 - 6 + 2k = 0 \Rightarrow k = 0$.

7. (b) दिया गया है, कि समतल बिन्दु $(-1, 3, 2)$ से गुजरता है

$\therefore A(x+1) + B(y-3) + C(z-2) = 0$ .....(i)

चूँकि समतल (i), समतलों $x + 2y + 3z = 5$ व $3x + 3y + z = 0$ पर लम्बवत् है

$\therefore A + 2B + 3C = 0$ व $3A + 3B + C = 0$

$\therefore \frac{A}{2-9} = \frac{B}{9-1} = \frac{C}{3-6} = K$

$\Rightarrow A = -7K, B = 8K, C = -3K$

A, B, C के मान (i) में रखने पर, $7x - 8y + 3z + 25 = 0$, जो कि अभीष्ट समतल का समीकरण है।

8. (a) अभीष्ट दूरी $= \frac{7 - \frac{7}{2}}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$.

9. (a) भुजाओं की लम्बाईयाँ क्रमशः

$\sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{b^2 + c^2}, \sqrt{c^2 + a^2}$ हैं।

अब $\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ के प्रयोग से अभीष्ट हल प्राप्त होता है।

ट्रिक : $a = 2, b = 2, c = 2$ रखने पर भुजायें $2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$ व $2\sqrt{2}$ हैं अर्थात समबाहु त्रिभुज है। अतः इस त्रिभुज का क्षेत्रफल $(\Delta) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{3}$ वर्ग इकाई है।

अब विकल्प (a) $\Rightarrow \Delta = \frac{1}{2}\sqrt{16+16+16} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

10. (c) $\sqrt{1+1+1} \cdot \left(\frac{1-1+1+k}{\sqrt{3}}\right) = \pm 5$

या $k = \pm 5 - 1 = 4, -6$.

11. (c) समतल $x - 2y + 2z = 5$ के समान्तर समतल का समीकरण है, $x - 2y + 2z + k = 0$ .....(i)

प्रश्नानुसार, $\frac{1 - 4 + 6 + k}{\sqrt{9}} = \pm 1$

या $k + 3 = \pm 3 \Rightarrow k = 0$ या -6

$\therefore x - 2y + 2z - 6 = 0$ या $x - 2y + 2z = 6$.

12. (d) समतल $2x + 3y - 4z = 0$ के समान्तर समतल का समीकरण है, $2x + 3y - 4z + k = 0$ .....(i)

$\because$ समतल (i) बिन्दु (1, 2, 3) से गुजरता है

$\therefore (2)(1) + (3)(2) - (4)(3) + k = 0 \Rightarrow k = 4$

$\therefore$ अभीष्ट समतल का समीकरण $2x + 3y - 4z + 4 = 0$ है।

13. (a) अभीष्ट दूरी $= \left|\frac{6 - 18 + 8 + 11}{7}\right| = 1$.

14. (a) समतल का समीकरण जो समतलों की प्रतिच्छेद रेखा से जाता है, $(2x - y) + \lambda(y - 3z) = 0$ ......(i)

तथा समतल (i), $4x + 5y - 3z - 8 = 0$ के लम्बवत् है,

$\therefore 4(2) + 5(\lambda - 1) - 3(-3\lambda) = 0$

$\Rightarrow 14\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{14}$

λ का मान (i) में रखने पर, $28x - 17y + 9z = 0$, जो कि अभीष्ट समीकरण है।

15. (c) प्रश्नानुसार, $z + x = y$ या $x - y + z = 0$.

16. (b) प्रश्नानुसार, $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2$

$= (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2$

$\therefore$ द्वितीय घात के पद कटने पर यह समतल के समीकरण में परिवर्तित हो जाता है एवं जिसका समीकरण $2x + 2y + 2z = 7$ है, जो कि दोनों अक्षों से समान कोण बनाता है।

17. (b) यह (α, β, γ) से होकर गुजरने वाली एक रेखा होगी, जिसकी दिक् कोज्यायें a, b, c हैं।

18. (a) यह स्पष्ट है।

19. (d) $\theta = \cos^{-1}\left[\frac{2-1+2}{\sqrt{6}\sqrt{6}}\right] = \cos^{-1}\left(\frac{3}{6}\right) = 60^o$.

20. (b) समतल का समीकरण जो दिये गये समतलों की प्रतिच्छेद रेखा से होकर जाता है,

$(x + y + z - 1) + \lambda(2x + 3y - z + 4) = 0$ .....(i)

$\because$ समतल (i) x-अक्ष के समान्तर है,

अतः $(1 + 2\lambda)1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$

λ का मान (i) में रखने पर, $y - 3z + 6 = 0$, जो कि अभीष्ट समतल का समीकरण है।

21. (c) प्रश्नानुसार, $2(x-2) + 4(y-4) - 3(z+3) = 0$

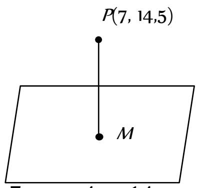
या $2x + 4y - 3z - 29 = 0$.

22. (a) स्पष्टतः, $(x-2) + 5(y+3) - 6(z-1) = 0$

$\Rightarrow x + 5y - 6z + 19 = 0$.

23. (d) माना M, बिन्दु (7, 14, 5) से समतल पर डाले गये लम्ब का लम्बपाद है, तब PM समतल का अभिलम्ब होगा। अतः इसके दिक् अनुपात 2, 4, –1 हैं। चूँकि PM, $P(7,14,5)$ से गुजरता है व इसके दिक् अनुपात 2, 4, –1 हैं। अतः इसका समीकरण है,

$\frac{x-7}{2}=\frac{y-14}{4}=\frac{z-5}{-1}=r$, (माना)



$\Rightarrow x=2r+7$, $y=4r+14$, $z=-r+5$

माना M के निर्देशांक $(2r+7, 4r+14, -r+5)$ हैं।

चूँकि M, समतल $2x+4y-z=2$ पर स्थित है

अतः $2(2r+7)+4(4r+14)-(-r+5)=2 \Rightarrow r=-3$

अतः लम्ब पाद M के निर्देशांक (1, 2, 8) हैं।

अब, $PM = P$ से लम्बवत् दूरी

$=\sqrt{(1-7)^2+(2-14)^2+(8-5)^2}=3\sqrt{21}$.

24. (a) $(x+y+z-6)+\lambda(2x+3y+4z+5)=0 \Rightarrow \lambda=\frac{3}{14}$

$\Rightarrow 20x+23y+26z-69=0$.

25. (a) बिन्दु (1, 1, 1) से गुजरने वाले समतल का समीकरण है,

$a(x-1)+b(y-1)+c(z-1)=0$

यह (1, – 1, 1) व (–7, – 3, – 5) से भी होकर गुजरता है

$\therefore\ b=0,\ a=-\frac{3}{4}c$

अतः अभीष्ट समीकरण $3x-4z+1=0$ है।

ट्रिक : चूँकि समतल $3x-4z+1=0$ दिये गये तीनों बिन्दुओं से होकर गुजरता है। अतः विकल्प (a) सही है।

26. (c) अभीष्ट अनुपात $=-\left[\frac{-2-8+21-17}{3+10+24-17}\right]=-\left(\frac{-6}{20}\right)=\frac{3}{10}$.

27. (a) माना दिये हुए समतल पर बिन्दु $P(1,3,4)$ का प्रतिबिम्ब Q है तब समतल का अभिलम्ब PQ होगा। PQ के दिक् अनुपात 2, –1,1 हैं।

चूँकि PQ, बिन्दु (1, 3, 4) से होकर गुजरता है व दिक् अनुपात 2,1,–1 हैं,

अतः समतल का समीकरण है,

$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-4}{1}=r$ (माना)

$\therefore\ x=2r+1, y=-r+3, z=r+4$

अतः Q के निर्देशांक $Q(2r+1,-r+3,r+4)$ हैं। यदि PQ का मध्य बिन्दु R है तब R के निर्देशांक $\left(\frac{2r+1+1}{2},\frac{-r+3+3}{2},\frac{r+4+4}{2}\right)$

अर्थात् $\left(r+1,\frac{-r+6}{2},\frac{r+8}{2}\right)$ हैं।

चूँकि बिन्दु R, समतल पर स्थित है

$\therefore\ 2(r+1)-\left(\frac{-r+6}{2}\right)+\left(\frac{r+8}{2}\right)+3=0 \Rightarrow r=-2$

अतः Q के निर्देशांक (–3, 5, 2) हैं।

ट्रिक : विकल्प (a) से, (–3, 5, 2) व (1,3,4) का मध्य बिन्दु समतल के समीकरण $2x-y+z+3=0$ को संतुष्ट करता है। अतः विकल्प (a) सही है।

28. (c) अभीष्ट दूरी $=\left|\frac{3}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}-\frac{5}{\sqrt{4^2+4^2+2^2}}\right|$

$=\left|1-\frac{5}{6}\right|=\frac{1}{6}$.

29. (d) यह आधारभूत संकल्पना है।

30. (a) xy-समतल के समान्तर किसी समतल का समीकरण $z=K$ होगा।

31. (b) यह आधारभूत संकल्पना है।

32. (a) यह स्पष्ट है।

33. (a) माना उन बिन्दुओं के निर्देशांक जहाँ समतल अक्षों को काटता है, क्रमशः (a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c) हैं। चूँकि केन्द्रक (α, β, γ) है अतः $a=3\alpha,\ b=3\beta, c=3\gamma$.

$\therefore$ समतल का समीकरण है, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

$\Rightarrow \frac{x}{3\alpha}+\frac{y}{3\beta}+\frac{z}{3\gamma}=1 \Rightarrow \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=3$.

34. (a) स्पष्टतः, $3\times4+(-2)\times3+2\times(-k)=0$

$\Rightarrow 12-6-2k=0 \Rightarrow k=3$.

35. (c) अभिलम्ब OA होगा, जिसके दिक् अनुपात $a-0,\ b-0,\ c-0$ अर्थात् a, b, c हैं। यह $A(a, b, c)$ से गुजरता है,

$\therefore$ अभीष्ट समतल का समीकरण है,

$a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)=0$.

36. (b) $A(0, b, c)$, yz-समतल में व $B(a, 0, c)$, zx-समतल में है। O से होकर जाने वाला समतल $px+qy+rz=0$ है। यह A व B से गुजरता है

$\therefore 0p+qb+rc=0$ व $pa+0q+rc=0$

$\Rightarrow \frac{p}{bc}=\frac{q}{ca}=\frac{r}{-ab}=k \Rightarrow p=bck$, $q=cak$ व $r=-abk$

अतः अभीष्ट समतल का समीकरण $bcx+cay-abz=0$ है।

37. (a) $y^2+z^2=0$ का आरेख (graph) $y=0; z=0$ है; जो कि x-अक्ष है।

38. (a) समतल $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ है, जहाँ $p=\frac{1}{\sqrt{\sum\left(\frac{1}{a^2}\right)}}$

या $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$ .....(i)

प्रश्नानुसार, $x=\frac{a}{4},\ y=\frac{b}{4},\ z=\frac{c}{4}$

x, y, z का मान (i) में रखने पर हमें चतुष्फलक के केन्द्रक का बिन्दुपथ प्राप्त होता है।

39. (d) केन्द्रक $=\left(\frac{\frac{1}{a}+0+0}{3},\frac{0+\frac{1}{b}+0}{3},\frac{0+0+\frac{1}{c}}{3}\right)$

अर्थात् $\left(\frac{1}{3a},\frac{1}{3b},\frac{1}{3c}\right)$.

40. (b) अभीष्ट समतल का समीकरण है, $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1$

$\Rightarrow x+y+z=1$.

41. (d) अभीष्ट समतल का समीकरण
$x+2y+4z=2\times 1+3\times 2+4\times 4$ या $x+2y+4z=24$ होगा।

42. (d) स्पष्टतः A, B, C के निर्देशांक क्रमशः $(3a, 0, 0)$, $(0, 3b, 0)$ व $(0, 0, 3c)$ हैं। अतः केन्द्रक (a, b, c) है।

43. (d) दिये गये समतल संगामी हैं, अतः $\begin{vmatrix}-1 & c & b\\ c & -1 & a\\ b & a & -1\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2abc=1$.

44. (b) समतल का समीकरण जबकि दिक् अनुपात एवं लम्ब की लम्बाई दी गई है, $ax+by+cz=p\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

दिया है, $(a, b, c)\equiv(-3, 2, 6)$

अतः, $-3x+2y+6z=7\sqrt{(-3)^2+2^2+6^2}$

$\Rightarrow -3x+2y+6z=49$.

45. (a) यदि समतल $x-3y+5z=d$, बिन्दु $(1, 2, 4)$ से गुजरता है तो $1-6+20=d\Rightarrow d=15$

$\therefore$ समतल का समीकरण है, $x-3y+5z=15$

$\Rightarrow \frac{x}{15}+\frac{y}{-5}+\frac{z}{3}=1$

अतः x, y व z अक्षों पर कटे अंतःखण्ड क्रमशः $15, -5$ व 3 हैं।

46. (d) $\cos\theta=0\Rightarrow 2(1)+1(2)-2(k)=0\Rightarrow k=2$.

47. (b) $\cos 90^o$ अर्थात् 0.

48. (d) $p=\left|\frac{-52}{\sqrt{9+16+144}}\right|=\left|\frac{-52}{13}\right|=|-4|=4$.

49. (d) बिन्दु P की मूल बिन्दु से दूरी $=OP=\sqrt{4+36+9}=7$

अब, OP के दिक् अनुपात $=2-0, 6-0, 3-0=2, 6, 3$

$\therefore OP$ की दिक् कोज्यायें $=\frac{2}{7},\frac{6}{7},\frac{3}{7}$

$\because$ समतल का अभिलम्ब रूप में समीकरण $lx+my+nz=p$ है

अतः अभीष्ट समतल का समीकरण है,

$\frac{2}{7}x+\frac{6}{7}y+\frac{3}{7}z=7\Rightarrow 2x+6y+3z=49$.

50. (b) $D=\left|\frac{2+6+10-9}{\sqrt{1+4+4}}\right|=3$.

51. (c) $\frac{5x}{60}-\frac{3y}{60}+\frac{6z}{60}=1\Rightarrow \frac{x}{12}-\frac{y}{20}+\frac{z}{10}=1$

अतः अंतःखण्ड $(12, -20, 10)$ हैं।

52. (c) यह स्पष्ट है।

53. (a) बिन्दु $(-1,3,0)$ से गुजरने वाला समतल है,

$A(x+1)+B(y-3)+C(z-0)=0$ ......(i)

$\because$ समतल (i), बिन्दुओं $(2,2,1)$ तथा $(1, 1, 3)$ से भी गुजरता है,

अतः $3A-B+C=0$ .....(ii)

$2A-2B+3C=0$ .....(iii)

(ii) व (iii) को हल करने पर, $\frac{A}{-3+2}=\frac{B}{2-9}=\frac{C}{-6+2}$

$\therefore A:B:C=-1:-7:-4$ या $A:B:C=1:7:4$

समीकरण (i) से, $1(x+1)+7(y-3)+4(z)=0$

या $x+7y+4z-20=0$

अतः, समतल से बिन्दु $(5, 7, 8)$ की दूरी

$=\frac{1\times 5+7\times 7+4\times 8-20}{\sqrt{1^2+7^2+4^2}}=\frac{5+49+32-20}{\sqrt{66}}=\frac{66}{\sqrt{66}}=\sqrt{66}$.

54. (b) $x^2-5x+6=0\Rightarrow (x-2)=0$ या $(x-3)=0$, जो कि एक समतल को प्रदर्शित करता है।

55. (a) यह स्पष्ट है।

56. (a) yz-समतल का समीकरण $x=0$ अर्थात् $x+0.y+0.z=0$ है। स्पष्टतः दिया गया समतल, yz-समतल के लम्बवत् है।

57. (a) बिन्दु $(1,2,3)$ से गुजरने वाले समतल का समीकरण है,

$A(x-1)+B(y-2)+C(z-3)=0$ .....(i)

$\because$ समतल (i), समतल $x+2y+5z=0$ के समान्तर है

अतः $(x-1)+2(y-2)+5(z-3)=0$ अभीष्ट समतल है।

58. (b) दिये गये समतलों के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाने वाला समतल है,

$(x+2y+3z+4)+\lambda(4x+3y+2z+1)=0$ .....(i)

समतल (i), मूल बिन्दु अर्थात् $(0, 0, 0)$ से गुजरता है

$\therefore 4+\lambda=0\Rightarrow \lambda=-4$

λ का मान (i) में रखने पर,

$-15x-10y-5z=0\Rightarrow 3x+2y+z=0$.

59. (b) बिन्दु $(2, 3, 4)$ से गुजरने वाले समतल का समीकरण है,

$A(x-2)+B(y-3)+C(z-4)=0$ .....(i)

$\because$ समतल (i), समतल $5x-6y+7z=3$ के समान्तर है

$\therefore 5(x-2)-6(y-3)+7(z-4)=0$

अतः $5x-6y+7z-20=0$ अभीष्ट समतल है।

60. (a) मूल बिन्दु से समतल की दूरी

$=\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{14}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{14}{\sqrt{49}}=\frac{14}{7}=2$.

61. (b) यह स्पष्ट है।

62. (b) बिन्दु $(1, 1, 1)$ से गुजरने वाला समतल है

$a(x-1)+b(y-1)+c(z-1)=0$ .....(i)

समतल (i), बिन्दु $(1, -1, -1)$ से भी गुजरता है

$\therefore a.0+b(-2)+c(-2)=0$

$\Rightarrow 0.a-2b-2c=0$ या $0.a-b-c=0$

$\Rightarrow 0.a+b+c=0$ ......(ii)

समतल (i), समतल $2x-y+z+5=0$ के लम्बवत् है

$\therefore 2a-b+c=0$ .....(iii)

(ii) व (iii) से, $a=b=1, c=-1$

समीकरण (i) में मान रखने पर, $x+y-z-1=0$.

63. (a) X- अंतः खण्ड $(a)=4$; Z- अंतः खण्ड $(c)=3$

अतः अभीष्ट समीकरण है, $\frac{x}{4}+\frac{z}{3}=1$ अथवा $3x+4z=12$.

64. (c) XOZ समतल, बिन्दुओं $(2, 3, 1)$ तथा $(6, 7, 1)$ को मिलाने वाली रेखा को अनुपात $-y_1:y_2=-3:7$ में विभाजित करता है।

65. (a) समतलों $x+y+z=1$ तथा $2x+3y-z+4=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाने वाले समतल का समीकरण है,

$(x+y+z-1)+\lambda(2x+3y-z+4)=0$

अथवा $(1+2\lambda)x+(1+3\lambda)y+(1-\lambda)z+4\lambda-1=0$ ....(i)

$\because$ समतल (i), x-अक्ष के समान्तर है

$\therefore 1+2\lambda=0\Rightarrow \lambda=-\frac{1}{2}$

अतः अभीष्ट समतल का समीकरण $y-3z+6=0$ होगा।

66. (c) दिये गये समतलों के समीकरण हैं, $2x+y+2z-8=0$

या $4x+2y+4z-16=0$ .....(i)

और $4x+2y+4z+5=0$ .....(ii)

दो समान्तर समतलों के बीच की दूरी

$$=\left|\frac{-16-5}{\sqrt{4^2+2^2+4^2}}\right|=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}.$$

67. (a) यदि दो समतलों के बीच का कोण θ हो, तब

$$\cos\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\cos\theta=\frac{(1)(-5)+(2)(3)+(2)(4)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\sqrt{(-5)^2+3^2+4^2}}$$

$$\cos\theta=\frac{3\sqrt{2}}{10}\Rightarrow\theta=\cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{2}}{10}\right).$$

68. (b) प्रश्नानुसार, $|3+4-12k+13|=|-9-12+13|$

$\therefore 3+4-12k+13=8\Rightarrow k=1$.

69. (c) बिन्दु $P(1,2,-3)$ से गुजरने वाले व OP पर लम्बवत् समतल का समीकरण है, $1(x-1)+2(y-2)-3(z+3)=0$

या $x+2y-3z-14=0$.

70. (d) बिन्दु (0, 1, 2) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण है,

$a(x-0)+b(y-1)+c(z-2)=0$ ......(i)

चूँकि समतल (i), बिन्दु (–1, 0, 3) से गुजरता है,

$\therefore a(-1-0)+b(0-1)+c(3-2)=0$

$\Rightarrow -a-b+c=0\Rightarrow a+b-c=0$ .....(ii)

समतल (i), समतल $2x+3y+z=5$ पर लम्ब है

$\therefore 2a+3b+c=0$ .....(iii)

समीकरण (ii) व (iii) को हल करने पर,

$a=-4k, b=3k, c=-k$

a, b, c के मान समीकरण (i) में रखने पर,

$-4k(x)+3k(y-1)-k(z-2)=0$

$\Rightarrow -4x+3y-3-z+2=0$

$\Rightarrow -4x+3y-z-1=0\Rightarrow 4x-3y+z+1=0$.

71. (b) चूँकि रेखा के दिक् अनुपात समतल के अभिलम्ब के भी दिक् अनुपात होंगे। $\therefore$ x, y और z के अभीष्ट गुणांक $(4-1),(13-2),(5-0)$ अर्थात्, $(3,11,5)$ होंगे।

72. (d) मूल बिन्दु से बिन्दु (1,1,1) की दूरी

$=\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2}=\sqrt{3}$

$x+y+z+k=0$ की बिन्दु (1,1,1) से दूरी

$$=\pm\frac{(1)+(1)+(1)+k}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2}}=\pm\frac{k+3}{\sqrt{3}}$$

प्रश्नानुसार, $\sqrt{3}=\pm\frac{1}{2}\left(\frac{k+3}{\sqrt{3}}\right)$

$\Rightarrow 6=\pm(k+3)\Rightarrow k=3,-9$.

73. (b) दिया गया समतल अक्षों को $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ $C(0,0,c)$ पर मिलता है।

$\therefore$ केन्द्रक $\equiv\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3},\frac{c}{3}\right)=(1,2,4)$

$\Rightarrow a=3, b=6, c=12$

अतः अभीष्ट समतल का समीकरण है, $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{12}=1$

$\Rightarrow 4x+2y+z=12$.

74. (a) समतल का समीकरण $\frac{x}{8}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1$ या $x+2y+2z=8$ है

अतः, समतल की मूल बिन्दु से लम्बवत् दूरी

$$=\left|\frac{-8}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}\right|=\frac{8}{3}.$$

रेखा व समतल

1. (b) अनुपात

$$=-\left[\frac{2(2)+(-3)(1)+(1)(1)-7}{2(3)+(-4)(1)+(-5)(1)-7}\right]=-\left[\frac{-5}{-10}\right]=-\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\therefore x=\frac{2(2)-3(1)}{1}=1,\ y=\frac{-3(2)-(-4)}{1}=-2$

व $z=\frac{1(2)-(-5)}{1}=7$. इसलिए $P(1,-2,7)$.

ट्रिक : चूँकि (1, – 2, 7) व (– 1, 2, 7) समीकरण $2x+y+z=7$ को सन्तुष्ट करते हैं परन्तु बिन्दु (1, – 2, 7), बिन्दुओं (2, – 3, 1) व (3, – 4, – 5) के साथ समरेखीय है।

2. (d) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}=r$, (माना)

$\therefore x=r,\ y=2r+1,\ z=3r-2$

$\therefore 2r+3(2r+1)+(3r-2)=0\Rightarrow r=\frac{-1}{11}$

$\therefore x=\frac{-1}{11}, y=\frac{9}{11}, z=-\frac{25}{11}$.

3. (a) दी गयी रेखा z-अक्ष के लम्बवत् है, अतः xy-समतल के समान्तर होगी।

4. (a) सरल रेखा $\frac{x}{6}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2}$ है। अतः अभीष्ट समतल का समीकरण $6(x-0)+3(y-0)+2(z-0)=0$ है।

5. (a) $4(2)-2(3)-1(2)=0$

$\therefore$ रेखा, समतल के समान्तर है।

6. (a) बिन्दु (1,2,3) से होकर गुजरने वाली रेखा $\frac{x-1}{a}=\frac{y-2}{b}=\frac{z-3}{c}$ है एवं यह समतल $x+2y-5z+9=0$ पर लम्ब है। अतः रेखा $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-5}$ होगी, क्योंकि

$$\sin\theta=\frac{1\,.\,1+2\,.\,2+(-5)\,(-5)}{\sqrt{1^2+2^2+5^2}\,.\,\sqrt{1^2+2^2+5^2}}=1\Rightarrow\theta=90^o.$$

7. (d) प्रश्नानुसार, अभीष्ट समतल का समीकरण है,

$a(x-4)+b(y-3)+c(z-2)=0$

एवं $a+b+2c=0$ व $a-4b+5c=0$

हल करने पर,

$$\frac{a}{5+8}=\frac{b}{2-5}=\frac{c}{-4-1}=k$$

$$\frac{a}{13}=\frac{b}{-3}=\frac{c}{-5}=k$$

अतः अभीष्ट समतल का समीकरण है,

$-13x+3y+5z+33=0$.

8. (d) (1,0,–1) से गुजरने वाले समतल का समीकरण है
$a(x-1)+b(y-0)+c(z+1)=0$ .....(i)
$\therefore$ समतल (i), बिन्दु (3, 2, 2) से भी गुजरता है
$\therefore$ $a(3-1)+b(2-0)+c(2+1)=0$
या $2a+2b+3c=0$ .....(ii)
$\because$ समतल (i), रेखा $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{3}$ के भी समान्तर है
$\therefore$ $2a-2b+3c=0$ .....(ii)
समीकरण (i) व (ii) से, $\frac{a}{-3}=\frac{b}{0}=\frac{c}{2}$
अतः अभीष्ट समतल का समीकरण है,
$-3(x-1)+0(y-0)+2(z+1)=0$
या $-3x+2z+5=0$.

9. (c) प्रश्नानुसार, $4x-7y+3z=k$ .....(i)
समतल (i), बिन्दु $\left(\frac{-1+3}{2},\frac{2-5}{2},\frac{3+6}{2}\right)$ से गुजरता है
$\therefore$ $4+\frac{21}{2}+\frac{27}{2}=k \Rightarrow k=28$
अतः अभीष्ट समीकरण है, $4x-7y+3z=28$.

10. (b) **ट्रिक :** चूँकि रेखा, समतल $al+bm+cn=0$ के समान्तर है। अतः विकल्प (b) से, $3(2)+4(1)+5(-2)=0$.
स्पष्टतः, अभीष्ट समतल का समीकरण $2x+y-2z=0$ है।

11. (a) माना बिन्दु (a, b, c) हैं, तो $2a+4b-c=1$ .....(i)
व $a=2k+1$, $b=-3k+2$ व $c=4k-3$,
(जहाँ k नियतांक है)
a, b, c के मान (i) में रखने पर,
$2(2k+1)+4(-3k+2)-(4k-3)=1 \Rightarrow k=1$
अतः अभीष्ट बिन्दु (3, –1, 1) हैं।
ट्रिक : बिन्दु को रेखा व समतल के समीकरण को सन्तुष्ट करना चाहिये जो कि बिन्दु (3, – 1, 1) करता है।

12. (d) रेखा $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{12}=t$ पर कोई बिन्दु $(3t+2, 4t-1, 12t+2)$ है।
यह बिन्दु $x-y+z=5$ पर स्थित है।
$\therefore$ $3t+2-4t+1+12t+2=5$, अर्थात् $11t=0 \Rightarrow t=0$
$\therefore$ बिन्दु $(2,-1,2)$ है। इस बिन्दु की $(-1,-5,-10)$ से दूरी
$=\sqrt{(2+1)^2+(-1+5)^2+(2+10)^2}=\sqrt{9+16+144}=13$.

13. (a) $\frac{x-1}{l}=\frac{y-2}{m}=\frac{z-3}{n}$
या $l-m+2n=0$ तथा $3l+m+n=0$
$\therefore$ $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{4}$.

14. (a) $7(x+10)-3(y-5)-(z-4)=0$
या $7x-3y-z+89=0$, जो कि अभीष्ट समतल का समीकरण है।

15. (d) माना अनुपात $k:1$ है। चूँकि xy-समतल पर $z=0$
$\Rightarrow \frac{-bk+c}{k+1}=0 \Rightarrow k=\frac{c}{b}$. अतः अनुपात $c:b$ है।
वैकल्पिक : सूत्र द्वारा, अभीष्ट अनुपात $=\frac{-c}{-b}=c:b$.

16. (b) दिया गया रेखा का समीकरण है,
$\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{1}=\lambda$ (माना)
$\therefore$ $x=3\lambda-3;\ y=-2\lambda+2;\ z=\lambda-1$
चूँकि रेखा, समतल को प्रतिच्छेद करती है, अतः
$4(3\lambda-3)+5(-2\lambda+2)+3(\lambda-1)-5=0 \Rightarrow \lambda=2$
अतः $x=3;\ y=-2;\ z=1$.
ट्रिक : चूँकि बिन्दु (3, – 2, 1) दोनों समीकरणों को सन्तुष्ट करता है। अतः विकल्प (b) सही है।

17. (b) यह आधारभूत संकल्पना है।

18. (c) समतलों $ax+by+cz+d=0$ व $a'x+b'y+c'z+d'=0$ की प्रतिच्छेदी रेखा से जाने वाले समतल का समीकरण है,
$(ax+by+cz+d)+\lambda(a'x+b'y+c'z+d')=0$
या $x(a+\lambda a')+y(b+\lambda b')+z(c+\lambda c')+d+\lambda d'=0$ ....(i)
यह x-अक्ष के समान्तर है, अर्थात् $y=0,\ z=0$
$\therefore$ $1(a+\lambda a')+0(b+\lambda b')+0(c+\lambda c')=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{a}{a'}$
λ का मान (i) में रखने पर अभीष्ट समतल का समीकरण है,
$y(a'b-ab')+z(a'c-ac')+a'd-ad'=0$
अर्थात् $(ab'-a'b)y+(ac'-a'c)z+ad'-a'd=0$

19. (a) (2,3,4) व (6, 7, 8) का मध्य बिन्दु (4, 5, 6) है, जो कि समतल $x+y+z-15=0$ पर स्थित है, अतः यही अभीष्ट समतल है।

20. (b) विलोमतः
विकल्प (a) $\Rightarrow 3\times2+4\times3+5\times4\neq0$
विकल्प (b) $\Rightarrow 3\times3+4\times4-5\times5=0$
अतः अभीष्ट परिणाम प्राप्त हो जाता है।

21. (d) स्पष्टतः रेखा व समतल समान्तर हैं। अतः रेखा व समतल के बीच की दूरी निकालने के लिए रेखा पर कोई एक बिन्दु अर्थात् (1, – 2, 1) लिया। अब इस बिन्दु से समतल की लम्बवत् दूरी ही अभीष्ट दूरी होगी।
$\therefore$ अभीष्ट दूरी $=\left|\frac{2(1)+2(-2)-1(1)-6}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}\right|=\frac{9}{\sqrt{9}}=3$.

22. (c) **ट्रिक:** रेखा पर व्यापक बिन्दु $(5r+1,\ 4r+2,\ 5r+3)$ अभीष्ट समतल को सन्तुष्ट करेगा। स्पष्टतः $x-5y+3z=0$ व्यापक बिन्दु द्वारा सन्तुष्ट होता है। अतः विकल्प (c) सही है।

23. (d) स्पष्टतः रेखा समतल पर लम्बवत् होगी क्योंकि $\frac{a}{a}=\frac{b}{b}=\frac{c}{c}$ अर्थात् इनके दिक् अनुपात समानुपाती हैं।

24. (c) विकल्प (c) से, बिन्दु xy-समतल पर है, अतः यह P व Q को मिलाने वाले रेखाखण्ड को – 1 : 6 अर्थात् 1 : 6 (बाह्य) के अनुपात में विभाजित करेगा।

25. (d) रेखा $\frac{x-6}{-1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z+3}{4}=r$ पर
बिन्दु $(-r+6,\ -1,\ 4r-3)$ है।
यह समतल $x+y-z=3$ को संतुष्ट करेगा
$\therefore -r+6-1-4r+3=3 \Rightarrow -5r+5=0 \Rightarrow r=1$
अतः अभीष्ट बिन्दु $\equiv(5,\ -1,\ 1)$.

26. (c) $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$ के अनुसार, समतल के दिक् अनुपात (3, 0, 4) होंगे। सूत्र $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ के अनुसार, बिन्दु (1, 1, 1) से जाने वाला समतल है,

$\Rightarrow 3(x-1)+0(y-1)+4(z-1)=0 \Rightarrow 3x+4z-7=0$

समतल का अभिलम्ब रूप है, $\frac{3x}{5}+\frac{4z}{5}=\frac{7}{5}$

(0, 0, 0) से लम्ब की लम्बाई $=\frac{7}{5}$.

27. (c) $\sin\theta=\frac{2+1}{\sqrt{2}\times\sqrt{9}} \Rightarrow \theta=45^o$.

28. (c) रेखा $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{1}$ को अन्तर्विष्ट करने वाले समतल का समीकरण है

$a(x+1)+b(y-3)+c(z+2)=0$ .....(i)

जहाँ $-3a+2b+c=0$ .....(ii)

समतल (i), बिन्दु (0, 7, –7) से गुजरता है

$\therefore\ a+4b-5c=0$ .....(iii)

(ii) तथा (iii) से, $\frac{a}{-14}=\frac{b}{-14}=\frac{c}{-14}$ या $\frac{a}{1}=\frac{b}{1}=\frac{c}{1}$

अतः अभीष्ट समतल का समीकरण $x+y+z=0$ है।

29. (c) माना *xy*-समतल, बिन्दुओं $(-1,3,4)$ तथा $(2,-5,6)$ को मिलाने वाली रेखा को $\lambda:1$ में विभाजित करता है।

तब, $z=\frac{m_1z_2+m_2z_1}{m_1+m_2} \Rightarrow z=\frac{6\lambda+4}{\lambda+1}$

xy-समतल के लिए, $z=0$

$\Rightarrow 0=\frac{6\lambda+4}{\lambda+1} \Rightarrow \lambda=\frac{-2}{3}=-2:3$

अर्थात् 2 : 3 में बाह्यतः विभाजित करता है।

ट्रिक : अनुपात $=\frac{-z_1}{z_2}=\frac{-4}{6}=\frac{-2}{3}$,

अर्थात् 2 : 3 में बाह्यतः विभाजित करता है।

30. (c) यह स्पष्ट है।

31. (b) दी गई रेखा से जाने वाले समतल का समीकरण है,

$A(x-1)+B(y+2)+C(z-3)=0$ .....(i)

जहाँ $5A+6B+4C=0$ .....(ii)

चूँकि समतल (i), बिन्दु (4, 3, 7) से होकर गुजरता है,

$\therefore\ 3A+5B+4C=0$ .....(iii)

(ii) तथा (iii) को हल करने पर $\frac{A}{4}=\frac{B}{-8}=\frac{C}{7}$

अतः अभीष्ट समतल का समीकरण $4x-8y+7z=41$ है।

32. (a) बिन्दु (3, 2, 0) से गुजरने वाले समतल का समीकरण है

$A(x-3)+B(y-2)+c(z-0)=0$ .....(i)

समतल (i), रेखा $\frac{x-3}{1}=\frac{y-6}{5}=\frac{z-4}{4}$ से भी गुजरता है

$\therefore\ A(3-3)+B(6-2)+C(4-0)=0$

$0.A+4B+4C=0$ .....(ii)

तथा $1.A+5B+4C=0$ .....(iii)

(ii) व (iii) को हल करने पर, अभीष्ट समतल का समीकरण $x-y+z=1$ है।

ट्रिक: अभीष्ट समतल का समीकरण है $\begin{vmatrix} x-3 & y-6 & z-4 \\ 3-3 & 2-6 & 0-4 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}=0$

हल करने पर, $x-y+z=1$.

33. (c) **ट्रिक :** अनुपात $=\frac{-x_1}{x_2}=-\frac{2}{3}$.

34. (b) समतल तथा रेखा के मध्य कोण है

$\sin\theta=\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$

यहाँ $aa'+bb'+cc'=2\times3+3\times2-4\times3=0$

$\therefore \sin\theta=0 \Rightarrow \theta=0^o$.

35. (a) बिन्दुओं (3,5,–7) तथा (–2,1,8) को मिलाने वाली रेखा है,

$\frac{x-3}{(-2)-(3)}=\frac{y-5}{(1)-(5)}=\frac{z-(-7)}{8-(-7)}$

$\frac{x-3}{-5}=\frac{y-5}{-4}=\frac{z+7}{15}=K$, (माना) .....(i)

$\therefore\ x=-5K+3,\ y=-4K+5,\ z=15K-7$

$\because$ रेखा (i), *yz*-समतल पर मिलती है

$\therefore\ -5K+3=0 \Rightarrow K=\frac{3}{5}$

K का मान बिन्दुओं x,y,z में रखने पर,

अभीष्ट बिन्दु $=\left(0,\frac{13}{5},2\right)$.

36. (b) दी गई रेखा है, $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{-2}=k$, (माना)

$\therefore$ रेखा पर बिन्दु है

$x=3k+1,\ y=4k-2,\ z=-2k+3$ .....(i)

यह बिन्दु समतल के समीकरण को सन्तुष्ट करता है

$\therefore\ 2(3k+1)-(4k-2)+3(-2k+3)-1=0 \Rightarrow k=3$

समीकरण (i) से, $(x,y,z)=(10,10,-3)$.

37. (a) बिन्दु (2, –1, –3) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण है,

$A(x-2)+B(y+1)+C(z+3)=0$

अब प्रश्नानुसार, $3A+2B-4C=0$ व $2A-3B+2C=0$

$\therefore\ \frac{A}{-8}=\frac{B}{-14}=\frac{C}{-13}=k$, (माना)

$A=-8k, B=-14k, C=-13k$

अतः अभीष्ट समतल का समीकरण है,

$-k[8(x-2)+14(y+1)+13(z+3)]=0$

अर्थात् $8x+14y+13z+37=0$.

गोला

1. (d) यह स्पष्ट है।

2. (c) $\sqrt{(x-4)^2+y^2+z^2}+\sqrt{(x+4)^2+y^2+z^2}=10$

$\Rightarrow 2(x^2+y^2+z^2)+2\sqrt{[(x-4)^2+y^2+z^2][(x+4)^2+y^2+z^2]}$

$=100-32=68$

$\Rightarrow (x^2+y^2+z^2-34)^2$

$=[(x-4)^2+y^2+z^2][(x+4)^2+y^2+z^2]$

$\Rightarrow (x^2+y^2+z^2)^2-68(x^2+y^2+z^2)+(34)^2$

$=[(x^2+y^2+z^2+16)-8x][(x^2+y^2+z^2+16)+8x]$

$=(x^2+y^2+z^2+16)^2-64x^2$

$=(x^2+y^2+z^2)^2+32(x^2+y^2+z^2)-64x^2+(16)^2$

$\Rightarrow 9x^2+25y^2+25z^2-225=0$.

3. (c) यह आधारभूत संकल्पना है।

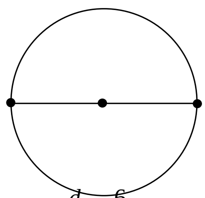
4. (a) $x^2+y^2+z^2=0 \Rightarrow x=0,\ y=0,\ z=0$.

5. (a) एक रिक्त समुच्चय,($\because x^2+y^2+z^2+1=0$, x के वास्तविक मानों के लिए सम्भव नहीं है)।

6. (a) माना गोले का समीकरण
$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ है
$\because$ यह मूल बिन्दु (0, 0, 0) से होकर जाता है, $\therefore d=0$
साथ ही, यह (0, 2, 0) से होकर जाता है,
$\therefore\ 4+4v=0 \Rightarrow v=-1$
यह (1, 0, 0) से भी होकर जाता है,
$\therefore\ 1+2u=0 \Rightarrow u=\frac{-1}{2}$
तथा यह (0, 0, 4) से भी होकर गुजरता है
$\therefore\ 16+8w \Rightarrow w=-2$
$\therefore$ केन्द्र $(-u,-v,-w)=\left(\frac{1}{2},1,2\right)$.

7. (b) दिया है, गोला तीनों निर्देशांक अक्षों को स्पर्श करता है। अतः स्पष्टतः गोले का केन्द्र (a,a,a) तथा त्रिज्या a है।
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ से,
$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2$
$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+3a^2=a^2$
$\therefore\ x^2+y^2+z^2-2a(x+y+z)+2a^2=0$, जो कि अभीष्ट गोले का समीकरण है।

8. (c) $d=\sqrt{(-1-3)^2+(2-4)^2+(3+1)^2}$
$=\sqrt{16+4+16}=\sqrt{36}=6$



अतः, त्रिज्या $=r=\frac{d}{2}=\frac{6}{2}=3$.

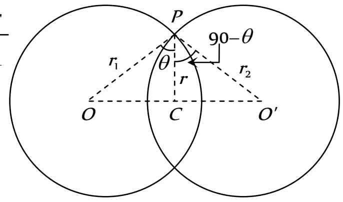
9. (c) दिये गये बिन्दुओं से होकर जाने वाले गोले का केन्द्र ही अभीष्ट बिन्दु होगा।
माना गोले का समीकरण है,
$x^2+y^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ .....(i)
गोला (i) बिन्दुओं (0, 0, 0), (a, 0, 0), (0, b, 0) तथा (0, 0, c) से गुजरता है, $\therefore d=0$
$a^2+2ua=0 \Rightarrow u=\frac{-a}{2}$
$b^2+2vb=0 \Rightarrow v=\frac{-b}{2}$
$c^2+2wc=0 \Rightarrow w=\frac{-c}{2}$
अतः गोले का केन्द्र $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$ है, जो कि अभीष्ट बिन्दु है।

10. (d) चूँकि आठ अष्टांक होते हैं अतः गोला आठ अष्टांकों में संभव है।

11. (a) माना A, B और C के निर्देशांक क्रमशः (a,0,0), (0,b,0) तथा (0,0,c) हैं। अतः समतल का समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ है।
$\because$ समतल का समीकरण (p, q, r) से होकर जाता है
$\therefore\ \frac{p}{a}+\frac{q}{b}+\frac{r}{c}=1$
बिन्दुओं A, B व C से होकर जाने वाले गोले का समीकरण है,
$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$
यदि इस गोले का केन्द्र (x_1,y_1,z_1) है, तब
$x_1=\frac{a}{2},y_1=\frac{b}{2},z_1=\frac{c}{2}$
$\therefore\ a=2x_1,\ b=2y_1,\ c=2z_1$
अतः गोले के केन्द्र का बिन्दुपथ है, $\frac{p}{x}+\frac{q}{y}+\frac{r}{z}=2$.

12. (a) माना अनुपात $\lambda:1$ है, तब गोले के केन्द्र के निर्देशांक $\frac{27\lambda+12}{\lambda+1},\frac{-9\lambda-4}{\lambda+1},\frac{18\lambda+8}{\lambda+1}$ हैं।
साथ ही, $\left(\frac{27\lambda+12}{\lambda+1}\right)^2+\left(\frac{9\lambda+4}{\lambda+1}\right)^2+\left(\frac{18\lambda+8}{\lambda+1}\right)^2=504$
$\therefore\ \lambda=\frac{-2}{3}$, अतः अभीष्ट अनुपात 2 : 3 (बाह्यतः) है।

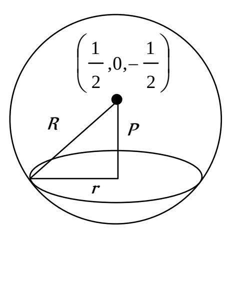
13. (d) ΔOPC में, $\cos\theta=\frac{r}{r_1}$



$\Delta O'PC$ में, $\sin\theta=\frac{r}{r_2}$
$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$
$\therefore\ \left(\frac{r}{r_1}\right)^2+\left(\frac{r}{r_2}\right)^2=1 \Rightarrow r=\frac{r_1r_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$.

14. (a) $S_1\equiv x^2+y^2+z^2+6x-8y-2z=13,\ C_1\equiv(-3,4,1)$
$S_2\equiv x^2+y^2+z^2-10x+4y-2z=8,\ C_2\equiv(5,-2,1)$
C_1C_2 का मध्य बिन्दु (माना P)
$\equiv P\left(\frac{5-3}{2},\frac{4-2}{2},\frac{1+1}{2}\right)=P(1,1,1)$
समतल $2ax-3ay+4az+6=0$, बिन्दु P से होकर जाता है
$\therefore\ 2a(1)-3a(1)+4a(1)+6=0 \Rightarrow 2a-3a+4a+6=0$
$\Rightarrow 3a+6=0 \Rightarrow 3a=-6 \Rightarrow a=-2$.

15. (d) $x+2y-z=4$ की बिन्दु $\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$ से लम्बवत् दूरी



$= P = \dfrac{\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-4\right|}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ तथा गोले की त्रिज्या $R = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$,

$\therefore$ वृत्त की त्रिज्या $= r = \sqrt{R^2 - P^2} = \sqrt{\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}} = 1$.

16. (b) गोले का समीकरण $x^2+y^2+z^2-2y-4z=11$ है।

गोले का केन्द्र = (0, 1, 2) तथा त्रिज्या = 4

माना वृत्त का केन्द्र (α, β, γ) है।

गोले के केन्द्र व वृत्त के केन्द्र को मिलाने वाली रेखा के दिक अनुपात $(\alpha-0, \beta-1, \gamma-2)$ या $(\alpha, \beta-1, \gamma-2)$ हैं।

लेकिन यह रेखा, समतल $x+2y+2z=15$ पर अभिलम्ब है

$\therefore \dfrac{\alpha}{1} = \dfrac{\beta-1}{2} = \dfrac{\gamma-2}{2} = k$

$\Rightarrow \alpha = k,\ \beta = 2k+1, \gamma = 2k+2$

$\because$ वृत्त का केन्द्र, समतल $x+2y+2z=15$ पर स्थित है

$\therefore k+2(2k+1)+2(2k+2)=15 \Rightarrow k=1$

$\therefore$ वृत्त का केन्द्र = (1, 3, 4)

अतः वृत्त की त्रिज्या

$= \sqrt{(\text{गोले की त्रिज्या})^2 - (\text{केन्द्र को मिलाने वाली रेखा की लम्बाई})^2}$

$= \sqrt{(4)^2 - [(1-0)^2+(3-1)^2+(4-2)^2]} = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$.

17. (e) गोले का समीकरण है,

$x^2+y^2+z^2-3x+y-2z-\dfrac{1}{2}=0$

$\therefore$ गोले का केन्द्र $= \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{-1}{2}, 1\right)$

त्रिज्या $= \sqrt{\left(\dfrac{9}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}\right)+1+\dfrac{1}{2}} = 2$

अब, अभीष्ट गोले की त्रिज्या = 4, जो कि दिये गये गोले के साथ संकेन्द्रीय है।

अतः अभीष्ट गोले का समीकरण है,

$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2+(z-1)^2=16$

अर्थात् $2x^2+2y^2+2z^2-6x+2y-4z-25=0$.

18. (b) गोले का समीकरण है, $x^2+y^2+z^2-6x-12y-2z+20=0$

गोले का केन्द्र (3, 6, 1) है व व्यास का एक सिरा (2,3,5) है।

माना दूसरे सिरे के निर्देशांक (x, y, z) हैं,

$\therefore \dfrac{2+x}{2}=3,\ \dfrac{3+y}{2}=6,\ \dfrac{5+z}{2}=1$

$\Rightarrow x=6-2,\ y=12-3,\ z=2-5$

$\Rightarrow x=4,\ y=9,\ z=-3$

अतः, दूसरे सिरे के निर्देशांक (4, 9, –3) हैं।

Critical Thinking Questions

1. (d) $x = 3 \pm \left(\dfrac{-2}{\sqrt{17}}\right)(\sqrt{17}),\ y=-6\pm\left(\dfrac{3}{\sqrt{17}}\right)(\sqrt{17})$

व $z = 10 \pm \left(\dfrac{-2}{\sqrt{17}}\right)(\sqrt{17})$.

अतः अभीष्ट निर्देशांक $(1,-3,8)$ या $(5,-9,12)$ हैं।

2. (c) माना रेखाखण्ड AB है तो दिये अनुसार

$AB\cos\alpha = 3,\ AB\cos\beta = 4,\ AB\cos\gamma = 5$

$\Rightarrow AB^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma) = 3^2+4^2+5^2$

$\Rightarrow AB = \sqrt{9+16+25} = 5\sqrt{2}$,

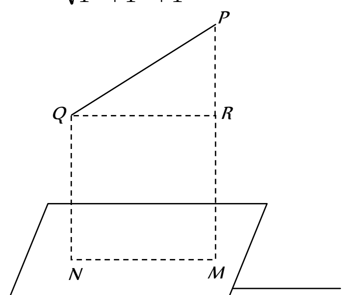
जहाँ α, β व γ वे कोण हैं जो कि रेखा अक्षों से बनाती है।

3. (a) केन्द्रक $\equiv \left(\dfrac{\sum x}{4}, \dfrac{\sum y}{4}, \dfrac{\sum z}{4}\right)$ = (1, 2, – 1)

$\Rightarrow a=1,\ b=5,\ c=-9;\ \therefore \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{107}$.

4. (c) दिया गया समतल $x+y+z-3=0$ है। बिन्दु P व Q से दिये गये समतल पर लम्ब PM व QN खींचे तथा $QR \perp MP$

अब, $|MP| = \dfrac{0+1+0-3}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{-2}{\sqrt{3}}$, $|NQ| = \dfrac{-2}{\sqrt{3}}$



$\therefore |PQ| = \sqrt{(0-0)^2+(0-1)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2}$

तथा $|RP| = |MP| - |MR| = |MP| - |NQ| = 0$

अतः $|NM| = |QR| = \sqrt{PQ^2-RP^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2-0} = \sqrt{2}$.

5. (b) $AB \equiv (-4,-6,-2);\ AC \equiv (-1,4,3);\ AD \equiv (-8,-1,3)$

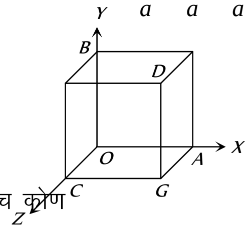
बिन्दु A, B, C तथा D समतलीय हैं, यदि $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

6. (b) माना 'a' भुजा का घन है, अतः

$O(0,0,0), D(a,a,a), B(0,a,0), G(a,0,a)$

अब, OD व BG के समीकरण क्रमशः $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{a}=\dfrac{z}{a}$ व $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y-a}{-a}=\dfrac{z}{a}$ हैं।



अतः, OD व BG के बीच कोण

$= \cos^{-1}\left(\frac{a^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{3a^2}.\sqrt{3a^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

नोट : विद्यार्थी इस प्रश्न को तथ्य मानकर याद रखें।

7. (a) बिन्दु (1, 2, –4) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण है, $\frac{x-1}{l} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+4}{n}$,

परन्तु प्रश्नानुसार, $3l - 16m + 7n = 0$ व $3l + 8m - 5n = 0$

अतः अभीष्ट रेखा $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{6}$ है।

8. (a) रेखायें परस्पर लम्बवत् हैं

$\therefore\ l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0,\ l_2l_3 + m_2m_3 + n_2n_3 = 0$

व $l_1l_3 + m_1m_3 + n_1n_3 = 0$

अतः, $\theta = \cos^{-1}[(l_1 + l_2 + l_3)l_1 + (m_1 + m_2 + m_3)m_1 + (n_1 + n_2 + n_3)n_1]$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}(\sum l_1^2) = \cos^{-1}(1) \Rightarrow \theta = 0^o$

इसी प्रकार अन्य रेखाओं के साथ 0^o कोण बनाएगी।

9. (a) प्रथम सम्बन्ध से, $n = -\left(\frac{al + bm}{c}\right)$

n का मान दूसरे सम्बन्ध में रखने पर,

$fm\left(-\frac{(al + bm)}{c}\right) + gl\left(-\frac{(al + bm)}{c}\right) + hlm = 0$

या $afml + bfm^2 + agl^2 + bglm - chlm = 0$

या $ag\frac{l^2}{m^2} + \frac{l}{m}(af + bg - ch) + bf = 0$ .....(i)

अब यदि l_1, m_1, n_1 व l_2, m_2, n_2 दोनों रेखाओं की दिक् कोज्यायें हैं, तो (i) से

$\frac{l_1l_2}{m_1m_2} = \frac{bf}{ag}$, $\left[\because \text{(i) के मूल } \frac{l_1}{m_1}, \frac{l_2}{m_2} \text{ हैं}\right]$

या $\frac{l_1l_2}{f/a} = \frac{m_1m_2}{g/b}$

इसी प्रकार, l के विलोपन से, $\frac{m_1m_2}{g/b} = \frac{n_1n_2}{h/c}$

$\therefore \frac{l_1l_2}{f/a} = \frac{m_1m_2}{g/b} = \frac{n_1n_2}{h/c} = q$, (माना)

हम जानते हैं, कि रेखायें लम्बवत् होंगी यदि

$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$

अर्थात् $\left(\frac{f}{a}\right)q + \left(\frac{g}{b}\right)q + \left(\frac{h}{c}\right)q = 0$,

या $\frac{f}{a} + \frac{g}{b} + \frac{h}{c} = 0$.

10. (d) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-\lambda} = \frac{z-1}{\lambda} = s$

और $\frac{x-0}{1/2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1} = t$

चूँकि रेखाए समतलीय हैं, तब

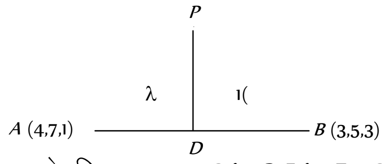
$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & -\lambda & \lambda \\ 1/2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

हल करने पर, $\lambda = -2$.

11. (b) माना D, बिन्दुओं (4, 7, 1) तथा (3, 5, 3) को मिलाने वाली रेखा AB पर बिन्दु $P(1, 0, 3)$ से डाले गये लम्ब का पाद है।

यदि D, AB को $\lambda : 1$ में विभाजित करता है, तब

$D = \left(\frac{3\lambda + 4}{\lambda + 1}, \frac{5\lambda + 7}{\lambda + 1}, \frac{3\lambda + 1}{\lambda + 1}\right)$ .....(i)



PD के दिक् अनुपात $2\lambda + 3, 5\lambda + 7, -2$ तथा AB के दिक् अनुपात $-1, -2, 2$ हैं।

$\because PD \perp AB$, $\therefore -(2\lambda + 3) - 2(5\lambda + 7) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-7}{4}$

(i) में λ का मान रखने पर, बिन्दु $D = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{17}{3}\right)$.

12. (b) रेखा $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4} = \lambda$ पर

कोई बिन्दु $(2\lambda + 1, 3\lambda - 1, 4\lambda + 1),\ \lambda \in R$ है।

रेखा $\frac{x-3}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{1} = \mu$ पर कोई बिन्दु

$(\mu + 3, 2\mu + k, \mu); \mu \in R$ है।

दी गई रेखायें प्रतिच्छेद करती हैं यदि और केवल यदि समीकरण निकाय (λ तथा μ में)

$2\lambda + 1 = \mu + 3$ .....(i)

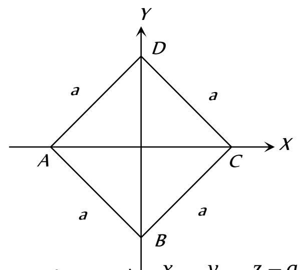
$3\lambda - 1 = 2\mu + k$ .....(ii)

$4\lambda + 1 = \mu$ .....(iii) का अद्वितीय हल है।

समीकरण (i) व (iii) को हल करने पर, $\lambda = \frac{-3}{2}, \mu = -5$

समीकरण (ii) से, $\frac{-9}{2} - 1 = -10 + k \Rightarrow k = \frac{9}{2}$.

13. (b) वर्ग (square) को मोड़ने पर निर्देशांक $D(0, 0, a); C(a, 0, 0);$ $A(-a, 0, 0); B(0, -a, 0)$ होंगे।



DC का समीकरण है, $\frac{x}{a} = \frac{y}{0} = \frac{z-a}{-a}$

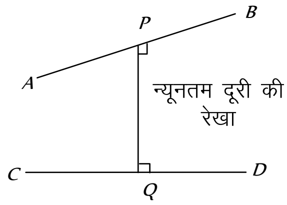
AB का समीकरण है, $\frac{x+a}{a} = \frac{y}{-a} = \frac{z}{0}$

$\therefore$ न्यूनतम दूरी $= \frac{2a}{\sqrt{3}}$, (सूत्र द्वारा)।

14. (b) माना दो रेखाएँ AB और CD के समीकरण $\frac{x}{1} = \frac{y+a}{1} = \frac{z}{1} = \lambda$ और $\frac{x+a}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} = \mu$ हैं,

तब $P \equiv (\lambda, \lambda - a, \lambda)$ और $Q \equiv (2\mu - a, \mu, \mu)$

अतः प्रश्नानुसार, $\frac{\lambda-2\mu+a}{2}=\frac{\lambda-a-\mu}{1}=\frac{\lambda-\mu}{2}$



$\Rightarrow \mu=a$ और $\lambda=3a$

$\therefore P\equiv(3a,2a,3a)$ और $Q\equiv(a,a,a)$.

ट्रिक : विकल्पों को रखकर जाँच करें।

15. (a) समतलों $3x-y-4z=0$ व $x+3y+6=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाले समतल का समीकरण है, $(3x-y-4z)+\lambda(x+3y+6)=0$ ......(i)

दिया है, मूलबिन्दु से समतल (i) की दूरी 1 है,

$\therefore \frac{6\lambda}{\sqrt{(3+\lambda)^2+(3\lambda-1)^2+4^2}}=1$

या $36\lambda^2=10\lambda^2+26$ या $\lambda=\pm1$

λ का मान (i) में रखने पर,

$\therefore (3x-y-4z)\pm(x+3y+6)=0$

या $4x+2y-4z+6=0$ या $2x+y-2z+3=0$

तथा $2x-4y-4z-6=0$

अतः अभीष्ट समतलों के समीकरण $x-2y-2z-3=0$ तथा $2x+y-2z+3=0$ हैं।

16. (b) $\because PA^2-PB^2=k$

$\therefore [(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2]$

$-[(x+2)^2+(y-5)^2+(z+4)^2]=k$

या $-8x+4y-16z-16=k$, जो कि समतल का समीकरण है।

17. (a) समीकरणों $l+2m+2n=0,\ 3l+3m+2n=0$ व $l^2+m^2+n^2=1$ से l, m, n के मान प्राप्त होते हैं, जिन्हें $l(x-1)+m(y+3)+n(z+2)=0$ में रखने पर अभीष्ट परिणाम प्राप्त होता है।

ट्रिक : विलोमतः परीक्षण करने पर,

$\because 2(1)-4(-3)+3(-2)-8=0,$

अतः यह दिये गये बिन्दु से गुजरता है।

$\because 1(2)+2(-4)+2(3)=0,$

अतः यह $x+2y+2z=5$ के लम्बवत् है।

$\because 3(2)+3(-4)+2(3)=0,$

अतः यह $3x+3y+2z=8$ के लम्बवत् है।

18. (a) समतल का समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ है।

{a, b, c क्रमशः x, y, z अक्षों पर काटे गये अन्तःखण्ड हैं}

तब, $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}=p$

$\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$

अतः बिन्दु (x, y, z) का बिन्दुपथ $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{p^2}$ है।

19. (d) चूँकि रेखा अक्षों से बराबर कोण बनाती है एवं मूलबिन्दु से होकर जाती है। इसके दिक् अनुपात 1, 1, 1 हैं। अतः रेखा का समीकरण $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ होगा।

इस पर कोई बिन्दु $P(a, a, a)$ है।

अतः $P(a, a, a)$ से जाने वाला एवं OP के लम्बवत् समतल का समीकरण है, $1(x-a)+1(y-a)+1(z-a)=0$

[$\because OP$ समतल का अभिलम्ब है]

अर्थात् $x+y+z=3a \Rightarrow \frac{x}{3a}+\frac{y}{3a}+\frac{z}{3a}=1$

अक्षों से काटे गये अन्तःखण्ड $3a, 3a, 3a$ हैं। अतः इन अन्तःखण्ड़ों के व्युत्क्रमों का योग

$=\frac{1}{3a}+\frac{1}{3a}+\frac{1}{3a}=\frac{3}{3a}=\frac{1}{a}$.

20. (b) समतलों $x+2y+3z-4=0$ व $4x+3y+2z+1=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाले समतल का समीकरण $x+2y+3z-4+\lambda(4x+3y+2z+1)=0$ है। चूँकि यह मूल बिन्दु से गुजरता है,

$\therefore \lambda=4$

अतः अभीष्ट समतल का समीकरण $17x+14y+11z=0$ है।

21. (b) अन्तखण्ड रूप में, समतल का समीकरण $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{c}=1$ है।

अभिलम्ब के दिक् अनुपात $1, 1, \frac{1}{c}$ हैं तथा दिये गये समतल के अभिलम्ब के दिक् अनुपात 1, 1, 0 हैं।

अब, $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1.1+1.1+\frac{1}{c}.0}{\left(\sqrt{\frac{1}{c^2}+2}\right)\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\left(\sqrt{\frac{1}{c^2}+2}\right)\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{c^2}+2=4 \Rightarrow c^2=\frac{1}{2} \Rightarrow c=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ अभिलम्ब के दिक् अनुपात $1, 1, \sqrt{2}$ हैं।

22. (d) समतलों के समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

तथा $\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}+\frac{z}{c'}=1$ हैं।

$\because$ मूलबिन्दु से समतलों की लम्बवत् दूरी बराबर होगी

$\therefore \left|\frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}\right|=\left|\frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}}}\right|$

$\therefore \Sigma\frac{1}{a^2}-\Sigma\frac{1}{a'^2}=0$.

23. (c) स्पष्टतः, $4(2)+4(3)-k(4)=0 \Rightarrow k=5$.

24. (a) रेखा की दिक् कोज्यायें $=\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{-6}{7}\right)$

अब, $x'=1+\frac{2r}{7},\ y'=-2+\frac{3r}{7}$ व $z'=3-\frac{6r}{7}$

$\therefore \left(1+\frac{2r}{7}\right)-\left(-2+\frac{3r}{7}\right)+\left(3-\frac{6r}{7}\right)=5 \Rightarrow r=1.$

25. (a) रेखा $\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-5}{2}$ पर कोई बिन्दु $(r+3,\ 2r+4,\ 2r+5)$ है, जो समतल को सन्तुष्ट करता है।

अतः $r+3+2r+4+2r+5=17 \Rightarrow r=1.$

अतः बिन्दु (4, 6, 7) है।

अतः, अभीष्ट दूरी $=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$.

26. (c) रेखायें समतलीय हैं, अतः

$$\begin{vmatrix} a-d-b+c & a-b & a+d-b-c \\ \alpha-\delta & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta-\gamma & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix}=0$$

तृतीय स्तम्भ को प्रथम स्तम्भ में जोड़ने पर यह द्वितीय स्तम्भ का दुगना हो जायेगा और जैसा कि हम जानते हैं कि सारणिक में दो स्तम्भ (या पंक्ति) समान होने पर सारणिक का मान शून्य होता है।

पुनः, उस समतल का समीकरण जिसमें यह स्थित है,

$$\begin{vmatrix} x-a+d & y-a & z-a-d \\ \alpha-\delta & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta-\gamma & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix}=0$$

संक्रिया $C_1 \to (C_1+C_3)-2C_2$ से,

$$\begin{vmatrix} x+z-2y & y-a & z-a-d \\ 0 & \alpha & \alpha+\delta \\ 0 & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow \{\alpha(\beta+\gamma)-\beta(\alpha+\delta)\}\ (x+z-2y)=0$

$\Rightarrow x+z-2y=0$.

27. (c) चूँकि रेखा दिये गये समतल पर स्थित है अतः रेखा पर स्थित कोई भी बिन्दु समतल को सन्तुष्ट करेगा, अर्थात् बिन्दु (3, 4, 5) व (5,7,9) समतल पर स्थित होंगे। अतः $k=5,\ d=3$.

28. (a) बिन्दु (4, 2, k) दिये गये समतल में स्थित होना चाहिए

अतः $2(4)-4(2)+1(k)=7 \Rightarrow k=7$.

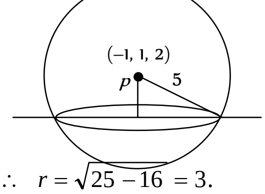
29. (c) $\because$ न्यूनतम दूरी = लम्बवत् दूरी $-\ r$

अब, लम्बवत् दूरी $=\left|\frac{-2\times12+4\times1+3\times3-327}{\sqrt{144+9+16}}\right|=26$

$\therefore$ न्यूनतम दूरी $=26-\sqrt{4+1+9+155}$, $[\because 26-r]$

$=26-13=13$.

30. (c) $p=\frac{-1+2+4+7}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{12}{3}=4$



$\therefore\ r=\sqrt{25-16}=3.$

31. (a) दी गयी समीकरणों में से 't' का विलोपन करने पर पथ का समीकरण $\frac{x}{2}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{4}$ या $\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{2}$ है।

अतः रॉकेट का पथ मूल बिन्दु से गुजरने वाली सरल रेखा है। $t=10$ सेकण्ड के लिये, $x=20, y=-40, z=40$

व $|\vec{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$=\sqrt{400+1600+1600}=60$ किमी

32. (a) समतलों $lx+my=0$ और $z=0$ की प्रतिच्छेद रेखा से होकर जाने वाले समतल का समीकरण $lx+my+\lambda z=0$ है। दिया है कि समतलों के बीच का कोण 'α' है, अतः इनके अभिलम्बों के बीच का कोण '$\pi-\alpha$' होगा। साथ ही, इनके अभिलम्बों की दिक् कोज्याएँ l, m, 0 तथा l, m, λ हैं

$\therefore\ \tan(\pi-\alpha)=\pm\frac{\sqrt{\Sigma(m_1n_2-m_2n_1)}}{\Sigma l_1l_2}$

$\therefore\ -\tan\alpha=\pm\frac{\lambda}{\sqrt{l^2+m^2}}$ है,

अतः अभीष्ट समीकरण है, $lx+my\pm z\sqrt{(l^2+m^2)}\tan\alpha=0$.

33. (d) $d_1=d\cos(90^o-\alpha)$

$d_2=d\cos(90^o-\beta)$

$d_3=d\cos(90^o-\gamma)$

$\Rightarrow\ d_1^2+d_2^2+d_3^2=d^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)$

$\Rightarrow\ d_1^2+d_2^2+d_3^2=2d^2$; $\therefore\ k=2$.

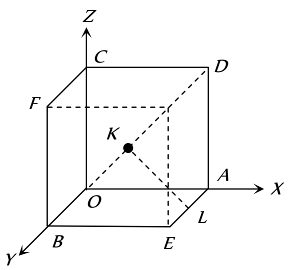
34. (b) $P_1=\left|\frac{3\times2-6\times3+2\times4+11}{\sqrt{3^2+(-6)^2+(2)^2}}\right|=1$

$P_2=\left|\frac{3\times1-6\times1+2\times4+11}{\sqrt{3^2+(-6)^2+(2)^2}}\right|=\frac{16}{7}$

दिया है, P_1 व P_2 अभीष्ट समीकरण के मूल हैं

$\therefore$ अभीष्ट समीकरण $7P^2-23P+16=0$ होगा।

35. (d)



अभीष्ट दूरी $=KL$

$=\sqrt{\left(a-\frac{a}{2}\right)^2+0^2+\left(0-\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

त्रिविमीय निर्देशांक ज्यामिति — SET Self Evaluation Test -20

1. यदि समतल $2x-y+\sqrt{\lambda}z+4=0$ तथा रेखा $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{2}$ के बीच का कोण θ है, जहाँ $\sin\theta=\frac{1}{3}$, तब λ का मान है [AIEEE 2005]

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $-\frac{4}{3}$

(c) $\frac{5}{3}$ (d) $-\frac{3}{5}$

2. समतल $x+y+2z-15=0$ में (5, 4, 6) का प्रतिबिम्ब बिन्दु है [AMU 2005]

(a) (3, 2, 2) (b) (2, 3, 2)

(c) (2, 2, 3) (d) (– 5, –4, –6)

3. बिन्दु (3, 2, 0), (5, 3, 2) व (–9, 6, –3) त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं। $\angle BAC$ का अन्तः समद्विभाजक AD है जो BC को बिन्दु D पर मिलता है, तो D के निर्देशांक होंगे

(a) $\left(\frac{17}{16},\frac{57}{16},\frac{19}{8}\right)$ (b) $\left(\frac{19}{8},\frac{57}{16},\frac{17}{16}\right)$

(c) $\left(0,0,\frac{17}{16}\right)$ (d) $\left(\frac{17}{16},0,0\right)$

4. घन के उस विकर्ण के दिक् अनुपात, जो मूल बिन्दु तथा उसके सामने के कोने से बनता है, हैं (जबकि घन की तीनों संगामी कोरें निर्देशांक अक्ष हैं) [MP PET 1996]

(a) $\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}$ (b) 1, 1, 1

(c) 2,–2,1 (d) 1, 2, 3,

5. रेखा OA व OB के दिक् अनुपात क्रमशः 1, –2, –1 व 3, –2, 3 हैं, तो समतल AOB के अभिलम्ब की दिक् कोज्यायें, जबकि O मूलबिन्दु है, होंगी

(a) $\left(\frac{4}{\sqrt{29}},\frac{3}{\sqrt{29}},\frac{-2}{\sqrt{29}}\right)$ (b) $\left(\frac{2}{\sqrt{29}},-\frac{3}{\sqrt{29}},\frac{4}{\sqrt{29}}\right)$

(c) $\left(-\frac{4}{\sqrt{29}},\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{3}{\sqrt{29}}\right)$ (d) $\left(\frac{4}{\sqrt{29}},\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{-3}{\sqrt{29}}\right)$

6. यदि कोई रेखा एक घन के चारों विकर्णों से $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ कोण बनाये, तो $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta=$ [RPET 2002]

(a) 1 (b) $\frac{4}{3}$

(c) अचर (d) इनमें से कोई नहीं

7. रेखाओं $\frac{x-6}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{2}$ तथा $\frac{x+4}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{-2}$ के बीच की न्यूनतम दूरी है

(a) 108 (b) 9

(c) 27 (d) इनमें से कोई नहीं

8. बिन्दु (2, –1, 5) से रेखा $\frac{x-11}{10}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z+8}{-11}$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई एवं पाद बिन्दु के निर्देशांक होंगे [DSSE 1987]

(a) $\sqrt{14},(1,2,-3)$ (b) $\sqrt{14},(1,-2,3)$

(c) $\sqrt{14},(1,2,3)$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. रेखायें $x=ay+b, z=cy+d$ व $x=a'y+b', z=c'y+d'$ परस्पर लम्बवत् होंगी, यदि [IIT 1984; AIEEE 2003]

(a) $aa'+cc'=1$ (b) $aa'+cc'=-1$

(c) $ac+a'c'=1$ (d) $ac+a'c'=-1$

10. रेखाओं $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z+5}{7}$ तथा $\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-6}{5}$ के प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक हैं [Pb. CET 2004]

(a) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ (b) $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

(c) $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ (d) $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

11. सरल रेखा $3x+2y-z-4=0$; $4x+y-2z+3=0$ का सममित रूप है

(a) $\frac{x-2}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{5}$ (b) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z}{5}$

(c) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{5}$ (d) इनमें से कोई नहीं

12. $x+y+z+2=0$ तथा $x+y+z+3=0$ एक साथ प्रदर्शित करते हैं [MP PET 1989]

(a) एक रेखा (b) एक बिन्दु

(c) एक समतल (d) इनमें से कोई नहीं

13. समतलों $4x+4y-5z=12$, $8x+12y-13z=32$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण है [MP PET 2004]

(a) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{4}$ (b) $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{4}$

(c) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{4}$ (d) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{4}$

14. एक समतल मूलबिन्दु से इकाई दूरी पर है। यह समतल निर्देशांक अक्षों को क्रमशः P, Q, R पर काटता है। यदि ΔPQR के केन्द्रक का बिन्दुपथ $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=k$ हो, तब k का मान है [IIT Screening 2005]

(a) 3 (b) 9

(c) 2 (d) 1

15. यदि समतल $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$, अक्षों को A, B, C पर काटता है, तब ΔABC का क्षेत्रफल है [MP PET 2000]

(a) $\sqrt{29}$ (b) $\sqrt{41}$

(c) $\sqrt{61}$ (d) इनमें से कोई नहीं

16. बिन्दुओं (0,0,0) व (3,–1,2) से होकर जाने वाले एवं रेखा $\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z+1}{7}$ के समान्तर समतल का समीकरण है [DSSE 1984]

(a) $x+19y+11z=0$ (b) $x-19y-11z=0$

(c) $x-19y+11z=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

17. रेखा $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{4}$ व समतल $2x+y-3z+4=0$ के बीच कोण है [AI CBSE 1981]

(a) $\sin^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{406}}\right)$ (b) $\sin^{-1}\left(\frac{-4}{\sqrt{406}}\right)$

(c) $\sin^{-1}\left(\frac{4}{14\sqrt{29}}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

18. रेखा $\frac{x-1}{2}=-(y+1)=\frac{z}{3}$ व समतल $3x+2y-z=5$ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हैं। उस बिन्दु के निर्देशांक होंगे

(a) (1, 1, 0) (b) (9, –5, 12)

(c) (2, 0, 1) (d) (–9, 5, –12)

19. उस समतल का समीकरण, जिसमें रेखायें $\frac{x-5}{4}=\frac{y-7}{4}=\frac{z+3}{-5}$ व $\frac{x-8}{7}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{3}$ स्थित हैं, है [MP PET 2000]

(a) $17x-47y-24z+172=0$

(b) $17x+47y-24z+172=0$

(c) $17x+47y+24z+172=0$

(d) $17x-47y+24z+172=0$

20. गोलों $x^2+y^2+z^2+7x-2y-z=13$ व $x^2+y^2+z^2-3x+3y+4z=8$ का प्रतिच्छेदन इनमें से एक गोले व निम्न समतल के प्रतिच्छेदन के बराबर है [AIEEE 2004]

(a) $2x-y-z=1$ (b) $x-2y-z=1$

(c) $x-y-2z=1$ (d) $x-y-z=1$

Answers and Solutions

(SET - 20)

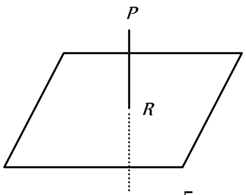
1. (c) समतल के अभिलम्ब और रेखा के बीच कोण

$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1\times 2+2(-1)+2\sqrt{\lambda}}{3\times\sqrt{5+\lambda}}$, जहाँ θ समतल और रेखा के बीच का कोण है।

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1\times 2+2\times(-1)+2\sqrt{\lambda}}{3\times\sqrt{5+\lambda}} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{\lambda}}{3\sqrt{5+\lambda}}$

$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{\lambda}}{3\sqrt{5+\lambda}} \Rightarrow \lambda = \frac{5}{3}$.

2. (a) माना दिए गए समतल में बिन्दु $P(5,4,6)$ का प्रतिबिम्ब बिन्दु Q है, तब PQ समतल का अभिलम्ब है। PQ के दिक् अनुपात 1, 1, 2 हैं। चूँकि PQ, बिन्दु (5, 4, 6) से होकर जाता है



$\therefore$ PQ का समीकरण है, $\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-6}{2} = r$, (माना)

$\therefore\ x = r+5, y = r+4, z = 2r+6$

अतः Q के निर्देशांक $(r+5, r+4, 2r+6)$ हैं।

माना PQ का मध्यबिन्दु R है, तब बिन्दु R के निर्देशांक

$= \left(\frac{r+5+5}{2}, \frac{r+4+4}{2}, \frac{2r+6+6}{2}\right)$

अर्थात् $\left(\frac{r+10}{2}, \frac{r+8}{2}, \frac{2r+12}{2}\right)$

$\because$ बिन्दु R समतल पर है

$\therefore\ \frac{r+10}{2} + \frac{r+8}{2} + 2\left(\frac{2r+12}{2}\right) - 15 = 0$

$\Rightarrow r+10+r+8+4r+24-30 = 0$

$\Rightarrow 6r+12 = 0 \Rightarrow r = -2$

अतः Q के निर्देशांक (3, 2, 2) हैं।

ट्रिक : विकल्प (a) से, (3, 2, 2) व (5, 4, 6) का मध्य बिन्दु दिये गये समतल के समीकरण को संतुष्ट करता है।

3. (b) माना $A(3, 2, 0)$, $B(5, 3, 2)$ व $C(-9, 6, -3)$, तो BC का समीकरण $\frac{x-5}{14} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-2}{5}$ है।

हम जानते हैं, कि रेखा BC को बिन्दु D अवश्य सन्तुष्ट करेगा। अतः विकल्प (b) सही है।

4. (b) विपरीत शीर्ष व मूल बिन्दु को मिलाने वाली रेखा के दिक् अनुपात $a-0, a-0, a-0$ अर्थात् 1, 1, 1 हैं।

5. (a) मूल बिन्दु से जाने वाले समतल का समीकरण $ax+by+cz=0$ है, परन्तु यह बिन्दुओं (1, – 2, – 1) व (3,–2, 3) से भी गुजरता है। अतः $a-2b-c=0$ व $3a-2b+3c=0$.

$\Rightarrow a = -2c$ व $b = -\frac{3c}{2}$

इसलिए समतल $-2cx - \frac{3c}{2}y + cz = 0 \Rightarrow 4x+3y-2z=0$ होगा। अतः समतल की दिक् कोज्यायें $\left(\frac{4}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{-2}{\sqrt{29}}\right)$ हैं।

6. (b) माना घन की भुजा = a

तब OG, BE एवं AD, CF चार विकर्ण होंगे

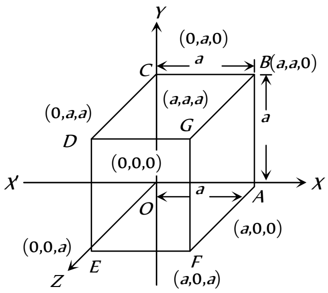
OG के दिक् अनुपात = a, a, a = 1, 1, 1

BE के दिक् अनुपात = $-a, -a, a$ = 1, 1, –1

AD के दिक् अनुपात = $-a, a, a$ = –1, 1, 1

CF के दिक् अनुपात = $a, -a, a$ = 1, –1, 1

माना रेखा के दिक् अनुपात l, m, n हैं तथा रेखा और विकर्णों के बीच कोण α, β, γ व δ हैं, तब



$\cos\alpha = \frac{l+m+n}{\sqrt{3}}, \cos\beta = \frac{l+m-n}{\sqrt{3}},$

$\cos\gamma = \frac{-l+m+n}{\sqrt{3}}, \cos\delta = \frac{l-m+n}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta$

$= \frac{1}{3}[(l+m+n)^2 + (l+m-n)^2 + (-l+m+n)^2 + (l-m+n)^2]$

$= \frac{4}{3}$.

7. (b) सूत्र से, न्यूनतम दूरी $= \frac{\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}}{\sqrt{8^2+8^2+4^2}} = \frac{108}{12} = 9$.

8. (c) माना पाद बिन्दु (a, b, c) है।

$\because \frac{a-11}{10} = \frac{b+2}{-4} = \frac{c+8}{-11} = k$

तब, $a = 10k+11$, $b = -4k-2$, $c = -11k-8$

यहाँ सभी विकल्पों से $a = 1$ प्राप्त होता है, तब $k = -1$, अतः पाद (1, 2, 3) होगा एवं (1, 2, 3) व (2, – 1, 5) के बीच की लम्बवत् दूरी = $\sqrt{14}$.

ट्रिक : लम्बपाद बिन्दु रेखा को सन्तुष्ट करता है। स्पष्टतः बिन्दु (1,2,3) रेखा को सन्तुष्ट करता है। अब लम्ब की लम्बाई लम्बपाद बिन्दु व दिये गये बिन्दु की दूरी के बराबर अर्थात् $\sqrt{14}$ होगी।

परन्तु विद्यार्थी यहाँ याद रखें कि यह आवश्यक नहीं है कि (2, – 1, 5) व (1, 2, 3) को जोड़ने वाली रेखा दी गयी रेखा के लम्बवत् हो, अतः विद्यार्थियों को परीक्षण कर लेना चाहिये। यहाँ बिन्दुओं (2, – 1, 5) व (1, 2, 3) को जोड़ने वाली रेखा के दिक् अनुपात (– 1, 3, – 2) एवं दी गयी रेखा के (10, – 4, – 11) हैं, अतः रेखायें परस्पर लम्बवत् हैं।

9. (b) $l_1 - am_1 = 0$ व $cm_1 - n_1 = 0 \Rightarrow \frac{l_1}{a} = \frac{m_1}{1} = \frac{n_1}{c}$

तथा $l_2 - a'm_2 = 0$ व $c'm_2 - n_2 = 0$

$\Rightarrow \frac{l_2}{a'} = \frac{m_2}{1} = \frac{n_2}{c'}$

$\therefore l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = aa' + cc' + 1 = 0$.

10. (c) माना $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7} = \lambda$ .....(i)

तब $x = 3\lambda - 1$, $y = 5\lambda - 3, z = 7\lambda - 5$

अर्थात् रेखा पर व्यापक बिन्दु $(3\lambda - 1, 5\lambda - 3, 7\lambda - 5)$ है।

पुनः माना $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{5} = \mu$ .....(ii)

तब $x = \mu + 2, y = 3\mu + 4, z = 5\mu + 6$

इस रेखा पर व्यापक बिन्दु $(\mu + 2, 3\mu + 4, 5\mu + 6)$ है।

प्रतिच्छेदन के लिये, ये बिन्दु समान होंगे, (λ व μ के मानों के लिये)। अतः,

$(3\lambda - 1) = (\mu + 2)$, $(5\lambda - 3) = (3\mu + 4)$, $(7\lambda - 5) = (5\mu + 6)$

प्रथम दो सम्बन्धों से, $\mu = 3\lambda - 3$ .....(iii)

व $3\mu = 5\lambda - 7$ .....(iv)

समीकरण (iii) से μ का मान समीकरण (iv) में रखने पर,

$3(3\lambda - 3) = 5\lambda - 7$

$\Rightarrow 9\lambda - 9 = 5\lambda - 7$ या $4\lambda = 2$ या $\lambda = \frac{1}{2}$

समीकरण (iii) में $\lambda = \frac{1}{2}$ रखने पर, $\mu = -\frac{3}{2}$

अतः अभीष्ट प्रतिच्छेद बिन्दु है,

$\left(\frac{3}{2} - 1\right), \left(\frac{5}{2} - 3\right), \left(\frac{7}{2} - 5\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

11. (b) **ट्रिक** : चूँकि रेखा $\frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z}{5}$ पर कोई बिन्दु $(3r - 2, -2r + 5, 5r)$ है, जो दोनों समतलों को सन्तुष्ट करता है।

12. (d) चूँकि समतल समान्तर हैं।

13. (c) माना रेखा की दिक् कोज्यायें *l, m, n* हैं। चूँकि रेखा दोनों समतलों पर स्थित है अतः यह रेखा दोनों समतलों के अभिलम्ब के लम्बवत् होनी चाहिये। अतः

$4l + 4m - 5n = 0$ तथा $8l + 12m - 13n = 0$

$\therefore \frac{l}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{m}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{n}{a_1b_2 - a_2b_1}$

$\Rightarrow \frac{l}{4(-13) - 12(-5)} = \frac{m}{-5(8) - (-13)(4)} = \frac{n}{4(12) - 8(4)}$

$\Rightarrow \frac{l}{8} = \frac{m}{12} = \frac{n}{16}$

चूँकि *l, m, n* एक साथ शून्य नहीं हो सकते। अतः,

$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ व $4l + 4m = 12$, $8l + 12m = 32$

लेने पर। माना बिन्दु (x, y) इस समतल पर स्थित है

अतः (l, m) के स्थान पर (x, y) रखने पर

$4x_1 + 4y_1 = 12$ व $8x_1 + 12y_1 = 32$

हल करने पर, $x_1 = 1, y_1 = 2$

$\therefore$ रेखा का समीकरण

$\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{12} = \frac{z}{16}$ या $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4}$ है।

14. (b) माना समतल का समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ है, जहाँ

$\frac{1}{\sqrt{\sum\left(\frac{1}{a^2}\right)}} = 1$ या $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$ ......(i)

प्रश्नानुसार, $x = \frac{a}{3}, y = \frac{b}{3}, z = \frac{c}{3}$

x, y, z के मान (i) में रखने पर, त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक का बिन्दुपथ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 9$ है, अर्थात् $k = 9$.

15. (c) ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$

$\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{4 \times 9 + 9 \times 16 + 16 \times 4} = \frac{1}{2}\sqrt{244} = \sqrt{61}$.

16. (b) **ट्रिक :** रेखा के दिक् अनुपात $a = 1, b = -4, c = 7$ हैं।

अब विकल्प (b) से,

$1 \times 1 + 19 \times 4 - 11 \times 7 = 1 + 76 - 77 = 0$

$\because$ यह दिये गये बिन्दुओं से भी गुजरता है

$\therefore x - 19y - 11z = 0$.

17. (b) $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{6 + 2 - 12}{\sqrt{14}.\sqrt{29}}\right) \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{-4}{\sqrt{406}}\right)$.

18. (b) **ट्रिक :** केवल बिन्दु (9, – 5, 12) रेखा व समतल को सन्तुष्ट करता है।

19. (a) समतल का समीकरण, जिसमें रेखा $\frac{x-5}{4} = \frac{y-7}{4} = \frac{z+3}{-5}$ स्थित है, है

$A(x - 5) + B(y - 7) + C(z + 3) = 0$ ......(i)

जहाँ $4A + 4B - 5C = 0$ ......(ii)

$\because$ रेखा $\frac{x-8}{7} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{3}$ भी समतल में स्थित है

$\therefore 7A + B + 3C = 0$ ......(iii)

(ii) तथा (iii) से, $\frac{A}{17} = \frac{B}{-47} = \frac{C}{-24}$

$\therefore$ अभीष्ट समतल का समीकरण है

$17(x - 5) - 47(y - 7) + (-24)(z + 3) = 0$

$\Rightarrow 17x - 47y - 24z + 172 = 0.$

20. (a) समतल का समीकरण जो दोनों गोलों को प्रतिच्छेद करता है, $S_1 - S_2 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 7x - 2y - z - 13$

$- (x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 3y + 4z - 8) = 0$

$\Rightarrow 10x - 5y - 5z - 5 = 0 \Rightarrow 2x - y - z = 1$.

* * *