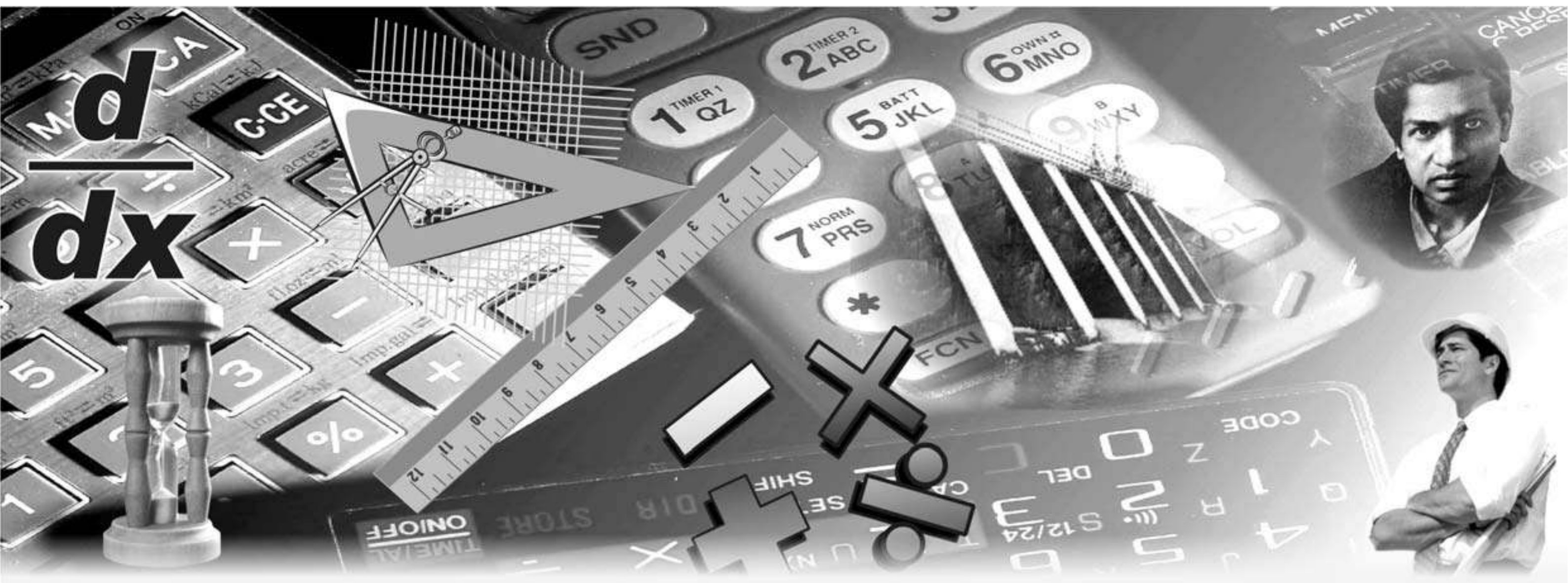


Chapter
21
फलन, सीमा, सांतत्य तथा अवकलनीयता

फलन

यदि A व B दो अरिक्त समुच्चय हो तथा समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B के अद्वितीय अवयव से सम्बन्धित हो, तो फलन f, समुच्चय A से समुच्चय B में कहलाता है तथा इसे $f : A \to B$ से प्रदर्शित करते हैं।

महत्वपूर्ण परिभाषायें (Some important definitions)

(1) **वास्तविक संख्यायें :** वे संख्यायें, जो या तो परिमेय हैं या अपरिमेय, वास्तविक संख्याएँ कहलाती हैं। वास्तविक संख्याओं का वर्ग सदैव अऋणात्मक (Non-negative) होता है। वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को R से प्रदर्शित करते हैं।

(2) **सम्बन्धित राशियाँ** (Related quantities) **:** जब दो राशियाँ इस प्रकार हो कि एक राशि में परिवर्तन करने पर दूसरी राशि में परिवर्तन हो जाता है अर्थात् यदि एक राशि का मान दूसरे पर निर्भर करता हो, तब वे राशियाँ सम्बन्धित राशियाँ कहलाती है।

(3) **चर** (variable) **:** एक ऐसी राशि जो किसी समस्या की गणितीय संक्रियाओं में भिन्न भिन्न संख्यात्मक मानों को ग्रहण कर सकें अर्थात् जिस राशि को प्रत्येक संख्यात्मक मान दिया जा सके, चर राशि या चर कहलाती है।

(i) **स्वतन्त्र चर** : एक ऐसा चर जो किसी भी स्वेच्छ मान को ग्रहण कर सके, स्वतन्त्र चर कहलाता है।

(ii) **परतन्त्र चर** : एक ऐसा चर जिसका मान स्वतन्त्र चर पर निर्भर करता है, परतन्त्र चर कहलाता है।

(4) **अचर** (Constant) **:** एक ऐसी राशि जिसका मान सभी गणितीय संक्रियाओं में अपरिवर्तित रहे, अचर राशि या अचर कहलाती है। ये सामान्यतः a, b, c इत्यादि से प्रदर्शित किये जाते हैं। अचर दो प्रकार के होते हैं।

(5) **निरपेक्ष मान** (Absolute value) **:** किसी संख्या x का निरपेक्ष मान $|x|$ वह संख्या है, जो निम्न प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करता है। $|x| = \begin{cases} -x, & \text{यदि } x < 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \\ x, & \text{यदि } x > 0 \end{cases}$. $|x|$ को निम्न प्रकार भी परिभाषित किया जा सकता है : $|x|$ = अधिकतम $\{x, -x\}$ या $|x| = \sqrt{x^2}$

(6) **भिन्नात्मक भाग :** हम जानते है कि $x \ge [x]$. संख्या 'x' तथा उसके महत्तम पूर्णांक मान '$[x]$' के अन्तर को भिन्नात्मक भाग कहते हैं तथा इसे $\{x\}$ से प्रदर्शित करते है। अर्थात् $\{x\} = x - [x]$

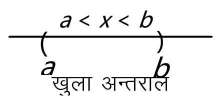
***उदाहरणार्थ*:** यदि $x = 4.92$ तब $[x] = 4$ तथा $\{x\} = 0.92$.

किसी भी संख्या का भिन्नात्मक भाग सदैव अऋणात्मक तथा 1 से कम होता है।

अन्तराल (Intervals)

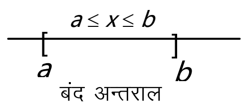
अन्तराल चार प्रकार के होते हैं :

(1) **विवृत अन्तराल** (Open interval) **:** माना a व b दो वास्तविक संख्यायें इस प्रकार हैं कि $a < b$, तो संख्याओं a व b के मध्य सभी वास्तविक संख्याओं के मानों के समुच्चय (a, b) या $]a, b[$ से प्रदर्शित करते हैं तथा इसे a व b के मध्य खुला अन्तराल कहते है।

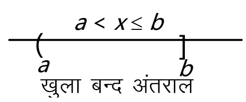


अतः $]a, b[$ या $(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$

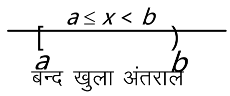
(2) **संवृत अन्तराल** (Closed interval) **:** माना a व b दो वास्तविक संख्यायें इस प्रकार है कि $a < b$ तथा एक चर x का मान a व b के मध्य हो तथा इसका मान a व b के बराबर भी हो सकता है तो a व b सहित, a व b के मध्य x के सभी वास्तविक मानों के समुच्चय को x का बन्द अन्तराल कहते है तथा इसे $[a, b]$ से प्रदर्शित करते हैं। अतः, $[a, b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$



(3) **खुला बन्द अन्तराल** (Open-Closed interval) **:** इसे $]a, b]$ या $(a, b]$ से प्रदर्शित करते हैं। अतः $]a, b]$ या $(a, b] = \{x \in R : a < x \le b\}$



(4) **बन्द खुला अन्तराल** (Closed-Open interval) **:** इसे $[a, b[$ या



[*a*, *b*)से प्रदर्शित करते हैं। अतः [*a*, *b*[या [*a*, *b*) = $\{x \in R : a \le x < b\}$

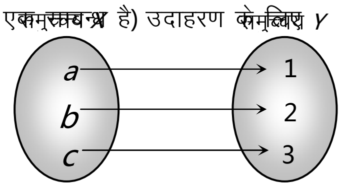
फलन की परिभाषा (Definition of function)

(1) फलन को प्रतिचित्रण (Mapping) की आधारभूत संकल्पना से सरलता से परिभाषित किया जा सकता है। माना X व Y दो अरिक्त समुच्चय हैं। "समुच्चय X से समुच्चय Y में फलन 'f' एक ऐसा नियम है जिसके द्वारा समुच्चय X का प्रत्येक अवयव समुच्चय Y के अद्वितीय (केवल एक और केवल एक) अवयव से सम्बन्धित हो। गणितीय रूप में फलन 'f' को $f: X \to Y$ से प्रदर्शित करते है जबकि $y = f(x), x \in X$ तथा $y \in Y$. हम कह सकते हैं कि y, x का प्रतिबिम्ब है (या x, y का पूर्व प्रतिबिम्ब है)।

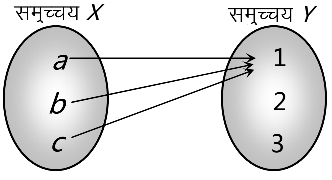
फलन को परिभाषित करते समय निम्न दो तथ्यों को ध्यान में रखना चाहिए।

(i) एक प्रतिचित्रण $f: X \to Y$ एक फलन कहलाता है यदि समुच्चय X के प्रत्येक अवयव का समुच्चय Y में प्रतिबिम्ब हो। यह सम्भव है कि समुच्चय Y में कुछ अवयव रिक्त हो जो कि समुच्चय X के किसी अवयव का प्रतिबिम्ब न हो।

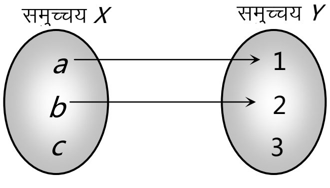
(ii) समुच्चय X के प्रत्येक अवयव का एक और केवल एक प्रतिबिम्ब होना चाहिए। इसका अर्थ है कि यह असम्भव है कि समुच्चय X के एक विशेष अवयव के एक से अधिक प्रतिबिम्ब हो। फलन बहुमानी नहीं हो सकते हैं (एक प्रतिचित्रण जो कि बहुमानी है, समुच्चय X से समुच्चय Y में एक सम्बन्ध है) उदाहरण के लिए



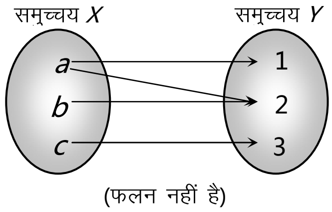
(फलन है)



(फलन है)

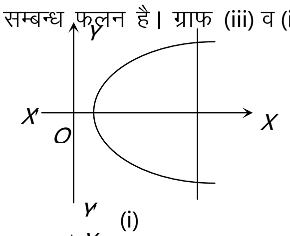


(फलन नहीं है)

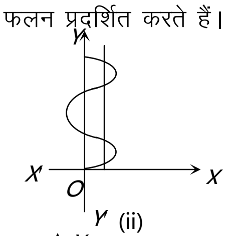


(फलन नहीं है)

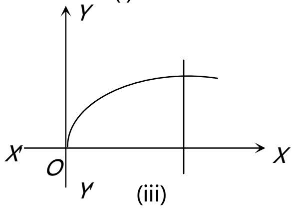
(2) **ऊर्ध्वाधर रेखा परीक्षण द्वारा फलन का परीक्षण :** एक सम्बन्ध $f: A \to B$ एक फलन है या नहीं, इसका परीक्षण सम्बन्ध के ग्राफ द्वारा कर सकते है। यदि एक उर्ध्वाधर रेखा जो वक्र को एक से अधिक बिन्दुओं पर काटती है तब दिया गया सम्बन्ध फलन नही है तथा जब यह उर्ध्वाधर रेखा (Y-अक्ष के समान्तर) वक्र को केवल एक बिन्दु पर काटती है तब दिया गया सम्बन्ध फलन है। ग्राफ (iii) व (iv) एक फलन प्रदर्शित करते हैं।



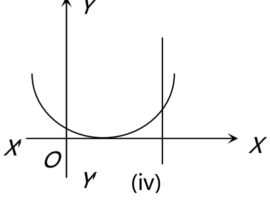
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

(3) **फलनों की संख्या :** माना X व Y दो परिमित समुच्चय जिनमें क्रमशः m व n अवयव हैं। तब समुच्चय X का प्रत्येक अवयव समुच्चय Y के n अवयवों में से किसी एक अवयव से सम्बन्धित हो सकता है। अतः, समुच्चय X से समुच्चय Y में कुल फलनों की संख्या n^m होगी।

(4) **फलन का मान :** यदि $y = f(x)$ एक फलन है तो x के किसी भी मान (माना $x = a$) के लिए फलन का मान सम्बन्ध $y = x^2$ में x का मान प्रत्यक्ष प्रतिस्थापित कर ज्ञात कर सकते हैं।

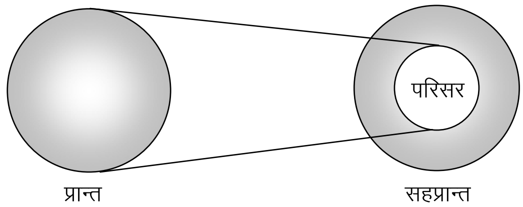
उदाहरण के लिए, यदि $f(x) = x^2 + 1$, तब $f(1) = 1^2 + 1 = 2$, $f(2) = 2^2 + 1 = 5$, $f(0) = 0^2 + 1 = 1$ इत्यादि।

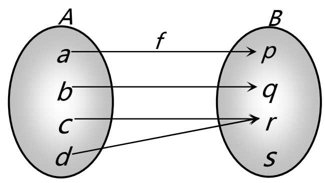
फलन का प्रान्त, सहप्रान्त तथा परिसर (Domain, co-domain and range of function)

यदि एक फलन समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित है तब फलन $f: A \to B$ के लिए, समुच्चय A के सभी अवयव फलन f का प्रान्त (domain) कहलाते हैं तथा समुच्चय B के सभी अवयव फलन f का सहप्रान्त (co-domain) कहलाते है। समुच्चय B के उन अवयवों का समुच्चय जो कि समुच्चय A के अवयवों के f प्रतिबिम्ब हैं, फलन f का परिसर (range) कहलाता है।

दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं प्रान्त (domain) = x के सभी सम्भावित मान जिनके लिए $f(x)$ का अस्तित्व है

परिसर (range)= x के सभी मानों के लिए, $f(x)$ के सभी सम्भावित मान





प्रान्त = {*a*, *b*, *c*, *d*} = *A*

सहप्रान्त = {*p*, *q*, *r*, *s*} = *B*

फलन का प्रान्त (domain) तथा परिसर (range) ज्ञात करने की विधियाँ

(i) **प्रान्त (domain) ज्ञात करने की विधि**

(a) वर्गमूल, घनमूल तथा करणीगत चिन्हों के अन्दर लिखें व्यंजक का मान ≥ 0 रखते हैं, हर में लिखें पद का मान शून्य नहीं होना चाहिए।

(b) यदि फलन $y = f(x)$ व $y = g(x)$ के प्रान्त (domain) क्रमशः D_1 व D_2 हो तो फलन $f(x) \pm g(x)$ या $f(x).g(x)$ का डोमेन $D_1 \cap D_2$ होगा। जबकि $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ का प्रान्त (domain) $D_1 \cap D_2 - \{g(x) = 0\}$ होगा।

(c) फलन $(\sqrt{f(x)})$ का प्रान्त (domain) $= D_1 \cap \{x : f(x) \ge 0\}$

(ii) **परिसर (range) ज्ञात करने की विधि :** फलन $y = f(x)$ का परिसर, डोमेन x के सभी वास्तविक मानों के संगत $f(x)$ के सभी मानों का समुच्चय है।

(a) यदि डोमेन में अवयवों की संख्या निश्चित है, तो इन अवयवों के संगत $f(x)$ के मानों का समुच्चय परिसर (range) कहलाता है

(b) यदि डोमेन सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय या कुछ निश्चित मानों के अतिरिक्त वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, तब x को y के पदों में व्यक्त करते हैं। x के सभी परिभषित मानों के लिए, y के मानों का समुच्चय, फलन का परिसर (range) कहलाता है (अर्थात y के वह समस्त मान जिनके लिए x का अस्तित्व है)।

(c) यदि फलन का डोमेन, एक निश्चित अन्तराल है, तो इस अन्तराल में फलन के न्यूनतम व अधिकतम मान फलन का परिसर (range) होगें।

फलनों का बीजगणित (Algebra of functions)

(1) **फलन का अदिश गुणनफलः** $(c\ f)(x) = c\ f(x)$, जहां c एक अदिश है नये फलन $c\ f(x)$ का प्रान्त (domain) X_f है।

(2) **फलनों का योग/अन्तरः** $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ नये फलन का प्रान्त (domain) X होगा।

(3) **फलनों का गुणनफलः** $(fg)(x) = (g\ f)(x) = f(x) g(x)$ नये फलन का प्रान्त (domain) X होगा।

(4) **फलनों का भागफल** : (i) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. दो फलनों के भागफल से प्राप्त फलन का प्रान्त (domain) $x \in X (= X_f \cap Xg)$, जबकि $\{x : g(x) \neq 0\}$ से परिभाषित किया जाता है।

(ii) $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ दो फलनों के भागफल से प्राप्त फलन का प्रान्त (domain) $x \in X (= X_g \cap X_f)$, जबकि $\{x : f(x) \neq 0\}$ से परिभाषित किया जाता है।

(5) **समान फलन** : दो फलन f व g समान कहलाते है, यदि और केवल यदि

(i) f का प्रान्त (domain) = g का प्रान्त (domain)

(ii) f का सहप्रान्त (codomain) = g का सहप्रान्त (co-domain)

(iii) $f(x) = g(x) \forall x \in$ उनका उभयनिष्ठ प्रान्त (domain)

(6) **वास्तविक फलन :** यदि R, वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा A व B, R के दो उपसमुच्चय हैं तब फलन $f : A \to B$ एक वास्तविक या वास्तविक मानी फलन कहलाता है।

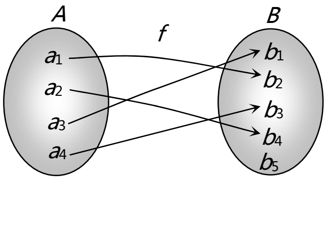
फलनों के प्रकार (Kinds of function)

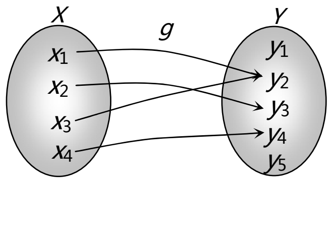
(1) **एकैकी फलन** (Injective function) **:** एक फलन $f : A \to B$ एकैकी फलन कहलाता है, यदि समुच्चय A के भिन्न भिन्न अवयवों के समुच्चय B में भिन्न भिन्न प्रतिबिम्ब हो। अतः $f : A \to B$ एकैकी है।

$\Leftrightarrow a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)\ \forall\ a, b \in A$

$\Leftrightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow a = b\ \forall\ a, b \in A$.

उदाहरणार्थ : माना $f : A \to B$ व $g : X \to Y$ दो फलन निम्न चित्रों द्वारा प्रदर्शित किये गये है





स्पष्टतः $f : A \to B$ एक एकैकी फलन है किन्तु $g : X \to Y$ एकैकी फलन नही है क्योंकि समुच्चय X के दो विभिन्न अवयव x_1 व x_3 समुच्चय Y के एक ही अवयव y_2 से सम्बन्धित है।

(i) **फलन के एकैकी होने का प्रतिबन्ध**

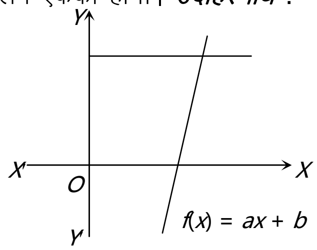
पद I : फलन f के प्रान्त (domain) में दो स्वेच्छ अवयव x व y लेते हैं।

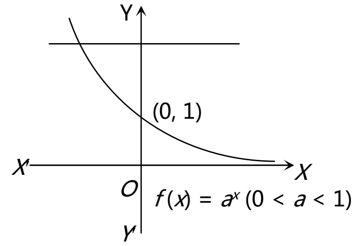
पद II : $f(x) = f(y)$ रखते हैं।

पद III : $f(x) = f(y)$ को हल करते हैं। यदि $f(x) = f(y)$ केवल एक हल $x = y$ देता है, तो $f : A \to B$ एक एकैकी फलन है अन्यथा नहीं।

• यदि फलन क्रमित युग्मों के रूप में दिया है तथा यदि दो क्रमित युग्मों के द्वितीय अवयव समान नहीं है तो फलन एकैकी होगा।

• यदि फलन $y = f(x)$ का ग्राफ दिया है तथा x-अक्ष के समान्तर प्रत्येक रेखा दिये गये वक्र को अधिकतम एक बिन्दु पर काटती है तब फलन एकैकी होगा। ***उदाहरणार्थ*** :



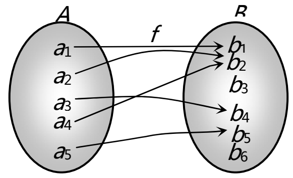


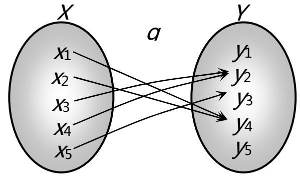
(ii) **एकैकी फलनों की संख्या :** यदि A व B दो परिमित समुच्चय ऐसे हैं जिनमें क्रमशः m व n अवयव हैं, तब समुच्चय A से B में बनने वाले एकैकी फलनों की संख्या = $\begin{cases} {}^nP_m, & \text{यदि } n \geq m \\ 0, & \text{यदि } n < m \end{cases}$

(2) **बहुएकैकी फलन** (Many-one function) **:** एक फलन $f : A \to B$ बहुएकैकी कहलाता है, यदि समुच्चय A के दो या दो से अधिक अवयवों का समुच्चय B में एक ही प्रतिबिम्ब हो।

अतः, $f : A \to B$ बहुएकैकी फलन है यदि $x, y \in A$ इस प्रकार है कि $x \neq y$ परन्तु $f(x) = f(y)$.

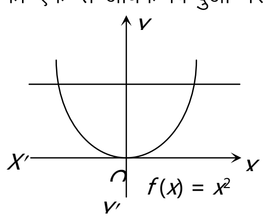
दूसरे शब्दों में $f : A \to B$ एक बहुएकैकी फलन होगा यदि यह एकैकी फलन नहीं है।

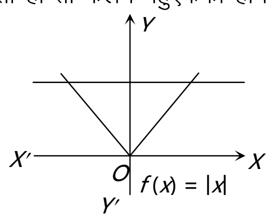




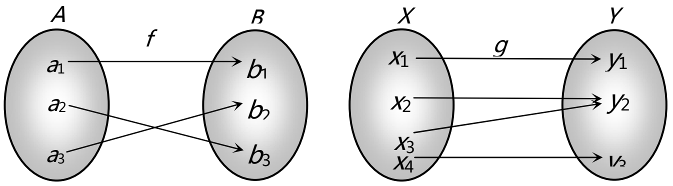
• यदि फलन क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में दिया है तथा कम से कम दो क्रमित युग्मों के दूसरे अवयव समान है तब फलन बहुएकैकी कहलाता है।

• यदि फलन $y = f(x)$ का ग्राफ दिया है तथा x-अक्ष के समान्तर रेखा वक्र को एक से अधिक बिन्दुओं पर काटती हो तो फलन बहुएकैकी होगा।





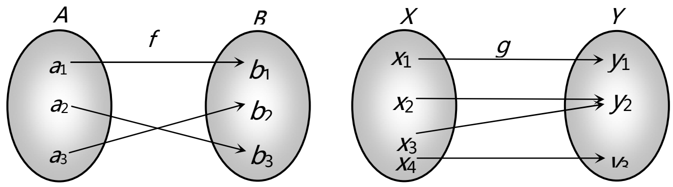
(3) **आच्छादक फलन** (Surjective function)**:** एक फलन $f: A \to B$ आच्छादक होगा यदि समुच्चय B के प्रत्येक अवयव का समुच्चय A में पूर्व प्रतिबिम्ब हो। अतः यदि $f^{-1}(y) \in A, \forall y \in B$ तब फलन आच्छादक होगा। दूसरे शब्दों में f का परिसर (range) = f का सह प्रान्त (co-domain) : निम्न चित्र आच्छादक फलन को प्रदर्शित करते है।.



आच्छादक फलनों की संख्या : यदि दो समुच्चयों A व B में क्रमशः m व n अवयव इस प्रकार है कि $1 \le n \le m$, तो समुच्चय A से समुच्चय B में बनने वाले आच्छादक फलनों की संख्या $\sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} \, {}^nC_r r^m$ होगी।

(4) **अन्तःक्षेपी फलन** (Into function)**:** एक फलन $f: A \to B$ अन्तः क्षेपी होगा यदि समुच्चय B के कम से कम एक अवयव का समुच्चय A में कोई पूर्व प्रतिबिम्ब न हो।

दूसरे शब्दों में $f: A \to B$ एक अन्तःक्षेपी फलन होगा यदि यह आच्छादक फलन नही है। निम्न चित्र अन्तःक्षेपी फलन को प्रदर्शित करते हैं।



आच्छादक या अन्तःक्षेपी फलन ज्ञात करने की विधि :

(i) x को y का फलन लेकर $f(x) = y$ को हल करते हैं।

(ii) अब यदि $g(y)$ प्रत्येक $y \in$ सहप्रान्त तथा $g(y) \in$ प्रान्त $\forall$ $y \in$ सहप्रान्त के लिए परिभाषित है, तब फलन $f(x)$ आच्छादक होगा तथा यदि उपरोक्त में से किसी भी एक शर्त का पालन नहीं होता है तब $f(x)$ अन्तःक्षेपी होगा ।

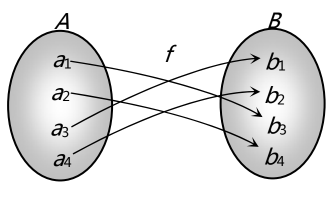
(5) **एकैकी आच्छादक फलन** (Bijective function)**:** एक फलन $f: A \to B$ एकैकी आच्छादक होगा, यदि यह एकैकी तथा आच्छादक है।

दूसरे शब्दों में, एक फलन $f: A \to B$ एकैकी आच्छादक (bijection) होगा, यदि

(i) यह एकैकी है अर्थात् $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ सभी $x, y \in A$.

(ii) यह आच्छादक है अर्थात् सभी $y \in B$ के लिए $x \in A$ इस प्रकार है कि $f(x) = y$. स्पष्टतः फलन f एकैकी आच्छादक है क्योंकि यह एकैकी व आच्छादक है।

एकैकी आच्छादक फलनों की संख्या : यदि A व B दो परिमित समुच्चय है तथा $f: A \to B$ एक एकैकी आच्छादक फलन है, तब सुमच्चय A व B में अवयवों की संख्या समान होगी। यदि समुच्चय A में n अवयव है, तो समुच्चय A से समुच्चय B में बनने वाले एकैकी आच्छादक फलनों की संख्या $n!$ होगी।



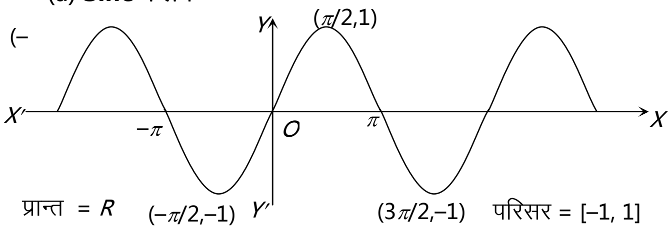
(6) **बीजीय फलन** (Algebraic function)**:** वे फलन, जो स्वतन्त्र चर की घातों, वर्गमूल तथा चार मूलभूत संक्रियाओं योगफल, अन्तर, गुणनफल व भागफल से मिलकर बनते हैं, बीजीय फलन कहलाते हैं उदाहरणार्थ

उदाहरणार्थ (i) $x^{\frac{3}{2}} + 5x$ (ii) $\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}, x \ne 1$ (iii) $3x^4 - 5x + 7$

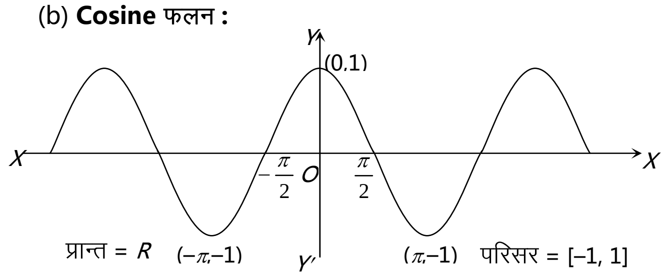
(7) **अबीजीय फलन** (Transcedental function)**:** वह फलन जो बीजीय नही है, अबीजीय फलन कहलाते हैं। त्रिकोणमितीय, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय, चर घांताकी तथा लघुगणकीय फलन अबीजीय फलन हैं।

(i) **त्रिकोणमितीय फलन** : वह फलन जिनमें चर कोणों के वृत्तीय फलन (sine, cosine, tangent, cotangent, secant, cosecant) निहित होते हैं, त्रिकोणमितीय फलन कहलाते हैं।.

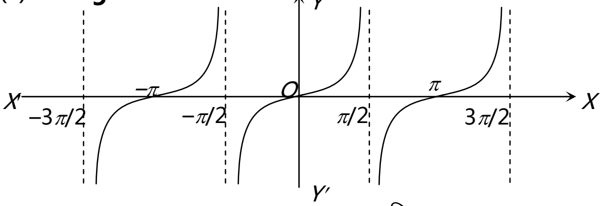
(a) **Sine** फलन :



(b) **Cosine फलन :**

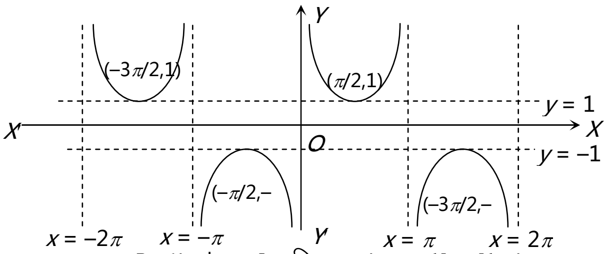


(c) **Tangent** फलन :



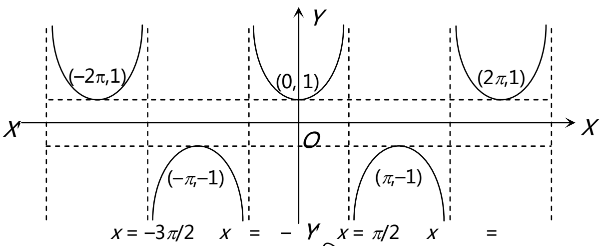
प्रान्त $= R - \{(2n+1)\,\pi/2 \mid n \in I\}$, परिसर = R

(d) **Cosecant** फलन :



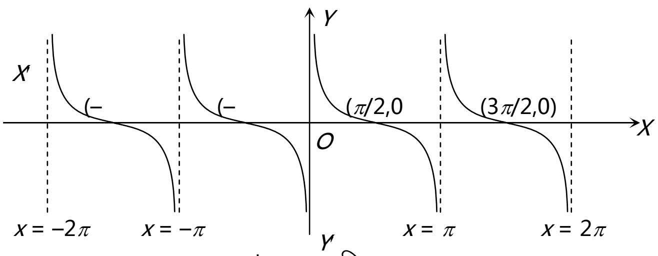
प्रान्त $= R - \{(n\pi | n \in I\}$, परिसर $= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

(e) **Secant** फलन :



प्रान्त $= R - \{(2n+1)\pi/2 \mid n \in I\}$, परिसर $= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

(f) **Cotangent** फलन :



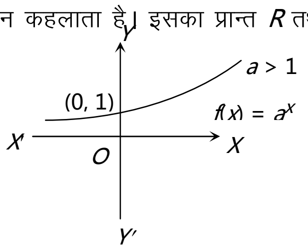
प्रान्त $= R - \{n\pi | n \in I\}$, परिसर $= R$

(ii) प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

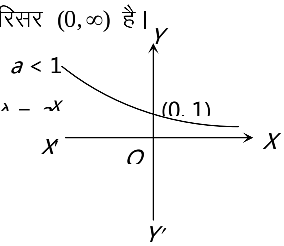
सारणी : **21.1**

फलन (Function)	प्रान्त (Domain)	परिसर (Range)	फलन की परिभाषा (Definition of the function)
$\sin^{-1} x$	$[-1,1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$y = \sin^{-1} x$ $\Leftrightarrow x = \sin y$
$\cos^{-1} x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$y = \cos^{-1} x$ $\Leftrightarrow x = \cos y$
$\tan^{-1} x$	$(-\infty,\infty)$या R	$(-\pi/2, \pi/2)$	$y = \tan^{-1} x$ $\Leftrightarrow x = \tan y$
$\cot^{-1} x$	$(-\infty,\infty)$ या R	$(0, \pi)$	$y = \cot^{-1} x$ $\Leftrightarrow x = \cot y$
$\operatorname{cosec}^{-1} x$	$R - (-1, 1)$	$[-\pi/2, \pi/2] - \{0\}$	$y = \operatorname{cosec}^{-1} x$ $\Leftrightarrow x = \operatorname{cosec} y$
$\sec^{-1} x$	$R - (-1, 1)$	$[0, \pi] - [\pi/2]$	$y = \sec^{-1} x$ $\Leftrightarrow x = \sec y$

(iii) **चरघातांकी फलन :** माना $a (\neq 1)$ एक धनात्मक वास्तविक संख्या है, तब $f : R \to (0, \infty)$ जो $f(x) = a^x$ द्वारा परिभाषित है; चरघातांकी फलन कहलाता है। इसका प्रान्त R तथा परिसर $(0, \infty)$ है।

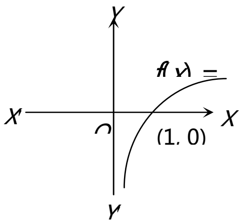


$f(x) = a^x$ का ग्राफ, $a > 1$

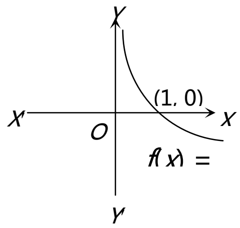


$f(x) = a^x$ का ग्राफ, $a < 1$

(iv) **लघुगणकीय फलन :** माना $a (\neq 1)$ एक धनात्मक वास्तविक संख्या है, तब $f : (0, \infty) \to R$ जो कि $f(x) = \log_a x$ द्वारा परिभाषित है, लघुगणकीय फलन कहलाता है।



$f(x) = \log_a x$, का ग्राफ, जब $a > 1$

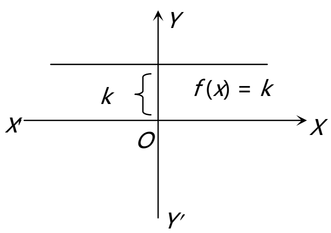


$f(x) = \log_a x$, का ग्राफ, जब $a < 1$

(8) **स्पष्ट तथा अस्पष्ट फलन** (Explicit and Implicit function)**:** यदि किसी फलन को स्वतंत्र चर के पदों में सीधे ही व्यक्त कर सके, तो यह स्पष्ट फलन कहलाता है। अस्पष्ट फलन वह है, जिसमें फलन को स्वतंत्र चर या चरों के पदों में व्यक्त न किया जा सके।

उदाहरणार्थ : $y = \sin^{-1} x + \log x$ स्पष्ट फलन है, जबकि $x^2 + y^2 = xy$ तथा $x^3 y^2 = (a-x)^2 (b-y)^2$ अस्पष्ट फलन है।

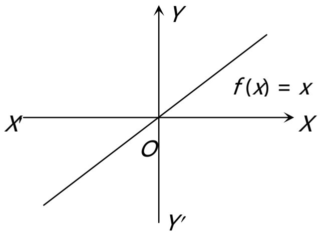
(9) **अचर फलन** (Constant function) **:** माना k एक स्थिर वास्तविक संख्या है। एक ऐसे फलन पर विचार कीजिए जो कि प्रत्येक वास्तविक संख्या x को इस अचर संख्या α की सहचारी (associate) करता है। तब यह फलन $R \to R$ एक अचर फलन (constant function) कहलाता है। अचर फलन में x के प्रत्येक मान के लिए, y या $f(x)$ का मान सदैव स्थिर रहता है। कभी-कभी इस अचर फलन को $f(x) = k \; \forall x \in R$ या अधिक संक्षेप में



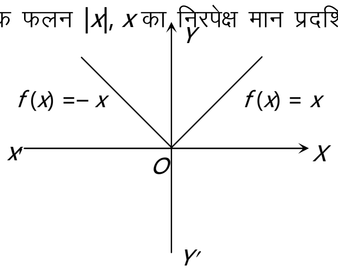
$f(x)=k$ या इससे भी अधिक संक्षेप में अचर फलन *k* से प्रदर्शित करते हैं। अचर फलन *k* का डोमेन स्पष्टतः *R* है तथा (रेंज) परिसर {*k*} है। अचर फलन का ग्राफ *X*-अक्ष के समान्तर सरल रेखा होती है जो कि *k* के धनात्मक या ऋणात्मक मान के अनुसार, *X* अक्ष के ऊपर या नीचे हो सकती है। यदि $k=0$ तब सरल रेखा *x* अक्ष के सम्पाती होती है।

(10) **तत्समक फलन** (Identity function)**:** वह फलन, जो $f(x)=x$; $x\in R$ द्वारा परिभाषित हो, तत्समक फलन कहलाता है। स्पष्टतः तत्समक फलन का प्रान्त तथा परिसर *R* होता है।

तत्समक फलन का ग्राफ मूलबिन्दु से गुजरने वाली सरल रेखा है, जो कि *x* अक्ष की धनात्मक दिशा से 45° का कोण बनाती है।

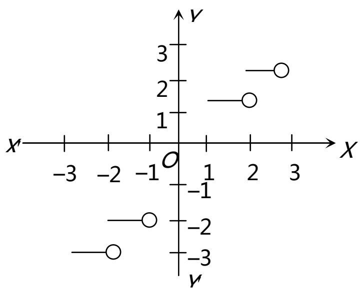


(11) **मापांक फलन** (Modulus function) **:** प्रत्येक वास्तविक संख्या *x* के लिए मापांक फलन |*x*|, *x* का निरपेक्ष मान प्रदर्शित करता है।

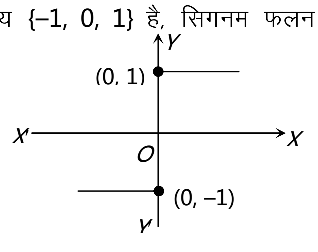


उदाहरणार्थ, $f(x)=|x|$, जहाँ $f(x)=|x|=\begin{cases} x, & \text{यदि } x\ge 0 \\ -x, & \text{यदि } x<0 \end{cases}$, |*x*| का डोमेन *R* है तथा रेंज R^+ है।

(12) **महत्तम पूर्णांक फलन** (The Greatest integer function) **:** यदि *x* वास्तविक संख्या है, तो ऐसे महत्तम पूर्णांक को जो *x* से बड़ा न हो, हम [*x*] से निरूपित करते हैं। महत्तम पूर्णांक का डोमेन *R* तथा रेंज **I** होता है। उदाहरणार्थ [1.1] = 1, [2.2] = 2, [– 0.9] = –1, [– 2.1] = –3 इत्यादि। फलन *f* जो $f(x)=[x]$ (जबकि $x\in R$) द्वारा परिभाषित है, महत्त्म पूर्णांक फलन कहलाता है।



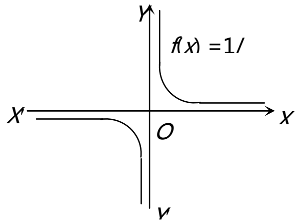
(13) **सिगनम फलन** (Signum function) **:** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{जब } x\ne 0 \\ 0, & \text{जब } x=0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन *f*, जहाँ |*x*| एक मापांक (modulus) फलन है जिसका प्रान्त (डोमेन) वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा रेंज (range) समुच्चय {–1, 0, 1} है, सिगनम फलन



कहलाता है। सांकेतिक रूप में इसे निम्न प्रकार लिख सकते हैं; $f(x)=\text{sgn}(x)$

जहाँ $\text{sgn}(x)=\begin{cases} 1, \text{ यदि } x>0 \\ 0, \text{ यदि } x=0 \\ -1, \text{ यदि } x<0 \end{cases}$

(14) **प्रतिलोम फलन** (Inverse function)**:** यदि *a* शून्येतर वास्तविक संख्या है तो $\dfrac{1}{a}$ को *a* का प्रतिलोम कहते हैं। शून्य का प्रतिलोम परिभाषित नहीं है। फलन जो प्रत्येक शून्येतर वास्तविक संख्या को इसके प्रतिलोम के सहचारी $\dfrac{1}{x}$ से प्रदर्शित किया जाता है। इसे $f(x)=\dfrac{1}{x}, x\ne 0$ से



परिभाषित करते हैं। उपर्युक्त तीनों उदाहरणों की भाँति इसका डोमेन *R* नहीं है। यहाँ डोमेन $R-\{0\}$ है।

(15) **घात फलन** (Power function) **:** एक फलन $f:R\to R$ जो कि $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in R$ द्वारा परिभाषित है, घात फलन कहलाता हैं।

सारणी : 21. 2 मानक फलनों के प्रान्त (Domain) तथा परिसर (Range)

फलन (Function)	प्रान्त (Domain)	परिसर(Range)
बहुपद फलन	*R*	*R*
तत्समक फलन *x*	*R*	*R*
अचर फलन *K*	*R*	{*K*}
प्रतिलोम फलन $\frac{1}{x}$	R_0	R_0
$x^2, \|x\|$	*R*	$R^+\cup\{0\}$
$x^3, x\|x\|$	*R*	*R*
सिग्नम फलन	*R*	{–1, 0, 1}
$x+\|x\|$	*R*	$R^+\cup\{0\}$
$x-\|x\|$	*R*	$R^-\cup\{0\}$
$[x]$	*R*	*I*
$x-[x]$	*R*	[0, 1)
$\sqrt{x}$	[0, ∞)	[0, ∞]
a^x	*R*	R^+
$\log x$	R^+	*R*
$\sin x$	*R*	[–1, 1]
$\cos x$	*R*	[–1, 1]
$\tan x$	$R-\left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$	*R*
$\cot x$	$R-\{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\}$	*R*
$\sec x$	$R-\left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$	$R-(-1, 1)$

$\text{cosec}\, x$	$R-\{0, \pm\pi, \pm 2\pi, ...\}$	$R-(-1, 1)$
$\sin^{-1} x$	$[-1, 1]$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1} x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1} x$	R	$\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\cot^{-1} x$	R	$(0, \pi)$
$\sec^{-1} x$	$R-(-1,1)$	$[0, \pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$\text{cosec}^{-1} x$	$R-(-1,1)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$

सम और विषम फलन (Even and Odd function)

(1) **सम फलन** : फलन $f(x)$ को x का समफलन कहते है। यदि x के सभी मानों के लिए $f(-x) = f(x)$

उदाहरणार्थ, $f(x) = e^x + e^{-x}$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = x^2 \cos x$ सभी समफलन है।

(2) **विषम फलन** : फलन $f(x)$ को x का विषम फलन कहते हैं। यदि x के सभी मानों के लिए $f(-x) = -f(x)$

उदाहरणार्थ: $f(x) = e^x - e^{-x}$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x \cos x$, $f(x) = x^2 \sin x$ सभी विषम फलन हैं।

सम तथा विषम फलनों के गुणधर्म

- समफलन का ग्राफ सदैव y-अक्ष के परितः सममित होता है।
- विषम फलन का ग्राफ सदैव मूल बिन्दु के परितः सममित होता है।
- दो सम फलनों का गुणनफल सदैव समफलन होता है।
- समफलनों का योग तथा अंतर सम फलन होता है।
- विषम फलनों का योग तथा अंतर विषम फलन होता है।
- दो विषम फलनों का गुणनफल सम फलन होता है।
- सम और विषम फलनों का गुणनफल विषम फलन होता है।
- यह आवश्यक नहीं है कि प्रत्येक फलन या तो सम होगा अथवा विषम कुछ फलन ऐसे भी होते हैं जो न तो सम होते है और न ही विषम उदाहरणार्थ, $f(x) = x^2 + x^3$, $f(x) = \log_e x$, $f(x) = e^x$.
- सम तथा विषम फलन का योगफल न तो सम और न ही विषम फलन होता है।
- शून्य फलन $f(x) = 0$ केवल एक ही ऐसा फलन है जो सम तथा विषम दोनों फलन है।

आवर्ती फलन (Periodic function)

एक फलन $f(x)$ को आवर्ती फलन कहते हैं, यदि एक निश्चित अन्तराल के बाद इसके प्रत्येक मान की पुनरावृत्ति होती है। यदि एक ऐसी धनात्मक वास्तविक संख्या T विद्यमान हो कि, $f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = f(x+3T) = ...$, $\forall x$. $T, 2T, 3T$,...... तब इन सभी आवर्तनांकों के न्यूनतम मान को फलन $f(x)$ का मूल आर्वतनांक या केवल आर्वतनांक कहते हैं।

संयुक्त फलन (Composite function)

यदि $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ दो फलन इस प्रकार हैं कि परास $f \subseteq$ प्रांत g, तो f और g के संयुक्त फलन को gof अथवा gf से निरूपित करते हैं तथा $gof(x) = g[f(x)], \forall x \in f$ का प्रांत

फलनों के संयोजन के गुणधर्म :

(i) f तथा g सम फलन है $\Rightarrow$ fog सम फलन है

(ii) f तथा g विषम फलन है $\Rightarrow$ fog विषम फलन है

(iii) f सम तथा g विषम फलन है $\Rightarrow$ fog सम फलन है

(iv) f विषम तथा g सम फलन है $\Rightarrow$ fog सम फलन है

(v) फलनों का संयोजन क्रम विनिमेय नियम का पालन नहीं करता है अर्थात्, $fog \neq gof$

(vi) फलनों का संयोजन साह्चर्य नियम का पालन करता है अर्थात् $(fog)oh = fo(goh)$

(vii) यदि $f: A \to B$ एकैकी आच्छादक तथा $g: B \to A$, f का व्युत्क्रम फलन है तब $fog = I_B$ तथा $gof = I_A$.

जहाँ I_A तथा I_B क्रमशः समुच्चय A तथा B के तत्समक फलन हैं।

(viii) यदि $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ दो एकैकी आच्छादक हैं तब $gof: A \to C$ एकैकी आच्छादक है तथा $(gof)^{-1} = (f^{-1}og^{-1})$

(ix) $fog \neq gof$ किंतु यदि, $fog = gof$ तब या तो $f^{-1} = g$ या $g^{-1} = f$, साथ ही $(fog)(x) = (gof)(x) = (x)$ ।

(x) $gof(x)$, से तात्पर्य फलन $f(x)$ के g-प्रतिबिंब से है, जहाँ $f(x)$, अवयव $x \in A$ का f-प्रतिबिंब है।

(xi) फलन gof का अस्तित्व तभी होगा जब f की परास, g के प्रांत का उपसमुच्चय होगी।

(xii) fog का अस्तित्व नहीं होगा यदि g की परास, f के प्रांत का उपसमुच्चय नहीं है।

(xiii) fog तथा gof को सदैव परिभाषित नहीं कर सकते।

(xiv) यदि f तथा g दोनों ही एकैकी हैं, तब fog तथा gof भी एकैकी होंगे।

(xv) यदि f तथा g दोनों आच्छादक हैं तब gof आच्छादक होगा।

प्रतिलोम फलन (Inverse function)

यदि $f: A \to B$, A से B पर एक एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है, तब प्रत्येक $b \in B$ के लिये $f^{-1}(b) \in A$ अद्वितीय होगा। अतः $f^{-1}: B \to A$ एक फलन है जो निम्न प्रकार परिभाषित है: $f^{-1}(b) = a$ यदि और केवल यदि $f(a) = b$, तब f^{-1}, f का प्रतिलोम फलन कहलाता है। यदि f का प्रतिलोम फलन परिभाषित है, तब f प्रतिलोमीय फलन (Invertiable) कहलाता है।

$f^{-1}: B \to A,\ f^{-1}(b) = a \Rightarrow f(a) = b$

प्रतिलोम फलन के गुणधर्म :

(i) एकैकी आच्छादक (bijection) फलन का प्रतिलोम भी एकैकी आच्छादक फलन होता है।

(ii) एकैकी आच्छादक फलन का व्युत्क्रम अद्वितीय होता है।

(iii) $(f) = f$

(iv) यदि f तथा g दो एकैकी आच्छादक फलन इस प्रकार हैं कि (gof) का अस्तित्व है, तब $(gof) = fog$

(v) यदि $f: A \to B$ एकैकी आच्छादक फलन है तब $f: B \to A$, f का प्रतिलोम फलन है। $fof = I$ तथा $fof = I$, यहाँ I, समुच्चय A का तथा I, समुच्चय B का तत्समक फलन है।

सीमा

फलन की सीमा (Limit of a function)

माना $y = f(x)$, x का एक फलन है। यदि $x = a$ पर फलन $f(x)$ अनिर्धारित रूप ग्रहण करता है, तब हम फलन का मान ज्ञात करने के लिए 'a' का निकटतम मान लेते है। यदि यह मान एक निश्चित अद्वितीय संख्या की ओर अग्रसर हो, अर्थात् x, 'a' की ओर अग्रसर हो तो यह निश्चित संख्या $f(x)$ की $x = a$ पर सीमा कहलाती है तथा इसे हम $\lim_{x \to a} f(x)$ लिखते हैं।

(1) **वाम पक्ष तथा दक्षिण पक्ष सीमा :** a के बाँयी ओर a के निकटतम बिंदुओं पर चर फलन के मानों पर विचार करते हैं। यदि यह मान एक निश्चित अद्वितीय संख्या की ओर अग्रसर हो अर्थात् x, a की ओर अग्रसर हो, तब इस प्रकार प्राप्त अद्वितीय संख्या $f(x)$ की $x = a$ पर वाम पक्ष सीमा कहलाती है और संकेत रूप में इसे $f(a-0) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a-h)$ लिखते हैं।

इसी प्रकार $f(x)$ की $x = a$ पर दॉयी सीमा ज्ञात करते हैं, जिसे $f(a+0) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h)$ से व्यक्त करते हैं।

$$f(a+0) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h).$$

(2) **L.H.L. तथा R.H.L. को ज्ञात करने की विधि**

(i) फलन की दाँयी सीमा (R.H.L.) ज्ञात करने के लिए, x के स्थान पर $x + h$ लिखते हैं, जबकि बाँयी सीमा (L.H.L.) के लिए x के स्थान पर $x - h$ लिखते हैं।

(ii) इस प्रकार प्राप्त फलन में x को दिए हुए बिन्दु 'a' से प्रतिस्थापित करते हैं।

(iii) अब $h \to 0$ रखकर फलन की सीमा ज्ञात करते हैं।

s (4) **सीमा का अस्तित्व :** $\lim_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व होगा, जब

(i) $\lim_{x \to a^-} f(x)$ तथा $\lim_{x \to a^+} f(x)$ का अस्तित्व हो, अर्थात् L.H.L. तथा R.H.L. दोनों सीमाएँ विद्यमान हो।

(ii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ अर्थात् L.H.L. = R.H.L.

सीमाओं के मूलभूत प्रमेय
(Fundamental theorems on limits)

किसी फलन की सीमा ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित मूलभूत प्रमेय प्रयुक्त की जाती हैं। यदि $\lim_{x \to a}(f(x) = 1$ तथा $\lim_{x \to 0} g(x) = m$ (l तथा m वास्तविक संख्यायें है), तब

(1) $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = l + m$ (योग नियम)

(2) $\lim_{x \to a}(f(x) - g(x)) = l - m$ (अंतर नियम)

(3) $\lim_{x \to a}(f(x).g(x)) = l.m$ (गुणन नियम)

(4) $\lim_{x \to a} k\ f(x) = k.l$ (अचर गुणन नियम)

(5) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}, m \neq 0$ (विभाजन नियम)

(6) यदि $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ या $-\infty$, तब $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

(7) $\lim_{x \to a} \log\{f(x)\} = \log\{\lim_{x \to a} f(x)\}$

(8) यदि $f(x) \leq g(x)\ \ \forall\ x$, तब $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$

(9) $\lim_{x \to a}[f(x)]^{g(x)} = \{\lim_{x \to a} f(x)\}^{\lim_{x \to a} g(x)}$

(10) यदि p तथा q पूर्णांक हैं, तब $\lim_{x \to a}(f(x))^{p/q} = l^{p/q}$, $(l)^{p/q}$ एक वास्तविक संख्या है।

(11) यदि $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(m)$, $g(x) = m$. पर सतत् है अर्थात् $\lim_{x \to a} \ln[f(x)] = \ln(l)$, यदि $l > 0$.

सीमा ज्ञात करने की विधियाँ (Methods of evaluation of limits)

किसी फलन की सीमा ज्ञात करने की निम्नलिखित विधियाँ हैं।

(1) **बीजगणितीय सीमा :** माना $f(x)$ एक बीजीय फलन तथा 'a' एक वास्तविक संख्या है। तब $\lim_{x \to a} f(x)$ को बीजीय सीमा कहते हैं।

(i) **प्रत्यक्ष प्रतिस्थापन विधि :** दिए गए व्यंजक में बिन्दु के सीधे प्रतिस्थापन द्वारा एक निश्चित संख्या प्राप्त होती है। इस प्राप्त संख्या को दिए गए व्यंजक की सीमा कहते हैं।

(ii) **गुणनखण्ड विधि :** इस विधि में अंश तथा हर के गुणनखण्ड करके समान पदों का विलोपन करने के बाद शेष पद ही परिणाम होगा।

(iii) **परिमेयीकरण विधि :** इस विधि का उपयोग तभी होता है जब व्यंजक के अंश या हर या दोनों में भिन्नात्मक घातें (Fractional powers) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}$ इत्यादि हो, तब परिमेयीकरण के पश्चात् पदों के गुणनखण्ड करके, परिणाम प्राप्त करते हैं।

(iv) **$x \to \infty$ के रूप पर आधारित :** इस प्रकार के व्यंजकों को सर्वप्रथम $\dfrac{1}{x}$ के फलन के रूप में व्यक्त करते हैं। इसके बाद अनिर्धारित रूपों $\left(\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty} \text{ आदि}\right)$ को हटाने के पश्चात् $\dfrac{1}{x}$ को शून्य (0) से प्रतिस्थापित करते हैं।

(2) **त्रिकोणमितीय सीमा :** त्रिकोणमितीय सीमा ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित परिणाम महत्वपूर्ण है।

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$

(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=1=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin^{-1}x}$

(iv) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=1=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan^{-1}x}$

(v) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^0}{x}=\frac{\pi}{180}$ (vi) $\lim_{x\to 0}\cos x=1$

(vii) $\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}=1$ (viii) $\lim_{x\to a}\frac{\tan(x-a)}{x-a}=1$

(ix) $\lim_{x\to a}\sin^{-1}x=\sin^{-1}a, |a|\le 1$

(x) $\lim_{x\to a}\cos^{-1}x=\cos^{-1}a; |a|\le 1$

(xi) $\lim_{x\to a}\tan^{-1}x=\tan^{-1}a; -\infty<a<\infty$

(xii) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=0$

(xiii) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(1/x)}{(1/x)}=1$

(3) **लघुगणकीय सीमा :** लघुगणकीय सीमा ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्रों का उपयोग करते हैं।

(i) $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-$.......... ..अनन्त पदों तक, जहाँ $-1<x\le 1$ तथा यह व्यंजक तभी सत्य है, यदि आधार (base) e हो।

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$ (iii) $\lim_{x\to e}\log_e x=1$

(iv) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x)}{x}=-1$ (v) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e, a>0, \ne 1$

(4) **चरघातांकी सीमा :** (i) **श्रेणी के विस्तार पर आधारित :** हम जानते हैं कि $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+$.......... ...$\infty$

चरघातांकी सीमा ज्ञात करने के लिए निम्न परिणामों का उपयोग करते हैं।

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ (b) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log_e a$

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\lambda x}-1}{x}=\lambda \ (\lambda\ne 0)$

(ii) **1^∞ के रूप पर आधारित %** चरघातांकी रूप 1^∞ ज्ञात करने के लिए निम्न परिणामों का उपयोग करते हैं।

(a) यदि $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$,

तब $\lim_{x\to a}\{1+f(x)\}^{1/g(x)}=e^{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}}$,

अथवा जब $\lim_{x\to a}f(x)=1$ तथा $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ तब $\lim_{x\to a}\{f(x)\}^{g(x)}=$ $\lim_{x\to a}[1+f(x)-1]^{g(x)}=e^{\lim_{x\to a}(f(x)-1)g(x)}$ $e^{\lim_{x\to a}(f(x)-1)g(x)}$

(b) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ (c) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

(d) $\lim_{x\to 0}(1+\lambda x)^{1/x}=e^\lambda$ (e) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\lambda}{x}\right)^x=e^\lambda$

- $\lim_{x\to\infty}a^x=\begin{cases}\infty, \text{if } a>1\\ 0, \text{if } a<1\end{cases}$ अर्थात् $a^\infty=\infty$, यदि $a>1$ तथा $a^\infty=0$ यदि $a<1$.

(5) **L' हॉस्पीटल नियम :** यदि $f(x)$ तथा $g(x)$, x के दो फलन इस प्रकार है, कि

(i) $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$

(ii) $x=a$ पर दोनों फलन सतत् है।

(iii) $x=a$ पर दोनों फलन अवकलनीय है।

(iv) $f'(x)$ तथा $g'(x)$ बिन्दु $x=a$ पर सतत् है, तब $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ इस प्रकार है कि $g'(a)\ne 0$

यदि $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ और $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ हो, तब भी उपरोक्त नियम लागू होता है।

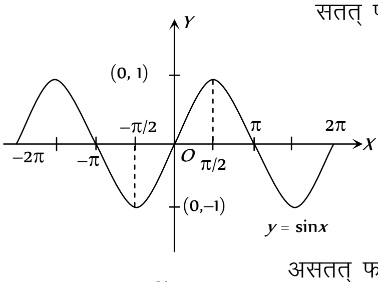
यदि $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ का रूप अनिर्धारित है, अर्थात् $\frac{0}{0}$ या $\frac{\infty}{\infty}$ है तथा $f'(x), g'(x)$ L' हॉस्पीटल नियम के सभी प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करता है, तब इस नियम के सभी पदों की $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ पर पुनरावृत्ति कर सकते है, अर्थात् $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$. कभी-कभी इस प्रक्रिया को एक से अधिक बार तब तक दोहराते है, जब तक कि सीमा का मान प्राप्त न हो जाये।

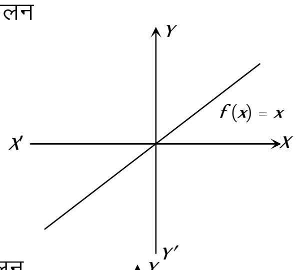
सांतत्य

प्रस्तावना (Introduction)

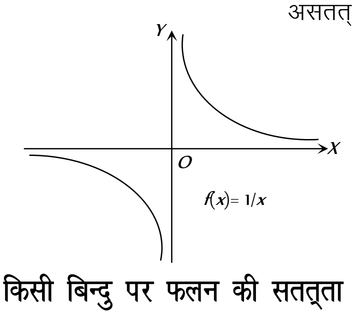
सततता का अर्थ है 'बिना किसी व्यवधान और रिक्तता के'। यदि किसी फलन के आरेख (ग्राफ) में कोई व्यवधान तथा रिक्तता नहीं है, तब उसे सतत् फलन कहते हैं। फलन जो कि सतत् नहीं होता है उसे असतत् फलन कहते हैं। जब फलन के आरेख का अध्ययन करते हैं, तब हम देखते हैं कि फलन $\sin x$, x, $\cos x$, e^x आदि का आरेख (ग्राफ) सतत् होता है, जबकि महत्तम पूर्णांक फलन $[x]$ प्रत्येक पूर्णांक बिन्दु पर असतत् है। अतः यह फलन असतत् फलन कहलाता है। इसी प्रकार, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\frac{1}{x}$ आदि भी असतत् फलन है।

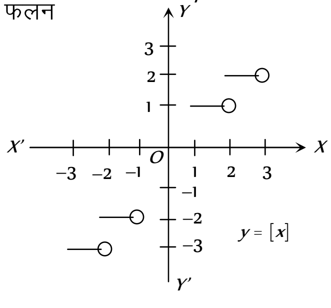
सतत् फलन





असतत् फलन





किसी बिन्दु पर फलन की सततता

(Continuity of a function at a point)

किसी बिन्दु $x = a$ पर फलन $f(x)$ को उसके डोमेन में सतत् कहते हैं, यदि और केवल यदि $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, अर्थात् फलन $f(x)$, $x = a$ पर सतत् है, तब वह निम्नलिखित तीन स्थितियों को संतुष्ट करता है :

(1) $f(a)$ का अस्तित्व हो ('a', फलन $f(x)$ के डोमेन में हो)

(2) $\lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व हो, अर्थात् $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$ अथवा R.H.L. = L.H.L.

(3) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (फलन का मान, सीमा के बराबर हो)

सांतत्य की कौशी (Cauchy's) **परिभाषा :** कोई फलन f अपने प्रान्त D में किसी बिन्दु a पर सतत् कहलाता है, यदि और केवल यदि सभी $\varepsilon > 0$ के लिये एक $\delta > 0$ (ε पर निर्भर) का अस्तित्व इस प्रकार हो कि $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

इस परिभाषा की सीमा की परिभाषा से तुलना करने पर फलन $f(x)$, $x = a$ पर सतत् होगा, यदि $\lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व हो एवं यह $f(a)$ के बराबर हो अर्थात् $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a+} f(x)$.

वाम पक्ष तथा दक्षिण पक्ष की सततृता
(Continuity from left and right)

फलन $f(x)$

(1) बाँये पक्ष से सतत् होगा यदि बिन्दु $x = a$ पर $\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$ है।

(2) दाँये पक्ष से सतत् होगा यदि बिन्दु $x = a$ पर $\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$ है।

अतः फलन $f(x)$, बिन्दु $x = a$ पर सतत् होगा, यदि उसकी दाँये पक्ष से तथा बाँये पक्ष से सततृता एक समान हो।

सतत् फलनों के गुणधर्म : माना $f(x)$ तथा $g(x)$, $x = a$ पर दो सतत् फलन हैं, तब

(i) $cf(x)$, $x = a$ पर सतत् होगा, जहाँ c एक अचर है।

(ii) $f(x) \pm g(x)$, $x = a$ पर सतत् होगा।

(iii) $f(x).\ g(x)$, $x = a$ पर सतत् होगा।

(iv) $f(x)/g(x)$, $x = a$ पर सतत् होगा लेकिन $g(a) \neq 0$.

असतत् फलन (Discontinuous function)

कोई फलन 'f' अपने प्रान्त D के किसी बिन्दु $x = a$ पर असतत् कहलाता है यदि इस बिन्दु पर सतत् नहीं हैं तथा बिन्दु 'a' को असततृता का बिन्दु कहते हैं।

असततृता निम्न में से किसी भी एक स्थिति में हो सकती है :

(i) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ या $\lim_{x\to a^-} f(x)$ या दोनों का अस्तित्व न हो।

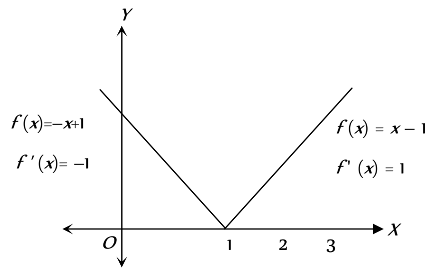
(ii) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ व $\lim_{x\to a^-} f(x)$ का अस्तित्व हो परन्तु आपस में बराबर न हों।

(iii) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ व $\lim_{x\to a^-} f(x)$ दोनों का अस्तित्व हो परन्तु इनमें कोई एक या दोनों $f(a)$ के बराबर न हों।

अवकलनीयता

किसी बिन्दु पर फलन की अवकलनीयता
(Differentiability of a function at a point)

अतः $f(x)$ बिन्दु P पर अवकलनीय है, यदि और केवल यदि बिन्दु P पर अद्वितीय स्पर्श रेखा का अस्तित्व है, दूसरे शब्दों में $f(x)$ बिन्दु P पर अवकलनीय है, यदि और केवल यदि बिन्दु P वक्र के सिरे पर स्थित नहीं है अर्थात् "फलन उन बिन्दुओं पर अवकलनीय नहीं है, जिन पर फलन के ग्राफ में छिद्र तथा तीक्ष्ण सिरे प्राप्त हो अर्थात् फलन उस बिन्दु पर असतत् हो।"



फलन $f(x) = |x - 1|$ का ग्राफ खींचने पर हम देखते हैं, कि $f(x)$, $x = 1$ पर अवकलनीय नहीं है, क्योंकि $g(x)$, $x = 1$ पर तीक्ष्ण सिरा प्राप्त करता है।

(1) **दाँया अवकलज :** $x = a$ पर $f(x)$ के दाँये अवकलज को $x = a$ अथवा $f'(a+)$ से प्रदर्शित करते हैं तथा यह $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ होता है।

(2) **बाँया अवकलज :** $x = a$,पर $f(x)$ के बाँये अवकलज को $f'(a-0)$ अथवा $f'(a-)$ से प्रदर्शित करते हैं तथा यह $\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$ होता है।

(3) फलन $f(x)$, बिन्दु $x = a$ पर निश्चित रूप से अवकलनीय है, यदि $f'(a+0) = f'(a-0)$ = परिमित है।

अर्थात् $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$ = परिमित तथा उभयनिष्ठ सीमा को $x = a$ पर $f(x)$ का अवकलज कहते हैं, जिसे $f'(a)$ से प्रदर्शित करते हैं। स्पष्ट है कि $f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ {$x \to a$ जैसे बाँयी ओर से, वैसे ही दाँयी ओर से}

(4) **अवकलनीयता के कुछ महत्वपूर्ण निष्कर्ष :**

(i) प्रत्येक बहुपद फलन, प्रत्येक $x \in R$ के लिए अवकलनीय होता है।

(ii) चरघातांकी फलन $a^x, a > 0$ प्रत्येक $x \in R$ के लिए अवकलनीय होता है।

(iii) प्रत्येक अचर, $x \in R$ के लिए अवकलनीय होता है।

(iv) लघुगणकीय फलन अपने डोमेन के प्रत्येक बिन्दु पर अवकलनीय होता है।

(v) त्रिकोणमितीय तथा प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन अपने डोमेन में अवकलनीय होते हैं।

(vi) दो अवकलनीय फलनों का योग, अन्तर, गुणा तथा भाग भी अवकलनीय होता है।

(vii) अवकलनीय फलनों का संयोजन भी अवकलनीय होता है।

Tips & Tricks

✍ यदि किसी फलन का प्रान्त (domain) एक चतुर्थांश में हो तो त्रिकोणमितीय फलन सदैव एकैकी होगा।

✍ यदि त्रिकोमितीय फलन किन्ही दो क्रमागत चतुर्थांशों में अपने चिन्ह् बदलता है तब यह एकैकी होगा लेकिन यदि यह अपने चिन्ह नहीं बदलता है तब यह बहुएकैकी होगा।

✍ तीन क्रमागत चतुर्थांशों में त्रिकोणमितीय फलन सदैव बहुएकैकी होते हैं।

✍ यदि कोई फलन अपने प्रांत में पूर्णतः वर्धमान अथवा ह्रासमान है तो फलन एकैकी होगा।

✍ कोई सतत फलन जिसका कम से कम एक उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मान हो बहुएकैकी फलन होगा।

✍ कोई बहुपद फलन $f: R \to R$ आच्छादक होगा यदि f विषम घात का फलन होगा तथा अंतर्क्षेपी होगा यदि f समघात का फलन होगा।

✍ किसी अंतर्क्षेपी फलन के सहडोमेन को मूल फलन की रेंज की तरह पुनः परिभाषित कर आच्छादक फलन बना सकते है।

✍ यदि $f(x)$ का आवर्तनांक T है तो $1/f(x)$ का आवर्तनांक भी T होगा।

✍ यदि $f(x)$ का आवर्तनांक T है तो $\sqrt{f(x)}$ का आवर्तनांक भी T होगा।

✍ $x-[x]$ का आवर्तनांक 1 होता है। बीजगणितीय फलन $\sqrt{x}, x^2, x^3+5$ इत्यादि के आवर्तनांक का अस्तित्व नहीं है।

✍ यदि $\lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है, तब हम उस असततता को दूर नहीं कर सकते, यह दूर न करने योग्य (non-removable) असततता अथवा आवश्यक असततता होती है।

✍ यदि फलन (f), बिन्दु $x = c$ पर सतत् है तथा दूसरा फलन (g), बिन्दु $x = c$ पर असतत् है, तब

(a) $f+g$ तथा $f-g$ असतत् है। (b) $f.g$ सतत् हो सकता है।

✍ यदि f तथा g, $x = c$ पर असतत् है, तब $f+g$, $f-g$ तथा fg भी सतत् हो सकते हैं।

✍ बिन्दु फलन (जिसके डोमेन तथा रेंज में केवल एक मान होता है) असतत् फलन होता है।

☞ यदि कोई फलन किसी बिन्दु पर अवकलनीय है तब वह उस बिन्दु पर सतत् भी होगा।

अर्थात् अवकलनीयता $\Rightarrow$ सततता, परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है।

✍ यदि एक फलन 'f', $x = a$ पर अवकलनीय नहीं है, किंतु सतत् है, तब वह $x = a$ पर ग्राफ में तीक्ष्ण सिरा प्राप्त करता है।

✍ यदि $x = a$ पर $f(x)$ तथा $g(x)$ दोनों ही अवकलनीय नहीं है, तब $x = a$ पर गुणनफल $f(x).g(x)$ अवकलनीय हो सकता है।

✍ यदि $x = a$ पर $f(x)$ अवकलनीय है तथा $g(x)$ अवकलनीय नहीं है, तब योग फलन $f(x)+g(x)$; $x = a$ पर अवकलनीय नहीं होगा।

✍ यदि $f(x)$ तथा $g(x)$ दोनों $x = a$ पर अवकलनीय नहीं है, तब योग फलन अवकलनीय फलन हो सकता है।

Ordinary Thinking
Objective Questions

फलन

1. यदि $f(x)=\cos(\log x)$, तब $f(x)f(y)-\frac{1}{2}[f(x/y)+f(xy)]=$

[IIT 1983; RPET 1995; MP PET 1995; Karnataka CET 1999; UPSEAT 2001]

(a) -1 (b) $\frac{1}{2}$

(c) -2 (d) इनमें से कोई नहीं

2. यदि $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$, तब $f[f(\cos 2\theta)]=$

[MP PET 1994, 2001; Pb. CET 2002]

(a) $\tan 2\theta$ (b) $\sec 2\theta$

(c) $\cos 2\theta$ (d) $\cot 2\theta$

3. यदि $f(x)=\sin\log x$, तब $f(xy)+f\left(\frac{x}{y}\right)-2f(x).\cos\log y$ का मान है [Orissa JEE 2004]

(a) 1 (b) 0

(c) –1 (d) $\sin\log x.\cos\log y$

4. b व c के वे मान, जो कि सर्वसमिका $f(x+1)-f(x)=8x+3$ को संतुष्ट करते हैं, जहाँ $f(x)=bx^2+cx+d$, हैं [Roorkee 1992]

(a) $b=2, c=1$ (b) $b=4, c=-1$

(c) $b=-1, c=4$ (d) $b=-1, c=1$

5. दिया गया फलन है $f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$, $(a>2)$ तब $f(x+y)+f(x-y)=$

(a) $2f(x).f(y)$ (b) $f(x).f(y)$

(c) $\frac{f(x)}{f(y)}$ (d) इनमें से कोई नहीं

6. यदि $f(x)=\frac{x}{x-1}$, तब $\frac{f(a)}{f(a+1)}=$ [MP PET 1996]

(a) $f(-a)$ (b) $f\left(\frac{1}{a}\right)$

(c) $f(a^2)$ (d) $f\left(\frac{-a}{a-1}\right)$

7. यदि $f(x)=\cos(\log x)$, तब $f(x^2)f(y^2)-\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x^2}{2}\right)+f\left(\frac{x^2}{y^2}\right)\right]$ का मान है [MNR 1992]

(a) –2 (b) –1

(c) 1/2 (d) इनमें से कोई नहीं

8. $\log x^2$ का तुल्य फलन है [MP PET 1997]

(a) $2\log x$ (b) $2\log|x|$

(c) $|\log x^2|$ (d) $(\log x)^2$

9. यदि $f(x) = \log\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$, तब $f\left[\frac{2x}{1+x^2}\right]$ बराबर है

[MP PET 1999; RPET 1999; UPSEAT 2003]

(a) $[f(x)]^2$ (b) $[f(x)]^3$

(c) $2f(x)$ (d) $3f(x)$

10. यदि $\phi(x) = a^x$, तब $\{\phi(p)\}^3$ बराबर है **[MP PET 1999]**

(a) $\phi(3p)$ (b) $3\phi(p)$

(c) $6\phi(p)$ (d) $2\phi(p)$

11. यदि $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$, तब $f[f\{f(x)\}]$ का मान होगा **[RPET 1996]**

(a) x (b) $-x$

(c) $\frac{x}{2}$ (d) $-\frac{1}{x}$

12. यदि $f(x) = \cos(\log x)$, तब $f(x).f(4) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{4}\right) + f(4x)\right]$ का मान होगा **[Kurukshetra CEE 1998]**

(a) 1 (b) –1

(c) 0 (d) ± 1

13. यदि $f(x) = \frac{x - |x|}{|x|}$, तब $f(-1) =$ **[SCRA 1996]**

(a) 1 (b) –2

(c) 0 (d) +2

14. यदि $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 3x + 4$, तब $x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)$ है

[SCRA 1996]

(a) $f(-x)$ (b) $\frac{1}{f(x)}$

(c) $\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$ (d) $f(x)$

15. यदि फलन $f: R \to R$, $f(x) = 2x + |x|$ हो, तो $f(2x) + f(-x) - f(x) =$ **[EAMCET 2000]**

(a) $2x$ (b) $2|x|$

(c) $-2x$ (d) $-2|x|$

16. यदि $f(x + ay, x - ay) = axy$, तब $f(x, y) =$

[AMU 2001]

(a) xy (b) $x^2 - a^2y^2$

(c) $\frac{x^2 - y^2}{4}$ (d) $\frac{x^2 - y^2}{a^2}$

17. यदि $f(x) = \cos[\pi^2]x + \cos[-\pi^2]x$, तब **[Orissa JEE 2002]**

(a) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ (b) $f(-\pi) = 2$

(c) $f(\pi) = 1$ (d) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

18. यदि $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 2\sqrt{2x-4}}} + \frac{1}{\sqrt{x - 2\sqrt{2x-4}}}$, $x > 2$ के लिए, तब $f(11) =$ **[EAMCET 2003]**

(a) 7/6 (b) 5/6

(c) 6/7 (d) 5/7

19. यदि $e^{f(x)} = \frac{10+x}{10-x}$, $x \in (-10, 10)$ तथा $f(x) = kf\left(\frac{200x}{100+x^2}\right)$, तब $k =$

(a) 0.5 (b) 0.6

(c) 0.7 (d) 0.8

20. यदि $f(x) = 2\sin x$, $g(x) = \cos^2 x$, तो $(f+g)\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

(a) 1 (b) $\frac{2\sqrt{3}+1}{4}$

(c) $\sqrt{3} + \frac{1}{4}$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. फलन $y = f(x)$ का ग्राफ रेखा $x = 2$ के परितः सममित है, तब

(a) $f(x) = -f(-x)$ (b) $f(2+x) = f(2-x)$

(c) $f(x) = f(-x)$ (d) $f(x+2) = f(x-2)$

22. यदि $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{1}{y}$, तो $f(y) =$ **[MP PET 1995, 97]**

(a) x (b) $x+1$

(c) $x-1$ (d) $1-x$

23. यदि $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$, तब $x =$ **[AMU 2001]**

(a) $1/f(x)$ (b) $1/f(y)$

(c) $yf(x)$ (d) $f(y)$

24. यदि $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ प्रत्येक वास्तविक संख्याओं के लिए, तब f का न्यूनतम मान **[Pb. CET 2001]**

(a) अस्तित्व नहीं है क्योंकि f परिबद्ध है

(b) प्राप्त नहीं होता है यद्यपि f परिबद्ध है

(c) +1 है

(d) –1 है

25. $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$ एक समघात फलन है, जिसकी घात है

[Orissa JEE 2004]

(a) 1 (b) –1

(c) 2 (d) –2

26. माना x एक अशून्य परिमेय संख्या और y एक अपरिमेय संख्या है। तब xy है **[Orissa JEE 2004]**

(a) परिमेय (b) अपरिमेय

(c) अशून्य (d) इनमें से कोई नहीं

27. $x = -3$ के लिए व्यजंक $\left|\frac{3x^3+1}{2x^2+2}\right|$ का आंकिक मान है

[Orissa JEE 2004; UPSEAT 2004]

(a) 4 (b) 2

(c) 3 (d) 0

28. फलन $f : R \to R, f(x) = x^2, \forall x \in R$ के लिए है **[MP PET 1997]**

(a) एकैकी लेकिन आच्छादक नहीं

(b) आच्छादक लेकिन एकैकी नहीं

(c) एकैकी तथा आच्छादक

(d) न तो एकैकी न ही आच्छादक

29. दो फलन *g* और *f* इस प्रकार हैं कि *gof* एकैकी तथा आच्छादक दोनों हैं तो निम्न कथन सत्य है **[Kurukshetra CEE 1998]**

(a) *g* और *f* क्रमशः एकैकी तथा आच्छादक होंगे

(b) *g* एकैकी तथा आच्छादक होगा

(c) *f* एकैकी तथा आच्छादक होगा

(d) इनमें से कोई भी एकैकी तथा आच्छादक नहीं होगा

30. फलन जो [–1, 1] से [0, 2] पर प्रतिचित्रित करता है, होगा **[Kurukshetra CEE 1998]**

(a) एक रेखीय फलन (b) दो रेखीय फलन

(c) वृत्तीय फलन (d) इनमें से कोई नहीं

31. माना $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ यदि } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}, \text{ यदि } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$, तब *f* है **[SCRA 1996]**

(a) परिमेय फलन (b) त्रिकोणमितीय फलन

(c) स्टेप फलन (d) चरघातांकी फलन

32. फलन $f : R \to R, f(x) = x^2 + x$ है **[RPET 1999]**

(a) एकैकी आच्छादक (b) एकैकी अन्तर्क्षेपी

(c) बहुएकैकी आच्छादक (d) बहुएकैकी अन्तर्क्षेपी

33. प्रतिचित्रण $f : R \to R$ इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x) = \cos x, x \in R$, तब प्रतिचित्रण होगा **[UPSEAT 1999]**

(a) न तो अन्तर्क्षेपी (Into) और न आच्छादक (Onto)

(b) एकैकी (One-one mapping)

(c) आच्छादक (Onto mapping)

(d) एकैकी आच्छादक (One-one onto)

34. फलन $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$, जो $f : R \to R$ में परिभाषित है, है **[Roorkee 1999]**

(a) एकैकी लेकिन आच्छादक नहीं

(b) आच्छादक लेकिन एकैकी नहीं

(c) एकैकी तथा आच्छादक

(d) न एकैकी न आच्छादक

35. यदि $f : R \to R$, तब $f(x) = |x|$ है **[RPET 2000]**

(a) एकैकी लेकिन आच्छादक नहीं

(b) आच्छादक लेकिन एकैकी नहीं

(c) एकैकी एवं आच्छादक दोनों

(d) इनमें से कोई नहीं

36. निम्नलिखित में से कौनसा कथन अन्य कथनों से भिन्न है **[UPSEAT 2000]**

(a) $f : A \to B$

(b) $f : x \to f(x)$

(c) *A* से *B* में *f* एक प्रतिचित्रण है

(d) *A* से *B* में *f* एक फलन है

37. यदि फलन $f : N \to N$, $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in N$ के लिए परिभाषित हो, तो *f* होगा **[AMU 2000]**

(a) एकैकी आच्छादक

(b) बहुएकैकी आच्छादक

(c) एकैकी लेकिन आच्छादक नहीं

(d) इनमें से कोई नहीं

38. माना *X* तथा *Y* वास्तविक संख्याओं के समुच्चय *R* के दो उपसमुच्चय हैं। एक फलन $f : X \to Y$, $f(x) = x^2$, $x \in X$ के लिए एकैकी लेकिन आच्छादक नहीं होगा, यदि (यहाँ R^+ सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है) **[EAMCET 2000]**

(a) $X = Y = R^+$ (b) $X = R, Y = R^+$

(c) $X = R^+, Y = R$ (d) $X = Y = R$

39. समुच्चय *A* में 3 तथा *B* में 4 अवयव हैं, तब *A* से *B* में बनने वाले एकैकी प्रतिचित्रणों की संख्या होगी **[UPSEAT 2001]**

(a) 144 (b) 12

(c) 24 (d) 64

40. माना फलन $f : R \to R$ इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x) = \frac{x-m}{x-n}$, जबकि $m \ne n$, तब **[UPSEAT 2001]**

(a) *f* एकैकी आच्छादक फलन (One-one onto) है

(b) *f* एकैकी अन्तर्क्षेपी फलन (One-one into) है

(c) *f* बहुएकैकी आच्छादक फलन (Many one onto) है

(d) *f* बहुएकैकी अन्तर्क्षेपी फलन (Many one into) है

41. फलन $f : R \to R$, $f(x) = e^x$ है

[Karnataka CET 2002; UPSEAT 2002]

(a) आच्छादक फलन (b) बहुएकैकी फलन

(c) एकैकी तथा अन्तर्क्षेपी (d) बहुएकैकी तथा आच्छादक

42. निम्न में से कौनसा फलन वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में एकैकी आच्छादक है **[Kerala (Engg.) 2002]**

(a) $2x - 5$ (b) $|x|$

(c) x^2 (d) $x^2 + 1$

43. माना $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$, $|x| > 2$, तब फलन $f : (-\infty, -2] \cup [2, \infty) \to (-1, 1)$ है **[Orissa JEE 2002]**

(a) एकैकी अन्तर्क्षेपी (b) एकैकी आच्छादक

(c) बहुएकैकी अन्तर्क्षेपी (d) बहुएकैकी आच्छादक

44. फलन $f: R \to R$, $f(x) = 2x + \sin x$, $x \in R$ द्वारा परिभाषित है, तब *f* है **[IIT Screening 2002]**

(a) एकैकी और आच्छादक

(b) एकैकी, लेकिन आच्छादक नहीं

(c) आच्छादक, लेकिन एकैकी नहीं

(d) न एकैकी और न ही आच्छादक

45. एक फलन *f* प्राकृत संख्याओं के समुच्चय से पूर्णांकों में इस प्रकार परिभाषित है कि $f(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, \text{ जबकि } n \text{ विषम है} \\ -\frac{n}{2}, \text{ जबकि } n \text{ सम है} \end{cases}$, है **[AIEEE 2003]**

(a) एकैकी किन्तु आच्छादक नहीं

(b) आच्छादक किन्तु एकैकी नहीं

(c) एकैकी व आच्छादक दोनों

(d) न एकैकी और न ही आच्छादक

46. यदि $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ तथा $f(x) = \frac{x}{1+x}$, तब *f* है **[IIT Screening 2003]**

(a) एकैकी तथा आच्छादक

(b) एकैकी किन्तु आच्छादक नहीं

(c) आच्छादक किन्तु एकैकी नहीं

(d) न तो एकैकी और न ही आच्छादक

47. यदि $f: R \to S$ द्वारा $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x + 1$ आच्छादक है, तब *S* का अन्तराल है **[AIEEE 2004; IIT Screening 2004]**

(a) [–1, 3] (b) [1, 1]

(c) [0, 1] (d) [0, –1]

48. यदि *R* वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को प्रदर्शित करता है, तब फलन $f: R \to R$ इस प्रकार परिभाषित है, कि $f(x) = [x]$, है **[Karnataka CET 2004]**

(a) केवल एकैकी

(b) केवल आच्छादक

(c) एकैकी व आच्छादक दोनों

(d) न ही एकैकी और न ही आच्छादक

49. $f(x) = x + \sqrt{x^2}$, $R \to R$ में फलन है, तब $f(x)$ है **[Orissa JEE 2004]**

(a) एकैकी (b) आच्छादक

(c) एकैकी आच्छादक (d) इनमें से कोई नहीं

50. यदि $(x, y) \in R$ और $x, y \neq 0$; $f(x, y) \to \frac{x}{y}$, तब यह फलन है **[Orissa JEE 2004]**

(a) आच्छादक (b) एकैकी आच्छादक

(c) एकैकी (d) इनमें से कोई नहीं

51. यदि $f(x) = x - [x]$ आवर्ती फलन हो, तो इसका आवर्तनांक होगा **[AMU 2000]**

(a) $f(x)$ आवर्ती नहीं है (b) $\frac{1}{2}$

(c) 1 (d) 2

52. यदि $f(x)$ जिसका आवर्तनांक *T* है एक आवर्ती फलन हो, तो फलन $f(ax+b)$, जबकि $a > 0$, का आवर्तनांक होगा **[AMU 2000]**

(a) T/b (b) *aT*

(c) *bT* (d) T/a

53. यदि $f(x) = ax + b$ तथा $g(x) = cx + d$, तब $f(g(x)) = g(f(x))$ समतुल्य है **[UPSEAT 2001]**

(a) $f(a) = g(c)$ (b) $f(b) = g(b)$

(c) $f(d) = g(b)$ (d) $f(c) = g(a)$

54. $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ का प्रान्त व परिसर क्रमशः हैं

(a) $R, [-1, 1]$ (b) $R - \{3\}, \{1, -1\}$

(c) R^+, R (d) इनमें से कोई नहीं

55. यदि महत्तम पूर्णांक फलन में, प्रान्त वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है ता परिसर समुच्चय होगा

(a) वास्तविक संख्याओं का (b) परिमेय संख्याओं का

(c) काल्पनिक संख्याओं का (d) पूर्णांकों का

56. फलन $f(x) = \sin^{-1} 5x$ का डोमेन (प्रान्त) है

(a) $\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ (b) $\left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$

(c) *R* (d) $\left(0, \frac{1}{5}\right)$

57. फलन $f(x) = \frac{\sin^{-1}(3-x)}{\ln(|x|-2)}$ का डोमेन (प्रान्त) है **[Orissa JEE 2002]**

(a) [2, 4] (b) $(2, 3) \cup (3, 4]$

(c) $[2, \infty)$ (d) $(-\infty, -3) \cup [2, \infty)$

58. $\sin^{-1}\left[\log_3\left(\frac{x}{3}\right)\right]$ का डोमेन (प्रान्त) है **[AIEEE 2002]**

(a) [1, 9] (b) [–1, 9]

(c) [–9, 1] (d) [–9, –1]

59. फलन $\log|x^2 - 9|$ का डोमेन (प्रान्त) है

(a) *R* (b) $R - [-3, 3]$

(c) $R - \{-3, 3\}$ (d) इनमें से कोई नहीं

60. फलन $f(x) = \log|\log x|$ का डोमेन (प्रान्त) है **[DCE 2002]**

(a) $(0, \infty)$ (b) $(1, \infty)$

(c) $(0, 1) \cup (1, \infty)$ (d) $(-\infty, 1)$

61. फलन $f(x) = \sin^{-1}[\log_2(x/2)]$ का डोमेन (प्रान्त) है

[RPET 2002]

(a) [1, 4] (b) [–4, 1]

(c) [–1, 4] (d) इनमें से कोई नहीं

62. फलन $f(x)=\frac{\log_2(x+3)}{x^2+3x+2}$ का डोमेन (प्रान्त) है

[IIT Screening 2001; UPSEAT 2001]

(a) $R-\{-1,-2\}$ (b) $(-2,+\infty)$

(c) $R-\{-1,-2,-3\}$ (d) $(-3,+\infty)-\{-1,-2\}$

63. फलन $f(x)=\frac{\sec^{-1}x}{\sqrt{x-[x]}}$, जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन है, परिभाषित है

(a) R के लिए

(b) $R-\{(-1,1)\cup n \mid n\in Z\}$

(c) $R^+-(0,1)$ के लिए

(d) $R^+-\{n \mid n\in N\}$ के लिए

64. यदि फलन $f(x)=x^2-6x+7$ का प्रान्त $(-\infty,\infty)$ है, तो फलन का परिसर है [MP PET 1996]

(a) $(-\infty,\infty)$ (b) $[-2,\infty)$

(c) $(-2,3)$ (d) $(-\infty,-2)$

65. फलन $f(x)=\sqrt{\log\frac{1}{|\sin x|}}$ का डोमेन (प्रान्त) है [RPET 2001]

(a) $R-\{2n\pi, n\in I\}$ (b) $R-\{n\pi, n\in I\}$

(c) $R-\{-\pi,\pi\}$ (d) $(-\infty,\infty)$

66. फलन $f(x)=\log(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x})$ का डोमेन (प्रान्त) है

[RPET 2001]

(a) $[4,\infty)$ (b) $(-\infty,6]$

(c) $[4,6]$ (d) इनमें से कोई नहीं

67. फलन $f(x)=\left[\log_{10}\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)\right]^{1/2}$ का डोमेन (प्रान्त) होगा

[UPSEAT 2001]

(a) $-\infty<x<\infty$ (b) $1\le x\le 4$

(c) $4\le x\le 16$ (d) $-1\le x\le 1$

68. फलन $f(x)=\begin{cases}\tan^{-1}x & ,|x|\le 1\\ \frac{1}{2}(|x|-1) & ,|x|>1\end{cases}$ के अवकलज का डोमेन (प्रान्त) है [IIT Screening 2002]

(a) $R-\{0\}$ (b) $R-\{1\}$

(c) $R-\{-1\}$ (d) $R-\{-1,1\}$

69. फलन $f(x)=\log_{3+x}(x^2-1)$ का डोमेन (प्रान्त) है

[Orissa JEE 2003]

(a) $(-3,-1)\cup(1,\infty)$

(b) $[-3,-1)\cup[1,\infty)$

(c) $(-3,-2)\cup(-2,-1)\cup(1,\infty)$

(d) $[-3,-2)\cup(-2,-1)\cup[1,\infty)$

70. यदि 'n' एक पूर्णांक है, तो फलन $\sqrt{\sin 2x}$ का डोमेन (प्रान्त) है

[MP PET 2003]

(a) $\left[n\pi-\frac{\pi}{2}, n\pi\right]$ (b) $\left[n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2}\right]$

(c) $[(2n-1)\pi, 2n\pi]$ (d) $[2n\pi, (2n+1)\pi]$

71. फलन $f(x)=\frac{3}{4-x^2}+\log_{10}(x^3-x)$ का डोमेन (प्रान्त) है

[AIEEE 2003]

(a) (1, 2) (b) $(-1,0)\cup(1,2)$

(c) $(1,2)\cup(2,\infty)$ (d) $(-1,0)\cup(1,2)\cup(2,\infty)$

72. फलन $f(x)=\sqrt{2-2x-x^2}$ का डोमेन (प्रान्त) है

[BIT Ranchi 1992]

(a) $-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$ (b) $-1-\sqrt{3}\le x\le -1+\sqrt{3}$

(c) $-2\le x\le 2$ (d) $-2+\sqrt{3}\le x\le -2-\sqrt{3}$

73. फलन $f(x)=\frac{x-3}{(x-1)\sqrt{x^2-4}}$ का प्रान्त है [BIT Ranchi 1991]

(a) (1, 2) (b) $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

(c) $(-\infty,-2)\cup(1,\infty)$ (d) $(-\infty,\infty)-\{1,\pm 2\}$

74. फलन $\sqrt{\log\{(5x-x^2)/6\}}$ का प्रान्त है

(a) (2, 3) (b) [2, 3]

(c) [1, 2] (d) [1, 3]

75. $\sqrt{2-x}-\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ का प्रान्त है

(a) (–3, 1) (b) [–3, 1]

(c) (–3, 2] (d) [–3, 1)

76. फलन $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ का प्रान्त है

(a) (–1, 1) (b) (–1, 1)–{0}

(c) [–1, 1] (d) [–1, 1]–{0}

77. फलन $f(x)=\sqrt{x-x^2}+\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}$ का डोमेन (प्रान्त) है

[AMU 1999]

(a) $[-4,\infty)$ (b) [–4, 4]

(c) [0, 4] (d) [0, 1]

78. फलन $f(x)=\sin^{-1}\{(1+e^x)^{-1}\}$ का डोमेन (प्रान्त) है

[AMU 1999]

(a) $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$ (b) [–1, 0]

(c) [0, 1] (d) [–1, 1]

79. फलन $\sqrt{\log(x^2-6x+6)}$ का डोमेन (प्रान्त) है

[Roorkee 1999; MP PET 2002]

(a) $(-\infty, \infty)$

(b) $(-\infty, 3-\sqrt{3}) \cup (3+\sqrt{3}, \infty)$

(c) $(-\infty, 1] \cup [5, \infty)$

(d) $[0, \infty)$

80. वस्तविक संख्याओं का सबसे बड़ा समुच्चय जो $f(x)=\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ का डोमेन (प्रान्त) हो सकता है, होगा **[AMU 2000]**

(a) $(0, 1) \cup (0, \infty)$ (b) $(-1, 0) \cup (1, \infty)$

(c) $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ (d) $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

81. फलन $f(x)=\sin^{-1}(1+3x+2x^2)$ का डोमेन (प्रान्त) है **[Roorkee 2000]**

(a) $(-\infty, \infty)$ (b) $(-1, 1)$

(c) $\left[-\frac{3}{2}, 0\right]$ (d) $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right) \cup (2, \infty)$

82. फलन $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$ का प्रान्त है

(a) $\{x : x \in R,\ x \neq 3\}$

(b) $\{x : x \in R,\ x \neq 2\}$

(c) $\{x : x \in R\}$

(d) $\{x : x \in R,\ x \neq 2, x \neq -3\}$

83. $f(x)=(x^2-1)^{-1/2}$ का प्रान्त होगा **[Roorkee 1987]**

(a) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ (b) $(-\infty, -1] \cup (1, \infty)$

(c) $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ (d) इनमें से कोई नहीं

84. फलन $y=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ का परास होगा **[Roorkee 1998; RPET 2000]**

(a) $(-\infty, 0)$ (b) $(-\infty, 0]$

(c) $(-\infty, -1)$ (d) $(-\infty, \infty)$

85. वास्तविक मान फलन जो $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}$ से परिभाषित है, का प्राकृतिक प्रान्त (domain) है **[SCRA 1996]**

(a) $1 < x < \infty$ (b) $-\infty < x < \infty$

(c) $-\infty < x < -1$ (d) $(-\infty, \infty)-(-1, 1)$

86. फलन $f(x)=\exp(\sqrt{5x-3-2x^2})$ का प्रान्त है **[MP PET 2004]**

(a) $\left[-\frac{3}{2}, 1\right]$ (b) $\left[\frac{3}{2}, \infty\right]$

(c) $[-\infty, 1]$ (d) $\left[1, \frac{3}{2}\right]$

87. फलन $f(x)=\frac{\sin^{-1}(x-3)}{\sqrt{9-x^2}}$ का प्रान्त है **[AIEEE 2004]**

(a) [1, 2] (b) [2, 3]

(c) [1, 2] (d) [2, 3]

88. फलन $f(x)=\sec\left(\frac{\pi}{4}\cos^2 x\right), -\infty < x < \infty$ का परिसर (रेंज) है **[Orissa JEE 2002]**

(a) $[1, \sqrt{2}]$ (b) $[1, \infty)$

(c) $[-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$ (d) $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

89. फलन $f(x)=\frac{x^2+x+2}{x^2+x+1}$ का परिसर (रेंज) है, (जबकि $x \in R$) **[IIT Screening 2003]**

(a) $(1, \infty)$ (b) $(1, 11/7]$

(c) $(1, 7/3]$ (d) $(1, 7/5]$

90. यदि $f(x)=a\cos(bx+c)+d$, तब $f(x)$ का परिसर (रेंज) होगा **[UPSEAT 2001]**

(a) $[d+a, d+2a]$ (b) $[a-d, a+d]$

(c) $[d+a, a-d]$ (d) $[d-a, d+a]$

91. फलन $f(x)=[x]-x$ का परिसर है

(a) [0, 1] (b) (–1, 0]

(c) *R* (d) (–1, 1)

92. फलन $f(x)=\cos(x/3)$ का परिसर (रेंज) है **[RPET 2002]**

(a) $(-1/3, 1/3)$ (b) $[-1, 1]$

(c) $(1/3, -1/3)$ (d) $(-3, 3)$

93. फलन $f(x)=\frac{x+2}{|x+2|}$ का परिसर (रेंज) है **[RPET 2002]**

(a) {0, 1} (b) {–1, 1}

(c) *R* (d) $R-\{-2\}$

94. $f(x)=\cos x-\sin x$ का परिसर है **[MP PET 1995; Pb. CET 2001]**

(a) $(-1, 1)$ (b) $[-1, 1)$

(c) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (d) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

95. यदि $f : R \to R$ तो फलन $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ का परिसर है **[MP PET 1987]**

(a) R^- (b) R^+

(c) *R* (d) $R \times R$

96. फलन $f(x)=\cos 2x-\sin 2x$ के परिसर में समुच्चय है **[IIT Screening]**

(a) [2, 4] (b) [–1, 1]

(c) [–2, 2] (d) [–4, 4]

97. फलन $\frac{1}{2-\sin 3x}$ का परिसर है **[AMU 1999]**

(a) [1, 3] (b) $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$

(c) (1, 3) (d) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

98. फलन $f(x) = \sin^2(x^4) + \cos^2(x^4)$ का परिसर है

(a) $(-\infty, \infty)$ (b) {1}

(c) (–1, 1) (d) (0, 1)

99. फल्न $f(x) = 9 - 7\sin x$ का परिसर है

(a) (2, 16) (b) [2, 16]

(c) [–1, 1] (d) (2, 16]

100. $f(x) = \frac{x^2 + 34x - 71}{x^2 + 2x - 7}$ का परिसर होगा **[Roorkee 1983]**

(a) [5, 9] (b) $(-\infty, 5] \cup [9, \infty)$

(c) (5, 9) (d) इनमें से कोई नहीं

101. वह अन्तराल जिसके लिए $\sin^{-1}\sqrt{x} + \cos^{-1}\sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$ है **[IIT Screening]**

(a) $[0, \infty)$ (b) [0, 3]

(c) [0, 1] (d) [0, 2]

102. फलन $\sin^{-1}\sqrt{x}$ निम्न अंतराल में परिभाषित है

(a) (–1, 1) (b) [0, 1]

(c) [–1, 0] (d) (–1, 2)

103. फलन $f : R \to R$ इस प्रकार परिभाषित है $f(x) = \cos^2 x + \sin^4 x$, $x \in R$ के लिए तब $f(R) =$ **[EAMCET 2002]**

(a) $\left(\frac{3}{4}, 1\right]$ (b) $\left[\frac{3}{4}, 1\right)$

(c) $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$ (d) $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$

104. यदि x एक वास्तविक संख्या हो, तो $\frac{x^2 + 14x + 9}{x^2 + 2x + 3}$ का मान होगा **[UPSEAT 2002]**

(a) 5 और 4 (b) 5 और –4

(c) – 5 और 4 (d) इनमें से कोई नहीं

105. $\theta > \frac{\pi}{3}$ के लिए, $f(\theta) = \sec^2\theta + \cos^2\theta$ का मान किस अंतराल में होगा **[Orissa JEE 2002]**

(a) (0, 2) (b) [0, 1]

(c) (1, 2) (d) $[2, \infty)$

106. निम्न में से कौनसा फलन सम फलन है **[RPET 2000]**

(a) $f(x) = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$ (b) $f(x) = x\left(\frac{a^x - 1}{a^x + 1}\right)$

(c) $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ (d) $f(x) = \sin x$

107. यदि $f(x) = \log\frac{1+x}{1-x}$, तब $f(x)$ है **[Kerala (Engg.) 2002]**

(a) सम फलन (b) $f(x_1)f(x_2) = f(x_1 + x_2)$

(c) $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = f(x_1 - x_2)$ (d) विषम फलन

108. फलन $f(x) = \sin\left(\log(x + \sqrt{x^2 + 1})\right)$ है **[Orissa JEE 2002]**

(a) सम फलन (b) विषम फलन

(c) न ही सम और न ही विषम (d) आवर्ती फलन

109. फलन $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ है **[AIEEE 2003; MP PET 2003; UPSEAT 2003]**

(a) एक सम फलन

(b) एक विषम फलन

(c) एक आवर्ती फलन

(d) न सम और न ही विषम फलन

110. निम्न में से कौनसा फलन प्रतिलोम फलन है **[AMU 2001]**

(a) $f(x) = 2^x$ (b) $f(x) = x^3 - x$

(c) $f(x) = x^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

111. यदि $y = f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, तो $x =$ **[IIT 1984]**

(a) $f(y)$ (b) $2f(y)$

(c) $\frac{1}{f(y)}$ (d) इनमें से कोई नहीं

112. निम्न में से कौनसा फलन स्वयं का व्युत्क्रम है

(a) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ (b) $f(x) = 5^{\log x}$

(c) $f(x) = 2^{x(x-1)}$ (d) इनमें से कोई नहीं

113. फलन $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + 2$ का प्रतिलोम फलन है **[Kurukshetra CEE 1996]**

(a) $\log_e\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^{1/2}$ (b) $\log_e\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^{1/2}$

(c) $\log_e\left(\frac{x}{2-x}\right)^{1/2}$ (d) $\log_e\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-2}$

114. यदि फलन $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ निम्न प्रकार से परिभाषित है, $f(x) = 2^{x(x-1)}$, तो $f^{-1}(x) =$ **[IIT 1999]**

(a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x(x-1)}$ (b) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\log_2 x})$

(c) $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4\log_2 x})$ (d) अपरिभाषित है

115. यदि $f(x) = 3x - 5$ है, तो $f^{-1}(x) =$ **[IIT 1998]**

(a) $\frac{1}{3x-5}$

(b) $\frac{x+5}{3}$

(c) अस्तित्वहीन है चूँकि f एकैकी नहीं है

(d) अस्तित्वहीन है चूँकि f आच्छादक नहीं है

116. यदि $f: IR \to IR$, $f(x) = 3x-4$ द्वारा परिभाषित है, तब $f^{-1}: IR \to IR$ है **[SCRA 1996]**

(a) $4-3x$ (b) $\frac{x+4}{3}$

(c) $\frac{1}{3x-4}$ (d) $\frac{3}{x+4}$

117. यदि $f(x) = \frac{x}{1+x}$, तब $f^{-1}(x)$ का मान होगा **[AMU 1999]**

(a) $\frac{(1+x)}{x}$ (b) $\frac{1}{(1+x)}$

(c) $\frac{(1+x)}{(1-x)}$ (d) $\frac{x}{(1-x)}$

118. निम्नलिखित फलनों में से कौनसा फलन प्रतिलोम फलन है **[AMU 2000]**

(a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ (b) $f(x) = x^2$, सभी x के लिए

(c) $f(x) = x^2,\ x \ge 0$ (d) $f(x) = x^2,\ x \le 0$

119. माना $f(\theta) = \sin\theta(\sin\theta + \sin 3\theta)$, तब $f(\theta)$ **[IIT Screening 2000]**

(a) ≥ 0 केवल जब $\theta \ge 0$

(b) ≤ 0 सभी वास्तविक θ के लिए

(c) ≥ 0 सभी वास्तविक θ के लिए

(d) ≤ 0 केवल जब $\theta \le 0$

120. फलन $\frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$ का प्रतिलोम है **[RPET 2001]**

(a) $\frac{1}{2}\log_{10}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ (b) $\frac{1}{2}\log_{10}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

(c) $\frac{1}{4}\log_{10}\left(\frac{2x}{2-x}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

121. फलन $y = 2x-3$ का प्रतिलोम होगा **[UPSEAT 2002]**

(a) $\frac{x+3}{2}$ (b) $\frac{x-3}{2}$

(c) $\frac{1}{2x-3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

122. माना फलन f इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x) = \frac{2x+1}{1-3x}$, तब $f^{-1}(x) =$ **[Kerala (Engg.) 2002]**

(a) $\frac{x-1}{3x+2}$ (b) $\frac{3x+2}{x-1}$

(c) $\frac{x+1}{3x-2}$ (d) $\frac{2x+1}{1-3x}$

123. यदि $f(x) = x^2+1$, तब $f^{-1}(17)$ तथा $f^{-1}(-3)$ का मान क्रमशः होगा **[UPSEAT 2003]**

(a) 4, 1 (b) 4, 0

(c) 3, 2 (d) इनमें से कोई नहीं

124. माना $f(x) = \sin x + \cos x,\ g(x) = x^2 - 1$ तब $g(f(x))$ का निम्न अन्तराल में प्रतिलोम होगा **[IIT Screening 2004]**

(a) $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ (b) $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

(c) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ (d) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

125. यदि $f(x) = \frac{2x-1}{x+5}\ (x \ne -5)$, तब $f^{-1}(x) =$ **[MP PET 2004]**

(a) $\frac{x+5}{2x-1}, x \ne \frac{1}{2}$ (b) $\frac{5x+1}{2-x}, x \ne 2$

(c) $\frac{5x-1}{2-x}, x \ne 2$ (d) $\frac{x-5}{2x+1}, x \ne \frac{1}{2}$

126. यदि f महत्तम पूर्णांक फलन हो और g मापांक फलन हो, तो $(gof)\left(-\frac{5}{3}\right) - (fog)\left(-\frac{5}{3}\right) =$

(a) 1 (b) –1

(c) 2 (d) 4

127. यदि $f(x) = 2x$ तथा g कोई वास्तविक फलन है, तो

(a) $(fog)(x) = g(x)$ (b) $(g+g)(x) = g(x)$

(c) $(fog)(x) = (g+g)(x)$ (d) इनमें से कोई नहीं

128. यदि $f(x) = x^2 - 1$ तथा $g(x) = 3x+1$, तो $(gof)(x) =$

(a) $x^2 - 1$ (b) $2x^2 - 1$

(c) $3x^2 - 2$ (d) $2x^2 + 2$

129. यदि f एक चरघातांकी फलन है तथा g लघुगणकीय फलन है तो $fog(1)$ होगा

(a) e (b) $\log_e e$

(c) 0 (d) $2e$

130. यदि $f(x) = e^{2x}$ तथा $g(x) = \log\sqrt{x}\ (x > 0)$, तो $fog(x)$ बराबर है

(a) e^{2x} (b) $\log\sqrt{x}$

(c) $e^{2x}\log\sqrt{x}$ (d) x

131. यदि $f(x) = |\cos x|$ तथा $g(x) = [x]$, तो $gof(x)$ होगा

(a) $|\cos[x]|$ (b) $|\cos x|$

(c) $[|\cos x|]$ (d) $|[\cos x]|$

132. यदि $f(x) = x^2+1$, तब $fof(x)$ बराबर है

(a) x^2+1 (b) x^2+2x+2

(c) x^4+2x^2+2 (d) इनमें से कोई नहीं

133. यदि $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, तब $(fofof)(x) =$ **[RPET 2000]**

(a) $\frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$ (b) $\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$

(c) $\frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

134. यदि $\phi(x)=x^2+1$ व $\psi(x)=3^x$, तो $\phi\{\psi(x)\}$ व $\psi\{\phi(x)\}=$

(a) $3^{2x+1}, 3^{x^2+1}$ (b) $3^{2x+1}, 3^{x^2}+1$

(c) $3^{2x}+1, 3^{x^2+1}$ (d) इनमें से कोई नहीं

135. यदि $g(x)=x^2+x-2$ तथा $\frac{1}{2}gof(x)=2x^2-5x+2$, तब $f(x)=$ **[Roorkee 1998; MP PET 2002]**

(a) $2x-3$ (b) $2x+3$

(c) $2x^2+3x+1$ (d) $2x^2-3x-1$

136. यदि $f(x)=\log_a x$ तथा $F(x)=a^x$, तब $F[f(x)]$ है **[SCRA 1996]**

(a) $f[F(x)]$ (b) $f[F(2x)]$

(c) $F[f(2x)]$ (d) $F[(x)]$

137. माना फलन f और g इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x)=\frac{x}{x+1}$, $g(x)=\frac{x}{1-x}$, तब $(fog)(x)$ का मान होगा **[SCRA 1996]**

(a) $\frac{1}{x}$ (b) $\frac{1}{x-1}$

(c) $x-1$ (d) x

138. यदि $R\to R$, $f(x)=(x+1)^2$, $g(x)=x^2+1$, तब $(fog)(-3)=$ **[RPET 1999]**

(a) 121 (b) 112

(c) 211 (d) इनमें से कोई नहीं

139. यदि $g(x)=1+\sqrt{x}$ और $f(g(x))=3+2\sqrt{x}+x$, तब $f(x)=$ **[MP PET 2000; Karnataka CET 2002]**

(a) $1+2x^2$ (b) $2+x^2$

(c) $1+x$ (d) $2+x$

140. संयोजित प्रतिचित्रण $f:R\to R$, $f(x)=\sin x$, $g:R\to R$, $g(x)=x^2$ में fog का मान होगा **[UPSEAT 2000]**

(a) $\sin x+x^2$ (b) $(\sin x)^2$

(c) $\sin x^2$ (d) $\frac{\sin x}{x^2}$

141. माना $f(x)=ax+b$ तथा $g(x)=cx+d, a\neq 0, c\neq 0$ तथा $a=1, b=2$ यदि $(fog)(x)=(gof)(x)$, सभी x के लिए, तो आप c तथा d के बारे में क्या कह सकते हैं **[AMU 2000]**

(a) c तथा d दोनों स्वेच्छ अचर (b) $c=1, d$ स्वेच्छ अचर

(c) c स्वेच्छ अचर, $d=1$ (d) $c=1, d=1$

142. माना $g(x)=1+x-[x]$ तथा $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$, तब x के सभी मानों के लिए $f(g(x))=$ **[IIT Screening 2001; UPSEAT 2001]**

(a) x (b) 1

(c) $f(x)$ (d) $g(x)$

143. यदि $f(x)=\frac{\alpha x}{x+1}, x\neq -1$. तब α का वह मान, जिसके लिए $f(f(x))=x$ होगा **[IIT Screening 2001; UPSEAT 2001]**

(a) $\sqrt{2}$ (b) $-\sqrt{2}$

(c) 1 (d) –1

144. यदि $f(x)=\frac{2x+1}{3x-2}$, तब $(fof)(2)=$ **[Kerala (Engg.) 2002]**

(a) 1 (b) 3

(c) 4 (d) 2

145. यदि $f(x)=\sin^2 x$ तथा संयुक्त फलन $g\{f(x)\}=|\sin x|$, तब फलन $g(x)=$ **[Orissa JEE 2003]**

(a) $\sqrt{x-1}$ (b) $\sqrt{x}$

(c) $\sqrt{x+1}$ (d) $-\sqrt{x}$

146. यदि $f(x)=(a-x^n)^{1/n}$, जहाँ $a>0$ व n धनात्मक पूर्णांक है, तो $f[f(x)]=$ **[IIT 1983; UPSEAT 2001, 04]**

(a) x^3 (b) x^2

(c) x (d) इनमें से कोई नहीं

147. माना $f:(-1,1)\to B$, एक फलन $f(x)=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ द्वारा परिभाषित है, तब f एकैकी और आच्छादक दोनों है जब B का अन्तराल है **[AIEEE 2005]**

(a) $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ (b) $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

(c) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (d) $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

148. एक वास्तविक फलन $f(x)$, $f(x-y)=f(x)f(y)-f(a-x)f(a+y)$ फलन समीकरण को संतुष्ट करता है, यहाँ a दिया गया अचर है व $f(0)=1$, तब $f(2a-x)=$ **[AIEEE 2005]**

(a) $f(a)+f(a-x)$ (b) $f(-x)$

(c) $-f(x)$ (d) $f(x)$

149. यदि X और Y दो अरिक्त समुच्चय है जहाँ $f:X\to Y$ फलन परिभाषित है जबकि $C\subseteq X$ के लिए $f(c)=\{f(x):x\in C\}$ और $D\subseteq Y$ के लिए $f^{-1}(D)=\{x:f(x)\in D\}$ कोई भी $A\subseteq X$ और $B\subseteq Y$ के लिए, तब **[IIT Screening 2005]**

(a) $f^{-1}(f(A))=A$

(b) $f^{-1}(f(A))=A$ केवल यदि $f(X)=Y$

(c) $f(f^{-1}(B))=B$ केवल यदि $B\subseteq f(X)$

(d) $f(f^{-1}(B)) = B$

150. यदि $f(x) = 2x^6 + 3x^4 + 4x^2$ तब $f'(x)$ है **[DCE 2005]**

(a) सम फलन

(b) विषम फलन

(c) न तो सम और न ही विषम

(d) इनमें से कोई नहीं

151. यदि $f(x) = \frac{\alpha x}{x+1}, x \neq -1$, $f(f(x)) = x$, α का मान क्या है **[Kerala (Engg.) 2005]**

(a) $\sqrt{2}$ (b) $-\sqrt{2}$

(c) 1 (d) 2

(e) –1

152. फलन $f(x) = x - [x]$, जहाँ [ ] एक महत्तम पूर्णांक प्रदर्शित करता है। यह फलन है **[DCE 2005]**

(a) एक आवर्ती फलन

(b) एक आवर्ती फलन जिसका आवर्तनांक $\frac{1}{2}$

(c) एक आवर्ती फलन जिसका आवर्तनांक 1

(d) एक आवर्ती फलन नहीं है

153. माना $g(x) = 1 + x - [x]$ और $f(x) = \begin{cases} -1, \text{ यदि } x < 0 \\ 0, \text{ यदि } x = 0 \\ 1, \text{ यदि } x > 0 \end{cases}$, तब x के सभी मानों के लिए $fog(x)$ का मान है **[DCE 2005]**

(a) x (b) 1

(c) $f(x)$ (d) $g(x)$

154. यदि $g : [-2, 2] \to R$ जहाँ $g(x) = x^3 + \tan x + \left[\frac{x^2+1}{P}\right]$ एक विषम फलन है तब प्राचलिक P का मान है **[DCE 2005]**

(a) $-5 < P < 5$ (b) $P < 5$

(c) $P > 5$ (d) इनमें से कोई नहीं

155. फलन $f(x) = \log_e(x - [x])$ का प्रान्त है **[AMU 2005]**

(a) R (b) R-Z

(c) $(0, +\infty)$ (d) Z

156. $\sin^{-1}(\log_3 x)$ का प्रान्त है **[Kerala (Engg.) 2005]**

(a) [–1, 1] (b) [0, 1]

(c) [0, ∞) (d) R

(e) [1/3, 3]

157. यदि $f(x_1) - f(x_2) = f\left(\frac{x_1 - x_2}{1 - x_1 x_2}\right)$, $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ के लिए, तब $f(x)$ है **[Roorkee 1998]**

(a) $\log \frac{(1-x)}{(1+x)}$ (b) $\tan^{-1} \frac{(1-x)}{(1+x)}$

(c) $\log \frac{(1+x)}{(1-x)}$ (d) $\tan^{-1} \frac{(1+x)}{(1-x)}$

158. यदि x व y को क्रमशः $-x$ व $-y$ से प्रतिस्थापित करने पर वक्र का समीकरण अपरिवर्तित रहता है, तो वक्र है

(a) x-अक्ष के साथ सममित

(b) y-अक्ष के साथ सममित

(c) विपरीत चतुर्थांश में सममित

(d) रेखा $y = x$ के परितः सममित

159. यदि x और y को क्रमशः y व x से परिवर्तित करने पर वक्र का समीकरण अपरिवर्तित रहता है, तब वक्र है

(a) x-अक्ष के साथ सममित

(b) y-अक्ष के साथ सममित

(c) रेखा $y = -x$ के साथ सममित

(d) रेखा $y = x$ के साथ सममित

160. फलन $y = f(x)$ का प्रतिलोम होने के लिए प्रतिबंध है कि इसे होना चाहिए

(a) सभी x के लिए परिभाषित

(b) प्रत्येक जगह सतत्

(c) एकमानी और प्रान्त में सतत्

(d) एक सम फलन

161. यदि $f(x) = \begin{cases} x, \text{ जब } x \text{ परिमेय है} \\ 0, \text{ जब } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} 0, \text{ जब } x \text{ परिमेय है} \\ x, \text{ जब } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$ तब $(f - g)$ है **[IIT Screening 2005]**

(a) एकैकी आच्छादक

(b) एकैकी लेकिन आच्छादक नहीं

(c) एकैकी नहीं लेकिन आच्छादक

(d) न तो एकैकी न ही आच्छादक

162. फलन $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ का परिसर है **[Orissa JEE 2005]**

(a) (–1, 0) (b) (–1, 1)

(c) [0, 1) (d) (1, 1)

163. एक फलन f, समीकरण $3f(x) + 2f\left(\frac{x+59}{x-1}\right) = 10x + 30$, सभी $x \neq 1$ के लिए, को सन्तुष्ट करता है। तो $f(7)$ का मान है **[Kerala (Engg.) 2005]**

(a) 8 (b) 4

(c) –8 (d) 11

(e) 44

164. यदि $e^x = y + \sqrt{1+y^2}$, तब $y =$ **[MNR 1990, UPSEAT 2000]**

(a) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (b) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(c) $e^x + e^{-x}$ (d) $e^x - e^{-x}$

165. माना $f:(2,3)\to(0,1)$ के लिए $f(x)=x-[x]$ परिभाषित है तो $f^{-1}(x)$ का मान होगा **[Orissa JEE 2005]**

(a) $x-2$ (b) $x+1$
(c) $x-1$ (d) $x+2$

सीमा

1. यदि $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$, तो $\lim_{x\to 0} f(x)=$

[IIT 1988; MNR 1988; SCRA 1996; UPSEAT 2000, 01]

(a) 1 (b) 0
(c) –1 (d) इनमें से कोई नहीं

2. $\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cot x}{1-\cos x}=$ **[AI CBSE 1988; DSSE 1988]**

(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) –2

3. $\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x-1)}{1-\cos x}=$

(a) 0 (b) ∞
(c) –2 (d) 2

4. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{|1-x|}=$

(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) ∞

5. $\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)^2}{(n+2)(n^2+3n-1)}=$

(a) 0 (b) 2
(c) 4 (d) ∞

6. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=$

(a) 1 (b) 1/2
(c) 0 (d) ∞

7. $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{3x-a}-\sqrt{x+a}}{x-a}=$

(a) $\sqrt{2a}$ (b) $1/\sqrt{2a}$
(c) $2a$ (d) $1/2a$

8. यदि $f(x)=\begin{cases} x, \text{ जब } 0\le x\le 1 \\ 2-x, \text{ जब } 1<x\le 2 \end{cases}$, तो $\lim_{x\to 1} f(x)=$

(a) 1 (b) 2
(c) 0 (d) अस्तित्व नहीं है

9. $\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}=$ **[RPET 1996; MP PET 1996; Pb. CET 2002]**

(a) 1 (b) –1
(c) 0 (d) ∞

10. यदि $\lim_{x\to 2}\frac{x^n-2^n}{x-2}=80$, जहाँ n धनात्मक पूर्णांक है, तो $n=$

(a) 3 (b) 5
(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

11. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=$ **[MNR 1983]**

(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 4

12. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=$

(a) e (b) $\frac{1}{e}$
(c) e^2 (d) इनमें से कोई नहीं

13. $\lim_{x\to 1}\frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{2x^2+x-3}=$ **[IIT 1977]**

(a) –1/10 (b) 1/10
(c) –1/8 (d) इनमें से कोई नहीं

14. यदि $\lim_{x\to 0} kx \operatorname{cosec} x=\lim_{x\to 0} x\operatorname{cosec} kx$, तो $k=$

(a) 1 (b) –1
(c) ± 1 (d) ± 2

15. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}=$

(a) 0 (b) 1
(c) –1 (d) अस्तित्व नहीं है

16. $\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x}=$

(a) 0 (b) 1
(c) ∞ (d) इनमें से कोई नहीं

17. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=$ **[MNR 1990; UPSEAT 2000]**

(a) 0 (b) 1
(c) 1/2 (d) 2

18. यदि $f(9)=9$, $f'(9)=4$, तो $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{f(x)}-3}{\sqrt{x}-3}=$

[IIT 1988; Karnataka CET 1999]

(a) 2 (b) 4
(c) –2 (d) –4

19. $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=$ **[Roorkee 1982; UPSEAT 2001]**

(a) 1 (b) –1
(c) 0 (d) अस्तित्व नहीं है

20. $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=$ **[Roorkee 1983]**

(a) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

(c) $2\sqrt{x}$ (d) $\sqrt{x}$

21. $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{(1+x)^{1/2}-1}=$ **[IIT 1983; Karnataka CET 1999]**

(a) $\log 2$ (b) $\log 4$

(c) $\log\sqrt{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

22. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{1-\cos nx}=$ **[Kerala (Engg.)2002]**

(a) m/n (b) n/m

(c) $\frac{m^2}{n^2}$ (d) $\frac{n^2}{m^2}$

23. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}=$

(a) 1 (b) e

(c) $1/e$ (d) इनमें से कोई नहीं

24. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})=$

(a) 5 (b) 3

(c) 5/2 (d) 3/2

25. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2x^2-7x+5}=$ **[IIT 1976]**

(a) 1/3 (b) 1/11

(c) –1/3 (d) इनमें से कोई नहीं

26. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=$ **[IIT 1975; MP PET 2004]**

(a) 1 (b) 0

(c) अस्तित्व नहीं है (d) इनमें से कोई नहीं

27. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}=$

(a) –1 (b) 1

(c) 2 (d) –2

28. $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x}{x^2}=$ **[Roorkee 1982; DCE 1999]**

(a) 6 (b) 9

(c) 18 (d) 3

29. $\lim_{\alpha\to\pi/4}\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\alpha-\frac{\pi}{4}}=$ **[IIT 1977]**

(a) $\sqrt{2}$ (b) $1/\sqrt{2}$

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

30. $\lim_{x\to\pi/2}\tan x\log\sin x=$ **[MNR 1989]**

(a) 0 (b) 1

(c) –1 (d) इनमें से कोई नहीं

31. यदि n एक पूर्णांक है, तो $\lim_{x\to n+0}(x-[n])=$

(a) 0 (b) 1

(c) –1 (d) इनमें से कोई नहीं

32. $\lim_{\theta\to\pi/2}(\sec\theta-\tan\theta)=$ **[IIT 1976; AMU 1999]**

(a) 0 (b) 1/2

(c) 2 (d) ∞

33. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x-x}{3x-\sin x}=$ **[IIT 1971]**

(a) 0 (b) 1

(c) 1/2 (d) 1/3

34. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|+x^2}=$

(a) 1 (b) –1

(c) 0 (d) अस्तित्व नहीं है

35. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=$

(a) a/b (b) b/a

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

36. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^o}{x}=$

(a) 1 (b) $\pi/180$

(c) अस्तित्व नहीं है (d) इनमें से कोई नहीं

37. $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=$ **[RPET 1995]**

(a) $4a$ (b) 1

(c) $2a$ (d) 0

38. $\lim_{x\to a}\frac{(x+2)^{5/3}-(a+2)^{5/3}}{x-a}=$ **[AI CBSE 1991]**

(a) $\frac{5}{3}(a+2)^{2/3}$ (b) $\frac{5}{3}(a+2)^{5/3}$

(c) $\frac{5}{3}a^{2/3}$ (d) $\frac{5}{3}a^{5/3}$

39. यदि $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{5-x}, & \text{जब } x<3\\ 5-x, & \text{जब } x>3\end{cases}$, तो

(a) $\lim_{x\to 3+}f(x)=0$ (b) $\lim_{x\to 3-}f(x)=0$

(c) $\lim_{x\to 3+}f(x)\neq\lim_{x\to 3-}f(x)$ (d) इनमें से कोई नहीं

40. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}=$ **[AI CBSE 1988]**

(a) $\frac{a^2-b^2}{2}$ (b) $\frac{b^2-a^2}{2}$

(c) a^2-b^2 (d) b^2-a^2

41. $\lim_{\theta\to\pi/6}\frac{\cot^2\theta-3}{\operatorname{cosec}\theta-2}=$

(a) 2 (b) 4

(c) 6 (d) 0

42. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-1}{(1+x)^3-1}=$

(a) 0 (b) 1
(c) 5/3 (d) 3/5

43. यदि $\lim_{x\to a}\frac{x^9+a^9}{x+a}=9$, जब $a=$

(a) $9^{1/8}$ (b) ± 2
(c) ± 3 (d) इनमें से कोई नहीं

44. $\lim_{x\to 0+}\frac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}=$

(a) 0 (b) 1
(c) ∞ (d) इनमें से कोई नहीं

45. $\lim_{x\to 1}[x]=$

(a) 0 (b) 1
(c) अस्तित्व नहीं है (d) इनमें से कोई नहीं

46. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin 6x}{\sin 5x-\sin 3x}=$ **[AI CBSE 1988; AISSE 1988]**

(a) 1/2 (b) 1/4
(c) 2 (d) 4

47. $\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{4}}{\theta}\right)$ का मान है **[MP PET 1993]**

(a) 0 (b) 1/4
(c) 1 (d) अस्तित्व नहीं है

48. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+bx+4}{x^2+ax+5}\right)$ का मान होगा **[MP PET 1993]**

(a) b/a (b) 1
(c) 0 (d) 4/5

49. यदि $f(r)=\pi r^2$, तो $\lim_{h\to 0}\frac{f(r+h)-f(r)}{h}=$

(a) πr^2 (b) $2\pi r$
(c) 2π (d) $2\pi r^2$

50. $\lim_{x\to 0}x\log(\sin x)=$

(a) –1 (b) $\log_e 1$
(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

51. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-b^x}{x}\right)=$ **[EAMCET 1988; RPET 1995]**

(a) $\log\left(\frac{b}{a}\right)$

(b) $\log\left(\frac{a}{b}\right)$

(c) $\frac{a}{b}$

(d) $\log a^b$

52. $\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}\right\}=$ **[MNR 1985]**

(a) 1/120 (b) –1/120
(c) 1/20 (d) इनमें से कोई नहीं

53. $\lim_{x\to\infty}[x(a^{1/x}-1)]$, $(a>1)=$

(a) $\log x$ (b) 1
(c) 0 (d) $-\log\frac{1}{a}$

54. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{\log(1+x)}{x^2}\right]=$

(a) 1/2 (b) –1/2
(c) 1 (d) –1

55. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\Sigma n^2}{n^3}\right]=$ **[AMU 1999; RPET 1999, 2002]**

(a) $-\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{6}$
(c) $\frac{1}{3}$ (d) $-\frac{1}{3}$

56. यदि $f(a)=2,\ f'(a)=1,\ g(a)=-1;\ g'(a)=2$, तो
$\lim_{x\to a}\frac{g(x)f(a)-g(a)f(x)}{x-a}=$ **[DCE 1999; Karnataka CET 1999; MP PET 1995; Pb. CET 2004]**

(a) 3 (b) 5
(c) 0 (d) –3

57. $\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}=$

(a) 0 (b) 1
(c) $\sin\alpha$ (d) $\cos\alpha$

58. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2+b^2}}{\sqrt{x^2+c^2}-\sqrt{x^2+d^2}}=$

(a) $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$ (b) $\frac{a^2+b^2}{c^2-d^2}$
(c) $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

59. $\lim_{x\to\pi/2}\frac{2x-\pi}{\cos x}=$ **[IIT 1973]**

(a) 2 (b) 1
(c) –2 (d) इनमें से कोई नहीं

60. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=$ **[MNR 1980, 86]**

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{1}{3}$

(c) $\frac{1}{6}$ (d) $-\frac{1}{6}$

61. $\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2\sin(a+h)-a^2\sin a}{h}=$ **[IIT 1989]**

(a) $a\cos a+a^2\sin a$ (b) $a\sin a+a^2\cos a$

(c) $2a\sin a+a^2\cos a$ (d) $2a\cos a+a^2\sin a$

62. $\lim_{x\to 3}\left\{\frac{x-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}\right\}=$ **[MNR 1991]**

(a) 1 (b) 2

(c) –1 (d) –2

63. $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}=$ **[MNR 1984, 86]**

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{1}{3}$

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

64. $\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(2x+3)}{x^2}=$

(a) 1 (b) –1

(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

65. $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1^3+2^3+3^3+.......+n^3}{n^4}\right]=$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{1}{4}$ (d) इनमें से कोई नहीं

66. $\lim_{x\to 0}\frac{y^2}{x}=........$, जहाँ $y^2=ax+bx^2+cx^3$ का मान है

(a) 0 (b) 1

(c) a (d) इनमें से कोई नहीं

67. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/2}-(1-x)^{1/2}}{x}=$ **[Roorkee 1979; RPET 1996]**

(a) 0 (b) 1/2

(c) 1 (d) –1

68. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+5x-6}=$

(a) 0 (b) $\frac{3}{7}$

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{6}$

69. $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}}=(a\neq 0)$

[IIT 1978; Kurukshetra CEE 1996]

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

(c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{2}{3}$

70. $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^{-1/3}}{1-x^{-2/3}}=$ **[AI CBSE 1991]**

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{2}{3}$ (d) $-\frac{2}{3}$

71. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=$ **[Kurukshetra CEE 2002]**

(a) n (b) 1

(c) –1 (d) इनमें से कोई नहीं

72. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 3x}{x}+\cos x\right)=$

(a) 3 (b) 1

(c) 4 (d) 2

73. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin^{-1}x}=$ **[AI CBSE 1989, 90; DSSE 1989]**

(a) 2 (b) 1

(c) –1 (d) इनमें से कोई नहीं

74. $\lim_{y\to 0}\frac{(x+y)\sec(x+y)-x\sec x}{y}=$ **[AI CBSE 1990]**

(a) $\sec x(x\tan x+1)$ (b) $x\tan x+\sec x$

(c) $x\sec x+\tan x$ (d) इनमें से कोई नहीं

75. $\lim_{x\to 0}\frac{x.2^x-x}{1-\cos x}=$ **[IIT 1980; BIT Ranchi 1983; RPET 2001]**

(a) 0 (b) $\log 4$

(c) $\log 2$ (d) इनमें से कोई नहीं

76. $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=$ **[AI CBSE 1981, 91; DSSE 1981, 83]**

(a) 1 (b) 2

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$

77. $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 3\theta-\sin\theta}{\sin\theta}=$ **[AI CBSE 1984; DSSE 1984]**

(a) 1 (b) 2

(c) 1/3 (d) 3/2

78. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=$ **[IIT 1974; AI CBSE 1986, 90; AISSE 1983, 86, 90; RPET 2000]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$

(c) $\frac{2}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

79. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=$ **[AI CBSE 1987; AISSE 1987]**

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

80. $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{(\cos^{-1}x)^2}=$ **[AI CBSE 1990]**

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{4}$ (d) इनमें से कोई नहीं

81. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\tan 2x}{\tan x}=$ **[AI CBSE 1990]**

(a) 2 (b) –2

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

82. $\lim_{\theta\to 0}\frac{5\theta\cos\theta-2\sin\theta}{3\theta+\tan\theta}=$ **[AI CBSE 1988]**

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $-\frac{3}{4}$

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

83. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2+x)-\sin(2-x)}{x}=$

[AI CBSE 1983; AISSE 1982, 83]

(a) $\sin 2$ (b) $2\sin 2$

(c) $2\cos 2$ (d) 2

84. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^2-1}=$

(a) 1 (b) 2

(c) –2 (d) इनमें से कोई नहीं

85. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{2x^2-3x-3}=$

(a) 1 (b) 3

(c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{3}{2}$

86. $\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}=$ **[AI CBSE 1985]**

(a) 1 (b) –1

(c) अस्तित्व नहीं है (d) इनमें से कोई नहीं

87. $\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\cot x-1}=$ **[BIT Ranchi 1989; IIT 1990]**

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (d) 1

88. $\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{\cot x-\cot a}=$ **[BIT Ranchi 1987]**

(a) $\frac{1}{2}\sin^3 a$ (b) $\frac{1}{2}\text{cosec}^2 a$

(c) $\sin^3 a$ (d) $\text{cosec}^3 a$

89. $\lim_{h\to 0}\frac{2\left[\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+h\right)\right]}{\sqrt{3}h(\sqrt{3}\cos h-\sin h)}=$ **[BIT Ranchi 1987]**

(a) $-\frac{2}{3}$ (b) $-\frac{3}{4}$

(c) $-2\sqrt{3}$ (d) $\frac{4}{3}$

90. $\lim_{x\to 0}x^x=$ **[Roorkee 1990]**

(a) 0 (b) 1

(c) *e* (d) इनमें से कोई नहीं

91. $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^{40}(4x-1)^5}{(2x+3)^{45}}=$ **[IIT 1990]**

(a) 16 (b) 24

(c) 32 (d) 8

92. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\tan^{-1}2x}\right]=$ **[IIT 1992; RPET 2001]**

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$

(c) 1 (d) ∞

93. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=$ **[DSSE 1987]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$

(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

94. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin x}{x}=$ **[AISSE 1986]**

(a) $\frac{1}{3}$ (b) 3

(c) 4 (d) $\frac{1}{4}$

95. $\lim_{x\to\pi/2}\frac{1+\cos 2x}{(\pi-2x)^2}=$ **[DSSE 1986; AI CBSE 1986]**

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) $\frac{1}{2}$

96. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x}=$ **[DSSE 1982]**

(a) 0 (b) 6

(c) $\frac{1}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

97. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin mx}{\tan nx} =$ **[DSSE 1987]**

(a) $\frac{n}{m}$ (b) $\frac{m}{n}$

(c) mn (d) इनमें से कोई नहीं

98. $\lim_{x \to 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{x^3} =$ **[AISSE 1985]**

(a) 4 (b) –4

(c) $\frac{1}{4}$ (d) इनमें से कोई नहीं

99. $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin x^2} =$ **[AISSE 1984; AI CBSE 1984]**

(a) 0 (b) $\frac{1}{3}$

(c) 3 (d) $\frac{1}{2}$

100. यदि $f(x) = \begin{cases} x, & \text{जब } x > 1 \\ x^2, & \text{जब } x < 1 \end{cases}$, तो $\lim_{x \to 1} f(x) =$ **[MP PET 1987]**

(a) x^2 (b) x

(c) -1 (d) 1

101. $\lim_{x \to \pi/2} \frac{\tan 3x}{x} =$ **[MP PET 1987]**

(a) ∞ (b) 3

(c) $\frac{1}{3}$ (d) 0

102. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{x} =$ **[MP PET 1987]**

(a) –1 (b) 0

(c) $\sqrt{3}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

103. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} =$ **[IIT Screening]**

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

104. यदि $\lim_{x \to 0} \frac{\log(a+x) - \log a}{x} + k \lim_{x \to e} \frac{\log x - 1}{x - e} = 1$, तब **[IIT Screening]**

(a) $k = e\left(1 - \frac{1}{a}\right)$

(b) $k = e(1+a)$

(c) $k = e(2-a)$

(d) तुल्यता सम्भव नहीं है

105. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)}}{x} =$ **[IIT 1991; AIEEE 2002; RPET 2001, 02]**

(a) 1 (b) –1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

106. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} =$ **[MNR 1995]**

(a) 0 (b) 1

(c) 4 (d) परिभाषित नहीं है

107. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x} =$ **[MP PET 1994; DCE 2005]**

(a) $\alpha + \beta$ (b) $\frac{1}{\alpha} + \beta$

(c) $\alpha^2 - \beta^2$ (d) $\alpha - \beta$

108. $\lim_{x \to a} \frac{(x^{-1} - a^{-1})}{x - a} =$ **[MP PET 1994]**

(a) $\frac{1}{a}$ (b) $\frac{-1}{a}$

(c) $\frac{1}{a^2}$ (d) $\frac{-1}{a^2}$

109. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x+3} =$ **[MNR 1994]**

(a) 1 (b) e

(c) e^2 (d) e^3

110. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x)\tan x =$

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) 1

(c) 0 (d) ∞

111. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ का मान है **[RPET 1995]**

(a) 1 (b) 0

(c) –1 (d) इनमें से कोई नहीं

112. $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ का मान है **[RPET 1995]**

(a) 1 (b) –1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

113. $\lim_{x \to a} f(x).\, g(x)$ का अस्तित्व होगा, यदि **[RPET 1995]**

(a) $\lim_{x \to a} f(x)$ व $\lim_{x \to a} g(x)$ का अस्तित्व है

(b) $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$ का अस्तित्व है

(c) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ का अस्तित्व है

(d) $\lim_{x \to a} f(x) g\left(\frac{1}{x}\right)$ का अस्तित्व है

114. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + \log(1-x)}{x^2}$ का मान है **[Roorkee 1995]**

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$

(c) $-\frac{1}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

115. यदि a, b, c, d धनात्मक हैं, तब $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{a+bx}\right)^{c+dx} =$ **[EAMCET 1992]**

(a) $e^{d/b}$ (b) $e^{c/a}$

(c) $e^{(c+d)/(a+b)}$ (d) e

116. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\operatorname{cosec} x}$ का मान है **[Kerala (Engg.) 2005]**

(a) e (b) $\frac{1}{e}$

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

117. $\lim_{n\to\infty}(4^n+5^n)^{1/n}$ का मान है

(a) 4 (b) 5

(c) e (d) इनमें से कोई नहीं

118. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-x}{1-|x|}$ का मान है

(a) 0 (b) 1

(c) –1 (d) इनमें से कोई नहीं

119. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x+\sin x}{x-\cos x}} =$ **[Roorkee 1994]**

(a) 0 (b) 1

(c) –1 (d) इनमें से कोई नहीं

120. $\lim_{x\to 0}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right\}^{1/x} =$ **[IIT 1993; RPET 2001]**

(a) 1 (b) –1

(c) e^2 (d) e

121. यदि $0<x<y$ तो $\lim_{n\to\infty}(y^n+x^n)^{1/n} =$

(a) e (b) x

(c) y (d) इनमें से कोई नहीं

122. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{a^2x^2+ax+1}-\sqrt{a^2x^2+1} =$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1

(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

123. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{\tan x - x} =$ **[EAMCET 1994; RPET 2001]**

(a) 1 (b) e

(c) e^{-1} (d) 0

124. यदि $f(x)=\sqrt{\frac{x-\sin x}{x+\cos^2 x}}$, तो $\lim_{x\to\infty} f(x) =$ **[DCE 2000]**

(a) 0 (b) ∞

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

125. $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\cos^{-1}x}}{\sqrt{x+1}} =$

(a) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

(c) 1 (d) 0

126. $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right] =$

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\log 2$ (d) e^4

127. यदि $f(x)=\frac{2}{x-3}$, $g(x)=\frac{x-3}{x+4}$ व $h(x)=-\frac{2(2x+1)}{x^2+x-12}$, तो $\lim_{x\to 3}[f(x)+g(x)+h(x)] =$

(a) –2 (b) –1

(c) $-\frac{2}{7}$ (d) 0

128. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{2/x}$, $(a, b, c>0) =$

(a) $(abc)^3$ (b) abc

(c) $(abc)^{1/3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

129. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+\sqrt{2+x}}-\sqrt{3}}{x-2} =$

(a) $\frac{1}{8\sqrt{3}}$ (b) $\frac{1}{4\sqrt{3}}$

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

130. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x} =$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 2

(c) $\sqrt{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

131. $\lim_{x\to 0^+} x^m(\log x)^n, m, n\in N =$

(a) 0 (b) $\frac{m}{n}$

(c) mn (d) इनमें से कोई नहीं

132. $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^n}, n>0 =$

(a) 0 (b) 1

(c) $\frac{1}{n}$ (d) $\frac{1}{n!}$

133. $\lim_{x\to a}\frac{\log(x-a)}{\log(e^x-e^a)} =$

(a) 1 (b) –1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

134. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e + \frac{1}{2}ex}{x^2} =$ **[DCE 2001]**

(a) $\frac{11e}{24}$ (b) $\frac{-11e}{24}$

(c) $\frac{e}{24}$ (d) इनमें से कोई नहीं

135. $\lim_{x\to \pi/2} \left[x \tan x - \left(\frac{\pi}{2}\right)\sec x\right] =$

(a) 1 (b) –1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

136. $\lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin(x+a)+\sin(a-x)-2\sin a}{x \sin x}\right] =$

(a) $\sin a$ (b) $\cos a$

(c) $-\sin a$ (d) $\frac{1}{2}\cos a$

137. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+5x^2}{1+3x^2}\right)^{1/x^2} =$ **[IIT 1996; DCE 2001]**

(a) e^2 (b) e

(c) e^{-2} (d) e^{-1}

138. $\lim_{x\to \infty} \frac{(2x-3)(3x-4)}{(4x-5)(5x-6)} =$ **[MP PET 1996]**

(a) 0 (b) 1/10

(c) 1/5 (d) 3/10

139. यदि $f(x) = \frac{\sin(e^{x-2}-1)}{\log(x-1)}$, तो $\lim_{x\to 2} f(x)$ का मान होगा

(a) –2 (b) –1

(c) 0 (d) 1

140. $\lim_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+8x+3} - \sqrt{x^2+4x+3}) =$ **[MP PET 1997]**

(a) 0 (b) ∞

(c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

141. यदि $\lim_{x\to 5} \frac{x^k - 5^k}{x-5} = 500$, तब k का धनात्मक पूर्णांक मान है **[MP PET 1998]**

(a) 3 (b) 4

(c) 5 (d) 6

142. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+x^2}}{x^2}$ का मान है **[MP PET 1999]**

(a) 1 (b) –1

(c) –2 (d) 0

143. यदि $f(x) = \begin{cases} x, \text{ यदि } x \text{ परिमेय है} \\ -x, \text{ यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$ तब $\lim_{x\to 0} f(x) =$

[Kurukshetra CEE 1998; UPSEAT 2004]

(a) शून्य (b) 1

(c) –1 (d) अनिर्धारित

144. $\lim_{x\to 0} \frac{xe^x - \log(1+x)}{x^2}$ का मान होगा **[RPET 1996]**

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{3}{2}$

145. $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x+8}}{4x+5}$ का मान है **[Roorkee 1998]**

(a) $-1/2$ (b) 0

(c) $1/2$ (d) 1

146. $\lim_{x\to \infty} \left[1+\frac{1}{mx}\right]^x$ का मान है **[Kurukshetra CEE 1998]**

(a) $e^{1/m}$ (b) $e^{-1/m}$

(c) e^m (d) m^e

147. एक फलन f इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{यदि } 0 \le x \le 1 \\ 5-3x & \text{यदि } 1 < x \le 2 \end{cases}$, तब **[SCRA 1996]**

(a) $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

(b) $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$

(c) $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

(d) $\lim_{x\to 1} f(x)$ का अस्तित्व नहीं होगा

148. सीमा $\frac{x^3-8}{x^2-4}$ का मान होगा जबकि $(x\to 2)$ **[SCRA 1996]**

(a) 3 (b) $\frac{3}{2}$

(c) 1 (d) 0

149. सीमा $\frac{x^3-x^2-18}{x-3}$ का मान होगा जबकि $(x\to 3)$ **[SCRA 1996]**

(a) 3 (b) 9

(c) 18 (d) 21

150. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x}{x} =$ **[SCRA 1996]**

(a) 0 (b) ∞

(c) –1 (d) 1

151. $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^2+3x+4}{3x^2+3x+4}$ का मान होगा **[SCRA 1996]**

(a) $\frac{2}{3}$ (b) 1

(c) 0 (d) ∞

152. $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ है **[SCRA 1996]**

(a) 0 (b) 1 (c) –1 (d) अस्तित्वहीन

153. $\lim_{x\to4}\left[\frac{x^{3/2}-8}{x-4}\right]=$ [DCE 1999]

(a) 3/2 (b) 3
(c) 2/3 (d) 1/3

154. $\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\left(\frac{1}{x}+1\right)}}=$ [DCE 1999]

(a) 0 (b) 1
(c) अस्तित्व नहीं है (d) इनमें से कोई नहीं

155. $\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\log(1+x)}{x^2}$ का मान है [RPET 1999]

(a) 1/2 (b) 0
(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

156. $\lim_{a\to0}\frac{\sin a-\tan a}{\sin^3 a}$ का मान होगा [UPSEAT 1999]

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$
(c) 1 (d) –1

157. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+y}\right)^n=$ [AMU 1999]

(a) 0 (b) 1
(c) $1/y$ (d) e^{-y}

158. यदि $f(x)=\begin{cases}x : x<0\\ 1 : x=0\\ x^2 : x>0\end{cases}$, तब $\lim_{x\to0}f(x)=$ [DCE 2000]

(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) अस्तित्व नहीं है

159. यदि $f(x)=\begin{cases}\sin x, x\ne n\pi, n\in Z\\ 0, \text{ अन्यथा}\end{cases}$ तथा $g(x)=\begin{cases}x^2+1, x\ne0,2\\ 4, x=0\\ 5, x=2\end{cases}$,

तब $\lim_{x\to0}g\{f(x)\}=$ [Karnataka CET 2000]

(a) 1 (b) 0
(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$

160. $\lim_{x\to1}\frac{1+\log x-x}{1-2x+x^2}=$ [Karnataka CET 2000; Pb. CET 2001]

(a) 1 (b) –1
(c) 0 (d) $-\frac{1}{2}$

161. $\lim_{x\to0}\frac{a^{\sin x}-1}{b^{\sin x}-1}=$ [Karnataka CET 2000]

(a) $\frac{a}{b}$ (b) $\frac{b}{a}$
(c) $\frac{\log a}{\log b}$ (d) $\frac{\log b}{\log a}$

162. $\lim_{x\to2}\frac{3^{x/2}-3}{3^x-9}$ का मान है [MP PET 2000]

(a) 0 (b) 1/3
(c) $1/6$ (d) $\ln 3$

163. $\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x-\tan^{-1}x}{x^3}=$ [RPET 2000]

(a) 0 (b) 1
(c) –1 (d) $1/2$

164. $\lim_{x\to0}\frac{x\tan 2x-2x\tan x}{(1-\cos 2x)^2}=$ [IIT 1999]

(a) 2 (b) –2
(c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

165. $\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos 2x)\sin 5x}{x^2\sin 3x}=$

[MP PET 2000; UPSEAT 2000; Karnataka CET 2002]

(a) 10/3 (b) 3/10
(c) 6/5 (d) 5/6

166. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=$ [AMU 2000]

(a) 0 (b) 1
(c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

167. $x\in R$ के लिए, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^x=$ [IIT Screening 2000]

(a) e (b) e^{-1}
(c) e^{-5} (d) e^5

168. $\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ का मान है [Karnataka CET 2001]

(a) 1/2 (b) ∞
(c) 1 (d) 0

169. $\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}\right]$ का मान है [Karnataka CET 2001]

(a) 1 (b) 0
(c) $\sqrt{a}$ (d) $1/\sqrt{a}$

170. $\lim_{\alpha\to\beta}\left[\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\right]=$ [MP PET 2001]

(a) 0 (b) 1
(c) $\frac{\sin\beta}{\beta}$ (d) $\frac{\sin 2\beta}{2\beta}$

171. $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}=$ [UPSEAT 2001]

(a) $\pi/2$ (b) 0
(c) $2/e$ (d) $-e/2$

172. $\lim_{x\to1}\frac{1+\cos\pi x}{\tan^2\pi x}=$ [AMU 2001]

(a) 0 (b) 1/2
(c) 1 (d) 2

173. $\lim_{m\to\infty}\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m=$ [AMU 2001]

(a) 0 (b) e
(c) 1/e (d) 1

174. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+b} =$ [EAMCET 2001]

(a) 1 (b) e^{b-a}
(c) e^{a-b} (d) e^{b}

175. $\lim_{x\to\pi/2}\frac{a^{\cot x}-a^{\cos x}}{\cot x-\cos x} =$ [Kerala (Engg.) 2001; J & K 2005]

(a) $\log a$ (b) $\log 2$
(c) a (d) $\log x$

176. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\cos^2 x)}{x^2} =$

[IIT Screening 2001;UPSEAT 2001; MP PET 2002]

(a) $-\pi$ (b) π
(c) $\pi/2$ (d) 1

177. $\lim_{x\to 3}[x] =$, (जहाँ [.] = महत्तम पूर्णांक फलन) [DCE 2002]

(a) 2 (b) 3
(c) अस्तित्व नहीं है (d) इनमें से कोई नहीं

178. यदि $f(x)=\begin{vmatrix}\sin x & \cos x & \tan x\\ x^3 & x^2 & x\\ 2x & 1 & 1\end{vmatrix}$, तब $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} =$

[Karnataka CET 2002]

(a) 3 (b) –1
(c) 0 (d) 1

179. $\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{3^x-1} =$ [MP PET 2002]

(a) $\log_e 3$ (b) 0
(c) 1 (d) $\log_3 e$

180. $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ [UPSEAT 2002]

(a) $x=0$ पर सतत् है (b) $x=0$ पर अवकलनीय है
(c) अस्तित्व नहीं है (d) इनमें से कोई नहीं

181. यदि $f(x)=4$ तथा $f'(x)=4$, तब $\lim_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2} =$

[AIEEE 2002]

(a) 2 (b) – 2
(c) – 4 (d) 3

182. $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x^n-[x]}{[x]} =$, $n\in N$, ($[x]$ महत्तम पूर्णांक x से कम या बराबर को प्रदर्शित करता है) [AIEEE 2002]

(a) का मान –1 है (b) का मान 0 है
(c) का मान 1 है (d) अस्तित्व नहीं है

183. यदि $f(1)=1, f'(1)=2$, तब $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{\sqrt{x}-1} =$ [AIEEE 2002]

(a) 2 (b) 4
(c) 1 (d) 1/2

184. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2-n-1}\right)^{n(n-1)} =$ [AMU 2002]

(a) e (b) e^2
(c) e^{-1} (d) 1

185. $\lim_{x\to 0}\frac{4^x-9^x}{x(4^x+9^x)} =$ [EAMCET 2002]

(a) $\log\left(\frac{2}{3}\right)$ (b) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right)$
(c) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{2}{3}\right)$ (d) $\log\left(\frac{3}{2}\right)$

186. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{e^x-1} =$ [Kerala (Engg.) 2002]

(a) $\log\left(\frac{a}{b}\right)$ (b) $\log\left(\frac{b}{a}\right)$
(c) $\log(ab)$ (d) $\log(a+b)$

187. यदि $f(x)=\cot^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$ तथा $g(x)=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$, तब $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ है $\left(\text{जबकि } 0<a<\frac{1}{2}\right)$ [Orissa JEE 2002]

(a) $\frac{3}{2(1+a^2)}$ (b) $\frac{3}{2(1+x^2)}$
(c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{3}{2}$

188. $\lim_{x\to -2}\frac{\sin^{-1}(x+2)}{x^2+2x} =$ [Orissa JEE 2002]

(a) 0 (b) ∞
(c) –1/2 (d) इनमें से कोई नहीं

189. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x+1} =$ [RPET 2003, UPSEAT 2003]

(a) e^2 (b) e^3
(c) e (d) e^{-1}

190. $\lim_{x\to 0}(1-ax)^{\frac{1}{x}} =$ [Karnataka CET 2003]

(a) e (b) e^{-a}
(c) 1 (d) e^a

191. $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ का मान है [MP PET 2003]

(a) $\frac{2}{9}$ (b) $-\frac{2}{49}$
(c) $\frac{1}{56}$ (d) $-\frac{1}{56}$

192. यदि $\lim_{x\to 0}\frac{\log(3+x)-\log(3-x)}{x}=k$, तो k का मान है

[AIEEE 2003]

(a) 0 (b) $-\frac{1}{3}$
(c) $\frac{2}{3}$ (d) $-\frac{2}{3}$

193. यदि $\lim_{x\to 0}\frac{[(a-n)nx-\tan x]\sin nx}{x^2}=0$, जहाँ n एक अशून्य वास्तविक संख्या है, तब a का मान है [IIT Screening 2003]

(a) 0 (b) $\frac{n+1}{n}$

(c) n (d) $n+\frac{1}{n}$

194. $\lim_{h\to 0}\frac{f(2h+2+h^2)-f(2)}{f(h-h^2+1)-f(1)}=$ (जबकि $f'(2)=6$ तथा $f'(1)=4$) [IIT Screening 2003]

(a) अस्तित्व नहीं है (b) – 3/2

(c) 3/2 (d) 3

195. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=$ [Kurukshetra CEE 2002]

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) अस्तित्व नहीं है

196. $\lim_{x\to\pi/6}\left[\frac{3\sin x-\sqrt{3}\cos x}{6x-\pi}\right]=$ [EAMCET 2003]

(a) $\sqrt{3}$ (b) $1/\sqrt{3}$

(c) $-\sqrt{3}$ (d) $-1/\sqrt{3}$

197. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-1}{x^2}=$ [Orissa JEE 2003]

(a) 1 (b) – 1

(c) 1/2 (d) –1/2

198. $\lim_{n\to\infty}(3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}=$ [Karnataka CET 2003]

(a) 3 (b) 4

(c) ∞ (d) e

199. यदि $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)^{2x}=e^2$, तब a और b का मान है [AIEEE 2004]

(a) $a=1, b=2$ (b) $a=1, b\in R$

(c) $a\in R, b=2$ (d) $a\in R, b\in R$

200. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\cot\theta}=$ [Karnataka CET 2004]

(a) 0 (b) –1

(c) 1 (d) ∞

201. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x-1}\right)^{3x-1}=$ [Karnataka CET 2004]

(a) e^{12} (b) e^{-12}

(c) e^4 (d) e^3

202. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}\right]=$ [UPSEAT 2004]

(a) –1 (b) 0

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

203. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$ का मान है [Pb. CET 2000]

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 1/2

204. $\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\log(1+x)$ का मान है [Pb. CET 2000]

(a) e (b) e^2

(c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

205. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ का मान है [Pb. CET 2004]

(a) $e^{-1/3}$ (b) $e^{-2/3}$

(c) e^{-1} (d) e^{-2}

206. $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(3x+4)}{x^2(x-8)}$ का मान है [Pb. CET 2002]

(a) 2 (b) 3

(c) 1 (d) 0

207. यदि $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin[x]}{[x]}, & \text{जब } [x]\neq 0\\ 0, & \text{जब } [x]=0\end{cases}$ जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन है, तब $\lim_{x\to 0}f(x)=$ [IIT 1985; RPET 1995]

(a) –1 (b) 1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

208. यदि $\lim_{n\to\infty}\frac{1-(10)^n}{1+(10)^{n+1}}=\frac{-\alpha}{10}$, तब α का मान है [Orissa JEE 2005]

(a) 0 (b) –1

(c) 1 (d) 2

209. $\lim_{x\to 0}\frac{\log[1+x^3]}{\sin^3 x}=$ [AMU 2005]

(a) 0 (b) 1

(c) 3 (d) इनमें से कोई नहीं

210. $\lim_{\theta\to 0}\frac{4\theta(\tan\theta-2\theta\tan\theta)}{(1-\cos 2\theta)^2}$ है [Orissa JEE 2005]

(a) $1/\sqrt{2}$ (b) 1/2

(c) 1 (d) 2

211. $\lim_{x\to 0}\frac{27^x-9^x-3^x+1}{\sqrt{5}-\sqrt{4+\cos x}}$ का मान है [J & K 2005]

(a) $\sqrt{5}(\log 3)^2$ (b) $8\sqrt{5}\log 3$

(c) $16\sqrt{5}\log 3$ (d) $8\sqrt{5}(\log 3)^2$

212. $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{x^n+1}$ जहाँ $x<-1$ का मान है [J & K 2005]

(a) 1/2 (b) –1/2

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

213. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ का मान है [DCE 2005]

(a) 1/2 (b) 1/3

(c) 1/4 (d) इनमें से कोई नहीं

214. नियतांक α और β के मान क्रमशः हैं जबकि $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-\alpha x-\beta\right)=0$ [Orissa JEE 2005]

(a) (1, 1) (b) (–1, 1)
(c) (1, –1) (d) (0, 1)

215. माना $f:R\to R$ एक अवकलनीय फलन $f(2)=6, f'(2)=\left(\frac{1}{48}\right)$ रखता है, तब $\lim_{x\to 2}\int_6^{f(x)}\frac{4t^3}{x-2}dt=$ [AIEEE 2005]

(a) 12 (b) 18
(c) 24 (d) 36

216. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1-n^2}+\frac{2}{1-n^2}+.....+\frac{n}{1-n^2}\right]=$ [IIT 1984; DCE 2000; Pb. CET 2000]

(a) 0 (b) $-\frac{1}{2}$
(c) $\frac{1}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

217. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+1}+\frac{9}{n^3+1}+........+\frac{n^2}{n^3+1}\right]=$

(a) 1 (b) 2/3
(c) 1/3 (d) 0

218. यदि $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ तथा $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, तब $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}k}}$ समान है

(a) 0 (b) a
(c) $\sqrt{2}a$ (d) $2a$

219. यदि $a_1=1$ और $a_{n+1}=\frac{4+3a_n}{3+2a_n}, n\ge 1$ और यदि $\lim_{n\to\infty}a_n=n$, तब a का मान है

(a) $\sqrt{2}$ (b) $-\sqrt{2}$
(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

220. $\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{8}\right)...\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$ का मान है

(a) 1 (b) $\frac{\sin x}{x}$
(c) $\frac{x}{\sin x}$ (d) इनमें से कोई नहीं

221. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}=$ [RPET 1996]

(a) 2 (b) –1
(c) 1 (d) 3

222. $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+......+\frac{n}{n^2}\right\}$ है [SCRA 1996]

(a) 1/2 (b) 0
(c) 1 (d) ∞

223. $\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{\sum n}$ का मान होगा [UPSEAT 1999]

(a) – 2 (b) – 1
(c) 2 (d) 1

224. यदि $x_n=\frac{1-2+3-4+5-6+.....-2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}}$, तब $\lim_{n\to\infty}x_n=$ [AMU 2000]

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{2}{3}$
(c) $\frac{2}{3}$ (d) 1

225. $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+.....+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}=$

(a) 0 (b) 1
(c) 10 (d) 100

226. $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+....n}{n^2+100}$ का मान है [Pb. CET 2002]

(a) ∞ (b) $\frac{1}{2}$
(c) 2 (d) 0

227. $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos t^2}{x}dt$ का मान है

(a) 0 (b) 1
(c) –1 (d) इनमें से कोई नहीं

सांतत्य

1. यदि $f(x)=|x-2|$, तो [Roorkee 1984]

(a) $\lim_{x\to 2+}f(x)\ne 0$
(b) $\lim_{x\to 2-}f(x)\ne 0$
(c) $\lim_{x\to 2+}f(x)\ne\lim_{x\to 2-}f(x)$
(d) $f(x)$, $x=2$ पर सतत् है

2. यदि फलन $f(x)=\begin{cases}\frac{k\cos x}{\pi-2x}, & x\ne\frac{\pi}{2}\\ 3, & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$, $x=\frac{\pi}{2}$ पर सतत् हो, तो $k=$

(a) 3 (b) 6
(c) 12 (d) इनमें से कोई नहीं

3. फलन $f(x)=\frac{\log(1+ax)-\log(1-bx)}{x}$, $x=0$ पर अपरिभाषित है। $x=0$ पर फलन f के सतत् होने के लिए $x=0$ पर फलन f का मान होना चाहिये [IIT 1983; MP PET 1995; Karnataka CET 1999; Kurukshetra CEE 2002; AMU 2002]

(a) $a-b$
(b) $a+b$
(c) $\log a+\log b$
(d) $\log a-\log b$

4. माना $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x^2-16x+20}{(x-2)^2}, & x\neq 2\\ k, & x=2\end{cases}$ यदि $f(x)$, x के सभी मानों के लिए सतत् हो, तो $k=$ [IIT 1981]
(a) 7 (b) −7
(c) ±7 (d) इनमें से कोई नहीं

5. माना $f(x)=\begin{cases}x^2+k, & x\geq 0\\ -x^2-k, & x<0\end{cases}$, यदि फलन $f(x)$, $x=0$ पर सतत् हो, तो $k=$
(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) −2

6. फलन $f(x)=(x+1)^{1/x}$ के $x=0$ पर सतत् होने के लिये $f(0)$ किस प्रकार परिभाषित होना चाहिए [MNR 1989]
(a) $f(0)=0$ (b) $f(0)=e$
(c) $f(0)=1/e$ (d) $f(0)=1$

7. यदि $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1/2\\ 1, & x=1/2\\ 1-x, & 1/2<x<1\end{cases}$, तो
(a) $\lim_{x\to 1/2+} f(x)=2$
(b) $\lim_{x\to 1/2-} f(x)=2$
(c) $f(x)$, $x=\dfrac{1}{2}$ पर सतत् है
(d) $f(x)$, $x=\dfrac{1}{2}$ पर असतत् है

8. यदि $f(x)=\begin{cases}(x^2/a)-a, & x<a\\ 0, & x=a\\ a-(x^2/a), & x>a\end{cases}$, तो
(a) $\lim_{x\to a} f(x)=a$
(b) $f(x)$, $x=a$ पर सतत् है
(c) $f(x)$, $x=a$ पर असतत् है
(d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि $f(x)=\begin{cases}e^{1/x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, तो
(a) $\lim_{x\to 0+} f(x)=e$
(b) $\lim_{x\to 0+} f(x)=0$
(c) $f(x)$, $x=0$ पर असतत् है
(d) इनमें से कोई नहीं

10. यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$, तो [IIT 1972]
(a) $\lim_{x\to 1+} f(x)=2$
(b) $\lim_{x\to 1-} f(x)=3$
(c) $f(x)$, $x=1$ पर असतत् है
(d) इनमें से कोई नहीं

11. वे बिन्दु, जिन पर फलन $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x-12}$ असतत् है, हैं
(a) −3, 4 (b) 3, −4
(c) −1,−3, 4 (d) −1, 3, 4

12. यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}+\cos x, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$, तो [DSSE 1986]
(a) $\lim_{x\to 0+} f(x)\neq 2$ (b) $\lim_{x\to 0-} f(x)=0$
(c) $f(x)$, $x=0$ पर सतत् है (d) इनमें से कोई नहीं

13. यदि $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, तो
(a) $f(0+0)=1$ (b) $f(0-0)=1$
(c) f, $x=0$ पर सतत् है (d) इनमें से कोई नहीं

14. k का वह मान जिसके लिए फलन
$f(x)=\begin{cases}k(2x-x^2), & x<0\\ \cos x, & x\geq 0\end{cases}$, $x=0$ पर सतत् होगा, है
(a) 1 (b) 2
(c) 4 (d) इनमें से कोई नहीं

15. यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^{1/x}+1}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, तो
(a) $\lim_{x\to 0+} f(x)=1$ (b) $\lim_{x\to 0-} f(x)=1$
(c) $f(x)$, $x=0$ पर सतत् है (d) इनमें से कोई नहीं

16. यदि $f(x)=\begin{cases}(1+2x)^{1/x}, & x\neq 0\\ e^2, & x=0\end{cases}$, तो
(a) $\lim_{x\to 0+} f(x)=e$
(b) $\lim_{x\to 0-} f(x)=e^2$
(c) $f(x)$, $x=0$ पर असतत् है
(d) इनमें से कोई नहीं

17. यदि $f(x)=\begin{cases}2^{1/x}, & x\neq 0\\ 3, & x=0\end{cases}$, तो
(a) $\lim_{x\to 0+} f(x)=0$ (b) $\lim_{x\to 0-} f(x)=\infty$
(c) $f(x)$, $x=0$ पर सतत् है (d) इनमें से कोई नहीं

18. यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x^2, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, तो
(a) $\lim_{x\to 0+} f(x)\neq 0$ (b) $\lim_{x\to 0-} f(x)\neq 0$
(c) $f(x)$, $x=0$ पर सतत् है (d) इनमें से कोई नहीं

19. यदि $f(x)=\begin{cases}x-1, & \text{जब } x<0\\ \dfrac{1}{4}, & \text{जब } x=0\\ x^2, & \text{जब } x>0\end{cases}$, तो [Roorkee 1988]
(a) $\lim_{x\to 0+} f(x)=1$
(b) $\lim_{x\to 0-} f(x)=1$
(c) $f(x)$, $x=0$ पर असतत् है
(d) इनमें से कोई नहीं

20. ग्राफ $f(x)=\log x$ के लिए निम्न में से कौनसा कथन सत्य है

(a) ग्राफ प्रदर्शित करता है कि फलन सतत् है

(b) ग्राफ प्रदर्शित करता है कि फलन असतत् है

(c) ग्राफ x के ऋणात्मक एवं धनात्मक मानों के लिए प्राप्त होता है

(d) ग्राफ x-अक्ष के सापेक्ष सममित है

21. यदि फलन $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{जब } x\neq 1\\ k, & \text{जब } x=1\end{cases}$, $x=1$ पर सतत् है तो k का मान होगा

(a) –1 (b) 2

(c) –3 (d) –2

22. फलन $f(x)=\dfrac{x}{[x]}$, किन बिन्दुओं पर असतत् है जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को निरूपित करता है

(a) केवल धनात्मक पूर्णांकों पर

(b) सभी धनात्मक एवं ऋणात्मक पूर्णांकों तथा (0, 1) पर

(c) सभी परिमेय संख्याओं पर

(d) इनमें से कोई नहीं

23. फलन $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 ax}{x^2}, & \text{जब } x\neq 0\\ 1, & \text{जब } x=0\end{cases}$ के लिए कौनसा कथन सत्य है

(a) $f(x)$, $x=0$ पर सतत् है

(b) $f(x)$, $x=0$ पर असतत् है जब $a\neq\pm1$

(c) $f(x)$, $x=a$ पर सतत् है

(d) इनमें से कोई नहीं

24. यदि $f(x)=\begin{cases}-x^2, & \text{जब } x\leq 0\\ 5x-4, & \text{जब } 0<x\leq 1\\ 4x^2-3x, & \text{जब } 1<x<2\\ 3x+4, & \text{जब } x\geq 2\end{cases}$, तो

(a) $f(x)$, $x=0$ पर सतत् है

(b) $f(x)$, $x=2$ पर सतत् है

(c) $f(x)$, $x=1$ पर असतत् है

(d) इनमें से कोई नहीं

25. यदि $f(x)=\begin{cases}\sin^{-1}|x|, & \text{जब } x\neq 0\\ 0, & \text{जब } x=0\end{cases}$, तो

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)\neq 0$ (b) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)\neq 0$

(c) $f(x)$, $x=0$ पर सतत् है (d) इनमें से कोई नहीं

26. यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{5x}, & \text{जब } x\neq 0\\ k, & \text{जब } x=0\end{cases}$, $x=0$ पर सतत् हो, तो k का मान होगा [AI CBSE 1991]

(a) 1 (b) $\dfrac{2}{5}$

(c) $-\dfrac{2}{5}$ (d) इनमें से कोई नहीं

27. यदि $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & \text{जब } 0\leq x\leq 1\\ 1-x, & \text{जब } x>1\end{cases}$, तो

(a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq 0$ (b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq 2$

(c) $f(x)$, $x=1$ पर असतत् है (d) इनमें से कोई नहीं

28. यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1}, & \text{जब } x\neq -1\\ -2, & \text{जब } x=-1\end{cases}$, तो

(a) $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-2$ (b) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=-2$

(c) $f(x)$, $x=-1$ पर सतत् है (d) उपरोक्त सभी

29. यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{2}-x, & \text{जब } x<2\\ 1, & \text{जब } x=2\\ x-\dfrac{3}{2}, & \text{जब } x>2\end{cases}$, तो

(a) फलन $x=2$ पर सतत् है

(b) फलन $x=2$ पर असतत् है

(c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$

(d) इनमें से कोई नहीं

30. यदि $f(x)=|x-b|$, तो फलन [AI CBSE 1984]

(a) $x=1$ पर सतत् है (b) $x=b$ पर सतत् है

(c) $x=b$ पर असतत् है (d) इनमें से कोई नहीं

31. यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-a|}{x-a}, & \text{जब } x\neq a\\ 1, & \text{जब } x=a\end{cases}$, तो [AI CBSE 1983]

(a) फलन $x=a$ पर सतत् है

(b) फलन $x=a$ पर असतत् है

(c) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$

(d) इनमें से कोई नहीं

32. यदि $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{जब } x\neq 1\\ 2, & \text{जब } x=1\end{cases}$, तो

(a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

(b) फलन $x=1$ पर सतत् है

(c) फलन $x=1$ पर असतत् है

(d) इनमें से कोई नहीं

33. यदि $f(x)=\begin{cases}1+x, & \text{जब } x\leq 2\\ 5-x, & \text{जब } x\leq 3\end{cases}$, तो

(a) $f(x)$, $x=2$ पर सतत् है

(b) $f(x)$, $x=2$ पर असतत् है

(c) $f(x)$, $x=3$ पर सतत् है

(d) इनमें से कोई नहीं

34. यदि $f(x)=\begin{cases}1, & \text{जब } 0<x\leq\dfrac{3\pi}{4}\\ 2\sin\dfrac{2}{9}x, & \text{जब } \dfrac{3\pi}{4}<x<\pi\end{cases}$, तो [IIT 1991]

(a) $f(x)$, $x=0$ पर सतत् है

(b) $f(x)$, $x=\pi$ पर सतत् है

(c) $f(x)$, $x=\dfrac{3\pi}{4}$ पर सतत् है

(d) $f(x)$, $x=\dfrac{3\pi}{4}$ पर असतत् है

35. यदि $f(x)=\begin{cases} x\sin x, & \text{जब } 0<x\le\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2}\sin(\pi+x), & \text{जब } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$, तो फलन [IIT 1991]

(a) $x=\dfrac{\pi}{2}$ पर असतत् है (b) $x=\dfrac{\pi}{2}$ पर सतत् है

(c) $x=0$ पर सतत् है (d) इनमें से कोई नहीं

36. यदि $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos 4x}{x^2}, & \text{जब } x<0 \\ a, & \text{जब } x=0 \\ \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{(16+\sqrt{x})}-4}, & \text{जब } x>0 \end{cases}$

$x=0$ पर सतत् है तो 'a' का मान होगा [IIT 1990; AMU 2000]

(a) 8 (b) – 8

(c) 4 (d) इनमें से कोई नहीं

37. यदि $f(x)=\begin{cases} ax^2-b, & \text{जब } 0\le x<1 \\ 2, & \text{जब } x=1 \\ x+1, & \text{जब } 1<x\le 2 \end{cases}$, $x=1$ पर सतत् है तो a, b के अधिक उपयुक्त मान होंगे [BIT Ranchi 1983]

(a) $a=2, b=0$ (b) $a=1, b=-1$

(c) $a=4, b=2$ (d) उपरोक्त सभी

38. यदि $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-|x|}{x}, & \text{जब } x\ne 0 \\ 2, & \text{जब } x=0 \end{cases}$, तो [AI CBSE 1982]

(a) $f(x)$, $x=0$ पर सतत् है

(b) $f(x)$, $x=0$ पर असतत् है

(c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$

(d) इनमें से कोई नहीं

39. यदि $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-16}{x-2}, & \text{जब } x\ne 2 \\ 16, & \text{जब } x=2 \end{cases}$, तो [AISSE 1984]

(a) $f(x)$, $x=2$ पर सतत् है

(b) $f(x)$, $x=2$ पर असतत् है

(c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=16$

(d) इनमें से कोई नहीं

40. यदि $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{जब } x\le 1 \\ x+5, & \text{जब } x>1 \end{cases}$, तो [AISSE 1983]

(a) $f(x)$, $x=1$ पर सतत् है

(b) $f(x)$, $x=1$ पर सतत् है

(c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$

(d) इनमें से कोई नहीं

41. यदि $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+3x-10}{x^2+2x-15}, & \text{जब } x\ne -5 \\ a, & \text{जब } x=-5 \end{cases}$, $x=-5$ पर सतत् है तो 'a' का मान होगा [MP PET 1987]

(a) $\dfrac{3}{2}$ (b) $\dfrac{7}{8}$

(c) $\dfrac{8}{7}$ (d) $\dfrac{2}{3}$

42. यदि $f(x)=\begin{cases} x+\lambda, & x<3 \\ 4, & x=3 \\ 3x-5, & x>3 \end{cases}$, $x=3$ पर सतत् हो, तो $\lambda=$

[MP PET 1994, 2001; RPET 1999]

(a) 4 (b) 3

(c) 2 (d) 1

43. k का वह मान जिसके लिए फलन $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0 \\ k, & x=0 \end{cases}$, $x=0$ पर सतत् है [MNR 1995]

(a) 8 (b) 1

(c) –1 (d) इनमें से कोई नहीं

44. यदि $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\ne n\pi,\ n\in Z \\ 2, & \text{अन्यथा} \end{cases}$ व $g(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\ne 0,2 \\ 4, & x=0 \\ 5, & x=2 \end{cases}$,

तो $\lim\limits_{x\to 0} g\{f(x)\}=$ [Kurukshetra CEE 1996]

(a) 5 (b) 6

(c) 7 (d) 1

45. माना $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-4}{|x-4|}+a, & x<4 \\ a+b, & x=4 \\ \dfrac{x-4}{|x-4|}+b, & x>4 \end{cases}$ तो $f(x)$, $x=4$ पर सतत् होगा यदि

(a) $a=0, b=0$ (b) $a=1, b=1$

(c) $a=-1, b=1$ (d) $a=1, b=-1$

46. माना $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-5x^2+4}{|(x-1)(x-2)|}, & x\ne 1,2 \\ 6, & x=1 \\ 12, & x=2 \end{cases}$, तो $f(x)$ निम्न समुच्चय में सतत् है

(a) R (b) $R-\{1\}$

(c) $R-\{2\}$ (d) $R-\{1,2\}$

47. $f(0)$ का मान इस प्रकार कि $f(x)=\dfrac{(27-2x)^{1/3}-3}{9-3(243+5x)^{1/5}}, (x\ne 0)$ सतत् है, होगा

(a) $2/3$ (b) 6

(c) 2 (d) 4

48. यदि $x=0$ पर फलन $f(x)=\begin{cases} (\cos x)^{1/x}, & x\ne 0 \\ k, & x=0 \end{cases}$ पर सतत् है, तब k का मान है [Kurukshetra CEE 1996]

(a) 1 (b) –1

(c) 0 (d) e

49. फलन $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<2 \\ 2x-3, & x\ge 2 \end{cases}$ एक सतत् फलन है

[MP PET 1996]

(a) x के सभी वास्तविक मानों के लिए

(b) केवल $x=2$ के लिए

(c) x के सभी वास्तविक मानों के लिए जबकि $x\ne 2$

(d) केवल x के सभी पूर्णांकीय मानों के लिए

50. यदि फलन $f(x)=\begin{cases}1+\sin\frac{\pi x}{2}, & \text{जबकि} -\infty < x \le 1\\ ax+b, & \text{जबकि } 1<x<3\\ 6\tan\frac{x\pi}{12}, & \text{जबकि } 3\le x<6\end{cases}$ अन्तराल $(-\infty, 6)$ में सतत् है, तब a और b के मान क्रमशः हैं [MP PET 1998]

(a) 0, 2 (b) 1, 1
(c) 2, 0 (d) 2, 1

51. यदि $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0\\ k, & x=0\end{cases}$, $x=0$ पर सतत् हो, तो k का मान होगा [MP PET 1999; AMU 1999; RPET 2003]

(a) 1 (b) –1
(c) 0 (d) 2

52. यदि $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin[x]}{[x]+1}, & x>0\\ \frac{\cos\frac{\pi}{2}[x]}{[x]}, & x<0\\ k, & x=0\end{cases}$; जहाँ $[x]$ महत्तम पूर्णांक फलन प्रदर्शित करता है जो कि x से कम या बराबर है। यदि फलन f, $x=0$ पर सतत् हो, तो k का मान होगा [Kurukshetra CEE 1998]

(a) शून्य (b) 1
(c) –1 (d) अनिर्धारित

53. फलन $f(x)=\begin{cases}x+2 & , 1\le x\le 2\\ 4 & , x=2\\ 3x-2 & , x>2\end{cases}$ सतत् है [DCE 1999]

(a) केवल $x=2$ पर (b) $x\le 2$ पर
(c) $x\ge 2$ पर (d) इनमें से कोई नहीं

54. यदि फलन $f(x)=\begin{cases}5x-4 & , \text{ यदि } 0<x\le 1\\ 4x^2+3bx & , \text{ यदि } 1<x<2\end{cases}$ अपने डोमेन (प्रान्त) के प्रत्येक बिन्दु पर सतत् है,तब b का मान होगा [RPET 2000]

(a) – 1 (b) 0
(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

55. A तथा B के मान जबकि फलन

$f(x)=\begin{cases}-2\sin x, & x\le -\frac{\pi}{2}\\ A\sin x+B, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ \cos x, & x\ge\frac{\pi}{2}\end{cases}$, प्रत्येक बिन्दु पर सतत् हो, होंगे [Pb. CET 2000]

(a) $A=0, B=1$ (b) $A=1, B=1$
(c) $A=-1, B=1$ (d) $A=-1, B=0$

56. यदि $f(x)=\frac{x^2-10x+25}{x^2-7x+10}$, $x\ne 5$ के लिए तथा f, $x=5$ पर सतत् हो, तो $f(5)=$ [EAMCET 2001]

(a) 0 (b) 5
(c) 10 (d) 25

57. $x=0$ पर फलन $f(x)=(x+1)^{\cot x}$ के सतत् होने के लिए $f(0)$ इस प्रकार परिभाषित होना चाहिए कि [UPSEAT 2000; Kurukshetra CEE 2001; Pb. CET 2004]

(a) $f(0)=\frac{1}{e}$ (b) $f(0)=0$
(c) $f(0)=e$ (d) इनमें से कोई नहीं

58. फलन $f(x)=\sin|x|$ [DCE 2002]

(a) सभी x के लिए सतत् है
(b) केवल निश्चित बिन्दुओं पर सतत् है
(c) सभी बिन्दुओं पर अवकलनीय है
(d) इनमें से कोई नहीं

59. यदि $f(x)=|x|$, तब $f(x)$ है [DCE 2002]

(a) सभी x के लिए सतत्
(b) $x=0$ पर अवकलनीय
(c) $x=0$ पर न तो सतत् है और न ही अवकलनीय
(d) इनमें से कोई नहीं

60. यदि $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\sin x}{\pi-2x}, & x\ne\frac{\pi}{2}\\ \lambda, & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$, $x=\pi/2$ पर सतत् है, तब λ का मान है [RPET 2002]

(a) –1 (b) 1
(c) 0 (d) 2

61. फलन $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin\pi x}{5x}, & x\ne 0\\ k, & x=0\end{cases}$, यदि $f(x)$, $x=0$ पर सतत् है, तब $k=$ [Karnataka CET 2002]

(a) $\frac{\pi}{5}$ (b) $\frac{5}{\pi}$
(c) 1 (d) 0

62. यदि $f(x)=\frac{2-\sqrt{x+4}}{\sin 2x}, (x\ne 0)$, $x=0$ पर सतत् है, तब $f(0)=$ [MP PET 2002]

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $-\frac{1}{4}$
(c) $\frac{1}{8}$ (d) $-\frac{1}{8}$

63. यदि फलन $f(x)=\begin{cases}x & , \text{ यदि } x \text{ परिमेय है}\\ 1-x, & \text{ यदि } x \text{ अपरिमेय है}\end{cases}$, तब $f(x)$ सतत् होगा जब n का मान है, (जहाँ n बिन्दुओं की संख्या है) [UPSEAT 2002]

(a) ∞ (b) 1
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

64. यदि $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3}, & \text{ यदि } x\ne 3\\ 2x+k, & \text{ अन्यथा}\end{cases}$, $x=3$ पर सतत् है, तो $k=$ [Kerala (Engg.) 2002]

(a) 3 (b) 0
(c) –6 (d) $\frac{1}{6}$

65. कोई फलन, $f(x)=\begin{cases}\left(x^2+e^{\frac{1}{2-x}}\right)^{-1} & , x\neq 2\\ k & , x=2\end{cases}$, यदि दाँयी ओर से $x=2$ पर सतत् है, तो k का मान होगा **[Orissa JEE 2002]**

(a) 0 (b) 1/4
(c) –1/4 (d) इनमें से कोई नहीं

66. फलन $f(x)=\dfrac{\log_e(1+x)-\log_e(1-x)}{x}$ को $x=0$ पर सतत् होने के लिए $f(0)$ का मान होना चाहिए **[MP PET 2003]**

(a) –1 (b) 0
(c) –2 (d) 2

67. यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+kx}-\sqrt{1-kx}}{x}, & -1\le x<0 \text{ के लिए}\\ 2x^2+3x-2 & , \quad 0\le x\le 1 \text{ के लिए}\end{cases}$, $x=0$ पर सतत् है, तो $k=$ **[EAMCET 2003]**

(a) – 4 (b) – 3
(c) – 2 (d) – 1

68. फलन $f(x)=\dfrac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x+\cos x}$, $x=\pi$ पर परिभाषित नहीं है। तब $f(\pi)$ का मान, जिसके लिए $x=\pi$ पर $f(x)$ सतत् हो, है **[Orissa JEE 2003]**

(a) $-\dfrac{1}{2}$ (b) $\dfrac{1}{2}$
(c) – 1 (d) 1

69. यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ k, & x=0\end{cases}$, $x=0$ पर सतत् है, तब $k=$ **[Karnataka CET 2004]**

(a) 0 (b) $\dfrac{1}{2}$
(c) $\dfrac{1}{4}$ (d) $-\dfrac{1}{2}$

70. R पर फलन f, R में बिन्दु a पर सतत् है यदि और यदि प्रत्येक $\in>0$ के लिए $\delta>0$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि **[UPSEAT 2004]**

(a) $|f(x)-f(a)|<\in\Rightarrow|x-a|<\delta$
(b) $|f(x)-f(a)|>\in\Rightarrow|x-a|>\delta$
(c) $|x-a|>\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|>\in$
(d) $|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\in$

71. फलन $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}, & x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$ के लिए निम्नलिखित में से कौनसा सही है **[MP PET 2004]**

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ अस्तित्व नहीं है
(b) $f(x)$, $x=0$ पर सतत् है
(c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$
(d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ का अस्तित्व है लेकिन $f(x)$, $x=0$ पर सतत् नहीं है

72. फलन 'f', इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x)=\begin{cases}2x-1, & \text{यदि } x>2\\ k, & \text{यदि } x=2\\ x^2-1, & \text{यदि } x<2\end{cases}$ सतत् है, तो k का मान होगा **[Pb. CET 2002]**

(a) 2 (b) 3
(c) 4 (d) –3

73. यदि फलन $f(x)=\dfrac{2x-\sin^{-1}x}{2x+\tan^{-1}x}$, $(x\neq 0)$ अपने डोमेन (प्रान्त) के प्रत्येक बिन्दु पर सतत् है, तब $f(0)=$ **[RPET 2000]**

(a) 2 (b) $1/3$
(c) $2/3$ (d) $-1/3$

74. फलन $f(x)=|x|+\dfrac{|x|}{x}$ है **[Karnataka CET 2003]**

(a) मूल बिन्दु पर सतत् है
(b) मूल बिन्दु पर असतत् है क्योंकि $|x|$ वहाँ पर असतत् है
(c) मूल बिन्दु पर असतत् है क्योंकि $\dfrac{|x|}{x}$ वहाँ पर असतत् है
(d) मूल बिन्दु पर असतत् है क्योंकि दोनों $|x|$ और $\dfrac{|x|}{x}$ वहाँ पर असतत् हैं

75. $x=0$ पर f का मान इस प्रकार है कि फलन $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{x}, x\neq 0$, $x=0$ पर सतत् है, है **[Kerala (Engg.) 2005]**

(a) 0 (b) log 2
(c) 4 (d) e^4
(e) log 4

76. फलन $f(x)=\dfrac{2x^2+7}{x^3+3x^2-x-3}$ असतत् है **[J&K 2005]**

(a) केवल $x=1$ के लिए
(b) केवल $x=1$ और $x=-1$ के लिए
(c) केवल $x=1, x=-1, x=-3$ के लिए
(d) $x=1, x=-1, x=-3$ और x के अन्य मानों के लिए

77. माना $f(x)=\begin{cases}x^p\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$ तब $f(x)$ सतत् है लेकिन $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है यदि **[DCE 2005]**

(a) $0<p\le 1$ (b) $1\le p<\infty$
(c) $-\infty<p<0$ (d) $p=0$

78. यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-[x]}{1+x}, & x\neq -1\\ 1 & , x=-1\end{cases}$, तब $f(|2k|)$ का मान होगा (जहाँ [ ] महत्तम पूर्णांक फलन प्रदर्शित करता है) **[DCE 2005]**

(a) $x=-1$ पर सतत् है
(b) $x=0$ पर सतत् है
(c) $x=\dfrac{1}{2}$ पर असतत् है
(d) उपरोक्त सभी

79. फलन $f(x)=\frac{1-\cos 4x}{8x^2}$, जहाँ $x\neq 0$ और $f(x)=k$ जहाँ $x=0$, $x=0$ पर एक सतत् फलन है तब k का मान होगा [AMU 2005]

(a) $k=0$ (b) $k=1$
(c) $k=-1$ (d) इनमें से कोई नहीं

80. यदि $f(x)=\begin{cases} e^x; & x\le 0 \\ |1-x|; & x>0\end{cases}$, तब [Roorkee 1995]

(a) $x=0$ पर $f(x)$ अवकलनीय है
(b) $x=0$ पर $f(x)$ सतत् है
(c) $x=1$ पर $f(x)$ अवकलनीय है
(d) $x=1$ पर $f(x)$ सतत् है

अवकलनीयता

1. निम्नलिखित में कौनसा कथन सत्य है
(a) सतत् फलन वर्धमान होता है
(b) वर्धमान फलन सतत् होता है
(c) सतत् फलन अवकलनीय होता है
(d) अवकलनीय फलन सतत् होता है

2. यदि $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{जब } x<2 \\ 2x-1, & \text{जब } x\ge 2\end{cases}$, तो $f'(2)$ बराबर है [MP PET 1997]

(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) अस्तित्व नहीं है

3. यदि $f(x)=\begin{cases} x\frac{e^{(1/x)}-e^{(-1/x)}}{e^{(1/x)}+e^{(-1/x)}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$ तो निम्न कथन सत्य है [Kurukshetra CEE 1998]

(a) f सभी बिन्दुओं पर सतत् और अवकलनीय है
(b) f सभी बिन्दुओं पर सतत् है किन्तु अवकलनीय नहीं
(c) f सभी बिन्दुओं पर अवकलनीय है
(d) f केवल मूल बिन्दु पर अवकलनीय है

4. यदि $f(x)=|x-3|$, तब f है [SCRA 1996; RPET 1997]
(a) $x=2$ पर असतत्
(b) $x=2$ पर अवकलनीय नहीं
(c) $x=3$ पर अवकलनीय
(d) $x=3$ पर सतत् परन्तु अवकलनीय नहीं

5. माना सभी वास्तविक संख्याओं x के लिए $h(x)=\min\{x,x^2\}$, तब [IIT 1998]
(a) सभी x के लिए h सतत् है
(b) सभी x के लिए h अवकलनीय है
(c) सभी $x>1$ के लिए $h'(x)=1$ है
(d) x के दो मानों पर h अवकलनीय नहीं है

6. यदि $f(0)=1$, $f'(0)=-1$, $f(x)>0$ सभी x के लिए फलन $f(x)$ को संतुष्ट करें, तो [Kurukshetra CEE 1998]

(a) $f(x)<0, \forall x$ (b) $-1<f''(x)<0, \forall x$
(c) $-2<f''(x)\le -1, \forall x$ (d) $f''(x)<-2, \forall x$

7. फलन $f(x)=\begin{cases} x, & \text{यदि } 0\le x\le 1 \\ 1, & \text{यदि } 1<x\le 2\end{cases}$, तब [SCRA 1996]

(a) x के सभी मानों के लिए $0\le x\le 2$ सतत् तथा $x=1$ को छोड़कर x के सभी मानों के लिए अन्तराल [0,2] में अवकलनीय
(b) x के सभी मानों के लिए अन्तराल [0,2] में सतत् तथा अवकलनीय
(c) अन्तराल [0,2] में किसी भी बिन्दु पर सतत् नहीं होगा
(d) अन्तराल [0,2] में किसी भी बिन्दु पर अवकलनीय नहीं होगा

8. $x=0$ पर फलन $f(x)=|x|$ है [MP PET 1993]
(a) सतत् एवं अनवकलनीय
(b) असतत् एवं अवकलनीय
(c) असतत् लेकिन अनवकलनीय
(d) सतत् एवं अवकलनीय

9. माना $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{|x|}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$ [EAMCET 1994]

(a) $f(x)$ प्रत्येक जगह असतत् है
(b) $f(x)$ प्रत्येक जगह सतत् है
(c) $f'(x)$ का $(-1,1)$ में अस्तित्व है
(d) $f'(x)$ का $(-2,2)$ में अस्तित्व है

10. $x=1$ पर फलन $f(x)=\begin{cases} x^3-1; & 1<x<\infty \\ x-1; & -\infty<x\le 1\end{cases}$ है [Roorkee 1993]

(a) सतत् व अवकलनीय
(b) सतत् व अनअवकलनीय
(c) सतत् व अवकलनीय
(d) असतत् व अनअवकलनीय

11. यदि [.] महत्तम पूर्णांक फलन प्रदर्शित करता है तथा $f(x)=[x\sin \pi x]$, तब $f(x)$ है [IIT 1986]

(a) $x=0$ पर सतत् है (b) $(-1,0)$ में सतत् है
(c) $(-1,1)$ में अवकलनीय है (d) उपरोक्त सभी

12. $f(x)=\begin{cases} |x-3|; & x\ge 1 \\ \frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{13}{4}; & x<1\end{cases}$ है [IIT 1988]

(a) $x=1$ पर सतत् (b) $x=3$ पर सतत्
(c) $x=1$ पर अवकलनीय (d) उपरोक्त सभी

13. यदि $f(x)=\begin{cases} e^x+ax, & x<0 \\ b(x-1)^2, & x\ge 0\end{cases}$, $x=0$ पर अवकलनीय है, तब (a,b) का मान है [MP PET 2000]

(a) $(-3,-1)$ (b) $(-3,1)$
(c) $(3,1)$ (d) $(3,-1)$

14. फलन $y=|\sin x|$, प्रत्येक x के लिए सतत् है लेकिन यह अवकलनीय नहीं है [AMU 2000]
(a) केवल $x=0$ पर
(b) केवल $x=\pi$ पर
(c) केवल $x=k\pi$ पर (k एक पूर्णांक है)
(d) $x=0$ तथा $x=k\pi$ पर (k एक पूर्णांक है)

15. फलन $y = e^{-|x|}$ [AMU 2000]

(a) $x = 0$ पर सतत् तथा अवकलनीय है

(b) $x = 0$ पर न तो सतत् न ही अवकलनीय है

(c) $x = 0$ पर सतत् पर अवकलनीय नहीं है

(d) $x = 0$ पर सतत् नहीं लेकिन अवकलनीय है

16. फलन $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \le 2 \\ 5-x, & x > 2 \end{cases}$ [AMU 2001]

(a) $x = 2$ पर सतत् नहीं है

(b) $x = 2$ पर अवकलनीय है

(c) $x = 2$ पर सतत् लेकिन अवकलनीय नहीं है

(d) इनमें से कोई नहीं

17. फलन $f(x) = [x]\sin(\pi x)$ का बायाँ अवकलज (LHD) $x = k$ पर k एक पूर्णांक है तथा $[x]$ = महत्तम पूर्णांक $\le x$, है [IIT Screening 2001]

(a) $(-1)^k\,(k-1)\pi$ (b) $(-1)^{k-1}(k-1)\pi$

(c) $(-1)^k k\pi$ (d) $(-1)^{k-1}k\,\pi$

18. माना $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{जबकि } x < 2 \\ 2x-1, & \text{जबकि } x \ge 2 \end{cases}$, तब $f'(2) =$ [Karnataka CET 2002]

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) अस्तित्व नहीं है

19. यदि $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \ge 0 \end{cases}$, तब x के सभी मानों के लिए [IIT 1984; MP PET 2002]

(a) f सतत् है, लेकिन अवकलनीय नहीं

(b) f अवकलनीय है, लेकिन सतत् नहीं

(c) f' सतत् है, लेकिन अवकलनीय नहीं

(d) f' अवकलनीय तथा सतत् है

20. फलन $f(x) = \begin{cases} e^{2x}-1 & , x \le 0 \\ ax + \dfrac{bx^2}{2} - 1 & , x > 0 \end{cases}$ सतत् तथा अवकलनीय है जब [AMU 2002]

(a) $a = 1, b = 2$ (b) $a = 2, b = 4$

(c) $a = 2$, b का कोई भी मान (d) a का कोई भी मान $b = 4$

21. निम्न में से कौनसा कथन सत्य नहीं है [Kerala (Engg.) 2002]

(a) एक बहुपद फलन सदैव सतत् होता है

(b) एक सतत् फलन सदैव अवकलनीय होता है

(c) एक अवकलनीय फलन सदैव सतत् होता है

(d) e^x, x के प्रत्येक मान के लिए सतत् है

22. फलन $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}, x \ne 0,\ f(0) = 0$; $x = 0$ पर है [MP PET 2003]

(a) सतत् है किन्तु अवकलनीय नहीं है

(b) असंतत है

(c) सतत् अवकलज रखता है

(d) सतत् एवं अवकलनीय है

23. यदि $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2x^2-7x+5}, & x \ne 1 \text{ के लिए} \\ -\dfrac{1}{3} & , x = 1 \text{ के लिए} \end{cases}$, तब $f'(1) =$ [EAMCET 2003]

(a) –1/9 (b) –2/9

(c) –1/3 (d) 1/3

24. यदि $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, $x \in R$ के लिए, तब $f'(0) =$ [EAMCET 2003]

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 3

25. m का वह मान, जिसके लिए फलन $f(x) = \begin{cases} mx^2, & x \le 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$, $x = 1$ पर अवकलनीय हो, है [MP PET 1998]

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) अस्तित्व नहीं है

26. माना $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \ge 0 \text{ के लिए} \\ 1-\cos x, & x \le 0 \text{ के लिए} \end{cases}$ और $g(x) = e^x$, तब $(gof)'(0)$ है [UPSEAT 2004]

(a) 1 (b) –1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

27. माना $f(x)$, $x = 1$ पर अवकलनीय है और $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h} f(1+h) = 5$, तब $f'(1) =$ [AIEEE 2005]

(a) 5 (b) 6

(c) 3 (d) 4

28. यदि f एक वास्तविक मान के लिए अवकलनीय फलन $|f(x) - f(y)| \le (x-y)^2, x, y \in R$ और $f(0) = 0$ को संतुष्ट करता है, तब $f(1) =$ [AIEEE 2005]

(a) 2 (b) 1 पर

(c) –1 (d) 0 पर

29. माना f सभी x के लिए अवकलनीय है यदि $f(1) = -2$ और $f'(x) \ge 2$ के लिए $x \in [1,6]$, तब [AIEEE 2005]

(a) $f(6) < 5$ (b) $f(6) = 5$

(c) $f(6) \ge 8$ (d) $f(6) < 8$

30. $f(x) = \big||x| - 1\big|$ पर अवकलनीय नहीं है [IIT Screening 2005]

(a) 0 पर (b) $\pm 1, 0$ पर

(c) 1 पर (d) ± 1 पर

31. $f(x)$ बहुपद फलन पर दो बार अवकलनीय है $f(1) = 1, f(2) = -4, f(3) = 9$, तब [IIT Screening 2005]

(a) $f''(x) = 2, \forall x \in R$

(b) कम से कम एक $x \in (1, 3)$ इस प्रकार है कि $f''(x) = 2$

(c) कम से कम एक $x \in (2, 3)$ इस प्रकार है कि $f'(x) = 5 = f''(x)$

(d) कम से कम एक $x \in (1, 2)$ इस प्रकार है कि $f(x) = 3$

32. यदि $f(x)$ एक अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि $f: R \to R$ और $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \; \forall \; n \ge 1, n \in I$, तब [IIT Screening 2005]

(a) $f(x) = 0 \; \forall \; x \in (0,1)$
(b) $f(0) = 0 = f'(0)$
(c) $f(0) = 0$ लेकिन $f'(0)$ शून्य हो भी सकता है या नहीं भी
(d) $|f(x)| \le 1 \; \forall \; x \in (0,1)$

33. माना f, [1, 5] पर सतत् तथा (1, 5) में अवकलनीय है। यदि $f(1) = -3$ और $f'(x) \ge 9 \; \forall \; x \in (1, 5)$, तब [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $f(5) \ge 33$ (b) $f(5) \ge 36$
(c) $f(5) \le 36$ (d) $f(5) \ge 9$
(e) $f(5) \le 9$

34. माना $f(x+y) = f(x)f(y)$ और $f(x) = 1 + \sin(3x)g(x)$ जहाँ $g(x)$ सतत् है, तब $f'(x)$ है [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $f(x)g(0)$ (b) $3g(0)$
(c) $f(x)\cos 3x$ (d) $3f(x)g(0)$
(e) $3f(x)g(x)$

35. माना $f(x) = \begin{cases} 1 & , \forall x < 0 \\ 1 + \sin x, & \forall 0 \le x \le \pi/2 \end{cases}$, तब $f'(x)$ का $x = 0$ पर मान है [Orissa JEE 2005]

(a) 1 (b) –1
(c) ∞ (d) अस्तित्व नहीं है

36. यदि $f(x) = x^2 - 2x + 4$ और $\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = f'(c)$ तब c का मान होगा [AMU 2005]

(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

37. माना $f(x+y) = f(x) + f(y)$ और $f(x) = x^2 g(x)$ सभी $x, y \in R$ के लिए, जहाँ $g(x)$ सतत् फलन है। तब $f'(x)$ का मान है

(a) $g'(x)$ (b) $g(0)$
(c) $g(0) + g'(x)$ (d) 0

38. फलन $f(x) = (x^2 - 1)|x^2 - 3x + 2| + \cos(|x|)$ पर अवकलनीय नहीं है [IIT 1999]

(a) –1 (b) 0
(c) 1 (d) 2

39. कौनसा फलन x के सभी वास्तविक मानों के लिए सतत् और $x = 0$ पर अवकलनीय है [MP PET 1996]

(a) $|x|$ (b) $\log x$
(c) $\sin x$ (d) $x^{\frac{1}{2}}$

40. निम्नलिखित में से कौनसा कथन सत्य नहीं है [Kurukshetra CEE 1996]

(a) प्रत्येक अवकलनीय फलन सतत् है
(b) यदि सभी बिन्दुओं पर फलन के अवकलज का मान शून्य है, तो फलन अचर होता है
(c) यदि किसी बिन्दु पर फलन उच्चतम व निम्नतम है, तब उस बिन्दु पर फलन अवकलनीय होगा व उसका अवकलज शून्य होगा
(d) यदि फलन अचर है, तब सभी बिन्दुओं पर इसका अवकलज शून्य होगा

41. यदि $f(x) = \begin{cases} x + 2, & -1 < x < 3 \\ 5, & x = 3 \\ 8 - x, & x > 3 \end{cases}$, तब $x = 3$ पर $f'(x) =$ [MP PET 2001]

(a) 1 (b) – 1
(c) 0 (d) अस्तित्व नहीं है

42. यदि $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2x - 1, & 1 < x \end{cases}$, तब [Orissa JEE 2002]

(a) $x = 1$ पर f असतत् है
(b) $x = 1$ पर f अवकलनीय है
(c) $x = 1$ पर f सतत् है पर अवकलनीय नहीं है
(d) इनमें से कोई नहीं

43. यदि $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1 + \sin x, & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ तब $f'(0) =$ [MP PET 1994]

(a) 1 (b) 0
(c) ∞ (d) अस्तित्व नहीं है

44. यदि $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b; & x \le 0 \\ x^2; & x > 0 \end{cases}$, $x = 0$ पर अवकलज रखता है, तब

(a) $a = 0, b = 0$
(b) $a > 0, b = 0$
(c) $a \in R, b = 0$
(d) इनमें से कोई नहीं

45. उन सभी बिन्दुओं का समुच्चय, जहाँ फलन $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$ अवकलनीय है, है

(a) $(-\infty, \infty)$ (b) $[0, \infty]$
(c) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ (d) $(0, \infty)$

46. फलन $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)$ के लिए अवकलनीय नहीं है [IIT Screening]

(a) $|x| < 1$ (b) $x = 1, -1$
(c) $|x| > 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

47. यदि $f(x) = x(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})$, तब [IIT 1985]

(a) $x = 0$ पर $f(x)$ सतत् है पर अवकलनीय नहीं
(b) $x = 0$ पर $f(x)$ अवकलनीय है
(c) $x = 0$ पर $f(x)$ अवकलनीय नहीं है
(d) इनमें से कोई नहीं

48. अन्तराल (0, 2) में फलन $f(x) = |x - 0.5| + |x - 1| + \tan x$ कितने बिन्दुओं पर अवकलज नहीं रखता [MNR 1995]

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

Critical Thinking

Objective Questions

1. यदि $f(x) = \dfrac{\cos^2 x + \sin^4 x}{\sin^2 x + \cos^4 x}$, $x \in R$ के लिए, तब $f(2002) =$ [EAMCET 2002]

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

2. यदि $f : R \to R$; $f(x+y) = f(x) + f(y)$, को संतुष्ट करता है; सभी $x, y \in R$ के लिए तथा $f(1) = 7$, तब $\sum_{r=1}^{n} f(r)$ का मान है [AIEEE 2003]

(a) $\dfrac{7n}{2}$ (b) $\dfrac{7(n+1)}{2}$
(c) $7n(n+1)$ (d) $\dfrac{7n(n+1)}{2}$

3. माना $f : [2, 2] \to R$ इस प्रकार परिभाषित है, कि $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \le x \le 0 \text{ के लिए} \\ x-1, & 0 \le x \le 2 \text{ के लिए} \end{cases}$, तब $\{x \in (-2, 2) : x \le 0$ तथा $f(|x|) = x\} =$ [EAMCET 2003]

(a) $\{-1\}$ (b) $\{0\}$
(c) $\{-1/2\}$ (d) ϕ

4. यदि $f(x) = \text{sgn}(x^3)$, तब [DCE 2001]

(a) $x = 0$ पर f सतत् है लेकिन अवकलनीय नहीं है
(b) $f'(0^+) = 2$
(c) $f'(0^-) = 1$
(d) $x = 0$ पर f अवकलनीय नहीं है

5. यदि $f : R \to R$ तथा $g : R \to R$ इस प्रकार है कि $f(x) = |x|$ तथा $g(x) = |x|$ प्रत्येक $x \in R$ के लिए, तब $\{x \in R : g(f(x)) \le f(g(x))\} =$ [EAMCET 2003]

(a) $Z \cup (-\infty, 0)$ (b) $(-\infty, 0)$
(c) Z (d) R

6. किसी वास्तविक संख्या x के लिए यदि $[x]$ संख्या x के पूर्णांक भाग को प्रदर्शित करें तो निम्न व्यंजक का मान होगा

$$\left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{100}\right] + \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{100}\right] + ... + \left[\frac{1}{2} + \frac{99}{100}\right]$$

[IIT Screening 1994]

(a) 49 (b) 50
(c) 48 (d) 51

7. यदि $f(x) = \dfrac{1}{2} - \tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$; $(-1 < x < 1)$ तथा $g(x) = \sqrt{3 + 4x - 4x^2}$, तो gof का प्रान्त होगा [IIT 1990]

(a) $(-1, 1)$ (b) $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$
(c) $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$ (d) $\left[-\dfrac{1}{2}, -1\right]$

8. फलन $f(x) = \dfrac{1}{\log_{10}(1-x)} + \sqrt{x+2}$ का डोमेन (प्रान्त) है [DCE 2000]

(a) $]-3, -2.5[\cup]-2.5, -2[$ (b) $[-2, 0[\cup]0, 1[$
(c) $]0, 1[$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. $2^x + 2^y = 2$ द्वारा परिभाषित फलन का डोमेन (प्रान्त) है [IIT Screening 2000; DCE 2001]

(a) $(0, 1]$ (b) $[0, 1]$
(c) $(-\infty, 0]$ (d) $(-\infty, 1)$

10. यदि $f(x) = (1 + b^2)x^2 + 2bx + 1$ तथा $m(b)$ दिये हुए b के लिए, $f(x)$ का न्यूनतम मान है, तब $m(b)$ का परिसर (रेंज) है [IIT Screening 2001]

(a) $[0, 1]$ (b) $\left(0, \dfrac{1}{2}\right]$
(c) $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ (d) $(0, 1]$

11. फलन $f(x) = {}^{7-x}P_{x-3}$ का परिसर है [AIEEE 2004]

(a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (b) $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$
(c) $\{1, 2, 3, 4\}$ (d) $\{1, 2, 3\}$

12. माना $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 > 0$ और $x^2 - x - 2 < 0$ (x रेडियन में है), तब x निम्न अन्तराल में होगा [IIT 1994]

(a) $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right)$ (b) $\left(-1, \dfrac{5\pi}{6}\right)$
(c) $(-1, 2)$ (d) $\left(\dfrac{\pi}{6}, 2\right)$

13. माना $f(x) = (x+1)^2 - 1$, $(x \ge -1)$, तब समुच्चय $S = \{x : f(x) = f^{-1}(x)\}$ है [IIT 1995]

(a) रिक्त
(b) $\{0, -1\}$
(c) $\{0, 1, -1\}$
(d) $\left\{0, -1, \dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$

14. यदि f एक अंतराल $(-5, 5)$ में परिभाषित सम फलन है, तो समीकरण $f(x) = f\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$ का संतुष्ट करने वाले x के चार वास्तविक मान होंगे [IIT 1996]

(a) $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

(b) $\frac{-5+\sqrt{3}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

(c) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{3}}{2}$

(d) $-3-\sqrt{5}, -3+\sqrt{5}, 3-\sqrt{5}, 3+\sqrt{5}$

15. यदि $f(x) = \sin^2 x + \sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \cos x \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ और $g\left(\frac{5}{4}\right) = 1$ है, तो $(gof)(x) =$ [IIT 1996]

(a) –2 (b) –1

(c) 2 (d) 1

16. यदि $g(f(x)) = |\sin x|$ और $f(g(x)) = (\sin\sqrt{x})^2$, तो [IIT 1998]

(a) $f(x) = \sin^2 x,\ g(x) = \sqrt{x}$

(b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = |x|$

(c) $f(x) = x^2,\ g(x) = \sin\sqrt{x}$

(d) f और g ज्ञात नहीं किये जा सकते हैं

17. यदि $f(x) = 3x + 10$, $g(x) = x^2 - 1$, तब $(fog)^{-1}$ का मान होगा [UPSEAT 2001]

(a) $\left(\frac{x-7}{3}\right)^{1/2}$ (b) $\left(\frac{x+7}{3}\right)^{1/2}$

(c) $\left(\frac{x-3}{7}\right)^{1/2}$ (d) $\left(\frac{x+3}{7}\right)^{1/2}$

18. यदि $f: R \to R$ तथा $g: R \to R$, $f(x) = 2x + 3$ तथा $g(x) = x^2 + 7$ द्वारा परिभाषित है, तब x के मान जिसके लिए $g(f(x)) = 8$ है, हैं [EAMCET 2000, 03]

(a) 1, 2 (b) –1, 2

(c) –1, –2 (d) 1, –2

19. $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) =$ [IIT 1978, 84; RPET 1997, 2001; UPSEAT 2003; Pb. CET 2003]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) π

(c) $\frac{2}{\pi}$ (d) 0

20. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-3x}}$ के लिए सत्य कथन है [BIT Ranchi 1982]

(a) अस्तित्व नहीं है (b) 0 और $\frac{1}{2}$ के बीच में है

(c) $\frac{1}{2}$ और 1 के बीच में है (d) 1 से ज्यादा है

21. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0$ [IIT 1992]

(a) n के किसी भी मान के लिए नहीं

(b) n कोई भी पूर्ण संख्या (whole number) है

(c) $n = 0$ केवल

(d) $n = 2$ केवल

22. $\lim_{n\to\infty}\sin[\pi\sqrt{n^2+1}] =$

(a) ∞ (b) 0

(c) अस्तित्व नहीं है (d) इनमें से कोई नहीं

23. यदि [.] महत्तम पूर्णांक फलन है, तो $\lim_{x\to 1}(1 - x + [x-1] + [1-x]) =$

(a) 0 (b) 1

(c) –1 (d) इनमें से कोई नहीं

24. a, b के मान जिनके लिए $\lim_{x\to 0}\frac{x(1+a\cos x) - b\sin x}{x^3} = 1$ क्रमशः हैं [Roorkee 1996]

(a) $\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$ (b) $\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$

(c) $-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

25. यदि $\lim_{x\to a}\frac{a^x - x^a}{x^x - a^a} = -1$, तो [EAMCET 2003]

(a) $a = 1$ (b) $a = 0$

(c) $a = e$ (d) इनमें से कोई नहीं

26. यदि $x_1 = 3$ और $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, n \ge 1$, तब $\lim_{n\to\infty} x_n$ का मान है

(a) –1 (b) 2

(c) $\sqrt{5}$ (d) 3

27. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\int_{\pi/2}^{x} t\,dt}{\sin(2x-\pi)} =$ [MP PET 1998]

(a) ∞ (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{8}$

28. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\cot x} =$ [RPET 1999]

(a) –1 (b) 0
(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

29. पूर्णांक *n*, जिसके लिए $\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x-e^x)}{x^n}$ एक परिमित अशून्य संख्या है, है [IIT Screening 2002]

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

30. यदि *f* एक पूर्णतः वर्धमान फलन है, तब $\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f(x)}{f(x)-f(0)} =$ [IIT Screening 2004]

(a) 0 (b) 1
(c) –1 (d) 2

31. यदि $f(x)=\begin{cases} x^2-3, & 2<x<3 \\ 2x+5, & 3<x<4 \end{cases}$. तब वह समीकरण, जिसके मूल $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ और $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ हैं, होगा [Orissa JEE 2004]

(a) $x^2-7x+3=0$ (b) $x^2-20x+66=0$
(c) $x^2-17x+66=0$ (d) $x^2-18x+60=0$

32. फलन $f(x)=[x]\cos\left[\frac{2x-1}{2}\right]\pi$, जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन है, असतत् है [IIT 1995]

(a) सभी *x* पर
(b) किसी *x* पर नहीं
(c) सभी पूर्णांक बिन्दुओं पर
(d) *x*, जो कि एक पूर्णांक नहीं है

33. माना सभी $x>0$ के लिए $f(x)$ परिभाषित तथा सतत् है। माना $f(x)$ सभी *x, y* के लिए $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$ का संतुष्ट करता है व $f(e)=1$, तो [IIT 1995]

(a) $f(x)=\ln x$ (b) $f(x)$ परिबद्ध है
(c) $f\left(\frac{1}{x}\right)\to 0$ चूँकि $x\to 0$ (d) $x\,f(x)\to 1$ चूँकि $x\to 0$

34. p के किस मान के लिए फलन

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{(4^x-1)^3}{\sin\dfrac{x}{p}\log\left[1+\dfrac{x^2}{3}\right]}, & x\neq 0 \\ 12(\log 4)^3, & x=0 \end{cases}$$, $x=0$ पर सतत् होगा [Orissa JEE 2004]

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) इनमें से कोई नहीं

35. फलन $f(x)=[x]^2-[x^2]$ (जहाँ [*y*] वह महत्तम पूर्णांक है जो *y* से अधिक नहीं है) असतत् (discontinuous) है [IIT 1999]

(a) सभी पूर्णांक पर
(b) 0 और 1 के अतिरिक्त सभी पूर्णांकों पर
(c) 0 के अतिरिक्त सभी पूर्णांकों पर
(d) 1 के अतिरिक्त सभी पूर्णांकों पर

36. यदि $f(x)=\begin{cases} xe^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$, तब $f(x)$ है [AIEEE 2003]

(a) *x* के सभी मानों के लिए सतत् एवं अवकलनीय है
(b) *x* के सभी मानों के लिए सतत् किन्तु $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है
(c) $x=0$ पर न सतत् और न ही अवकलनीय है
(d) प्रत्येक बिन्दु पर असतत् है

37. माना $f(x)=\frac{1-\tan x}{4x-\pi}$, $x\neq\frac{\pi}{4}$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, यदि $f(x)$, $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ में सतत् है, तब $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ है [AIEEE 2004]

(a) –1 (b) $\frac{1}{2}$
(c) $-\frac{1}{2}$ (d) 1

38. माना $g(x)=x.\,f(x)$, जहाँ $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ तब $x=0$ पर [IIT Screening 1994; UPSEAT 2004]

(a) *g* अवकलनीय है किन्तु *g'* सतत् नहीं है
(b) *g* अवकलनीय है परन्तु *f* नहीं
(c) *f* तथा *g* दोनों अवकलनीय है
(d) *g* अवकलनीय है और *g'* सतत् है

39. फलन $f(x)=\max[(1-x),(1+x),2]$, $x\in(-\infty,\infty)$, है [IIT 1995]

(a) सभी बिन्दुओं पर सतत्
(b) सभी बिन्दुओं पर अवकलनीय
(c) $x=1$ व $x=-1$ के अतिरिक्त सभी बिन्दुओं पर अवकलनीय है
(d) $x=1$ व $x=-1$ (जहाँ यह असतत् है), के अतिरिक्त सभी बिन्दुओं पर सतत् है

40. फलन $f(x)=|x|+|x-1|$ है [RPET 1996; Kurukshetra CEE 2002]

(a) $x=1$ पर सतत् है, लेकिन अवकलनीय नहीं है
(b) $x=1$ पर सतत् तथा अवकलनीय है
(c) $x=1$ पर सतत् नहीं है
(d) $x=1$ पर अवकलनीय नहीं है

Answers

फलन

1	d	2	c	3	b	4	b	5	a
6	c	7	d	8	b	9	c	10	a
11	a	12	c	13	b	14	d	15	b
16	c	17	d	18	c	19	a	20	c
21	b	22	d	23	d	24	d	25	b
26	b	27	a	28	d	29	a	30	b
31	c	32	d	33	a	34	b	35	d
36	b	37	a	38	c	39	c	40	b
41	c	42	a	43	c	44	a	45	c
46	b	47	a	48	d	49	d	50	a
51	c	52	d	53	c	54	b	55	d
56	b	57	b	58	a	59	c	60	c
61	a	62	d	63	b	64	b	65	b
66	c	67	b	68	c	69	c	70	b
71	d	72	b	73	b	74	b	75	c
76	d	77	d	78	a	79	c	80	d
81	c	82	d	83	a	84	a	85	d
86	d	87	b	88	a	89	c	90	d
91	b	92	b	93	b	94	d	95	b
96	b	97	b	98	b	99	b	100	b
101	c	102	b	103	c	104	c	105	d
106	b	107	d	108	b	109	b	110	a
111	a	112	a	113	b	114	b	115	b
116	b	117	d	118	a	119	c	120	a
121	a	122	a	123	d	124	c	125	b
126	a	127	c	128	c	129	b	130	d
131	c	132	c	133	b	134	c	135	a
136	a	137	d	138	a	139	b	140	c
141	b	142	b	143	d	144	d	145	b
146	c	147	b	148	c	149	c	150	b
151	e	152	c	153	b	154	c	155	a
156	e	157	a,b,c	158	c	159	d	160	c
161	a	162	c	163	b	164	b	165	d

सीमा

1	b	2	c	3	d	4	d	5	c
6	b	7	b	8	a	9	a	10	b
11	a	12	c	13	a	14	c	15	d
16	a	17	d	18	b	19	d	20	a
21	b	22	c	23	a	24	c	25	c
26	b	27	b	28	c	29	a	30	a
31	a	32	a	33	c	34	d	35	a
36	b	37	c	38	a	39	c	40	b
41	b	42	c	43	a	44	a	45	c
46	d	47	b	48	b	49	b	50	b
51	b	52	a	53	d	54	a	55	c
56	b	57	d	58	a	59	c	60	d
61	c	62	a	63	b	64	c	65	c
66	c	67	c	68	b	69	b	70	b
71	a	72	c	73	b	74	a	75	b
76	c	77	b	78	a	79	a	80	c
81	b	82	a	83	c	84	b	85	c
86	c	87	b	88	c	89	d	90	b
91	c	92	b	93	a	94	c	95	d
96	a	97	b	98	a	99	a	100	d
101	a	102	d	103	a	104	a	105	d
106	b	107	d	108	d	109	b	110	c
111	a	112	c	113	a	114	c	115	a
116	c	117	b	118	a	119	b	120	c
121	c	122	a	123	a	124	c	125	b
126	b	127	c	128	d	129	a	130	c
131	a	132	a	133	a	134	a	135	b
136	c	137	a	138	d	139	d	140	c
141	b	142	b	143	a	144	d	145	a
146	a	147	d	148	a	149	d	150	d
151	a	152	d	153	b	154	d	155	a
156	a	157	d	158	d	159	a	160	d
161	c	162	c	163	d	164	c	165	a
166	d	167	c	168	c	169	d	170	d
171	d	172	b	173	d	174	c	175	a
176	b	177	c	178	d	179	d	180	c
181	c	182	a	183	a	184	b	185	a
186	a	187	d	188	c	189	a	190	b
191	d	192	c	193	d	194	d	195	c
196	b	197	d	198	b	199	b	200	c
201	b	202	c	203	d	204	d	205	b

206	d	207	d	208	c	209	b	210	b
211	d	212	c	213	a	214	c	215	b
216	b	217	c	218	a	219	a	220	b
221	c	222	a	223	a	224	b	225	d
226	b	227	b						

सांतत्य

1	d	2	b	3	b	4	a	5	a
6	b	7	d	8	b	9	c	10	c
11	b	12	c	13	c	14	d	15	c
16	b	17	d	18	c	19	c	20	a
21	b	22	b	23	b	24	b	25	c
26	b	27	c	28	d	29	b	30	b
31	b	32	c	33	a	34	c	35	a
36	a	37	d	38	b	39	b	40	b
41	b	42	d	43	d	44	d	45	d
46	d	47	c	48	a	49	a	50	c
51	c	52	a	53	c	54	a	55	c
56	a	57	c	58	a	59	a	60	c
61	a	62	d	63	c	64	b	65	b
66	d	67	c	68	c	69	a	70	a
71	d	72	b	73	b	74	c	75	e
76	c	77	a	78	d	79	b	80	b,d

अवकलनीयता

1	d	2	d	3	b	4	d	5	a,c,d
6	d	7	a	8	a	9	b	10	b
11	d	12	d	13	b	14	d	15	c
16	c	17	a	18	d	19	c	20	c
21	b	22	d	23	b	24	b	25	d
26	c	27	a	28	d	29	c	30	b
31	b	32	b	33	b	34	c	35	d
36	d	37	d	38	d	39	c	40	c
41	d	42	c	43	d	44	c	45	a
46	b	47	c	48	c				

Critical Thinking Questions

1	a	2	d	3	c	4	d	5	d
6	b	7	a	8	b	9	d	10	d
11	d	12	d	13	d	14	a	15	d
16	a	17	a	18	c	19	c	20	b
21	b	22	b	23	c	24	c	25	a
26	b	27	c	28	c	29	c	30	c
31	c	32	c	33	a	34	d	35	d

36	b	37	c	38	a,b	39	a,c	40	a

Answers and Solutions

फलन

1. (d) दिया है $f(x)=\cos(\log x)\Rightarrow f(y)=\cos(\log y)$

तब $f(x).f(y)-\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{y}\right)+f(xy)\right]$

$$=\cos(\log x)\cos(\log y)-\frac{1}{2}\left[\cos\left(\log\frac{x}{y}\right)+\cos(\log xy)\right]$$

$$=\cos(\log x)\cos(\log y)-\frac{1}{2}[2\cos(\log x)\cos(\log y)]=0.$$

2. (c) $f[f(\cos 2\theta)]=f\left[\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}\right]$

$$=f(\tan^2\theta)=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\cos 2\theta.$$

3. (b) $f(xy)=\sin\log xy=\sin(\log x+\log y)$ .....(i)

$f(x/y)=\sin\log(x/y)=\sin(\log x-\log y)$ .....(ii)

$\therefore f(xy)+f(x/y)=2\sin\log x\cos\log y$

अतः फलन का अभीष्ट मान =

$2\sin\log x\cos\log y-2\sin\log x\cos\log y=0$.

4. (b) $f(x+1)-f(x)=8x+3$

$\Rightarrow [b(x+1)^2+c(x+1)+d]-(bx^2+cx+d)=8x+3$

$\Rightarrow (2b)x+(b+c)=8x+3$

$\Rightarrow 2b=8,\ b+c=3\ \Rightarrow b=4,\ c=-1.$

5. (a) $f(x+y)+f(x-y)$

$$=\frac{1}{2}\left[a^{x+y}+a^{-x-y}+a^{x-y}+a^{-x+y}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[a^x(a^y+a^{-y})+a^{-x}(a^y+a^{-y})\right]$$

$$=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})(a^y+a^{-y})=2f(x)f(y).$$

6. (c) $\frac{f(a)}{f(a+1)}=\frac{a/(a-1)}{(a+1)/a}=\frac{a^2}{a^2-1}=f(a^2)$.

7. (d) $\cos(\log x^2)\cos(\log y^2)-\frac{1}{2}\left[\cos\log\frac{x^2}{2}+\cos\log\frac{x^2}{y^2}\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos(\log x^2+\log y^2)+\cos(\log x^2-\log y^2)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[\cos\log\frac{x^2}{2}+\cos(\log x^2-\log y^2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\log x^2y^2-\cos\log\frac{x^2}{2}\right].$$

8. चूँकि $\log x$, x के धनात्मक वास्तविक मानों के लिए परिभाषित है जबकि $\log x^2$ व $\log|x|$, x के सभी वास्तविक मानों के लिए।

9. (c) $f(x)=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$\therefore f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=\log\left[\frac{1+\frac{2x}{1+x^2}}{1-\frac{2x}{1+x^2}}\right]=\log\left[\frac{x^2+1+2x}{x^2+1-2x}\right]$$

$$=\log\left[\frac{1+x}{1-x}\right]^2=2\log\left[\frac{1+x}{1-x}\right]=2f(x).$$

10. (a) $\phi(x)=a^x\Rightarrow\phi(p)=a^p$

$\therefore [\phi(p)]^3=[a^p]^3=a^{3p}=\phi(3p)$

11. (a) $f[f(x)]=\frac{f(x)-3}{f(x)+1}$

$$=\frac{\left(\frac{x-3}{x+1}\right)-3}{\left(\frac{x-3}{x+1}\right)+1}=\frac{x-3-3x-3}{x-3+x+1}=\frac{3+x}{1-x}$$

अब $f[f(f(x))]=f\left(\frac{3+x}{1-x}\right)$

$$=\frac{\left(\frac{3+x}{1-x}\right)-3}{\left(\frac{3+x}{1-x}\right)+1}=\frac{3+x-3+3x}{3+x+1-x}=x.$$

12. (c) $f(x)=\cos(\log x)$

अब माना $y=f(x)$. $f(4)-\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{4}\right)+f(4x)\right]$

$\Rightarrow$

$y=\cos(\log x).\cos(\log 4)-\frac{1}{2}\left[\cos\log\left(\frac{x}{4}\right)+\cos(\log 4x)\right]$

$\Rightarrow y=\cos(\log x)\cos(\log 4)$

$-\frac{1}{2}[\cos(\log x-\log 4)+\cos(\log x+\log 4)]$

$\Rightarrow y=\cos(\log x)\cos(\log 4)-\frac{1}{2}[2\cos(\log x)\cos(\log 4)]$

$\Rightarrow y=0.$

13. (b) $f(-1)=\frac{-1-|-1|}{|-1|}=\frac{-1-1}{1}=-2.$

14. (d) $x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)=x^3\left[\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x}+4\right]$

$=4+3x+3x^2+4x^3=f(x).$

15. (b) $f(2x)=2(2x)+|2x|=4x+2|x|$,

$f(-x)=-2x+|-x|=-2x+|x|$,

$f(x)=2x+|x|\Rightarrow f(2x)+f(-x)-f(x)$

$=4x+2|x|+|x|-2x-2x-|x|=2|x|.$

16. (c) $f(x+ay,x-ay)=axy$ .....(i)

माना $x+ay=u$ तथा $x-ay=v$

तब $x=\frac{u+v}{2}$ तथा $y=\frac{u-v}{2a}$

समीकरण (i) में x तथा y के मान प्रतिस्थापित करने पर,

$f(u,v)=\frac{u^2-v^2}{4}\Rightarrow f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{4}.$

17. (d) $f(x)=\cos[\pi^2]x+\cos[-\pi^2]x$

$f(x)=\cos(9x)+\cos(-10x)=\cos(9x)+\cos(10x)$

$=2\cos\left(\frac{19x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(\frac{19\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\times\frac{-1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2}=-1.$

18. (c) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}}+\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}}$

$f(11)=\frac{1}{\sqrt{11+2\sqrt{18}}}+\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{18}}}$

$=\frac{1}{3+\sqrt2}+\frac{1}{3-\sqrt2}=\frac{3-\sqrt2}{7}+\frac{3+\sqrt2}{7}=\frac{6}{7}.$

19. (a) $e^{f(x)}=\frac{10+x}{10-x}, x\in(-10,10)\Rightarrow f(x)=\log\left(\frac{10+x}{10-x}\right)$

$$\Rightarrow f\left(\frac{200x}{100+x^2}\right)=\log\left[\frac{10+\frac{200x}{100+x^2}}{10-\frac{200x}{100+x^2}}\right]=\log\left[\frac{10(10+x)}{10(10-x)}\right]^2$$

$$=2\log\left(\frac{10+x}{10-x}\right)=2f(x)$$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}f\left(\frac{200x}{100+x^2}\right)\Rightarrow k=\frac{1}{2}=0.5.$

20. (c) $(f+g)\frac{\pi}{3}=\frac{2\sqrt3}{2}+\frac{1}{4}=\sqrt3+\frac{1}{4}.$

21. (b) $f(x)=f(-x)\Rightarrow f(0+x)=f(0-x)$, $x=0$ के परितः सममित है

$\therefore f(2+x)=f(2-x)$

$x=2$ पर सममित है।

22. (d) $f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{1}{y}\Rightarrow\frac{-1}{x-1}=\frac{y-1}{y}$ {अन्तरानुपात से}

$\Rightarrow\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{y-1}\Rightarrow -x+1=f(y).$

23. (d) $y=\frac{ax+b}{cx-a}\Rightarrow x(cy-a)=b+ay\Rightarrow x=\frac{ay+b}{cy-a}=f(y).$

24. (d) माना $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{x^2+1-2}{x^2+1}=1-\frac{2}{x^2+1}$

$\because x^2+1>1$; $\therefore \frac{2}{x^2+1}\le 2$

$\therefore 1-\frac{2}{x^2+1} \ge 1-2$; $\therefore -1 \le f(x) < 1$

अतः $f(x)$ का निम्निष्ठ मान –1 है।

25. (b) यह आधारभूत संकल्पना है।

26. (b) स्पष्ट है अधिकतम $x=2, y=\sqrt{3}$ के लिए अपरिमेय संख्या है। अतः $2\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

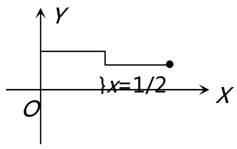
27. (a) $\left|\frac{3x^3+1}{2x^2+2}\right|_{x=-3} = \left|\frac{3(-27)+1}{2(9)+2}\right| = \left|\frac{-80}{20}\right| = 4$.

28. (d) चूँकि प्रतिचित्रण बहुएकैकी अन्तर्क्षेपी है।

29. (a) यह स्पष्ट है

30. (b) दोनों अंतरालों की चौड़ाई समान है, जो कि फलन $y=1-x$ तथा $y=1+x$ को प्रतिचित्रित करता है।

31. (c)



जो कि स्टेप फलन है।

32. (d) $\because f(0)=f(-1)=0$ अतः $f(x)$ बहुएकैकी फलन है, लेकिन –1 का कोई पूर्व प्रतिबिम्ब नहीं है, अतः $f(x)$ अन्तर्क्षेपी फलन है। अतः फलन बहुएकैकी अन्तर्क्षेपी है।

33. (a) माना $x_1, x_2 \in R$, तब $f(x_1)=\cos x_1$, $f(x_2)=\cos x_2$

$\therefore f(x_1)=f(x_2)$

$\Rightarrow \cos x_1 = \cos x_2 \Rightarrow x_1 = 2n\pi \pm x_2$

$\Rightarrow x_1 \ne x_2$, अतः यह एकैकी नहीं है।

पुनः x का f-प्रतिबिम्ब –1 तथा 1 के मध्य है।

$\Rightarrow f[R]=\{f(x): -1 \le f(x) \le 1)\}$

अतः सहप्रांत के अन्य अवयव (–1 तथा 1 के अतिरिक्त) f-प्रतिबिम्ब नहीं हैं।

$f[R] \in R$, अतः यह आच्छादक नहीं है। अतः यह प्रतिचित्रण न एकैकी है और न ही आच्छादक।

34. (b) चूँकि $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ तथा

$f(1)=f(2)=f(3)=0 \Rightarrow f(x)$ एकैकी नहीं है।

प्रत्येक $y \in R$, $x \in R$ इस प्रकार है कि $f(x)=y$.

$\therefore f$ आच्छादक है। अतः $f: R \to R$ आच्छादक है, लेकिन एकैकी नहीं है।

35. (d) $f(-1)=f(1)=1$; इसलिए फलन बहुएकैकी है, स्पष्टतः f आच्छादक नहीं है अतः फलन न तो एकैकी है और न ही आच्छादक है।

36. (b) यह स्पष्ट है।

37. (a) माना $x, y \in N$ इस प्रकार है, कि $f(x)=f(y)$

तब $f(x)=f(y) \Rightarrow x^2+x+1=y^2+y+1$

$\Rightarrow (x-y)(x+y+1)=0 \Rightarrow x=y$ या $x=(-y-1) \notin N$

अतः f एकैकी है।

पुनः प्रत्येक $y \in N$ के लिए, $x \in N$

$\therefore f$ आच्छादक है

38. (c) $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$, [यदि $X=R^+$]

अतः f एकैकी है, चूँकि $R_f = R^+ \subseteq R = Y$;

अतः f आच्छादक नहीं है।

39. (c) समुच्चय A जिसमें 3 अवयव हैं, से समुच्चय B जिसमें 4 हैं, में एकैकी प्रतिचित्रणों की कुल संख्या 4 के विन्यासों की कुल संख्या के बराबर है, जबकि एक बार में तीन लिये गये हों अर्थात् ${}^4P_3 = 24$.

40. (b) किसी $x, y \in R$, के लिए

$f(x)=f(y) \Rightarrow \frac{x-m}{x-n} = \frac{y-m}{y-n} \Rightarrow x=y$

अतः f एकैकी है।

माना $\alpha \in R$ इस प्रकार है कि $f(x)=\alpha \Rightarrow \frac{x-m}{x-n}=\alpha$

$\Rightarrow x = \frac{m-n\alpha}{1-\alpha}$

स्पष्टतः $x \notin R$ के लिए $\alpha = 1$. अतः f आच्छादक नहीं है।

41. (c) $f: R \to R$ इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x)=e^x$. माना $x_1, x_2 \in R$ तथा $f(x_1)=f(x_2)$ या $e^{x_1}=e^{x_2}$ या $x_1 = x_2$. अतः f एकैकी है। माना $f(x)=e^x=y$ दोनों पक्षों का log लेने पर, $x=\log y$ हम जानते हैं, कि ऋणात्मक संख्याओं का पूर्व प्रतिबिम्ब नहीं होता है या फलन आच्छादक नहीं है तथा शून्य किसी वास्तविक संख्या का प्रतिबिम्ब नहीं होता है। अतः फलन f अन्तर्क्षेपी है।

42. (a) $|x|$ एकैकी नहीं है। x^2 एकैकी नहीं है

x^2+1 एकैकी नहीं है, लेकिन $2x-5$ एकैकी है, क्योंकि

$f(x)=f(y) \Rightarrow 2x-5=2y-5 \Rightarrow x=y$

$f(x)=2x-5$ आच्छादक है।

अतः $f(x)=2x-5$ एकैकी आच्छादक है।

43. (c) माना $f(x)=f(y) \Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2+4} = \frac{y^2-4}{y^2+4}$

$\Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2+4}-1 = \frac{y^2-4}{y^2+4}-1 \Rightarrow x^2+4=y^2+4$

$\Rightarrow x = \pm y$, $\therefore f(x)$ बहुएकैकी है

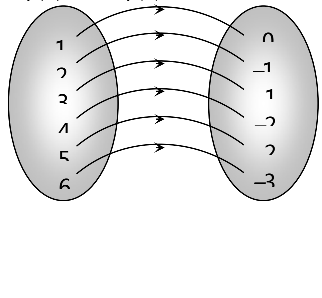
अब प्रत्येक $y \in (-1,1)$ के लिए, $x \in X$ का अस्तित्व नहीं है इस प्रकार $f(x)=y$. अतः फलन अन्तर्क्षेपी है।

44. (a) $f'(x)=2+\cos x > 0$. अतः $f(x)$ पूर्णतः एकदिष्ट वर्धमान है। अतः $f(x)$ एकैकी आच्छादक है।

45. (c) $f: N \to I$

$f(1)=0, f(2)=-1, f(3)=1, f(4)=-2, f(5)=2$

तथा $f(6)=-3$ इत्यादि



इस प्रकार के फलन में समुच्चय A के प्रत्येक अवयव का समुच्चय B में अद्वितीय प्रतिबिम्ब है तथा समुच्चय B में कोई अवयव रिक्त नहीं है। अतः f एकैकी तथा आच्छादक है।

46. (b) $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0, \forall x \in [0, \infty)$ तथा परिसर (रेंज) $\in [0, 1)$

$\Rightarrow f$ एकैकी है लेकिन आच्छादक नहीं है।

47. (a) $-\sqrt{1+(-\sqrt{3})^2} \le (\sin x - \sqrt{3}\cos x) \le \sqrt{1+(-\sqrt{3})^2}$

$-2 \le (\sin x - \sqrt{3}\cos x) \le 2$

$-2+1 \le (\sin x - \sqrt{3}\cos x + 1) \le 2+1$

$-1 \le (\sin x - \sqrt{3}\cos x + 1) \le 3$ अर्थात् परिसर $= [-1, 3]$

$\therefore f$ आच्छादक प्रतिचित्रण $S = [-1, 3]$.

48. (d) माना $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow [x_1] = [x_2] \not\Rightarrow x_1 = x_2$

{यदि x_1=1.4, x_2=1.5, तब [1.4]=[1.5] =1}

$\therefore f$ एकैक प्रतिचित्रण नहीं है।

f अच्छादक प्रतिचित्रण भी नहीं है।

क्योंकि इसका परिसर I (पूर्णांकों का समुच्चय), सहप्रन्त का उचित उपसमुच्चय है।

49. (d) $f(x) = x + \sqrt{x^2} = x + |x|$

f आच्छादक प्रतिचित्रण नहीं है, $f(-1) = f(-2) = 0$ लेकिन $-1 \ne 2$.

यह f एकैकी प्रतिचित्रण भी नहीं है $f(x) \ge 0, \forall x \in R$,

परिसर $f = (0, \infty) \subset R$.

50. (a) यह स्पष्ट है।

51. (c) माना $f(x)$ आवर्त T का आवर्ती फलन है, तब

$f(x+T) = f(x)$ सभी $x \in R$ के लिए

$\Rightarrow x + T - [x+T] = x - [x]$, सभी $x \in R$ के लिए

$\Rightarrow x + T - x = [x+T] - [x]$

$\Rightarrow [x+T] - [x] = T$ सभी $x \in R$ के लिए

$\Rightarrow T = 1, 2, 3, 4, ...$

T का न्यूनतम मान जो $f(x+T) = f(x)$ को सन्तुष्ट करता है सभी $x \in R$ के लिए 1 है

अतः $f(x) = x - [x]$ का आवर्तनांक 1 है।

52. (d) यह आधारभूत संकल्पना है।

53. (c) $f(x) = ax + b, g(x) = cx + d$ तथा $f(g(x)) = g(f(x))$

$\Rightarrow f(cx+d) = g(ax+b) \Rightarrow a[cx+d] + b = c[ax+b] + d$

$\Rightarrow ad + b = cb + d \Rightarrow f(d) = g(b)$.

54. (b) $f(x)$ का प्रान्त $= R - \{3\}$ एवं परिसर = {1, –1}.

55. (d) $[x] = I$ (केवल पूर्णांक)

56. (b) $-1 \le 5x \le 1 \Rightarrow \frac{-1}{5} \le x \le \frac{1}{5}$, अतः प्रान्त $\left[\frac{-1}{5}, \frac{1}{5}\right]$ है।

57. (b) $f(x) = \frac{\sin^{-1}(3-x)}{\log[|x|-2]}$

माना $g(x) = \sin^{-1}(3-x) \Rightarrow -1 \le 3 - x \le 1$; $g(x)$ का डोमेन (प्रान्त) [2, 4] है

माना $h(x) = \log[|x|-2] \Rightarrow |x| - 2 > 0$

$\Rightarrow |x| > 2 \Rightarrow x < -2$ या $x > 2 \Rightarrow (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

हम जानते हैं कि

$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \forall x \in D_1 \cap D_2 - \{x \in R : g(x) = 0\}$

$\therefore f(x)$ का डोमेन (प्रान्त) $= (2, 4] - \{3\} = (2, 3) \cup (3, 4]$.

58. (a) $y = \sin^{-1}\left[\log_3\left(\frac{x}{3}\right)\right] \Rightarrow -1 \le \log_3\left(\frac{x}{3}\right) \le 1$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \le \frac{x}{3} \le 3 \Rightarrow 1 \le x \le 9 \Rightarrow x \in [1, 9]$.

59. (c) $x = -3, 3$ के लिए $|x^2 - 9| = 0$

इसलिए $\log|x^2 - 9|$ का $x = -3, 3$ पर अस्तित्व नहीं है।

अतः फलन का प्रान्त $R - \{-3, 3\}$ है।

60. (c) $f(x) = \log|\log x|$, $f(x)$ परिभाषित है यदि $|\log x| > 0$ यदि $x > 0$ अर्थात् यदि $x > 0$ तथा $x \ne 1$ $(\because |\log x| > 0$ यदि $x \ne 1)$

$\Rightarrow x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$.

61. (a) $f(x) = \sin^{-1}[\log_2(x/2)]$, $\sin^{-1} x$ का डोमेन $x \in [-1, 1]$ है

$\Rightarrow -1 \le \log_2(x/2) \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{x}{2} \le 2 \Rightarrow 1 \le x \le 4$

$\therefore x \in [1, 4]$.

62. (d) यहाँ $x + 3 > 0$ तथा $x^2 + 3x + 2 \ne 0$

$\therefore x > -3$ तथा $(x+1)(x+2) \ne 0$, अर्थात् $x \ne -1, -2$

$\therefore$ डोमेन $= (-3, \infty) - \{-1, -2\}$.

63. (b) फलन $\sec^{-1} x$ सभी $x \in R - (-1, 1)$ के लिये परिभाषित होता है एवं फलन $\frac{1}{\sqrt{x - [x]}}$ सभी $x \in R - Z$ के लिये।

अतः दिया गया फलन सभी $x \in R - \{(-1, 1) \cup (n | n \in Z)\}$ के लिये परिभाषित होगा।

64. (b) $x^2 - 6x + 7 = (x-3)^2 - 2$

स्पष्टतः न्यूनतम मान – 2 एवं अधिकतम मान ∞ है।

अतः फलन का परिसर $[-2, \infty)$ है।

65. (b) $f(x) = \sqrt{\log \frac{1}{|\sin x|}} \Rightarrow \sin x \ne 0 \Rightarrow x \ne n\pi + (-1)^n 0$

$\Rightarrow x \ne n\pi$. $\therefore f(x)$ का डोमेन $= R - \{n\pi, n \in I\}$.

66. (c) $f(x) = \log(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})$

$\Rightarrow x - 4 \ge 0$ तथा $6 - x \ge 0 \Rightarrow x \ge 4$ तथा $x \le 6$

$\therefore f(x)$ का डोमेन = [4, 6].

67. (b) $f(x) = \left[\log_{10}\left(\frac{5x - x^2}{4}\right)\right]^{1/2}$ .....(i)

(i) से, $f(x)$, x के उन मानों के लिए परिभाषित हैं, जिनके लिए $\log_{10}\left[\frac{5x-x^2}{4}\right]\ge 0$

$\Rightarrow \left(\frac{5x-x^2}{4}\right)\ge 10^0 \Rightarrow \left(\frac{5x-x^2}{4}\right)\ge 1$

$\Rightarrow x^2-5x+4\le 0 \Rightarrow (x-1)(x-4)\le 0$

अतः फलन का डोमेन [1, 4] है।

68. (c) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(-x-1), & x<-1\\ \tan^{-1}x, & -1\le x\le 1\\ \frac{1}{2}(x+1), & x>1\end{cases}$; $f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}, & x<-1\\ \frac{1}{1+x^2}, & -1<x<1\\ \frac{1}{2}, & x>1\end{cases}$

$f'(-1-0)=-\frac{1}{2}$; $f'(-1+0)=\frac{1}{1+(-1+0)^2}=\frac{1}{2}$

$f'(1-0)=\frac{1}{1+(1-0)^2}=\frac{1}{2}$; $f'(1+0)=\frac{1}{2}$

$\therefore f'(-1)$ अस्तित्व नहीं रखता है। $\therefore f'(x)$ डोमेन $=R-\{-1\}$

69. (c) $f(x)$ परिभाषित है जब $x^2-1>0$

$\Rightarrow x^2>1, \Rightarrow x<-1$ या $x>1$ तथा $3+x>0$

$\therefore x>-3$ तथा $x\ne -2$

$\therefore D_f=(-3,-2)\cup(-2,-1)\cup(1,\infty)$.

70. (b) प्रश्नानुसार,

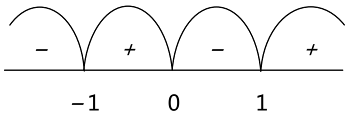
चूँकि $\sqrt{\sin 2x}$ ऋणात्मक नहीं हो सकता।

अतः विकल्प (b) सही है।

फलन $\sqrt{\sin 2x}$ का डोमेन $[n\pi, n\pi+\pi/2]$ है।

71. (d) $f(x)=\frac{3}{4-x^2}+\log_{10}(x^3-x)$ अतः $4-x^2\ne 0 \Rightarrow x\ne \pm\sqrt{4}$

तथा $x^3-x>0 \Rightarrow x(x^2-1)>0 \Rightarrow x>0, x>1$



$\therefore D=(-1,0)\cup(1,\infty)-\{\sqrt{4}\}$ अर्थात्,

$D=(-1,0)\cup(1,2)\cup(2,\infty)$.

72. (b) वर्गमूल के अन्दर की राशि धनात्मक होगी यदि $-1-\sqrt{3}\le x\le -1+\sqrt{3}$.

73. (b) स्पष्टतः यहाँ $|x|>2$ व $x\ne 1$

अर्थात् $x\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$.

74. (b) $\log\left\{\frac{5x-x^2}{6}\right\}\ge 0 \Rightarrow \frac{5x-x^2}{6}\ge 1$ या $x^2-5x+6\le 0$

या $(x-2)(x-3)\le 0$. अतः $2\le x\le 3$.

75. (c) (i) $x\le 2$ (ii) $\sqrt{9-x^2}>0 \Rightarrow |x|<3$ या $-3<x<3$.

अतः प्रान्त $(-3, 2]$ है।

76. (d) $1+x\ge 0 \Rightarrow x\ge -1$; $1-x\ge 0 \Rightarrow x\le 1, x\ne 0$

अतः प्रान्त $[-1,1]-\{0\}$ है।

77. (d) $f(x)=\sqrt{x-x^2}+\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}$

स्पष्टतः $f(x)$ परिभाषित है, यदि $4+x\ge 0 \Rightarrow x\ge -4$

$4-x\ge 0 \Rightarrow x\le 4$; $x(1-x)\ge 0 \Rightarrow x\ge 0$ तथा $x\le 1$

$\therefore f$ का डोमेन $=(-\infty,4]\cap[-4,\infty)\cap[0,1]=[0,1]$

78. (a) स्पष्टतः $-1\le \frac{1}{1+e^x}\le 1$

लेकिन $2<e^x<3 \Rightarrow 3<(e^x+1)<4 \Rightarrow \frac{1}{4}<\frac{1}{1+e^x}<\frac{1}{3}$

$\therefore f(x)$ का डोमेन $=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$

79. (c) फलन $f(x)=\sqrt{\log(x^2-6x+6)}$ परिभाषित है, जबकि $\log(x^2-6x+6)\ge 0$

$\Rightarrow x^2-6x+6\ge 1 \Rightarrow (x-5)(x-1)\ge 0$

यह असमिका संतुष्ट होगी यदि $x\le 1$ या $x\ge 5$ अतः फलन का डोमेन (प्रान्त) $(-\infty,1]\cup[5,\infty)$ होगा।

80. (d) $1-\frac{1}{x}>0 \Rightarrow x>1$

$\because x\ne 0$ अतः अभीष्ट अन्तराल $=(-\infty,0)\cup(1,\infty)$

81. (c) $-1\le 1+3x+2x^2\le 1$

Case I : $2x^2+3x+1\ge -1$; $2x^2+3x+2\ge 0$

$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-16}}{6}=\frac{-3\pm i\sqrt{7}}{6}$ (काल्पनिक).

Case II : $2x^2+3x+1\le 1 \Rightarrow 2x^2+3x\le 0$

$\Rightarrow 2x\left(x+\frac{3}{2}\right)\le 0 \Rightarrow \frac{-3}{2}\le x\le 0 \Rightarrow x\in\left[-\frac{3}{2}, 0\right]$

Case I में x का काल्पनिक मान प्राप्त होता है जिसे छोड़ने (Reject) पर

फलन का डोमेन = $\left[\frac{-3}{2},0\right]$.

82. (d) $f(x)=\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+3)}$

अतः प्रान्त $\{x : x\in R,\ x\ne 2,\ x\ne -3\}$ होगा।

83. (a) यहाँ $|x|>1$, अतः $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

84. (a) स्पष्टतः $|x|-x>0$ होना चाहिए।

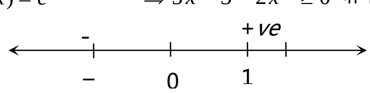
$|x|>x$ किन्तु धनात्मक मानों के लिए $|x|=x$ तथा ऋणात्मक मानों के लिए $|x|>x$ अतः डोमेन $(-\infty, 0)$ होगा।

85. (d) $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1} \Rightarrow f(x)=y_1+y_2$

$y_1=\sqrt{x^2-1}$ का डोमेन $\Rightarrow x^2-1\ge 0 \Rightarrow x^2\ge 1$

$x\in(-\infty,\infty)-(-1,1)$ तथा y_2 का डोमेन एक वास्तविक संख्या है। $\therefore f(x)$ का डोमेन $=(-\infty,\infty)-(-1,1)$.

86. (d) $f(x)=e^{\sqrt{5x-3-2x^2}} \Rightarrow 5x-3-2x^2\ge 0$ या $(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)\ge 0$



$\therefore\ D \in [1, 3/2]$.

87. (b) $f(x)$ परिभाषित है,

$9 - x^2 > 3 \Rightarrow -3 < x < 3$ .....(i)

$-1 \le (x-3) \le 1 \Rightarrow 2 \le x \le 4$ .....(ii)

समी. (i) व समी. (ii) से, $2 \le x < 3$ अर्थात् [2, 3).

88. (a) $f(x) = \sec\left(\frac{\pi}{4}\cos^2 x\right)$

हम जानते हैं कि, $0 \le \cos^2 x \le 1$, $\cos x = 0$, पर $f(x) = 1$ तथा $\cos x = 1$ पर, $f(x) = \sqrt{2}$;

$\therefore 1 \le x \le \sqrt{2} \Rightarrow x \in [1, \sqrt{2}]$.

89. (c) $f(x) = 1 + \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \Rightarrow$ परिसर (रेंज) $= (1, 7/3]$.

90. (d) $f(x) = a\cos(bx+c) + d$ .....(i)

$\cos(bx+c)$ का न्यूनतम मान = –1

(i) से, $f(x) = -a + d = (d-a)$

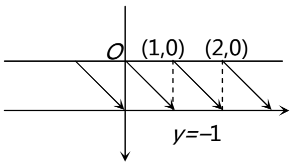
$\cos(bx+c)$ का अधिकतम मान = 1

(i) से, $f(x) = a + d = (d+a)$

$\therefore$ f(x) का परिसर $= [d-a, d+a]$.

91. (b) ग्राफ से,

$\Rightarrow$ परिसर (–1, 0] है।



92. (b) $f(x) = \cos(x/3)$

हम जानते हैं कि $-1 \le \cos(x/3) \le 1$.

93. (b) $f(x) = \frac{x+2}{|x+2|}$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -1, & x < -2 \\ 1, & x > -2 \end{cases}$

$\therefore$ $f(x)$ का परिसर $= \{-1, 1\}$

94. (d) चूँकि $\cos x - \sin x$ के उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ क्रमशः $\sqrt{2}$ व $-\sqrt{2}$ हैं, अतः $f(x)$ का परिसर $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ है।

95. (b) R^+ {चूँकि y का मान प्रत्येक $x \in R$ के लिए धनात्मक है}

96. (b) $f(x) = \sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\right]$

$\therefore -\sqrt{2} \le f(x) \le \sqrt{2}$ एवं $[-1, 1] \subset [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

97. (b) $f(x) = \frac{1}{2 - \sin 3x}$, $\sin 3x \in [-1, 1]$

अतः $f(x)$ $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ में स्थित है।

98. (b) $f(x) = \sin^2(x^4) + \cos^2(x^4) = 1$. अतः परिसर $= \{1\}$ है।

99. (b) $y = f(x) = 9 - 7\sin x$. परिसर $= [2, 16]$.

100. (b) माना $\frac{x^2 + 34x - 71}{x^2 + 2x - 7} = y$

$\Rightarrow x^2(1-y) + 2(17-y)x + (7y-71) = 0$

x के वास्तविक मान के लिए, $B^2 - 4AC \ge 0$

$\Rightarrow y^2 - 14y + 45 \ge 0 \Rightarrow y \ge 9, y \le 5$.

101. (c) $\sin^{-1}\sqrt{x} + \cos^{-1}\sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$ जब $x \in [0,1]$.

102. (b) माना $y = \sin^{-1}\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = \sin y$

$\Rightarrow x = \sin^2 y, \ \therefore 0 \le x \le 1$

103. (c) $y = f(x) = \cos^2 x + \sin^4 x$

$\Rightarrow y = f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x(1 - \cos^2 x)$

$\Rightarrow y = \cos^2 x + \sin^2 x - \sin^2 x\cos^2 x$

$\Rightarrow\ y = 1 - \sin^2 x\cos^2 x \ \Rightarrow\ y = 1 - \frac{1}{4}.\sin^2 2x$

$\therefore\ \frac{3}{4} \le f(x) \le 1$, $(\because 0 \le \sin^2 2x \le 1)$

$\Rightarrow\ f(R) \in [3/4, 1]$.

104. (c) $\frac{x^2 + 14x + 9}{x^2 + 2x + 3} = y \Rightarrow x^2 + 14x + 9 = x^2y + 2xy + 3y$

$\Rightarrow x^2(y-1) + 2x(y-7) + (3y-9) = 0$

चूँकि x वास्तविक है, $\therefore 4(y-7)^2 - 4(3y-9)(y-1) > 0$

$\Rightarrow 4(y^2 + 49 - 14y) - 4(3y^2 + 9 - 12y) > 0$

$\Rightarrow 4y^2 + 196 - 56y - 12y^2 - 36 + 48y > 0$

$\Rightarrow 8y^2 + 8y - 160 < 0 \Rightarrow y^2 + y - 20 < 0$

$\Rightarrow\ (y+5)(y-4) < 0$; अतः y, – 5 तथा 4 के बीच में हैं।

105. (d) $-1 \le \cos\theta \le 1 \Rightarrow \cos^2\theta \le 1$

तथा $\sec^2\theta \ge 1$; $\theta > \frac{\pi}{3}$ के लिए, $\sec\theta \ge 2$

$\Rightarrow \sec^2\theta \ge 4$. अतः अभीष्ट अंतराल $= [2, \infty)$.

106. (b) (a) में, $f(-x) = \frac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1} = \frac{1+a^x}{1-a^x} = -\frac{a^x+1}{a^x-1} = -f(x)$

अतः यह विषम फलन है।

(b) में, $f(-x) = (-x)\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1} = -x\frac{1-a^x}{1+a^x} = x\frac{a^x-1}{a^x+1} = f(x)$

अतः यह सम फलन है। (c) में, $f(-x) = \frac{a^{-x} - a^x}{a^{-x} + a^x} = -f(x)$

अतः यह विषम फलन है।

(d) में, $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$

अतः यह विषम फलन है।

107. (d) यहाँ $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

तथा $f(-x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}$

$= -\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ एक विषम फलन है।

108. (b) $f(x) = \sin\left(\log(x + \sqrt{1+x^2})\right)$

$\Rightarrow f(-x) = \sin[\log(-x + \sqrt{1+x^2})]$

$\Rightarrow f(-x) = \sin\log\left((\sqrt{1+x^2} - x)\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)}{(\sqrt{1+x^2}+x)}\right)$

$\Rightarrow f(-x) = \sin\log\left[\frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})}\right]$

$\Rightarrow f(-x) = \sin\left[\log(x+\sqrt{1+x^2})^{-1}\right]$

$\Rightarrow f(-x) = \sin\left[-\log(x+\sqrt{1+x^2})\right]$

$\Rightarrow f(-x) = -\sin\left[\log(x+\sqrt{1+x^2})\right] \Rightarrow f(-x) = -f(x)$

अतः $f(x)$ विषम फलन है।

109. (b) $f(x) = \log(x+\sqrt{x^2+1})$

तथा $f(-x) = -\log(x+\sqrt{x^2+1}) = -f(x)$

अतः $f(x)$ विषम फलन है।

110. (a) एक फलन का प्रतिलोम अस्तित्व रखता है, यदि फलन एकैकी तथा आच्छादक हो।

111. (a) $y = \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow x = \frac{3}{y-1} + 1 = \frac{y+2}{y-1} = f(y)$.

112. (a) चूँकि $fof(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = x, \forall x$

$\therefore$ $fof = I \Rightarrow f$ स्वयं का व्युत्क्रम है।

113. (b) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + 2 \Rightarrow y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} + 2$

$\Rightarrow e^{2x} = \frac{1-y}{y-3} = \frac{y-1}{3-y} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{y-1}{3-y}\right)$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \log_e\left(\frac{y-1}{3-y}\right)^{1/2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_e\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^{1/2}$.

114. (b) दिया है $f(x) = 2^{x(x-1)} \Rightarrow x(x-1) = \log_2 f(x)$

$\Rightarrow x^2 - x - \log_2 f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\log_2 f(x)}}{2}$

केवल $x = \frac{1+\sqrt{1+4\log_2 f(x)}}{2}$ ही प्रान्त (domain) में होगा।

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}[1+\sqrt{1+4\log_2 x}]$.

115. (b) माना $f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$.

अतः $f(x) = y = 3x - 5 \Rightarrow x = \frac{y+5}{3} \Rightarrow f^{-1}(y) = x = \frac{y+5}{3}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$

साथ ही फलन f एकैकी तथा आच्छादक भी है, अतः f^{-1} का अस्तित्व होगा $\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$

116. (b) दिया है $f(x) = 3x - 4$. अब माना $y = f^{-1}(x) \Rightarrow f(y) = x$

$\Rightarrow 3y - 4 = x \Rightarrow 3y = x + 4$

$\Rightarrow y = \frac{x+4}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$.

117. (d) $f(x) = \frac{x}{1+x}$. माना $y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

$\therefore y = \frac{x}{1+x} \Rightarrow y + yx = x \Rightarrow x = \frac{y}{1-y}$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$.

118. (a) किसी फलन का व्युत्क्रम ज्ञात करने के लिए फलन एकैकी आच्छादक होना चाहिए। $\therefore f(x) = \frac{1}{x-1}$ एक एकैकी आच्छादक है।

119. (c) यहाँ, $f(\theta) = \sin\theta(\sin\theta + \sin 3\theta)$

$= \sin\theta(\sin\theta + 3\sin\theta - 4\sin^3\theta) = 4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)$

$= 4\sin^2\theta\cos^2\theta = (\sin 2\theta)^2$

$\therefore f(\theta) \ge 0$ सभी वास्तविक θ के लिए

120. (a) $y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\log_{10}\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$

माना $y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\log_{10}\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\log_{10}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

121. (a) $y = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{y+3}{2}$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$.

122. (a) माना $y = f(x) \Rightarrow y = \frac{2x+1}{1-3x} \Rightarrow y - 3xy = 2x + 1$

$\Rightarrow x = \frac{y-1}{3y+2} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3y+2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3x+2}$.

123. (d) माना $y = x^2 + 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y-1}$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x-1}$

$\Rightarrow f^{-1}(17) = \pm\sqrt{17-1} = \pm 4$

तथा $f^{-1}(-3) = \pm\sqrt{-3-1} = \pm\sqrt{-4}$, जो संभव नहीं है।

124. (c) संयुक्त फलन की परिभाषा से

$g(f(x)) = (\sin x + \cos x)^2 - 1 \Rightarrow g(f(x)) = \sin 2x$

हम जानते है $\sin x$ एकैकी आच्छादक है जब $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

अतः $g(x)$ एकैकी आच्छादक है यदि

$-\frac{\pi}{2} \le 2x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$.

125. (b) माना $f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$; $y = \frac{2x-1}{x+5}, (x \ne -5)$

$xy + 5y = 2x - 1 \Rightarrow 5y + 1 = 2x - xy$.

$\Rightarrow x(2-y)=5y+1 \Rightarrow x=\frac{5y+1}{2-y} \Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{5y+1}{2-y}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{5x+1}{2-x},\ x\neq 2$.

126. (a) दिया है, $(gof)\left(\frac{-5}{3}\right)-(fog)\left(\frac{-5}{3}\right)$

$=g\left\{f\left(\frac{-5}{3}\right)\right\}-f\left\{g\left(\frac{-5}{3}\right)\right\}=g(-2)-f\left(\frac{5}{3}\right)=2-1=1$.

127. (c) $(fog)x=2[g(x)]$ व $(g+g)x=2[g(x)]$.

128. (c) $(gof)(x)=3(x^2-1)+1=3x^2-2$.

129. (b) $(fog)(x)=f\{g(x)\}=f(\log 1)=e^o=1=\log_e e$.

130. (d) $fog(x)=f\{g(x)\}=e^{2\log\sqrt{x}}=x$.

131. (c) $gof(x)=g\{f(x)\}=[|\cos x|]$.

132. (c) $fof(x)=f\{f(x)\}=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$.

133. (b) $(fofof)(x)=(fof)(f(x))=(fof)\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$$=f\left[\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}\right]=f\left(\frac{x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+2x^2}}\right)$$

$$=f\left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{\left[1+\frac{x^2}{1+2x^2}\right]}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}.$$

134. (c) $\phi\{\psi(x)\}=\phi(3^x)=(3^x)^2+1=3^{2x}+1$

व $\psi\{\phi(x)\}=\psi(x^2+1)=3^{x^2+1}$.

135. (a) $\frac{1}{2}(gof)(x)=2x^2-5x+2$ या $\frac{1}{2}g[f(x)]=2x^2-5x+2$

$\therefore [\{f(x)\}^2+\{f(x)\}-2]=2\ [2x^2-5x+2]$

$\Rightarrow f(x)^2+f(x)-(4x^2-10x+6)=0$

$\therefore f(x)=\frac{-1\pm\sqrt{1+4(4x^2-10x+6)}}{2}$

$=\frac{-1\pm\sqrt{(16x^2-40x+25}}{2}=\frac{-1+(4x-5)}{2}=2x-3$.

136. (a) $F[f(x)]=F(\log_a x)=a^{\log_a x}=x$

$f[F(x)]=f(a^x)=\log_a a^x=x\log_a a=x$.

137. (d) $(fog)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{x}{1-x}\right)=\frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{x}{1-x}+1}=\frac{x}{x+1-x}=x$.

138. (a) $f(x)=(1+x)^2$ तथा $g(x)=x^2+1$

तथा $fog(-3)\ =f[g(-3)]=f[9+1]=f[10]$

$\Rightarrow fog(-3)=f[10]=[11]^2=121$.

139. (b) $g(x)=1+\sqrt{x}$ तथा $f(g(x))=3+2\sqrt{x}+x$ .....(i)

$\Rightarrow f(1+\sqrt{x})=3+2\sqrt{x}+x$

$1+\sqrt{x}=y$ रखने पर $\Rightarrow x=(y-1)^2$

तब, $f(y)=3+2(y-1)+(y-1)^2\ =2+y^2$

अतः $f(x)=2+x^2$.

140. (c) $f:R\to R,\ f(x)=\sin x$ तथा $g:R\to R,\ g(x)=x^2$

$\Rightarrow fog(x)=f(g(x))=f(x^2)=\sin x^2$.

141. (b) $(fog)(x)=f(g(x))=a(cx+d)+b$

तथा $(gof)(x)=g(f(x))=c(ax+b)+d$

दिया है, $(fog)(x)=(gof)(x)$, $a=1,b=2$ पर

$\Rightarrow cx+d+2=cx+2c+d\ \Rightarrow c=1$, d स्वेच्छिक

142. (b) यहाँ $g(x)=1+n-n=1, x=n\in Z$

$1+n+k-n=1+k$, $x=n+k$ (जहाँ $n\in Z, 0<k<1$)

अब $f(g(x))=\begin{cases}-1, & g(x)<0\\ 0, & g(x)=0\\ 1, & g(x)>0\end{cases}$

स्पष्टतः $g(x)>0$ सभी x के लिए, अतः $f(g(x))=1$, सभी x के लिए।

143. (d) $f(f(x))=\frac{\alpha f(x)}{f(x)+1}=\frac{\alpha\left(\frac{\alpha x}{x+1}\right)}{\left(\frac{\alpha x}{x+1}+1\right)}=\frac{\alpha^2.x}{\alpha x+x+1}$

$\therefore x=\frac{\alpha^2.x}{(\alpha+1)x+1}$ या $x((\alpha+1)x+1-\alpha^2)=0$

$\Rightarrow (\alpha+1)x^2+(1-\alpha^2)x=0$. यह सभी x के लिए सत्य है।

$\Rightarrow \alpha+1=0, 1-\alpha^2=0$, $\therefore \alpha=-1$

144. (d) $\because f(2)=\frac{5}{4}$

$\Rightarrow (fof)(2)=f(f(2))=f\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{2\times\frac{5}{4}+1}{3\times\frac{5}{4}-2}=2$

145. (b) $(gof)(x)=|\sin x|$ तथा $f(x)=\sin^2 x$

$\Rightarrow g(\sin^2 x)=|\sin x|$; $\therefore g(x)=\sqrt{x}$.

146. (c) $f[f(x)]=[a-\{f(x)\}^n]^{1/n}=[a-(a-x^n)]^{1/n}=x$.

147. (b) $-1<x<1$ के लिए, $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=2\tan^{-1}x$

परिसर $f(x)=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore$ फलन का सहप्रान्त = B $=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

148. (c) $f(a-(x-a))=f(a)f(x-a)-f(0)f(x)$ .....(i)

$x=0, y=0$ रखने पर

$f(0)=(f(0))^2-[f(a)]^2\Rightarrow f(a)=0$

$[\because f(0)=1]$. समी. (i) से, $f(2a-x)=-f(x)$.

149. (c) दिए गए फलन f के लिए समुच्चय B परिभाषित है। अतः विकल्प (c) सही है।

150. (b) $f(x) = 2x^6 + 3x^4 + 4x^2$

$f(-x) = 2(-x)^6 + 3(-x)^4 + 4(-x)^2 = f(x)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ समफलन है तथा समफलन का अवकलज विषम फलन होता है।

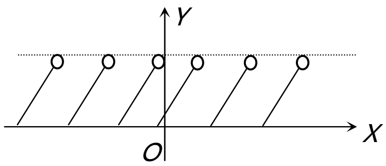
151. (e) $f(x) = \frac{\alpha x}{x+1}$; $f(f(x)) = f\left(\frac{\alpha x}{x+1}\right) = \frac{\alpha\left(\frac{\alpha x}{x+1}\right)}{\frac{\alpha x}{x+1}+1}$

लेकिन $f(f(x)) = x$, $\therefore \frac{\alpha^2 x}{\alpha x + x + 1} = x$

$\alpha = -1$ रखने पर

$\frac{(-1)^2 x}{(-1)x + x + 1} = \frac{x}{-x+x+1} = x$; $\therefore \alpha = -1$.

152. (c) हम जानते हैं, कि भिन्नात्मक फलन का आवर्तनांक 1 होता है।



$-3 \le x < -2, -2 \le x < -1, -1 \le x < 0$

$y = f(x),\ 0, \le x+3 < 1,\ 0 \le x+2 < 1$,

$0 \le x+1 < 1$

$0 \le x < 1,\ 1 \le x < 2$

$0 \le x < 1,\ 0 \le x-1 \le 1$.

153. (b) $g(x) = 1 + \{x\}$; $f\{g(x)\} = f\{1+\{x\}\} = f(k) = 1$

जहाँ, $k = 1 + \{x\}, 1 \le k < 2$

154. (c) $g(x) = x^3 + \tan x + \frac{x^2+1}{P}$

$g(-x) = (-x)^3 + \tan(-x) + \frac{(-x)^2+1}{P}$

$g(-x) = -x^3 - \tan x + \frac{x^2+1}{P}$

$g(x) + g(-x) = 0$ क्योंकि $g(x)$ एक विषम फलन है।

$\therefore \left[x^3 + \tan x + \frac{x^2+1}{P}\right] + \left[-x^3 - \tan x + \frac{x^2+1}{P}\right] = 0$

$\Rightarrow \frac{2(x^2+1)}{P} = 0 \Rightarrow 0 \le \frac{x^2+1}{P} < 1$ क्योंकि $x \in [-2, 2]$

$\Rightarrow 0 \le \frac{5}{P} < 1 \Rightarrow P > 5$.

155. (a) फलन $\log_e\{x - [x]\}$ का प्रान्त R है क्योंकि $[x]$ शून्य से कम या शून्य के बराबर है।

156. (e) $-1 \le \log_3 x \le 1$; $3^{-1} \le x \le 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \le x \le 3$

$\therefore$ फलन का प्रान्त $= \left[\frac{1}{3}, 3\right]$.

157. (a,b,c) जब $x_1 = -1$ व $x_2 = 1$, तब

$f(-1) - f(1) = f\left[\frac{-1-1}{1+1(1)}\right] = f(-1) \Rightarrow f(1) = 0$

जो कि संतुष्ट होता है, जब $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

जब $x_1 = x_2 = 0$, तब

$f(0) - f(0) = f\left[\frac{0-0}{1-0}\right] = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

जब $x_1 = -1$ व $x_2 = 0$ तब

$f(-1) - f(0) = f\left(\frac{-1-0}{1-0}\right) = f(-1) \Rightarrow f(0) = 0$

जो कि संतुष्ट है जब $f(x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ और

$f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

158. (c) यह स्पष्ट है।

159. (d) यह स्पष्ट है।

160. (c) यह आधारभूत संकल्पना है।

161. (a) $(f-g)(x) = \begin{cases} x, & x \in Q \\ -x, & x \notin Q \end{cases}$

162. (c) माना $y = \frac{x^2}{x^2+1}$

$\Rightarrow (y-1)x^2 + 0x + y = 1, y \ne 1$, x के वास्तविक मान के लिए

$D \ge 0 \Rightarrow -4y(y-1) \ge 0 \Rightarrow y(y-1) \le 0 \Rightarrow y \in [0,1)$

$0 \le \frac{x^2}{x^2+1} < 1$.

163. (b) $3f(x) + 2f\left(\frac{x+59}{x-1}\right) = 10x + 30$

$x = 7$ के लिए, $3f(7) + 2f(11) = 70 + 30 = 100$

$x = 11$ के लिए, $3f(11) + 2f(7) = 140$

$\frac{f(7)}{-20} = \frac{f(11)}{-220} = \frac{-1}{9-4} \Rightarrow f(7) = 4$.

164. (b) $\because e^x = y + \sqrt{1+y^2}$

$\therefore e^x - y = \sqrt{1+y^2}$

दोनों पक्षों कर वर्ग करने पर, $(e^x - y)^2 = (1+y^2)$

$e^{2x} + y^2 - 2ye^x = 1 + y^2 \Rightarrow e^{2x} - 1 = 2ye^x$

$\Rightarrow 2y = \frac{e^{2x}-1}{e^x} \Rightarrow 2y = e^x - e^{-x}$

$\therefore\ y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

165. (d) दिया है $f:(2,3) \to (0,1)$ और $f(x) = x - [x]$

$\therefore f(x) = y = x - 2 \Rightarrow x = y + 2 = f^{-1}(y)$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = x + 2$.

सीमा

1. (b) यहाँ $f(0) = 0$

चूँकि $-1 \le \sin\dfrac{1}{x} \le 1 \Rightarrow -|\,x\,| \le x\sin\dfrac{1}{x} \le |\,x\,|$

हम जानते हैं कि $\lim\limits_{x\to 0}|\,x\,| = 0$ एवं $\lim\limits_{x\to 0} -|\,x\,| = 0$

इस प्रकार $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

2. (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\cot x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3\cot x}{1-\cos x}\times\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^3 \times \lim\limits_{x\to 0}\cos x \times \lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x) = 2$

3. (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x-1)}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x(e^x-1)}{4.\sin^2\dfrac{x}{2}}$

$= 2\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(x/2)^2}{\sin^2\dfrac{x}{2}}\right]\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) = 2.$

4. (d) $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{1}{|\,1-x\,|} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{|\,1-(1-h)|} = \infty$

एवं $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{1}{|\,1-x\,|} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{|\,1-(1+h)|} = \infty$

अतः $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{|\,1-x\,|} = \infty$.

5. (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(2n+1)^2}{(n+2)(n^2+3n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3+4n^2+n}{n^3+5n^2+5n-2}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\left(4+\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}\right)} = 4$

6. (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} = \dfrac{1}{2}$.

7. (b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{3x-a}-\sqrt{x+a}}{x-a}$

$= \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{3x-a}-\sqrt{x+a}}{(x-a)}\times\dfrac{\sqrt{3x-a}+\sqrt{x+a}}{\sqrt{3x-a}+\sqrt{x+a}}$

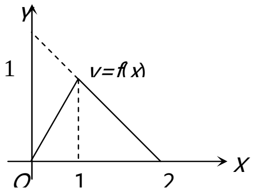
$= \dfrac{2}{2\sqrt{2a}} = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम लगाने पर,

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{3x-a}-\sqrt{x+a}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{3}{2\sqrt{3x-a}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x+a}}$

$= \dfrac{3}{2\sqrt{2a}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2a}} = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.

8. (a) अतः $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$



वैकल्पिक : $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{h\to 0}(1-h) = 1$

व $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} 2-(1+h) = 1$

अतः फलन की सीमा 1 है।

9. (a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log[(x-1)+1]}{x-1} = 1$.

वैकल्पिक : L-हॉस्पीटल नियम से, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 1$

10. (b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^n-2^n}{x-2} = n.2^{n-1} \Rightarrow n.2^{n-1} = 80 \Rightarrow n = 5$.

11. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x.2\sin^2 x}{x^2} = 2.\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

12. (c) $\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x/2}\right)^{x/2}\right]^2 = e^2$.

13. (a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)\times(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(2x+3)\times(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{-1}{5.2} = \dfrac{-1}{10}$.

14. (c) $\lim\limits_{x\to 0} kx\operatorname{cosec} x = \lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{cosec} kx$

$\Rightarrow k\,.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = \dfrac{1}{k}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx}{\sin kx} \Rightarrow k = \dfrac{1}{k} \Rightarrow k = \pm 1$.

15. (d) $f(x) = \left(\dfrac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}\right)$, तो

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{e^{1/h}-1}{e^{1/h}+1}\right) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{1/h}\left(1-\dfrac{1}{e^{1/h}}\right)}{e^{1/h}\left(1+\dfrac{1}{e^{1/h}}\right)} = 1$

इसी प्रकार $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1$. अतः सीमा का अस्तित्व नहीं है।

16. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log\left[1-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right]}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\left[2\sin^2\dfrac{x}{2}+\left(\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{2}\right)^2+......\right]}{x} = 0$

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम से

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\tan x}{1} = 0.$

17. (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x}{2x} = 2.$

18. (b) L- हॉस्पीटल नियम से,

$$\lim_{x\to 9}\frac{\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{\frac{f'(9)}{\sqrt{f(9)}}}{\frac{1}{\sqrt{9}}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}}=4$$

19. (d) चूँकि $\lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x}=-1$ एवं $\lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x}=1$, अतः सीमा का अस्तित्व नहीं है।

20. (a) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम से,

$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\sqrt{x+h}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

21. (b) $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{(1+x)^{1/2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\log 2}{\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}}$

$$\left\{\because \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\right\}$$

$=2\log 2=\log 4$.

22. (c) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{1-\cos nx}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{2\sin^2\frac{mx}{2}}{2\sin^2\frac{nx}{2}}\right\}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left\{\frac{\sin\frac{mx}{2}}{\frac{mx}{2}}\right\}^2\frac{m^2x^2}{4}.\frac{1}{\left\{\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\frac{nx}{2}}\right\}^2}.\frac{4}{n^2x^2}\right]$$

$=\frac{m^2}{n^2}\times 1=\frac{m^2}{n^2}$.

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम से,

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{1-\cos nx}=\lim_{x\to 0}\frac{m\sin mx}{n\sin nx}=\lim_{x\to 0}\frac{m^2\cos mx}{n^2\cos nx}=\frac{m^2}{n^2}$.

23. (a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\times 1=1$.

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम से,

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\, e^{\sin x}}{1}=1.e^0=1$.

24. (c) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\,(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})\times\frac{(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\,(5)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1\right)}=\frac{5}{2}$.

25. (c) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(2x-5)}=-\frac{1}{3}$.

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम लगायें।

26. (b) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$, माना $x=\frac{1}{y}$ या $y=\frac{1}{x}$, अतः $x\to\infty\Rightarrow y\to 0$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{y\to 0}\left(y.\sin\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to 0}y\times\lim_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}=0\times ...=0$

27. (b) फलन को $\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}$ से गुणा करने पर।

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम से,

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}+\frac{\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

28. (c) $\lim_{x\to 0}\frac{2\times 9\sin^2 3x}{(3x)^2}=18$

29. (a)

$$\lim_{\alpha\to\pi/4}\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\alpha-\pi/4}=\lim_{\alpha\to\pi/4}\left\{\frac{\sqrt{2}\left(\sin\alpha.\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos\alpha.\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}\right\}$$

$=\sqrt{2}\lim_{\alpha\to\pi/4}\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$.

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम से,

$\lim_{\alpha\to\pi/4}\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\alpha-(\pi/4)}=\lim_{\alpha\to\pi/4}\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{1}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

30. (a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x\log\sin x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\log\sin x}{\cot x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\text{cosec}^2 x}=0$ (L- हॉस्पीटल नियम से)

31. (a) $\lim_{x\to n+0}(x-[n])=\lim_{x\to n+0}x-\lim_{x\to n+0}[n]=n-n=0$.

32. (a) $\lim_{\theta\to\pi/2}\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\lim_{\theta\to\pi/2}\frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)}=0$.

33. (c) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x-x}{3x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\frac{2\tan 2x}{2x}-1}{3-\frac{\sin x}{x}}\right\}=\frac{1}{2}$.

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम से

$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x-x}{3x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 2x-1}{3-\cos x}=\frac{2-1}{3-1}=\frac{1}{2}$.

34. (d) $\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{0-h}{h+h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{1+h}=-1$

एवं $\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h+h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{1+h}=1$

अतः सीमा का अस्तित्व नहीं है।

35. (a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{b}\frac{\sin ax}{ax}\frac{bx}{\sin bx}=\frac{a}{b}$.

36. (b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^o}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\pi x}{180}}{x}=\frac{\pi}{180}$ $\left\{\because x^\circ=\frac{\pi x}{180}\text{ रेडियन}\right\}$

37. (c) $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)=2a.$

38. (a) नियम $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ का प्रयोग करने पर,

39. (c) $\lim_{x\to 3+}f(x)=5-3=2,\ \lim_{x\to 3-}f(x)=\frac{2}{5-3}=1.$

40. (b) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)x\,.\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)x}{\left(\frac{a+b}{2}\right)x\,.\frac{2}{a+b}.\frac{2}{b-a}.\left(\frac{b-a}{2}\right)x}=\frac{b^2-a^2}{2}$$

{$\cos C-\cos D$ के सूत्र का उपयोग करने पर}

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम से,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-a\sin ax+b\sin bx}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-a^2\cos ax+b^2\cos bx}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}.$$

41. (b) $\lim_{x\to\pi/6}\frac{\text{cosec}^2\theta-4}{\text{cosec}\,\theta-2}=\lim_{x\to\pi/6}\text{cosec}\,\theta+2=4.$

42. (c) $\lim_{x\to 0}\frac{x\,[{}^5C_1+{}^5C_2x+{}^5C_3x^2+{}^5C_4x^3+{}^5C_5x^4]}{x\,[{}^3C_1+{}^3C_2x+{}^3C_3x^2]}=\frac{5}{3}.$

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम का प्रयोग करें।

43. (a) $\lim_{x\to a}\frac{x^9+a^9}{x+a}=9\Rightarrow\frac{2a^9}{2a}=9\Rightarrow a^8=9\Rightarrow\ a=9^{1/8}$

44. (a) $\lim_{x\to 0+}\frac{x}{1+e^{-1/x}}=0$ चूँकि $e^{-1/x}\to 0$ जहाँ $x\to 0^+$

45. (c) $\lim_{x\to 1-}[x]=\lim_{h\to 0}[1-h]=\lim_{h\to 0}0=0$

एवं $\lim_{x\to 1+}[x]=\lim_{h\to 0}[1+h]=\lim_{h\to 0}1=1$

अतः सीमा का अस्तित्व नहीं है।

46. (d) $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 4x\cos 2x}{2\sin x\cos 4x}=\lim_{x\to 0}4\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)\frac{\cos 2x}{\cos 4x}=4$.

वैकल्पिक : $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sin 2x}{2x}+\frac{6\sin 6x}{6x}}{\frac{5\sin 5x}{5x}-\frac{3\sin 3x}{3x}}=\frac{2+6}{5-3}=4.$

47. (b) $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\frac{\theta}{4}}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{4}.\frac{\sin\frac{\theta}{4}}{(\theta/4)}=\frac{1}{4}.$

48. (b) $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1+\frac{b}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{a}{x}+\frac{5}{x^2}}\right]=1.$

49. (b) $\frac{d}{dr}f(r)=2\pi r$.

50. (b) $\lim_{x\to 0}x\log\sin x=\lim_{x\to 0}\log(\sin x)^x=\log[\lim_{x\to 0}(\sin x)^x]$

$$=\log\left[\lim_{x\to 0}(1+\sin x-1)^{\frac{x(\sin x-1)}{\sin x-1}}\right]$$

$$=\log_e[e^{\lim_{x\to 0}x(\sin x-1)}]=\log_e 1.$$

51. (b) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}\right)-\lim_{x\to 0}\left(\frac{b^x-1}{x}\right)$

$$=\log\,a-\log\,b=\log(a/b).$$

52. (a) $\sin x$ का प्रसार करके हल करें।

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम से

अर्थात् $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{3x^2}{6}}{5x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+\frac{6x}{6}}{20x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+1}{60x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{120\,x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{120}=\frac{1}{120}.$$

53. (d) $\lim_{x\to\infty}x\,(a^{1/x}-1)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{a^{1/x}-1}{1/x}\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{[e^{\log_e a^{1/x}}-1]}{1/x}=\log_e a=-\log_e\frac{1}{a}.$$

54. (a) $\log(1+x)$ का प्रसार करके हल करें।

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम से,

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x-\log(1+x)}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

55. (c) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}=\frac{1}{3}.$

नोट : विद्यार्थी इन्हें याद रखें।

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum n}{n^2}=\frac{1}{2},\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sum n^2}{n^3}=\frac{1}{3}$ व $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum n^3}{n^4}=\frac{1}{4}.$

56. (b) $\lim_{x\to a}\frac{f(a)[g(x)-g(a)]-g(a)[f(x)-f(a)]}{[x-a]}$

$$=f(a)g'(a)-g(a)f'(a)=2\times 2-(-1)(1)=5.$$

57. (d) $\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$

$\lim_{x\to\alpha}\frac{\cos x}{1}=\cos\alpha$, (L- हॉस्पीटल नियम से)

58. (a) $\lim_{x\to\infty}\frac{(a^2-b^2)}{(c^2-d^2)}\frac{\left[\sqrt{1+\frac{c^2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{d^2}{x^2}}\right]}{\left[\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{b^2}{x^2}}\right]}=\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$.

59. (c) $\lim_{x\to\pi/2}2\left[\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right]=-2$

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम का प्रयोग करें।

60. (d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$

$\sin x$ का प्रसार करने पर

$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{3!}+\frac{x^2}{5!}-...\right]=\frac{-1}{3!}=\frac{-1}{6}$.

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम का प्रयोग करें।

61. (c) $\frac{d}{da}[a^2\sin a]=2a\sin a+a^2\cos a.$

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम का प्रयोग करें।

अर्थात् $\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2\sin(a+h)-a^2\sin a}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{2(a+h)\sin(a+h)+(a+h)^2\cos(a+h)}{1}$

$=2a\sin a+a^2\cos a.$

62. (a) $\lim_{x\to 3}\left\{\frac{x-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}\right\}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left\{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right\}}{2(x-3)}=1$.

वैकल्पिक : L-हॉस्पीटल नियम का प्रयोग करें।

63. (b) $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\sin x+x\cos x}$

(L-हॉस्पीटल नियम का प्रयोग करने पर)

$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{3\cos x-x\sin x}$ (पुनः L-हॉस्पीटल के नियम से)

$=-\frac{1}{3}$

64. (c) $\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(2x+3)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-3}{x^2}=2.$

65. (c) $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{4}=\frac{1}{4}$.

66. (c) $\lim_{x\to 0}\frac{ax+bx^2+cx^3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a+bx+cx^2}{1}=a.$

67. (c) फलन को $\frac{(1+x)^{1/2}+(1-x)^{1/2}}{(1+x)^{1/2}+(1-x)^{1/2}}$ से गुणा करके हल करें।

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम से

अर्थात् $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/2}-(1-x)^{1/2}}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=1$

68. (b) $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+6)}=\frac{3}{7}$

69. (b) $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}}$

$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{a+2x}+\sqrt{3x}}{\sqrt{a+2x}+\sqrt{3x}}\times\frac{\sqrt{3a+x}+2\sqrt{x}}{\sqrt{3a+x}+2\sqrt{x}}$

$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{3a+x}+2\sqrt{x}}{3(\sqrt{a+2x}+\sqrt{3x})}=\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम का प्रयोग करें।

70. (b) $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^{-1/3}}{(1-x^{-1/3})(1+x^{-1/3})}=\frac{1}{2}$.

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम का प्रयोग करें।

71. (a)

$\lim_{x\to 0}\frac{(1+nx+{}^nC_2x^2+...x \text{ की उच्चतम घात } x^n \text{ तक})-1}{x}=n$

.

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम का प्रयोग करें।

72. (c) $\lim_{x\to 0}3\frac{\tan 3x}{3x}+\lim_{x\to 0}\cos x=3+1=4$.

73. (b) माना $\sin^{-1}x=y\Rightarrow x=\sin y$

अतः $\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin y}-\sqrt{1-\sin y}}{y}$ $(\because x\to 0\Rightarrow y\to 0)$

$\left(\text{अब इसे }\frac{\sqrt{1+\sin y}+\sqrt{1-\sin y}}{\sqrt{1+\sin y}+\sqrt{1-\sin y}}\text{ से गुणा करके हल करें}\right)$

= 1

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम का प्रयोग करें।

74. (a) $\lim_{y\to 0}\left\{\frac{x\{\sec(x+y)-\sec x\}}{y}+\sec(x+y)\right\}$

$=\lim_{y\to 0}\left[\frac{x}{y}\left\{\frac{\cos x-\cos(x+y)}{\cos(x+y)\cos x}\right\}\right]+\lim_{y\to 0}\sec(x+y)$

$=\lim_{y\to 0}\left[\frac{x\sin\left(x+\frac{y}{2}\right)}{\cos(x+y).\cos x}.\frac{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}{\frac{y}{2}}\right]+\sec x$

($\cos C-\cos D$ के सूत्र का उपयोग करने पर)

$=x\tan x\sec x+\sec x=\sec x(x\tan x+1)$.

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम से,

$\lim_{y\to 0}\frac{(x+y)\sec(x+y)-x\sec x}{y}$

$=\lim_{y\to 0}\frac{(x+y)\sec(x+y)\tan(x+y)+\sec(x+y)-0}{1}$

{x को स्थिरांक मानकर y के सापेक्ष अवकलन करने पर}

$=x\sec x\tan x+\sec x.=\sec x(x\tan x+1)$

75. (b) $\lim_{x\to 0}\frac{x.(2^x-1)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}.\frac{x^2}{1-\cos x}$

$=\log 2.\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=(\log 2).2=2\log 2=\log 4$.

76. (c) $\lim_{\theta\to 0}\frac{2\sin^2(\theta/2)}{\theta^2}=\frac{1}{2}$.

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम का प्रयोग करें।

77. (b) $\lim_{\theta\to 0}[3-4\sin^2\theta]-1=2$.

वैकल्पिक : $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 3\theta-\sin\theta}{\sin\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}-\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{3}{1}-1=2$.

यहाँ *L*- हॉस्पीटल नियम भी प्रयोग किया जा सकता है।

78. (a) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}.\frac{2}{\cos x}.\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}.\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{2}$.

79. (a) $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x}=0$.

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम का प्रयोग करें।

80. (c) $\cos^{-1}x=y$ रखने पर व $x\to 1\Rightarrow y\to 0$.

$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{(\cos^{-1}x)^2}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos y}}{y^2}$

अब इसका परिमेयीकरण करने पर, $\lim_{y\to 0}\frac{(1-\cos y)}{y^2(1+\sqrt{\cos y})}$

$=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}.\lim_{y\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{\cos y}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

81. (b) $\lim_{x\to 0}\frac{x\left(x-\frac{2\tan 2x}{2x}\right)}{\tan x}=-2$.

82. (a) $\lim_{\theta\to 0}\frac{5\cos\theta-\frac{2\sin\theta}{\theta}}{3+\frac{\tan\theta}{\theta}}=\frac{5-2}{3+1}=\frac{3}{4}$.

83. (c) $\sin C-\sin D$ के सूत्र का उपयोग करके हल करें

अर्थात् , $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2+x)-\sin(2-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2.\sin x}{x}$

$=2\cos 2.\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2\cos 2$

यहाँ L- हॉस्पीटल नियम भी प्रयोग किया जा सकता है।

84. (b) $\lim_{x\to\infty}\frac{2-(3/x)+(1/x^2)}{1-(1/x^2)}=2$.

85. (c) $\lim_{x\to\infty}\frac{3+(2/x)-(1/x^2)}{2-(3/x)-(3/x^2)}=\frac{3}{2}$.

86. (c) $\lim_{x\to 2-}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{h\to 0}\frac{|2-h-2|}{2-h-2}=-1$

एवं $\lim_{x\to 2+}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{h\to 0}\frac{|2+h-2|}{2+h-2}=1$

अतः सीमा का अस्तित्व नहीं है।

87. (b) $\lim_{x\to\pi/4}\frac{(\sqrt{2}-\sec x)\cos x(1+\cot x)}{\cot x[2-\sec^2 x]}$

$=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x(1+\cot x)}{(\sqrt{2}+\sec x)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(2)}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम का प्रयोग करें।

88. (c) $\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{\cot x-\cot a}=\lim_{x\to a}\left(\frac{-\sin x}{-\text{cosec}^2 x}\right)=\lim_{x\to a}\sin^3 x=\sin^3 a$.

89. (d) $\lim_{h\to 0}\frac{2\left[\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+h\right)\right]}{\sqrt{3}h(\sqrt{3}\cos h-\sin h)}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{4}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}+h\right)\right]}{h(\sqrt{3}\cos h-\sin h)}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{4}{\sqrt{3}}.\frac{\sin h}{h}.\frac{1}{(\sqrt{3}\cos h-\sin h)}=\frac{4}{3}$.

90. (b) माना $y=x^x\Rightarrow \log y=x\log x$

$\therefore \lim_{y\to 0}\log y=\lim_{x\to 0}x\log x=0=\log 1\Rightarrow \lim_{x\to 0}x^x=1$.

91. (c) $\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)^{40}\left(4-\frac{1}{x}\right)^5}{\left(2+\frac{3}{x}\right)^{45}}=\frac{2^{40}.4^5}{2^{45}}=2^5=32$.

92. (b) माना $\tan^{-1}2x=\theta\Rightarrow x=\frac{1}{2}\tan\theta$ एवं जब $x\to 0,\ \theta\to 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan^{-1}2x}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{1}{2}\tan\theta}{\theta}=\frac{1}{2}$.

93. (a) $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}.(x^2)}{4\sin^2 x.\left(\frac{x^2}{4}\right)}=\frac{1}{2}$.

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम दो बार लगायें।

94. (c) $\lim_{x\to 0}3.\frac{\sin 3x}{3x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=3+1=4$.

95. (d) $\pi-2x=\theta\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$ एवं जब $x\to(\pi/2),\ \theta\to 0$

अब स्वयं हल करें।

96. (a) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x.2\sin^2 3x}{x^2}=0$.

97. (b) $\frac{m}{n}$ (सूत्र)

98. (a) $\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^3 x}{x^3}=4$.

99. (a) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x^2}.\lim_{x\to 0} x = 0.$

100. (d) $\lim_{x\to 1-} f(x) = 1 = \lim_{x\to 1+} f(x)$

101. (a) $\lim_{x\to \pi/2}\frac{\tan 3x}{x} = \infty.$

102. (d) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x})} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम दो बार लगायें।

103. (a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$

अब e^{x^2} व $\cos x$ का प्रसार करने पर

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x^2}{2!}+x^4\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}\right)+.......}{x^2} = \frac{3}{2}$$

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम से,

$$\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}+\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} e^{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}$$

$$= 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

104. (a) माना $f(x) = \log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

अतः दिया गया फलन $= f'(a) + kf'(e) = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{k}{e} = 1 \Rightarrow k = e\left(\frac{a-1}{a}\right)$$

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम लगाकर दोनों सीमाएँ ज्ञात कीजिए।

105. (d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}$

अतः $\lim_{x\to 0+}\frac{|\sin x|}{x} = 1$ व $\lim_{x\to 0-}\frac{|\sin x|}{x} = -1$

अतः सीमा का अस्तित्व नहीं है।

106. (b) यह सूत्र है।

107. (d) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1-e^{\beta x}+1}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}-1}{x}$$

$$= \alpha\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha x} - \beta\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}-1}{\beta x} = \alpha.1-\beta.1 = \alpha-\beta.$$

108. (d) $\lim_{x\to a}\frac{(1/x)-(1/a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{a-x}{ax(x-a)} = \lim_{x\to a}\frac{-1}{ax} = \frac{-1}{a^2}$

या $\lim_{x\to a}\frac{-1/x^2-0}{1-0}$ (L-हॉस्पीटल नियम से) $= -\frac{1}{a^2}$

109. (b) माना $A = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x+3}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right]^{\frac{(x+3)}{(x+1)}} = e$$

$$\left\{\because \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1} = e\right.$$

एवं $\left.\lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)}{(x+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\{1+(3/x)\}}{\{1+(1/x)\}} = 1\right\}.$

110. (c) $\lim_{x\to\pi/2}\{(1-\sin x)\tan x\} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x-\sin^2 x}{\cos x}$

L- हॉस्पीटल नियम का प्रयोग करने पर,

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x-\sin 2x}{-\sin x} = 0.$$

111. (a) यह स्पष्ट है।

112. (c) परिमेयीकरण करने पर,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$$

113. (a) यह आधारभूत संकल्पना है।

114. (c) *L*- हॉस्पीटल नियम से

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\frac{1}{1-x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-\frac{1}{(1-x)^2}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

वैकल्पिक : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\log(1-x)}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...\right)}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-...\right)}{x^2}$$

$$\left(\because \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-.. \text{ व } \log(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-..\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x^2}{2}-x^3\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{3}\right)-\frac{x^4}{4}...}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

115. (a) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{a+bx}\right)^{c+dx} = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{a+bx}\right)^{a+bx}\right\}^{\frac{c+dx}{a+bx}} = e^{d/b}$

$$\left\{\because \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{a+bx}\right)^{a+bx} = e \text{ व } \lim_{x\to\infty}\frac{c+dx}{a+bx} = \frac{d}{b}\right\}.$$

116. (c) दी गयी सीमा $= \lim_{x\to 0}[(1+\tan x)^{\text{cosec } x}\times 1/(1+\sin x)^{\text{cosec } x}]$

$$= \lim_{x\to 0}[\{(1+\tan x)^{\cot x}\}^{\sec x}\times\{1/(1+\sin x)^{\text{cosec } x}\}]$$

$$= e^{\sec 0}.\frac{1}{e} = e.\frac{1}{e} = 1.$$

117. (b) दी गयी सीमा $= \lim_{n\to\infty}(4^n+5^n)^{1/n}$

$$= \lim_{n\to\infty} 5\left[\left\{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}^{(5/4)^n}\right]^{(1/n).(4/5)^n} = 5.e^0 = 5 .$$

$$\left(\because \left(\frac{4}{5}\right)^n \to 0 \text{ जब } n\to\infty\right)$$

118. (a) $x=\frac{1}{t}$ रखने पर दी गयी सीमा

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin t}{t}-1}{t-1}=\frac{1-1}{0-1}=0,$$

जो कि (a) में दिया गया है।

वैकल्पिक : $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-x}{1-|x|}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3\,!}\frac{1}{x^3}+....\right)-x}{1-|x|},\ \left[\because \frac{1}{x}\to 0\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\frac{1}{6x}+....-x\right)}{1-|x|}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{6x}-\frac{1}{x}\ \text{की घात वाले पद}}{|x|-1}=0$$

119. (b) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\left(\frac{x+\sin x}{x-\cos x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\left(\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\cos x}{x}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1}=1$

[चूँकि $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ व $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}$ दोनों 0 के बराबर हैं]

120. (c) दी गयी सीमा $=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^{1/x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\{(1+\tan x)^{1/\tan x}\}^{(\tan x)/x}}{\{(1-\tan x)^{1/\tan x}\}^{(\tan x)/x}}=\frac{e}{e^{-1}}=e^2.$$

121. (c) चूँकि $\lim_{n\to\infty}(x^n+y^n)^{1/n}=y\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^n\right)^{1/n}$

$$=y\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{x}{y}\right)^n\right]^{\left(\frac{y}{x}\right)^n\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^n}$$

$$=y\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^n\right)^{\left(\frac{y}{x}\right)^n}\right]^{\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^n}$$

$$=ye^0=y\ \left[\because \frac{x}{y}<1\Rightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^n\to 0\ \{\text{चूँकि } n\to\infty\}\right]$$

122. (a) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{a^2x^2+ax+1}-\sqrt{a^2x^2+1}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{\sqrt{a^2x^2+ax+1}+\sqrt{a^2x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{a^2+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{a^2+\frac{1}{x^2}}}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$$

123. (a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{\tan x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x[e^{\tan x-x}-1]}{\tan x-x}$

$$=\lim_{x\to 0}e^x.\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x-x}-1}{\tan x-x}=e^0\times 1=1$$

124. (c) $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x-\sin x}{x+\cos^2 x}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos^2 x}{x}}}$

$$=\sqrt{\frac{1-0}{1+0}}=1,\ \left(\because \frac{\sin x}{x}\to 0,\frac{\cos^2 x}{x}\to 0\ \text{as } x\to\infty\right).$$

125. (b) $\cos^{-1}x=y$ रखने पर जब $x\to -1,\ y\to\pi$

$$\therefore\ \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\cos^{-1}x}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{y\to\pi}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{y}}{\sqrt{1+\cos y}}$$

$$=\lim_{y\to\pi}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{y}}{\sqrt{2}\cos(y/2)}=\lim_{y\to\pi}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{y}}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)}$$

$$=\lim_{y\to\pi}\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{\pi}+\sqrt{y})}.\frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

126. (b) $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^{-1/2}}}{\sqrt{1+\sqrt{x^{-1}+x^{-3/2}}}+1}=\frac{1}{2}$$

127. (c) चूँकि $f(x)+g(x)+h(x)=\frac{x^2-4x+17-4x-2}{x^2+x-12}$

$$=\frac{x^2-8x+15}{x^2+x-12}=\frac{(x-3)(x-5)}{(x-3)(x+4)}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 3}[f(x)+g(x)+h(x)]=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\,(x-5)}{(x-3)\,(x+4)}=-\frac{2}{7}$$

128. (d) माना $y=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{2/x}$

$$\Rightarrow \log y=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\log\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\log(a^x+b^x+c^x)-\log 3}{x}$$

अब L- हॉस्पीटल नियम से

$\log y=\log(abc)^{2/3}\Rightarrow y=(abc)^{2/3}$

129. (a) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+\sqrt{2+x}}-\sqrt{3}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1+\sqrt{2+x}-3}{(\sqrt{1+\sqrt{2+x}}+\sqrt{3})\,(x-2)}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-2}{(\sqrt{1+\sqrt{2+x}}+\sqrt{3})\,(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)}{(\sqrt{1+\sqrt{2+x}}+\sqrt{3})(\sqrt{2+x}+2)(x-2)}$$

$$= \frac{1}{(2\sqrt{3})4} = \frac{1}{8\sqrt{3}}.$$

130. (c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2\sin^2(x^2/2)}}{2\sin^2(x/2)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\frac{\sin(x^2/2)}{x^2/2}}{\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2} \right) \cdot \frac{x^2/2}{x^2/4} = \sqrt{2}.$$

131. (a) $\lim_{x \to 0+} x^m (\log x)^n = \lim_{x \to 0+} \frac{(\log x)^n}{x^{-m}}$ $\left(\frac{\infty}{\infty} \text{ रूप}\right)$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{n(\log x)^{(n-1)} \frac{1}{x}}{-mx^{-m-1}}$$ (*L*-हॉस्पीटल नियम से)

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{n(\log x)^{n-1}}{-mx^{-m}}$$ $\left(\frac{\infty}{\infty} \text{ रूप}\right)$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{n(n-1)(\log x)^{(n-2)} \frac{1}{x}}{(-m)^2 x^{-m-1}}$$ (*L*-हॉस्पीटल नियम से)

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{n(n-1)(\log x)^{n-2}}{m^2 x^{-m}}$$ $\left(\frac{\infty}{\infty} \text{ रूप}\right)$

....

....

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{n!}{(-m)^n x^{-m}} = 0$$

(अंश व हर के n बार अवकलन से)

132. (a) $\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^n} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{nx^n} = 0$ (L- हॉस्पीटल नियम से)

133. (a) $\lim_{x \to a} \frac{\log(x-a)}{\log(e^x - e^a)} = \lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{(x-a)e^x}$, $\left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$

$$= \lim_{x \to a} \frac{e^x}{\{(x-a)e^x + e^x\}} = \frac{e^a}{e^a} = 1.$$

134. (a) $(1+x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\log(1+x)} = e^{\frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ....\right)}$

$$= e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - ......} = e\, e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - .....}$$

$$= e\left[1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - .....\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - .....\right)^2 + ...\right]$$

$$= e\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - ....\right]$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e + \frac{ex}{2}}{x^2} = \frac{11e}{24}.$$

135. (b) $\lim_{x \to \pi/2} \left[x \tan x - \left(\frac{\pi}{2}\right) \sec x\right]$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{2x \sin x - \pi}{2\cos x}, \quad \left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{[2\sin x + 2x\cos x]}{-2\sin x} = -1$$ (L- हॉस्पीटल नियम से)

136. (c) $\lim_{x \to 0} 2\sin a . \frac{(\cos x - 1)}{x \sin x} = -2\sin a . \frac{(1-\cos x)}{x^2} . \left(\frac{x}{\sin x}\right)$

$$= \lim_{x \to 0} -2\sin a . \frac{2\sin^2(x/2)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2 \left(\frac{\sin x}{x}\right)} = -\sin a$$

137. (a) माना $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1+5x^2}{1+3x^2}\right)^{1/x^2} = A$

$$\Rightarrow \log_e A = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \log\left(1 + \frac{2x^2}{1+3x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \left[\frac{2x^2}{1+3x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2}{1+3x^2}\right) + ...\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{2}{1+3x^2} - \frac{1}{2} \frac{2x^2}{(1+3x^2)^2} + ...\right] = 2$$

$$\therefore A = e^2$$

138. (d) $\lim_{x \to \infty} \frac{(2x-3)(3x-4)}{(4x-5)(5x-6)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(2 - \frac{3}{3}\right)\left(3 - \frac{4}{x}\right)}{x^2\left(4 - \frac{5}{x}\right)\left(5 - \frac{6}{x}\right)} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

139. (d) $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{\sin(e^{x-2} - 1)}{\log(x-1)}$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin(e^t - 1)}{\log(1+t)}, \{x = 2 + t \text{ रखने पर}\}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin(e^t - 1)}{e^t - 1} . \frac{e^t - 1}{t} . \frac{t}{\log(1+t)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin(e^t - 1)}{e^t - 1} . \left(\frac{1}{1!} + \frac{t}{2!} + ...\right) \times \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 - ...\right)}\right]$$

$$= 1 . 1 . 1 = 1, \quad (\because t \to 0, e^t - 1 \to 0).$$

140. (c) परिमेयीकरण करने पर $\lim_{x \to \infty} \frac{4x}{(\sqrt{x^2+8x+3} + \sqrt{x^2+4x+3})}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4}{\left(\sqrt{1 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}\right)} = 2$$

141. (b) हम जानते हैं, कि $\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n\, a^{n-1}$

$$\therefore \lim_{x \to 5} \frac{x^k - 5^k}{x - 5} = k(5)^{k-1};$$

किंतु दिया है, $\lim_{x \to 5} \frac{x^k - 5^k}{x - 5} = 500$,

$\therefore k(5)^{k-1} = 500$; $k(5)^{k-1} = 4(5)^{4-1}$, $\therefore k = 4$.

142. (b) दी गई सीमा का परिमेयीकरण करने पर

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-x^2-1-x^2)}{x^2(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{-2}{1+1} = -1$$

143. (a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0-h) = \lim_{h\to 0} f(0-h) = 0$

तथा $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0+h) = \lim_{h\to 0} -(0+h) = 0$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\left(\because \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)\right)$

144. (d) माना $y = \lim_{x\to 0} \frac{xe^x - \log(1+x)}{x^2}$, $\left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$

L- हॉस्पीटल नियम से

$$y = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + xe^x - \frac{1}{1+x}}{2x}, \left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$$

$$y = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left[e^x + e^x + xe^x + \frac{1}{(1+x)^2}\right]$$

$$y = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}[1+1+0+1] = \frac{3}{2}$$

145. (a) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x+8}}{4x+5} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4(-1/h)^2+5(-1/h)+8}}{4(-1/h)+5}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1/h)\sqrt{4-5h+8h^2}}{(1/h)(-4+5h)} = \frac{\sqrt{4}}{-4} = -\frac{1}{2}$$

146. (a) माना $y = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{mx}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{mx}\right)^{mx\cdot\frac{1}{m}}$

$$\Rightarrow y = e^{1/m}, \quad \left(\because \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\right)$$

147. (d) L.H.L. $= \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{h\to 0} (1-h) = \lim_{h\to 0} 3(1-h)$

$= \lim_{h\to 0} (3-3h) = 3-3.0 = 3$

R.H.L. $= \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0} [5-3(1+h)]$

$= \lim_{h\to 0} (2-3h) = 2-3.0 = 2$

अतः $\lim_{x\to 1} f(x)$ अस्तित्वहीन है।

148. (a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$, $\left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$

L- हॉस्पीटल नियम से, $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2}{2x} = \lim_{x\to 2} \frac{3\times 2\times 2}{2\times 2} = 3$.

149. (d) माना $y = \lim_{x\to 3} \frac{x^3-x^2-18}{x-3}$, $\left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$

L- हॉस्पीटल नियम से

$y = \lim_{x\to 3} 3x^2 - 2x = (27-6) = 21$.

150. (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x}{x}$, $\left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+0} = 1 .$$

151. (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x+4}{3x^2+3x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{3+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}} = \frac{2}{3}$.

152. (d) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0-h)$

$$= \lim_{h\to 0} \sin\left(\frac{-1}{h}\right) = \lim_{h\to 0} -\sin\frac{1}{h}$$

= (–1 व 1 के मध्य परिमित संख्या है)

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0+h)$

$= \lim_{h\to 0} \sin\left(\frac{1}{h}\right)$ = (सीमित संख्या 0 व 1 के मध्य है)

$\because \lim_{x\to 0^-} f(x) \ne \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$\therefore \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ का अस्तित्व नहीं है।

153. (b) $y = \lim_{x\to 4}\left[\frac{x^{3/2}-8}{x-4}\right] = \lim_{x\to 4}\left[\frac{(x^{1/2})^3-(2)^3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\right]$

$$\Rightarrow y = \lim_{x\to 4} \frac{(x^{1/2}-2)(x+4+2\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$\Rightarrow y = \lim_{x\to 4} \frac{(x+4+2\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+2)} = \frac{4+4+2\sqrt{4}}{\sqrt{4}+2} = \frac{12}{4} = 3$$

ट्रिक : L- हॉस्पीटल नियम से

$$\lim_{x\to 4} \frac{\frac{3}{2}x^{1/2}}{1} = \frac{3}{2}(4)^{1/2} = 3.$$

154. (d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x}}{e^{\left(\frac{1}{x}+1\right)}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x}}{e^{\frac{1}{x}}.e} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e} = e^{-1}$

155. (a) $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \log(1+x)}{x^2}$, $\left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$

L- हॉस्पीटल नियम से

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \frac{1}{x+1}}{2x}, \quad \left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - \sin x - x\cos x + \frac{1}{(x+1)^2}}{2} = \frac{1}{2}$$

156. (a) $\lim_{a\to 0} \frac{\sin a - \tan a}{\sin^3 a} = \lim_{a\to 0} \frac{\cos a - 1}{\sin^2 a \cos a} = \lim_{a\to 0} \frac{-(1-\cos a)}{(1-\cos^2 a)(\cos a)}$

$$= \lim_{a\to 0}\left[-\frac{1}{(1+\cos a)\cos a}\right] = -\frac{1}{(1+1)1} = \frac{-1}{2}$$

157. (d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+y}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{y}{n}}\right)^n$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{y}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-y}.$$

158. (d) L.H.L. = 0 तथा R.H.L. ज्ञात नहीं की जा सकती है, क्योंकि फलन $x>0$ पर परिभाषित नहीं है।

159. (a) $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{x\to 0}[f(x)]^2+1 = \lim_{x\to 0}(\sin^2 x+1) = 1$

160. (d) L- हॉस्पीटल नियम से,

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+\log x-x}{1-2x+x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{-2+2x} = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{2x(x-1)}$$

पुनः L- हॉस्पीटल नियम से, $\lim_{x\to 1}\frac{-1}{4x-2} = -\frac{1}{2}$

161. (c) $\lim_{x\to 0}\frac{a^{\sin x}-1}{b^{\sin x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{a^{\sin x}-1}{\sin x}\times\frac{\sin x}{b^{\sin x}-1}$

$$= \log_e a\times\frac{1}{\log_e b} = \frac{\log a}{\log b}.$$

162. (c) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{3^{x/2}-3}{3^x-9}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{3^{x/2}-3}{(3^{x/2})^2-3^2}\right)$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{1}{3^{x/2}+3} = \frac{1}{6}.$$

163. (d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x-\tan^{-1}x}{x^3}$, $\left(\frac{0}{0}\text{ रूप}\right)$

L- हॉस्पीटल नियम से,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}, \quad \left(\frac{0}{0}\text{ रूप}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{2}\times\frac{-2x}{(1-x^2)^{3/2}}+\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{6}\left[\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}+\frac{2}{(1+x^2)^2}\right] = \frac{1}{2}.$$

164. (c) $\lim_{x\to 0}\frac{x\tan 2x-2x\tan x}{(1-\cos 2x)^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x(\tan 2x-2\tan x)}{(2\sin^2 x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\frac{x(\tan 2x-2\tan x)}{\sin^4 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\frac{x\left\{\left(2x+\frac{1}{3}(2x)^3+\frac{2}{15}(2x)^5+\ldots\right)-2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\ldots\right)\right\}}{x^4\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\ldots\right)^4}$$

$$= \frac{1}{4}.\left(\frac{8}{3}-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

165. (a) $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)\sin 5x}{x^2\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x\sin 5x}{x^2\sin 3x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin^2 x}{x^2}\right)\frac{\left(\frac{\sin 5x}{x}\right)}{\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{5\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)}{3\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)} = \frac{2\times 5}{3} = \frac{10}{3}.$$

166. (d) L- हॉस्पीटल नियम से,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sec^2 x}{2} = \frac{-1}{2}.$$

167. (c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-5}{x+2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{5}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-5}}\right]^{-\frac{5x}{x+2}} = e^{-5}$

$$\left(\because \lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{-5}{1+\frac{2}{x}} = -5\right).$$

168. (c) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots-1\right)}{x} = 1$

169. (d) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}\right]$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{2x}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}\right] = \frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

170. (d) $\lim_{\alpha\to\beta}\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$

L- हॉस्पीटल नियम से,

$$\lim_{\alpha\to\beta}\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\alpha} = \lim_{\alpha\to\beta}\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} = \frac{\sin 2\beta}{2\beta}.$$

171. (d) $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}[\log(1+x)]}$

$$= e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\right)} = e^{\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots\right)}$$

$$= e.e^{\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots\right)}$$

$$= e\left[\frac{\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots\right)}{1!}+\frac{\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots\right)^2}{2!}+\ldots\right]$$

$$= \left[e-\frac{ex}{2}+\frac{11e}{24}x^2+\ldots+\ldots\right]$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{e-\frac{ex}{2}-\frac{11e}{24}x^2+\ldots e}{x}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(-\frac{e}{2}-\frac{11e}{24}x+\ldots\right) = -\frac{e}{2}$$

172. (b) $\lim_{x\to 1}\frac{(1+\cos\pi x)}{\tan^2\pi x} = \lim_{x\to 1}\frac{-\pi\sin\pi x}{2\pi\tan\pi x\sec^2\pi x}$

[L-हॉस्पीटल नियम से]

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-1}{2}\cos^3\pi x = \frac{1}{2}$$

173. (d) $\lim_{m\to\infty}\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m = \lim_{m\to\infty}\left[1+\left(\cos\frac{x}{m}-1\right)\right]^m$

$= \lim_{m\to\infty}\left[1-\left(-\cos\frac{x}{m}+1\right)\right]^m = \lim_{m\to\infty}\left[1-2\sin^2\frac{x}{2m}\right]^m$

$= e^{\lim_{m\to\infty}-\left(2\sin^2\frac{x}{2m}\right)m} = e^{\lim_{m\to\infty}-2\left(\frac{\sin\frac{x}{2m}}{x/2m}\right)^2\left(\frac{x^2}{4m^2}\right)m}$

$= e^{-2\lim_{m\to\infty}\frac{x^2}{4m}} = e^0 = 1$

174. (c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+b} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a-b}{x+b}\right)^{x+b}$

$= \lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{a-b}{x+b}\right)^{\frac{x+b}{a-b}}\right\}^{a-b} = e^{a-b}$

175. (a) $\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{a^{\cot x}-a^{\cos x}}{\cot x-\cos x}\right) = \lim_{x\to\pi/2} a^{\cos x}\left(\frac{a^{\cot x-\cos x}-1}{\cot x-\cos x}\right)$

$= a^{\cos(\pi/2)}\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{a^{\cot x-\cos x}-1}{\cot x-\cos x}\right) = 1.\log a = \log a$

176. (b) सीमा $= \lim_{x\to0}\left(\frac{\cos(\pi\cos^2 x).\pi.2\cos x(-\sin x)}{2x}\right)$

$= \lim_{x\to0}\pi\cos(\pi\cos^2 x).\cos x.\left(\frac{-\sin x}{x}\right)$

$= \pi(-1).1.(-1) = \pi$.

177. (c) $\lim_{h\to0^+}[3+h] = 3$ तथा $\lim_{h\to0^-}[3-h] = 2$

अतः $\lim_{x\to3}[x]$ का अस्तित्व नहीं है।

178. (d) $f(x) = x(x-1)\sin x-(x^3-2x^2)\cos x - x^3\tan x$

$= x^2\sin x - x^3\cos x - x^3\tan x + 2x^2\cos x - x\sin x$

Hence $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to0}\left(\sin x - x\cos x - x\tan x + 2\cos x - \frac{\sin x}{x}\right)$

$= 0-0-0+2-1 = 1$

179. (d) $\lim_{x\to0}\frac{\log_e(1+x)}{3^x-1}$, $\left(\frac{0}{0}\text{ रूप}\right)$

L- हॉस्पीटल नियम से, $\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}}{3^x\log_e 3} = \frac{1}{\log_e 3} = \log_3 e$

180. (c) $\lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$ का मान –1 तथा 1 के बीच में होगा। अतः सीमा का अस्तित्व नहीं है।

181. (c) $y = \lim_{x\to2}\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2}$

$\Rightarrow y = \lim_{x\to2}\frac{xf(2)-2f(2)+2f(2)-2f(x)}{x-2}$

$\Rightarrow y = \lim_{x\to2}\frac{-2f(x)+2f(2)+xf(2)-2f(2)}{(x-2)}$

$\Rightarrow y = \lim_{x\to2}-2\frac{[f(x)-f(2)]}{x-2}+\lim_{x\to2}\frac{f(2).(x-2)}{(x-2)}$

$\Rightarrow y = -2\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}+f(2)$

$\Rightarrow y = -2\lim_{x\to2}f'(x)+f(2) = -8+4 = -4$.

182. (a) $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x^n-[x]}{[x]} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log x^n}{[x]}-\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{[x]} = 0-1 = -1.$

183. (a) $y = \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{\sqrt{x}-1}$

$\Rightarrow y = \lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{f(x)}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)}.\frac{\left(\sqrt{f(x)}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)}.\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{f(x)}+1\right)}$

$\Rightarrow y = \lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}.\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{f(x)}+1}$

$\Rightarrow y = \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}.\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{f(x)}+1}$

$\Rightarrow y = f'(1).\frac{2}{\sqrt{f(1)}+1} \Rightarrow y = 2.\frac{2}{2} = 2$

ट्रिक : L- हॉस्पीटल नियम से

$\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{2}\{f(x)\}^{-1/2}f'(x)}{\frac{1}{2}x^{-1/2}} = \lim_{x\to1}\frac{f'(x)\sqrt{x}}{\sqrt{f(x)}} = \frac{f'(1).\sqrt{1}}{\sqrt{f(1)}} = 2.$

184. (b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2-n-1}\right)^{n(n-1)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n-1)+1}{n(n-1)-1}\right)^{n(n-1)}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n(n-1)}\right)^{n(n-1)}}{\left(1-\frac{1}{n(n-1)}\right)^{n(n-1)}} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2$

185. (a) $y = \lim_{x\to0}\frac{4^x-9^x}{x(4^x+9^x)}$, $\left(\frac{0}{0}\text{ रूप}\right)$

L- हॉस्पीटल नियम से,

$y = \lim_{x\to0}\frac{4^x\log4-9^x\log9}{(4^x+9^x)+x(4^x\log4+9^x\log9)}$

$\Rightarrow y = \frac{\log4-\log9}{2} \Rightarrow y = \frac{\log\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2} = \log\frac{2}{3}$.

186. (a) $\lim_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{e^x-1} = \lim_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{x}.\frac{x}{e^x-1}$

$= \lim_{x\to0}\left[\frac{a^x-1}{x}-\frac{b^x-1}{x}\right]\frac{x}{e^x-1}$

$= (\log_e a-\log_e b).\frac{1}{\log_e e} = \log_e\left(\frac{a}{b}\right)$

ट्रिक : L- हॉस्पीटल नियम का प्रयोग करें।

187. (d) $f(x) = \cot^{-1}\left\{\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right\}$ तथा $g(x) = \cos^{-1}\left\{\frac{1-x^2}{1+x^2}\right\}$

दोनों समीकरणों में $x = \tan\theta$ रखने पर,

$f(\theta) = \cot^{-1}\left\{\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right\} = \cot^{-1}\{\tan3\theta\}$

$f(\theta) = \cot^{-1}\cot\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right) = \frac{\pi}{2}-3\theta \Rightarrow f'(\theta) = -3$ .....(i)

तथा $g(\theta) = \cos^{-1}\left\{\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right\} = \cos^{-1}(\cos 2\theta) = 2\theta$

$\Rightarrow g'(\theta) = 2$ .....(ii)

अब $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\right) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\frac{1}{\lim_{x\to a}\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)}$

$= f'(x).\frac{1}{g'(x)} = -3\times\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$.

188. (c) $y = \lim_{x\to -2}\frac{\sin^{-1}(x+2)}{x^2+2x}$, $\left(\frac{0}{0}\text{ रूप}\right)$

L- हॉस्पीटल नियम से

$\Rightarrow y = \lim_{x\to -2}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-(x+2)^2}}\right)}{2x+2} \Rightarrow y = \frac{1}{-4+2} = -\frac{1}{2}$.

189. (a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}.2}$

$= \left\{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right\}^2 = e^2$.

190. (b) $\lim_{x\to 0}[1+(-a)x]^{1/x} = e^{-a}$.

191. (d) L- हॉस्पीटल नियम से

$\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \lim_{x\to 7}\frac{0-\frac{1}{2\sqrt{x-3}}}{2x}$

$= \lim_{x\to 7}\frac{-1}{4x\sqrt{x-3}} = \frac{-1}{4.7\sqrt{7-3}} = \frac{-1}{56}$.

192. (c) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(3+x)-\log(3-x)}{x} = k$

L- हॉस्पीटल नियम से, $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3+x}+\frac{1}{3-x}}{1} = k \Rightarrow \frac{2}{3} = k$

193. (d) $\lim_{x\to 0} n\frac{\sin nx}{nx}.\lim_{x\to 0}\left((a-n)n - \frac{\tan x}{x}\right) = 0$

$\Rightarrow n((a-n)n-1) = 0 \Rightarrow (a-n)n = 1 \Rightarrow a = n+\frac{1}{n}$.

194. (d) $\lim_{h\to 0}\frac{f(2h+2+h^2)-f(2)}{f(h-h^2+1)-f(1)} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(2h+2+h^2)(2+2h)}{f'(h-h^2+1)(1-2h)}$

$= \frac{6\times 2}{4\times 1} = 3$.

195. (c) $y = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

$\Rightarrow y = \lim_{x\to 0}\frac{\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+....\right]-\left[1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-....\right]}{\sin x}$

$\Rightarrow y = \lim_{x\to 0}\frac{2\left[\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+.........\ ...\right]}{\sin x}$

$\Rightarrow y = \lim_{x\to 0}\frac{2\left[1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{4!}+..........\ .\right]}{\frac{\sin x}{x}}$

$\Rightarrow y = \frac{\lim_{x\to 0} 2\left[1+\frac{x^2}{2!}+.......\right]}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} \Rightarrow y = \frac{2}{1} = 2$

ट्रिक : L- हॉस्पीटल नियम का प्रयोग करे

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x} = \frac{e^0+\frac{1}{e^0}}{\cos 0} = \frac{1+1}{1} = 2$

196. (b) L– हॉस्पीटल के नियम से,

$\lim_{x\to\pi/6}\frac{3\cos x+\sqrt{3}\sin x}{6} = \frac{3.\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}.\frac{1}{2}}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

197. (d) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\left(\frac{\sin x}{2}\right)}{x^2} = -2.\frac{1}{4} = \frac{-1}{2}$.

198. (b) $\lim_{n\to\infty}(3^n+4^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(4^n)^{\frac{1}{n}}\left[\frac{3^n}{4^n}+1\right]^{\frac{1}{n}}$

$= \lim_{n\to\infty} 4\left[1+\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^n}\right]^{1/n} = 4\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^n}\right]^{1/n}$

$= 4\left[1+\frac{1}{\infty}\right]^0 = 4\times(1)^0 = 4\times 1 = 4$.

199. (b) चूँकि, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right) = e^2$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{ax+b}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{ax+b}}\right]^{\frac{2(ax+b)}{x}} = e^2$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2(ax+b)}{x}} = e^2 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2(ax+b)}{x} = 2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$

अतः $a = 1$ और $b\in R$.

200. (c) L- हॉस्पीटल नियम से, अभीष्ट सीमा $= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{-\operatorname{cosec}^2\theta} = 1$

201. (b) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x-1}\right)^{3x-1} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{(-4)}{x-1}\right)^{\left(\frac{x-1}{-4}\right)}\right]^{\left(\frac{-4}{x-1}\right)(3x-1)}$

$= e^{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-4\left(3-\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right]} = e^{-12}$

202. (c) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}\right]$, $\left(\frac{0}{0}\text{ से}\right)$

[L-हॉस्पीटल नियम का 3 बार उपयोग करने पर]

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}.\cos x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}\cos^2 x + \sin x.e^{\sin x}}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}.\cos^3 x + e^{\sin x}2\cos x\sin x + e^{\sin x}.\cos x\sin x + e^{\sin x}.\cos x}{\cos x}$$

$= 1$.

203. (d) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+x+2}{x^2+3x+x+3}$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x\to -1}\frac{x+2}{x+3} = \frac{1}{2}$$

204. (d) $\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\log(1+x) = \lim_{x\to 0}2\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x\to 0}2\log_e e = 2\quad\left\{\because \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_e e = 1\right\}$$

ट्रिक : L- हॉस्पीटल नियम से।

205. (b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2-6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{6}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-6}}\right]^{\frac{-6}{3x+2}.\frac{x+1}{3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}e^{\frac{-2(x+1)}{3x+2}} = e^{-2/3},\qquad \left\{\because \lim_{x\to\infty}\frac{-2(x+1)}{3x+2} = \frac{-2}{3}\right\}.$$

206. (d) $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(3x+4)}{x^2(x-8)} = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)x\left(3+\frac{4}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{8}{x}\right)}\right]$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(3+\frac{4}{x}\right)}{\left(1-\frac{8}{x}\right)}\right] = 0.$$

207. (d) फलन परिभाषित है $f(x) = \begin{cases}\frac{\sin[x]}{[x]} & (-1\le x<0)\\ 0 & (0\le x<1)\end{cases}$

$\therefore$ बाएं पक्ष की सीमा $= \lim_{x\to 0-}f(x) = \lim_{x\to 0-}\frac{\sin[x]}{[x]}$

$$= \frac{\sin(-1)}{-1} = \sin 1^c$$

दाएं पक्ष की सीमा = 0.

अतः सीमा का अस्तित्व नहीं है।

208. (c) $\lim_{n\to\infty}\frac{1-(10)^n}{1+(10)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(10)^n\left[\left(\frac{1}{10}\right)^n - 1\right]}{(10)^{n+1}\left(1+\frac{1}{10^{n+1}}\right)} = -\frac{1}{10}$

$\therefore \alpha = 1$

209. (b) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^3)}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2/(1+x^3)}{3\sin^2 x\cos x}$

[L- हॉस्पीटल नियम से]

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{1+x^3}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2.\frac{1}{\cos x}\right] = \frac{1}{1+0}.(1)^2.\frac{1}{1} = 1$$

210. (b) $\lim_{\theta\to 0}\frac{4\theta(\tan\theta - \sin\theta)}{(1-\cos 2\theta)^2} = \lim_{\theta\to 0}\frac{4\theta\sin\theta(1-\cos\theta)}{4\sin^4\theta\cos\theta}$

$$= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)\frac{2\sin^2\theta/2}{\sin^2\theta\cos\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{2\sin^2\theta/2}{(2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)^2)}\frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2(\theta/2).\cos\theta} = \frac{1}{2}$$

211. (d) L- हॉस्पीटल नियम से।

212. (c) $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{x^n\left(1+\frac{1}{x^n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^n}\right)} = 1$

213. (a) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+.... +\left(\frac{1}{(2n-1)}-\frac{1}{(2n+1)}\right)\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2n+1}\right] = \frac{1}{2}.$$

214. (c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-2x-\beta\right) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1-\alpha)-x(\alpha+\beta)+1-b}{x+1} = 0$$

चूंकि दी गई सीमा शून्य है। इसलिए बहुपद के हर की घात अंश की घात से कम होनी चाहिए

$\therefore\ 1-\alpha = 0$ और $\alpha+\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ और $\beta = -1$.

215. (b) $\lim_{x\to 2}\frac{\int_6^{f(x)}4t^3\,dt}{x-2}$ (0 / 0 रूप) $= \lim_{x\to 2}\frac{4(f(x))^3\times f'(x)}{1}$

$= 4(f(2))^3\times f'(2) = 18$

216. (b) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1-n^2}+\frac{2}{1-n^2}+.....+\frac{n}{1-n^2}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\Sigma n}{1-n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{1-n^2} = -\frac{1}{2}.$$

217. (c) दिया है $= \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+.....+n^2}{1+n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\Sigma n^2}{1+n^3}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{1+n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n^3}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{6}.1.\frac{2}{(1)} = \left(\frac{1}{3}\right).$$

218. (a) $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}}=0$

($\because n\to\infty$, अंश $\to a$ जबकि हर $\to\infty$)

219. (a) $a_{n+1}=\frac{4+3a_n}{3+2a_n}$

$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+3a_n}{3+2a_n}$

$\Rightarrow a=\frac{4+3a}{3+2a}\Rightarrow 2a^2=4\Rightarrow a=\sqrt{2}$

$a\neq-\sqrt{2}$ क्योंकि प्रत्येक $a_n>0$, अतः $\lim a_n=a>0$.

220. (b) हमें ज्ञात है कि

$\cos A\cos 2A\cos 4A....\cos 2^{n-1}A=\frac{\sin 2^nA}{2^n\sin A}$

$A=\frac{x}{2^n}$ लेने पर,

$\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)...\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\sin x}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$

$\therefore\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)...\cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\frac{(x/2^n)}{\sin(x/2^n)}=\frac{\sin x}{x}$.

221. (c) $y=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+.......+\frac{1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}$

$\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2^n}\right]=1-0=1$

222. (a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+.......+\frac{n}{n^2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+......+n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{2}(n+1)}{n^2}$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$

223. (a) $\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{\Sigma n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-n)(1+n)}{\frac{1}{2}n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(1-n)}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{1}{n}-1\right)=2(0-1)=-2$.

224. (b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+5-6+.....-2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-.....\right)-2\right]}{n\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}\right]}=\frac{-2}{1+2}=\frac{-2}{3}$.

225. (d) $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+......+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{10}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}+\left(1+\frac{2}{x}\right)^{10}+...+\left(1+\frac{100}{x}\right)^{10}\right]}{x^{10}\left[1+\frac{10^{10}}{x^{10}}\right]}=100$.

226. (b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+.....+n}{n^2+100}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+100)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n^2\left(1+\frac{100}{n^2}\right)}=\frac{1}{2}$.

227. (b) $\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos t^2dt}{x}$

L- हॉस्पीटल नियम से,

$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos t^2dt}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x^2}{1}=1$.

सांतत्य

1. (d) यहाँ $f(2)=0$

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{h\to0}f(2-h)=\lim_{h\to0}|2-h-2|=0$

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{h\to0}f(2+h)=\lim_{h\to0}|2+h-2|=0$

अतः यह $x=2$ पर सतत् है।

2. (b) $f(\pi/2)=3$ चूँकि $f(x)$, $x=\pi/2$ पर सतत् है

$\Rightarrow\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{k\cos x}{\pi-2x}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\frac{k}{2}=3\Rightarrow k=6.$

3. (b) चूँकि फलन की $x\to0$ के लिए सीमा $a+b$ है। अतः फलन को $x=0$ पर संतत होने के लिए $x=0$ पर फलन का मान $a+b$ होना चाहिए $\Rightarrow f(0)=a+b$.

4. (a) सतत् होने के लिए $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)=k$

$\Rightarrow k=\lim_{x\to2}\frac{x^3+x^2-16x+20}{(x-2)^2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4x+4)(x+5)}{(x-2)^2}=7$

5. (a) यहाँ $\lim_{x\to0+}f(x)=k$, $\lim_{x\to0-}f(x)=-k$ एवं $f(0)=k$

परन्तु $f(x)$, $x=0$, पर सतत् है, अतः $k=0$

6. (b) $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e$.

7. (d) चूँकि $\lim_{x\to1/2}f(x)\neq f\left(\frac{1}{2}\right)$.

8. (b) $f(a)=0$

$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}\left(\frac{x^2}{a}-a\right)=\lim_{h\to0}\left\{\frac{(a-h)^2}{a}-a\right\}=0$

तथा $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{h\to0}\left\{a-\frac{(a+h)^2}{a}\right\}=0$

अतः यह $x=a$ सतत् है।

9. (c) $f(0)=0$

$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{h\to 0} e^{-1/h} = 0$ एवं $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{h\to 0} e^{1/h} = \infty$

अतः फलन $x=0$ पर असतत् है।

10. (c) $f(x) = \left\{\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}\right\}$, जब $x \neq 1$

$= 2$, जब $x=1$

$f(1)=2,\ f(1+) = \lim_{x\to 1+} \frac{x^2-4x+3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{(x-3)}{(x+1)} = -1$

$f(1-) = \lim_{x\to 1-} \frac{x^2-4x+3}{x^2-1} = -1 \Rightarrow f(1) \neq f(1-)$

अतः फलन $x=1$ पर असतत् है।

11. (b) $f(x) = \frac{x+1}{(x-3)(x+4)}$; अतः बिन्दु 3, – 4 हैं।

12. (c) $f(0+) = f(0-) = 2$ व $f(0) = 2$

अतः फलन $x=0$ पर संतत है।

13. (c) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, परन्तु $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$ एवं $x \to 0$

अतः $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

अतः $f(x), x=0$ पर सतत् है।

14. (d) $f(0-) = \lim_{x\to 0-} k(2x-x^2) = 0$; $f(0+) = \lim_{x\to 0+} \cos x = 1$

$\therefore\ f(0) = \cos x = 1$

अतः k के किसी भी मान के लिए $f(0-)=1$ नहीं है।

15. (c) $f(0)=0$; $f(0-) = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{e^{-1/h}+1} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{1+\frac{1}{e^{1/h}}} = 0$

$f(0+) = \lim_{h\to 0} \frac{h}{e^{1/h}+1} = 0.$

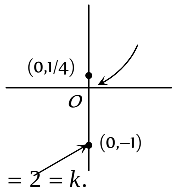
16. (b) $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0} [(1+2x)^{1/2x}]^2 = e^2.$

17. (d) $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{h\to 0} 2^{1/h} = \infty$

$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{h\to 0} 2^{-1/h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2^{1/h}} = 0$.

18. (c) $f(0)=0, \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0} x\left[\frac{\sin x^2}{x^2}\right] = 0$.

19. (c) चित्र से, स्पष्ट है कि $x=0$ पर फलन असतत् है।



20. (a) यह स्पष्ट है।

21. (b) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x+1 = 2 = k.$

22. (b) (i) जब $0 \le x < 1$

$f(x)$ का अस्तित्व नहीं है क्योंकि $[x]=0$

तथा (ii) $\lim_{x\to 1+} f(x)$ एवं $\lim_{x\to 1-} f(x)$ का भी अस्तित्व नहीं है।

अतः $f(x)$ प्रत्येक पूर्णांकों एवं (0, 1) में असतत् है।

23. (b) $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\sin^2 ax}{(ax)^2} a^2 = a^2$ व $f(0)=1.$

अतः $f(x), x=0$ पर असतत् है जब $a \neq 0$

24. (b) $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$

$f(0)=0,\ \lim_{x\to 0+} f(x) = -4$

$f(x),\ x=0$ पर असतत् है

एवं $\lim_{x\to 1-} f(x) = 1$ व $\lim_{x\to 1+} f(x) = 1,\ f(1)=1$

अतः $f(x),\ x=1$ पर सतत् है।

एवं $\lim_{x\to 2-} f(x) = 4(2)^2 - 3.2 = 10$

$f(2)=10$ एवं $\lim_{x\to 2+} f(x) = 3(2)+4 = 10$

अतः $f(x),\ x=2$ पर सतत् है।

25. (c) $\lim_{x\to 0} f(x) = \sin^{-1}(0) = 0$ व $f(0)=0$

अतः $f(x),\ x=0$ पर सतत् है।

26. (b) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{2x.5} = \frac{2}{5} = k.$

27. (c) $\lim_{x\to 1+} f(x) = 0$ एवं $\lim_{x\to 1-} f(x) = 1+1 = 2.$

अतः $f(x),\ x=1$ पर असतत् है।

28. (d) $\lim_{x\to 1-} f(x) = -2$ एवं $f(-1) = -2.$

29. (b) $\lim_{x\to 2-} f(x) = \frac{1}{2}$ एवं $\lim_{x\to 2+} f(x) = \frac{1}{2}$ एवं $f(2)=1.$

30. (b) स्पष्टतः $\lim_{x\to b} f(x) = f(b) = 0$.

31. (b) $\lim_{x\to a-} f(x) = -1,\ \lim_{x\to a+} f(x) = 1,\ f(a)=1.$

32. (c) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1,\ f(1) = 2.$

33. (a) $\lim_{x\to 2-} f(x) = 3, \lim_{x\to 2+} f(x) = 3$ एवं $f(2)=3$.

34. (c) यहाँ $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1$ एवं $\lim_{x\to 3\pi/4-} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 3\pi/4+} f(x) = \lim_{h\to 0} 2\sin\frac{2}{9}\left(\frac{3\pi}{4}+h\right) = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$.

अतः $f(x),\ x = \frac{3\pi}{4}$ पर सतत् है।

35. (a) $\lim_{x\to \pi/2-} f(x) = \frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to \pi/2+} f(x) = \frac{-\pi}{2}$ व $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$

36. (a) $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}\left(\frac{2\sin^2 2x}{(2x)^2}\right)4 = 8$

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{16+\sqrt{x}}-4} \lim_{x\to 0+} \sqrt{16+\sqrt{x}}+4 = 8$;

अतः $a=8$ है।

37. (d) $\lim_{x\to 1-} f(x) = a-b,\ \lim_{x\to 1+} f(x) = 2 \Rightarrow a-b=2$

अतः सभी a, b के मानों के लिए $f(x), x=1$ पर सतत् है।

38. (b) $\lim_{x\to 0-} f(x) = 1+1 = 2,\ \lim_{x\to 0+} f(x) = 0,\ f(0) = 2$.

39. (b) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x+2)(x^2+4) = 32,\ f(2) = 16.$

40. (b) $\lim_{x\to 1-} f(x) = 1, \lim_{x\to 1+} f(x) = 6.$

41. (b) $\lim_{x\to -5} f(x) = \frac{(x-2)(x+5)}{(x+5)(x-3)} = \frac{-7}{-8} = \frac{7}{8}.$

42. (d) सांतत्य की परिभाषा से,
$\lim_{x\to 3+} f(x) = f(3) = \lim_{x\to 3-} f(x)$
$\Rightarrow \lim_{x\to 3-} f(x) = 4$ या $\lim_{h\to 0} 3 - h + \lambda = 4$
$\Rightarrow 3 + \lambda = 4 \Rightarrow \lambda = 1.$

43. (d) यदि $x \to 0$, तब $\sin\frac{1}{x}$ का मान [–1, 1] में अनन्त बार आता है। अतः $x = 0$ पर सीमा का अस्तित्व नहीं होगा। अतः k का कोई मान नहीं होगा।

44. (d) चूँकि हमें दिया है $f(x) = \sin x$, यदि $x \ne n\pi$
अर्थात् $x \ne 0, \pi, 2\pi, ... = 2$
अन्यथा
$\therefore \lim_{x\to 0^+} g\{f(x)\} = \lim_{x\to 0^+} g\{\sin x\} = \lim_{x\to 0^+} (\sin^2 x + 1) = 1$
इसी प्रकार $\lim_{x\to 0^-} g\{f(x)\} = 1.$

45. (d) $\lim_{x\to 4-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(4-h) = \lim_{h\to 0} \frac{4-h-4}{|4-h-4|} + a$

$= \lim_{h\to 0} -\frac{h}{h} + a = a - 1.$

$= \lim_{x\to 4+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(4+h) = \lim_{h\to 0} \frac{4+h-4}{|4+h-4|} + b = b + 1$

तथा $f(4) = a + b$
चूँकि $f(x), x = 4$ पर सतत् है, अतः
$\lim_{x\to 4-} f(x) = f(4) = \lim_{x\to 4+} f(x)$
$\Rightarrow a - 1 = a + b = b + 1 \Rightarrow b = -1$ तथा $a = 1.$

46. (d) किसी भी $x \ne 1, 2$ के लिये $f(x)$ दोनों बहुपदों का भागफल है एवं बहुपद फलन हमेशा सतत् होता है। अतः $f(x)$ सभी $x\ (x \ne 1, 2)$ के लिये सतत् होगा। $x = 1, 2$ पर सांतत्य की जाँच करें।

47. (c) चूँकि $f(x),\ x = 0,$ पर सतत् है, अतः

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(27-2x)^{1/3} - 3}{9 - 3(243+5x)^{1/5}} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}(27-2x)^{-2/3}(-2)}{-\frac{3}{5}(243+5x)^{-4/5}(5)} = 2$$

48. (a) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x} = k \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log(\cos x) = \log k$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \lim_{x\to 0} \log\cos x = \log k$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \times 0 = \log_e k \Rightarrow k = 1$.

49. (a) चूँकि $\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) = f(2) = 1$
एवं यह x के सभी मानों 2 से बड़े व 2 से छोटे के लिए सतत् है।

50. (c) दिया है, फलन अंतराल $(-\infty, 6)$ के सभी बिन्दुओं पर सतत् है अर्थात् $x = 1, x = 3$ पर फलन सतत् है।
यदि फलन $f(x), x = 1$ पर सतत् है। तब

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow 1 + \sin\frac{\pi}{2} = a + b$
$\therefore a + b = 2$ .....(i)
यदि $x = 3$ पर फलन सतत् है, तब
$\lim_{x\to 3^-} f(3) = \lim_{x\to 3^+} f(x) \Rightarrow 3a + b = 6\tan\frac{3\pi}{12}$
$\therefore 3a + b = 6$ .....(ii)
(i) तथा (ii) से $a = 2, b = 0$

51. (c) यदि फलन $f(x), x = 0$ पर सतत् है, तब
$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$

दिया है, $f(0) = k$; $f(0) = k = \lim_{x\to 0} x\left(\sin\frac{1}{x}\right)$

$f(0) = k = 0,\ \left(-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1\right)\ \therefore\ k = 0$

52. (a) यदि f फलन $x = 0$ पर सतत् है, तब
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

$$k = \lim_{h\to 0} f(0-h) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos\frac{\pi}{2}[0-h]}{[0-h]}$$

$$k = \lim_{h\to 0} \frac{\cos\frac{\pi}{2}[-h]}{[-h]} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos\frac{\pi}{2}[-h-1]}{[-h-1]}$$

$$k = \lim_{h\to 0} \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{-1};\ k = 0$$

53. (c) स्पष्टतः फलन केवल अन्तराल $[1, \infty)$ में परिभाषित है। अतः विकल्प (b) नहीं हो सकता। $x > 2$ के लिए $y = 3x - 2$ जो एक सरल रेखा है, अतः सतत् है। पुनः $x = 2$ पर $y = 4$ । अतः फलन $x = 2$ पर भी सतत् है (लेकिन केवल $x = 2$ पर नहीं)

54. (a) $f(x)$ प्रत्येक बिन्दु पर सतत् है
$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$
$\Rightarrow 5\times 1 - 4 = 4\times 1 + 3\times b\times 1$
$\Rightarrow 1 = 4 + 3b \Rightarrow 3b = -3 \Rightarrow b = -1$.

55. (c) सभी $x \in R$ पर सतत् होने के लिए
$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to(-\pi/2)^-} (-2\sin x) = \lim_{x\to(-\pi/2)^+} (A\sin x + B)$
$\Rightarrow 2 = -A + B$ .....(i)
तथा $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to(\pi/2)^-} (A\sin x + B) = \lim_{x\to(\pi/2)^+} (\cos x)$
$\Rightarrow 0 = A + B$ .....(ii)
समीकरण (i) व (ii) से, $A = -1$ तथा $B = 1$.

56. (a) $f(5) = \lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 7x + 10}$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)^2}{(x-2)(x-5)} = \frac{5-5}{5-2} = 0.$$

57. (c) $x=0$ पर सतत् होने के लिए $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$

$$=\lim_{x\to 0}(x+1)^{\cot x}=\lim_{x\to 0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^{x\cot x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\tan x}\right)}=e^1=e$$

58. (a) यह स्पष्ट है।

59. (a) यह स्पष्ट है, कि $|x|$, सभी x के लिए सतत् है

अब, $Rf'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-0}{h}=1$

$Lf'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{|0-h|-0}{-h}=-1$

अतः $f(x)=|x|$, $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है।

60. (c) यदि $f(x), x=\frac{\pi}{2}$ पर सतत् है, तब

$\lim_{x\to\pi/2} f(x)=f(0)$ या $\lambda=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{\pi-2x}$, $\left(\frac{0}{0}\text{ रूप}\right)$

L- हॉस्पीटल नियम से,

$\lambda=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos x}{-2}\Rightarrow\lambda=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{2}=0.$

61. (a) चूँकि $f(x), x=0$ पर सतत् है, अतः $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sin\pi x}{5x}=k$

$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right).\frac{\pi}{5}=k\Rightarrow(1).\frac{\pi}{5}=k\Rightarrow k=\frac{\pi}{5}.$

62. (d) यदि $f(x), x=0$ पर सतत् है, तब

$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{\sin 2x}$, $\left(\frac{0}{0}\text{ रूप}\right)$

L- हॉस्पीटल नियम से, $f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\right)}{2\cos 2x}=-\frac{1}{8}$

63. (c) किसी भी बिन्दु पर फलन सतत् नहीं है।

64. (b) $\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$

और $f(3)=2(3)+k=6+k$

$\because$ फलन f, $x=3$ पर सतत् है।

$\therefore\ 6+k=6\Rightarrow k=0$

65. (b) $f(x)=\left[x^2+e^{\frac{1}{2-x}}\right]^{-1}$ तथा $f(2)=k$

यदि $f(x), x=2$ पर दाँयी ओर से सतत् है, तो

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=k\Rightarrow\lim_{x\to 2^+}\left[x^2+e^{\frac{1}{2-x}}\right]^{-1}=k$

$\Rightarrow k=\lim_{h\to 0} f(2+h)\Rightarrow k=\lim_{h\to 0}\left[(2+h)^2+e^{\frac{1}{2-(2+h)}}\right]^{-1}$

$\Rightarrow k=\lim_{h\to 0}\left[4+h^2+4h+e^{-1/h}\right]^{-1}$

$\Rightarrow k=[4+0+0+e^{-\infty}]^{-1}\Rightarrow k=\frac{1}{4}.$

66. (d) L- हॉस्पीटल नियम से, $\lim_{x\to 0} f(x)$, 2 है। अतः $f(x)$ के सतत् होने के लिए फलन का मान 2 होना चाहिए।

67. (c) L.H.L. $=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+kx}-\sqrt{1-kx}}{x}=k$

R.H.L. $=\lim_{x\to 0^+}(2x^2+3x-2)=-2$

चूँकि यह सतत् है अतः L.H.L = R.H.L $\Rightarrow k=-2$

68. (c) $f(x)=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}$

$=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ पर $x=\pi$, $f(\pi)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

69. (a) $f(x)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ k, & x=0\end{array}\right.$, $x=0$ पर सतत है।

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{2.\sin^2 x/2}{x}=k$

$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x/2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}.\frac{x}{4}=k\Rightarrow k=0.$

70. (a) यह स्पष्ट है।

71. (d) दिया है $f(x)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{array}\right.$

$\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{1/x}(1-e^{-1/x})}{e^{1/x}(1+e^{-1/x})}=1$

$\Rightarrow\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\frac{1-e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\frac{1-e^{-\infty}}{1+e^{\infty}}=1$

अतः $\lim_{x\to 0} f(x)$ का $x=0$ पर अस्तित्व है, लेकिन $x=0$ पर यह सतत् नहीं है।

72. (b) $f(x)=2x-1$, यदि $x>2$, $f(x)=k$,

यदि $x=2$ और x^2-1, यदि $x<2$, फलन सतत् है।

$\therefore\ \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)\Rightarrow\lim_{x\to 2}(2x-1)=k\Rightarrow k=3.$

73. (b) $f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x-\sin^{-1}x}{2x+\tan^{-1}x}\right)=f(0)$, $\left(\frac{0}{0}\text{ रूप}\right)$

L- हॉस्पीटल नियम से

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\left(2+\frac{1}{1+x^2}\right)}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$$

ट्रिक : $f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{2-\frac{\sin^{-1}x}{x}}{2+\frac{\tan^{-1}x}{x}}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$

74. (c) $x=0$ पर $|x|$ सतत् है और $x=0$ पर $\frac{|x|}{x}$ असतत् है।

$\therefore$ $f(x)=|x|+\frac{|x|}{x}$, $x=0$ पर असंतत है।

75. (e) $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x-2^{-x}}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(2^x+2^{-x})\log_e 2}{1}\right]$

$=(2^0+2^0)\log_e 2$

$=(1+1)\log_e 2$

$=2\log_e 2=\log_e 4$.

76. (c) $f(x)=\frac{2x^2+7}{x^2(x+3)-1(x+3)}=\frac{2x^2+7}{(x^2-1)(x+3)}$

$=\frac{2x^2+7}{(x-1)(x+1)(x+3)}$

अतः $x=1$, $x=-1$ और $x=-3$ असतत् है।

77. (a) $f(x)=x^p\sin\frac{1}{x}, x\neq 0$ और $f(x)=0, x=0$

चूँकि $x=0$ पर $f(x)$ सतत् है।

$\therefore$ $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} x^p\sin\frac{1}{x}=0\Rightarrow p>0$.

$x=0$ पर फलन $f(x)$ अवकलनीय है। यदि

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ का अस्तित्व है

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^p\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x^{p-1}\sin\frac{1}{x}$ का अस्तित्व है

$\Rightarrow p-1>0$ या $p>1$

यदि $p\le 1$, तब $x=0$ पर $\lim_{x\to 0} x^{p-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ का अस्तित्व नहीं है तथा $x=0$ पर $f(x)$ अवकलनीय नहीं है।

$\therefore$ $0<p\le 1$ के लिए फलन $f(x)$ का सतत् है। लेकिन $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है।

78. (d) $f(x)=\begin{cases}\frac{1-|x|}{1+x}, & x\neq -1\\ 1 & , x=-1\end{cases}$ और $f(x)=\begin{cases}1 & , x<0\\ \frac{1-x}{1+x}, & x\ge 0\end{cases}$

$$f(2x)=\begin{cases}1 & , x<0\\ \frac{1-[2x]}{1+[2x]}, & x>0\end{cases}\Rightarrow f(2x)=\begin{cases}1 & , x<0\\ 1 & , 0\le x<\frac{1}{2}\\ 0 & , \frac{1}{2}\le x\le 1\\ -\frac{1}{3} & , 1\le x<\frac{3}{2}\end{cases}$$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ और $x=1$ के लिए फलन $f(x)$ असतत् है और

x के सभी मान, $x<\frac{1}{2}$ फलन $f(x)$ सतत् है।

79. (b) $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos 4x}{8x^2}, & x\neq 0\\ k & , x=0\end{cases}$

यदि $x=0$ तब $f(x)$ सतत् फलन है।

$\lim_{x\to 0+}[f(x)=\lim_{x\to 0-}[f(x)]\ \lim_{x\to 0}[f(x)]=\lim_{h\to 0-}[f(0+h)]$

$=\lim_{h\to 0}[f(h)]=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 4h}{8h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2 2h}{8h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 2h}{4h^2}$

$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin 2h}{2h}\right)^2=(1)^2=1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{h\to 0}[f(0-h)=\lim_{h\to 0}[f(-h)]=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 4(-h)}{8(-h)^2}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 4h}{8h^2}=1$

$f(0)=1\Rightarrow k=1$

80. (b, d) $f(x)=\begin{cases}e^x;\ x\le 0\\ 1-x;\ 0<x\le 1\\ x-1;\ x>1\end{cases}$

$Rf'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-h-1}{h}=-1$

$Lf'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-f(0)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-h}-1}{-h}=1$

$x=0$ पर अवकलनीय नहीं है।

इसी प्रकार $x=1$ पर अवकलनीय नहीं है।

लेकिन $x=0$, 1 पर सतत् है।

अवकलनीयता

1. (d) विकल्प (d) सत्य है, क्योंकि अवकलनीय फलन सदैव सतत् होता है।

2. (d) चूँकि $Lf'(2)\neq Rf'(2)$

3. (b) $f(0+0)=\lim_{h\to 0} f(x)=\lim_{h\to 0} f(0+h)$

$=\lim_{h\to 0}(0+h)\frac{e^{1/0+h}-e^{-1/0+h}}{e^{1/0+h}+e^{-1/0+h}}=\lim_{h\to 0} h\ \frac{e^{1/h}-e^{-1/h}}{e^{1/h}+e^{-1/h}}=0$

तथा $f(0-0)=\lim_{h\to 0} f(0-h)=\lim_{h\to 0} -h\ \frac{e^{-1/h}-e^{1/h}}{e^{-1/h}+e^{1/h}}=0$

तथा $f(0)=0$; $\therefore$ $f(0+0)=f(0-0)=f(0)$

f, $x=0$ पर सतत् है। शेष बिन्दुओं पर फलन $f(x)$ स्पष्टतः सतत् होगा। इस प्रकार $f(x)$ प्रत्येक बिन्दु पर संतत है।

पुनः $L\,f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-f(0)}{-h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{h.\frac{e^{-1/h}-e^{1/h}}{e^{-1/h}+e^{1/h}}-0}{-h}=-1$

$R\,f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\ \frac{e^{1/h}-e^{-1/h}}{e^{1/h}+e^{-1/h}}}{h}=1$

$\because L\ f'(0)\neq R\,f'(0)$

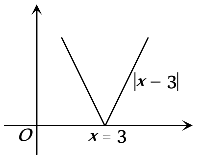
$\therefore$ फलन f, $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है।

4. (d) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(3-h) = \lim_{h\to 0} |\ 3-h-3|\ = 0$

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(3+h) = \lim_{h\to 0} |\ 3+h-3|\ = 0$

$\because \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$

अतः f, $x = 3$ पर सतत् है।



अब $L\,f'(3) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(3-h)-f(3)}{-h}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{|\ 3-h-3|\ -0}{-h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h}{-h} = -1$

$R\,f'(3) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{|\ 3+h-3|\ -0}{h} = 1$

$\because L\,f'(3) \neq R\,f'(3)$

अतः f, $x = 3$ पर अवकलनीय नहीं है।

ट्रिक : ग्राफ से हम देख सकते हैं कि फलन सतत् है, किन्तु $x = 3$ पर स्पर्शी संभव नहीं है। अतः अवकलनीय नही हैं।

5. (a,c,d) $x \le x^2 \Rightarrow x(1-x) \le 0 \Rightarrow x(x-1) \ge 0$

$\Rightarrow x \le 0$ या $x \ge 1$; $\therefore h(x) = \begin{cases} x & : \quad x \le 0 \\ x^2 & : \quad 0 < x < 1 \\ x & : \quad x \ge 1 \end{cases}$

फलन $h(x)$, x के सभी मानों के लिये सतत् है किन्तु $x = 0$, 1 पर अवकलनीय नहीं है।

साथ ही $h'(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ \text{अस्तित्व नहीं है} & x = 0 \\ 2x & 0 < x < 1 \\ \text{अस्तित्व नहीं है} & x = 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$

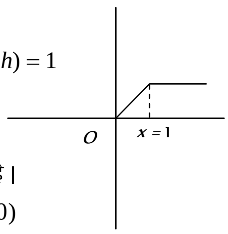
$\therefore\ h'(x) = 1$, सभी $x > 1$ के लिये

6. (d) यह स्पष्ट है।

7. (a) $f(x) = \begin{cases} x\ , & 0 \le x \le 1 \\ 1\ , & 1 < x \le 2 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0} (1-h) = 1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = 1$



अतः फलन अंतराल (0, 2) में सतत् है।

अब $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{h\to 0} (0+h) = 0 = f(0)$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{h\to 0} (2-h) = 1 = f(2)$

अतः फलन अंतराल [0, 2] में सतत् है। चित्र से, फलन $x = 1$ पर अवकलनीय नहीं है।

8. (a) चूँकि यह फलन $x = 0$ पर सतत् है अब अवकलनीयता के लिए

$f(x) = |\ x\ | = |\ 0|\ = 0$ व $f(0+h) = f(h) = |\ h|$

$\therefore \lim_{h\to 0-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \dfrac{|\ h|}{h} = -1$

एवं $\lim_{h\to 0+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \dfrac{|\ h|}{h} = 1$

अतः यह सतत् एवं अन्अवकलनीय है।

9. (b) यहाँ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{|\ x|}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x} = x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \dfrac{x^2}{-x} = -x, & x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0} -x = 0$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$ व $f(0) = 0$

अतः $f(x)$, $x = 0$ पर सतत् है एवं $f(x), x$ के अन्य मानों पर भी सतत् है।

अतः $f(x)$ सभी जगह सतत् होगा।

स्पष्टतः $Lf'(0) = -1$ एवं $Rf'(0) = 1$,

अतः $f(x)$, $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है।

10. (b) $Rf'(1) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{\{(1+h)^3 - 1\} - 0}{h} = 3$

$Lf'(1) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\{(1-h)-1\} - 0}{-h} = 1$

$\therefore\ Rf'(1) \ne Lf'(1)$

$\Rightarrow f(x)$, $x = 1$ पर अनअवकलनीय है।

अब $f(1+0) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = 0$

तथा $f(1-0) = \lim_{h\to 0} f(1-h) = 0$

$\therefore\ f(1+0) = f(1-0) = f(0)$

$\Rightarrow f(x)$, $x = 1$ पर सतत् है।

अतः $x = 1$ पर, $f(x)$ सतत् व अनअवकलनीय है।

11. (d) यहाँ जब $-1 \le x \le 1$, $0 \le x \sin \pi x < 1$

$\Rightarrow f(x) = [x \sin \pi x] = 0$, $-1 \le x \le 1$ के लिए

अर्थात् $f(x)$ [−1, 1] में अचर फलन (शून्य के बराबर) है।

$\Rightarrow f(x)$ (−1, 1) में अवकलनीय है।

12. (d) चूँकि $|\ x-3| = x-3$, यदि $x \ge 3$ $= -x+3$, यदि $x < 3$

$\therefore$ दिया गया फलन निम्न प्रकार परिभाषित किया जा सकता है

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{13}{4}, & x < 1 \\ 3-x, & 1 \le x < 3 \\ x-3, & x \ge 3 \end{cases}$

अब $x = 1$ पर सांतत्य व अवकलनीयता की जाँच करें।

13. (b) दिया है $f(x)$, $x = 0$ पर अवकलनीय है, अतः $f(x)$, $x = 0$ पर सतत् होगा

$\therefore \lim_{x\to 0^-} (e^x + ax) = \lim_{x\to 0^+} b(x-1)^2$

$\Rightarrow e^0 + a\times 0 = b(0-1)^2 \Rightarrow b = 1$ ..... (i)

लेकिन $f(x)$, $x = 0$ पर अवकलनीय है, तब

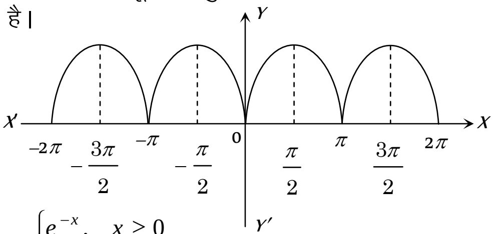
$Lf'(x) = Rf'(x) \Rightarrow \dfrac{d}{dx}(e^x + ax) = \dfrac{d}{dx} b(x-1)^2$

$\Rightarrow e^x + a = 2b(x-1)$

$x = 0$ पर, $e^0 + a = -2b \Rightarrow a + 1 = -2b \Rightarrow a = -3$

$\Rightarrow (a, b) = (-3, 1)$.

14. (d) $f(x)=|\sin x|$ के ग्राफ से स्पष्ट है कि यह सभी जगह सतत् है लेकिन π के पूर्णांक गुणकों तथा $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है।



15. (c) $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\ge 0 \\ e^{x}, & x<0 \end{cases}$

स्पष्टतः $f(x)$ सभी अशून्य x के लिए सतत् तथा अवकलनीय है।

चूँकि $\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0} e^{x}=1$

तथा $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)e^{-x}=1$

पुनः $f(0)=e^{0}=1$

अतः $f(x)$ सभी x के लिए सतत् है।

($x=0$ पर LHD) $=\left(\frac{d}{dx}(e^{x})\right)_{x=0}=1$

($x=0$ पर RHD) $=\left(\frac{d}{dx}(e^{-x})\right)_{x=0}=-1$

अतः $f(x)$, $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है।

इस प्रकार $f(x)=e^{-|x|}$ सभी जगह सतत् है, लेकिन $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है।

16. (c) $\lim_{h\to 0^-} 1+(2-h)=3$, $\lim_{h\to 0^+} 5-(2+h)=3$, $f(2)=3$

अतः f, $x=2$ पर सतत् है

अब $Rf'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{5-(2+h)-3}{h}=-1$

$Lf'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1+(2-h)-3}{-h}=1$

$\because Rf'(x)\ne Lf'(x)$; अतः $x=2$ पर f अवकलनीय नहीं है।

17. (a) $f'(k-0)=\lim_{h\to 0}\frac{[k-h]\sin\pi(k-h)-[k]\sin\pi k}{-h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)\sin\pi h-k\times 0}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)\sin\pi h}{-h}=(-1)^{k}.(k-1)\pi$$

18. (d) $Rf'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{2(2+h)-1-(4-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4+2h-1-3}{h}=2$

तथा $Lf'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{2-h+1-3}{-h}=1$

अतः $f'(2)$ का अस्तित्व नहीं है।

19. (c) $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^{2}, & x\ge 0 \end{cases}$; $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{h\to 0} f(0-h)=0$

तथा $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{h\to 0} f(0+h)=\lim_{h\to 0}(0+h)^{2}=0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

अतः $f(x)$, $x=0$ पर सतत् फलन है।

$L\,f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-0}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{-h}=0$

$Rf'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(0+h)^{2}-0}{h}=0$

$\Rightarrow Lf'(x)=Rf'(x)$

अतः $f(x)$, $x=0$ पर अवकलनीय है।

अब $f'(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 2x, & x\ge 0 \end{cases}$; $\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{h\to 0} f'(0-h)=0$

तथा $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{h\to 0} f'(0+h)=\lim_{h\to 0} 2(0+h)=0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=0$

अतः $f'(x)$, $x=0$ पर सतत् फलन है।

अब $L\,f''(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-f(0)}{-h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{-h}=0$$

$R\,f''(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{2(0+h)-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2\Rightarrow Lf''(x)\ne Rf''(x)$

अतः $f'(x)$, $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है।

20. (c) $\because$ फलन f, $x=0$ पर सतत् है।

$\therefore f(0^-)=f(0^+)=f(0)=-1$

पुनः $Lf'(0)=Rf'(0)$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-f(0)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{-2h}-1+1}{-h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{ah+\frac{bh^{2}}{2}-1+1}{h}\right)$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\left(\frac{-2e^{-2h}}{-1}\right)=\lim_{h\to 0}\left(a+\frac{bh}{2}\right)$

$\Rightarrow 2=a+0 \Rightarrow a=2, b=$ कोई भी संख्या

21. (b) एक सतत् फलन अवकलनीय हो भी सकता है और नहीं भी। अतः (b) सत्य नहीं है।

22. (d) $\lim_{x\to 0} f(x)=x^{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ लेकिन $-1\le\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 1$ तथा $x\to 0$

$\therefore \lim_{x\to 0^+} f(x)=0=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$

अतः $f(x)$, $x=0$ पर सतत् है। साथ ही $f(x)=x^{2}\sin\frac{1}{x}$ अवकलनीय है।

क्योंकि $Rf'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{h^{2}\sin\frac{1}{h}-0}{h}=0$

तथा $Lf'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 \sin(1/-h)}{-h} = 0$

23. (b) परिभाषा से, $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{2(1+h)-5} - \left(\dfrac{-1}{3}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\dfrac{1}{2h-3} + \dfrac{1}{3}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{3+2h-3}{3h(2h-3)}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2h}{3h(2h-3)}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2}{3(2h-3)} = \frac{2}{3(-3)} = \frac{-2}{9}.$$

24. (b) माना $x<0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{1-x}\right) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

$\Rightarrow [f'(x)]_{x=0} = 1$ पुनः $x>0 \Rightarrow |x| = x$

$f(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = \dfrac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow [f'(x)]_{x=0} = 1$

$\Rightarrow f'(0) = 1$.

25. (d) $L\,f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{m(1-h)^2 - m}{-h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{m[1+h^2-2h-1]}{-h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} m(2-h) = 2m$ तथा $R\,f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(1+h)-m}{h}$

अवकलनीयता के लिए, $L\,f'(1) = R\,f'(1)$

किन्तु m के प्रत्येक मान के लिए, $R\,f'(1) = L\,f'(1)$ संभव नहीं है।

26. (c) $x \le 0$ के लिए $(gof)(x) = g[f(x)] = g[1-\cos x] = e^{1-\cos x}$

$(gof)'(x) = e^{1-\cos x}.\sin x,\ x\le 0$ के लिए

$(gof)'(0) = 0$

27. (a) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$; फलन अवकलनीय है $f(1) = 0$,

और $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)}{h} = 5$; दिया गया फलन सतत् है।

अतः $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)}{h} = 5$

28. (d) $\lim\limits_{x\to y}\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le \lim\limits_{x\to y}|x-y|$ या $|f'(x)| \le 0$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f(x)$ अचर है। $f(0) = 0$

$\therefore f(1) = 0$.

29. (c) $f(1) = -2$ और $f'(x) \ge 2\ \forall\ x \in [1,6]$

लैंग्रांजे मध्यमान प्रमेय के उपयोग से,

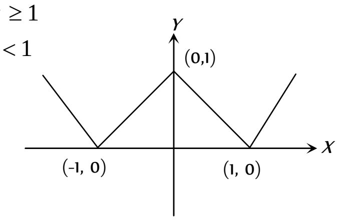
$\dfrac{f(6)-f(1)}{5} = f'(c) \ge 2$

$\Rightarrow f(6) \ge 10 + f(1) \Rightarrow f(6) \ge 10-2 \Rightarrow f(6) \ge 8$

30. (b) $= \begin{cases} |x|-1, & |x|-1 \ge 0 \\ -|x|+1, & |x|-1<0 \end{cases}$

$= \begin{cases} |x|-1, & x \le -1 \text{ या } x \ge 1 \\ -|x|+1, & -1<x<1 \end{cases}$

$= \begin{cases} -x-1, & x\le -1 \\ x+1, & -1<x<0 \\ -x+1, & 0\le x<1 \\ x-1, & x \ge 1 \end{cases}$



ग्राफ से स्पष्ट है, $x = -1, 0$ और 1 पर फलन $f(x)$ अवकलनीय नहीं है।

31. (b) माना फलन $g(x) = f(x) - x^2$ है

$\Rightarrow g(x)$ के कम से कम तीन वास्तविक मूल $x = 1, 2, 3$ होंगे।

$\Rightarrow g'(x)$ के कम से कम दो वास्तविक मूल $x \in (1,3)$ होंगे।

$\Rightarrow g''(x)$ के कम से कम एक वास्तविक मूल $x \in (1,3)$ होगा।

$\Rightarrow f'(x) = 2$ के लिए कम से कम $x \in (1,3)$

32. (b) $f(1) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{3}\right) = ... = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$

चूँकि $x \in (0,1)$ में अनेक अनंत बिन्दु हैं

जहाँ $f(x) = 0$ और $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

और चूँकि $x = 0$ के निकट अनेक अनंत बिन्दु इस प्रकार है कि

$\Rightarrow x = 0$ के निकट $f(x)$ अचर होगा $\Rightarrow f'(0) = 0$

33. (b) $f(1) = -3$; $f'(x) \ge 9$ सभी के लिए $x \in (1,5)$;

$\therefore f(5) \ge 36$

34. (c) $f(x) = 1 + \sin(3x)g(x)$

$f'(x) = 3\cos 3x\, g(x) + \sin 3x\, g'(x) = f(x)\cos 3x$.

35. (d) $f(x) = \begin{cases} 1 & \forall x<0 \\ 1+\sin x, & \forall 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$\therefore f'(x) = \begin{cases} 0, & \forall\ x<0 \text{ (LHD)} \\ \cos x, & 0 \le x \le \pi/2, \text{ (RHD)} \end{cases}$

$\therefore f'(0) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \cos 0 = 1 \end{cases}$, $\therefore f'(0)$ अस्तित्व नहीं है।

36. (d) $f(x) = x^2 - 2x + 4$; $f'(x) = 2x-2$

$x = c$ पर, $f'(c) = 2c-2$

$f(5) = 5^2 - 2(5) + 4 = 19$; $f(1) = 1^2 - 2(1) + 4 = 3$

$\dfrac{f(5)-f(1)}{5-1} = f(c) \Rightarrow \dfrac{19-3}{5-1} = 2c-2 \Rightarrow \dfrac{16}{4} = 2c-2$

$\Rightarrow 4 = 2c-2 \Rightarrow 2c = 6$ या $c = 3$.

37. (d) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x)+f(h)-f(x)}{h}$

$[\because f(x+y) = f(x) + f(y)]$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 g(h)}{h} = 0.g(0) = 0$

[$\because$ g सतत् है इसलिए $\lim_{h\to 0} g(h) = g(0)$]

38. (d) फलन $|x|$, $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है।

$\therefore |x^2-3x+2| = |(x-1)(x-2)|$

अतः $x=1$ और 2 पर f अवकलनीय नहीं है।

अब $f(x) = (x^2-1)|x^2-3x+2|\cos(|x|)$,

$x=2$ पर अवकलनीय नहीं है।

$1<x<2$ के लिए, $f(x) = -(x^2-1)(x^2-3x+2)+\cos x$

$2<x<3$ के लिए, $f(x) = +(x^2-1)(x^2-3x+2)+\cos x$

$Lf'(x) = -(x^2-1)(2x-3)-2x(x^2-3x+2)-\sin x$

$Lf'(2) = -3-\sin 2$

$Rf'(x) = (x^2-1)(2x-3)+2x(x^2-3x+2)-\sin x$

$Rf'(2) = (4-1)(4-3)+0-\sin 2 = 3-\sin 2$

अतः $Lf'(2) \neq Rf'(2)$

39. (c) चूँकि $\frac{dy}{dx} = \cos x$ जो कि $x=0$ पर परिभाषित है और $x=0$ पर अन्य कोई अवकलन गुणांक परिभाषित नहीं है।

40. (c) यह आधारभूत संकल्पना है।

41. (d) यदि $f(x) = \begin{cases} x+2, & -1<x<3 \\ 5, & x=3 \\ 8-x, & x>3 \end{cases}$ और $f(3)=5$

L.H.D $= \lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(3-h)-f(3)}{-h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(3-h+2)-5}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{-h} = 1$

R.H.D $= \lim_{x\to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{8-(3+h)-5}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1$

L.H.D $\neq$ R.H.D ; अतः फलन $f(x)$ अवकलनीय नहीं है।

42. (c) $f(x) = \begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ 2x-1, & x>1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0}(1-h) = 1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0} 2(1+h)-1 = 1$

$\because \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

$\therefore$ $x=1$ पर फलन सतत् है।

$Lf'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1-h)-1}{-h} = 1$

$Rf'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{2+2h-1-1}{h} = 2$

$\therefore$ $Lf'(1) \neq Rf'(1)$

$\therefore$ $x=1$ पर फलन अवकलनीय नहीं है।

43. (d) $Rf'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+\sinh-1}{h} = 1$

$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{-h} = 0$

अतः $f'(0)$ अस्तित्व नहीं है।

44. (c) $x=0$ पर फलन सतत् और अवकलनीय है।

$f(0+0)=0$, $f(0-0)=b$, $f(0)=b$, $\therefore b=0$

$Rf'(0)=0, Lf'(0)=0, \forall a\in R$

$\therefore$ $f'(0)=0$ यदि $b=0$

45. (a) माना $h(x)=x, x\in(-\infty,\infty)$; $g(x)=1+|x|$, $x\in(-\infty,\infty)$

$(-\infty,\infty)$ में h अवकलनीय है। लेकिन $x=0$ पर $|x|$ अवकलनीय नहीं है।

$(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ और $g(x)\neq 0, \forall x\in$ $(-\infty,\infty)$, में g अवकलनीय है। $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{x}{1+|x|}$

$x=0$ के लिए $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ में अवकलनीय है।

$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{1+|h|}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{1+|h|} = 1$

$x=0$ पर f अवकलनीय है।

$\therefore$ फलन f $(-\infty,\infty)$ में अवकलनीय है।

46. (b) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2}.(1+x^2)}$

$\Rightarrow y' = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & |x|<1 \\ \frac{-2}{1+x^2} & |x|>1 \end{cases}$

अतः $|x|=1$, के लिए अवकलज का अस्तित्व नहीं है।

47. (c) $\because$ $x\ge 0$ के लिए फलन परिभाषित है, अर्थात् $x<0$ के लिए फलन परिभाषित नहीं है।

अतः फलन न तो सतत् है और न ही $x=0$ पर अवकलनीय है।

48. (c) फलन $f(x) = |x-0.5|+|x-1|+\tan x$,

बिन्दु $x=0.5, 1, \frac{\pi}{2}\in(0,2)$ पर अवकलनीय नहीं है।

Critical Thinking Questions

1. (a) $f(x) = \frac{\cos^2 x+\sin^4 x}{\sin^2 x+\cos^4 x} \Rightarrow f(x) = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x(1-\cos^2 x)}{\sin^2 x+\cos^2 x(1-\sin^2 x)}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x\cos^2 x}$

$\Rightarrow f(x)=1 \Rightarrow f(2002)=1$.

2. (d) $f(x+y)=f(x)+f(y)$

$x=1, y=0$ रखने पर $\Rightarrow f(1)=f(1)+f(0)=7$

$x=1, y=1$ रखने पर $\Rightarrow f(2)=2.f(1)=2.7$

इसी प्रकार $f(3)=3.7$,

$\therefore \sum_{r=1}^{n} f(r) = 7(1+2+3+.....+n) = \frac{7n(n+1)}{2}$

3. (c) सत्यापित करने पर, $f\left(\left|-\frac{1}{2}\right|\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

इस प्रकार $f(|x|) = x$

4. (d) यहाँ, $f(x) = \text{sgn}\, x^3 = \begin{cases} \begin{cases} \frac{x^3}{|x^3|}, & x^3 \neq 0 \\ 0, & x^3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \end{cases}$

इस प्रकार $f(x) = \text{sgn}\, x^3 = \text{sgn}\, x$, जो 0 पर न तो सतत् है, और न ही अवकलनीय।

$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1-0}{h} \to \infty$

तथा $f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0-h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-1-0}{h} \to \infty$

$\therefore f'(0^+) \neq f'(0^-)$, $\therefore x = 0$ पर f अवकलनीय नहीं है।

5. (d) $g(f(x)) \leq f(g(x)) \Rightarrow g(|x|) \leq f[x] \Rightarrow [|x|] = |[x]|$

यह $x \in R$ के लिए सत्य है।

6. (b) $\because [x]$, संख्या x के पूर्णांक भाग को प्रदर्शित करता है अतः श्रेणी में $\left[\frac{1}{2} + \frac{50}{100}\right]$ पद के बाद प्रत्येक पद का मान 1 होगा। अतः दी गई श्रेणी का योगफल = 50

7. (a) चूँकि f व gof का प्रान्त एक ही होता है।

8. (b) $x + 2 \geq 0$ अर्थात् $x \geq -2$ या $-2 \leq x$

$\because \log_{10}(1-x) \neq 0 \Rightarrow 1 - x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$

पुनः $1 - x > 0 \Rightarrow 1 > x \Rightarrow x < 1$

यह सभी एक साथ इस प्रकार लिख सकते हैं

$-2 \leq x < 0$ तथा $0 < x < 1$

9. (d) $2^y = 2 - 2^x$; y वास्तविक है यदि $2 - 2^x > 0 \Rightarrow 2 > 2^x$

$\Rightarrow 1 > x \Rightarrow x \in (-\infty, 1)$

10. (d) $f(x) = (1+b^2)x^2 + 2bx + \frac{b^2}{(1+b^2)} - \frac{b^2}{1+b^2} + 1$

$= (1+b^2)\left(x + \frac{b}{1+b^2}\right)^2 + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{1}{1+b^2}$

$\therefore m(b) = \frac{1}{1+b^2}$, अतः $m(b)$ का परिसर (रेंज) $= (0,1]$

11. (d) ${}^{7-x}P_{x-3}$ के परिभाषित होने के लिए, $7 - x > 0 \Rightarrow x < 7$

$x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$; $7 - x \geq x - 3 \Rightarrow x \leq 5$

$\therefore x \in \{3, 4, 5\} \Rightarrow f(3) = 1, f(4) = 3, f(5) = 2$

अतः फलन का परिसर $= \{1, 2, 3\}$

12. (d) $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 > 0$

$2\sin^2 x + 4\sin x - \sin x - 2 > 0$

$2\sin x(\sin x + 2) - 1(\sin x + 2) > 0$

$(\sin x + 2)(2\sin x - 1) > 0$

$2\sin x - 1 > 0 \Rightarrow \sin x > 1/2$

$x > \pi/6 \Rightarrow x \in (\pi/6, \infty)$ .....(i)

एवं $x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow x^2 - 2x + x - 2 < 0$

$x(x-2) + 1(x-2) < 0$

$(x+1)(x-2) < 0 \Rightarrow x \in (-1, 2)$ .....(ii)

(i) एवं (ii) को मिलाने पर, $x \in (\pi/6, 2)$

13. (d) माना $f(x) = (x+1)^2 - 1, x \geq -1$ चूँकि $f(x) = f^{-1}(x)$

$\therefore (x+1)^2 - 1 = \sqrt{1+x} - 1 \quad \left(\because f^{-1}(x) = \sqrt{1+x} - 1\right)$

$\Rightarrow (x+1)^4 = 1 + x \Rightarrow (x+1)[(x+1)^3 - 1] = 0$

$\Rightarrow x = -1$ या $(x+1)^3 = 1 \Rightarrow x + 1 = 1, \omega, \omega^2$

$\Rightarrow x = 0, -1, \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$.

14. (a) चूँकि $f(x)$ एक सम फलन है, अतः $f(x) = f(-x)$

अतः समीकरण $f(x) = f\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$ के .....(i)

अलावा $f(-x) = f\left(\frac{-x+1}{-x+2}\right)$ भी सन्तुष्ट होगा। .....(ii)

अतएव $x = \frac{-x+1}{-x+2}$ .....(iii)

तथा $-x = \frac{x+1}{x+2}$ .....(iv)

को हल करने पर प्राप्त होने वाले x के मान (i) एवं (ii) को सन्तुष्ट करेंगे।

(iii) व (iv) से, $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ एवं $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

(चूँकि x के ये चारों मान अन्तराल (–5, 5) में स्थित है, अतः यही अभीष्ट मान हैं।)

15. (d) $f'(x) = 2\sin x \cos x + 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$- \sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$= \sin 2x + \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(x + x + \frac{\pi}{3}\right)$

$= 2\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$\Rightarrow f(x) = k$ एक नियतांक है।

परन्तु $f(0) = \sin^2 0 + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos 0 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{4}$

$\therefore\ f(x) = \frac{5}{4}, \forall x \in R.$

$\therefore\ (gof)(x) = g[f(x)] = g\left(\frac{5}{4}\right) = 1.$

16. (a) $g\{f(x)\} = |\sin x|,\ f\{g(x)\} = (\sin\sqrt{x})^2$

माना $f(x) = \sin^2 x,\ g(x) = \sqrt{x}$, तब

$g[f(x)] = g(\sin^2 x) = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$

$f[g(x)] = f[\sqrt{x}] = (\sin\sqrt{x})^2$

17. (a) $f(x) = 3x + 10$ तथा $g(x) = x^2 - 1$

$\Rightarrow f\,o\,g = f(g(x)) = 3(g(x)) + 10$

$= 3(x^2 - 1) + 10 = 3x^2 + 7$ .....(i)

माना $3x^2 + 7 = y \Rightarrow 3x^2 = y - 7$

$\Rightarrow x^2 = \frac{y-7}{3} \Rightarrow x = \left(\frac{y-7}{3}\right)^{1/2}$

हम जानते हैं कि $f(x) = y$, तब $x = f^{-1}(y)$

अतः $(fog)^{-1} = \left(\frac{x-7}{3}\right)^{1/2}$

18. (c) $g[f(x)] = 8$ या $g(2x+3) = 8$

$\Rightarrow (2x+3)^2 + 7 = 8 \Rightarrow 2x + 3 = \pm 1 \Rightarrow x = -1, -2$.

19. (c) $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. माना $1 - x = y$ जब $x \to 1, y \to 0$

इस प्रकार $\lim_{y\to 0} y\tan\frac{\pi(1-y)}{2} = \lim_{y\to 0}\frac{2}{\pi}.\frac{\left(\frac{\pi y}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi y}{2}\right)}$

$= \frac{2}{\pi}\times 1 = \frac{2}{\pi}$

20. (b) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{(2+3x)-(2-3x)}\left[\frac{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-3x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right]$

$= \frac{1}{3}\left[\frac{2\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{3},\ 0 < \frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{2}.$

वैकल्पिक : L- हॉस्पीटल नियम से,

अर्थात् $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-3x}}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\frac{3}{2\sqrt{2+3x}}+\frac{3}{2\sqrt{2-3x}}}$

$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{3}{2\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

21. (b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} n\frac{x^{n-1}}{e^x} = ...$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x} = \frac{n!}{\infty} = 0$, जहाँ $n = 0, 1, 2, 3......$

($\because n!$ सभी धनात्मक पूर्णांकों तथा शून्य के लिये ही परिभाषित है)

22. (b) दी गयी सीमा $= \lim_{n\to\infty}\sin\left\{n\pi\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\sin\left\{n\pi\left(1+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{8n^4}+...\right)\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\sin\left\{n\pi+\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8n^3}+....\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\pi\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^3}+....\right) = 0.$

23. (c) $\lim_{x\to 1-}(1 - x + [x-1] + [1-x])$

$= \lim_{h\to 0}(1-(1-h)+[1-h-1]+[1-(1-h)])$

$= \lim_{h\to 0}(h+[-h]+[h]) = \lim_{h\to 0}(h-1+0) = -1$

तथा $\lim_{x\to 1+}(1 - x + [x-1] + [1-x])$

$= \lim_{h\to 0}(1-(1+h)+[1+h-1]+[1-(1+h)])$

$= \lim_{h\to 0}(-h+[h]+[-h]) = \lim_{h\to 0}(-h+0-1) = -1$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = -1$.

24. (c) $\lim_{x\to 0}\frac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3} = 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x\left\{1+a\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...\right)\right\}-b\left\{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...\right\}}{x^3} = 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(1+a-b)+x^2\left(\frac{b}{3!}-\frac{a}{2!}\right)+x^4\left(\frac{a}{4!}-\frac{b}{5!}\right)+...}{x^2} = 1$ .....(i)

यदि $1 + a - b \neq 0$, तो L.H.S. $\to \infty$ चूँकि $x \to 0$ जबकि R.H.S.=1, अतः $1 + a - b = 0$.

अब (i) से $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\frac{b}{3!}-\frac{a}{2!}\right)+x^4\left(\frac{a}{4!}-\frac{b}{5!}\right)+...}{x^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{b}{3!}-\frac{a}{2!} = 1 \Rightarrow b - 3a = 6$

$1 + a - b = 0$ तथा $b - 3a = 6$ को हल करने पर $a = -5/2, b = -3/2$.

25. (a) L- हॉस्पीटल नियम से,

$-1 = \lim_{x\to a}\frac{a^x - x^a}{x^x - a^a} = \lim_{x\to a}\frac{a^x\log_e a - ax^{a-1}}{x^x + x^x\log_e x}$

$\Rightarrow -1 = \frac{a^a\log_e a - a.a^{a-1}}{a^a + a^a\log_e a} = \frac{\log_e a - 1}{\log_e a + 1}$ .....(i)

$a = 1$ के लिए ही (i) सन्तुष्ट है।

26. (b) $x_1 = 3,\ x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$

$x_2 = \sqrt{2 + x_1} = \sqrt{2+3} = \sqrt{5}\ ,\ \ x_3 = \sqrt{2 + x_2} = \sqrt{2+\sqrt{5}}$

$\therefore\ x_1 > x_2 > x_3$

गणितीय आगमन से यह सिद्ध किया जा सकता है कि अनुक्रम $x_1, x_2, ... x_n$ एकदिष्ट ह्रासमान एवं 2 से नीचे परिबद्ध है। अतः यह अभिसारी है। माना $\lim x_n = x$ तो

$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \Rightarrow \lim x_{n+1} = \sqrt{2 + \lim x_n} \Rightarrow x = \sqrt{2+x}$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2$

$(\because\ x_n > 0\ \forall n;\ \therefore\ x > 0)$

27. (c) $y = \lim_{x\to\pi/2} \dfrac{\int_{\pi/2}^{x} t\,.dt}{\sin(2x-\pi)} \Rightarrow y = \lim_{x\to\pi/2} \dfrac{\left[\dfrac{t^2}{2}\right]_{\pi/2}^{x}}{\sin(2x-\pi)}$

$y = \lim_{x\to\pi/2} \dfrac{\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\pi^2}{8}\right)}{\sin(2x-\pi)} \Rightarrow y = \lim_{x\to\pi/2} \dfrac{1}{8}\dfrac{(4x^2-\pi^2)}{\sin(2x-\pi)}$

$y = \lim_{x\to\pi/2} \dfrac{1}{8}\dfrac{(2x-\pi)\,(2x+\pi)}{\sin(2x-\pi)}$

$y = \dfrac{1}{8}\ \dfrac{\lim_{x\to\pi/2}(2x+\pi)}{\lim_{x\to\pi/2}\dfrac{\sin(2x-\pi)}{(2x-\pi)}}, \qquad \left(\because\ \lim_{\theta\to 0}\dfrac{\theta}{\sin\theta} = 1\right)$

$y = \dfrac{1}{8}\times 2\pi = \dfrac{\pi}{4}.$

28. (c) $y = \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\cot x}$

दोनों पक्षों का log लेने पर,

$\Rightarrow \log y = \lim_{x\to 0} \cot x \log\cos x$

$\Rightarrow \log y = \lim_{x\to 0}\dfrac{\log\cos x}{\tan x}, \quad \left(\dfrac{0}{0}\ \text{रूप}\right)$

L- हॉस्पीटल नियम के प्रयोग से,

$\Rightarrow \log y = \lim_{x\to 0}\dfrac{-\tan x}{\sec^2 x} = 0$

$\Rightarrow y = e^0 \Rightarrow y = 1\,.$

29. (c) n ऋणात्मक नहीं हो सकता क्योंकि तब सीमा = 0

सीमा $= \lim_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{2^2(x/2)^2}\dfrac{e^x - \cos x}{x^{n-2}} = \dfrac{1}{2}\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{x^{n-2}}$

($n \ne 1$ तब सीमा = 0)

$= \dfrac{1}{2}\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x + \sin x}{(n-2)x^{n-3}}.$

अतः यदि $n = 3,$ तब सीमा $\dfrac{1}{2(n-2)}$ हैं जो परिमित है।

यदि $n = 4,$ तो सीमा अनन्त है।

30. (c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x^2) - f(x)}{f(x) - f(0)}, \qquad \left(\dfrac{0}{0}\ \text{रूप}\right)$

$= \lim_{x\to 0}\dfrac{2xf'(x^2) - f'(x)}{f'(x)}, \quad$ (L- हॉस्पीटल नियम से)

$= -1 + \lim_{x\to 0}\dfrac{2xf'(x^2)}{f'(x)} = -1, f'(0) \ne 0,$

क्योंकि f पूर्णतः वर्धमान है।

31. (c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & 2 < x < 3 \\ 2x + 5, & 3 < x < 4 \end{cases}$

$\therefore \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(x^2 - 3) = 6$

तथा $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(2x+5) = 11$

अतः समीकरण

$x^2 -$ (मूलों का योगफल) $x +$ (मूलों का गुणनफल) = 0

अर्थात् $x^2 - 17x + 66 = 0$ होगा।

32. (c) $f(x) = [x]\cos\left[\dfrac{2x-1}{2}\right]\pi$

चूँकि $g(x) = [x]$ सभी पूर्णांक संख्याओं पर हमेशा असतत् होता है। अतः $f(x)$ सभी पूर्णांक बिन्दुओं के लिए असतत् होगा।

33. (a) माना $f(x) = \ln\,(x),\ x > 0$

अतः $f(x) = \ln(x)$, x के प्रत्येक धनात्मक मान के लिए x का एक सतत् फलन है।

$f\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln\,(x) - \ln\,(y) = f(x) - f(y)$

34. (d) $f(x), x = 0$ पर सतत् है। इसलिए

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 12\,(\log 4)^3$

अब $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{4^x - 1}{x}\right)^3 \times \dfrac{\left(\dfrac{x}{p}\right)}{\left(\sin\dfrac{x}{p}\right)}.\dfrac{px^2}{\log\left(1 + \dfrac{1}{3}x^2\right)}$

$= (\log 4)^3 .1.p.\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{1}{18}x^4 + ...}\right)$

$= 3p\ (\log 4)^3$. अतः $p = 4$

35. (d) दिया है $f(x) = [x]^2 - [x^2]$

$-1 < x < 0,\ f(x) = (-1)^2 - 0 = 1$

$x = 0,\ f(x) = 0^2 - 0 = 0$

$0 < x < 1,\ f(x) = 0^2 - 0 = 0$

$x = 1,\ f(x) = 1^2 - 1 = 0$

$1 < x < \sqrt{2},\ f(x) = 1^2 - 1 = 0$

$x = \sqrt{2},\ f(x) = 1^2 - 2 = -1$

$\sqrt{2} < x < \sqrt{3},\ f(x) = 1^2 - 2 = -1$

$x=\sqrt{3},\ f(x)=1^2-3=-2$

$\sqrt{3}<x<2,\ f(x)=1^2-3=-2$

$x=2,\ f(x)=4-4=0$; $2<x<\sqrt{5},\ f(x)=4-4=0$

$x=\sqrt{5},\ f(x)=4-5=-1$

अतः फलन $x=1$ को छोड़कर सभी पूर्णांकों के लिये असतत् होगा।

36. (b) $f(0)=0$ तथा $f(x)=xe^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)}$

R.H.L. $=\lim_{h\to 0}(0+h)e^{-2/h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^{2/h}}=0$

L.H.L. $=\lim_{h\to 0}(0-h)e^{-\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{h}\right)}=0$; $\therefore f(x)$ सतत् है।

$$Rf'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(0+h)e^{-\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{h}\right)}-he^{-\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{h}\right)}}{h}=0$$

$$Lf'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(0-h)e^{-\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{h}\right)}-he^{-\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{h}\right)}}{-h}=1$$

$\Rightarrow Lf'(x)\neq Rf'(x)$. $f(x)$, $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है।

37. (c) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{4x-\pi}$, $\left[\frac{0}{0}\text{ रूप}\right]$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sec^2 x}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ पर फलन $f(x)$ सतत् है अतः $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$.

38. (a,b) $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

$$L\,f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-f(0)}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(0-h)\sin(-\frac{1}{h})-(0)}{-h}=\lim_{h\to 0}-\sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

= ऐसी संख्या जो कि –1 तथा 1 के मध्य है।

$$R\,f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(0+h)\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}$$

= ऐसी संख्या जो कि –1 तथा 1 के मध्य है।

अतः $L\,f'(0)\neq R\,f'(0)$

$\therefore f(x), x=0$ पर अवकलनीय नहीं है।

अब $L\,g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-f(0)}{0-h}$

$$L\,g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{(0-h)^2\sin(-\frac{1}{h})-0}{-h}=\lim_{h\to 0}h\sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$L\,g'(0)=0\times\left(-1\le\sin\frac{1}{h}\le 1\right)\Rightarrow L\,g'(0)=0$$

तथा $Rg'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(0+h)^2\sin\left(\frac{1}{h}\right)-0}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}h\sin\left(\frac{1}{h}\right)=0\times\left(-1\le\sin\left(\frac{1}{h}\right)\le 1\right)=0$$

$\because L\,g'(0)=R\,g'(0)$ तब $g(x)$, $x=0$ पर अवकलनीय है।

अब $g(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$

$$g'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\times-\frac{1}{x^2}$$

$$g'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\Rightarrow g'(x)=2\,f(x)-\cos\frac{1}{x}$$

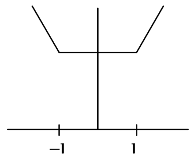
$g'(x)$, $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है।

39. (a, c) $f(x)=\max\{(1-x),(1+x),2\}$, $\forall\ x\in(-\infty,\infty)$.

$$f(x)=\begin{cases}1+x; & x>1\\ 2; & -1\le x\le 1\\ 1-x; & x<-1\end{cases}$$

चूँकि $f(x)=1-x$ या $1+x$ बहुपद फलन है व $f(x)=2$ एक अचर फलन है।

अतः ये सभी बिन्दुओं पर सतत् होंगे। .....(i)



$\therefore f(x)$, $x=1$ व $x=-1$ के अतिरिक्त सभी बिन्दुओं पर अवकलनीय है। .....(ii)

40. (a) $f(x)=|x|+|x-1|$

$$=\begin{cases}-2x+1, & x<0\\ x-x+1, & 0\le x<1\\ x+x-1, & x\ge 1\end{cases}=\begin{cases}-2x+1, & x<0\\ 1 & 0\le x<1\\ 2x-1, & x\ge 1\end{cases}$$

स्पष्टतः $\lim_{x\to 0^-}f(x)=1,\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=1,\ \lim_{x\to 1^-}f(x)=1$

तथा $\lim_{x\to 1^+}f(x)=1$. अतः $f(x)$, $x=0, 1$ पर सतत् है

अब $f'(x)=\begin{cases}-2, & x<0\\ 0, & 0\le x<1\\ 2, & x\ge 1\end{cases}$

यहाँ $x=0$, $f'(0^+)=0$ जबकि $f'(0^-)=-2$

तथा $x=1$, $f'(1^+)=2$ जबकि $f'(1^-)=0$

फलन, सीमा, संतत्य तथा अवकलनीयता

SET Self Evaluation Test - 21

1. फलन $f(x)=(x+1)^2$, $x \ge -1$ यदि $g(x)$ एक ऐसा फलन है, जिसका ग्राफ, सरल रेखा $y=x$ के सापेक्ष, $f(x)$ के ग्राफ का परावर्तन है, तब $g(x)=$ [IIT Screening 2002]

(a) $-\sqrt{x}-1,\ x\ge 0$ (b) $\frac{1}{(x+1)^2},\ x>-1$

(c) $\sqrt{x+1},\ x\ge -1$ (d) $\sqrt{x}-1,\ x\ge 0$

2. फलन $f(x)=|px-q|+r|x|$, $x\in(-\infty,\infty)$, जहाँ $p>0, q>0, r>0$ का केवल एक बिन्दु पर निम्निष्ठ मान होगा यदि [IIT 1995]

(a) $p\ne q$ (b) $q\ne r$

(c) $r\ne p$ (d) $p=q=r$

3. यदि $E=\{1,2,3,4\}$ तथा $F=\{1,2\}$, तब समुच्चय E से F में बनने वाले आच्छादक फलनों की संख्या है [IIT Screening 2001]

(a) 14 (b) 16

(c) 12 (d) 8

4. यदि a, b दो नियत धनात्मक पूर्णांक इस प्रकार हों कि $f(a+x)=b+[b^3+1-3b^2f(x)+3b\{f(x)\}^2-\{f(x)\}^3]^{\frac{1}{3}}$ सभी वास्तविक x के लिए तब $f(x)$ आवर्ती फलन है जिसका आवर्तनांक है [Orissa JEE 2003]

(a) a (b) $2a$

(c) b (d) $2b$

5. फलन $f(x)={}^{16-x}C_{2x-1}+{}^{20-3x}P_{4x-5}$ का डोमेन (प्रान्त) जहाँ प्रतीकों के सामान्य अर्थ हैं, है [AMU 2002]

(a) {2, 3} (b) {2, 3, 4}

(c) {1, 2, 3, 4} (d) {1, 2, 3, 4, 5}

6. माना $f(x)=[x]\sin\left(\frac{\pi}{[x+1]}\right)$, जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को निरूपित करता है। f का प्रान्त और f के प्रान्त में असतत् बिन्दु क्रमशः होंगे [IIT 1996]

(a) $\{x\in R \mid x\in[-1,0)\},\ I-\{0\}$

(b) $\{x\in R \mid x\notin[1,0)\},\ I-\{0\}$

(c) $\{x\in R \mid x\notin[-1,0)\},\ I-\{0\}$

(d) इनमें से कोई नहीं

7. माना $f(x)=x^2+x+\sin x-\cos x+\log(1+|x|)$ अन्तराल [0, 1] में परिभाषित है। $f(x)$ के अन्तराल [–1, 1] में विषम प्रसार (odd extensions) है [MNR 1994]

(a) $x^2+x+\sin x+\cos x-\log(1+|x|)$

(b) $-x^2+x+\sin x+\cos x-\log(1+|x|)$

(c) $-x^2+x+\sin x-\cos x+\log(1+|x|)$

(d) इनमें से कोई नहीं

8. यदि $f:[1,+\infty)\to[2,+\infty)$, $f(x)=x+\frac{1}{x}$, तब $f^{-1}=$ [IIT Screening 2001]

(a) $\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$ (b) $\frac{x}{1+x^2}$

(c) $\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}$ (d) $1+\sqrt{x^2-4}$

9. माना $f(x)=\sin x$ और $g(x)=\ln|x|$, यदि संयुक्त फलन fog और gof के परास क्रमशः R_1 तथा R_2 हों, तो [IIT Screening 1994]

(a) $R_1=\{u:-1<u<1\},\ R_2=\{v:-\infty<v<0\}$

(b) $R_1=\{u:-\infty<u\le 0\},\ R_2=\{v:-1\le v\le 1\}$

(c) $R_1=\{u:-1<u<1\},\ R_2=\{v:-\infty<v<0\}$

(d) $R_1=\{u:-1\le u\le 1\},\ R_2=\{v:-\infty<v\le 0\}$

10. यदि $G(x)=-\sqrt{25-x^2}$, तो $\lim_{x\to1}\frac{G(x)-G(1)}{x-1}=$ [BIT Ranchi 1990]

(a) $\frac{1}{24}$ (b) $\frac{1}{5}$

(c) $-\sqrt{24}$ (d) इनमें से कोई नहीं

11. $\lim_{n\to\infty} n\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)=k$, तब k का मान है [RPET 1997]

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$

(c) π (d) इनमें से कोई नहीं

12. माना α व β समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल हैं, तो $\lim_{x\to\alpha}\frac{1-\cos(ax^2+bx+c)}{(x-\alpha)^2}=$ [AIEEE 2005]

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2$

(c) $\frac{a^2}{2}(\alpha-\beta)^2$ (d) $-\frac{a^2}{2}(\alpha-\beta)^2$

13. $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{1-\cos 2(x-1)}}{x-1}$ [IIT 1998; UPSEAT 2001; Pb. CET 2003]

(a) का अस्तित्व है और यह $\sqrt{2}$ के बराबर है

(b) का अस्तित्व है और यह $-\sqrt{2}$ के बराबर है

(c) अस्तित्वहीन है क्योंकि $x-1\to 0$

(d) अस्तित्वहीन है क्योंकि बायें पक्ष की सीमा, दायें पक्ष की सीमा के बराबर नहीं है

14. यदि $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+1}{x^2+1}-(ax+b)\right]=2$, तब [Karnataka CET 2000]

(a) $a=1$ एवं $b=1$ (b) $a=1$ एवं $b=-1$

(c) $a=1$ एवं $b=-2$ (d) $a=1$ एवं $b=2$

15. यदि $f(1)=1$ तथा $f'(1)=4$, तब $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{\sqrt{x}-1}=$ [DCE 2001]

(a) 9 (b) 4
(c) 12 (d) 1

16. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+3}{x^2+x+3}\right)^x =$ [AIEEE 2002]

(a) e^4 (b) e^2
(c) e^3 (d) e

17. माना फलन $f:R\to R$ इस प्रकार है कि $f(1)=3$ तथा $f'(1)=6$ तब $\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(1+x)}{f(1)}\right\}^{\frac{1}{x}} =$ [IIT Screening 2002]

(a) 1 (b) $e^{1/2}$
(c) e^2 (d) e^3

18. यदि $f(a)=2$, $f'(a)=1$, $g(a)=-3$, $g'(a)=-1$, तब $\lim_{x\to a}\frac{f(a)g(x)-f(x)g(a)}{x-a} =$

[MP PET 1997; Karnataka CET 2003]

(a) 1 (b) 6
(c) – 5 (d) – 1

19. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left[1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right][1-\sin x]}{\left[1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right][\pi-2x]^3} =$ [AIEEE 2003]

(a) $\frac{1}{8}$ (b) 0
(c) $\frac{1}{32}$ (d) ∞

20. माना $f(1)=g(1)=k$ तथा इनके n वें अवकलज $f^n(1), g^n(1)$ अस्तित्व रखते हैं तथा किसी n के लिए समान नहीं है और यदि $\lim_{x\to a}\frac{f(a)g(x)-f(a)-g(a)f(x)+g(a)}{g(x)-f(x)}=4$, तब k का मान है

[AIEEE 2003]

(a) 4 (b) 2
(c) 1 (d) 0

21. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\int_0^{x^2}\sec^2 t\,dt}{x\sin x}\right)$ का मान है [AIEEE 2003]

(a) 3 (b) 2
(c) 1 (d) 0

22. फलन $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3-1}$, $x=1$ पर परिभाषित नहीं है तब $f(1)$ का मान क्या होगा जब फलन $x=1$ पर सतत् है

(a) $-\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$
(c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{2}{3}$

23. माना $f(x)=\begin{cases}(1+|\sin x|)^{a/|\sin x|}, & -\pi/6<x<0\\ b, & x=0\\ e^{\tan 2x/\tan 3x}, & 0<x<-\pi/6\end{cases}$ यदि $f(x)$, $x=0$ पर सतत् हो, तो a, b के मान क्रमशः $x=0$ पर हैं [IIT 1994]

(a) $\frac{2}{3},\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}, e^{2/3}$
(c) $\frac{3}{2}, e^{3/2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

24. यदि फलन $f(x)=\begin{cases}x+a^2\sqrt{2}\sin x, & 0\le x<\pi/4\\ x\cot x+b, & \pi/4\le x<\pi/2\\ b\sin 2x-a\cos 2x, & \pi/2\le x\le\pi\end{cases}$

अन्तराल $[0,\pi]$ में सतत् हो, तो (a,b) का मान होगा

[Roorkee Qualifying 1998]

(a) (–1, –1) (b) (0,0)
(c) (–1, 1) (d) (1,1)

25. माना $f:R\to R$ एक फलन है तथा $g:R\to R$, $g(x)=|f(x)|$ $\forall x$ के लिए परिभाषित है, तब g है [IIT Screening 2000]

(a) आच्छादक, यदि f आच्छादक है
(b) एकैकी, यदि f एकैकी है
(c) सतत्, यदि f सतत् है
(d) अवकलनीय, यदि f अवकलनीय है

26. फलन $f(x)=p[x+1]+q[x-1]$, $x=1$ पर सतत् है, जहाँ $[x]$ एक महत्तम पूर्णांक फलन है, यदि

[UPSEAT 2001; Orissa JEE 2002]

(a) $p-q=0$ (b) $p+q=0$
(c) $p=0$ (d) $q=0$

27. माना $g(x)=\int_0^x f(t)dt$, जहाँ f इस प्रकार है कि $t\in[0,1], 0\le f(t)\le\frac{1}{2}g(2)$ के लिए निम्न असमिका संतुष्ट करता है [MP PET 2004]

(a) $\frac{1}{2}\le g(2)<\frac{3}{2}$ (b) $0\le g(2)<2$
(c) $\frac{3}{2}<g(2)\le\frac{5}{2}$ (d) $2<g(2)<4$

28. यदि $f:R\to R$ एक अवकलनीय फलन है तथा $f(1)=4$, तो $\lim_{x\to 1}\int_4^{f(x)}\frac{2t}{x-1}dt =$

(a) $8f'(1)$ (b) $4f'(1)$
(c) $2f'(1)$ (d) $f'(1)$

29. यदि $f:R\to R$ एक फलन जो $f(x)=\max(x,x^3)$ द्वारा परिभाषित है, तब उन बिन्दुओं का समुच्चय जहाँ $f(x)$, अवकलनीय नहीं है [IIT Screening 2001]

(a) $\{-1,1\}$ (b) $\{-1, 0\}$
(c) $\{0, 1\}$ (d) $\{-1, 0, 1\}$

30. निम्न में से कौनसा फलन $x=0$ पर अवकलनीय है

[IIT Screening 2001]

(a) $\cos(|x|)+|x|$ (b) $\cos(|x|)-|x|$
(c) $\sin(|x|)+|x|$ (d) $\sin(|x|)-|x|$

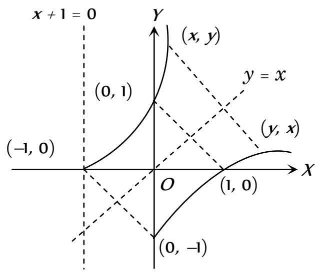
Answers and Solutions

(SET - 21)

1. (d) $f(x)$ के ग्राफ का समीकरण $y=(x+1)^2,\ x\ge -1$ है।

$f(x)$ के ग्राफ का परावर्तन, x, y को आपस में बदलने पर मिलता है। अतः $g(x)$ के ग्राफ का समीकरण

$x=(y+1)^2,\ y\ge -1$



$\therefore y=\sqrt{x}-1$

क्योंकि $y\ge -1$

$\therefore\ \phi(x)=\sqrt{x}-1,\ \ x\ge 0$

2. (d) फलन $f(x)=|px-q|+r|x|,\ \ x\in(-\infty,\infty)$

जहाँ $p>0, q>0, r>0$ का केवल एक बिन्दु पर निम्निष्ठ मान होगा। यदि $p=q=r$

3. (a) E के प्रत्येक अवयव का F में प्रतिबिम्ब होने के कुल 2 तरीके हैं। $\therefore$ E के अवयवों का F में प्रतिबिम्ब होने के तरीके $=2\times2\times2\times2$

लेकिन E के सभी अवयवों में से दो का एक ही प्रतिबिम्ब 1 है या एक ही प्रतिबिम्ब 2 है (प्रतिबिम्ब इस अवस्था में अन्तर्क्षेपी है)

अतः आच्छादक फलनों की संख्या $=2^4-2=14$

4. (b) $f(a+x)=b+(1+\{b-f(x)\}^3)^{1/3}$

$\Rightarrow f(a+x)-b=\{1-\{f(x)-b\}^3\}^{1/3}$

$\Rightarrow \phi(a+x)=\{1-\{\phi(x)\}^3\}^{1/3},\ [\phi(x)=f(x)-b\ ]$

$\Rightarrow \phi(x+2a)=\{1-\{\phi(x+a)\}^3\}^{1/3}=\phi(x)$

$\Rightarrow\ f(x+2a)-b=f(x)-b\Rightarrow f(x+2a)=f(x)$

अतः $f(x)$ आवर्ती फलन है, जिसका आवर्तनांक $2a$ है।

5. (a) $f(x)$ के परिभाषित होने के लिये

(i) $16-x>0\Rightarrow x<16$ (ii) $2x-1\ge 0\Rightarrow x\ge\dfrac{1}{2}$

(iii) $20-3x>0\Rightarrow x<\dfrac{20}{3}$ (iv) $4x-5\ge0\Rightarrow x\ge\dfrac{5}{4}$

(v) $16-x\ge 2x-1\Rightarrow x\le\dfrac{17}{3}$

(vi) $20-3x\ge 4x-5\Rightarrow x\le\dfrac{25}{7}$

(vii) $16-x$ एक पूर्णांक है, $\therefore$ x भी एक पूर्णांक होना चाहिए

$\therefore\ \dfrac{5}{4}\le x\le\dfrac{25}{7}$ तथा $x\in I\ \Rightarrow\ x=2,3$

$\therefore$ फलन का डोमेन (प्रान्त) $f=\{2, 3\}$

6. (c) $\because\ [x+1]=0,$ यदि $0\le x+1<1$

अर्थात $[x+1]=0$, यदि $-1\le x<0$

अतः फलन f का डोमेन $R-[-1,0)=\{x\in R|\ x\in[-1,0)\}$.

फलन $f(x)=[x]\ \ \sin\left(\dfrac{\pi}{[x+1]}\right)$ परिभाषित होगा

यदि $[x+1]\ne 0$ हो,

अर्थात् $x+1<0$ या $x+1\ge 1$ होना चाहिये

अर्थात् $x<-1$ या $x\ge 0$ होना चाहिये

अतः फलन $f(x)$ का प्रान्त $(-\infty,\ 1)\cup[0,\infty)$ होगा।

महत्तम पूर्णांक फलन x के प्रत्येक पूर्णांक मान के लिये असंतत है। परन्तु $n=0$ पर,

$f(0)=0$ एवं $f(0+)=\lim\limits_{h\to0}[h]\sin\dfrac{\pi}{[h+1]}=0$

फलन $[-1,0)$ पर परिभाषित नहीं है, अतः वाम पक्ष सीमा जानने योग्य नहीं है।

$\therefore$ $f(x), x=0$ पर संतत है। अतः फलन के प्रान्त में असांतत्य बिन्दु $I-\{0\}$ होंगे।

7. (b) $[0, 1]$ से $[-1, 1]$ के विषम प्रसार का अर्थ है कि हमें (a), (b), (c), (d) में वह फलन ज्ञात करना है जो प्रतिबन्ध $f(-x)=-f(x)$ को सन्तुष्ट करता है।

अब $|-x|=|x|$

$f(-x)=x^2-x-\sin x-\cos x+\log(1+|x|)$

$=-$ [(b) में दिया गया फलन है]

$\therefore$ (b) सही है। इसके अतिरिक्त कोई भी विकल्प इस प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट नहीं करता है।

8. (a) यहाँ $y=x+\dfrac{1}{x}$ जबकि $x\ge1$ तथा $y\ge 2$

अब $x^2-yx+1=0$ या $x=\dfrac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\dfrac{x\pm\sqrt{x^2-4}}{2}\ge 1$ जब $x\ge 2$

लेकिन $x\ge 2$ के लिए $\dfrac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\ge 1$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$.

9. (d) $fog=f(g(x))=\sin\ \ln|x|$

तथा $gof=g(f(x))=\ln|\sin x|$

$\therefore R_1=[-1, 1]$ व $R_2=(-\infty,\ 0],\ (\because|\sin x|\in[0, 1])$.

10. (d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{G(x)-G(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\sqrt{25-x^2}+\sqrt{24}}{x-1}$

{अंश व हर को $(\sqrt{24}+\sqrt{25-x^2})$ से गुणा करने पर}

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{\sqrt{24}+\sqrt{25-x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{24}}$

11. (a) $\lim_{n\to\infty} n \cos\frac{\pi}{4n}\sin\frac{\pi}{4n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} n \,.\, 2\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{\pi}{4n}$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} n \,.\, \sin\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\left\{\because\ n\to\infty \Rightarrow \frac{\pi}{2n}\to 0\right\}.$$

12. (c) $\lim_{x\to\alpha}\frac{1-\cos(ax^2+bx+c)}{(x-\alpha)^2} = 2\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin^2\left(\frac{ax^2+bx+c}{2}\right)}{(x-\alpha)^2}$

$$= 2\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin^2\left\{\frac{a(x-\alpha)(x-\beta}{2}\right\}}{(x-\alpha)^2}$$

$$\left(\begin{array}{l}\because\ \alpha,\ \beta, ax^2+bx+c=0 \text{ के मूल हैं} \\ \therefore\ ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)\end{array}\right)$$

$$= 2\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{\sin\left\{\frac{a(x-\alpha)(x-\beta)}{2}\right\}}{\frac{a(x-\alpha)(x-\beta)}{2}}\right]^2 . \frac{a^2}{4}(x-\beta)^2$$

$$= 2(1)^2\frac{a^2}{4}(\alpha-\beta)^2 = \frac{a^2}{2}(\alpha-\beta)^2.$$

13. (d) $f(1+) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos\ 2h}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\sqrt{2}\,\frac{\sin h}{h} = \sqrt{2}$$

$$f(1-) = \lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos(-2h)}}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\sqrt{2}\,\frac{\sin h}{-h} = -\sqrt{2}.$$

$\therefore$ सीमा का अस्तित्व नहीं है क्योंकि बायीं सीमा $\neq$ दायीं सीमा।

14. (c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}-(ax+b)\right) = 2$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3(1-a)-bx^2-ax+(1-b)}{x^2+1}\right) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}[x^3(1-a)-bx^2-ax+(1-b)] = 2(x^2+1)$$

दोनों पक्षों के गुणांकों की तुलना करने पर, $1-a=0$ तथा $-b=2$ या $a=1, b=-2$

15. (b) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}\,f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \frac{f'(1)}{\sqrt{f(1)}} = 4\,.$

16. (a) $\frac{x^2+5x+3}{x^2+x+3} = 1+\frac{4x}{x^2+x+3} = 1+y$ (माना)

जहाँ $y = \frac{4x}{x^2+x+3} = \frac{\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} = 0$ जब $x\to\infty$

पुनः $xy = \frac{4x^2}{x^2+x+3} = \frac{4}{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} = 4$ जब $x\to\infty$

$\therefore$ सीमा $= \lim_{y\to 0}(1+y)^x = \lim_{y\to 0}[(1+y)^{1/y}]^{xy} = e^{xy} = e^4\,.$

17. (c) सीमा $= e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}[\log f(1+x)-\log f(1)]} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{f'(1+x)/f(1+x)}{1}}$

$$= e^{\frac{f'(1)}{f(1)}} = e^{6/3} = e^2\,.$$

18. (a) $\lim_{x\to a}\frac{f(a)g(x)-f(x)g(a)}{x-a}$, $\left(\frac{0}{0}\text{ रूप}\right)$

L- हॉस्पीटल नियम से, $\lim_{x\to a}\frac{f(a)g'(x)-f'(x)g(a)}{1-0}$

$$= f(a)\times g'(a) - f'(a)\times g(a) = 2\times(-1)-1\times(-3) = 1\,.$$

19. (c) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)(1-\sin x)}{(\pi-2x)^3}$

माना $x = \frac{\pi}{2}+y : y\to 0 \Rightarrow \lim_{y\to 0}\frac{\tan\left(\frac{-y}{2}\right)(1-\cos y)}{(-2y)^3}$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{-\tan\frac{y}{2}.2\sin^2\frac{y}{2}}{(-8)y^3} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{32}\frac{\tan\frac{y}{2}}{\left(\frac{y}{2}\right)}.\left[\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\right]^2 = \frac{1}{32}\,.$$

20. (a) $\lim_{x\to a}\frac{kg(x)-kf(x)}{g(k)-f(x)} = 4$

L- हॉस्पीटल नियम से, $\lim_{x\to a} k\left[\frac{g'(x)-f'(x)}{g'(x)-f'(x)}\right] = 4\ ;\ \therefore k = 4\,.$

21. (c) $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sec^2 t\,dt}{\frac{d}{dx}(x\sin x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x^2.2x}{\sin x + x\cos x}$

L- हॉस्पीटल नियम से, $\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x^2}{\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\right)} = \frac{2\times 1}{1+1} = 1\,.$

22. (b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \Rightarrow f(1) = \frac{2}{3}\,.$

23. (b) $f(x) = (1+|\sin x|)^{a/|\sin x|}; -(\pi/6) < x < 0$

$= b;\qquad x = 0$

$= e^{\tan 2x/\tan 3x};\qquad 0 < x < (\pi/6)$

$x = 0$ पर $f(x)$ के सतत् होने के लिए

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 0-}(1+|\sin x|)^{a/|\sin x|} = e^{\lim_{x\to 0}\left(|\sin x|\frac{a}{|\sin x|}\right)} = e^a.$$

अब, $\lim_{x\to 0+} e^{\tan 2x/\tan 3x} = c\lim_{x\to 0+} .e^{\left(\frac{\tan\ 2x}{2x}\times 2x\right)\Big/\left(\frac{\tan\ 3x}{3x}\times 3x\right)}$

$$= \lim_{x\to 0+} e^{2/3} = e^{2/3}\,.$$

24. (b, d) चूँकि f, $x=\frac{\pi}{4}$ पर सतत् है

$$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\underset{h\to0}{f}\left(\frac{\pi}{4}+h\right)=\underset{h\to0}{f}\left(\frac{\pi}{4}-h\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4}\cot\frac{\pi}{4}+b=\underset{h\to0}{f}\left(\frac{\pi}{4}+h\right)+a^2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4}(1)+b=\left(\frac{\pi}{4}+0\right)+a^2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+0\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4}+b=\frac{\pi}{4}+a^2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow b=a^2\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow b=a^2$$

f, $x=\frac{\pi}{2}$ पर भी सतत् है

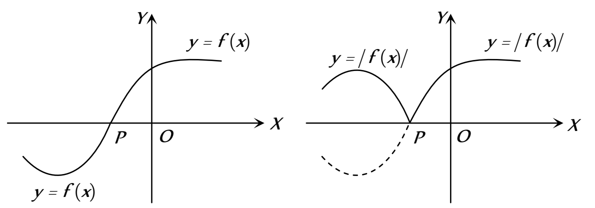
$$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}f(x)=\lim_{h\to0}f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)$$

$$\Rightarrow b\sin2\frac{\pi}{2}-a\cos2\frac{\pi}{2}=\lim_{h\to0}\left[\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\cot\left(\frac{\pi}{2}-h\right)+b\right]$$

$$\Rightarrow b.0-a(-1)=0+b\Rightarrow a=b$$

अतः (0, 0), (1, 1) उपरोक्त सम्बन्धों को संतुष्ट करते हैं।

25. (c) $g(x)=|f(x)|\ge0$ अतः $g(x)$ आच्छादक नहीं हो सकता। यदि $f(x)$ एकैकी हो तथा $f(x_1)=-f(x_2)$ तब $g(x_1)=g(x_2)$. अतः '$f(x)$ एकैकी है' निश्चित नहीं करता है कि $g(x)$ एकैकी है।



यदि $f(x)$, $x\in R$, के लिए सतत् है; $|f(x)|$ भी $x\in R$ के लिए सतत् है। यह निम्न ग्राफों से स्पष्ट है।
अतः उत्तर (c) सही है। विकल्प (d) उपरोक्त ग्राफ से सही नहीं है, $y=f(x)$, P पर अवकलनीय है, जबकि $y=|f(x)|$, P, पर दो स्पर्श रेखायें रखता है। अतः P पर अवकलनीय नहीं है।

26. (b) $f(x)=p[x+1]+q[x-1]$ तथा $f(1)=p[1+1]+q[0]=2p$
यह फलन $x=1$ पर संतत होगा, तब

$$L\lim_{x\to1}f(x)=R\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to0}f(1-h)=\lim_{h\to0}f(1+h)=f(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to0}p[1-h+1]+q[1-h-1]$$

$$=\lim_{h\to0}p[1+h+1]+q[1+h-1]=f(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to0}p[2-h]+q[-h]=\lim_{h\to0}p[2+h]+q[h]=f(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to0}[p(1-h)+q(-h-1)]=\lim_{h\to0}[p(1+h)+q(h-1)]=2p$$

$$\Rightarrow p-q=2p\Rightarrow p+q=0.$$

27. (a) $g(2)=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_0^2 f(t)dt$ .....(i)

$t\in[0,1]$ के लिए $\frac{1}{2}\le f(t)\le1$

$$\int_0^1\left(\frac{1}{2}\right)dt\le\int_0^1 f(t)dt\le\int_0^1 1.dt$$

$\frac{1}{2}\le\int_0^1 f(t)dt\le1$ और $t\in[1,2]$, $0\le f(t)\le\frac{1}{2}$ के लिए

$$0\le\int_0^2 f(t)dt\le\int_1^2\left(\frac{1}{2}\right)dt$$

$$0\le\int_0^2 f(t)dt\le\frac{1}{2}$$

समी. (i) से $0+\frac{1}{2}\le g(2)\le1+\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\le g(2)\le\frac{3}{2}$.

28. (a) $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}[\{f(x)\}^2-16]$

$$\lim_{x\to1}\frac{[f(x)+4][f(x)-4]}{x-1}=8\left[\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right]=8f'(1).$$

29. (d) यदि $x<-1$ तब $x>x^3$. अतः, $f(x)=x$,
यदि $x=-1$ तब $x=x^3$. अतः, $f(x)=x$,
यदि $-1<x<0$ तब $x<x^3$. अतः, $f(x)=x^3$,
यदि $x=0$ तब $x=x^3$. अतः, $f(x)=x^3$,
यदि $0<x<1$ तब $x>x^3$. अतः, $f(x)=x$,
यदि $x=1$ तब $x=x^3$. अतः, $f(x)=x$,
यदि $x>1$, तब $x<x^3$. अतः, $f(x)=x^3$

इस प्रकार $f(x)=x, x\le-1$, $f(x)=\begin{cases}x, & x\le-1\\ x^3, & -1<x\le0\\ x, & 0<x\le1\\ x^3, & x>1\end{cases}$

स्पष्टतः $f(x)$, $x=-1,0,1$ पर अवकलनीय नहीं है।

30. (d) $\cos|x|=\cos x$ जो प्रत्येक जगह अवकलनीय है तथा $|x|$, $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है अतः $\cos(|x|)\pm|x|$, $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है
$x<0$ के लिए,
$\sin(|x|)+|x|=\sin(-x)-x=-\sin x-x$
$x>0$ के लिए $x>0$, $\sin(|x|)+|x|=\sin x+x$
अतः $x=0$ पर इसका वामपक्ष अवकलज (LHD) $[-\cos x-1]_{x=0}=-2$ है, तथा $x=0$ पर इसका दाँया पक्ष अवकलज (RHD) $[\cos x+1]_{x=0}=2$
अतः $\sin(|x|)+|x|$, $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है।
अतः $x<0$ पर $\sin(|x|)-|x|=\sin(-x)-(-x)=-\sin x+x$
अतः $x>0$ पर $x>0$, $\sin(|x|)-|x|=\sin x-x$
$\therefore x=0$ पर इसका LHD $[-\cos x+1]_{x=0}=0$ तथा $x=0$ पर इसका RHD $[\cos x-1]_{x=0}=0$
$\therefore\ (\sin(|x|)-|x|)$, $x=0$ पर अवकलनीय है।

* * *