Chapter
24

निश्चित समाकलन एवं वक्रों से घिरा क्षेत्रफल

परिभाषा (Definition)

माना अंतराल [a, b] में $f(x)$ का प्रतिअवकलज $\phi(x)$ है, अर्थात् $\frac{d}{dx}[\phi(x)] = f(x)$ तब $f(x)$ का निश्चित समाकलन अंतराल [a, b] में $\int_a^b f(x)dx$ द्वारा व्यक्त करते हैं और $[\phi(b) - \phi(a)]$ द्वारा परिभाषित करते हैं अर्थात् $\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$, इसे न्यूटन लैबनीज सूत्र भी कहते हैं।

संख्यायें a और b समाकलन की सीमायें कहलाती है। 'a' को निम्न सीमा तथा 'b' को उच्च सीमा कहते हैं। अतंराल [a, b] को समाकलन का परिसर (range) कहते हैं। प्रत्येक निश्चित समाकलन का अद्धितीय मान होता है।

प्रतिस्थापन द्वारा निश्चित समाकलन की गणना (Evaluation of definite integral by substitution)

जब निश्चित समाकलन में चर परिवर्तित होता है, तब नये चर के रूप में प्रतिस्थापन का निम्न तीन स्थानों पर प्रभाव पड़ता है ।

(i) समाकल्य में (ii) अवकलन में, अर्थात् dx में

(iii) सीमाओं में

उदाहरण के लिए, $\int_a^b f\{\phi(x)\}\phi'(x)dx$ में, यदि हम $\phi(x) = t$ रखते हैं, तब $\int_a^b f\{\phi(x)\}\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,dt$.

निश्चित समाकलन के गुणधर्म
(Properties of definite integral)

(1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)\,dt$ अर्थात् यदि चर को परिवर्तित कर कोई अन्य चर रखते हैं, तो निश्चित समाकलन के मान पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

(2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ अर्थात् निश्चित समाकलन की सीमाओं में पारस्परिक परिवर्तन (Interchange) करने पर समाकलन का चिन्ह परिवर्तित हो जाता है।

(3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, (जहाँ $a < c < b$)

या $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + ... + \int_{c_n}^b f(x)dx;$

(जहाँ $a < c_1 < c_2 < .... c_n < b$)

जब समाकलन में दो या दो से अधिक अन्तराल हो, तब इस गुणधर्म का उपयोग करते हैं।

जब अन्तराल [a, b] में $f(x)$ सतत् नहीं हो, तब यह गुणधर्म उपयोगी होगा, क्योंकि असतत् बिन्दुओं पर समाकलन को कई समाकलनों में विभक्त कर सकते हैं, जिससे फलन इन उप-अंतरालों में सतत् हो जाता है।

(4) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$: जब निम्न सीमा शून्य हो, तब इस गुणधर्म का उपयोग करते हैं। सामान्यतः इस गुणधर्म का उपयोग उन कठिन समाकलनों के लिये करते है, जिनके हर में x की जगह $(a - x)$ रखने पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

इस गुणधर्म की सहायता से निम्न समाकलनों का मान ज्ञात किया जा सकता है।

(i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx = \frac{\pi}{4}$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\tan^n x}{1 + \tan^n x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cot^n x}{1 + \cot^n x} dx = \frac{\pi}{4}$

(iii) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \tan^n x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cot^n x} dx = \frac{\pi}{4}$

(iv) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^n x}{\sec^n x + \text{cosec}^n x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\text{cosec}^n x}{\text{cosec}^n x + \sec^n x} dx = \frac{\pi}{4}$

(v) $\int_0^{\pi/2} f(\sin 2x)\sin x dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin 2x)\cos x dx$

(vi) $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$

(vii) $\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x)dx = \frac{\pi}{8}\log 2$

(viii) $\int_0^{\pi/2} \log \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \log \cos x dx = \frac{-\pi}{2}\log 2 = \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$

(ix) $\int_0^{\pi/2} \frac{a \sin x + b \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{a \sec x + b \operatorname{cosec} x}{\sec x + \operatorname{cosec} x} dx$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{a \tan x + b \cot x}{\tan x + \cot x} dx = \frac{\pi}{4}(a+b)$

(5) $\int_{-a}^{a} f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$

विशेष स्थिति में :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, \text{ यदि } f(x) \text{ सम फलन हो या } f(-x) = f(x) \\ 0 \quad \text{, यदि } f(x) \text{ विषम फलन हो या } f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

सामान्यतः इस गुणधर्म का उपयोग तब करते हैं, जब समाकल्य, x का सम या विषम फलन हो।

(6) $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$

विशेष स्थिति में :

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \begin{cases} 0 \quad \text{, यदि } f(2a-x) = -f(x) \\ 2\int_0^a f(x)\,dx \text{, यदि } f(2a-x) = f(x) \end{cases}$$

सामान्यतः यह गुणधर्म उच्च सीमा को आधा करने के लिए उपयोग किया जाता है।

(7) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

(8) $\int_0^a x\, f(x)dx = \frac{1}{2} a \int_0^a f(x)dx$, यदि $f(a-x) = f(x)$.

(9) यदि $f(x)$ एक आवर्ती फलन है, जिसका आवर्तनांक T है, तब $\int_0^{nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx$

विशेष स्थितियाँ: यदि $f(x)$ एक आवर्ती फलन है जिसका आवर्तनांक T है, तब $\int_a^{a+nT} f(x)\,dx = n\int_0^T f(x)\,dx$, जहाँ $n \in I$

(a) यदि $a = 0$, $\int_0^{nT} f(x)\,dx = n\int_0^T f(x)dx$ जहाँ $n \in I$

(b) यदि $n = 1$, $\int_0^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$.

(10) $\int_{mT}^{nT} f(x)\,dx = (n-m)\int_0^T f(x)\,dx$, जहाँ $n, m \in I$.

(11) $\int_{a+nT}^{b+nT} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$, जहाँ $n \in I$.

(12) $\int_0^{2k} (x - [x])dx = k$, जहाँ k पूर्णांक है, चूँकि $x - [x]$ एक आवर्ती फलन है जिसका आवर्तनांक 1 है।

(13) यदि $f(x)$ एक आवर्ती फलन है, जिसका आवर्तनांक T हो, तब $\int_a^{a+T} f(x)$, a से स्वतंत्र है।

(14) $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f((b-a)x + a)\,dx$.

श्रेणियों के योगफल द्वारा समाकलन
(Summation of series by integration)

हम जानते हैं, कि $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh)$, जहाँ $nh = b - a$

अब $a = 0$, $b = 1$ रखने पर, $nh = 1$ या $h = \frac{1}{n}$

$\therefore \int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum f\left(\frac{r}{n}\right)$

श्रेणी को $\sum \frac{1}{n} f\left(\frac{r}{n}\right)$ के रूप में लिख सकते हैं। Σ के स्थान पर $\int$, $\left(\frac{1}{n}\right)$ के स्थान पर dx, $\left(\frac{r}{n}\right)$ के स्थान पर x रखते हैं तथा r के न्यूनतम एवं अधिकतम मानों को $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{n}\right)$ में रखकर निम्न व उच्च सीमायें ज्ञात करते हैं। अतः सीमा का योग $= \int_0^1 f(x)\,dx$.

गामा फलन (Gamma function)

$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$, $n > 0$ को गामा फलन कहते हैं तथा इसे Γn से प्रदर्शित करते हैं। यदि m और n अऋणात्मक पूर्णांक हों, तब

$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}$, जहाँ $\Gamma(n)$ गामा फलन कहलाता है जो कि निम्न गुणधर्म संतुष्ट करता है

$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$ अर्थात् $\Gamma(1) = 1$ तथा $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

गामा फलन के स्थान पर निम्न सूत्र का उपयोग कर सकते हैं,

$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx$

$= \frac{(m-1)(m-3).....(2 \text{ या } 1)(n-1)(n-3).....(2 \text{ या } 1)}{(m+n)(m+n-2)....(2 \text{ या } 1)}$

इस बात का विशेष ध्यान रखे कि जब m और n दोनों सम हों, तब सूत्र में $(\pi/2)$ का गुणा करते हैं ।

निश्चित समाकलन के लिए समानयन सूत्रा
(Reduction formulae for definite integration)

(1) $\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2+b^2}$

(2) $\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2+b^2}$

(3) $\int_0^\infty e^{-ax} x^n dx = \frac{n!}{a^n + 1}$

वाली सूत्रा (Walli's formula)

$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}.\frac{n-5}{n-4}......\frac{2}{3}, & \text{जब } n \text{ विषम है} \\ \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}.\frac{n-5}{n-4}.......\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}, & \text{जब } n \text{ सम है} \end{cases}$$

$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n dx = \frac{(m-1)(m-3).....(n-1)(n-3)....}{(m+n)(m+n-2)...(2 \text{ या } 1)}$,

[यदि m, n दोनों धनात्मक विषम पूर्णांक हैं या एक धनात्मक विषम पूर्णांक है]

$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{(m-1)(m-3).........\,...(n-1)(n-3)}{(m+n)(m+n-2)........(2 \text{ या } 1)}.\frac{\pi}{2}$,

[यदि m, n दोनों धनात्मक पूर्णांक हैं]

लैबनीज नियम (Leibnitz's rule)

(1) यदि $f(x)$ सतत् है तथा अन्तराल $[a, b]$ में $u(x)$ व $v(x)$ अवकलनीय हों, तब $\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f\{v(x)\}\frac{d}{dx}\{v(x)\} - f\{u(x)\}\frac{d}{dx}\{u(x)\}$.

(2) यदि अन्तराल $[a, b]$ में फलन $\phi(x)$ और $\psi(x)$ परिभाषित हैं तथा बिन्दु $x \in (a,b)$ पर अवकलनीय हैं तथा $f(x,t)$ सतत् है, तब

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt\right] = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{d}{dx} f(x,t)dt + \left\{\frac{d\,\psi(x)}{dx}\right\} f(x,\psi(x)) - \left\{\frac{d\phi(x)}{dx}\right\} f(x,\phi(x)).$$

निश्चित समाकलन के कुछ महत्वपूर्ण परिणाम
(Some important results of definite integral)

(1) यदि $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$, तब $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$

(2) यदि $I_n = \int_0^{\pi/4} \cot^n x dx$, तब $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{1-n}$

(3) यदि $I_n = \int_0^{\pi/4} \sec^n x\, dx$, तब $I_n = \frac{(\sqrt{2})^{n-2}}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$

(4) यदि $I_n = \int_0^{\pi/4} \operatorname{cosec}^n x\, dx$, तब $I_n = \frac{(\sqrt{2})^{n-2}}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$

(5) यदि $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$, तब $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

(6) यदि $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$, तब $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

(7) यदि $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x\, dx$, तब $I_n + n(n-1)I_{n-2} = n(\pi/2)^{n-1}$

(8) यदि $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \cos x\, dx$, तब $I_n + n(n-1)I_{n-2} = (\pi/2)^n$

(9) यदि $a > b > 0$, तब $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

(10) यदि $0 < a < b$, तब $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log\left|\frac{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a}}\right|$

(11) यदि $a > b > 0$, तब $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a + b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$

(12) यदि $0 < a < b$, तब

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a + b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log\left|\frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a}}\right|$$

(13) यदि $a > b, a^2 > b^2 + c^2$, तब $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a + b\cos x + c\sin x}$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \tan^{-1} \frac{a-b+c}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}$$

(14) यदि $a > b, a^2 < b^2 + c^2$, तब $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a + b\cos x + c\sin x}$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}} \log\left|\frac{a-b+c-\sqrt{b^2+c^2-a^2}}{a-b+c+\sqrt{b^2+c^2-a^2}}\right|$$

(15) यदि $a < b,\ a^2 < b^2 + c^2$, तब $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a + b\cos x + c\sin x}$

$$= \frac{-1}{\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}} \log\left|\frac{b-a-c-\sqrt{b^2+c^2-a^2}}{b-a-c+\sqrt{b^2+c^2-a^2}}\right|.$$

असतत् फलनों का समाकलन
(Integration of piecewise continuous functions)

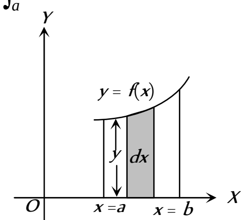
अंतराल $[a, b]$ के निश्चित बिन्दुओं पर कोई फलन $f(x)$ असतत् है, तो उनके अंतरालों को उपअंतरालों में विभक्त कर सतत् बना सकते हैं। यदि अंतराल (a, b) में $f(x)$ बिन्दुओं $x_1, x_2, x_3 .... x_n$ पर असतत् है, तब उपअंतरालों $(a, x_1), (x_1, x_2) ....(x_{n-1}, x_n), (x_n, b)$ में $f(x)$ को इस प्रकार परिभाषित करते हैं, कि $f(x)$ प्रत्येक उपअंतराल में सतत् हो जाये। $f(x)$ का प्रत्येक उपअंतराल में समाकलन ज्ञात करते हैं तथा अंत में उन सभी मानों को जोड़ देते हैं।

वक्रों से घिरा क्षेत्राफल

परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल (Area of bounded regions)

(1) वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = a$ और $x = b$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल निम्न द्वारा दिया जाता है,

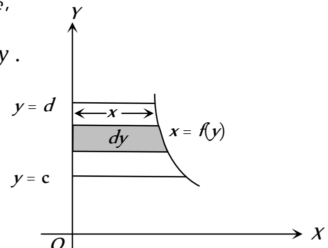
क्षेत्रफल $= \int_a^b y\, dx = \int_a^b f(x)dx$.



(2) यदि वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष के नीचे स्थित है, तब वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = a$ तथा $x = b$ से परिबद्ध क्षेत्रफल ऋणात्मक होगा, अतः क्षेत्रफल $= \left|\int_a^b y\, dx\right|$.

(3) वक्र $x = f(y)$, y-अक्ष तथा भुजों $y = c$ और $y = d$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल निम्न द्वारा दिया जाता है,

क्षेत्रफल $= \int_c^d x\, dy = \int_c^d f(y)dy$.



(4) यदि वक्र का समीकरण प्राचल रूप, माना $x = f(t)$ तथा $y = g(t)$ में हो, तब क्षेत्रफल $= \int_a^b y\, dx = \int_{t_1}^{t_2} g(t) f'(t)dt$, जहाँ x के a तथा b के संगत, t के मान क्रमशः t_1 तथा t_2 हैं।

सममित क्षेत्रफल (Symmetrical area)

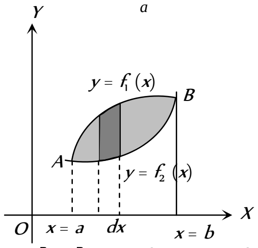
यदि वक्र किसी निर्देशी अक्ष (या रेखा या मूलबिन्दु) के सापेक्ष सममित हो, तो हम किसी एक सममित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करके उसे सममित भागों की संख्या से गुणा कर अभीष्ट क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।

दो वक्रों से घिरा क्षेत्रफल (Area between two curves)

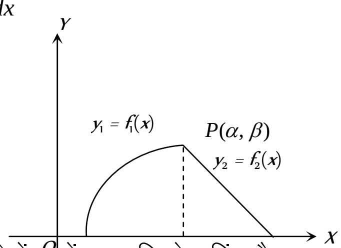
;1½ जब दोनों वक्र एक दूसरे को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करते हैं तथा उनका उभयनिष्ठ क्षेत्रफल इन दोनों बिन्दुओं के मध्य स्थित है

यदि दो वक्र $y_1 = f_1(x)$ तथा $y_2 = f_2(x)$ इस प्रकार हैं, कि $f_1(x) > f_2(x)$ तथा दोनों वक्र दो बिंदुओं $A(x = a)$ तथा $B(x = b)$ पर प्रतिच्छेदित करते हैं, तब

अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_a^b (y_1 - y_2)\, dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\, dx$.



(2) **जब दो वक्र एक दूसरे को एक बिंदु पर प्रतिच्छेदित करते हैं तथा दोनों के मध्य क्षेत्रफल x-अक्ष द्वारा परिबद्ध है:** वक्रों $y = f(x)$, $y = f(x)$ तथा x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_a^{\alpha} f_1(x) dx + \int_{\alpha}^{b} f_2(x) dx$



जहाँ $P(\alpha, \beta)$ दोनों वक्रों का प्रतिच्छेद बिंदु है।

(3) **धनात्मक तथा ऋणात्मक क्षेत्रफल :** क्षेत्रफल सदैव धनात्मक लिया जाता है। यदि क्षेत्रफल का कुछ भाग, x-अक्ष के ऊपर तथा कुछ भाग x-अक्ष के नीचे है, तब दोनों भागों का क्षेत्रफल अलग–अलग ज्ञात कर, उनके संख्यात्मक मान जोड़ने के बाद प्राप्त क्षेत्रफल ही अभीष्ट क्षेत्रफल है।

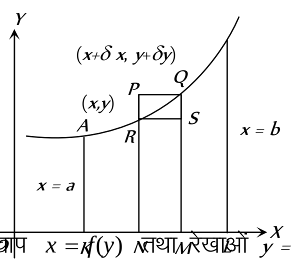
परिक्रमण ठोस का आयतन तथा वक्र-पृष्ठ
(Volume and surface of solids of revolution)

यदि किसी समतल वक्र को वक्र के तल में किसी अक्ष के परितः परिक्रमण कराते हैं, तब इस प्रकार प्राप्त ठोस को **परिक्रमण ठोस** कहते हैं। वक्र के परिमाप द्वारा प्राप्त सतह को परिक्रमण सतह तथा इस प्रकार प्राप्त आयतन को परिक्रमण आयतन कहते हैं।

उदाहरणार्थ : जब एक समकोण त्रिभुज का इसकी एक भुजा (जो समकोण बनाती है) के परितः परिक्रमण कराते हैं, तब एक लम्ब वृत्तीय शंकु प्राप्त होता है।

(1) **परिक्रमण ठोस का आयतन**

(i) वक्र $y = f(x)$, कोटियों $x = a, x = b$ तथा x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का x-अक्ष से परितः परिक्रमण कराने पर निर्मित ठोस का आयतन सूत्र $\pi \int_a^b y^2\, dx$ से प्राप्त होता है।

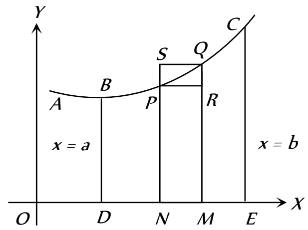


(ii) यदि वक्र–चाप $x = f(y)$ तथा रेखाओं $y = a$ और $y = b$ के बीच घिरे क्षेत्र का परिक्रमण y-अक्ष के परितः हो, तो जनित ठोस का आयतन V निम्न सूत्र से प्राप्त होता है, $V = \int \pi x^2\, dy$ (उपरोक्त सूत्र में x व y को परस्पर बदलने पर)।

(iii) यदि $x = f_1(t)$ तथा $y = f_2(t)$ से प्राप्त जनन वक्रों (generating curves) को x-अक्ष के परितः घुमाते हैं, तब $\int_a^b \pi y^2\, dx$ के संगत सूत्र $\int_{t_1}^{t_2} \pi \{f_2(t)\}^2\, d\{f_1(t)\}$ होगा, जहाँ $x = a$ व $x = b$ के संगत t के मान क्रमशः f_1 व f_2 हैं।

(2) **परिक्रमण ठोस का वक्र-पृष्ठ :**

(i) वक्र $y = f(x)$, कोटियों $x = a, x = b$ तथा x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का x-अक्ष के परितः परिक्रमण कराने पर प्राप्त वक्र पृष्ठ (धरातल) $= 2\pi \int_{x=a}^{x=b} y\, ds$.



(ii) वक्र $y = f(x)$ के चाप का y-अक्ष के परितः परिक्रमण कराने पर निर्मित ठोस का वक्र पृष्ठ (धरातल) $= 2\pi \int x\, ds$, (उचित सीमाओं के मध्य)

जहाँ $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$.

(iii) यदि वक्र के समीकरण का प्राचलिक रूप $x = f_1(t)$ तथा $y = f_2(t)$ है, तब इस वक्र को x-अक्ष के परितः परिक्रमण कराने पर निर्मित ठोस का वक्र पृष्ठ $= 2\pi \int_{t=t_1}^{t=t_2} y ds = 2\pi \int_{t=t_1}^{t=t_2} f_2(t) ds$

$$= 2\pi \int_{t_1}^{t_2} f_2(t) \sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}\, dt ,$$

जहाँ t_1 व t_2 प्राचल t के मान हैं, जो $x = a$ तथा $x = b$ के संगत हैं।

(3) **शंकु के छिन्नक का आयतन तथा पृष्ठ क्षेत्रफल :** यदि r_1, r_2 वृत्तीय सिरों की त्रिज्यायें, k वृत्तीय सिरों के केन्द्रों के मध्य दूरी तथा l तिर्यक ऊँचाई है, तब

(i) शंकु के छिन्नक का आयतन $= \frac{\pi k}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

(ii) शंकु के छिन्नक का वक्रीय पृष्ठ क्षेत्रफल $= \pi(r_1 + r_2)l$

(iii) शंकु के छिन्नक का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल

$= \pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$.

(4) **गोले के छिन्नक का आयतन तथा पृष्ठ क्षेत्रफल :** माना गोले के छिन्नक की मोटाई k तथा छिन्नक के वृत्तीय सिरों की त्रिज्यायें r_1 तथा r_2 हैं, तब

(i) गोले के छिन्नक का आयतन $= \frac{\pi k}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + k^2)$

(ii) गोले के छिन्नक का वक्रीय पृष्ठ क्षेत्रफल $= 2\pi ak$,

(जहाँ a वृत्त की त्रिज्या है)

(iii) गोले के छिन्नक का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल $= (2\pi ak + \pi r_1^2 + \pi r_2^2)$

Tips & Tricks

✍ $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}, \ (\beta > \alpha) = \pi$.

✍ $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)} \ dx = \frac{\pi}{8}(\beta-\alpha)^2$.

✍ $\int_{a}^{b} \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \ dx = \frac{\pi}{2}(b-a)$.

✍ $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{1}{n}\int_{na}^{nb} f(x)\,dx$.

✍ $\int_{a-c}^{b-c} f(x+c)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$ या $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$.

✍ $\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x} = 2$.

✍ $\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \sqrt{2}\,\log\left(\sqrt{2}+1\right)$.

✍ $\int_{0}^{\pi/2} \log(\tan x)dx = 0$.

✍ $\int_{0}^{a} \frac{dx}{1+e^{f(x)}} = \frac{a}{2}$, जहाँ $f(a-x) = -f(x)$.

✍ $\int_{0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}$.

✍ $\int_{0}^{a} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}$.

✍ $\int_{0}^{a} \sqrt{a^2-x^2} \ dx = \frac{\pi a^2}{4}$.

✍ $\int_{a}^{b} (|x-a|+|x-b|)\,dx = (b-a)^2$.

✍ यदि $f(t)$ एक विषम फलन है, तब $\phi(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$ एक सम फलन है।

✍ यदि $f(x)$ एक सम फलन है, तब $\phi(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt$ एक विषम फलन है।

✍ अंतराल $[a, b]$ में परिभाषित प्रत्येक सतत् फलन इस अंतराल में समाकलनीय भी होगा ।

✍ अंतराल $[a, b]$ में परिभाषित प्रत्येक एकदिष्ट फलन इस अंतराल में समाकलनीय भी होगा ।

✍ यदि $f(x)$ अंतराल $[a, b]$में सतत् फलन है, तब यह $c \in (a,b)$ में इस प्रकार विद्यमान होगा, कि $\int_{a}^{b} f(x)dx = f(c).(b-a)$.

✍ संख्या $f(c) = \frac{1}{(b-a)}\int_{a}^{b} f(x)dx$, अंतराल $[a, b]$ में फलन का मध्यमान कहलाती है।

✍ यदि f, अंतराल $[a,b]$ में सतत् है तब $x \in [a,b]$ के लिए समाकलनीय फलन g जो $g(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$ द्वारा परिभाषित है, अंतराल $[a, b]$ में अवकलनीय होगा तथा $g'(x) = f(x) \ \forall \ x \in [a,b]$.

✍ यदि अंतराल $[a, b]$ में m, फलन $f(x)$ का न्यूनतम मान तथा M, फलन $f(x)$ का अधिकतम मान हो, तब $m(b-a) \le \int_{a}^{b} f(x)dx \le M(b-a)$.

✍ $\left|\int_{a}^{b} f(x)dx\right| \le \int_{a}^{b} |f(x)|\,dx$.

✍ यदि अंतराल $[a, b]$ में फलन $f^2(x)$ तथा $g^2(x)$ समाकलनीय हों, तब $\left|\int_{a}^{b} f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_{a}^{b} f^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_{a}^{b} g^2(x)dx\right)^{1/2}$

✍ **चरों का परिवर्तन** : यदि अंतराल $[a, b]$ में फलन $f(x)$ सतत् हो तथा अंतराल $[t_1, t_2]$ में फलन $x = \phi(t)$ सतत् अवकलनीय हों एवं

$$a = \phi(t_1), b = \phi(t_2), \text{ तब } \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

माना एक फलन $f(x,\alpha)$, $a \le x \le b$ और $c \le \alpha \le d$ के लिए सतत् है तब $\alpha \in [c,d]$ के किसी मान के लिए यदि $I(\alpha) = \int_{a}^{b} f(x,\alpha)dx$, तब $I'(\alpha) = \int_{a}^{b} f'(x,\alpha)dx$, जहाँ $I'(\alpha)$, α के सापेक्ष $I(\alpha)$ का अवकलज है और $f'(x,\alpha)$, $f(x,\alpha)$ का x को अचर रखते हुए α के सापेक्ष अवकलन है ।

✍ फलन $f(x)$ के अंतराल $[a, b]$ में सतत् होने पर यदि अंतराल $[a, b]$ में दो फलन $f_1(x)$ तथा $f_2(x)$ इस प्रकार ज्ञात कर सकें, कि $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x) \ \forall \ x \in [a,b]$,

तब $\int_{a}^{b} f_1(x)dx \le \int_{a}^{b} f(x)dx \le \int_{a}^{b} f_2(x)dx$.

✍ यदि $f(t)$ एक सम फलन है तब 'a' के अशून्य मान के लिए $\int_{0}^{x} f(t)\,dt$ आवश्यक रूप से विषम फलन नहीं है। यदि $\int_{0}^{a} f(t)\,dt = 0$ हो, तब यह विषम फलन होगा ।

✍ $\int_{a}^{b} f(x)dx = (b-a)\int_{0}^{1} f[(b-a)t+a]dt$.

✍ $\lim_{x\to 0} \left|\frac{\int_{0}^{x} f(x)dx}{x}\right| = f(0)$.

✍ $\int_{a}^{b} \frac{f(x)dx}{f(x)+f(a+b-x)} = \frac{1}{2}(b-a)$.

✍ परवलय $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4by$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल $\frac{16ab}{3}$ वर्ग इकाई होता है।

✍ परवलय $y^2 = 4ax$ तथा रेखा $y = mx$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल $\frac{8a^2}{3m^3}$ वर्ग इकाई होता है।

✍ परवलय $y^2 = 4ax$ के नाभिलम्ब से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल $8a^2/3$ वर्ग इकाई होता है।

✍ sin (ax) या cos (ax) के एक चाप (one arch) तथा x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल $2/a$ वर्ग इकाई होता है।

✍ दीर्घवृत्त $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$ का क्षेत्रफल πab वर्ग इकाई होता है।

✍ वक्र $y = \sin x$, x-अक्ष तथा रेखाओं $x = 0$ एवं $x = 2\pi$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल 4 वर्ग इकाई होता है।

✍ वक्र $r = f(\theta)$ तथा सदिश त्रिज्याओं $\theta = \alpha$ तथा $\theta = \beta$ से परिबद्ध क्षेत्र को प्रारंभिक रेखा के परितः परिक्रमण कराने पर जनित ठोस का आयतन $= \frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\theta\,d\theta$. उपरोक्त क्षेत्र को रेखा $\theta = \pi/2$ के परितः परिक्रमण कराने पर जनित ठोस का आयतन $= \frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3 \cos\theta\,d\theta$.

Ordinary Thinking

Objective Questions

आधारभूत निश्चित समाकलन, प्रतिस्थापन द्वारा निश्चित समाकलन

1. $\int_0^1 e^{2\ln x}\,dx =$ [MP PET 1990]

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{4}$

2. $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx =$ [Roorkee 1985, Pb. CET 2000]

(a) $1-\frac{\pi}{4}$ (b) $1+\frac{\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{4}-1$ (d) $\frac{\pi}{4}$

3. $\int_0^{\pi/2} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx =$ [MP PET 1989]

(a) $-\log 2$ (b) $\log 2$

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) 0

4. $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x\,dx =$ [Roorkee 1978]

(a) $\frac{1}{2}(e^{\pi/2}-1)$ (b) $\frac{1}{2}(e^{\pi/2}+1)$

(c) $\frac{1}{2}(1-e^{\pi/2})$ (d) $2(e^{\pi/2}+1)$

5. $\int_1^2 e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx =$

[MNR 1990; AMU 1999; UPSEAT 2000; Pb. CET 2004]

(a) $\frac{e^2}{2}+e$ (b) $e-\frac{e^2}{2}$

(c) $\frac{e^2}{2}-e$ (d) इनमें से कोई नहीं

6. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)}dx =$ [UPSEAT 1999]

(a) $\log\frac{4}{3}$ (b) $\log\frac{1}{3}$

(c) $\log\frac{3}{4}$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{(1-\cos x)^{\frac{5}{2}}}dx =$ [AI CBSE 1980]

(a) $\frac{5}{2}$ (b) $\frac{3}{2}$

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{2}{5}$

8. $\int_1^2 \frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}\,dx =$ [DCE 2001]

(a) $\sqrt{e}+1$ (b) $\sqrt{e}-1$

(c) $\frac{\sqrt{e}+1}{e}$ (d) $\frac{\sqrt{e}-1}{e}$

9. $\int_0^1 \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx =$ [Karnataka CET 1999]

(a) $\frac{\pi}{2}-2\log\sqrt{2}$ (b) $\frac{\pi}{2}+2\log\sqrt{2}$

(c) $\frac{\pi}{4}-\log\sqrt{2}$ (d) $\frac{\pi}{4}+\log\sqrt{2}$

10. $\int_1^e \frac{e^x}{x}(1+x\log x)dx =$

(a) e^e (b) e^e-e

(c) e^e+e (d) इनमें से कोई नहीं

11. $\int_{-2}^2 (ax^3+bx+c)\,dx$ का मान निर्भर करता है

[MNR 1988; UPSEAT 2000]

(a) a के मान पर (b) b के मान पर

(c) c के मान पर (d) a तथा b के मानों पर

12. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \text{cosec}\,2x\,dx =$ [MNR 1980]

(a) $\log 3$ (b) $\log\sqrt{3}$

(c) $\log 9$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos\theta}\sin^3\theta\,d\theta =$

(a) $\frac{20}{21}$ (b) $\frac{8}{21}$

(c) $\frac{-20}{21}$ (d) $\frac{-8}{21}$

14. $\int_0^{\pi/4} \sec^7\theta\sin^3\theta\,d\theta =$

(a) $\frac{1}{12}$ (b) $\frac{3}{12}$

(c) $\frac{5}{12}$ (d) इनमें से कोई नहीं

15. $\int_a^b \frac{\log x}{x}dx =$ [MP PET 1994]

(a) $\log\left(\frac{\log b}{\log a}\right)$ (b) $\log(ab)\log\left(\frac{b}{a}\right)$

(c) $\frac{1}{2}\log(ab)\log\left(\frac{b}{a}\right)$ (d) $\frac{1}{2}\log(ab)\log\left(\frac{a}{b}\right)$

16. $\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx =$ [Karnataka CET 1993; RPET 1997]

(a) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$ (b) $\pi-\frac{1}{2}\log 2$

(c) $\frac{\pi}{4}-\log 2$ (d) $\pi-\log 2$

17. $\int_0^1 \frac{dx}{[ax+b(1-x)]^2} =$ [SCRA 1986]

(a) $\frac{a}{b}$ (b) $\frac{b}{a}$

(c) ab (d) $\frac{1}{ab}$

18. यदि $\int_0^k \frac{dx}{2+8x^2} = \frac{\pi}{16}$, तब $k =$

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{4}$ (d) इनमें से कोई नहीं

19. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{cosec}^2\theta \, d\theta =$ [Roorkee 1978]

(a) $\sqrt{2}-1$ (b) $1-\sqrt{2}$

(c) $\sqrt{2}+1$ (d) इनमें से कोई नहीं

20. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\sin^{-1} x}{(1-x^2)^{3/2}} dx =$ [Roorkee 1984]

(a) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2$ (b) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$

(c) $\frac{\pi}{2}+\log 2$ (d) $\frac{\pi}{2}-\log 2$

21. $\int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x \, dx$ का सही मूल्यांकन है [MP PET 1993, 2003]

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{2}{3}$

22. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x} =$ [BIT Ranchi 1992]

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (b) $\sqrt{3}\tan^{-1}(\sqrt{3})$

(c) $\frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (d) $2\sqrt{3}\tan^{-1}(\sqrt{3})$

23. $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx =$ [SCRA 1987; MNR 1990]

(a) $\frac{\pi^2}{8}$ (b) $\frac{\pi^2}{16}$

(c) $\frac{\pi^2}{4}$ (d) $\frac{\pi^2}{32}$

24. $\int_1^2 \frac{\cos(\log x)}{x} dx =$

(a) $\sin(\log 3)$ (b) $\sin(\log 2)$

(c) $\cos(\log 3)$ (d) इनमें से कोई नहीं

25. $\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} =$

(a) $a(\sqrt{2}-1)$ (b) $a(1-\sqrt{2})$

(c) $a(1+\sqrt{2})$ (d) $2a\sqrt{3}$

26. $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{\sin(1/x)}{x^2} dx =$ [IIT 1990]

(a) 2 (b) -1

(c) 0 (d) 1

27. $\int_0^a \frac{x^4\,dx}{(a^2+x^2)^4} =$

(a) $\frac{1}{16a^3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)$ (b) $\frac{1}{16a^3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\right)$

(c) $\frac{1}{16}a^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)$ (d) $\frac{1}{16}a^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\right)$

28. $\int_0^{2\pi} e^{x/2}.\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) dx =$ [Roorkee 1982]

(a) 1 (b) $2\sqrt{2}$

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

29. $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx =$ [Roorkee 1976]

(a) $\log\left(\frac{1+e}{e}\right)-\frac{1}{e}+1$ (b) $\log\left(\frac{1+e}{2e}\right)-\frac{1}{e}+1$

(c) $\log\left(\frac{1+e}{2e}\right)+\frac{1}{e}-1$ (d) इनमें से कोई नहीं

30. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x} dx =$ [IIT 1983]

(a) $\frac{1}{20}\log 3$ (b) $\log 3$

(c) $\frac{1}{20}\log 5$ (d) इनमें से कोई नहीं

31. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x(\log\sin x+\cot x) dx =$ [AI CBSE 1991]

(a) $e^{\pi/4}\log 2$ (b) $-e^{\pi/4}\log 2$

(c) $\frac{1}{2}e^{\pi/4}\log 2$ (d) $-\frac{1}{2}e^{\pi/4}\log 2$

32. $\int_0^{1/2} \frac{x\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$ [IIT 1984]

(a) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$ (b) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$

(c) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3\pi}}{12}$ (d) इनमें से कोई नहीं

33. $\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx =$ [MNR 1984; Kurukshetra CEE 1993]

(a) $\pi+2$ (b) $\pi+\frac{3}{2}$

(c) $\pi+1$ (d) इनमें से कोई नहीं

34. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x} =$ [Kurukshetra CEE 1993]

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$

(c) 2 (d) $\frac{3}{2}$

35. $\int_0^{\pi/8} \frac{\sec^2 2x}{2} dx =$

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{1}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

36. $\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin\frac{x}{2}}\,dx =$ [MNR 1987; UPSEAT 2000]

(a) 0 (b) 2

(c) 8 (d) 4

37. $\int_0^1 \cos^{-1} x\,dx =$ [DSSE 1988]

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

38. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x+\sin x}dx =$ [Roorkee 1989]

(a) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2$ (b) $\frac{\pi}{4}+\log 2$

(c) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$ (d) $\frac{\pi}{4}-\log 2$

39. $\int_0^{\pi/6} (2+3x^2)\cos 3x\,dx =$ [DSSE 1985]

(a) $\frac{1}{36}(\pi+16)$ (b) $\frac{1}{36}(\pi-16)$

(c) $\frac{1}{36}(\pi^2-16)$ (d) $\frac{1}{36}(\pi^2+16)$

40. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx =$ [AISSE 1988]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{8}$

41. $\int_0^{\pi/4} \tan^6 x\sec^2 x\,dx =$ [BIT Ranchi 1981]

(a) $\frac{1}{7}$ (b) $\frac{2}{7}$

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

42. $\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} =$

(a) $(\sqrt{2}-1)^2$ (b) $\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{\sqrt{2}}$

(c) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

43. $\int_0^{\pi/6} \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx =$ [SCRA 1979]

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{6}$

(c) 2 (d) $\frac{1}{3}$

44. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x\,dx}{\cos^2 x+3\cos x+2} =$ [MNR 1981]

(a) $\log\left(\frac{8}{9}\right)$ (b) $\log\left(\frac{9}{8}\right)$

(c) $\log(8\times 9)$ (d) इनमें से कोई नहीं

45. $\int_0^{\log 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx =$

(a) $3+2\pi$ (b) $4-\pi$

(c) $2+\pi$ (d) इनमें से कोई नहीं

46. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x\cos\alpha+1}$; $0<\alpha<\pi$ का मान होगा [Kurukshetra CEE 2002]

(a) $\sin\alpha$ (b) $\tan^{-1}(\sin\alpha)$

(c) $\alpha\sin\alpha$ (d) $\frac{\alpha}{2}(\sin\alpha)^{-1}$

47. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\,\sin nx\,dx$; जहाँ $m\neq n$ $(m, n\in I)$, का मान है

(a) 0 (b) π

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) 2π

48. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx$ तथा $\frac{\pi}{2}$ में से बडा है

(a) $\frac{\pi}{2}$

(b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx$

(c) कुछ नहीं कहा जा सकता है

(d) इनमें से कोई नहीं

49. $\int_{-1}^{3} \left(\tan^{-1}\frac{x}{x^2+1}+\tan^{-1}\frac{x^2+1}{x}\right)dx =$ [Karnataka CET 2000]

(a) π (b) 2π

(c) 3π (d) इनमें से कोई नहीं

50. यदि $I_1=\int_e^{e^2}\frac{dx}{\log x}$ तथा $I_2=\int_1^2\frac{e^x}{x}dx$, तो [Karnataka CET 2000]

(a) $I_1=I_2$ (b) $I_1>I_2$

(c) $I_1<I_2$ (d) इनमें से कोई नहीं

51. $\int_{-\pi/4}^{\pi/2} e^{-x}\sin x\,dx =$ [CEE 1993]

(a) $-\frac{1}{2}e^{-\pi/2}$ (b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}$

(c) $-\sqrt{2}(e^{-\pi/4}+e^{-\pi/4})$ (d) 0

52. $\int_0^{\pi/2} \frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}dx =$ [Kurukshetra CEE 1993]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) π

(c) $\frac{1}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

53. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1-2a\cos x+a^2} =$ [CEE 1993]

(a) $\frac{\pi}{2(1-a^2)}$ (b) $\pi(1-a^2)$

(c) $\frac{\pi}{1-a^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

54. $\int_0^1 (1-x)^9\,dx =$ [SCRA 1979]

(a) 1 (b) $\frac{1}{10}$

(c) $\frac{11}{10}$ (d) 2

55. $\int_0^{\pi/3} \cos 3x\,dx =$ [SCRA 1980]

(a) π (b) 0

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

56. $\int_0^{\pi/4} \frac{1+\tan x}{1-\tan x}dx$ का मान है [SCRA 1986]

(a) $-\frac{1}{2}\log 2$ (b) $\frac{1}{4}\log 2$

(c) $\frac{1}{3}\log 2$ (d) इनमें से कोई नहीं

57. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ का मान है [SCRA 1980]

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$

(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\tan^{-1} e+\frac{\pi}{4}$

58. $\int_1^e \frac{1+\log x}{x}dx =$ [SCRA 1986]

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{e}$ (d) इनमें से कोई नहीं

59. यदि $\int_0^1 x\log\left(1+\frac{x}{2}\right)dx = a+b\log\frac{2}{3}$, तो [SCRA 1986]

(a) $a=\frac{3}{2},\ b=\frac{3}{2}$ (b) $a=\frac{3}{4},\ b=-\frac{3}{4}$

(c) $a=\frac{3}{4},\ b=\frac{3}{2}$ (d) $a=b$

60. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}$ बराबर है [SCRA 1986]

(a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (b) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

(c) $\frac{8\sqrt{2}}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

61. $\int_0^{\pi/4} \frac{4\sin 2\theta\,d\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta} =$ [SCRA 1986]

(a) $\pi/4$ (b) $\pi/2$

(c) π (d) इनमें से कोई नहीं

62. $\int_0^1 \frac{e^x(x-1)}{(x+1)^3}dx =$ [SCRA 1986]

(a) $\frac{e}{4}$ (b) $\frac{e}{4}-1$

(c) $\frac{e}{4}+1$ (d) इनमें से कोई नहीं

63. यदि $x(x^4+1)\phi(x)=1$, तो $\int_1^2 \phi(x)dx =$ [SCRA 1986]

(a) $\frac{1}{4}\log\frac{32}{17}$ (b) $\frac{1}{2}\log\frac{32}{17}$

(c) $\frac{1}{4}\log\frac{16}{17}$ (d) इनमें से कोई नहीं

64. $\int_{1/4}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} =$ [SCRA 1986]

(a) π (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

65. $\int_0^2 \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ का मान है [SCRA 1992]

(a) $\frac{2}{\log 3}.(3^{\sqrt{2}}-1)$ (b) 0

(c) $2.\frac{\sqrt{2}}{\log 3}$ (d) $\frac{3^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$

66. $\int_0^{2\pi} (\sin x+\cos x)dx =$ [SCRA 1991]

(a) 0 (b) 2

(c) -2 (d) 1

67. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sec x}{1+2\sin^2 x}$ बराबर है [MNR 1994]

(a) $\frac{1}{3}\left[\log(\sqrt{2}+1)+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right]$ (b) $\frac{1}{3}\left[\log(\sqrt{2}+1)-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right]$

(c) $3\left[\log(\sqrt{2}+1)-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right]$ (d) $3\left[\log(\sqrt{2}+1)+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right]$

68. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ का मान है [RPET 1995]

(a) $\pi/2$ (b) $\pi/4$

(c) $\pi/3$ (d) $\pi/6$

69. $\int_1^2 \log x\,dx$ का मान है [Roorkee 1995]

(a) $\log(2/e)$ (b) $\log 4$

(c) $\log(4/e)$ (d) $\log 2$

70. $\int_3^5 \frac{x^2}{x^2-4}dx$ का मान है [Roorkee 1992]

(a) $2-\log_e\left(\frac{15}{7}\right)$

(b) $2+\log_e\left(\frac{15}{7}\right)$

(c) $2+4\log_e 3-4\log_e 7+4\log_e 5$

(d) $2-\tan^{-1}\left(\frac{15}{7}\right)$

71. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x-\cos^2 x\sin^2 x+\sin^4 x} =$

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

72. $\int_0^{\sin^2 x} \sin^{-1}\sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \cos^{-1}\sqrt{t}\, dt =$ [MP PET 2001; Orissa JEE 2005]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) 1

(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) इनमें से कोई नहीं

73. यदि शून्येतर x के लिये, $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-5$; जहाँ $a \neq b$, तो $\int_1^2 f(x)dx =$ [IIT 1996]

(a) $\frac{1}{(a^2+b^2)}\left[a\log 2-5a+\frac{7}{2}b\right]$

(b) $\frac{1}{(a^2-b^2)}\left[a\log 2-5a+\frac{7}{2}b\right]$

(c) $\frac{1}{(a^2-b^2)}\left[a\log 2-5a-\frac{7}{2}b\right]$

(d) $\frac{1}{(a^2+b^2)}\left[a\log 2-5a-\frac{7}{2}b\right]$

74. यदि $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta\, d\theta$, तब $I_8 + I_6$ बराबर है [Kurukshetra CEE 1996]

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{5}$

(c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{7}$

75. $\int_0^{\pi/4} \sec x \log(\sec x + \tan x)\, dx =$

(a) $\frac{1}{2}[\log(1+\sqrt{2})]^2$ (b) $[\log(1+\sqrt{2})]^2$

(c) $\frac{1}{2}[\log(\sqrt{2}-1)]^2$ (d) $[\log(\sqrt{2}-1)]^2$

76. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)(2+\tan x)}dx =$

(a) $\log_e\left(\frac{2}{3}\right)$ (b) $\log_e 3$

(c) $\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{4}{3}\right)$ (d) $\log_e\left(\frac{4}{3}\right)$

77. $\int_0^{2/3} \frac{dx}{4+9x^2} =$ [MP PET 1997]

(a) $\frac{\pi}{12}$ (b) $\frac{\pi}{24}$

(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) 0

78. $\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^2+1}dx$ का मान है [MP PET 1998]

(a) $\frac{1}{6}(3\pi-4)$ (b) $\frac{1}{6}(3-4\pi)$

(c) $\frac{1}{6}(3\pi+4)$ (d) $\frac{1}{6}(3+4\pi)$

79. $\int_0^a x^2 \sin x^3\, dx$ का मान होगा [RPET 1996]

(a) $(1-\cos a^3)$ (b) $3(1-\cos a^3)$

(c) $-\frac{1}{3}(1-\cos a^3)$ (d) $\frac{1}{3}(1-\cos a^3)$

80. $\int_0^{\pi/4} [\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}]dx$ का मान होगा [RPET 1997]

(a) $\sqrt{2}\pi$ (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (d) 2π

81. $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$ का मान होगा [RPET 1997; IIT Screening 2004]

(a) $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ (b) $\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $(\pi+1)$

82. $\int_1^e \frac{1}{x}dx$ का मान होगा [SCRA 1996; Pb. CET 2003]

(a) ∞ (b) 0

(c) 1 (d) $\log(1+e)$

83. $\int_1^x \frac{\log x^2}{x}dx =$ [DCE 1999]

(a) $(\log x)^2$ (b) $\frac{1}{2}(\log x)^2$

(c) $\frac{\log x^2}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

84. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} =$ [SCRA 1986; Karnataka CET 1999]

(a) πab (b) $\pi^2 ab$

(c) $\frac{\pi}{ab}$ (d) $\frac{\pi}{2ab}$

85. $\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)dx + \int_{2\pi}^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\, dx =$ [RPET 2000]

(a) $\sqrt{2}-2$ (b) $2\sqrt{2}-2$

(c) $3\sqrt{2}-2$ (d) $4\sqrt{2}-2$

86. यदि $\left(\int_0^a x\, dx\right) \le (a+4)$, तब [RPET 2000]

(a) $0 \le a \le 4$ (b) $-2 \le a \le 4$

(c) $-2 \le a \le 0$ (d) $a \le -2$ या $a \ge 4$

87. $\int_{-1}^3 \left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\right]dx$ का मान है

[Karnataka CET 2000]

(a) 2π (b) π
(c) $\pi/2$ (d) $\pi/4$

88. $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} =$ [MP PET 2000]

(a) 0 (b) $\pi/4$
(c) $\pi/2$ (d) $-\pi/4$

89. $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx =$ [RPET 2001]

(a) $\pi/4$ (b) $\pi^2/32$
(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

90. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx =$ [DCE 2002]

(a) $\pi/12$ (b) $\pi/6$
(c) $\pi/4$ (d) $\pi/3$

91. $\int_1^3 (x-1)(x-2)(x-3)dx =$ [Karnataka CET 2002]

(a) 3 (b) 2
(c) 1 (d) 0

92. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-x} =$ [EAMCET 2002]

(a) $\log(2/3)$ (b) $\log(1/4)$
(c) $\log(4/3)$ (d) $\log(8/3)$

93. $\int_8^{15} \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}} =$ [UPSEAT 2003]

(a) $\frac{1}{2}\log\frac{5}{3}$ (b) $\frac{1}{3}\log\frac{5}{3}$
(c) $\frac{1}{2}\log\frac{3}{5}$ (d) $\frac{1}{5}\log\frac{3}{5}$

94. $\int_0^{\pi} \left|\sin^3\theta\right| d\theta$ का मान है [UPSEAT 2003]

(a) 0 (b) 3/8
(c) 4/3 (d) π

95. $\int_0^1 \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)dx =$ [EAMCET 2003]

(a) $\pi/6$ (b) $\pi/4$
(c) $\pi/2$ (d) π

96. $\int_0^3 \frac{3x+1}{x^2+9} dx =$ [EAMCET 2003]

(a) $\log(2\sqrt{2})+\frac{\pi}{12}$ (b) $\log(2\sqrt{2})+\frac{\pi}{2}$
(c) $\log(2\sqrt{2})+\frac{\pi}{6}$ (d) $\log(2\sqrt{2})+\frac{\pi}{3}$

97. $\int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^4)}$ का मान है [MP PET 2004]

(a) $\frac{1}{4}\log\frac{17}{32}$ (b) $\frac{1}{4}\log\frac{17}{2}$
(c) $\log\frac{17}{2}$ (d) $\frac{1}{4}\log\frac{32}{17}$

98. $\int_2^3 \frac{x+1}{x^2(x-1)} dx$ का मान है [MP PET 2004]

(a) $2\log 2-\frac{1}{6}$ (b) $\log\frac{16}{9}-\frac{1}{6}$
(c) $\log\frac{4}{3}-\frac{1}{6}$ (d) $\log\frac{16}{9}+\frac{1}{6}$

99. $\int_1^e \log x\, dx$ का मान है [Pb. CET 2001]

(a) 0 (b) 1
(c) $e-1$ (d) $e+1$

100. $I=\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sqrt{1+\sin 2x}} dx$ का मान है [AIEEE 2004]

(a) 3 (b) 1
(c) 2 (d) 0

101. $\int_0^{\pi/8} \cos^3 4\theta\, d\theta =$ [Karnataka CET 2004]

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{4}$
(c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{6}$

102. $\int_3^8 \frac{2-3x}{x\sqrt{(1+x)}} dx$ का मान है [Pb. CET 2004]

(a) $2\log\left(3/2e^3\right)$ (b) $\log(3/e^3)$
(c) $4\log(3/e^3)$ (d) इनमें से कोई नहीं

103. $\int_0^1 x^2 e^x dx$ का मान है [Pb. CET 2002]

(a) $e-2$ (b) $e+2$
(c) e^2-2 (d) e^2

104. माना $I_1=\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ और $I_2=\int_1^2 \frac{dx}{x}$ है, तो [Pb. CET 2004]

(a) $I_1>I_2$ (b) $I_2>I_1$
(c) $I_1=I_2$ (d) $I_1>2I_2$

105. $\int_{1/e}^{\tan x} \frac{t\,dt}{1+t^2}+\int_{1/e}^{\cot x} \frac{dt}{t(1+t^2)} =$ [IIT Screening]

(a) -1 (b) 1
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

106. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{dx}{1+\cos x}$ का मान है [IIT 1999]

(a) 2 (b) -2
(c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

107. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)^2}$ का मान है [J & K 2005]

(a) $2/3$ (b) $1/3$
(c) $3/2$ (d) $\ln 2$

108. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cosec}^2 x dx =$ [Karnataka CET 2005]

(a) -1 (b) 1
(c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

109. यदि $\int_{\log 2}^{x} \frac{du}{(e^u-1)^{1/2}}=\frac{\pi}{6}$, तब $e^x=$ [Orissa JEE 2005]

(a) 1 (b) 2
(c) 4 (d) –1

110. यदि $g(1)=g(2)$, तब $\int_1^2 [f\{g(x)\}]^{-1} f'\{g(x)\}\, g'(x)\,dx$ का मान है [AMU 2005]

(a) 1 (b) 2
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

निश्चित समाकलन के प्रगुण

1. $\int_0^{\pi} x\, f(\sin x) dx =$ [IIT 1982; Kurukshetra CEE 1993]

(a) $\pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$ (b) $\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x) dx$
(c) $\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. $\int_{-4}^{4} |x+2|\, dx =$

(a) 50 (b) 24
(c) 20 (d) इनमें से कोई नहीं

3. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x}}{\sqrt{\cot x}+\sqrt{\tan x}} dx =$

[MP PET 1990, 95; IIT 1983; MNR 1990]

(a) π (b) $\frac{\pi}{2}$
(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

4. $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\tan\theta} =$ [Roorkee 1980; MP PET 1996; DCE 1999]

(a) π (b) $\frac{\pi}{2}$
(c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

5. यदि $f(x)=\int_a^x t^3 e^t\, dt$, तो $\frac{d}{dx} f(x) =$ [MP PET 1989]

(a) $e^x(x^3+3x^2)$ (b) $x^3 e^x$
(c) $a^3 e^a$ (d) इनमें से कोई नहीं

6. $\int_{-1}^{1} x|x|\, dx =$ [MP PET 1990; Pb. CET 2004]

(a) 1 (b) 0
(c) 2 (d) –2

7. $\int_0^{\pi} x \log \sin x\, dx =$

(a) $\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$ (b) $\frac{\pi^2}{2}\log\frac{1}{2}$
(c) $\pi \log\frac{1}{2}$ (d) $\pi^2 \log\frac{1}{2}$

8. $\int_0^{\pi/2} \log \tan x\, dx =$ [MP PET 1999; RPET 2001, 02; Karnataka CET 1999, 2000, 01, 02]

(a) $\frac{\pi}{2}\log_e 2$ (b) $-\frac{\pi}{2}\log_e 2$
(c) $\pi \log_e 2$ (d) 0

9. $\int_0^{\pi/2} \log \sin x\, dx =$ [MP PET 1994; RPET 1995, 96, 97]

(a) $-\left(\frac{\pi}{2}\right)\log 2$ (b) $\pi \log\frac{1}{2}$
(c) $-\pi \log\frac{1}{2}$ (d) $\frac{\pi}{2}\log 2$

10. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin x \cos x} dx =$ [Karnataka CET 2004]

(a) 2 (b) –2
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

11. $\int_{-1}^{1} \log \frac{2-x}{2+x} dx =$ [Roorkee 1986; Kurukshetra CEE 1998]

(a) 2 (b) 1
(c) –1 (d) 0

12. $\int_{-1}^{1} x^{17} \cos^4 x\, dx =$ [MP PET 1990]

(a) –2 (b) –1
(c) 0 (d) 2

13. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{3/2} x\, dx}{\cos^{3/2} x + \sin^{3/2} x} =$

[Roorkee 1989; BIT Ranchi 1989]

(a) 0 (b) π
(c) $\pi/2$ (d) $\pi/4$

14. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}\, dx =$

(a) 0 (b) 2
(c) $\frac{1}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

15. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \log\left(\frac{2-\sin\theta}{2+\sin\theta}\right) d\theta =$

(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

16. यदि $f(x)=\begin{cases} 4x+3, & \text{यदि } 1\le x\le 2 \\ 3x+5, & \text{यदि } 2<x\le 4 \end{cases}$ तो $\int_1^4 f(x) dx =$

(a) 80 (b) 20
(c) –20 (d) 37

17. $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta) d\theta =$

[SCRA 1986; Karnataka CET 2000, 05]

(a) $\frac{\pi}{4}\log 2$ (b) $\frac{\pi}{4}\log\frac{1}{2}$
(c) $\frac{\pi}{8}\log 2$ (d) $\frac{\pi}{8}\log\frac{1}{2}$

18. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{a-b\cos\theta} d\theta =$ [Roorkee 1988]

(a) 1 (b) 2
(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) 0

19. $\int_0^1 f(1-x) dx$ का मान बराबर है [SCRA 1990]

(a) $\int_0^1 f(x) dx$ (b) $\int_0^1 f(-x) dx$
(c) $\int_0^1 f(x-1) dx$ (d) $\int_{-1}^1 f(x) dx$

20. वह छोटे से छोटा अन्तराल $[a, b]$ जिसके लिए $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \in [a, b]$ है, है

(a) $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ (b) $[0, 1]$

(c) $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ (d) $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$

21. माना f सभी जगह सतत् है, तो $\frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f\left(\frac{x}{c}\right)dx =$

(a) $\int_a^b f\left(\frac{x}{c}\right)dx$ (b) $\frac{1}{c}\int_a^b f(x)dx$

(c) $\int_a^b f(x)dx$ (d) इनमें से कोई नहीं

22. $\int_{-1/2}^{1/2}(\cos x)\left[\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]dx =$ [Karnataka CET 2002]

(a) 0 (b) 1

(c) $e^{1/2}$ (d) $2e^{1/2}$

23. $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$ का मान है [MP PET 2003]

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

24. यदि $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$, तो [SCRA 1990]

(a) $f(x) = f(-x)$ (b) $f(-x) = -f(x)$

(c) $f(x) = 2f(x)$ (d) इनमें से कोई नहीं

25. $\int_{-1}^{1}|1-x|\,dx =$ [Karnataka CET 2004]

(a) – 2 (b) 0

(c) 2 (d) 4

26. यदि n एक धनात्मक पूर्णांक है तथा $[x]$ महत्तम पूर्णांक है जो x से बड़ा नहीं है, तब $\int_0^n \{x-[x]\}\,dx =$ [AMU 1999]

(a) $n^2/2$ (b) $n(n-1)/2$

(c) $n/2$ (d) $\frac{n^2}{2}-n$

27. $\int_0^\pi x\sin^3 x\,dx =$ [Kurukshetra CEE 1993]

(a) $\frac{4\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

28. $\int_{-2}^{2}|1-x^2|\,dx =$

[IIT 1989; BIT Mesra 1996; Kurukshetra CEE 1998; MP PET 2002; Kerala (Engg.) 2002]

(a) 2 (b) 4

(c) 6 (d) 8

29. $\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx =$ [MNR 1989; UPSEAT 2002]

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) इनमें से कोई नहीं

30. $\int_0^{\pi/2}\frac{x\sin x\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx =$ [IIT 1985]

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{8}$

(c) $\frac{\pi^2}{8}$ (d) $\frac{\pi^2}{16}$

31. $\int_0^{\pi/2}\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$ का सही मूल्यांकन है [MP PET 1993]

(a) $2+\sqrt{2}$ (b) $2-\sqrt{2}$

(c) $-2+\sqrt{2}$ (d) 0

32. $\int_0^a f(x)dx =$ [BIT Ranchi 1992]

(a) $\int_0^a f(a+x)dx$ (b) $\int_0^a f(2a+x)dx$

(c) $\int_0^a f(x-a)dx$ (d) $\int_0^a f(a-x)dx$

33. $\int_0^{\pi/2}|\sin x-\cos x|\,dx =$

[Roorkee 1990; MP PET 2001; UPSEAT 2001]

(a) 0 (b) $2(\sqrt{2}-1)$

(c) $\sqrt{2}-1$ (d) $2(\sqrt{2}+1)$

34. $\int_0^\pi|\cos x|\,dx =$ [MP PET 1998; Pb. CET 2001]

(a) π (b) 0

(c) 2 (d) 1

35. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin^{-4}x\,dx$ का मान है

[IIT Screening; MP PET 2003]

(a) 3/2 (b) –8/3

(c) 3/8 (d) 8/3

36. $\int_0^{1.5}[x^2]dx$, जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन प्रदर्शित करता है, का मान है [IIT 1988; DCE 2000, 01]

(a) $2+\sqrt{2}$ (b) $2-\sqrt{2}$

(c) $-2+\sqrt{2}$ (d) $-2-\sqrt{2}$

37. $\int_0^\pi\frac{x\tan x}{\sec x+\tan x}dx =$ [MNR 1984]

(a) $\frac{\pi}{2}-1$ (b) $\pi\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$

(c) $\frac{\pi}{2}+1$ (d) $\pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

38. $\int_0^\pi\frac{x\tan x}{\sec x+\cos x}dx =$

[MNR 1985; BIT Ranchi 1986; UPSEAT 2002]

(a) $\frac{\pi^2}{4}$ (b) $\frac{\pi^2}{2}$

(c) $\frac{3\pi^2}{2}$ (d) $\frac{\pi^2}{3}$

39. $\int_{-1}^{1} \sin^3 x \cos^2 x\, dx =$ [MNR 1991; UPSEAT 2000]

(a) 0 (b) 1

(c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

40. किसी भी पूर्णांक n के लिए,

$\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x} \cos^3 (2n+1)x\, dx$ का मान है [MNR 1982]

(a) -1 (b) 0

(c) 1 (d) π

41. $\int_{1/e}^{e} |\log x|\, dx =$ [UPSEAT 2001]

(a) $1-\frac{1}{e}$ (b) $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$

(c) $e^{-1}-1$ (d) इनमें से कोई नहीं

42. $\int_0^{\pi/2} \{x - [\sin x]\}\, dx =$ [AMU 1999]

(a) $\frac{\pi^2}{8}$ (b) $\frac{\pi^2}{8}-1$

(c) $\frac{\pi^2}{8}-2$ (d) इनमें से कोई नहीं

43. समाकल $I = \int_0^1 x(1-x)^n dx$ का मान है [AIEEE 2003]

(a) $\frac{1}{n+1}$ (b) $\frac{1}{n+2}$

(c) $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$ (d) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$

44. $\int_{\pi}^{2\pi} [2\sin x] dx$ का मान, जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन है, होगा [IIT 1995]

(a) $-\pi$ (b) -2π

(c) $-\frac{5\pi}{3}$ (d) $\frac{5\pi}{3}$

45. यदि फलन $f(x)$ आर्वत T में सतत् फलन है, तो समाकलन $I = \int_a^{a+T} f(x) dx$

(a) $2a$ के बराबर है (b) $3a$ के बराबर है

(c) a से स्वतंत्र है (d) इनमें से कोई नहीं

46. यदि $\int_0^{\pi} x\, f(\cos^2 x + \tan^4 x) dx$

$= k\int_0^{\pi/2} f(\cos^2 x + \tan^4 x) dx$, तो k का मान होगा

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) π

(c) $-\frac{\pi}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

47. $\int_{-3}^{3} \frac{x^2 \sin x}{1+x^6} dx =$

(a) 4 (b) 2

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

48. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\tan^3 x}$ का मान है [IIT 1993; DCE 2000, 01]

(a) 0 (b) 1

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

49. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\phi}{1+\sin\phi} d\phi$, का मान है [AI CBSE 1990; IIT 1993]

(a) $\pi \tan\frac{\pi}{8}$ (b) $\log \tan\frac{\pi}{8}$

(c) $\tan\frac{\pi}{8}$ (d) इनमें से कोई नहीं

50. यदि $f(a+b-x) = f(x)$, तो $\int_a^b x\, f(x) dx$ बराबर है [Kurukshetra CEE 1993; AIEEE 2003]

(a) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(b-x) dx$ (b) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x) dx$

(c) $\frac{b-a}{2}\int_a^b f(x) dx$ (d) इनमें से कोई नहीं

51. $\int_0^{\pi} x \sin x\, dx =$ [SCRA 1980, 91]

(a) π (b) 0

(c) 1 (d) π^2

52. यदि $\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\, dx = k\pi$, तो k का मान है [AISSE 1986; SCRA 1986]

(a) $-a$ (b) $-2a$

(c) $2a$ (d) a

53. यदि $\int_0^{2a} f(x) dx = 2\int_0^{a} f(x) dx$, तो [SCRA 1986]

(a) $f(2a-x) = -f(x)$ (b) $f(2a-x) = f(x)$

(c) $f(a-x) = -f(x)$ (d) $f(a-x) = f(x)$

54. यदि $I = \int_0^{\pi/4} \sin^2 x\, dx$ एवं $J = \int_0^{\pi/4} \cos^2 x\, dx$, तो $I =$ [SCRA 1989]

(a) $\frac{\pi}{4} - J$ (b) $2J$

(c) J (d) $\frac{J}{2}$

55. $\int_1^5 (|x-3| + |1-x|)\, dx$ का मान है [IIT Screening]

(a) 10 (b) $\frac{5}{6}$

(c) 21 (d) 12

56. $\int_2^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}} dx$ का मान है [IIT 1994; Kurukshetra CEE 1998]

(a) 1 (b) 0

(c) -1 (d) $\frac{1}{2}$

57. $\int_0^{\pi} e^{\cos^2 x} \cos^5 3x\, dx$ का मान है [Bihar CEE 1994]

(a) 1 (b) -1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

58. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}} dx$ का मान है

[RPET 1995; Kurukshetra CEE 1998]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{6}$ (d) 1

59. $\int_{-1}^{1} \frac{\sin x - x^2}{3-|x|} dx$ का मान है [Roorkee 1995]

(a) 0 (b) $2\int_0^1 \frac{\sin x}{3-|x|} dx$

(c) $2\int_0^1 \frac{-x^2}{3-|x|} dx$ (d) $2\int_0^1 \frac{\sin x - x^2}{3-|x|} dx$

60. $\int_{-1}^{1} \sin^{11} x \, dx$ का मान है [MNR 1995]

(a) $\frac{10}{11}.\frac{8}{9}.\frac{6}{7}.\frac{4}{5}.\frac{2}{3}$ (b) $\frac{10}{11}.\frac{8}{9}.\frac{6}{7}.\frac{4}{5}.\frac{2}{3}.\frac{\pi}{2}$

(c) 1 (d) 0

61. यदि $(n-m)$ विषम है व $|m| \neq |n|$, तब $\int_0^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx =$

(a) $\frac{2n}{n^2-m^2}$ (b) 0

(c) $\frac{2n}{m^2-n^2}$ (d) $\frac{2m}{n^2-m^2}$

62. $\int_{-2}^{2} (px^2+qx+s) dx$ का आंकिक मान ज्ञात करने के लिए निम्न नियतांकों के मान की आवश्यकता है [IIT 1992]

(a) p (b) q

(c) s (d) p तथा s

63. यदि $I = \int_0^{100\pi} \sqrt{(1-\cos 2x)} \, dx$, तब I का मान है

(a) $100\sqrt{2}$ (b) $200\sqrt{2}$

(c) $50\sqrt{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

64. $\int_{-1}^{1} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx =$ [MP PET 1995; Pb. CET 2000]

(a) 2 (b) 1

(c) 0 (d) π

65. यदि $\int_{-1}^{4} f(x) dx = 4$ व $\int_2^4 (3-f(x)) dx = 7$, तो $\int_2^{-1} f(x) dx =$

(a) 2 (b) – 3

(c) – 5 (d) इनमें से कोई नहीं

66. फलन $F(x) = \int_0^x \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx$

(a) एक सम फलन है (b) एक विषम फलन है

(c) एक आवर्ती फलन है (d) इनमें से कोई नहीं

67. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+e^x} dx =$ [EAMCET 1992]

(a) 1 (b) 0

(c) -1 (d) इनमें से कोई नहीं

68. $\int_{-1}^{1} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}) dx =$

(a) 0 (b) 1

(c) -1 (d) इनमें से कोई नहीं

69. $\int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{4+3\sin x}{4+3\cos x}\right) dx =$

(a) 2 (b) $\frac{3}{4}$

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

70. $\int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{1+x-x^2}\right) dx =$

(a) 1 (b) 0

(c) -1 (d) इनमें से कोई नहीं

71. $\int_0^{2\pi} \cos^{99} x \, dx =$

(a) 1 (b) -1

(c) 99 (d) 0

72. यदि $[x]$ महत्तम पूर्णांक प्रदर्शित करता है, तब $\int_0^2 x^2[x] dx$ का मान है

[Kurukshetra CEE 1996; Pb. CET 2001]

(a) 5/3 (b) 7/3

(c) 8/3 (d) 4/3

73. $\int_0^{\pi} \cos^3 x \, dx =$ [MP PET 1996; Pb. CET 2002]

(a) -1 (b) 0

(c) 1 (d) π

74. $\int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx =$

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 4

75. $\int_{-3}^{3} \frac{x^2 \sin 2x}{x^2+1} dx =$

(a) 0 (b) 1

(c) $2\log_e 3$ (d) इनमें से कोई नहीं

76. $\int_0^{\pi} \log \sin^2 x \, dx =$ [MP PET 1997]

(a) $2\pi \log_e\left(\frac{1}{2}\right)$ (b) $\pi \log_e 2 + c$

(c) $\frac{\pi}{2} \log_e\left(\frac{1}{2}\right) + c$ (d) इनमें से कोई नहीं

77. यदि $f(x)$, x का एक विषम फलन है, तब $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx =$

[MP PET 1998]

(a) 0 (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$

(c) $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$ (d) $\int_0^{\pi} f(\cos x) dx$

78. $\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$ का मान है [MP PET 1999]

(a) π (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

79. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ का मान होगा

[RPET 1996; Kerala (Engg.) 2002]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$

(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

80. $\int_{-1}^{1} x \tan^{-1} x\, dx$ का मान होगा [RPET 1997]

(a) $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ (b) $\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$

(c) $(\pi-1)$ (d) 0

81. $\int_{-a}^{a} \sin x\, f(\cos x) dx$ का मान होगा [RPET 1997]

(a) $2\int_0^a \sin x\, f(\cos x) dx$ (b) 0

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

82. $\int_0^{2\pi} |\sin^3\theta|\, d\theta$ का मान होगा [Roorkee Qualifying 1998]

(a) 0 (b) $3/8$

(c) $8/3$ (d) π

83. $\int_{-1}^{2} |x|\, dx =$ [DCE 1999]

(a) 5/2 (b) 1/2

(c) 3/2 (d) 7/2

84. $\int_0^3 |2-x|\, dx =$ [RPET 1999]

(a) 2/7 (b) 5/2

(c) 3/2 (d) $-3/2$

85. $\int_0^{\pi/2} \frac{2^{\sin x}}{2^{\sin x}+2^{\cos x}} dx =$

[Karnataka CET 1999; Kerala (Engg.) 2005]

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) π (d) 2π

86. $\int_0^1 |3x^2-1|\, dx$ का मान है [AMU 1999]

(a) 0 (b) $4/(3\sqrt{3})$

(c) 3/7 (d) 5/6

87. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} e^{-\cos^2 x} dx =$ [AMU 1999]

(a) $2e^{-1}$ (b) 1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

88. यदि $f(x) = f(2-x)$, तब $\int_{0.5}^{1.5} x f(x) dx =$ [AMU 1999]

(a) $\int_0^1 f(x) dx$ (b) $\int_{0.5}^{1.5} f(x) dx$

(c) $2\int_{0.5}^{1.5} f(x) dx$ (d) 0

89. $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}+e^{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}} dx$ का मान है [AMU 1999]

(a) $\pi/4$ (b) $\pi/2$

(c) $e^{\pi^2/16}$ (d) $e^{\pi^2/4}$

90. यदि $[x]$ महत्तम पूर्णांक, जो x से कम या x के बराबर है, तब $\int_1^5 [|x-3|]\, dx$ का मान होगा [Roorkee 1999]

(a) 1 (b) 2

(c) 4 (d) 8

91. $\int_{-2}^{2} |x|\, dx =$ [MP PET 2000]

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 4

92. यदि x के सभी वास्तविक मानों के लिए फलन f इस प्रकार है कि $f(-x) = -f(x)$ तथा $\int_0^1 f(x) dx = 5$, तब $\int_{-1}^{0} f(t) dt =$

[MP PET 2000]

(a) 10 (b) 5

(c) 0 (d) -5

93. यदि $I_1 = \int_a^{\pi-a} x f(\sin x) dx$ तथा $I_2 = \int_a^{\pi-a} f(\sin x) dx$, तब $I_2 =$

[AMU 2000]

(a) $\frac{\pi}{2} I_1$ (b) πI_1

(c) $\frac{2}{\pi} I_1$ (d) $2I_1$

94. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx =$ [AMU 2000]

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) $\ln 3$

95. $\int_{e^{-1}}^{e^2} \left|\frac{\log_e x}{x}\right| dx =$ [IIT Screening 2000]

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{5}{2}$

(c) 3 (d) 5

96. यदि $f(x) = \begin{cases} e^{\cos x} \sin x, & |x| \le 2 \\ 2, & \text{अन्यथा} \end{cases}$, तब $\int_{-2}^{3} f(x) dx =$

[IIT Screening 2000]

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 3

97. यदि $f: R \to R$ और $g: R \to R$ एकैकी वास्तविक फलन है, तब $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)+f(-x)][g(x)-g(-x)] dx =$

[DCE 2001; MP PET 2004]

(a) 0 (b) π

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

98. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1+\sqrt{\cot x}} =$ [DCE 2001]

(a) $\pi/3$ (b) $\pi/6$

(c) $\pi/12$ (d) $\pi/2$

99. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2/3} x}{\sin^{2/3} x + \cos^{2/3} x} dx =$ [RPET 2001]

(a) $\pi/4$ (b) $\pi/2$

(c) $3\pi/4$ (d) π

100. $\int_{-1}^{1} \log(x+\sqrt{x^2+1}) dx =$ [MP PET 2001]

(a) 0 (b) log 2

(c) $\log\frac{1}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

101. समाकलन $\int_{-\pi}^{\pi}(\cos ax-\sin bx)^2\,dx$ का मान होगा (जबकि a व b पूर्णांक हैं) [UPSEAT 2001]

(a) $-\pi$ (b) 0

(c) π (d) 2π

102. $\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx$ = [AMU 2001]

(a) 0 (b) 2

(c) 1 (d) -1

103. $\int_0^{2a} f(x)dx=$ [RPET 2002]

(a) $2\int_0^a f(x)dx$

(b) 0

(c) $\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(2a-x)dx$

(d) $\int_0^a f(x)dx+\int_0^{2a} f(2a-x)dx$

104. $\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x}\cos^3 x\,dx$ = [MP PET 2002]

(a) -1 (b) 0

(c) 1 (d) π

105. $\int_0^9[\sqrt{x}+2]dx$ का मान होगा जहाँ [.] एक महत्तम पूर्णांक फलन है [UPSEAT 2002]

(a) 31 (b) 22

(c) 23 (d) इनमें से कोई नहीं

106. $\int_0^{\sqrt{2}}[x^2]dx$, (जहाँ [.] एक महत्तम पूर्णांक फलन है) [AIEEE 2002]

(a) $2-\sqrt{2}$ (b) $2+\sqrt{2}$

(c) $\sqrt{2}-1$ (d) $\sqrt{2}-2$

107. $\int_0^{1000} e^{x-[x]}dx$ = [AMU 2002]

(a) $e^{1000}-1$ (b) $\frac{e^{1000}-1}{e-1}$

(c) $1000(e-1)$ (d) $\frac{e-1}{1000}$

108. $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{an-1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x}}\,dx$ का मान है [AMU 2002]

(a) $\frac{a}{2}$ (b) $\frac{na+2}{2n}$

(c) $\frac{na-2}{2n}$ (d) इनमें से कोई नहीं

109. $\int_0^{\pi/2}\sin 2x\log\tan x\,dx$ =

[Kerala (Engg.) 2002; AI CBSE 1990; Karnataka CET 1996, 98]

(a) π (b) $\pi/2$

(c) 0 (d) 2π

110. $\int_{-1/2}^{1/2}\left\{[x]+\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right\}dx$, (जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन है) का मान है [IIT Screening 2002]

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) 0

(c) 1 (d) $2\log\frac{1}{2}$

111. $\int_0^{2\pi}(\sin x+|\sin x|)\,dx=$ [Karnataka CET 2003]

(a) 0 (b) 4

(c) 8 (d) 1

112. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(3\sin x+\sin^3 x)dx$ का मान है [MP PET 2003]

(a) 3 (b) 2

(c) 0 (d) $\frac{10}{3}$

113. $I=\int_0^1 x\left|x-\frac{1}{2}\right|dx$ का मान है [UPSEAT 2003]

(a) 1/3 (b) 1/4

(c) 1/8 (d) इनमें से कोई नहीं

114. $\int_0^8|x-5|\,dx$ का मान है [UPSEAT 2003]

(a) 17 (b) 12

(c) 9 (d) 18

115. $\int_0^2|x-1|\,dx=$ [SCRA 1990; RPET 2001; UPSEAT 2003]

(a) 0 (b) 2

(c) 1/2 (d) 1

116. $\int_{-2}^{2}\big|[x]\big|dx=$ [EAMCET 2003]

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

117. $\int_0^1\tan^{-1}\left(\frac{1}{x^2-x+1}\right)dx$ = [Orissa JEE 2003]

(a) ln 2 (b) $-\ln 2$

(c) $\frac{\pi}{2}+\ln 2$ (d) $\frac{\pi}{2}-\ln 2$

118. $\int_a^b\frac{x}{|x|}dx,\ a<b<0$ का मान है [Orissa JEE 2003]

(a) $-(|a|+|b|)$ (b) $|b|-|a|$

(c) $|a|-|b|$ (d) $|a|+|b|$

119. $\int_{-2}^{2}\left[p\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+q\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-2}+r\right]dx$ का मान निर्भर करता है [Orissa JEE 2003]

(a) p के मान पर (b) q के मान पर

(c) r के मान पर (d) p तथा q के मान पर

120. $\int_0^{\pi}\frac{xdx}{1+\sin x}$ का मान है [UPSEAT 2004]

(a) $-\pi$ (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) π (d) इनमें से कोई नहीं

121. $\int_{-2}^{3}|1-x^2|\,dx$ का मान है [AIEEE 2004]

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{14}{3}$

(c) $\frac{7}{3}$ (d) $\frac{28}{3}$

122. यदि $f(x)=|x-1|$, तब $\int_0^2 f(x)dx$ का मान है [Orissa JEE 2004]

(a) 1 (b) 0

(c) 2 (d) –2

123. यदि $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx = A\int_0^{\pi/2}f(\sin x)dx$, तब A का मान है [AIEEE 2004]

(a) 2π (b) π

(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) 0

124. $\int_0^{\pi/2}(\sin x-\cos x)\log(\sin x+\cos x)\,dx =$ [SCRA 1986]

(a) -1 (b) 1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

125. फलन $L(x)=\int_1^x\frac{dt}{t}$ निम्न समीकरण को सन्तुष्ट करता है [IIT 1996; DCE 2001]

(a) $L(x+y)=L(x)+L(y)$ (b) $L\left(\frac{x}{y}\right)=L(x)+L(y)$

(c) $L(xy)=L(x)+L(y)$ (d) इनमें से कोई नहीं

126. $\int_0^1 e^{x^2}dx$ का मान निम्न अन्तराल में है [CEE 1993]

(a) (0, 1) (b) (–1, 0)

(c) (1, e) (d) इनमें से कोई नहीं

127. यदि $P=\int_0^{3\pi}f(\cos^2 x)dx$ और $Q=\int_0^{\pi}f(\cos^2 x)dx$, तब [Orissa JEE 2004]

(a) $P-Q=0$ (b) $P-2Q=0$

(c) $P-3Q=0$ (d) $P-5Q=0$

128. माना a, b, c अशून्य वास्तविक संख्यायें इस प्रकार हैं कि

$\int_0^3(3ax^2+2bx+c)dx=\int_1^3(3ax^2+2bx+c)dx$, तो [BIT Ranchi 1991]

(a) $a+b+c=3$ (b) $a+b+c=1$

(c) $a+b+c=0$ (d) $a+b+c=2$

129. $\int_{-\pi}^{\pi}(\cos px-\sin qx)^2\,dx$, जहाँ p व q पूर्णांक हैं, का मान होगा [IIT 1992]

(a) $-\pi$ (b) 0

(c) π (d) 2π

130. यदि $g(x)=\int_0^x\cos^4 t\,dt$, तब $g(x+\pi)$ का मान होगा

[IIT 1997 Re-Exam; DCE 2001; UPSEAT 2001; Pb. CET 002]

(a) $g(x)+g(\pi)$ (b) $g(x)-g(\pi)$

(c) $g(x)g(\pi)$ (d) $g(x)/g(\pi)$

131. $\int_0^1(1+e^{-x^2})\,dx$ का मान है [IIT 1981]

(a) -1 (b) 2

(c) $1+e^{-1}$ (d) इनमें से कोई नहीं

132. $\int_0^{2a}\frac{f(x)}{f(x)+f(2a-x)}dx =$ [IIT 1988; Karnataka CET 2000]

(a) a (b) $\frac{a}{2}$

(c) $2a$ (d) 0

133. $\int_0^{n\pi+v}|\sin x|\,dx$ का मान है [IIT 1994]

(a) $2n+1+\cos v$ (b) $2n+1-\cos v$

(c) $2n+1$ (d) $2n+\cos v$

134. यदि $u_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n x\,dx$, तब u_n+u_{n-2} का मान होगा [UPSEAT 2002]

(a) $\frac{1}{n-1}$ (b) $\frac{1}{n+1}$

(c) $\frac{1}{2n-1}$ (d) $\frac{1}{2n+1}$

135. $\int_0^1\log\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx =$ [RPET 1997]

(a) $-\log 2$ (b) $\log 2$

(c) $\frac{\pi}{2}\log 2$ (d) $-\frac{\pi}{2}\log 2$

136. $\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^2 d\theta =$

(a) $\pi\log 2$ (b) $\frac{\pi}{\log 2}$

(c) π (d) इनमें से कोई नहीं

137. $\int_0^1\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$ [BIT Ranchi 1984]

(a) $\frac{\pi}{2}\log 2$ (b) $\pi\log 2$

(c) $-\frac{\pi}{2}\log 2$ (d) $-\pi\log 2$

138. $\int_0^{\pi/2}x\cot x\,dx$ का मान है [RPET 1997]

(a) $-\frac{\pi}{2}\log 2$ (b) $\frac{\pi}{2}\log 2$

(c) $\pi\log 2$ (d) $-\pi\log 2$

139. $\int_{-2}^{0}\left[x^3+3x^2+3x+3+(x+1)\cos(x+1)\right]dx$ का समाकलन है [IIT Screening 2005]

(a) 2 (b) 4

(c) 0 (d) 8

140. यदि $\int_{\sin x}^{1}t^2 f(t)\,dt=1-\sin x$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ तब $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ का मान है [IIT Screening 2005]

(a) 3 (b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{3}$

141. $\int_0^{2n\pi}\left(|\sin x|-\left|\frac{1}{2}\sin x\right|\right)dx$ का मान है [Orissa JEE 2005]

(a) n (b) $2n$

(c) $-2n$ (d) इनमें से कोई नहीं

142. $\int_{-a}^{a} \frac{1}{x+x^3} dx$ का मान है [AMU 2005]

(a) 0 (b) $\int_0^a \frac{1}{1+x^6} dx$

(c) $2\int_0^a \frac{1}{1+x^3} dx$ (d) $\int_0^a \frac{1}{1+(a-x)^3} dx$

143. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} =$ [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $\pi/12$ (b) $\pi/2$

(c) $\pi/6$ (d) $\pi/4$

(e) $2\pi/3$

144. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x} dx =$ [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $\pi/4$ (b) $\pi/2$

(c) $3\pi/2$ (d) 2π

(e) π

145. यदि f सतत् फलन हो, तब [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_0^2 [f(x)-f(-x)]dx$

(b) $\int_{-3}^{5} 2f(x)dx = \int_{-6}^{10} f(x-1)dx$

(c) $\int_{-3}^{5} f(x)dx = \int_{-4}^{4} f(x-1)dx$

(d) $\int_{-3}^{5} f(x)dx = \int_{-2}^{6} f(x-1)dx$

(e) $\int_{-3}^{5} f(x)dx = \int_{-6}^{10} f(x/2)dx$

निश्चित समाकलन द्वारा श्रेणी का योगफल, गामा फलन, लैबनीज का नियम

1. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{1+n^2}+\frac{n}{4+n^2}+\frac{n}{9+n^2}+....+\frac{1}{2n}\right]$ का मान है [Bihar CEE 1994]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1^3+n^3}+\frac{4}{2^3+n^3}+....+\frac{1}{2n}$ का मान है [RPET 1997]

(a) $\frac{1}{3}\log_e 3$ (b) $\frac{1}{3}\log_e 2$

(c) $\frac{1}{3}\log_e \frac{1}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{1^{99}+2^{99}+3^{99}+.......n^{99}}{n^{100}} =$ [EAMCET 1994]

(a) $\frac{99}{100}$ (b) $\frac{1}{100}$

(c) $\frac{1}{99}$ (d) $\frac{1}{101}$

4. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n!}{n^n}\right]^{1/n}$ का मान होगा [Kurukshetra CEE 1998]

(a) e (b) $1/e$

(c) $\pi/4$ (d) $4/\pi$

5. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{2n}\frac{r}{\sqrt{n^2+r^2}}$ का मान होगा [IIT 1997 Re-exam]

(a) $1+\sqrt{5}$ (b) $-1+\sqrt{5}$

(c) $-1+\sqrt{2}$ (d) $1+\sqrt{2}$

6. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+.....\frac{1}{2n}\right]=$ [Karnataka CET 1999]

(a) 0 (b) $\log_e 4$

(c) $\log_e 3$ (d) $\log_e 2$

7. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$ का मान है [Roorkee 1999]

(a) $\frac{1}{2}\log 2$ (b) $\log 2$

(c) $\pi/4$ (d) $\pi/2$

8. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+.....+\frac{1}{\sqrt{n^2+(n-1)n}}\right]$ का मान है [RPET 2000]

(a) $2+2\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{2}-2$

(c) $2\sqrt{2}$ (d) 2

9. $\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+.....+n^p}{n^{p+1}} =$ [AIEEE 2002]

(a) $\frac{1}{p+1}$ (b) $\frac{1}{1-p}$

(c) $\frac{1}{p}-\frac{1}{p-1}$ (d) $\frac{1}{P+2}$

10. $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n}e^{\frac{r}{n}}$ का मान है [AIEEE 2004]

(a) $e+1$ (b) $e-1$

(c) $1-e$ (d) e

11. $\int_0^{\infty}\frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}dx =$

(a) $\pi\log\frac{1}{2}$ (b) $\pi\log 2$

(c) $2\pi\log\frac{1}{2}$ (d) $2\pi\log 2$

12. $\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\cos^3 x\,dx =$ [RPET 1984, 2003]

(a) 0 (b) $\frac{2}{15}$

(c) $\frac{4}{15}$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 x\,dx =$

(a) π (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$ (d) $\pi-1$

14. $\int_0^{\pi}\left|\sin^4 x\right|dx$ का सही मूल्यांकन है [MP PET 1993]

(a) $\frac{8\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$

(c) $\frac{4\pi}{3}$ (d) $\frac{3\pi}{8}$

15. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx =$

(a) $1-\frac{\pi}{4}$ (b) $1+\frac{\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

16. $F_1(x)=\int_2^x (2t-5)dt$ तथा $F_2(x)=\int_0^x 2t\,dt$ का प्रतिच्छेद बिन्दु है [IIT Screening]

(a) $\left(\frac{6}{5},\frac{36}{25}\right)$ (b) $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{9}\right)$

(c) $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{9}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{5},\frac{1}{25}\right)$

17. $\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} =$

(a) $\frac{\pi}{2(a-b)}$ (b) $\frac{\pi}{2(b-a)}$

(c) $\frac{\pi}{(a+b)}$ (d) $\frac{\pi}{2(a+b)}$

18. $\int_0^{\infty} \frac{x^3\,dx}{(x^2+4)^2} =$

(a) 0 (b) ∞

(c) $\frac{1}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

19. $\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x\, dx =$

(a) $\frac{2(m\,!)}{(2^m.m\,!)^2}.\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{(2m)\,!}{(2^m.m\,!)^2}.\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{2m\,!}{2^m.(m\,!)^2}.\frac{\pi}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

20. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\, dx =$

(a) $\frac{8}{15}$ (b) $\frac{4}{15}$

(c) $\frac{8\sqrt{\pi}}{15}$ (d) $\frac{8\pi}{15}$

21. $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{(1+x)(1+x^2)} =$

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$

(c) $\frac{\pi}{6}$ (d) इनमें से कोई नहीं

22. यदि $\phi(x)=\int_{1/x}^{\sqrt{x}} \sin(t^2)dt$, तो $\phi'(1)$ का मान है

(a) $\sin 1$ (b) $2\sin 1$

(c) $\frac{3}{2}\sin 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

23. $\int_0^1 \frac{x^b-1}{\log x}dx$ का मान है

(a) $\log b$ (b) $2\log(b+1)$

(c) $3\log b$ (d) इनमें से कोई नहीं

24. $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{1}{x}\right)dx$ का मान है

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $-\frac{\pi}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

25. फलन $F(x)=\int_{5\pi/4}^{x}(3\sin u+4\cos u)du$ का अन्तराल $\left[\frac{5\pi}{4},\frac{4\pi}{3}\right]$ में न्यूनतम मान है

(a) $\sqrt{3}+\frac{3}{2}$ (b) $-2\sqrt{3}+\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$

(c) $\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

26. $\int_0^{\infty} e^{-2x}(\sin 2x+\cos 2x)dx =$

(a) 1 (b) 0

(c) $\frac{1}{2}$ (d) ∞

27. $\int_0^{b-c} f''(x+a)dx =$ [SCRA 1990]

(a) $f'(a)-f'(b)$ (b) $f'(b-c+a)-f'(a)$

(c) $f'(b+c-a)+f'(a)$ (d) इनमें से कोई नहीं

28. अन्तराल $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ में फलन $F(x)=\int_1^x |t|\,dt$ का अधिकतम मान है [IIT Screening]

(a) $\frac{3}{8}$ (b) $-\frac{1}{2}$

(c) $-\frac{3}{8}$ (d) $\frac{2}{5}$

29. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x\cos^2 x(\sin x+\cos x)dx =$ [EAMCET 1992]

(a) $\frac{2}{15}$ (b) $\frac{4}{15}$

(c) $\frac{6}{15}$ (d) $\frac{8}{15}$

30. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^3} =$ [EAMCET 1992]

(a) $\frac{3}{8}$ (b) $\frac{1}{8}$

(c) $-\frac{3}{8}$ (d) इनमें से कोई नहीं

31. $F(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\log t}dt$, $(x>0)$ का अवकलज है

(a) $\frac{1}{3\log x}-\frac{1}{2\log x}$ (b) $\frac{1}{3\log x}$

(c) $\frac{3x^2}{3\log x}$ (d) $(\log x)^{-1}.x(x-1)$

32. यदि $f(x)=\int_{x^2}^{x^2+1} e^{-t^2}dt$, तो $f(x)$ निम्न अन्तराल में वर्धमान है [IIT Screening 2003]

(a) (2, 2) (b) x का कोई मान नहीं

(c) $(0, \infty)$ (d) $(-\infty, 0)$

33. यदि $f(x) = \int_{x^2}^{x^4} \sin\sqrt{t}\, dt$, तो $f'(x)$ =

(a) $\sin x^2 - \sin x$ (b) $4x^3 \sin x^2 - 2x \sin x$

(c) $x^4 \sin x^2 - x \sin x$ (d) इनमें से कोई नहीं

34. यदि $F(x) = \frac{1}{x^2}\int_4^x (4t^2 - 2F'(t))dt$, तो $F'(4)$ =

(a) 32 (b) $\frac{32}{3}$

(c) $\frac{32}{9}$ (d) इनमें से कोई नहीं

35. $\sum_{k=1}^{n} \int_0^1 f(k-1+x)dx$ =

(a) $\int_0^1 f(x)dx$ (b) $\int_0^2 f(x)dx$

(c) $\int_0^n f(x)dx$ (d) $n\int_0^1 f(x)dx$

36. $\int_a^{a+(\pi/2)} (\sin^4 x + \cos^4 x)dx$ =

(a) a से स्वतंत्र (b) $a\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$

(c) $\frac{3\pi}{8}$ (d) $\frac{3\pi a^2}{8}$

37. $\int_0^{\pi} \sin^5\left(\frac{x}{2}\right)dx$ = [Kurukshetra CEE 1996]

(a) $\frac{16}{15}$ (b) $\frac{32}{15}$

(c) $\frac{8}{15}$ (d) $\frac{5}{6}$

38. यदि $\int f(x)dx = xe^{-\log|x|} + f(x)$, तो $f(x)$ है [MP PET 1997]

(a) 1 (b) 0

(c) ce^x (d) $\log x$

39. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^6 x\, dx$ = [RPET 1999]

(a) $\frac{5\pi}{512}$ (b) $\frac{3\pi}{512}$

(c) $\frac{\pi}{512}$ (d) इनमें से कोई नहीं

40. $\int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{\sin\theta}\cos\theta\right)^3 d\theta$ का मान है [AMU 1999]

(a) 2/9 (b) 2/15

(c) 8/45 (d) 5/2

41. $\int_0^{\infty} \log\left(x + \frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1+x^2}$ = [RPET 2000, 02]

(a) $\pi \log 2$ (b) $-\pi \log 2$

(c) $(\pi/2)\log 2$ (d) $-(\pi/2)\log 2$

42. $\int_0^{\infty} \frac{x \ln x\, dx}{(1+x^2)^2}$ = [AMU 2000]

(a) 0 (b) 1

(c) ∞ (d) इनमें से कोई नहीं

43. यदि $f(t) = \int_{-t}^{t} \frac{dx}{1+x^2}$, तब $f'(1)$ = [Roorkee 2000]

(a) 0 (b) 2/3

(c) -1 (d) 1

44. यदि $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \log t\, dt$, $(x > 0)$, तब $F'(x) =$ [MP PET 2001]

(a) $(9x^2 - 4x)\log x$ (b) $(4x - 9x^2)\log x$

(c) $(9x^2 + 4x)\log x$ (d) इनमें से कोई नहीं

45. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 x \cos^6 x\, dx =$ [EAMCET 2002]

(a) $\frac{3\pi}{64}$ (b) $\frac{3\pi}{572}$

(c) $\frac{3\pi}{256}$ (d) $\frac{3\pi}{128}$

46. $\int_0^1 \frac{d}{dx}\left[\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right]dx$ = [Kerala (Engg.) 2002]

(a) 0 (b) π

(c) $\pi/2$ (d) $\pi/4$

47. यदि $f(x) = \int_1^x \sqrt{2-t^2}\, dt$. तब समीकरण $x^2 - f'(x) = 0$ के वास्तविक मूल हैं [IIT Screening 2002]

(a) ± 1 (b) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

(c) $\pm\frac{1}{2}$ (d) 0 तथा 1

48. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{(1+x)(1+x^2)} =$ [Karnataka CET 2003]

(a) 0 (b) $\pi/2$

(c) $\pi/4$ (d) 1

49. $\int_0^a x^4\sqrt{a^2 - x^2}\, dx =$

(a) $\frac{\pi}{32}$ (b) $\frac{\pi}{32}a^6$

(c) $\frac{\pi}{16}a^6$ (d) $\frac{\pi}{8}a^6$

50. $\int_0^a x(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx =$

(a) $a^5\left[\frac{3\pi}{16} - 1\right]$ (b) $a^5\left[\frac{3\pi}{16} + 1\right]$

(c) $a^5\left[\frac{3\pi}{16} - \frac{1}{5}\right]$ (d) इनमें से कोई नहीं

51. $\int_0^a x^2(a^2 - x^2)^{3/2}\, dx =$

(a) $\frac{\pi a^6}{32}$ (b) $\frac{2a^5}{15}$

(c) $\frac{a^6}{32}$ (d) इनमें से कोई नहीं

52. माना $\frac{d}{dx}F(x)=\left(\frac{e^{\sin x}}{x}\right);x>0$. यदि $\int_1^4 \frac{3}{x}e^{\sin x^3}dx = F(k)-F(1)$, तब k के संभावित मानों में से एक है **[AIEEE 2003]**

(a) 15 (b) 16
(c) 63 (d) 64

53. यदि $f(x)=\int_0^x t\sin t\,dt$, तो $f'(x)=$ **[MNR 1982; Karnataka CET 1999]**

(a) $\cos x + x\sin x$ (b) $x\sin x$
(c) $x\cos x$ (d) इनमें से कोई नहीं

54. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}\sec^2\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}\sec^2\frac{4}{n^2}+.....+\frac{1}{n}\sec^2 1\right]=$ **[AIEEE 2005]**

(a) $\tan 1$ (b) $\frac{1}{2}\tan 1$
(c) $\frac{1}{2}\sec 1$ (d) $\frac{1}{2}\text{cosec}\,1$

वक्रों द्वारा परिबद्ध क्षेत्राफल, परिक्रमण ठोस का आयतन व वक्रपृष्ठ

1. वक्र $y=\log x$, $x-$अक्ष और कोटियों $x=1, x=2$ से घिरा क्षेत्रफल है **[MP PET 2004]**

(a) $\log 4$ वर्ग इकाई (b) $(\log 4+1)$ वर्ग इकाई
(c) $(\log 4-1)$ वर्ग इकाई (d) इनमें से कोई नहीं

2. वक्र $y=xe^{x^2}$, $x-$अक्ष तथा कोटियों $x=0$, $x=a$ से घिरा क्षेत्रफल है

(a) $\frac{e^{a^2}+1}{2}$ वर्ग इकाई (b) $\frac{e^{a^2}-1}{2}$ वर्ग इकाई
(c) $\left(e^{a^2}+1\right)$ वर्ग इकाई (d) $\left(e^{a^2}-1\right)$ वर्ग इकाई

3. $x=0$ तथा $x=2\pi$ के बीच वक्र $y=\sin x$ से घिरा क्षेत्रफल है

(a) 2 वर्ग इकाई (b) 4 वर्ग इकाई
(c) 8 वर्ग इकाई (d) इनमें से कोई नहीं

4. परवलय $y=4x^2$, $y-$अक्ष तथा रेखाओं $y=1, y=4$ से घिरा क्षेत्रफल है **[MNR 1990]**

(a) 3 वर्ग इकाई (b) $\frac{7}{5}$ वर्ग इकाई
(c) $\frac{7}{3}$ वर्ग इकाई (d) इनमें से कोई नहीं

5. रेखाओं $y=x$, $x=-1$, $x=2$ व $x-$अक्ष से घिरा क्षेत्रफल है

(a) $\frac{5}{2}$ वर्ग इकाई (b) $\frac{3}{2}$ वर्ग इकाई
(c) $\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई (d) इनमें से कोई नहीं

6. यदि कोटि $x=a$, वक्र $y=\left(1+\frac{8}{x^2}\right)$, $x-$अक्ष तथा कोटियों $x=2$, $x=4$ से घिरे क्षेत्रफल को समद्विभाजित करती हो, तो $a=$ **[IIT 1983]**

(a) 8 (b) $2\sqrt{2}$
(c) 2 (d) $\sqrt{2}$

7. वक्र $y=\cos x$ तथा $x-$अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या होगा, जबकि $0\le x\le 2\pi$

(a) 2 (b) 4
(c) 0 (d) 3

8. वक्र $y=x^3$, $x-$अक्ष, कोटियों $x=1$ और $x=4$ के मध्य स्थित क्षेत्रफल है

(a) 64 वर्ग इकाई (b) 27 वर्ग इकाई
(c) $\frac{127}{4}$ वर्ग इकाई (d) $\frac{255}{4}$ वर्ग इकाई

9. वक्र $xy=c$, $x-$अक्ष और रेखाओं $x=1$ और $x=4$ के मध्य स्थित क्षेत्रफल है

(a) $c\log 3$ वर्ग इकाई (b) $2\log c$ वर्ग इकाई
(c) $2c\log 2$ वर्ग इकाई (d) $2c\log 5$ वर्ग इकाई

10. वक्र $y=k\sin x$ का $x=\pi$ से $x=2\pi$ के मध्य परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(a) $2k$ (b) 0
(c) $\frac{k^2}{2}$ वर्ग इकाई (d) k वर्ग इकाई

11. वक्र $y=x\sin x$ व $x-$अक्ष से घिरे भाग का $x=0$ से $x=2\pi$ तक का क्षेत्रफल है **[Roorkee 1981; RPET 1995]**

(a) 0 (b) 2π वर्ग इकाई
(c) π वर्ग इकाई (d) 4π वर्ग इकाई

12. वक्र $y=\sin 2x+\cos 2x$ तथा $x=0$ और $x=\frac{\pi}{4}$ के बीच घिरा क्षेत्रफल है **[AI CBSE 1979]**

(a) 2 वर्ग इकाई (b) 1 वर्ग इकाई
(c) 3 वर्ग इकाई (d) 4 वर्ग इकाई

13. वक्र $y=\sqrt{3x+4}$ तथा $x=0$ व $x=4$ के बीच घिरा क्षेत्रफल है **[AI CBSE 1979, 80]**

(a) $\frac{56}{9}$ वर्ग इकाई (b) $\frac{64}{9}$ वर्ग इकाई
(c) 8 वर्ग इकाई (d) इनमें से कोई नहीं

14. यदि वक्र $y^2=4ax$ व $y=mx$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल $\frac{a^2}{3}$ है, तो $m=$

(a) 2 (b) -2
(c) $\frac{1}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

15. परवलय $y^2=x$ और सरल रेखा $2y=x$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है

(a) $\frac{4}{3}$ (b) 1
(c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{1}{3}$

16. रेखाओं $y=2+x$, $y=2-x$ और $x=2$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है **[MP PET 1996]**

(a) 3 (b) 4
(c) 8 (d) 16

17. वक्रों $y=\cos x$ और $y=\cos 2x$ के $x=0$, $x=\pi/3$ तथा $x-$अक्ष से घिरे क्षेत्रों का अनुपात है **[MP PET 1997]**

(a) $\sqrt{2}:1$ (b) $1:1$
(c) $1:2$ (d) $2:1$

18. वक्र $y = x^3$, $x-$अक्ष तथा कोटियों $x=1$ व $x=2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है [MP PET 1999]

(a) $\frac{15}{2}$ वर्ग इकाई (b) $\frac{15}{4}$ वर्ग इकाई

(c) $\frac{17}{2}$ वर्ग इकाई (d) $\frac{17}{4}$ वर्ग इकाई

19. $x-$अक्ष और वक्र $y = \sin x$ तथा $x = 0$, $x = \pi$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है [Kerala (Engg.) 2002]

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

20. परवलय $y^2 = 4ax$, इसके अक्ष और दो कोटियों $x = 4$, $x = 9$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(a) $4a^2$ (b) $4a^2.4$

(c) $4a^2(9-4)$ (d) $\frac{152\sqrt{a}}{3}$

21. रेखा $y = x$ तथा $y = x + \sin x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा (जहाँ $0 \le x \le \pi$,) [Roorkee Qualifying 1998]

(a) 2 (b) 4

(c) 2π (d) 4π

22. वक्र $y = \tan x$ तथा $x-$अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल (जहाँ $-\pi/3 \le x \le \pi/3$) होगा [Kurukshetra CEE 1998]

(a) $\log\sqrt{2}$ (b) $-\log\sqrt{2}$

(c) $2\log 2$ (d) 0

23. यदि वक्र $y = a\sqrt{x} + bx$, बिन्दु (1, 2) से होकर गुजरता है तथा वक्र, सरल रेखा $x = 4$ तथा x-अक्ष के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल 8 वर्ग इकाई है, तब [MP PET 2002]

(a) $a = 3, b = -1$ (b) $a = 3, b = 1$

(c) $a = -3, b = 1$ (d) $a = -3, b = -1$

24. यदि x-अक्ष के ऊपर, वक्रों $y = 2^{kx}$ तथा $x = 0$ व $x = 2$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल $\frac{3}{\ln 2}$ हो, तो k का मान है [Orissa JEE 2003]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1

(c) -1 (d) 2

25. यदि वक्र $y = f(x)$, सरल रेखा $x = 1, x = b$ तथा x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $\sqrt{b^2+1} - \sqrt{2}$ है, (सभी $b > 1$) तब $f(x) =$ [MP PET 2000; AMU 2000]

(a) $\sqrt{x-1}$ (b) $\sqrt{x+1}$

(c) $\sqrt{x^2+1}$ (d) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

26. यदि फलन $y = f(x)$ का x-अक्ष, $x = 1$ तथा $x = b$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $(b-1)\sin(3b+4)$ है, तब $f(x) =$ [RPET 2000]

(a) $3(x-1)\cos(3x+4) + \sin(3x+4)$

(b) $(b-1)\sin(3x+4) + 3\cos(3x+4)$

(c) $(b-1)\cos(3x+4) + 3\sin(3x+4)$

(d) इनमें से कोई नहीं

27. वक्र $x^2 = 4y$, रेखा $x = 2$ और x-अक्ष के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल (वर्ग इकाई में) है [MP PET 2002]

(a) 1 (b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{8}{3}$

28. वक्र $y = x^2 - 4x$, x-अक्ष एवं रेखा $x = 2$ द्वारा घिरा क्षेत्रफल है [SCRA 1991]

(a) $\frac{16}{3}$ वर्ग इकाई (b) $-\frac{16}{3}$ वर्ग इकाई

(c) $\frac{4}{7}$ वर्ग इकाई (d) गणना नहीं की जा सकती

29. वक्र $xy - 3x - 2y - 10 = 0$, x-अक्ष तथा रेखाओं $x = 3, x = 4$ से घिरा क्षेत्रफल है [AI CBSE 1991]

(a) $16\log 2 - 13$ (b) $16\log 2 - 3$

(c) $16\log 2 + 3$ (d) इनमें से कोई नहीं

30. वक्र $y^2 = x$, रेखा $y = 4$ तथा y-अक्ष द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल है [Roorkee 1995; RPET 2003]

(a) $\frac{16}{3}$ (b) $\frac{64}{3}$

(c) $7\sqrt{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

31. निर्देशांक्षों तथा वक्र $y = \log_e x$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है [MP PET 1998]

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) ∞

32. वक्र $y^2 = 2x$ तथा कोटियों $x = 1, x = 4$ से घिरा क्षेत्रफल है

(a) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ वर्ग इकाई (b) $\frac{28\sqrt{2}}{3}$ वर्ग इकाई

(c) $\frac{56}{3}$ वर्ग इकाई (d) इनमें से कोई नहीं

33. सरल रेखाओं $x = 0, x = 2$ तथा वक्रों $y = 2^x, y = 2x - x^2$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है [AMU 2001]

(a) $\frac{4}{3} - \frac{1}{\log 2}$ (b) $\frac{3}{\log 2} + \frac{4}{3}$

(c) $\frac{4}{\log 2} - 1$ (d) $\frac{3}{\log 2} - \frac{4}{3}$

34. वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ तथा सरल रेखा $x = 1$ के बीच घिरे लघु भाग का क्षेत्रफल है [RPET 1999]

(a) $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$ (b) $\frac{8\pi}{3} - \sqrt{3}$

(c) $\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$ (d) $\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$

35. वक्र $y = \sin^2 x$, $x-$अक्ष तथा कोटियों $x = 0$ व $x = \frac{\pi}{2}$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा [RPET 1996]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{8}$ (d) π

36. वृत्त $x^2+y^2=4$, रेखा $x=\sqrt{3}y$ तथा $x-$अक्ष द्वारा प्रथम पाद में घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा [RPET 1997; Kurukshetra CEE 1998]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{3}$ (d) π

37. अतिपरवलय $xy=a^2$ पर खींची गई स्पर्श रेखा तथा निर्देशाक्षों द्वारा बने त्रिभुज का क्षेत्रफल है [RPET 2000]

(a) a^2 (b) $2a^2$

(c) $3a^2$ (d) $4a^2$

38. वक्रों $y=\sin x, y=\cos x$ तथा $x=0$ द्वारा परिबद्ध त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल है [MP PET 2000]

(a) $\sqrt{2}-1$ (b) 1

(c) $\sqrt{2}$ (d) $1+\sqrt{2}$

39. रेखा $y=x+1$ के $x=2$ तथा $x=3$ के बीच के भाग को x-अक्ष के परितः घुमाया गया है, तब इसके द्वारा बने ठोस का वक्रपृष्ठ होगा [UPSEAT 2000]

(a) $\frac{37\pi}{3}$ वर्ग इकाई (b) $7\pi\sqrt{2}$ वर्ग इकाई

(c) 37π वर्ग इकाई (d) $\frac{7\pi}{\sqrt{2}}$ वर्ग इकाई

40. वक्र $y=4x-x^2$ तथा $x-$अक्ष के बीच का क्षेत्रफल होगा [MP PET 1999, 2003]

(a) $\frac{30}{7}$ वर्ग इकाई (b) $\frac{31}{7}$ वर्ग इकाई

(c) $\frac{32}{3}$ वर्ग इकाई (d) $\frac{34}{3}$ वर्ग इकाई

41. वक्र $y=\tan x$ पर स्थित बिन्दु $x=\frac{\pi}{4}$ पर खींची गई स्पर्श रेखा तथा x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है [DCE 2001]

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\log\sqrt{2}+\frac{1}{4}$

(c) $\log\sqrt{2}-\frac{1}{4}$ (d) इनमें से कोई नहीं

42. वक्र $y=4+3x-x^2$ तथा x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है [RPET 2001]

(a) $\frac{125}{5}$ (b) $\frac{125}{3}$

(c) $\frac{125}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

43. वक्र $y=x$, x-अक्ष तथा कोटियों $x=-1$ व $x=2$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है [RPET 2001]

(a) 0 (b) 1/2

(c) 3/2 (d) 5/2

44. परवलय $y^2=4ax$, रेखा $x=a$ और $x=4a$ के बीच घिरा क्षेत्रफल है [Pb. CET 2002; Karnataka CET 2005]

(a) $4a^2$ (b) $8a^2$

(c) $28\frac{a^2}{3}$ (d) $35\frac{a^2}{3}$

45. $y=-x^2+2x+3$ और $y=0$ से घिरा क्षेत्रफल है [Orissa JEE 2004]

(a) 32 (b) 32/3

(c) 1/32 (d) 1/3

46. वक्र $y=x^3$ और $y=\sqrt{x}$ के बीच घिरा क्षेत्रफल है, (वर्ग इकाई में) [Karnataka CET 2004]

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{5}{4}$

(c) $\frac{5}{12}$ (d) $\frac{12}{5}$

47. परवलय $y=x^2$ और रेखा $y=x$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है [UPSEAT 2004]

(a) $\frac{1}{6}$ वर्ग इकाई (b) $\frac{1}{3}$ वर्ग इकाई

(c) $\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई (d) इनमें से कोई नहीं

48. परवलय $y^2=4ax$ तथा इसकी नाभिलम्ब जीवा से घिरा क्षेत्रफल है [RPET 1997, 2000, 02]

(a) $\frac{2}{3}a^2$ वर्ग इकाई (b) $\frac{4}{3}a^2$ वर्ग इकाई

(c) $\frac{8}{3}a^2$ वर्ग इकाई (d) $\frac{3}{8}a^2$ वर्ग इकाई

49. $ay=3(a^2-x^2)$ तथा x-अक्ष से घिरा क्षेत्रफल है

(a) $4a^2$ वर्ग इकाई (b) $12a^2$ वर्ग इकाई

(c) $4a^3$ वर्ग इकाई (d) इनमें से कोई नहीं

50. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ का क्षेत्रफल है [Karnataka CET 1993]

(a) πab वर्ग इकाई (b) $\frac{1}{2}\pi ab$ वर्ग इकाई

(c) $\frac{1}{4}\pi ab$ वर्ग इकाई (d) इनमें से कोई नहीं

51. समीकरण $y=|x-1|$ तथा $y=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा [IIT Screening 1994]

(a) 2 (b) 1

(c) $\frac{1}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

52. वक्र $y^2=4ax$, x-अक्ष तथा भुज $x=0$ व $x=a$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा [RPET 1996]

(a) $\frac{4}{3}a^2$ (b) $\frac{8}{3}a^2$

(c) $\frac{2}{3}a^2$ (d) $\frac{5}{3}a^2$

53. वक्र $xy^2=a^2(a-x)$ एवं y-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा [RPET 1996]

(a) πa^2 (b) $2\pi a^2$

(c) $3\pi a^2$ (d) $4\pi a^2$

54. परवलयों $y=x^2-1$ तथा $y=1-x^2$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है [AMU 1999]

(a) 1/3 (b) 2/3

(c) 4/3 (d) 8/3

55. रेखा $x=1$ तथा वृत्त $x^2+y^2=9$ से घिरे लघु भाग का क्षेत्रफल है [RPET 2002]

(a) $\frac{1}{2}(9\sec^{-1}3-\sqrt{8})$ (b) $9\sec^{-1}(3)-\sqrt{8}$

(c) $\sqrt{8} - 9\sec^{-1}(3)$ (d) इनमें से कोई नहीं

56. वक्र $y = |x-2|$, $x = 1, x = 3$, x-अक्ष के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है [AIEEE 2004]
(a) 4 (b) 2
(c) 3 (d) 1

57. परवलयों $y^2 = 4x$ तथा $x^2 = 4y$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है [Karnataka CET 1999, 2003]
(a) $\frac{14}{3}$ वर्ग इकाई (b) $\frac{3}{4}$ वर्ग इकाई
(c) $\frac{3}{16}$ वर्ग इकाई (d) $\frac{16}{3}$ वर्ग इकाई

58. वक्र $y^2 = 8x$ और $y = x$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है
(a) $\frac{128}{3}$ वर्ग इकाई (b) $\frac{32}{3}$ वर्ग इकाई
(c) $\frac{64}{3}$ वर्ग इकाई (d) 32 वर्ग इकाई

59. वक्रों $y = \log_e x$ तथा $y = (\log_e x)^2$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है [RPET 2000]
(a) $3 - e$ (b) $e - 3$
(c) $\frac{1}{2}(3-e)$ (d) $\frac{1}{2}(e-3)$

60. परवलय $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 8ay$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा [RPET 1997]
(a) $\frac{8}{3}a^2$ (b) $\frac{4}{3}a^2$
(c) $\frac{32}{3}a^2$ (d) $\frac{16}{3}a^2$

61. वक्रों $y = x^2$ तथा $y = |x|$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है [Roorkee 1999]
(a) 1/6 (b) 1/3
(c) 5/6 (d) 5/3

62. वक्र $y = \cos x$ तथा $y = \sin x$ तथा कोटियों $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है [Karnataka CET 2002]
(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{2}+1$
(c) $\sqrt{2}-1$ (d) $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$

63. प्रथम चतुर्थांश में $x^2 + y^2 = \pi^2$ एवं $y = \sin x$ के बीच घिरा क्षेत्रफल है [MP PET 1997]
(a) $\frac{(\pi^3 - 8)}{4}$ (b) $\frac{\pi^3}{4}$
(c) $\frac{(\pi^3 - 16)}{4}$ (d) $\frac{(\pi^3 - 8)}{2}$

64. वक्रों $y^2 - x = 0$ व $y - x^2 = 0$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है [MP PET 1997]
(a) $\frac{7}{3}$ (b) $\frac{1}{3}$
(c) $\frac{5}{3}$ (d) 1

65. क्षेत्र $\{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1 \le x + y\}$ का क्षेत्रफल है [Kerala (Engg.) 2002]
(a) $\frac{\pi^2}{5}$ (b) $\frac{\pi^2}{2}$
(c) $\frac{\pi^2}{3}$ (d) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

66. वक्र $y = e^x, y = e^{-x}$ तथा सरल रेखा $x = 1$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है [Karnataka CET 1999]
(a) $e + \frac{1}{e}$ (b) $e - \frac{1}{e}$
(c) $e + \frac{1}{e} - 2$ (d) $e + \frac{1}{e} + 2$

67. वक्र $y = x^2$ व रेखा $y = 1$ से घिरे क्षेत्र को $y = 1$ के परितः घुमाने पर प्राप्त ठोस का आयतन होगा, (घन इकाई में) [UPSEAT 2003]
(a) $9\pi/5$ (b) $4\pi/3$
(c) $8\pi/3$ (d) $7\pi/5$

68. परवलय $y = x^2$ तथा $x = y^2$ से बनी आकृति को y-अक्ष के परितः घुमाने पर बने ठोस का आयतन होगा [UPSEAT 2002]
(a) $\frac{21}{5}\pi$ (b) $\frac{24}{5}\pi$
(c) $\frac{2}{15}\pi$ (d) $\frac{5}{24}\pi$

69. किसी गोले के दो समान्तर समतलों को काट कर गोले का छिन्नक बनाया गया है। यदि गोले की त्रिज्या 5 सेमी तथा समतलों के बीच की दूरी 1 सेमी हो, तब गोले की छिन्नक का वक्र पृष्ठ (curved surface) होगा, जबकि पहले समतल की गोले के केन्द्र से दूरी 2 सेमी हो [UPSEAT 1999]
(a) 5π सेमी (b) 10π सेमी
(c) 15π सेमी (d) 40π सेमी

70. परवलय $y^2 = 4ax$ तथा सरल रेखा $y = 2ax$ द्वारा घिरा क्षेत्रफल है [MP PET 1993]
(a) $\frac{a^2}{3}$ वर्ग इकाई (b) $\frac{1}{3a^2}$ वर्ग इकाई
(c) $\frac{1}{3a}$ वर्ग इकाई (d) $\frac{2}{3a}$ वर्ग इकाई

71. एक वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ के $y = 0$ तथा $y = 2$ के बीच के भाग को y-अक्ष के परितः घुमाया गया है तब इसके द्वारा बने ठोस का आयतन होगा [UPSEAT 1999]
(a) $\frac{46}{3}\pi$ मात्रक (b) 12π मात्रक
(c) 16π मात्रक (d) 28π मात्रक

72. वक्र $x^2 = 4y$ तथा सरल रेखा $x = 4y - 2$ द्वारा घिरा क्षेत्रफल है [SCRA 1986; IIT 1981; Pb. CET 2003]
(a) $\frac{8}{9}$ वर्ग इकाई (b) $\frac{9}{8}$ वर्ग इकाई
(c) $\frac{4}{3}$ वर्ग इकाई (d) इनमें से कोई नहीं

73. वक्र $y = x|x|$, x-अक्ष और कोटियों $x = 1, x = -1$ के द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है [Pb. CET 2004]
(a) 0 (b) $\frac{1}{3}$
(c) $\frac{2}{3}$ (d) 1

74. दो वक्रों $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4ay$ द्वारा घिरा क्षेत्रफल है [SCRA 1986; Roorkee 1984; RPET 1999;

Kerala (Engg.) 2002, 05]

(a) $\frac{32}{3}a^2$ वर्ग इकाई (b) $\frac{16}{3}$ वर्ग इकाई

(c) $\frac{32}{3}$ वर्ग इकाई (d) $\frac{16}{3}a^2$ वर्ग इकाई

75. यदि $y = ax^2$ तथा $x = ay^2$, $a > 0$ के द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल 1 हो, तो a का मान है [IIT Screening 2004]

(a) 1 (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(c) $\frac{1}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

76. वक्रों $y = \sqrt{x}$, $2y + 3 = x$ तथा $x -$अक्ष से प्रथम चतुर्थांश में घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा [IIT Screening 2003]

(a) 9 (b) $\frac{27}{4}$

(c) 36 (d) 18

77. वक्र $y = \log_e(x + e)$ और निर्देशाक्षों से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है [AIEEE 2005]

(a) 3 (b) 4

(c) 1 (d) 2

78. दो परवलय $y^2 = 4x$ व $x^2 = 4y$, रेखाओं $x = 4$, $y = 4$ व निर्देशांक अक्षों से घिरे वर्ग क्षेत्र को विभाजित करते हैं यदि ऊपर से नीचे इन भागों पर अंकित संख्या का क्षेत्रफल क्रमशः S_1, S_2, S_3 है, तो $S_1 : S_2 : S_3$ का मान है [AIEEE 2005]

(a) $2:1:2$ (b) $1:1:1$

(c) $1:2:1$ (d) $1:2:3$

79. यदि वक्र $y = \sqrt{3x+4}$ रेखा $x = -1$ और $x = 4$ तथा x-अक्ष के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल A है और वक्र $y^2 = 3x + 4$, रेखा $x = -1$ और $x = 4$ तथा x अक्ष के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल B है तब $A : B$ का मान है [J & K 2005]

(a) $1:1$ (b) $2:1$

(c) $1:2$ (d) इनमें से कोई नहीं

80. वक्र $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है [Karnataka CET 2005]

(a) 9π (b) 4π

(c) 36π (d) 6π

81. वक्र $y = (x+1)^2, y = (x-1)^2$ और रेखा $y = \frac{1}{4}$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है [IIT Screening 2005]

(a) 1/6 (b) 2/3

(c) 1/4 (d) 1/3

82. माना $f(x)$ एक अऋणात्मक सतत् फलन इस प्रकार है कि वक्र $y = f(x)$, कोटियों $x = \frac{\pi}{4}$ तथा $x = \beta > \frac{\pi}{4}$ और x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $\left(\beta \sin\beta + \frac{\pi}{4}\cos\beta + \sqrt{2}\beta\right)$ है, तब $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ है [AIEEE 2005]

(a) $\left(1 - \frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\right)$ (b) $\left(1 - \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\right)$

(c) $\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{2} - 1\right)$ (d) $\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{2} + 1\right)$

83. वक्र $y = x^2$ तथा $y = 2 - x^2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है [Orissa JEE 2005]

(a) 8/3 (b) 3/8

(c) 3/2 (d) इनमें से कोई नहीं

84. माना फलन y, बिन्दु (1, 2) से गुजरता है तथा इसकी प्रवणता $(2x+1)$ है। वक्र व x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है [DCE 2005]

(a) 6 वर्ग इकाई (b) 5/6 वर्ग इकाई

(c) 1/6 वर्ग इकाई (d) इनमें से कोई नहीं

Critical Thinking

Objective Questions

1. यदि I निम्न में से सबसे बड़ा समाकल है

$I_1 = \int_0^1 e^{-x}\cos^2 x\,dx$, $I_2 = \int_0^1 e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$

$I_3 = \int_0^1 e^{-x^2}dx$, $I_4 = \int_0^1 e^{-x^2/2}dx$, तो

(a) $I = I_1$ (b) $I = I_2$

(c) $I = I_3$ (d) $I = I_4$

2. माना $f(x)$ वह फलन है जो $f'(x) = f(x)$ को सन्तुष्ट करता है व $f(0) = 1$ तथा $g(x)$, $f(x) + g(x) = x^2$ को सन्तुष्ट करता है तो $\int_0^1 f(x)g(x)dx =$

[AIEEE 2003; DCE 2005]

(a) $\frac{1}{4}(e-7)$ (b) $\frac{1}{4}(e-2)$

(c) $\frac{1}{2}(e-3)$ (d) इनमें से कोई नहीं

3. यदि $I_m = \int_1^x (\log x)^m dx$, सम्बन्ध $I_m = k - lI_{m-1}$ को सन्तुष्ट करता है, तो

(a) $k = e$ (b) $l = m$

(c) $k = \frac{1}{e}$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. माना f एक धनात्मक फलन है तथा

$I_1 = \int_{1-k}^{k} x\,f\{x(1-x)\}dx$, $I_2 = \int_{1-k}^{k} f\{x(1-x)\}dx$

जहाँ $2k - 1 > 0$, तब I_1 / I_2 का मान होगा

[IIT 1997 Cancelled]

(a) 2 (b) k

(c) $1/2$ (d) 1

5. यदि $\int_0^x f(t)dt = x + \int_x^1 t\,f(t)dt$, तो $f(1)$ का मान होगा

[IIT 1998; AMU 2005]

(a) 1/2 (b) 0

(c) 1 (d) –1/2

6. $\int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt{1-x^4}}dx =$ [AMU 2000]

(a) 1 (b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

7. यदि n कोई पूर्णांक हो, तो $\int_0^{\pi} e^{\cos^2 x}\cos^3(2n+1)x\,dx =$

[IIT 1985; RPET 1995; UPSEAT 2001]

(a) x (b) 1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

8. यदि $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^3+16}$ का मान $[a, b]$ में है तब ऐसा सबसे छोटा अन्तराल है

(a) $\left[0, \frac{1}{17}\right]$ (b) $[0, 1]$

(c) $\left[0, \frac{1}{27}\right]$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. माना a,b,c अशून्य वास्तविक संख्यायें इस प्रकार हैं कि $\int_0^1 (1+\cos^8 x)(ax^2+bx+c)\,dx = \int_0^2 (1+\cos^8 x)(ax^2+bx+c)\,dx$ तो वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ [IIT 1981; CEE 1993]

(a) (0, 2) में कोई मूल नहीं रखता है

(b) (0, 2) में कम से कम एक मूल रखता है

(c) (0, 2) में दोनों मूल रखता है

(d) इनमें से कोई नहीं

10. यदि $f(x) = \int_{-1}^{x} |t|\,dt,\ x \ge -1$, तो [MNR 1994]

(a) f व f' के लिए सतत् है, $x+1>0$

(b) f सतत् है परन्तु f' असतत् है, $x+1>0$ के लिए

(c) f व f', $x=0$ सतत् हैं

(d) f, $x=0$ पर सतत् है परन्तु f' नही

11. यदि $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ जबकि $\frac{1}{2} \le f(t) \le 1, t \in [0,1]$ तथा $0 \le f(t) \le \frac{1}{2}$, $t \in (1, 2]$ के लिये, तब [IIT Screening 2000]

(a) $-\frac{3}{2} \le g(2) < \frac{1}{2}$ (b) $0 \le g(2) < 2$

(c) $\frac{3}{2} < g(2) \le \frac{5}{2}$ (d) $2 < g(2) < 4$

12. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+a^x}dx, a>0$ का मान है

[IIT Screening 2001; AIEEE 2005]

(a) π (b) $a\pi$

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) 2π

13. यदि $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, $I_1 = \int_{f(-a)}^{f(a)} xg\{x(1-x)\}dx$ और $I_2 = \int_{f(-a)}^{f(a)} g\{x(1-x)\}dx$, तब $\frac{I_2}{I_1}$ का मान है [AIEEE 2004]

(a) 1 (b) -3

(c) -1 (d) 2

14. माना $f: R \to R$ तथा $g: R \to R$ सतत् फलन हैं तो $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [f(x)+f(-x)]\,[g(x)-g(-x)]dx =$

[IIT 1990; DCE 2000; MP PET 2001]

(a) π (b) 1

(c) -1 (d) 0

15. यदि फलन $f(x) = Pe^{2x} + Qe^x + Rx$ निम्न प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करता है: $f(0) = -1$, $f'(\log 2) = 31$ तथा $\int_0^{\log 4} (f(x) - Rx)\,dx = \frac{39}{2}$ तो P, Q, R के मान हैं

(a) $P=2,\ Q=-3,\ R=4$ (b) $P=-5,\ Q=2,\ R=3$

(c) $P=5,\ Q=-2,\ R=3$ (d) $P=5,\ Q=-6,\ R=3$

16. $\left(\sum_{n=1}^{10} \int_{-2n-1}^{2n} \sin^{27} x\,dx\right) + \left(\sum_{n=1}^{10} \int_{2n}^{2n+1} \sin^{27} x\,dx\right) =$

[MP PET 2002]

(a) 27^2 (b) -54

(c) 36 (d) 0

17. माना $\int_0^1 f(x)dx = 1$, $\int_0^1 x\,f(x)dx = a$ तथा $\int_0^1 x^2 f(x)dx = a^2$, तो $\int_0^1 (x-a)^2 f(x)\,dx$ का मान होगा [IIT 1990]

(a) 0 (b) a^2

(c) $a^2 - 1$ (d) $a^2 - 2a + 2$

18. यदि $\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)} = \frac{\pi}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$, तो $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+4)(x^2+9)} =$ [Karnataka CET 1993]

(a) $\frac{\pi}{60}$ (b) $\frac{\pi}{20}$

(c) $\frac{\pi}{40}$ (d) $\frac{\pi}{80}$

19. यदि $I(m,n) = \int_0^1 t^m (1+t)^n\,dt$, तब व्यंजक $I(m,n)$ का मान $I(m+1, n-1)$ के पदों में होगा [IIT Screening 2003]

(a) $\frac{2^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} I(m+1, n-1)$

(b) $\frac{n}{m+1} I(m+1, n-1)$

(c) $\frac{2^n}{m+1} + \frac{n}{m+1} I(m+1, n-1)$

(d) $\frac{m}{n+1} I(m+1, n-1)$

20. $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2^4+3^4+....+n^4}{n^5} - \lim_{n\to\infty} \frac{1+2^3+3^3+....+n^3}{n^5} =$

[AIEEE 2003]

(a) $\frac{1}{30}$ (b) 0

(c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{5}$

21. यदि $\int_0^{t^2} xf(x)dx = \frac{2}{5}t^5;\ t>0$, तो $f\left(\frac{4}{25}\right) =$ [IIT Screening 2004]

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{5}{2}$

(c) $-\frac{2}{5}$ (d) इनमें से कोई नहीं

22. m के निम्नलिखित में से किन मानों के लिए वक्र $y = x - x^2$ और रेखा $y = mx$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल $\frac{9}{2}$ होगा [IIT 1999]

(a) -4 (b) -2
(c) 2 (d) 4

23. वक्र $y^2(2a-x)=x^3$ और रेखा $x=2a$ से घिरे x-अक्ष के ऊपर के क्षेत्र का क्षेत्रफल है [MP PET 2001]

(a) πa^2 (b) $\frac{3\pi a^2}{2}$
(c) $2\pi a^2$ (d) $3\pi a^2$

24. वक्रों $x^2+y^2=9$ तथा $y^2=8x$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है [DCE 1999]

(a) 0 (b) $\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{9\pi}{2}-9\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$
(c) 16π (d) इनमें से कोई नहीं

25. वक्र $y=|x|-1$ और $y=-|x|+1$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है [IIT Screening 2002]

(a) 1 (b) 2
(c) $2\sqrt{2}$ (d) 4

26. a त्रिज्या के गोले से h ऊँचाई का गोलाकार ढक्कन (Spherical cap) काटा गया है, तब उस गोलाकार ढक्कन का आयतन है [UPSEAT 2004]

(a) $\frac{\pi}{3}h^2(3a-h)$ (b) $\pi(a-h)(2a^2-h^2-ah)$
(c) $\frac{4\pi}{3}h^3$ (d) इनमें से कोई नहीं

27. यदि किसी वास्तविक संख्या y के लिए $[y]$ वह महत्तम पूर्णांक है जो y से अधिक नहीं है, तो समाकल $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}[2\sin x]dx$ का मान है [IIT 1999]

(a) $-\pi$ (b) 0
(c) $-\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

28. यदि $f(x)=A\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+B,\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$ व $\int_0^1 f(x)dx=\frac{2A}{\pi}$, तो नियतांक A व B क्रमशः हैं [IIT 1995]

(a) $\frac{\pi}{2}$ व $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{2}{\pi}$ व $\frac{3}{\pi}$
(c) $\frac{4}{\pi}$ व 0 (d) 0 व $-\frac{4}{\pi}$

29. यदि $I_n=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$, तो $\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^{n-1}dx=$

(a) λI_n (b) $\frac{1}{\lambda}I_n$
(c) $\frac{I_n}{\lambda^n}$ (d) $\lambda^n I_n$

30. यदि $I_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n x\,dx$, तब $\lim_{n\to\infty} n[I_n+I_{n-2}]=$ [AIEEE 2002]

(a) 1/2 (b) 1
(c) ∞ (d) 0

31. वक्रों $y=\ln x$, $y=\ln|x|$, $y=|\ln x|$ और $y=|\ln|x||$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है [AIEEE 2002]

(a) 4 वर्ग इकाई (b) 6 वर्ग इकाई
(c) 10 वर्ग इकाई (d) इनमें से कोई नहीं

32. $\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin x}dx$, $(n\in N)=$ [Kurukshetra CEE 1998]

(a) $n\pi$ (b) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$
(c) π (d) 0

33. यदि $\int_0^1 e^{x^2}(x-\alpha)dx=0$, तो [MNR 1994; Pb. CET 2001; UPSEAT 2000]

(a) $1<\alpha<2$ (b) $\alpha<0$
(c) $0<\alpha<1$ (d) इनमें से कोई नहीं

34. $\int_\pi^{10\pi}|\sin x|\,dx=$ [AIEEE 2002]

(a) 20 (b) 8
(c) 10 (d) 18

35. $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2x(1+\sin x)}{1+\cos^2 x}dx=$ [AIEEE 2002]

(a) $\pi^2/4$ (b) π^2
(c) 0 (d) $\pi/2$

36. अंतराल $\left[\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{4}\right]$, पर फलन $f(x)=\int_{5\pi/3}^{x}(6\cos t-2\sin t)dt$ का अधिकतम मान है

(a) $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1$ (b) $3\sqrt{3}-2\sqrt{2}-1$
(c) अस्तित्व नहीं है (d) इनमें से कोई नहीं

37. यदि $I_1=\int_0^1 2^{x^2}dx, I_2=\int_0^1 2^{x^3}dx, I_3=\int_1^2 2^{x^2}dx$ और $I_4=\int_1^2 2^{x^3}dx$, तब [AIEEE 2005]

(a) $I_3=I_4$ (b) $I_3>I_4$
(c) $I_2>I_1$ (d) $I_1>I_2$

38. यदि $2f(x)-3f\left(\frac{1}{x}\right)=x$, तब $\int_1^2 f(x)\,dx$ का मान है [J & K 2005]

(a) $\frac{3}{5}\ln 2$ (b) $\frac{-3}{5}(1+\ln 2)$
(c) $\frac{-3}{5}\ln 2$ (d) इनमें से कोई नहीं

39. यदि $\int_a^b x^3dx=0$ और $\int_a^b x^2dx=\frac{2}{3}$, तब a और b के मान क्रमशः होंगे [AMU 2005]

(a) 1, 1 (b) $-1,-1$
(c) $1,-1$ (d) $-1,1$

40. ज्या (sine) व कोज्या (cosine) वक्र एक दूसरे को अनन्त बार प्रतिच्छेदित करते हैं जिससे समान क्षेत्रफल के अनेकों परिबद्ध क्षेत्र प्राप्त होते हैं, तब इनमें से किसी एक क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा [DCE 2005]

(a) $\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{2}$
(c) $3\sqrt{2}$ (d) $4\sqrt{2}$

Answers

आधारभूत निश्चित समाकलन, प्रतिस्थापन द्वारा निश्चित समाकलन

1	c	2	a	3	c	4	b	5	c
6	a	7	b	8	d	9	a	10	a
11	c	12	d	13	b	14	c	15	c
16	a	17	d	18	b	19	a	20	b
21	d	22	c	23	d	24	b	25	a
26	d	27	a	28	c	29	b	30	a
31	c	32	b	33	a	34	c	35	a
36	c	37	b	38	c	39	d	40	d
41	a	42	d	43	b	44	b	45	b
46	d	47	a	48	a	49	b	50	a
51	a	52	c	53	c	54	b	55	b
56	a	57	b	58	a	59	c	60	b
61	c	62	b	63	a	64	d	65	a
66	a	67	a	68	b	69	c	70	b
71	a	72	c	73	b	74	d	75	a
76	d	77	b	78	a	79	d	80	c
81	a	82	c	83	a	84	d	85	d
86	b	87	a	88	b	89	b	90	a
91	d	92	c	93	a	94	c	95	b
96	a	97	d	98	b	99	b	100	c
101	d	102	a	103	a	104	b	105	b
106	a	107	a	108	b	109	c	110	c

निश्चित समाकलन के प्रगुण

1	b	2	c	3	c	4	d	5	b
6	b	7	b	8	d	9	a	10	c
11	d	12	c	13	d	14	b	15	a
16	d	17	c	18	d	19	a	20	a
21	c	22	a	23	d	24	b	25	c
26	c	27	b	28	b	29	c	30	d
31	b	32	d	33	b	34	c	35	b
36	b	37	d	38	a	39	a	40	b
41	b	42	a	43	c	44	c	45	c
46	b	47	c	48	d	49	a	50	b
51	a	52	d	53	b	54	a	55	d
56	d	57	c	58	b	59	c	60	d
61	a	62	d	63	b	64	c	65	c
66	a	67	a	68	a	69	c	70	b
71	d	72	b	73	b	74	d	75	a
76	a	77	c	78	b	79	c	80	a
81	b	82	c	83	a	84	b	85	a
86	b	87	c	88	b	89	a	90	b
91	d	92	d	93	c	94	a	95	b
96	c	97	a	98	c	99	a	100	a
101	d	102	b	103	c	104	b	105	a
106	c	107	c	108	c	109	c	110	a
111	b	112	c	113	c	114	a	115	d
116	d	117	d	118	b	119	c	120	c
121	d	122	a	123	b	124	c	125	c
126	c	127	c	128	c	129	d	130	a
131	d	132	a	133	b	134	a	135	a
136	a	137	c	138	b	139	b	140	a
141	b	142	a	143	a	144	e	145	d

निश्चित समाकलन द्वारा श्रेणी का योगफल, गामा फलन, लैबनीज का नियम

1	b	2	b	3	b	4	b	5	b
6	d	7	a	8	b	9	a	10	b
11	b	12	b	13	b	14	d	15	c
16	a	17	d	18	b	19	b	20	a
21	a	22	c	23	d	24	c	25	b
26	c	27	b	28	c	29	b	30	a
31	d	32	d	33	b	34	c	35	c
36	c	37	a	38	c	39	b	40	c
41	a	42	a	43	d	44	a	45	c

46	c	47	a	48	c	49	b	50	c
51	a	52	d	53	b	54	b		

वक्रों द्वारा परिबद्ध क्षेत्राफल, परिक्रमण ठोस का आयतन व वक्रपृष्ठ

1	c	2	b	3	b	4	c	5	a
6	b	7	b	8	d	9	a	10	a
11	d	12	b	13	d	14	a	15	a
16	b	17	d	18	b	19	b	20	d
21	a	22	c	23	a	24	b	25	d
26	a	27	b	28	a	29	c	30	b
31	d	32	b	33	d	34	b	35	b
36	c	37	b	38	a	39	b	40	c
41	d	42	a	43	d	44	c	45	b
46	c	47	a	48	c	49	a	50	a
51	b	52	b	53	a	54	d	55	b
56	d	57	d	58	b	59	a	60	c
61	b	62	c	63	a	64	b	65	d
66	c	67	b	68	c	69	b	70	c
71	a	72	b	73	c	74	d	75	b
76	a	77	c	78	b	79	a	80	d
81	d	82	b	83	a	84	c		

Critical Thinking Questions

1	d	2	d	3	b	4	c	5	a
6	b	7	c	8	a	9	b	10	a
11	b	12	c	13	d	14	d	15	d
16	d	17	a	18	a	19	a	20	d
21	a	22	b	23	b	24	b	25	b
26	a	27	c	28	c	29	c	30	b
31	a	32	c	33	c	34	d	35	b
36	b	37	d	38	b	39	d	40	b

Answers and Solutions

आधारभूत निश्चित समाकलन, प्रतिस्थापन द्वारा निश्चित समाकलन

1. (c) $\int_0^1 e^{2\log x}dx = \int_0^1 e^{\log x^2}dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

2. (a) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx = \int_0^{\pi/4}(\sec^2 x - 1)dx$

$= \int_0^{\pi/4}\sec^2 x dx - \int_0^{\pi/4} 1 dx = [\tan x]_0^{\pi/4} - [x]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}$.

3. (c) $\int_0^{\pi/2}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx = \int_0^{\pi/2}\frac{x+\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\sec^2\frac{x}{2}dx + \int_0^{\pi/2}\tan\frac{x}{2}dx$.

$= \left| x\tan\frac{x}{2}\right|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

4. (b) माना $I = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx$

$= -[e^x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx$

$= -[e^x \cos x]_0^{\pi/2} + [e^x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx$

$\therefore \; 2I = [e^x(\sin x - \cos x)]_0^{\pi/2} = (e^{\pi/2}+1)$

अतः $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^{\pi/2}+1)$.

5. (c) $\int_1^2 e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\frac{1}{x}e^x\right]_1^2 = \frac{e^2}{2} - e$.

6. (a) $\sin x = t \Rightarrow \cos x\, dx = dt$ रखने पर,

$\int_0^1\left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{2+t}\right)dt = [\log(1+t) - \log(2+t)]_0^1$

$= \log\frac{2}{3} - \log\frac{1}{2} = \log\frac{4}{3}$.

7. (b) $I = \int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{(1-\cos x)^{5/2}} \times \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}} dx$

$= \int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}dx$

$1-\cos x = t$ रखने पर,

साथ ही, जब $x = \frac{\pi}{3}, t = \frac{1}{2}$ व $x = \frac{\pi}{2}, t = 1$

$\therefore \; I = \int_{1/2}^1 \frac{dt}{t^3} = \left|\frac{t^{-2}}{-2}\right|_{1/2}^1 = \frac{3}{2}$.

8. (d) $t = -\frac{1}{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{x^2}dx$ रखने पर,

$$\int_{-1}^{-1/2} e^t dt = [e^t]_{-1}^{-1/2} = e^{-1/2} - e^{-1} = \frac{\sqrt{e}-1}{e}.$$

9. (a) $x = \tan\theta$ रखने पर, $\therefore\ dx = \sec^2\theta\, d\theta$

$x = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ व $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$,

तो $I = 2\int_0^{\pi/4} \theta\sec^2\theta\, d\theta = 2[\theta\tan\theta]_0^{\pi/4} - 2\int_0^{\pi/4}\tan\theta\, d\theta$

$= \frac{\pi}{2} + 2[\log\cos x]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2} - 2\log\sqrt{2}$.

10. (a) $\int_1^e \frac{e^x}{x}(1 + x\log x)dx = \int_1^e \frac{1}{x}e^x dx + \int_1^e e^x \log_e x\ dx$

$= [e^x \log x]_1^e - \int_1^e e^x \log x\, dx + \int_1^e e^x \log x\, dx$

$= [e^e \log e - e^1 \log_e 1] = e^e$.

11. (c) $\int_{-2}^{2}(ax^3 + bx + c)dx = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{-2}^{2} = 4c.$

अत: c पर निर्भर है।

12. (d) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \text{cosec}\ 2x\, dx = \frac{1}{2}[\log\tan x]_{\pi/6}^{\pi/4}$

$= \frac{1}{2}\left[\log\tan\frac{\pi}{4} - \log\tan\frac{\pi}{6}\right] = \frac{1}{2}\log\sqrt{3}$.

13. (b) माना $I = \int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos\theta}\sin^3\theta\ d\theta$

$t = \cos\theta$ रखने पर, $dt = -\sin\theta\ d\theta$

$I = -\int_1^0 t^{1/2}(1-t^2)dt = \int_0^1 (t^{1/2} - t^{5/2})\ dt$

$I = \left[\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{2}{7}t^{7/2}\right]_0^1 = \frac{8}{21}$.

14. (c) $\int_0^{\pi/4}\sec^7\theta.\sin^3\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/4}\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}.\sec^4\theta\, d\theta$

$\tan\theta = t$ रखने पर,

$\int_0^1 t^3(1+t^2)dt = \left|\frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6}\right|_0^1 = \frac{5}{12}$.

15. (c) माना $I = \int_a^b \frac{1}{x}\log x\, dx = (\log x \log x)_a^b - \int_a^b \frac{1}{x}\log x\, dx$

$\Rightarrow 2I = [(\log x)^2]_a^b \Rightarrow I = \frac{1}{2}[(\log b)^2 - (\log a)^2]$

$= \frac{1}{2}[(\log b + \log a)(\log b - \log a)] = \frac{1}{2}\log(ab)\log\left(\frac{b}{a}\right)$.

16. (a) $x = \tan\theta$ रखने पर, $dx = \sec^2\theta\ d\theta$

साथ ही, जब $x = 0, \theta = 0$ व $x = 1, \theta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \int_0^1 \tan^{-1}x\, dx = \int_0^{\pi/4}\theta\sec^2\theta\, d\theta$

$= \frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$.

17. (d) माना $I = \int_0^1 \frac{dx}{[(a-b)x+b]^2}$

$t = (a-b)x + b$ रखने पर, $dt = (a-b)dx$

$x = 1 \Rightarrow t = a$ व $x = 0 \Rightarrow t = b$

$I = \frac{1}{a-b}\int_b^a \frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{(a-b)}\left[-\frac{1}{t}\right]_b^a = \frac{1}{(a-b)}\left(\frac{a-b}{ab}\right) = \frac{1}{ab}$.

18. (b) $\int_0^k \frac{1}{2+8x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^k \frac{dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{4}\int_0^{2k}\frac{dt}{1+t^2}$

$= \frac{1}{4}|\tan^{-1}t|_0^{2k} = \frac{1}{4}\tan^{-1}2k$.

इसकी दिए गए मान से तुलना करने पर,

$\tan^{-1}2k = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$.

19. (a) माना $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos\theta\frac{1}{\sin^2\theta}d\theta$

$t = \sin\theta$ रखने पर $\Rightarrow dt = \cos\theta\ d\theta$

$\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\frac{1}{t^2}dt = \left[\frac{-1}{t}\right]_{1/\sqrt{2}}^{1} = \sqrt{2} - 1$.

20. (b) $I = \int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{\sin^{-1}x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$

$\sin^{-1}x = t \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = dt$ व $x = \sin t$ रखने पर,

साथ ही, $t = 0$ से $\frac{\pi}{4}$ जब $x = 0$ से $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/4} t.\sec^2 t\, dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$.

21. (d) माना $I = \int_0^{\pi/2}\sin x\sin 2x\, dx = 2\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\cos x dx$

$t = \sin x$ रखने पर, $dt = \cos x\, dx$

अब, $I = 2\int_0^1 t^2 dt = \frac{2}{3}[t^3]_0^1 = \frac{2}{3}$.

22. (c) $I = \int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2\sin^2\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2} + 3\cos^2\frac{x}{2}} = \int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{3 + \tan^2\frac{x}{2}}dx$$

$t = \tan\frac{x}{2}$ रखने पर, $\Rightarrow dt = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx$

$I = 2\int_0^1 \frac{dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

23. (d) $t = \tan^{-1}x$ रखने पर, $dt = \frac{1}{1+x^2}dx$

$\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx = \int_0^{\pi/4} t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{32}$.

24. (b) $t = \log x$ रखने पर, $dt = \frac{1}{x}dx$

जब $x = 2 \Rightarrow t = \log 2$ व $x = 1 \Rightarrow t = 0$

$\int_1^2 \frac{\cos(\log x)}{x}dx = -\int_0^{\log 2} \cos t\, dt = [\sin t]_0^{\log 2} = \sin(\log 2)$.

25. (a) $t = a^2 + x^2$ रखने पर, $2xdx = dt$

$\int_0^a \frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{2a^2} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$

$= [(2a^2)^{1/2} - a^{2/2}] = a(\sqrt{2}-1)$.

26. (d) $t = \frac{1}{x}$ रखने पर, $dt = -\frac{1}{x^2}dx$ जबकि $t = \frac{\pi}{2}$ व π

$\therefore \int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx = -\int_{\pi/2}^{\pi} \sin t\, dt = -[\cos t]_{\pi/2}^{\pi}$

$= -\left[\cos\pi - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1$.

27. (a) $x = a\tan\theta$ रखने पर, $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

तब $I = \int_0^{\pi/4} \frac{a^4\tan^4\theta . a\sec^2\theta\, d\theta}{a^8\sec^8\theta}$

$\Rightarrow \frac{1}{a^3}\int_0^{\pi/4} \sin^4\theta\cos^2\theta\, d\theta = I = \frac{1}{a^3}\left[\int_0^{\pi/4}(\sin^4\theta - \sin^6\theta\right]d\theta$

$= \frac{1}{a^3}\int_0^{\pi/4}\left[\frac{(1-\cos 2\theta)^2}{4} - \frac{(1-\cos 2\theta)^3}{8}\right]d\theta$

$= \frac{1}{8a^3}\int_0^{\pi/4}(1+\cos 2\theta)(1+\cos^2 2\theta - 2\cos 2\theta)d\theta$

$= \frac{1}{8a^3}\int_0^{\pi/4}(1-\cos 2\theta - \cos^2 2\theta + \cos^3 2\theta)d\theta$

$= \frac{1}{32a^3}\int_0^{\pi/4}(2 - \cos 2\theta - 2\cos 4\theta + \cos 6\theta)d\theta$

$= \frac{1}{32a^3}\left[2\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{\sin 4\theta}{2} + \frac{\sin 6\theta}{6}\right]_0^{\pi/4}$

$= \frac{1}{16a^3}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right)$.

28. (c) माना $I = \int_0^{2\pi} e^{x/2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx$

$\Rightarrow I = 2\int_0^{\pi} e^t \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt = 2\left[\frac{e^t}{\sqrt{1+1}}\sin\left(t+\frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\frac{1}{1}\right)\right]_0^{\pi}$

$= \frac{2}{\sqrt{2}}\left[e^t\sin t\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\sqrt{2}}[0] = 0$.

29. (b) $1 + e^{-x} = t$ रखने पर, $-e^{-x}dx = dt$

$I = \int_2^{1+\frac{1}{e}} \frac{(t-1)(-dt)}{t} = \int_2^{1+\frac{1}{e}}\left(\frac{1}{t}-1\right)dt$

$= [\log_e t - t]_2^{1+\frac{1}{e}} = \log_e\left(1+\frac{1}{e}\right) - \left(1+\frac{1}{e}\right) - \log_e 2 + 2$

$= \log_e\left(\frac{e+1}{2e}\right) - \frac{1}{e} + 1$.

30. (a) माना $I = \int_0^{\pi/4}\frac{\sin x + \cos x}{9 + 16\sin 2x}dx$

$\sin x - \cos x = t$ रखने पर, $(\sin x + \cos x)dx = dt$

$I = \int_{-1}^{0}\frac{dt}{9+16(1-t^2)} = \int_{-1}^{0}\frac{dt}{25-16t^2}$

$= \frac{1}{10}\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{5-4t} + \frac{1}{5+4t}\right)dt$

$= \left|\frac{1}{10}.\frac{1}{4}[\log(5+4t) - \log(5-4t)]\right|_{-1}^{0}$

$= \frac{1}{40}(\log 9 - \log 1) = \frac{1}{20}\log 3$.

31. (c) माना $I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x(\log\sin x + \cot x)dx$

$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x\log\sin x\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x\cot x\, dx$

$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x\log\sin x dx + [e^x\log\sin x]_{\pi/4}^{\pi/2}$

$- \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x\log\sin x\, dx$

$= e^{\pi/2}\log\sin\frac{\pi}{2} - e^{\pi/4}\log\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}e^{\pi/4}\log 2$.

32. (b) $t = \sin^{-1}x$ रखने पर, $dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

अब $\int_0^{1/2}\frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\pi/6} t\sin t\, dt = [-t\cos t + \sin t]_0^{\pi/6}$

$= \left[-\frac{\Pi}{6}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\Pi}{12}\right]$

33. (a) $x = 2\cos\theta$ रखने पर, $dx = -2\sin\theta\, d\theta$

अब $\int_0^2\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx = -2\int_{\pi/2}^{0}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}\sin\theta\, d\theta$

$= 4\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$

$= 2\int_0^{\pi/2}(1+\cos\theta)d\theta$

$= 2[\theta + \sin\theta]_0^{\pi/2} = 2\left[\frac{\pi}{2}+1\right] = \pi + 2$.

34. (c) $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin x} = \int_0^{\pi}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\pi}(\sec^2 x - \sec x\tan x)dx$

$= [\tan x - \sec x]_0^{\pi} = [\tan\pi - \sec\pi + 1] = [0+1+1] = 2$.

35. (a) $\frac{1}{2}\int_0^{\pi/8}\sec^2 2x dx = \frac{1}{4}[\tan 2x]_0^{\pi/8} = \frac{1}{4}[1] = \frac{1}{4}$.

36. (c) $\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin\frac{x}{2}}dx = \int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{x}{4} + \cos\frac{x}{4}\right|dx = 4\left[\sin\frac{x}{4} - \cos\frac{x}{4}\right]_0^{2\pi}$

$= 4[1 - 0 - 0 + 1] = 8$.

37. (b) $\int_0^1\cos^{-1}x\, dx = \left[x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = 1$.

38. (c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x+\sin x}dx$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{2\cos^2(x/2)+2\sin(x/2)\cos(x/2)}dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan(x/2)}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]dx$

$\frac{\pi}{4}+\log\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$.

39. (d) माना $I = \int_0^{\pi/6}\left(2+3x^2\right)\cos 3x\, dx$

$= \left[\frac{\sin 3x}{3}(2+3x^2)\right]_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6}\frac{\sin 3x}{3}.6x.dx$

$= \frac{1}{36}(\pi^2+16)$.

40. (d) $\sin^2 x = t \Rightarrow dt = 2\sin x\cos x\, dx$ रखने पर,

अब $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}[\tan^{-1}t]_0^1 = \frac{\pi}{8}$.

41. (a) $t = \tan x \Rightarrow dt = \sec^2 x\, dx$ रखने पर,

अब $\int_0^{\pi/4}\tan^6 x\sec^2 x dx = \int_0^1 t^6 dt = \frac{1}{7}[t^7]_0^1 = \frac{1}{7}$.

42. (d) $t = x^2+1 \Rightarrow dt = 2x\, dx$ रखने पर,

$\int_0^2\frac{x^3}{(x^2+1)^{3/2}}dx = \frac{1}{2}\int_1^5\frac{(t-1)}{t^{3/2}}dt = \frac{1}{2}\int_1^5[t^{-1/2}-t^{-3/2}]dt$

$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{t}+2\frac{1}{\sqrt{t}}\right]_1^5 = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{5}+\frac{2}{\sqrt{5}}-2-2\right]$

$= \left[\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}-2\right] = \frac{6-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$.

43. (b) माना $I = \int_0^{\pi/6}\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx = \int_0^{\pi/6}\tan x\sec^2 x\, dx$

$t = \tan x \Rightarrow dt = \sec^2 x\, dx$ रखने पर,

$I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{6}$.

44. (b) माना $I = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin x\cos x.dx}{\cos^2 x+3\cos x+2}$

$\cos x = t \Rightarrow -\sin x\, dx = dt$ रखने पर,

$I = \int_0^1\frac{t.dt}{t^2+3t+2} = \int_0^1\left[\frac{2}{t+2}-\frac{1}{t+1}\right]dt$

$= [2\log(t+2)-\log(t+1)]_0^1 = [2\log 3-\log 2-2\log 2]$

$= [2\log 3-3\log 2] = [\log 9-\log 8] = \log\left(\frac{9}{8}\right)$.

45. (b) $e^x-1 = t^2 \Rightarrow e^x dx = 2t\, dt$ रखने पर,

एवं जब $x = 0$ से $\log 5$, तब $t = 0$ से 2

इसलिए $\int_0^{\log 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx = \int_0^2\frac{2t^2}{t^2+4}dt$

$= 2\left[\int_0^2 1dt - 4\int_0^2\frac{dt}{t^2+4}\right] = 4-\pi$.

46. (d) $\int_0^1\frac{dx}{x^2+2x\cos\alpha+1} = \int_0^1\frac{dx}{(x+\cos\alpha)^2+1-\cos^2\alpha}$

$= \int_0^1\frac{dx}{(x+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha} = \left[\frac{1}{\sin\alpha}\tan^{-1}\frac{x+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right]_0^1$

$= \frac{1}{\sin\alpha}\left(\tan^{-1}\cot\frac{\alpha}{2}-\tan^{-1}\cot\alpha\right) = \frac{\alpha}{2}.\frac{1}{\sin\alpha}$.

47. (a) माना

$I = 2\int_0^{\pi}\sin mx\sin nx\, dx = \int_0^{\pi}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x]dx$

$= \left[\frac{\sin(m-n)x}{(m-n)}-\frac{\sin(m+n)x}{(m+n)}\right]_0^{\pi}$

$= \left[\frac{\sin(m-n)\pi}{(m-n)}-\frac{\sin(m+n)\pi}{(m+n)}\right] = 0$.

चूँकि $\sin(m-n)\pi = 0 = \sin(m+n)\pi \quad m \ne n$ के लिये.

48. (a) चूँकि $\sin x < x;\ 0 < x \le \pi/2$ के लिए

$\therefore \int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx < \int_0^{\pi/2}1dx = \frac{\pi}{2}$.

49. (b) $I = \int_{-1}^3\left\{\tan^{-1}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\right\}dx$

$= \int_{-1}^3\left\{\tan^{-1}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\right\}dx$

$= \int_{-1}^3\frac{\pi}{2}dx = 2\pi$.

50. (a) I_1 में $\log x = u$ रखने पर, $dx = x\, du = e^u du$

साथ ही, जब, $x = e$ से e^2 तब $u = 1$ से 2

अर्थात् $I_1 = \int_1^2\frac{e^u}{u}du = \int_1^2\frac{e^x}{x}dx$. अतः $I_1 = I_2$.

51. (a) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}e^{-x}\sin x\, dx = \left[\frac{e^{-x}}{2}(-\sin x-\cos x)\right]_{-\pi/4}^{\pi/2}$

$= \frac{1}{2}[e^{-x}(-\sin x-\cos x)]_{-\pi/4}^{\pi/2}$

$= \frac{1}{2}\left[e^{-\pi/2}(-1-0)-\left\{e^{\pi/4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}\right] = -\frac{e^{-\pi/2}}{2}$.

52. (c) $\int_0^{\pi/2}\frac{(1+2\cos x)}{(2+\cos x)^2}dx = \int_0^{\pi/2}\frac{2(\cos x+2)-3}{(2+\cos x)^2}dx$

$= 2\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}-3\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(2+\cos x)^2}$

$= 4\int_0^1\frac{dt}{3+t^2}-6\int_0^1\frac{1+t^2}{(3+t^2)^2}dt$, $\left[\tan\frac{x}{2} = t \text{ रखने पर}\right]$

$= -2\int_0^1\frac{dt}{3+t^2}+12\int_0^1\frac{dt}{(3+t^2)^2}$

$= -2\int_0^1\frac{dt}{3+t^2}+12\left[\frac{1}{6}.\frac{t}{t^2+3}\right]_0^1+\frac{1}{6}\int_0^1\frac{dt}{3+t^2}$

$= 2\left[\frac{t}{t^2+3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

53. (c) $\int_0^{\pi}\frac{dx}{(1+a^2)\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)-2a\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}$

$=\int_0^{\pi}\frac{dx}{(1-a)^2\cos^2\frac{x}{2}+(1+a)^2\sin^2\frac{x}{2}}$

$=\frac{2}{(1+a)^2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\{(1-a)/(1+a)\}^2+t^2}$; {जहाँ $t=\tan\frac{x}{2}$}

$=\frac{2}{(1+a)^2}\frac{(1+a)}{(1-a)}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1+a}{1-a}.t\right)\right]_0^{\infty}$

$=\frac{2}{(1-a^2)}[\tan^{-1}\infty-\tan^{-1}0]=\frac{\pi}{1-a^2}$.

54. (b) अभीष्ट मान $=\left[\frac{-(1-x)^{10}}{10}\right]_0^1=\frac{1}{10}$.

55. (b) अभीष्ट मान $=\left[\frac{\sin 3x}{3}\right]_0^{\pi/3}=0$.

56. (a) $\int_0^{\pi/4}\frac{1+\tan x}{1-\tan x}dx=\int_0^{\pi/4}\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)dx$

$=\left[\log\left\{\sec\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right\}\right]_0^{-\pi/4}=-\frac{1}{2}\log 2$.

57. (b) $\int_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int_0^1\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

$e^x=t$ रखने पर, $e^x dx=dt$

साथ ही, जब $x=0$ से 1, तब $t=1$ से e,

$\int_1^e\frac{dt}{1+t^2}=[\tan^{-1}t]_1^e=\tan^{-1}\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$,

$\left[\because \tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)\right]$.

58. (a) $I=\int_1^e\frac{1+\log x}{x}dx=\int_1^e\frac{1}{x}dx+\int_1^e\frac{\log x}{x}dx$

$\Rightarrow [\log_e x]_1^e+\left[\frac{(\log x)^2}{2}\right]_1^e=\frac{3}{2}$.

59. (c) $\log\left(1+\frac{x}{2}\right)$ को प्रथम फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर, $\left[\log\left(1+\frac{x}{2}\right)\frac{x^2}{2}\right]_0^2-\int_0^1\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{x+2}dx$

$=\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-2+4\log 3-4\log 2\right]=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\log\frac{2}{3}$

दिए गए मान से तुलना करने पर, $a=\frac{3}{4},b=\frac{3}{2}$.

60. (b) $I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}=\int_0^1\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})dx}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}$

$=\int_0^1\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}{1+x-x}dx=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx+\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

61. (c) $4\int_0^{\pi/4}\frac{\sin 2\theta\, d\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}=4\int_0^{\pi/4}\frac{2\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}$

$=4\int_0^{\pi/4}\frac{2\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta}{\tan^4\theta+1}$

{अंश व हर को $\cos^4\theta$ से भाग देने पर}

$\tan^2\theta=t\Rightarrow 2\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta=dt$ रखने पर

$4\int_0^1\frac{dt}{t^2+1}=4[\tan^{-1}t]_0^1=4\left[\frac{1}{4}\pi-0\right]=\pi$.

62. (b) $\int_0^1\frac{e^x(x-1)}{(x+1)^3}dx=\int_0^1\frac{e^x(x+1-2)}{(x+1)^3}dx$

$\int_0^1\frac{e^x}{(x+1)^2}dx-2\int_0^1\frac{e^x}{(x+1)^3}dx=\left[\frac{e^x}{(x+1)^2}\right]_0^1=\frac{e}{4}-1$.

63. (a) $\phi(x)=\frac{1}{x(x^4+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x^3}{x^4+1}$

$\Rightarrow \int_1^2\phi(x)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{x^3}{x^4+1}\right)dx$

$=[\log x]_1^2-\left[\frac{1}{4}\log(x^4+1)\right]_1^2=\frac{1}{4}\log\frac{32}{17}$.

64. (d) $\int_{1/4}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\int_{1/4}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\left[\sin^{-1}\left(\frac{\frac{2x-1}{2}}{1/2}\right)\right]_{1/4}^{1/2}$

$=[\sin^{-1}(2x-1)]_{1/4}^{1/2}=\pi/6$.

65. (a) $\sqrt{x}=t\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\,dt$ रखने पर

साथ ही, जब $x=0$ से 2 से, तब $t=0$ से $\sqrt{2}$

इसलिए $\int_0^2\frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=2\int_0^{\sqrt{2}}3^t dt=2\left[\frac{3^t}{\log 3}\right]_0^{\sqrt{2}}$

$=\frac{2}{\log 3}(3^{\sqrt{2}}-1)$.

66. (a) $\int_0^{2\pi}(\sin x+\cos x)dx=[-\cos x+\sin x]_0^{2\pi}=0$.

67. (a) माना $I=\int_0^{\pi/4}\frac{\cos x}{\cos^2 x(1+2\sin^2 x)}dx$

$=\int_0^{\pi/4}\frac{\cos x\, dx}{(1-\sin^2 x)(1+2\sin^2 x)}$

$=\frac{1}{3}\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1-t^2}+\frac{2}{1+2t^2}\right)dt$

आंशिक भिन्नों से, जहाँ $t=\sin x$

$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2.1}\log\frac{1+t}{1-t}+\frac{2}{\sqrt{2}}\tan^{-1}t\sqrt{2}\right]_0^{1/\sqrt{2}}$

$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\log\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)}+\sqrt{2}\tan^{-1}1\right]$

$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2+\sqrt{2}.\frac{\pi}{4}\right]=\frac{1}{3}\left[\log(\sqrt{2}+1)+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right]$.

68. (b) $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$\cos x = t \Rightarrow -\sin x\, dx = dt$ रखने पर,

$I=\int_1^0 \frac{-dt}{1+t^2}=\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}=[\tan^{-1} t]_0^1=\frac{\pi}{4}$.

69. (c) $\int_1^2 \log x dx=[x\log x - x]_1^2 = 2\log 2-2+1$

$=\log 4-1=\log 4-\log e=\log\frac{4}{e}$.

70. (b) $I=\int_3^5\left(1+\frac{4}{x^2-4}\right)dx$. अब स्वयं हल करें।

71. (a) अंश व हर को $\cos^4 x$ से भाग देने पर,

$\therefore\ I=\int_0^{\pi/4}\frac{\sec^2 x\sec^2 x\, dx}{1-\tan^2 x+\tan^4 x}$

$\tan x = t$ व $\sec^2 x dx = dt$ रखने पर,

$I=\int_0^1\frac{(1+t^2)}{t^4-t^2+1}dt$

$=\left[\tan^{-1}\frac{t^2-1}{t}\right]_0^1=\tan^{-1}(0)-\tan^{-1}(-\infty)=\frac{\pi}{2}$.

72. (c) दिया है, $I=\int_0^{\sin^2 x}\sin^{-1}\sqrt{t}\,dt+\int_0^{\cos^2 x}\cos^{-1}\sqrt{t}\,dt$

प्रथम समाकल में $t=\sin^2 u$ व द्वितीय में $t=\cos^2 v$ रखने पर,

$I=\int_0^x u\sin 2u\,du-\int_{\pi/2}^x v\sin 2v\,dv$

$=\int_0^{\pi/2}u\sin 2u du+\int_{\pi/2}^x u\sin 2u\,du-\int_{\pi/2}^x v\sin 2v\,dv$

$I=\int_0^{\pi/2}u\sin 2u du=\left(\frac{-u\cos 2u}{2}\right)_0^{\pi/2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2u\,du$

$=\left(\frac{-u\cos 2u}{2}\right)_0^{\pi/2}+\frac{1}{4}(\sin 2u)_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}$.

73. (b) $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-5$ (प्रत्येक $x\neq 0$ के लिये) .....(i)

समीकरण (i) में x की जगह $\frac{1}{x}$ प्रतिस्थापित करने पर,

.....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से $f\left(\frac{1}{x}\right)$ का विलोपन करने पर,

$(a^2-b^2)f(x)=\frac{a}{x}-bx-5a+5b$

$\Rightarrow (a^2-b^2)\int_1^2 f(x)dx=\left[\left(a\log|x|-\frac{b}{2}x^2-5(a-b)x\right)\right]_1^2$

$=a\log 2-2b-10(a-b)-a\log 1+\frac{b}{2}+5(a-b)$

$=a\log 2-5a+\frac{7}{2}b$

$\Rightarrow \int_1^2 f(x)dx=\frac{1}{a^2-b^2}\left[a\log 2-5a+\frac{7}{2}b\right]$.

74. (d) $I_n=\int_0^{\pi/4}(\sec^2\theta-1)\tan^{n-2}\theta\, d\theta$

$I_n=\int_0^{\pi/4}\sec^2\theta\tan^{n-2}\theta\,d\theta-\int_0^{\pi/2}\tan^{n-2}\theta\,d\theta$

$I_n=\left[\frac{\tan^{n-1}\theta}{n-1}\right]_0^{\pi/4}-I_{n-2}\Rightarrow I_n+I_{n-2}=\frac{1}{n-1}$

अतः $I_8+I_6=\frac{1}{8-1}=\frac{1}{7}$.

75. (a) $I=\int_0^{\pi/4}\sec x\log(\sec x+\tan x)dx$

$\log(\sec x+\tan x)=t\Rightarrow \sec x\,dx=dt$ रखने पर,

$I=\int_0^{\log(\sqrt{2}+1)}t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\log(\sqrt{2}+1)}=\frac{[\log(\sqrt{2}+1)]^2}{2}$.

76. (d) $1+\tan x=t\Rightarrow \sec^2 x\,dx=dt$ रखने पर,

$\therefore\ \int_0^{\pi/4}\frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)(2+\tan x)}dx$

$=\int_1^2\frac{dt}{t(1+t)}=\int_1^2\frac{dt}{t}-\int_1^2\frac{dt}{1+t}=[\log t-\log(1+t)]_1^2$

$=\log_e 2-\log_e 3+\log_e 2=\log_e\frac{4}{3}$.

77. (b) $\int_0^{2/3}\frac{dx}{4+9x^2}=\frac{1}{9}\int_0^{2/3}\frac{dx}{(2/3)^2+x^2}$

$=\frac{1}{9}\times\frac{1}{2/3}\left(\tan^{-1}\frac{x}{2/3}\right)_0^{2/3}=\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{\pi}{24}$.

78. (a) $I=\int_0^1\frac{x^4+1}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^4-1}{x^2+1}dx+2\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$

$\Rightarrow I=\int_0^1(x^2-1)dx+2\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$

$\Rightarrow I=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_0^1+2[\tan^{-1}x]_0^1=-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{(3\pi-4)}{6}$.

79. (d) $I=\int_0^a x^2\sin x^3 dx$; $x^3=t\Rightarrow x^2dx=\frac{dt}{3}$ रखने पर,

$\therefore\ I=\frac{1}{3}\int_0^{a^3}\sin t\,dt=-\frac{1}{3}[\cos t]_0^{a^3}=-\frac{1}{3}[\cos a^3-1]$

$=\frac{1}{3}[1-\cos a^3]$.

80. (c) $I=\int_0^{\pi/4}[\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}]dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin x\cos x}}dx$

$=\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1-(\sin x-\cos x)^2}}dx$

$\sin x-\cos x=t$; $(\cos x+\sin x)dx=dt$ रखने पर,

$\therefore\ I=\sqrt{2}\int_{-1}^0\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$I=\sqrt{2}[\sin^{-1}t]_{-1}^0=\sqrt{2}[0-(-\pi/2)]=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

81. (a) $I=\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx$

$=\int_0^1\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$I=[\sin^{-1}x]_0^1+[\sqrt{1-x^2}]_0^1=\frac{\pi}{2}-1$.

82. (c) $I=\int_1^e\frac{1}{x}dx=[\log x]_1^e=\log_e e-\log 1=1$.

83. (a) $I=\int_1^x\frac{2\log x}{x}dx$

माना $\log x=t\Rightarrow\frac{dx}{x}=dt$

$\therefore I=2\int_0^{\log x}t\,dt=2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\log x}=(\log x)^2$.

84. (d) $I=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}$.

अंश व हर में $\cos^2 x$ से भाग देने पर,

$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\frac{1}{\cos^2x}dx}{a^2+b^2\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2x}{a^2+b^2\tan^2x}dx$.

$b\tan x=t$, $b\sec^2x\,dx=dt$ रखने पर और सीमा $x=0$

तब $t=0$ तथा $x=\frac{\pi}{2}$, तब $t=\infty$

अतः $I=\int_0^\infty\frac{\frac{dt}{b}}{a^2+t^2}=\frac{1}{b}\left[\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{t}{a}\right)\right]_0^\infty$

$=\frac{1}{ab}\left[\tan^{-1}\infty-\tan^{-1}0\right]=\frac{1}{ab}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{2ab}$.

85. (d) $I=\int_0^{\pi/4}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\pi/4}^{5\pi/4}(\sin x-\cos x)dx$

$+\int_{2\pi}^{\pi/4}(\cos x-\sin x)dx$

$=[\sin x+\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}-[\sin x+\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}+[\sin x+\cos x]_{2\pi}^{\frac{\pi}{4}}$

$I=\left[\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}-1\right]-\left[-\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}-\left(\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}\right)\right]+\left[\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}-1\right]$

$I=[\sqrt2-1]-[-\sqrt2-\sqrt2]+[\sqrt2-1]$

$I=[\sqrt2-1+2\sqrt2+\sqrt2-1]=4\sqrt2-2$.

86. (b) $\int_0^a x\,dx\le a+4\Rightarrow\frac{a^2}{2}\le a+4$

$\Rightarrow a^2\le 2a+8$ $\quad\Rightarrow a^2-2a-8\le0$

$\Rightarrow(a-4)(a+2)\le0\Rightarrow-2\le a\le4$.

87. (a) $I=\int_{-1}^3\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\right]dx$

$=\int_{-1}^3\left(\frac{\pi}{2}\right)dx=\left[\frac{\pi x}{2}\right]_{-1}^3=2\pi,\quad\left(\because\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}\right)$

88. (b) $I=\int_{-1}^0\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_{-1}^0\frac{dx}{(x+1)^2+1}$

$=[\tan^{-1}(x+1)]_{-1}^0=[\tan^{-1}1-\tan^{-1}0]=\frac{\pi}{4}$.

89. (b) $I=\int_0^1\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx$; $\tan^{-1}x=t$

$\Rightarrow\frac{1}{1+x^2}dx=dt$ रखने पर

$\therefore I=\int_0^{\pi/4}t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi^2}{32}$.

90. (a) $\int_1^{\sqrt3}\frac{1}{1+x^2}dx=[\tan^{-1}x]_1^{\sqrt3}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$.

91. (d) $I=\int_1^3(x-1)(x-2)(x-3)dx$.

$I=\int_1^3(x^3-6x^2+11x-6)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}+\frac{11x^2}{2}-6x\right]_1^3=0.$

92. (c) $I=\int_2^3\frac{dx}{x^2-x}=\int_2^3\frac{dx}{x(x-1)}=\int_2^3\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right]dx$

$=\int_2^3\frac{1}{(x-1)}dx-\int_2^3\frac{1}{x}dx=[\log(x-1)]_2^3-[\log x]_2^3$

$=[\log2-\log1]-[\log3-\log2]=2\log2-\log3=\log\frac{4}{3}$.

93. (a) $I=\int_8^{15}\frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}}$

$x=\tan^2\theta\Rightarrow\theta=\tan^{-1}\sqrt{x}$ रखने पर,

$dx=2\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta$

$\therefore I=\int_{\tan^{-1}\sqrt8}^{\tan^{-1}\sqrt{15}}\frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{(\tan^2\theta-3)\sqrt{\tan^2\theta+1}}d\theta$

$=\int_{\tan^{-1}\sqrt8}^{\tan^{-1}\sqrt{15}}\frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{(\sec^2\theta-4)\sec\theta}d\theta$

$=\int_{\tan^{-1}\sqrt8}^{\tan^{-1}\sqrt{15}}\frac{2\tan\theta\sec\theta}{(\sec^2\theta-4)}d\theta$

$=\int_{\tan^{-1}\sqrt8}^{\tan^{-1}\sqrt{15}}\frac{2\tan\theta\sec\theta}{(\sec\theta-2)(\sec\theta+2)}d\theta$

$=\left[\frac{1}{2}\log\frac{(\sec\theta-2)}{(\sec\theta+2)}\right]_{\tan^{-1}\sqrt8}^{\tan^{-1}\sqrt{15}}$

$=\frac{1}{2}\left[\log\frac{2}{6}-\log\frac{1}{5}\right]=\frac{1}{2}\log\frac{5}{3}$.

94. (c) $I=\int_0^\pi|\sin^3\theta|\,d\theta$

$\because\sin\theta$ अंतराल $(0,\pi)$ में धनात्मक है

$\therefore I=\int_0^\pi\sin^3\theta\,d\theta=\int_0^\pi\sin\theta(1-\cos^2\theta)\,d\theta$

$=\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta+\int_0^\pi(-\sin\theta)\cos^2\theta\,d\theta$

$=[-\cos\theta]_0^\pi+\left(\frac{\cos^3\theta}{3}\right)_0^\pi=\frac{4}{3}$.

95. (b) $\int_0^1 \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)dx$

$x = \cos\theta$ रखने पर, $\sin\left[2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}\right]$

$= \sin\left[2\tan^{-1}\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$= \sin\left[2\tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right]\right] = \sin\left[2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$= \sin(\pi-\theta) = \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-x^2}$

अब, $\int_0^1 \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}[\sin^{-1}x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

96. (a) $\int_0^3 \frac{3x+1}{x^2+9}dx = \frac{3}{2}\int_0^3 \frac{2x}{x^2+9}dx + \int_0^3 \frac{dx}{x^2+9}$

$= \left[\frac{3}{2}\log(x^2+9) + \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^3$

$= \frac{3}{2}(\log 18 - \log 9) + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{3}{2}\log 2 + \frac{\pi}{12} = \log(2\sqrt{2}) + \frac{\pi}{12}.$

97. (d) $\int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^4)} = \int_1^2 \frac{dx}{x^5\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}$

$\left(1+\frac{1}{x^4}\right) = z \Rightarrow \frac{-4}{x^5}dx = dz$ रखने पर,

$\Rightarrow \frac{-1}{4}\int_2^{17/16}\frac{dz}{z} = \left[\frac{-1}{4}\log z\right]_2^{17/16} = \frac{1}{4}\log 2 - \frac{1}{4}\log\frac{17}{16}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{4}\log\left(\frac{32}{17}\right).$

98. (b) $I = \int_2^3 \frac{x+1}{x^2(x-1)}dx = \int_2^3 \left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1}\right)dx$

$A(x-1) + B(x)(x-1) + C(x^2) = x+1$

$x = 0, 1, -1,$ रखने पर, $A = -1, B = -2, C = 2$

$\Rightarrow I = -\int_2^3 \frac{dx}{x^2} - 2\int_2^3 \frac{dx}{x} + 2\int_2^3 \frac{dx}{x-1}$

$\Rightarrow I = \left[\frac{1}{x}\right]_2^3 - 2[\log x]_2^3 + 2[\log(x-1)]_2^3$

$\Rightarrow I = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2\log\frac{3}{2} + 2\log 2 \Rightarrow I = \log\frac{16}{9} - \frac{1}{6}.$

99. (b) $I = \int_1^e \log x\,dx \Rightarrow I = \int_e^1 1.\log x\,dx$

$\Rightarrow I = [x\log x - x]_1^e = (e\log e - e) - (0-1)$

$\Rightarrow I = 1.$

100. (c) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}}dx$

$I = \int_0^{\pi/2}(\sin x + \cos x)dx = (-\cos x + \sin x)_0^{\pi/2}$

$I = 1 - (-1) = 2.$

101. (d) माना $I = \int_0^{\pi/8}\cos^3 4\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/8}\cos^2 4\theta.\cos 4\theta\,d\theta$

$I = \int_0^{\pi/8}(1-\sin^2 4\theta)\cos 4\theta\,d\theta$

$\sin 4\theta = t \Rightarrow \cos 4\theta\,d\theta = \frac{dt}{4}$ रखने पर,

जब $\theta = 0 \to \frac{\pi}{8}$, तब $t = 0 \to 1$

$\therefore\ I = \frac{1}{4}\int_0^1 (1-t^2)dt = \frac{1}{4}\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$

102. (a) दिया है $\int_3^8 \frac{2-3x}{x\sqrt{1+x}}dx = I$

$1 + x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$ रखने पर,

जब $x = 3 \to 8$, तब $t = 2 \to 3$

$\therefore\ I = 2\int_2^3 \frac{5-3t^2}{t^2-1}dt$; $I = 2\int_2^3\left(\frac{2}{t^2-1} - 3\right)dt$

$I = 2\left[\frac{2}{2.1}\log\frac{t-1}{t+1} - 3t\right]_2^3$; $I = 2\log\left(\frac{3}{2e^3}\right).$

103. (a) दिया है $I = \int_0^1 x^2e^x dx \Rightarrow I = [x^2.e^x]_0^1 - \int_0^1 2x.e^x dx$

$\Rightarrow I = e - 2[xe^x - e^x]_0^1 \Rightarrow I = e - 2[e - e - (0-1)]$

$\Rightarrow\ I = e - 2.$

104. (b) $(1+x^2) > x^2, \forall x$; $\sqrt{1+x^2} > x, \forall\, x \in (1, 2)$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{x},\ \forall x \in (1, 2) \Rightarrow \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} < \int_1^2 \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow\ I_1 < I_2 \Rightarrow I_2 > I_1.$

105. (b) दोनों फलनों का समाकलन करने पर,

$= \frac{1}{2}\left|\log(1+t^2)\right|_{1/e}^{\tan x} + \left|\left\{\log t - \frac{1}{2}\log(1+t^2)\right\}\right|_{1/e}^{\cot x}$

$= \frac{1}{2}\left[\log\sec^2 x - \log\left(1+\frac{1}{e^2}\right)\right] + \log\cot x - \log\left(\frac{1}{e}\right)$

$-\frac{1}{2}\left\{\log(\text{cosec}^2 x) - \log\left(1+\frac{1}{e^2}\right)\right\} = -\log\left(\frac{1}{e}\right) = \log e = 1.$

106. (a) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{dx}{1+\cos x}$

$\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}dx = \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}dx$

$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4}(\text{cosec}^2 x - \cot x\,\text{cosec}\,x)dx$

$= (-\cot x + \text{cosec}\,x)_{\pi/4}^{3\pi/4} = 2.$

107. (a) $I = \int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)^2}$

माना $(1+\ln x) = t \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$

जब, $x = 1 \to e^2$ तब $t = 1 \to 3$

$\therefore I = \int_1^3 \frac{dt}{t^2} = \left[\frac{-1}{t}\right]_1^3 = -\left[\frac{1}{3} - 1\right] = \frac{2}{3}$.

108. (b) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \text{cosec}^2 x\, dx = [-\cot x]_{\pi/4}^{\pi/2} = -\left[\cot\frac{\pi}{2} - \cot\frac{\pi}{4}\right] = 1$.

109. (c) $\int_{\log 2}^{x} \frac{du}{(e^u - 1)^{1/2}} = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \int_1^{\sqrt{e^x - 1}} \frac{2t}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{6}$ चूँकि $e^u - 1 = t^2$

$\Rightarrow 2(\tan^{-1} t)_1^{\sqrt{e^x-1}} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \tan^{-1}\sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

$\Rightarrow \sqrt{e^x - 1} = \tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow \sqrt{e^x - 1} = \sqrt{3} \Rightarrow e^x = 4$.

110. (c) $I = \int_1^2 [f\{g(x)\}]^{-1} f'[g(x)]g'(x)\, dx$

माना $f\{g(x)\} = z \Rightarrow f'\{g(x)\}\, g'(x)\, dx = dz$

जब $x = 1, z = f\{g(1)\}$

जब $x = 2, z = f\{g(2)\}$

$\therefore I = \int_{f\{g(1)\}}^{f\{g(2)\}} \frac{1}{z} dz = |\log z|_{f\{g(1)\}}^{f\{g(2)\}}$

$\Rightarrow I = \log f\{g(2)\} - \log f\{g(1)\} = 0$, $(\because g(2) = g(1))$.

निश्चित समाकलन के प्रगुण

1. (b) $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x) dx$

चूँकि $\int_0^a x f(x) dx = \frac{1}{2} a \int_0^a f(x) dx$, यदि $f(a-x) = f(x)$.

2. (c) $\int_{-4}^4 |x+2|\, dx = \int_{-4}^{-2} -(x+2)dx + \int_{-2}^4 (x+2)dx$

$= \left|\frac{-x^2}{2} - 2x\right|_{-4}^{-2} + \left|\frac{x^2}{2} + 2x\right|_{-2}^{4} = 20$.

3. (c) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x}}{\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}} dx$ .....(i)

$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\sqrt{\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}} dx$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}} dx$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) को जोड़ने पर,

$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}} dx = [x]_0^{\pi/2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$.

4. (d) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\tan\theta} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\cot\theta}$

जोड़ने पर, $2I = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{1+\tan\theta} + \frac{1}{1+\cot\theta}\right) d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} d\theta = [\theta]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$.

5. (b) $f(x) = \int_a^x t^3 e^t dt = \int_a^0 t^3.e^t dt + \int_0^x t^3 e^t\, dt$

$\Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_a^0 t^3.e^t dt\right) + \frac{d}{dx}\left(\int_0^x t^3.e^t\, dt\right) = x^3 e^x$.

6. (b) माना $f(x) = x|x|$ तब $f(-x) = -x|-x| = -x|x| = -f(x)$

इसलिए $\int_{-1}^1 x|x|\, dx = 0$, (निश्चित समाकल के प्रगुण से).

7. (b) $I = \int_0^\pi x \log\sin x\, dx$ .....(i)

$= \int_0^\pi (\pi - x)\log\sin(\pi - x) dx$ .....(ii)

समी. (i) व (ii) को जोड़ने पर,

$2I = \int_0^\pi \pi \log\sin x\, dx \Rightarrow I = \frac{2\pi}{2}\int_0^{\pi/2} \log\sin x\, dx$

$= \pi\left(\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}\log\frac{1}{2}$.

8. (d) $\int_0^{\pi/2} \log\tan x\, dx = \int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) dx$

$= \int_0^{\pi/2} \log\sin x\, dx - \int_0^{\pi/2} \log\cos x\, dx = 0$,

$\left\{\because \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx\right\}$.

9. (a) $\int_0^{\pi/2} \log\sin x\, dx = \int_0^{\pi/2} \log\cos x\, dx$

$\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi/2} \log\sin x\cos x\, dx = \int_0^{\pi/2} \log\sin 2x\, dx - \int_0^{\pi/2} \log 2 dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \log\sin t dt - \frac{\pi}{2}\log 2$, ($2x = t$ रखने पर)

$= \frac{1}{2}.2\int_0^{\pi/2} \log\sin t\, dt - \frac{\pi}{2}\log 2$

$\Rightarrow 2I = I - \frac{\pi}{2}\log 2 \Rightarrow I = \frac{-\pi}{2}\log 2$, $\left\{\because \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt\right\}$.

10. (c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x\cos x} dx = I$ .....(i)

अब $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x\cos x} dx$ .....(ii)

जोड़ने पर, $2I = 0 \Rightarrow I = 0$.

11. (d) माना $f(x)=\log\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$

$$\Rightarrow f(-x)=\log\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-1}=-\log\left(\frac{2-x}{2+x}\right)=-f(x)$$

$$\therefore \int_{-1}^{1}\log\left(\frac{2-x}{2+x}\right)dx=0.$$

12. (c) माना $f(x)=x^{17}\cos^4 x$

$$f(-x)=(-x)^{17}\{\cos(-x)\}^4=-f(x)$$

इसलिए , $\int_{-1}^{1}x^{17}\cos^4 x\,dx=0$.

13. (d) माना $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{3/2}x\,dx}{\cos^{3/2}x+\sin^{3/2}x}$ .....(i)

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{3/2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos^{3/2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin^{3/2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{3/2}x\,dx}{\sin^{3/2}x+\cos^{3/2}x}$$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) को जोडने पर,

$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}1dx=\frac{1}{2}[x]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}$.

14. (b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}\,dx=2\int_0^{\pi/2}|\sin x|\,dx$

$$=2[-\cos x]_0^{\pi/2}=2\left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos 0\right]=2.$$

15. (a) चूँकि $f(-\theta)=\log\left(\frac{2-\sin\theta}{2+\sin\theta}\right)^{-1}=-\log\left(\frac{2-\sin\theta}{2+\sin\theta}\right)=-f(\theta)$

$\therefore$ $f(x)$, x का विषम फलन है।

इसलिए $2\int_0^{\pi/2}\log\left(\frac{2-\sin\theta}{2+\sin\theta}\right)d\theta=0$.

16. (d) $\int_1^4 f(x)dx=\int_1^2(4x+3)dx+\int_2^4(3x+5)dx$

$$=\left|2x^2+3x\right|_1^2+\left|\frac{3x^2}{2}+5x\right|_2^4=37.$$

17. (c) $I=\int_0^{\pi/4}\log(1+\tan\theta)d\theta \Rightarrow I=\int_0^{\pi/4}\log\left\{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}d\theta$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\pi/4}\log\left(1+\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)d\theta$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\pi/4}\log 2d\theta-\int_0^{\pi/4}\log(1+\tan\theta)d\theta$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\log 2d\theta=\frac{\log 2}{2}|\theta|_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{8}\log 2.$$

18. (d) $I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2\theta}{a-b\cos\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\sin(2\pi-2\theta)}{a-b\cos(2\pi-\theta)}d\theta$

$$\Rightarrow I=-\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2\theta}{a-b\cos\theta}d\theta$$

$$\Rightarrow 2I=0\Rightarrow\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2\theta}{a-b\cos\theta}d\theta=0.$$

19. (a) $1-x=t\Rightarrow -dx=dt$ रखने पर, $x=0$ से 1, $t=1$ से 0

इसलिए $\int_0^1 f(1-x)dx=\int_1^0 f(t)(-dt)=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 f(x)dx$.

20. (a) माना $I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

यह $0\le x\le 1\Rightarrow 1\le(1+x^4)\le 2$

$$\Rightarrow 1\le\sqrt{1+x^4}\le\sqrt{2}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\le\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\le 1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\le\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}\le 1$$

अतः $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$ सबसे छोटा अन्तराल इस प्रकार है कि $I\in\left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$.

नोट : यदि अन्तराल $[a,b]$ में m , $f(x)$ का निम्निष्ठ मान तथा M, $f(x)$ का उच्चिष्ठ मान हो तब

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$

21. (c) $I=\frac{1}{c}\int_{ac}^{bc}f(x/c)dx$

$\frac{x}{c}=t\Rightarrow dx=c\,dt$ रखने पर तथा $x=bc\Rightarrow t=b$

$x=ac\Rightarrow t=a$ तो $I=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(x)dx$.

22. (a) $I=\int_{-1/2}^{1/2}(\cos x)\left[\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]dx$ .....(i)

$$\therefore I=\int_{-1/2}^{1/2}\cos(-x)\left[\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]dx$$

$$\Rightarrow I=-\int_{-1/2}^{1/2}\cos x\left[\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]dx$$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) को जोडने पर,

$$2I=\int_{-1/2}^{1/2}\cos x\left[\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]dx-\int_{-1/2}^{1/2}\cos x\left[\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]dx$$

या $2I=0$ या $I=0$.

23. (d) $\int_0^1\frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\pi}{4}$,

($x=\sin\theta, dx=\cos\theta\,d\theta$ रखने पर)

24. (b) यह आधारभूत प्रगुण है।

25. (c) $\int_{-1}^{1}|1-x|\,dx=\int_{-1}^{1}(1-x)dx=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=2.$

26. (c) $x-[x]$ एक आवर्ती फलन है जिसका आवर्तनांक 1 है.

$$\therefore\int_0^n\{x-[x]\}dx=n\int_0^1(x-[x])\,dx$$

$$=n\left[\int_0^1 x\,dx-\int_0^1[x]dx\right]=n\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1-0\right]=\frac{n}{2}.$$

27. (b) माना $I=\int_0^{\pi} x\sin^3 x\,dx$ .....(i)

अब $I=\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin^3 x\,dx$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) को जोड़ने पर,

$$2I=\pi\int_0^{\pi}\sin^3 x\,dx=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\{3\sin x-\sin 3x\}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[-3\cos x+\frac{\cos 3x}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{4}\left[3-\frac{1}{3}+3-\frac{1}{3}\right]=\frac{4\pi}{3}$$

अतः $I=\frac{2\pi}{3}$.

28. (b) $\int_{-2}^{2}|1-x^2|\,dx=\int_{-2}^{-1}|1-x^2|\,dx+\int_{-1}^{1}|1-x^2|\,dx+\int_1^2|1-x^2|\,dx$

$$=-\int_{-2}^{-1}(1-x^2)dx+\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx-\int_1^2(1-x^2)dx$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=4.$$

29. (c) माना $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ .....(i)

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}dx$$

$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) को जोड़ने पर,

$$2I=\int_0^{\pi/2}(1)dx=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}.$$

30. (d) $I=\int_0^{\pi/2}\frac{x\sin x\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$ .....(i)

$=\int_0^{\pi/2}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x\sin x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) को जोड़ने पर,

$$2I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x\sin x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{\tan x\sec^2 x}{1+\tan^4 x}dx$$

$\tan^2 x=t$ रखने पर,

$$I=\frac{\pi}{8}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{8}[\tan^{-1}t]_0^{\infty}=\frac{\pi^2}{16}.$$

31. (b) माना $I=\int_0^{\pi/2}\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$

$x-\frac{\pi}{4}$ ऋणात्मक है, जब $x\le\frac{\pi}{4}$ व धनात्मक जब $x>\frac{\pi}{4}$

$$=-\int_0^{\pi/4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx=2-\sqrt{2}.$$

32. (d) यह आधारभूत प्रगुण है।

33. (b) $\int_0^{\pi/2}|\sin x-\cos x|\,dx$

$$=\int_0^{\pi/4}-(\sin x-\cos x)dx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\sin x-\cos x)dx=2(\sqrt{2}-1).$$

34. (c) $\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx=2\int_0^{\pi/2}|\cos x|\,dx=2[\sin x]_0^{\pi/2}=2.$

35. (b) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin^{-4}x\,dx=2\int_0^{\pi/4}\frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}\sec^4 x\,dx=2\int_0^{\pi/4}\frac{\sec^4 x\,dx}{\tan^4 x}$

$\tan x=t$ रखने पर, $2\int_0^1\frac{1+t^2}{t^4}dt$

$$=2\left[\int_0^1 t^{-4}dt+\int_0^1 t^{-2}dt\right]=2\left[\left|-\frac{1}{3t^3}\right|_0^1+\left|-\frac{1}{t}\right|_0^1\right]=-\frac{8}{3}.$$

36. (b) $\int_0^{1.5}[x^2]dx=\int_0^1[x^2]dx+\int_1^{\sqrt{2}}[x^2]dx+\int_{\sqrt{2}}^{1.5}[x^2]dx$

$$=0+\int_1^{\sqrt{2}}1dx+\int_{\sqrt{2}}^{1.5}2dx=\sqrt{2}-1+3-2\sqrt{2}=2-\sqrt{2}.$$

37. (d) $I=\int_0^{\pi}\frac{x\tan x}{\sec x+\tan x}dx=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\tan(\pi-x)}{\sec(\pi-x)+\tan(\pi-x)}dx$

$$\Rightarrow 2I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\tan x}{\sec x+\tan x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\int_0^{\pi}1dx-\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin x}\right]$$

सरल करने पर, $I=\frac{\pi^2}{2}-\pi=\pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

38. (a) माना $I=\int_0^{\pi}\frac{x\tan x}{\sec x+\cos x}dx=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\tan(\pi-x)}{\sec(\pi-x)+\cos(\pi-x)}dx$

हल करने पर, $I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$\cos x=t$ रखकर हल करने पर, $I=\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$.

39. (a) $\int_{-1}^{1}\sin^3 x\cos^2 x\,dx=0$,

चूँकि फलन विषम है

40. (b) माना $f(x)=\int_0^{\pi}e^{\sin^2 x}\cos^3(2n+1)x.dx$

चूँकि $\cos(2n+1)(\pi-x)=\cos[(2n+1)\pi-(2n+1)x]$

$=-\cos(2n+1)x$ व $\sin^2(\pi-x)=\sin^2 x$

निश्चित समाकल प्रगुण से,

$$\int_0^{\pi}e^{\sin^2 x}\cos^3(2n+1)x\,dx=0,\ [f(2a-x)=-f(x)].$$

41. (b) $\int_{1/e}^{e}|\log x|\,dx=\int_{1/e}^{1}-\log x\,dx+\int_1^e\log x\,dx$

$$=[x-x\log x]_{1/e}^{1}+[x\log x-x]_1^e$$

$$=(1-0)-\left\{\frac{1}{e}-\frac{1}{e}(-1)\right\}+e-e+1=2-\frac{2}{e}=2\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

42. (a) $\int_0^{\pi/2}\{x-[\sin x]\}dx=\int_0^{\pi/2}xdx-\int_0^{\pi/2}[\sin x]\,dx$

$$=\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{8},\quad\left[\because\int_0^{\pi/2}[\sin x]dx=0\right].$$

43. (c) $I=\int_0^1 x(1-x)^n\,dx$

$$-I=\int_0^1 -x(1-x)^n\,dx=\int_0^1 (1-x-1)(1-x)^n\,dx$$

$$=\int_0^1 (1-x)^{n+1}dx-\int_0^1 (1-x)^n\,dx$$

$$=\left[\frac{(1-x)^{n+2}}{-(n+2)}\right]_0^1-\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{-(n+1)}\right]_0^1=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}.$$

44. (c) $\int_{\pi}^{2\pi}[2\sin x]dx=\int_{\pi}^{\pi+(\pi/6)}(-1)dx+\int_{\pi+(\pi/6)}^{\pi+(\pi/2)}(-2)dx$

$$+\int_{\pi+(\pi/2)}^{\pi+(\pi/2)+(\pi/3)}(-2)dx+\int_{\pi+(\pi/2)+(\pi/3)}^{2\pi}(-1)dx$$

$$=-\frac{\pi}{6}-2\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right]-2\left[\frac{\pi}{3}\right]-1\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right]$$

$$=-\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}-\frac{8\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=-\frac{10\pi}{6}=-\frac{5\pi}{3}.$$

45. (c) माना फलन $g(a)=\int_a^{a+T}f(x)dx$

$$=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T}f(x)dx$$

अन्तिम समाकल में $x-T=y$ रखने पर,

$$\int_T^{a+T}f(x)dx=\int_0^a f(y+T)dy=\int_0^a f(y)dy$$

$$\Rightarrow g(a)=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$$

अतः $g(a)$, a से स्वतंत्र है

46. (b) $\int_0^{\pi}xf(\cos^2 x+\tan^4 x)dx=k\int_0^{\pi/2}f(\cos^2 x+\tan^4 x)dx$

निश्चित समाकल प्रगुण से,

$$I=\int_0^{\pi}xf(\cos^2 x+\tan^4 x)dx \quad .....(i)$$

$$=\int_0^{\pi}(\pi-x)f(\cos^2 x+\tan^4 x)dx \quad .....(ii)$$

समीकरण (i) व (ii) को जोड़ने पर,

$$2I=\pi\int_0^{\pi}f(\cos^2 x+\tan^4 x)dx$$

$$\Rightarrow 2I=2\pi\int_0^{\pi/2}f(\cos^2 x+\tan^4 x)dx$$

$$\Rightarrow I=\pi\int_0^{\pi/2}f(\cos^2 x+\tan^4 x)dx$$

दिए गये समाकल से तुलना करने पर $k=\pi$.

47. (c) $\int_{-3}^{3}\frac{x^2\sin x}{1+x^6}dx=0$

निश्चित समाकल प्रगुण से, $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$,जब $f(x)=-f(-x)$.

48. (d) $I=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\tan^3 x}=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx \quad .....(i)$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x+\sin^3 x}dx \quad .....(ii)$$

समीकरण (i) व (ii) को जोड़ने पर, $2I=\int_0^{\pi/2}dx\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}.$

49. (a) $I=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{\phi}{1+\sin\phi}d\phi=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{\pi-\phi}{1+\sin(\pi-\phi)}d\phi$

$$\left\{\because \frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=\pi\right\}$$

$$\Rightarrow 2I=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{\pi}{1+\sin\phi}d\phi$$

हल करने पर, $I=\pi(\sqrt{2}-1)=\pi\tan\frac{\pi}{8}.$

50. (b) चूँकि $I=\int_a^b xf(x)dx=\int_a^b(a+b-x)f(a+b-x)dx$

$$\Rightarrow I=\int_a^b(a+b)f(x)dx-\int_a^b xf(x)dx$$

$$\{\because f(a+b-x)=f(x)\}$$

$$\Rightarrow 2I=(a+b)\int_a^b f(x)dx\Rightarrow I=\int_a^b x\,f(x)dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

51. (a) $I=\int_0^{\pi}x\sin x dx=\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin x\,dx$

$$\Rightarrow 2I=\pi\int_0^{\pi}\sin x dx=\pi[-\cos x]_0^{\pi}\Rightarrow I=\pi.$$

52. (d) चूँकि $\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx=a\pi$

अतः इसकी तुलना दिए गये मान से करने पर, $k=a$.

53. (b) यह आधारभूत प्रगुण है।

54. (a) जोड़ने पर, $I+J=\int_0^{\pi/4}dx=\frac{\pi}{4}\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}-J$.

55. (d) $\int_1^5(|x-3|+|1-x|)\,dx=\int_1^5|x-3|\,dx+\int_1^5|1-x|\,dx$

$$=\int_1^3-(x-3)dx+\int_3^5(x-3)dx+\int_1^5-(1-x)dx=12.$$

56. (d) $I=\int_2^3\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}}dx \quad .....(i)$

प्रगुण $I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$ का प्रयोग करने पर,

अर्थात् $x=(2+3-x)=5-x$ या $dx=-dx$

$$\therefore I=\int_3^2\frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}}(-dx)=\int_2^3\frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}}dx \quad .....(ii)$$

समीकरण (i) व (ii) को जोडने पर ,

$$2I=\int_2^3\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}}dx=\int_2^3 1dx$$

$$=[x]_2^3=3-2=1\Rightarrow I=\frac{1}{2}.$$

57. (c) माना $I=\int_0^{\pi}e^{\cos^2 x}\cos^5 3x\,dx=\int_0^{\pi}e^{\cos^2 x}\cos^5 3(\pi-x)dx$,

$$\left[\because \int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx\right]$$

$$I=-\int_0^{\pi}e^{\cos^2 x}\cos^5 3xdx=-I\Rightarrow 2I=0\Rightarrow I=0.$$

58. (b) $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx=\frac{\pi}{4}.$

59. (c) $I = \int_{-1}^{1} \frac{\sin x - x^2}{3-|x|} dx = \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{3-|x|} dx - \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{3-|x|} dx$

यहाँ $f(x) = \frac{\sin x}{3-|x|}$ विषम फलन है लेकिन $f(x) = \frac{x^2}{3-|x|}$ सम फलन है।

$\therefore I = -\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{3-|x|} dx = -2\int_{0}^{1} \frac{x^2}{3-|x|} dx = 2\int_{0}^{1} \frac{-x^2}{3-|x|} dx$.

60. (d) चूँकि $f(x) = \sin^{11} x$ विषम फलन है,इसलिए $\int_{-1}^{1} \sin^{11} x \, dx = 0$.

61. (a) $I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\sin(m+n)x - \sin(m-n)x] dx$

$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]_0^{\pi}$

$= -\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{(-1)^{m+n}}{m+n} - \frac{(-1)^{m-n}}{m-n}\right\} - \left\{\frac{1}{m+n} - \frac{1}{m-n}\right\}\right]$

चूँकि $n - m$ विषम है इसलिए $n + m$ भी विषम होगा अतः $(-1)^{m+n} = (-1)^{m-n} = -1$.

साथ ही, चूँकि $|m| \neq |n|$, $m + n \neq 0, m - n \neq 0$

$\therefore I = \frac{1}{m+n} - \frac{1}{m-n} = \frac{m-n-m-n}{m^2-n^2} = \frac{2n}{n^2-m^2}$.

62. (d) दिया गया समाकलन $I = \int_{-2}^{2} (px^2 + s) dx + q\int_{-2}^{2} x dx$

$I = 2\int_0^2 (px^2 + s) dx + 0 = \frac{4}{3}(4p + 3s)$

इस प्रकार I का आंकिक मान ज्ञात करने के लिए p व s के मानों की आवश्यकता है।

63. (b) $I = \int_0^{\pi} \sqrt{(1-\cos 2x)} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{(1-\cos 2x)} dx + ...$

$..... + \int_{(r-1)\pi}^{r\pi} \sqrt{(1-\cos 2x)} dx + ... + \int_{99\pi}^{100\pi} \sqrt{(1-\cos 2x)} dx$

$\because \int_0^{na} f(x) dx = n\int_0^a f(x) dx$, यदि $f(a+x) = f(x)$

$\therefore I = 100\int_0^{\pi} \sqrt{(1-\cos 2x)} dx$

$I = 100\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin x dx = 200\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$

$= 200\sqrt{2}[-\cos x]_0^{\pi/2} = 200\sqrt{2}$.

64. (c) यदि $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, तब $f(-x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x)$

इसलिए $\int_{-1}^{1} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = 0$.

65. (c) दिया है $\int_2^4 (3 - f(x)) dx = 7 \Rightarrow 6 - \int_2^4 f(x) dx = 7$

$\Rightarrow \int_2^4 f(x) dx = -1$.

अब $\int_2^{-1} f(x) dx = -\int_{-1}^{2} f(x) dx = -\left[\int_{-1}^{4} f(x) dx + \int_4^2 f(x) dx\right]$

$= -\left[\int_{-1}^{4} f(x) dx - \int_2^4 f(x) dx\right] = -(4+1) = -5$.

66. (a) हम जानते हैं कि यदि $f(t)$ विषम फलन है तो $\int_0^x f(t) \, dt$ एक सम फलन होगा। यहाँ $f(x) = \log\frac{1-x}{1+x}$ एक विषम फलन है अतः, $F(x)$ एक सम फलन होगा।

67. (a) $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+e^x} dx = \int_{-\pi/2}^{0} \frac{\cos x}{1+e^x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+e^x} dx$ .....(i)

$\int_{-\pi/2}^{0} \frac{\cos x}{1+e^x} dx$ में $x = -t$ रखने पर

$I = \int_{-\pi/2}^{0} \frac{\cos x}{1+e^x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{e^x \cos x}{1+e^x} dx$

$I = \int_0^{\pi/2} \frac{e^x \cos x}{1+e^x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+e^x} dx$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{(1+e^x)\cos x \, dx}{(1+e^x)} = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$.

68. (a) माना $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$.

$f(-x) = \sqrt{1-x+x^2} - \sqrt{1+x+x^2} = -f(x)$

अतः $f(x)$ एक विषम फलन है, इसलिए $\int_{-1}^{1} f(x) dx = 0$.

69. (c) माना $I = \int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{4+3\sin x}{4+3\cos x}\right) dx$.

$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{4+3\cos x}{4+3\sin x}\right) dx$,

$\left[\because \int_0^{\pi/2} f(x) dx = \int_0^{\pi/2} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx\right]$

$\Rightarrow I = -\int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{4+3\sin x}{4+3\cos x}\right) dx = -I$

$\Rightarrow 2I = 0 \Rightarrow I = 0$.

70. (b) $I = \int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{1+x-x^2}\right) dx = \int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{x+(x-1)}{1-x(x-1)}\right) dx$

$I = \int_0^1 (\tan^{-1} x + \tan^{-1}(x-1)) dx$

$I = \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx + \int_0^1 \tan^{-1}(x-1) dx$

$I = \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx + \int_0^1 \tan^{-1}(1-x-1) dx$,

$\{\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ का द्वितीय समाकलन में प्रयोग से$\}$

$I = \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx + \int_0^1 \tan^{-1}(-x) dx$

$I = \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx - \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx = 0$.

71. (d) माना $I = \int_0^{2\pi} \cos^{99} x \, dx$.

तब $I = 2\int_0^{\pi} \cos^{99} x \, dx$, $\{\because \cos^{99}(2\pi - x) = \cos^{99} x\}$

अब $\int_0^{\pi} \cos^{99} x \, dx = 0$, $\{\because \cos^{99}(\pi - x) = -\cos^{99} x\}$

$\therefore I = 2 \times 0 = 0$.

72. (b) $\int_0^2 x^2[x]dx = \int_0^1 x^2(0)dx + \int_1^2 x^2(1)dx = 0 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{3}$.

73. (b) $\int_0^{\pi} \cos^3 x dx = \int_0^{2.\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx = 0$,

$\{\because \cos^3(\pi - x) = -\cos^3 x\}$.

74. (d) $\int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx = \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x\, dx$

$= [-\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 1+1+1+1 = 4$.

75. (a) स्पष्टतः फलन $\frac{x^2 \sin 2x}{x^2+1}$ विषम है।

अतः $\int_{-3}^{3} \frac{x^2 \sin 2x}{x^2+1} dx = 0$.

76. (a) $\int_0^{\pi} 2\log \sin x dx = 2\int_0^{2\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx = 4\int_0^{\pi/2} \log \sin x\, dx$

$= 4 \times \left(-\frac{\pi}{2}\log 2\right) = -2\pi \log_e 2 = 2\pi \log_e\left(\frac{1}{2}\right)$.

77. (c) $f(\cos x)$ सम फलन है।

$\because f(\cos(-x)) = f(\cos x)$

$\therefore \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos x)dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$.

78. (b) $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = 2\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$,

$\{\because \int_0^{2a} f(x) = 2\int_0^a f(a-x)dx$, यदि $f(2a-x) = f(x)\}$

$I = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

79. (c) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x.dx}{\sin x + \cos x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x.dx}{\cos x + \sin x}$,

$\left(\because \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx\right)$

$2I = \int_0^{\pi/2} dx \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$.

80. (a) $I = \int_{-1}^{1} x \tan^{-1} x\, dx = 2\int_0^1 x \tan^{-1} x\, dx$

$\because x\tan^{-1} x$ समफलन है

$I = [2\frac{x^2}{2}\tan^{-1} x]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{x^2}{1+x^2}dx$

$I = [x^2 \tan^{-1} x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx$

$I = [x^2 \tan^{-1} x]_0^1 - [x]_0^1 + [\tan^{-1} x]_0^1$

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1$.

81. (b) $I = \int_{-a}^{a} \sin x f(\cos x)dx$

$f(x) = \sin x\, f(\cos x) \Rightarrow f(-x) = -\sin x\, f(\cos x)$

$\because f(x)$ विषम फलन है

$\therefore I = \int f(x)dx = 0$.

82. (c) दिया है, $2\int_0^{\pi} \sin^3 \theta\, d\theta = 2\int_0^{\pi} \frac{(3\sin\theta - \sin 3\theta)}{4} d\theta$

$= \frac{1}{2}\left[-3\cos\theta + \frac{\cos 3\theta}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left[-3(-1-1) + \frac{(-1-1)}{3}\right] = \frac{8}{3}$.

83. (a) $I = \int_{-1}^{2} |x|\, dx = \int_{-1}^{0} -x\, dx + \int_0^2 x\, dx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$

$= -\left[0 - \frac{1}{2}\right] + [2] = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

84. (b) $I = \int_0^3 |2-x|\, dx = \int_0^2 (2-x)dx + \int_2^3 -(2-x)dx$

$= \int_0^2 (2-x)dx - \int_2^3 (2-x)dx = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 - \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_2^3$

$\Rightarrow I = [4-2] - \left[6 - \frac{9}{2} - (4-2)\right] = 2 - \left[4 - \frac{9}{2}\right] = \frac{5}{2}$.

85. (a) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{2^{\sin x}}{2^{\sin x} + 2^{\cos x}} dx$ .....(i)

$I = \int_0^{\pi/2} \frac{2^{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{2^{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} + 2^{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2^{\cos x}}{2^{\cos x} + 2^{\sin x}} dx$ .....(ii)

(i) व (ii) को जोड़ने पर,

$2I = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2^{\sin x} + 2^{\cos x}}{2^{\sin x} + 2^{\cos x}}\right) dx = \int_0^{\pi/2} 1\, dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$.

86. (b) $\int_0^1 |3x^2 - 1|\, dx = \int_0^{1/\sqrt{3}} (1-3x^2)dx + \int_{1/\sqrt{3}}^{1} (3x^2-1)dx$

$= [x - x^3]_0^{1/\sqrt{3}} + [x^3 - x]_{1/\sqrt{3}}^{1}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{-1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$.

87. (c) $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} e^{-\cos^2 x} dx$

$\because \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} e^{-\cos^2 x}$ विषम फलन है, $\therefore I = 0$.

88. (b) $I = \int_{0.5}^{1.5} x f(x) dx = \int_{0.5}^{1.5} (2-x) f(2-x) dx$,

$\left[\because \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx\right]$

$= \int_{0.5}^{1.5} (2-x) f(x) dx = 2\int_{0.5}^{1.5} f(x) dx - I \Rightarrow I = \int_{0.5}^{1.5} f(x) dx$.

89. (a) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{x^2}\, dx}{e^{x^2} + e^{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}}$ तथा $I = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}\, dx}{e^{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} + e^{x^2}}$

$\left[\because \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx\right]$

$\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi/2} 1 dx = (x)_0^{\pi/2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$.

90. (b) $I=\int_1^5[|x-3|]\,dx \Rightarrow I=\int_1^3[-(x-3)]dx+\int_3^5[(x-3)]dx$

$\Rightarrow I=\int_1^2[-(x-3)]dx+\int_2^3[-(x-3)]dx+\int_3^4[x-3]dx+\int_4^5[x-3]dx$

$\Rightarrow I=\int_1^2 dx+\int_2^3 0\,dx+\int_3^4 0\,dx+\int_4^5 dx=[x]_1^2+[x]_4^5$

$\Rightarrow I=(2-1)+(5-4)=2$.

91. (d) $I=\int_{-2}^2|x|\,dx=-\int_{-2}^0 x\,dx+\int_0^2 x\,dx=-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^0+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$

$=-(-2)+(2)=4$.

92. (d) दिया है, $f(-x)=-f(x)$

हम जानते हैं, कि $\int_{-a}^a f(x)dx=0=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$

$\Rightarrow \int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx=0\Rightarrow \int_{-1}^0 f(x)dx=-5$

$\Rightarrow \int_{-1}^0 f(t)dt=-5$.

93. (c) $I_1=\int_a^{\pi-a} xf(\sin x)dx=\int_a^{\pi-a}(\pi-x)f(\sin(\pi-x))dx$,

$[\because \int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx]$

$=\int_a^{\pi-a}(\pi-x)f(\sin x)dx=\int_a^{\pi-a}\pi f(\sin x)dx-I_1$

$\Rightarrow 2I_1=\pi I_2\Rightarrow I_2=\frac{2}{\pi}I_1$.

94. (a) $I=\int_{-1/2}^{1/2}\cos x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$

$\cos x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ एक विषम फलन है, $(\because f(-x)=-f(x))$

$\therefore I=0$.

95. (b) $\int_{e^{-1}}^{e^2}\left|\frac{\log_e x}{x}\right|dx=\int_{e^{-1}}^1\left|\frac{\log_e x}{x}\right|dx+\int_1^{e^2}\left|\frac{\log_e x}{x}\right|dx$

$=\int_{e^{-1}}^1-\frac{\log x}{x}dx+\int_1^{e^2}\frac{\log x}{x}dx=\int_{-1}^0-z\,dz+\int_0^2 z\,dz$,

($\log_e x=z \Rightarrow (1/x)dx=dz$ रखने पर)

$=\left[-\frac{z^2}{2}\right]_{-1}^0+\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$.

96. (c) $\int_{-2}^3 f(x)dx=\int_{-2}^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$

$\because e^{\cos x}\sin x$ विषम फलन है

$\therefore \int_{-2}^3 f(x)dx=\int_{-2}^2 e^{\cos x}\sin x\,dx+\int_2^3 2\,dx=0+2(3-2)=2$.

97. (a) माना $\phi(x)=[f(x)+f(-x)][g(x)-g(-x)]$

तब, $\phi(-x)=[f(-x)+f(x)][g(-x)-g(x)]$

$\therefore \int_{-\pi}^{\pi}\phi(x)dx=0\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)+f(-x)][g(x)-g(-x)]dx=0$.

98. (c) $I=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{dx}{1+\sqrt{\cot x}}=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ .....(i)

$I=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$ .....(ii)

(i) व (ii) के जोड़ने पर, $2I=\int_{\pi/6}^{\pi/3}dx$; $I=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{12}$.

99. (a) $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2/3}x}{\sin^{2/3}x+\cos^{2/3}x}dx$

या $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2/3}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin^{2/3}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^{2/3}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx$

या $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{2/3}x}{\cos^{2/3}x+\sin^{2/3}x}dx$

$2I=\int_0^{\pi/2}\frac{(\sin^{2/3}x+\cos^{2/3}x)}{(\sin^{2/3}x+\cos^{2/3}x)}dx$

$\Rightarrow 2I=\int_0^{\pi/2}dx \Rightarrow I=\frac{1}{2}[x]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}$.

ट्रिक : $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\frac{\pi}{4}$.

100. (a) माना $f(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$

$f(-x)=\log\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\log(\sqrt{1+x^2}-x).\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)}{(\sqrt{1+x^2}+x)}$

$=\log\frac{[(1+x^2)-x^2]}{(\sqrt{1+x^2}+x)}=\log 1-\log(\sqrt{1+x^2}+x)$

$=-\log(\sqrt{1+x^2}+x)=-f(x)$

अतः $\int_{-1}^1\log(x+\sqrt{1+x^2})=0$,

$\left[\because \int_{-a}^a f(x)=0, \text{ यदि } f(-x)=-f(x)\right]$.

101. (d) $I=\int_{-\pi}^{\pi}(\cos ax-\sin bx)^2dx$

$I=\int_{-\pi}^{\pi}(\cos^2 ax+\sin^2 bx-2\cos ax\sin bx)\,dx$

$I=\int_{-\pi}^{\pi}(\cos^2 ax+\sin^2 bx)\,dx-\int_{-\pi}^{\pi}2\cos ax\sin bx\,dx$

$I=2\int_0^{\pi}(\cos^2 ax+\sin^2 bx)\,dx-0$

$I=2\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos 2ax}{2}+\frac{1-\cos 2bx}{2}\right)dx$

$I=\int_0^{\pi}(2+\cos 2ax-\cos 2bx)dx=2\pi$.

102. (b) $I=\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx=\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx$

$I=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx-\int_{\pi/2}^{\pi}\cos x\,dx=[\sin x]_0^{\pi/2}-[\sin x]_{\pi/2}^{\pi}$

$I=\left[\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right]-\left[\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right]=1+1=2$.

103. (c) यह एक आधारभूत प्रगुण है।

104. (b) $I=\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x}\cos^3 x\,dx$

$\Rightarrow I=\int_0^{\pi} e^{\sin^2(\pi-x)}\cos^3(\pi-x)dx$ .....(i)

$\Rightarrow I=-\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x}\cos^3 x\,dx$ .....(ii)

(i) व (ii) को जोड़ने पर, $2I=0 \Rightarrow I=0$.

105. (a) $\int_0^9[\sqrt{x}+2]dx=\int_0^1 2\,dx+\int_1^4 3\,dx+\int_4^9 4\,dx$

$=2+(12-3)+(36-16)=2+9+20=31$.

106. (c) $I=\int_0^{\sqrt{2}}[x^2]\,dx=\int_0^1[x^2]dx+\int_1^{\sqrt{2}}[x^2]\,dx$

$=\int_0^1 0\,dx+\int_1^{\sqrt{2}}dx=[x]_1^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$.

107. (c) $e^{x-[x]}$ एक आवर्ती फलन है, जिसका आवर्तनांक 1 है।

$\therefore \int_0^{1000} e^{x-[x]}dx=1000\int_0^1 e^{x-[x]}dx$,

$[\because [x]=0$, यदि $0<x<1]$

$=1000\,[e^x]_0^1=1000\,(e-1)$.

108. (c) $I=\int_{1/n}^{\frac{an-1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x}}dx=\int_{1/n}^{a-\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x}}dx$ .....(i)

$$=\int_{\frac{1}{n}}^{a-\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{\frac{1}{n}+a-\frac{1}{n}-x}\quad dx}{\sqrt{a-\left(\frac{1}{n}+a-\frac{1}{n}-x\right)}+\sqrt{\frac{1}{n}+a-\frac{1}{n}-x}}$$

$\left[\because \int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx\right]$

$I=\int_{\frac{1}{n}}^{a-\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}}dx$ .....(ii)

(i) व (ii) को जोड़ने पर, $2I=\int_{1/n}^{a-(1/n)}1\,dx=[x]_{1/n}^{a-\frac{1}{n}}$

$\Rightarrow 2I=a-\frac{1}{n}-\frac{1}{n}=\frac{na-2}{n} \Rightarrow I=\frac{na-2}{2n}$.

109. (c) $I=\int_0^{\pi/2}\sin 2x\log\tan x\,dx$,

$I=\int_0^{\pi/2}\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\log\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$,

$[\because \int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx]$

$=\int_0^{\pi/2}\sin 2x\log\cot x\,dx=-\int_0^{\pi/2}\sin 2x\log\tan x\,dx$

$\therefore I=-I \Rightarrow 2I=0 \Rightarrow I=0$.

110. (a) $I=\int_{-1/2}^{1/2}[x]dx+\int_{-1/2}^{1/2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$

यदि $f(x)=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$,

$f(-x)=\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=-\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=-f(x)$

$\therefore I=\int_{-1/2}^{1/2}[x]\,dx+0$, (चूँकि विषम फलन है)

$=\int_{-1/2}^0-1dx+\int_0^{1/2}0\,dx=-(x)_{-1/2}^0=\frac{-1}{2}$.

111. (b) $\int_0^{\pi}2\sin x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}0.\,dx=2[-\cos x]_0^{\pi}+0$

$=-2(\cos\pi-\cos 0)=-2(-1-1)=4$.

112. (c) $I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(3\sin x+\sin^3 x)dx=0$,

($\because$ फलन $(3\sin x+\sin^3 x)$ विषम है).

113. (c) $I=\int_0^1 x\left|x-\frac{1}{2}\right|dx=-\int_0^{1/2}x\left(x-\frac{1}{2}\right)+\int_{1/2}^1 x\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$

$=\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2}x-x^2\right)dx+\int_{1/2}^1\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)dx$

$=\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3}\right)_0^{1/2}+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{4}\right)_{1/2}^1$

$=\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{24}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{24}\right)=\frac{1}{8}$.

114. (a) $I=\int_0^8|x-5|\,dx=\int_0^5-(x-5)dx+\int_5^8(x-5)dx=17$.

115. (d) $I=\int_0^2|x-1|\,dx=\int_0^1(-x+1)dx+\int_1^2(x-1)dx$

$=\left(\frac{-x^2}{2}+x\right)_0^1+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)_1^2=1$.

116. (d) $\int_{-2}^2|[x]|\,dx=\int_{-2}^{-1}|[x]|\,dx+\int_{-1}^0|[x]|\,dx+\int_0^1|[x]|\,dx|+\int_1^2|[x]|\,dx$

$=\int_{-2}^{-1}2dx+\int_{-1}^0 1dx+\int_0^1 0\,dx+\int_1^2 1dx$

$=2[x]_{-2}^{-1}+[x]_{-1}^0+0+[x]_1^2$

$=2(-1+2)+(0+1)+(2-1)=2+1+1=4$.

117. (d) $\int_0^1\tan^{-1}\left(\frac{1}{x^2-x+1}\right)dx=\int_0^1\tan^{-1}x\,dx-\int_0^1\tan^{-1}(x-1)\,dx$

$=2\int_0^1\tan^{-1}x\,dx=2[\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)]_0^1=\frac{\pi}{2}-\log 2$.

118. (b) $\int_a^b\frac{x}{|x|}dx=-\int_a^b dx$, $(\because a<b<0)$

$=-(b-a)=|b|-|a|$.

119. (c) चूँकि $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ विषम फलन है

$\therefore \int_{-2}^2\left\{p\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+q\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-2}+r\right\}dx$

$=r\int_{-2}^2 dx=4r$. अतः r के मान पर निर्भर करता है।

120. (c) माना $I=\int_0^{\pi}\frac{xdx}{1+\sin x}$ .....(i)

$I=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)dx}{1+\sin(\pi-x)}$

$I=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)dx}{1+\sin x}$ ..... (ii), $\left\{\because \int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx\right\}$

(i) व (ii) को जोड़ने पर, $2I = \int_0^{\pi} \frac{\pi\, dx}{1+\sin x}$

$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} dx$

$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx = \pi \int_0^{\pi} (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx$

$2I = \pi[\tan x - \sec x]_0^{\pi} = \pi[0-(-1)-(0-1)]$, $2I = 2\pi$

$\therefore\ I = \pi$.

121. (d) $\int_{-2}^{3} |1-x^2|\, dx = \int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx + \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx + \int_{1}^{3}(x^2-1)dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1} + \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{3}$

$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 2\left(\frac{2}{3}\right) + (9-3) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{10}{3} + 6 = \frac{28}{3}$.

122. (a) दिया है $f(x) = |x-1|$

$\therefore\ \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 |x-1|\, dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx$

$= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2$

$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + (2-2) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 1$.

123. (b) माना $I = \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = A \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$

$2I = \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) f[\sin(\pi - x)] dx$

$= \int_0^{\pi} \pi f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$

$\Rightarrow\ 2I = 2\pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$

$\therefore\ I = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = A \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$; अतः $A = \pi$.

124. (c) $\sin x + \cos x = t \Rightarrow -(\sin x - \cos x) dx = dt$ रखने पर,

जब $x = 0$ से $\frac{\pi}{2}$, तब $t = 1$ से 1.

चूँकि यहाँ सीमा '1 से 1' है अतः समाकलन का मान 0 होगा $\left\{\because \int_a^a f(x) dx = 0\right\}$.

125. (c) दिया है $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = [\log t]_1^x = \log x - \log 1$

$\Rightarrow\ L(x) = \log x$, अतः $L(xy) = L(x) + L(y)$.

126. (c) $0 < x < 1$ के लिए, $1 < e^{x^2} < e$ अतः

$\int_0^1 1 dx < \int_0^1 e^{x^2} dx < \int_0^1 e\, dx \Rightarrow 1 < \int_0^1 e^{x^2} dx < e$.

127. (c) $P = \int_0^{3\pi} f(\cos^2 x) dx$ तथा $Q = \int_0^{\pi} f(\cos^2 x) dx$

$P = 3\int_0^{\pi} f(\cos^2 x) dx = 3Q \ \Rightarrow\ P - 3Q = 0$.

128. (c) $\int_0^3 (3ax^2 + 2bx + c) dx = \int_1^3 (3ax^2 + 2bx + c) dx$

$\Rightarrow\ \int_0^1 (3ax^2 + 2bx + c) dx + \int_1^3 (3ax^2 + 2bx + c) dx$

$= \int_1^3 (3ax^2 + 2bx + c) dx$

$\Rightarrow\ \int_0^1 (3ax^2 + 2bx + c) dx = 0$

$\Rightarrow\ \left[\frac{3ax^3}{3} + \frac{2bx^2}{2} + cx\right]_0^1 = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$.

129. (d) $I = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 px + \sin^2 qx - 2\sin qx \cos px) dx$

$= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 px + \sin^2 qx) dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} \sin qx \cos px\, dx$

$= 2\int_0^{\pi} (\cos^2 px + \sin^2 qx) dx - 0$

$= \int_0^{\pi} (2 + \cos 2px - \cos 2qx) dx = 2\pi$.

130. (a) $g(x+\pi) = \int_0^{x+\pi} \cos^4 t\, dt = \int_0^{\pi} \cos^4 t\, dt + \int_{\pi}^{x+\pi} \cos^4 t\, dt$

$= g(\pi) + f(x)$

$f(x) = \int_0^x \cos^4 u\, du = g(x)$, $(\because t = \pi + u)$

$\therefore\ g(x+\pi) = g(x) + g(\pi)$.

131. (d) $\int_0^1 dx + \int_0^1 e^{-x^2} dx = 1 + \int_0^1 e^{-x^2} dx$, किन्तु $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ समाकल योग्य नही है

132. (a) $I = \int_0^{2a} \frac{f(x)}{f(x) + f(2a-x)} dx$ .....(i)

$I = \int_0^{2a} \frac{f(2a-x)}{f(2a-x) + f(x)} dx$ .....(ii)

(i) व (ii) को जोड़ने पर, $2I = \int_0^{2a} dx = 2a \Rightarrow I = a$.

133. (b) $\int_0^{n\pi+v} |\sin x|\, dx = \int_0^{n\pi} |\sin x|\, dx + \int_{n\pi}^{n\pi+v} |\sin x|\, dx$

$= 2n + 1 - \cos v$.

134. (a) $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 1)\tan^{n-2} x\ dx$

$= \int_0^{\pi/4} \sec^2 x \tan^{n-2} x\ dx - \int_0^{\pi/4} \tan^{n-2} x\ dx$

$= \left[\frac{\tan^{n-1} x}{n-1}\right]_0^{\pi/4} - u_{n-2}$

$\Rightarrow u_n + u_{n-2} = \frac{1}{n-1}$.

135. (a) $\frac{\pi}{2} x = \theta \Rightarrow dx = \frac{2}{\pi} d\theta$ रखने पर, $x = 0$ से 1, $\theta = 0$ से $\frac{\pi}{2}$

$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \log \sin\theta\, d\theta = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2}\log 2\right] = -\log 2$.

136. (a) माना $I = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^2 d\theta = [-\theta^2 \cot\theta]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2\theta.\cot\theta.d\theta$

$= 2[\theta.\log \sin\theta]_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} \log \sin\theta\, d\theta$

$\Rightarrow \frac{I}{2} = 0 - \lim_{\theta \to 0} \theta \log . \sin\theta - \int_0^{\pi/2} \log \sin\theta\, d\theta$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\log 2$. अत: $I = \pi \log 2$.

137. (c) $x = \sin\theta$ रखने पर,

$$\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\log \sin\theta . \cos\theta}{\cos\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log \sin\theta \, d\theta = -\frac{\pi}{2}\log 2 .$$

138. (b) $I = \int_0^{\pi/2} x\cot x \, dx$

खण्डशः समाकलन करने पर,

$[x(\log \sin x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$

$I = -\left(-\frac{\pi}{2}\log 2\right) = \frac{\pi}{2}\log 2$.

139. (b) माना $x+1=t$ तथा जब $x = -2 \to 0$, तब $t = -1 \to 1$

$I = \int_{-1}^{1} (t^3 + 2 + t\cos t)\, dt$

चूँकि t^3 व $\cos t$ विषम फलन है; $\therefore I = \int_{-1}^{1} 2dt = [2t]_{-1}^{1} = 4$.

140. (a) दोनों पक्षों का अवकलन करने पर,

$-\sin^2 x \; f(\sin x)\cos x = -\cos x$

$\Rightarrow f(\sin x) = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3$.

141. (b) $\int_0^{2n\pi}\left(|\sin x| - \frac{1}{2}|\sin x|\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{2n\pi}|\sin x|\, dx$

$= \frac{2n}{2}\times 2\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 2n[-\cos x]_0^{\pi/2} = 2n.$

142. (a) चूँकि $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$,यदि $f(-x) = -f(x)$

$\Rightarrow \int_{-a}^{a} \frac{dx}{x+x^3} = 0$.

143. (a) $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$ .....(i)

$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}$ .....(ii)

(चूँकि $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)\, dx$)

(i) व (ii) को जोड़ने पर, $2I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} dx$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12}$.

144. (e) $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$

$\therefore I = 2\times 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$ .....(i)

$$I = 4\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx$$

$I = 4\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x}dx$ .....(ii)

(i) व (ii) को जोडने पर, $2I = 4\int_0^{\pi/2} dx = 4\times\frac{\pi}{2} = 2\pi$

$\Rightarrow I = \pi$.

145. (d) चूँकि f सतत फलन है, माना $x = t-1$

$\therefore dx = dt$ जब $x = -3 \to 5$ तब $t = -2 \to 6$

$\int_{-3}^{5} f(x)dx = \int_{-2}^{6} f(t-1)dt = \int_{-2}^{6} f(x-1)dx$.

निश्चित समाकलन द्वारा श्रेणी का योगफल, गामा फलन, लैबनीज का नियम

1. (b) दिया है, $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{1+n^2} + \frac{n}{4+n^2} + ... + \frac{1}{2n}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} \frac{n}{r^2+n^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} \frac{n}{n^2\left(1+\frac{r^2}{n^2}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n\left(1+\frac{r^2}{n^2}\right)} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

$\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n-1}\left\{f\left(\frac{r}{n}\right)\right\}.\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)dx \text{ सूत्र के उपयोग से}\right\}$

$= [\tan^{-1} x]_0^1 = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4}$.

2. (b) माना $S = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1^3+n^3} + \frac{4}{2^3+n^3} + ... + \frac{1}{2n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1^3+n^3} + \frac{4}{2^3+n^3} + ... + \frac{n^2}{n^3+n^3}$$

$$\therefore S = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{r^2}{r^3+n^3} = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{r^2}{n^3\left(\frac{r^3}{n^3}+1\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n}.\frac{\left(\frac{r}{n}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{r}{n}\right)^3\right]}$$

$A = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}dx$, (सूत्र के उपयोग से)

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^3}dx = \frac{1}{3}[\log_e(1+x^3)]_0^1 = \frac{1}{3}\log_e 2.$$

3. (b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^{99}+2^{99}+.....+n^{99}}{n^{100}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{r^{99}}{n^{100}}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{r}{n}\right)^{99} = \int_0^1 x^{99}dx = \left[\frac{x^{100}}{100}\right]_0^1 = \frac{1}{100}.$$

4. (b) माना $P = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}.\frac{2}{n}.\frac{3}{n}.\frac{4}{n}.........\frac{n}{n}\right)^{1/n}$

$$\therefore \log P = \frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\left(\log\frac{1}{n} + \log\frac{2}{n} + ... + \log\frac{n}{n}\right)$$

$$\log P = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n}\log\frac{r}{n}$$

$$\log P = \int_0^1 \log x\,dx = (x\log x - x)_0^1 = (-1) \Rightarrow P = 1/e \;.$$

5. (b) $L = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{2n} \frac{1}{n}.\frac{r/n}{\sqrt{1+(r/n)^2}} = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{5}-1$.

6. (d) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+.....+\frac{1}{2n}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{n+n}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+....+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n}\left[\frac{1}{1+\frac{r}{n}}\right] = \int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$

$$= [\log_e(1+x)]_0^1 = \log_e 2 - \log_e 1 = \log_e 2 \;.$$

7. (a) माना $I = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$$I = \int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}[\log(1+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2}[\log 2].$$

8. (b) $y = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+....+\frac{1}{\sqrt{n^2+(n-1)n}}\right]$

$$\Rightarrow y = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+....+\frac{1}{n\sqrt{1+\frac{(n-1)}{n}}}\right]$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+....+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(n-1)}{n}}}\right]$$

$y = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(k-1)}{n}}}$, $\frac{k-1}{n} = x$ व $\frac{1}{n} = dx$ रखने पर,

$$\Rightarrow y = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{n-1}{n}}\frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \lim_{n\to\infty}2\left[\sqrt{1+x}\right]_0^{\left(\frac{n-1}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow y = 2\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{2n-1}{n}}-1\right] = 2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n-1}{n}}-2$$

$$\Rightarrow y = 2\lim_{n\to\infty}\sqrt{2-\frac{1}{n}}-2 = 2\sqrt{2}-2 \;.$$

9. (a) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+.....+n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{r^p}{n^{p+1}}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{r}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

10. (b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n}e^{\frac{r}{n}} = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e-1$.

11. (b) माना $I = \int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}dx$

$x = \tan\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta\,d\theta$ रखने पर,

$$\therefore\; I = \int_0^{\pi/2}\log(\sec\theta)^2 d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\log\sec\theta\,d\theta$$

$$= -2\int_0^{\pi/2}\log\cos\theta\;d\theta = -2.\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2} = -\pi\log\frac{1}{2} = \pi\log 2\,.$$

12. (b)

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\cos^3 x dx = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma 2}{2\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{2}{15}$$

(गामा फलन का उपयोग करने पर)

13. (b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 x\,dx = 2\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx = 2\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{2+2}{2}\right)} = \frac{\pi}{2}$.

14. (d) $\int_0^\pi \left|\sin^4 x\right|dx = 2\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx$

गामा फलन का उपयोग करने पर

$$2\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx = 2\frac{\Gamma(5/2).\Gamma(1/2)}{2.\Gamma(6/2)} = \frac{3\pi}{8}\,.$$

15. (c) गामा फलन का उपयोग करने पर,

$$\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(2)} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2.1.\Gamma(1)} = \frac{\pi}{4}.$$

16. (a) माना $F_1(x) = y_1 = \int_2^x(2t-5)dt$ तथा $F_2(x) = y_2 = \int_0^x 2t\;dt$

अब प्रतिच्छेद बिन्दु का अर्थ है वह बिन्दु जहाँ $y_1 = y_2 = y \Rightarrow y_1 = x^2-5x+6$ व $y_2 = x^2$.

अतः सरल करने पर $x^2 = x^2-5x+6 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$ व

$y = x^2 = \frac{36}{25}$, इस प्रकार प्रतिच्छेद बिन्दु $\left(\frac{6}{5},\frac{36}{25}\right)$ हैं।

17. (d) $\int_0^\infty\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \int_0^\infty\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$

$$= \int_0^\infty\frac{1}{x^2+b^2}dx - a^2\int_0^\infty\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$$

$$= \left[\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x}{b}\right]_0^\infty - \frac{a^2}{(a^2-b^2)}\int_0^\infty\left(\frac{1}{x^2+b^2}-\frac{1}{x^2+a^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{b}.\frac{\pi}{2} - \frac{a^2}{(a^2-b^2)}\left[\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x}{b}-\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2(a+b)}.$$

18. (b) $\int_0^\infty\frac{x^3dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{x^2 2x\,dx}{(x^2+4)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{t}{(t+4)^2}dt$,

[$x^2 = t$ रखने पर]

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\frac{1}{t+4} - \frac{4}{(t+4)^2}\right]dt = \frac{1}{2}\left[\log(t+4) + \frac{4}{t+4}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2}[\log\infty + 0 - (\log 4 + 1)] = \infty .$$

19. (b) यहाँ घात सम है अतः सूत्र से

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x dx = \frac{(2m-1)}{2m}.\frac{(2m-3)}{(2m-2)}.....\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2m.(2m-1)(2m-2)....3.2.1.\frac{\pi}{2}}{[2m.(2m-2)(2m-4).....4.2]^2}$$

अंश व हर को $2m(2m-2)....4.2$ से गुणा करने पर,

$$\frac{(2m)!}{[2^m.m(m-1)(m-2).....2.1]^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2m)!}{(2^m.m!)^2}\frac{\pi}{2} .$$

20. (a) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx = \frac{\Gamma(3).\Gamma(1/2)}{2.\Gamma(7/2)} = \frac{8}{15}$.

21. (a) $I = \int_0^\infty \frac{x dx}{(1+x)(1+x^2)}$

$x = \tan\theta$ रखने पर,

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan\theta}{1+\tan\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

22. (c) $\phi'(x) = \sin x \frac{d}{dx}\sqrt{x} - \sin\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= \sin x.\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \phi'(1) = \frac{1}{2}\sin 1 + \sin 1 = \frac{3}{2}\sin 1 .$$

23. (d) माना $I(b) = \int_0^1 \frac{x^b - 1}{\log x} dx \Rightarrow I'(b) = \int_0^1 \frac{x^b \log x}{\log x} dx$

(यदि $I(\alpha) = \int_0^b f(x,\alpha)dx$, तब $I'(\alpha) = \int_0^b f'(x,\alpha)dx$, जहाँ $f'(x,\alpha)$, $f(x,\alpha)$ का α के सापेक्ष x को स्थिर रखते हुये, अवकलज है)

$$I'(b) = \int_0^1 x^b dx = \frac{1}{b+1}$$

$$\Rightarrow I(b) = \int \frac{db}{b+1} + c = \log(b+1) + c$$

यदि $b = 0$ तो $I(b) = 0$ अतः $c = 0 \Rightarrow I(b) = \log(b+1)$.

24. (c) $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{1}{x}\right)dx = -2[\tan^{-1}(x)]_0^1 = -\frac{\pi}{2}$.

25. (b) दिया है $F'(x) = 3\sin x + 4\cos x$

चूँकि $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}\right]$ में $F'(x) < 0$, अतः बिन्दु $x = \frac{4\pi}{3}$ पर

न्यूनतम मान $f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \int_{5\pi/4}^{4\pi/3} (3\sin u + 4\cos u)du$

$$= \frac{3}{2} - 2\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

26. (c) $\int_0^\infty e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x)dx$

$$= \left[-e^{-x}\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-2e^{-2x}\right)\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right)dx + \int_0^\infty e^{-2x}\cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}.$$

27. (b) $\int_0^{b-c} f''(x+a)dx = [f'(x+a)]_0^{b-c} = f'(b-c+a) - f'(a)$.

28. (c) $F'(x) = |x| > 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

अतः फलन $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ में वर्धमान है अतः फलन का उच्चिष्ठ मान $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ के दायें सीमान्त बिन्दु पर होगा

$$\Rightarrow \text{Max } F(x) = F\left(\frac{1}{2}\right) = \int_1^{1/2} |t|\, dt = -\frac{3}{8}.$$

29. (b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 x(\sin x + \cos x)dx$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x\, dx$$

$$= 0 + 2\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x dx = 0 + 2 \times \frac{2}{15} = \frac{4}{15} .$$

30. (a) $x = \tan\theta$ रखने पर, $\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^3}$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(\tan\theta + \sec\theta)^3} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)^3} d\theta$$

$$= \left[-\frac{1}{2(1+\sin\theta)^2}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

31. (d) हम जानते हैं, कि $\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \frac{db}{dx}f(b) - \frac{da}{dx}f(a)$

a व b , x के फलन हैं

$$\therefore F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\log t} dt$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{d}{dx}(x^3)\frac{1}{\log x^3} - \frac{d}{dx}(x^2)\frac{1}{\log x^2}$$

$$= \frac{3x^2}{3\log x} - \frac{2x}{2\log x} = x(x-1)(\log x)^{-1} .$$

32. (d) $f'(x) = e^{-(x^2+1)^2}.2x - e^{-(x^2)^2}.2x = 2xe^{-(x^4+1+2x^2)}\left(1 - e^{2x^2+1}\right)$

$$\Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in (-\infty, 0).$$

33. (b) दिया है, $f(x) = \int_{x^2}^{x^4} \sin\sqrt{t}\, dt$

$$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}(x^4)(\sin\sqrt{x^4}) - \frac{d}{dx}(x^2)(\sin\sqrt{x^2})$$

$$= 4x^3 \sin x^2 - 2x\sin x .$$

34. (c) दिया है, $F(x) = \frac{1}{x^2}\int_4^x (4t^2 - 2F'(t))dt$

$$\therefore F'(x) = \frac{1}{x^2}\left(4x^2 - 2F'(x)\right) - \frac{2}{x^3}\int_4^x (4t^2 - 2F'(t))dt$$

$$\Rightarrow F'(4) = \frac{1}{16}[64 - 2F'(4)] - 0$$

$$\Rightarrow F'(4) = \frac{32}{9}.$$

35. (c) माना $I = \int_0^1 f(k-1+x)dx$

$\Rightarrow I = \int_{k-1}^k f(t)dt$, जहाँ $t = k-1+x \Rightarrow I = \int_{k-1}^k f(x)dx$

$$\therefore \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + ... + \int_{n-1}^n f(x)dx$$

$$= \int_0^n f(x)dx.$$

36. (c) चूँकि $\sin^4 x + \cos^4 x$ आवर्ती फलन है जिसका आवर्तनांक $\frac{\pi}{2}$ है, अतः $\int_a^{a+(\pi/2)}(\sin^4 x + \cos^4 x)\,dx$

$$= \int_0^{\pi/2}(\sin^4 x + \cos^4 x)dx$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx = \frac{2\Gamma(5/2)\Gamma(1/2)}{2\Gamma\left(\frac{4+0+2}{2}\right)} = \frac{3\pi}{8}.$$

37. (a) $\int_0^\pi \sin^5\frac{x}{2}dx = 2\int_0^{\pi/2}\sin^5 t\,dt = 2.\frac{\Gamma\frac{6}{2}.\Gamma\frac{1}{2}}{2\Gamma\frac{7}{2}} = \frac{16}{15}.$

38. (c) $\int f(x)dx = xe^{\log\left|\frac{1}{x}\right|} + f(x) \Rightarrow \int f(x)dx = \frac{x}{|x|} + f(x)$

दोनों पक्षों का अवकलन करने पर, $f(x) = 0 + f'(x)$

हम जानते हैं, कि $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x, \therefore f(x) = ce^x$.

39. (b) $I = \int_0^{\pi/2}\sin^4 x\cos^6 x.dx$

$\Rightarrow I = \frac{\Gamma(5/2)\Gamma(7/2)}{2\Gamma(6)}$, (गामा सूत्र के उपयोग से)

$$\Rightarrow I = \frac{3/2.1/2.\sqrt{\pi}.5/2.3/2.1/2.\sqrt{\pi}}{2.5.4.3.2.1} = \frac{3\pi}{512}.$$

40. (c) $\int_0^{\pi/2}(\sqrt{\sin\theta}\cos\theta)^3\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\sin^{3/2}\theta\cos^3\theta\,d\theta$

गामा सूत्र के उपयोग से

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{3/2}\theta\cos^3\theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{\frac{3}{2}+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\frac{3}{2}+3+2}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma(5/4)\,\Gamma 2}{2\Gamma(13/4)} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{2.\frac{9}{4}.\frac{5}{4}.\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{8}{45}.$$

41. (a) $I = \int_0^\infty \log\left(x + \frac{1}{x}\right)\frac{1}{1+x^2}dx$

$x = \tan\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta\,d\theta$ रखने पर,

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2}\log(\tan\theta + \cot\theta)\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2}\log(\tan\theta + \cot\theta)d\theta$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2}\log\frac{(1+\tan^2\theta)}{\tan\theta}d\theta$$

$$\Rightarrow I = 2\int_0^{\pi/2}\log\sec\theta\,d\theta - \int_0^{\pi/2}\log\tan\theta\,d\theta$$

$$\Rightarrow I = 2\int_0^{\pi/2}\log\sec\theta\,d\theta\,; \quad \left\{\because \int_0^{\pi/2}\log\tan\theta = 0\right\}$$

$$\Rightarrow I = -2\int_0^{\pi/2}\log\cos\theta\,d\theta$$

$$\Rightarrow I = -2\times\frac{-\pi}{2}\log 2\,, \left\{\because \int_0^{\pi/2}\log\cos\theta = -\frac{\pi}{2}\log 2\right\}$$

$$\Rightarrow I = \pi\log 2.$$

42. (a) $I = \int_0^\infty \frac{x\log x}{(1+x^2)^2}dx$

$x = \tan\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta\,d\theta$ रखने पर,

$$\therefore I = \int_0^{\pi/2}\frac{\tan\theta\log(\tan\theta)}{\sec^4\theta}\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\log(\tan\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\log(\tan\theta)d\theta = 0\,,$$

$$\left\{\because \int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\ \log\ \tan\theta\ d\theta = 0\right\}.$$

43. (d) दिया गया है $f(t) = \int_{-t}^t \frac{dx}{1+x^2} = [\tan^{-1}x]_{-t}^t = 2\tan^{-1}t$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर, $f'(t) = \frac{2}{1+t^2}$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{2}{2} = 1.$$

44. (a) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3}\log t\,dt$

लैबनीज नियम से,

$$F'(x) = \log x^3.\frac{d}{dx}x^3 - \log x^2.\frac{d}{dx}x^2$$

$$= 3\log x.3x^2 - 2\log x.2x = (9x^2 - 4x)\log x.$$

45. (c) $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^4 x\cos^6 x\,dx = 2\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\cos^6 x.dx$

$\because \int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx,$ यदि $f(-x) = f(x)$

$= 0,$ यदि $f(-x) = -f(x)$

गामा सूत्र के उपयोग से, $I = \dfrac{2\,\Gamma 5/2 . \Gamma 7/2}{2.\Gamma 6}$

$= \dfrac{3/2.1/2.\sqrt{\pi}.5/2.3/2.1/2.\sqrt{\pi}}{5.4.3.2.1} = \dfrac{3\pi}{2^8} = \dfrac{3\pi}{256}$.

46. (c) $I = \left[\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)\right]_0^1 = \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

47. (a) $f'(x) = \sqrt{2-x^2} \Rightarrow x^2 - \sqrt{2-x^2} = 0$

या $x^4 + x^2 - 2 = 0$ या $(x^2+2)(x^2-1) = 0$

$\therefore x^2 - 1 = 0, \ \therefore x = \pm 1$.

48. (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x)(1+x^2)} = \int_0^\infty \frac{-\frac{1}{2}dx}{(1+x)} + \int_0^\infty \frac{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)}{1+x^2}dx$

$= \left[\dfrac{-1}{2}\log(1+x)\right]_0^\infty + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}[\log(1+x^2)]_0^\infty + \dfrac{1}{2}[\tan^{-1}x]_0^\infty$

$= 0 + 0 + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\pi}{2} - 0\right] = \dfrac{\pi}{4}$.

49. (b) $x = a\sin\theta \Rightarrow dx = a\cos\theta\, d\theta$ रखने पर,

अब $\displaystyle\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^6\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos\theta\cos\theta\,d\theta$

$\displaystyle = a^6\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta = a^6\,\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right).\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma 4} = \frac{\pi}{32}a^6$,

(गमा सूत्र के उपयोग से).

50. (c) $x = a(1-\cos 2\theta) \Rightarrow dx = 2a\sin 2\theta\, d\theta$ रखने पर

$\therefore \displaystyle\int_0^a x(2ax - x^2)^{3/2}dx$

$\displaystyle = \int_0^{\pi/4} 2a^5(1-\cos 2\theta)\sin^4 2\theta\; d\theta$

पुनः $2\theta = \phi$ रखने पर

$\displaystyle = a^5\left[\int_0^{\pi/2}\sin^4\phi\,d\phi - \int_0^{\pi/2}\sin^4\phi\cos\phi\,d\phi\right] = a^5\left[\frac{3\pi}{16} - \frac{1}{5}\right]$.

51. (a) $\displaystyle I = \int_0^a x^2(a^2-x^2)^{3/2}dx$

$x = a\sin\theta \Rightarrow dx = a\cos\theta\, d\theta$ रखने पर,

$\displaystyle I = \int_0^{\pi/2} a^2\sin^2\theta . a^3\cos^3\theta . a\cos\theta\, d\theta$

$\displaystyle = a^6\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^4\theta\,d\theta = a^6\,\frac{\Gamma\frac{3}{2}.\Gamma\frac{5}{2}}{2.\Gamma\frac{8}{2}}$

$= a^6\,\dfrac{\frac{1}{2}.\sqrt{\pi}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\sqrt{\pi}}{2.3.2.1} = \dfrac{\pi a^6}{32}$.

52. (d) $\displaystyle\frac{d}{dx}F(x) = \frac{e^{\sin x}}{x} \Rightarrow \int_1^4 \frac{3}{x}e^{\sin x^3}dx = \int_1^4 \frac{3x^2}{x^3}e^{\sin x^3}dx$

$x^3 = t \Rightarrow 3x^2dx = dt$ रखने पर,

$\displaystyle F(t) = \int_1^{64}\frac{e^{\sin t}}{t}dt = \int_1^{64}F(t)dt = F(64) - F(1)$,

तुलना करने पर, $k = 64$.

53. (b) $\displaystyle f(x) = \int_0^x t\sin t\,dt$

लैबनीज नियम के अनुसार, $f'(x) = x\sin x.(1) - 0 = x\sin x$.

54. (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}\sec^2\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2}\sec^2\frac{4}{n^2} + \frac{3}{n^2}\sec^2\frac{9}{n^2} + ... + \frac{1}{n}\sec^2 1\right] =$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^n \frac{r}{n^2}\sec^2\frac{r^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^n\frac{r}{n}\sec^2\frac{r^2}{n^2}$

$\displaystyle = \int_0^1 x\sec^2 x^2 dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\int_0^1 2x\sec^2 x^2dx = \frac{1}{2}\int_0^1\sec^2 t\,dt$, $[x^2 = t]$

$= \dfrac{1}{2}[\tan t]_0^1 = \dfrac{1}{2}\tan 1$.

वक्रों द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल, परिक्रमण ठोस का आयतन व वक्रपृष्ठ

1. (c) दिया गया वक्र $y = \log x$ व $x = 1$, $x = 2$ है।

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $= \displaystyle\int_1^2 \log x\,dx = (x\log x - x)_1^2$

$= 2\log 2 - 1 = (\log 4 - 1)$ वर्ग इकाई.

2. (b) अभीष्ट क्षेत्रफल $= \displaystyle\int_0^a y\,dx = \int_0^a xe^{x^2}dx$

$x^2 = t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2x}$ जब $x = 0 \Rightarrow t = 0$ एवं

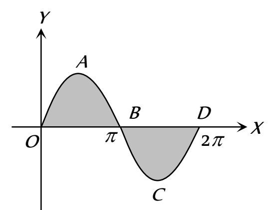
$x = a \Rightarrow t = a^2$ रखने पर,

$\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{a^2}e^t dt = \frac{1}{2}[e^t]_0^{a^2} = \frac{e^{a^2}-1}{2}$ वर्ग इकाई.

3. (b) दिया है, $y = \sin x$

x	0	$\pi/6$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y	0	0.5	1	0	–1	0

ग्राफ बनाने पर



अभीष्ट क्षेत्रफल = (OAB का क्षेत्रफल) + (BCD का क्षेत्रफल)

$\displaystyle = \int_0^\pi y\,dx + \int_\pi^{2\pi}(-y)dx$,

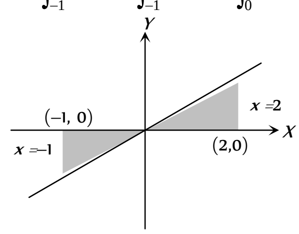
($\because$ BCD का क्षेत्रफल x – अक्ष के नीचे है)

$\displaystyle = \int_0^\pi \sin x\,dx - \int_\pi^{2\pi}\sin x\,dx = 4$ वर्ग इकाई.

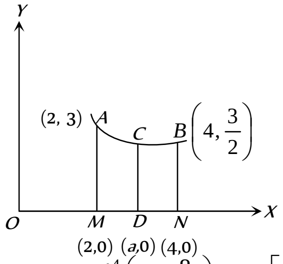
4. (c) अभीष्ट क्षेत्रफल $= \displaystyle\int_1^4 x\,dy = \int_1^4\frac{\sqrt{y}}{2}dy$

$= \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}|\,y^{3/2}|_1^4 = \dfrac{7}{3}$ वर्ग इकाई.

5. (a) अभीष्ट क्षेत्रफल$= \displaystyle\int_{-1}^2 y\,dx = \int_{-1}^0 y.dx + \int_0^2 y.dx = \frac{5}{2}$ वर्ग इकाई.



6. (b) माना $x = a$ पर कोटि क्षेत्रफल को दो भागों में बाँटती है



$AMNB$ का क्षेत्रफल $= \int_2^4 \left(1 + \frac{8}{x^2}\right) dx = \left[x - \frac{8}{x}\right]_2^4 = 4$

$ACDM$ का क्षेत्रफल $= \int_2^a \left(1 + \frac{8}{x^2}\right) dx = 2$

हल करने पर, $a = \pm 2\sqrt{2}$ चूँकि $a > 0 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$.

7. (b) $y = \cos x$, जब $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos x \geq 0$

जब $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \cos x \leq 0$

जब $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], \cos x \geq 0$

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल =

$\int_0^{\pi/2} y dx = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-\cos x) dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos x dx$

$= 1 + 2 + 1 = 4$ वर्ग इकाई.

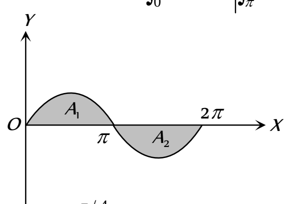
8. (d) अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_1^4 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^4 = \frac{255}{4}$ वर्ग इकाई.

9. (a) अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_1^4 y \, dx = c \int_1^4 \frac{1}{x} dx = 2c \log 2$ वर्ग इकाई.

10. (a) अभीष्ट क्षेत्रफल $= k \int_\pi^{2\pi} \sin x \; dx = k[-\cos x]_\pi^{2\pi} = -2k$

अतः क्षेत्रफल $= 2k$ वर्ग इकाई.

11. (d) अभीष्ट क्षेत्रफल $A_1 + A_2 = \int_0^\pi y \, dx + \left|\int_\pi^{2\pi} y \, dx\right| = 4\pi$ वर्ग इकाई.

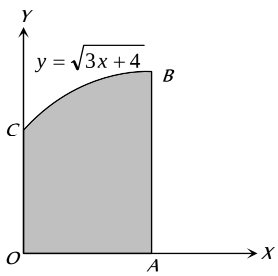


12. (b) अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^{\pi/4} (\sin 2x + \cos 2x) dx$

$= \left[-\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/4}$

$= \frac{1}{2}\left[-\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + \cos 0 - \sin 0\right] = 1$ वर्ग इकाई.

13. (d) क्षेत्रफल $= \int_0^4 \sqrt{3x + 4} dx = \left|\frac{(3x+4)^{3/2}}{3.(3/2)}\right|_0^4$



$= \frac{2}{9} \times 56 = \frac{112}{9}$ वर्ग इकाई.

14. (a) वक्र $y^2 = 4ax$ व $y = mx$ बिन्दु $\left(\frac{4a}{m^2}, \frac{4a}{m}\right)$ पर प्रतिच्छेद करते हैं अतः इनके द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल

$= \int_0^{4a/m^2} (\sqrt{4ax} - mx) dx$.

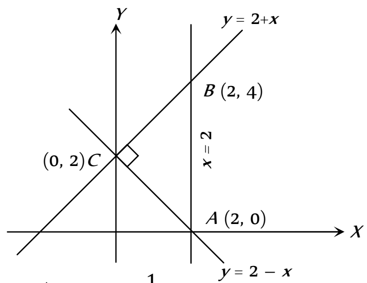
$\therefore \int_0^{4a/m^2} (\sqrt{4ax} - mx) dx = \frac{a^2}{3}$

$\Rightarrow \frac{8}{3} \frac{a^2}{m^3} = \frac{a^2}{3} \Rightarrow m^3 = 8 \Rightarrow m = 2$.

15. (a) $y^2 = x$ तथा $2y = x \Rightarrow y^2 = 2y \Rightarrow y = 0, 2$

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^2 (y^2 - 2y) dy = \left(\frac{y^3}{3} - y^2\right)_0^2 = \frac{4}{3}$ वर्ग इकाई.

16. (b) स्पष्टतः त्रिभुज ACB, C पर समकोण है



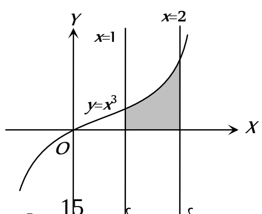
$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AC \times BC$

$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$ वर्ग इकाई

17. (d) $A_1 = \int_0^{\pi/3} \cos x \, dx = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $A_2 = \int_0^{\pi/3} \cos 2x \, dx = \frac{\sqrt{3}}{4}$

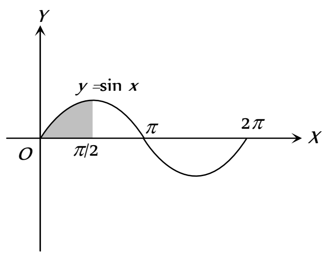
$\therefore A_1 : A_2 = 2 : 1$.

18. (b) छायांकित क्षेत्रफल $= \int_1^2 y \, dx = \int_1^2 x^3 .dx = \frac{1}{4}[x^4]_1^2$



$A = \frac{1}{4}[16 - 1] = \frac{15}{4}$ वर्ग इकाई.

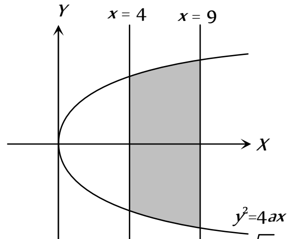
19. (b) वक्र, x-अक्ष के परितः सममित है।



$\therefore$ रेखांकित भाग का क्षेत्रफल

$= 2\int_0^{\pi/2} \sin x dx = 2[-\cos x]_0^{\pi/2} = 2$.

20. (d) $\therefore$ रेखांकित भाग का क्षेत्रफल $A = 2\int_4^9 \sqrt{4ax}\,dx$



$A = 4\sqrt{a} \times \frac{2}{3}[x^{3/2}]_4^9 = \frac{152\sqrt{a}}{3}$.

21. (a) वक्र $y = x$ और $y = x + \sin x$ एक दूसरे को (0, 0) और (π, π) पर प्रतिच्छेदित करते हैं।

अतः दोनों वक्रों से घिरे हुये क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= \int_0^{\pi} (x + \sin x)dx - \int_0^{\pi} x\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx$

$= [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = -(-1) + (1) = 2$ वर्ग इकाई .

22. (c) अभीष्ट क्षेत्रफल $= 2\int_0^{\pi/3} \tan x\,dx = 2[\log \sec x]_0^{\pi/3} = 2\log(2)$.

23. (a) वक्र $y = a\sqrt{x} + bx$, यह वक्र (1, 2) से होकर गुजरता है,

$\therefore 2 = a + b$ .....(i)

तथा वक्र $y = a\sqrt{x} + bx$, रेखा $x = 4$ तथा x-अक्ष के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल 8 वर्ग इकाई है, तो

$\int_0^4 (a\sqrt{x} + bx)dx = 8$

$\Rightarrow \frac{2a}{3}[x^{3/2}]_0^4 + \frac{b}{2}[x^2]_0^4 = 8$, $\frac{2a}{3}.8 + 8b = 8$

$\Rightarrow 2a + 3b = 3$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) को हल करने पर $a = 3, b = -1$.

24. (b) $\int_0^2 2^{kx}\,dx = \frac{3}{\log 2} \Rightarrow 2^{2k} - 1 = 3k$. विकल्पों की जांच करने पर केवल विकल्प (b) ही संतुष्ट करता है।

25. (d) $\because \int_1^b f(x)dx = \sqrt{b^2+1} - \sqrt{2} = \sqrt{b^2+1} - \sqrt{1+1} = [\sqrt{x^2+1}]_1^b$

$\therefore f(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

26. (a) वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा कोटि $x = 1$ तथा $x = b$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $\int_1^b f(x)dx$ है, इसलिये दिये गये समीकरण से,

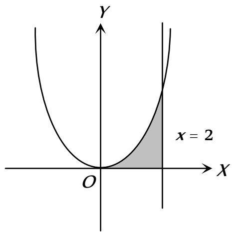
$\int_1^b f(x)dx = (b-1)\sin(3b+4)$

b के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$f(b).1 = 3(b-1)\cos(3b+4) + \sin(3b+4)$

$f(x) = 3(x-1)\cos(3x+4) + \sin(3x+4)$.

27. (b) $x^2 = 4y$



रेखांकित भाग का क्षेत्रफल $= \int_0^2 \frac{x^2}{4}dx = \frac{1}{12}[x^3]_0^2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

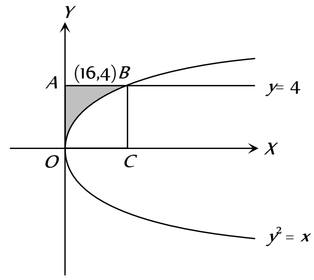
28. (a) $\int_0^2 (x^2 - 4x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{16}{3}$ वर्ग इकाई.

29. (c) दिया गया वक्र है, $y(x-2) = 3x + 10 \Rightarrow y = \frac{3x+10}{x-2}$

अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_3^4 y\,dx = \int_3^4 \frac{3x+10}{x-2}\,dx$

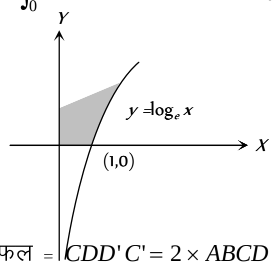
$= [3x + 16\log(x-2)]_3^4 = 3 + 16\log 2$ वर्ग इकाई .

30. (b) अभीष्ट क्षेत्रफल = $OABC$ का क्षेत्रफल – OBC का क्षेत्रफल

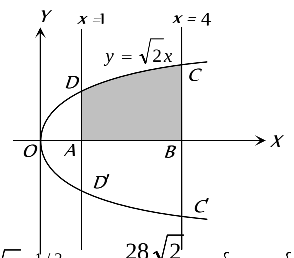


$= 16 \times 4 - \int_0^{16} \sqrt{x}\,dx = 64 - \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^{16} = \frac{64}{3}$.

31. (d) क्षेत्रफल $A = \int_0^{\infty} \log x.dx = (x\log x - x)_0^{\infty} = \infty$.



32. (b) अभीष्ट क्षेत्रफल $= CDD'C' = 2 \times ABCD$



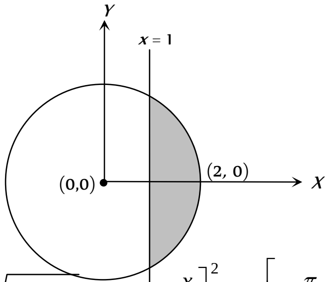
$= 2\int_1^4 \sqrt{2}x^{1/2}\,dx = \frac{28\sqrt{2}}{3}$ वर्ग इकाई .

33. (d) अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^2 [2^x - (2x - x^2)]dx$

$= \left[\frac{2^x}{\log 2} - x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^2$

$= \frac{4}{\log 2} - 4 + \frac{8}{3} - \frac{1}{\log 2} = \frac{3}{\log 2} - \frac{4}{3}$.

34. (b) लघु भाग का क्षेत्रफल $= 2\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$



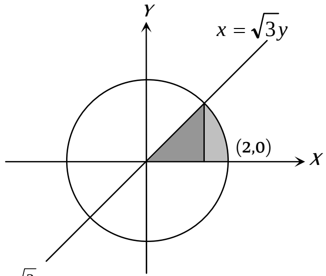
$= 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_1^2 = 2\left[2.\frac{\pi}{2} - \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - 2.\frac{\pi}{6}\right]\right]$

$= 2\left[\pi - \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right]\right] = \frac{8\pi}{3} - \sqrt{3}$.

35. (b) अभीष्ट क्षेत्रफल $A = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x . dx = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$

$= \frac{1}{2}[x]_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}[\sin 2x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

36. (c) अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{3}} dx + \int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$



$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}} + \left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_{\sqrt{3}}^2$

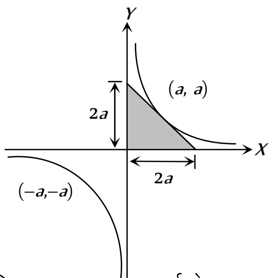
$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \left[\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}\right] = \frac{\pi}{3}$.

ट्रिक : चाप द्वारा खण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\theta^c R^2}{2}$

$= \frac{\pi}{6}.\frac{4}{2} = \frac{\pi}{3}$.

37. (b) वक्र $xy = a^2$ या $y = \frac{a^2}{x}$ .....(i)

वक्र पर स्थित दो बिन्दुओं के निर्देशांक $(a, a), (-a, -a)$ हैं।



वक्र के बिन्दु (a, a) पर स्पर्श रेखा का समीकरण है,

$y - a = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,a)}(x-a) = \left(\frac{-a^2}{x^2}\right)_{(a,a)}(x-a)$

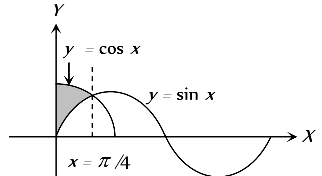
$\Rightarrow y - a = -(x-a)$

अतः (a, a) पर स्पर्शी का समीकरण $x + y = 2a$ है। रेखा $x + y = 2a$ का x-अक्ष के साथ अंतखण्ड $2a$ तथा y-अक्ष के साथ भी अंतखण्ड $2a$ है

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 2a \times 2a = 2a^2$.

38. (a) चित्र में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करना है।

यहाँ, $x = \frac{\pi}{4}$ दोनों वक्रों का प्रतिच्छेद बिन्दु है।



$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^{\pi/4}(\cos x - \sin x)dx$

$= [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right]$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$.

39. (b) वक्र पृष्ठ $= \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}dx$

दिया है; $a = 2,\ b = 3$ तथा $y = x + 1$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx} = 1 + 0$ or $\frac{dy}{dx} = 1$

अतः वक्र पृष्ठ

$= \int_2^3 2\pi(x+1)\sqrt{[1+(1)^2]}\, dx = \int_2^3 2\pi(x+1)\sqrt{2}\, dx$

$= 2\sqrt{2}\,\pi\int_2^3 (x+1)dx = 2\sqrt{2}\,\pi\left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_2^3$

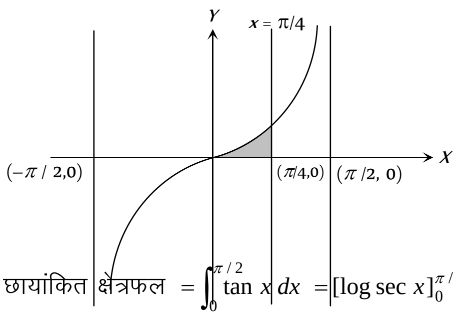
$= \frac{2\sqrt{2}}{2}\pi[(3+1)^2 - (2+1)^2] = \sqrt{2}\pi(16-9) = 7\sqrt{2}\pi = 7\pi\sqrt{2}$.

40. (c) यहाँ $y = 4x - x^2$ व $y = 0$; $\therefore$ $x = 0$, 4

अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^4$

$= 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$ वर्ग इकाई.

41. (d)



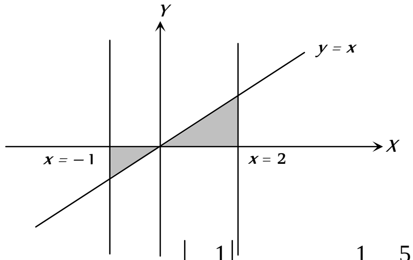
छायांकित क्षेत्रफल $= \int_0^{\pi/2} \tan x\, dx = [\log \sec x]_0^{\pi/4}$

$= \log\sec(\pi/4) - \log\sec 0 = \log\sqrt{2} - \log 1 = \log\sqrt{2}$.

42. (a) समीकरण $y = 0$ और $y = 4 + 3x - x^2$ को हल करने पर $x = -1, 4$ मिलता है तथा वक्र $x = -1$ और $x = 4$ के बीच x अक्ष पर कोई अन्तखण्ड नहीं काटता है

$\therefore$ क्षेत्रफल $= \int_{-1}^{4} (4 + 3x - x^2)dx = \frac{125}{6}$.

43. (d) घिरा हुआ क्षेत्र $= \left|\int_{-1}^{0} x\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2} x\,dx\right|$



$= \left|-\frac{1}{2}\right| + |\,2| = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

44. (c) दिया है, $y^2 = 4ax \Rightarrow y = 2\sqrt{ax}$

रेखा के समीकरण $x = a$ और $x = 4a$ हैं

$\therefore$ रेखा और परवलय के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल =

$$A = \int_a^{4a} y\,dx = \int_a^{4a} 2\sqrt{ax}\,dx = 2\sqrt{a}\int_a^{4a} x^{\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{a}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_a^{4a}$$

$$= \frac{4}{3}a^{\frac{1}{2}}\left[(4a)^{\frac{3}{2}} - (a)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{4}{3}a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}[8-1] = \frac{28}{3}a^2.$$

45. (b) $y = -x^2 + 2x + 3$ और $y = 0$; $x = -1$ व $x = 3$

अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_{-1}^{3}(-x^2 + 2x + 3)dx$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} = \frac{32}{3}.$$

46. (c) वक्र $y = x^3$ और $y = \sqrt{x}$

हल करने पर, $x = 0, x = 1$

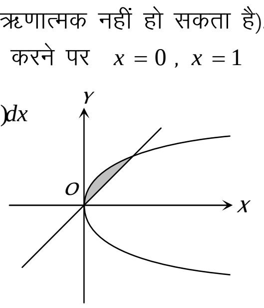
अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^1 (x^3 - \sqrt{x})dx$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x\sqrt{x}}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right] = \frac{5}{12},$$

(क्षेत्रफल ऋणात्मक नहीं हो सकता है).

47. (a) वक्र $y = x^2$ और $y = x$; हल करने पर $x = 0$, $x = 1$

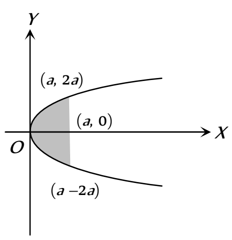
अभीष्ट क्षेत्रफल $A = \int_0^1 (x^2 - x)dx$



$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ वर्ग इकाई.

48. (c) क्षेत्रफल $= 2\int_0^a y\,dx = 2\int_0^a \sqrt{4ax}\,dx$

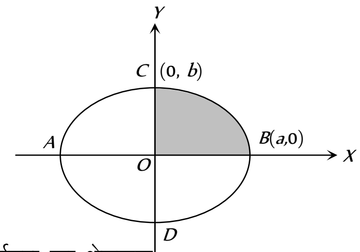


$2 \times 2\sqrt{a} \times \frac{2}{3}\left|x^{3/2}\right|_0^a = \frac{8}{3}a^2$ वर्ग इकाई.

49. (a) परवलय x अक्ष को निम्न बिन्दुओं पर काटता है जहाँ $\frac{3}{a}(a^2 - x^2) = 0 \Rightarrow x = \pm a.$ अतः अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \int_{-a}^{a}\frac{3}{a}(a^2 - x^2)dx = \frac{6}{a}\int_0^a (a^2 - x^2)dx = 4a^2 \text{ वर्ग इकाई.}$$

50. (a) चूँकि दिये गये समीकरण में x व y की सम घातें हैं, अतः वक्र x व y-अक्ष के सममित होगा।



$\therefore$ दीर्घवृत्त का क्षेत्रफल

$= 4(BCO$ का क्षेत्रफल$) = 4 \times \int_0^a y\,dx = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

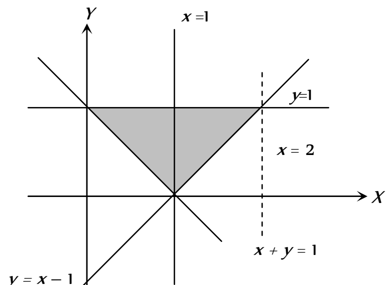
$= 4ab\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)d\theta$, { $x = a\sin\theta$ रखने पर }

$= 2ab\left(\int_0^{\pi/2} d\theta + \int_0^{\pi/2}\cos 2\theta\,d\theta\right)$

$= [\theta]_0^{\pi/2} + \left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \pi ab$ वर्ग इकाई.

51. (b) $y = x - 1$, यदि $x > 1$

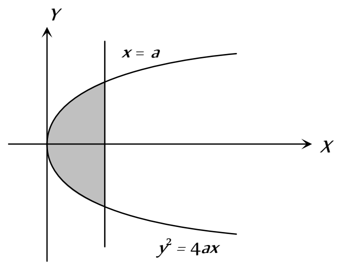
$y = -(x - 1)$, यदि $x < 1$



क्षेत्रफल $= \int_0^1 (1 - x)dx + \int_1^2 (x - 1)dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2$

$$= \left[1 - \frac{1}{2}\right] + \left[-\left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

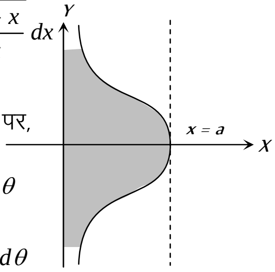
52. (b) अभीष्ट क्षेत्रफल $= 2\int_0^a \sqrt{4ax}\,dx$



$= 4\sqrt{a} \times \frac{2}{3}[x^{3/2}]_0^a = \frac{8\sqrt{a}}{3}.a\sqrt{a} = \frac{8}{3}a^2$.

53. (a) चूँकि वक्र x–अक्ष के परितः सममित है।

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $A = 2\int_0^a a\sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx$



$x = a\sin^2\theta$

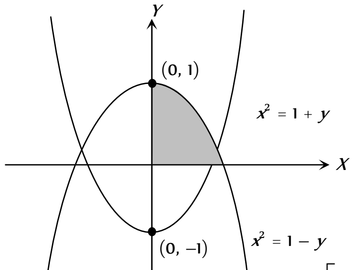
$\Rightarrow dx = 2a\sin\theta.\cos\theta\, d\theta$ रखने पर,

$A = 2\int_0^{\pi/2} a\sqrt{\frac{a\cos^2\theta}{a\sin^2\theta}}\, a\sin 2\theta\, d\theta$

$= 2a^2\int_0^{\pi/.2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

$A = 4a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\, d\theta \Rightarrow A = 4a^2.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \pi a^2$.

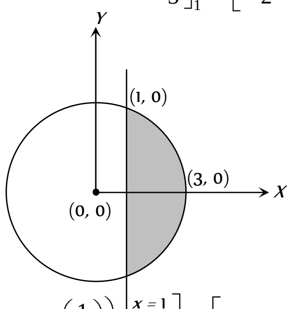
54. (d) दिये गये परवलय $x^2 = 1 + y$, $x^2 = 1 - y$ हैं



$\therefore$अभीष्ट क्षेत्रफल $= 4\int_0^1 (1 - x^2)dx = 4\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8}{3}$.

55. (b) लघु भाग का क्षेत्रफल $= I = 2\int_1^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx$

$= 2.\frac{1}{2}\left[x\sqrt{9 - x^2} + 9\sin^{-1}\frac{x}{3}\right]_1^3 = \left[9\frac{\pi}{2} - \sqrt{8} - 9\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$



$= \left[9\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right) - \sqrt{8}\right] = \left[9\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) - \sqrt{8}\right]$

$= [9\sec^{-1}(3) - \sqrt{8}]$.

56. (d) अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_1^3 |x - 2|\,dx = \int_1^2 (2 - x)dx + \int_2^3 (x - 2)dx$

$= \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

57. (d) दिये गये वक्रों के समीकरण को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है

$y = 2\sqrt{x}$ तथा $y = \frac{x^2}{4}$

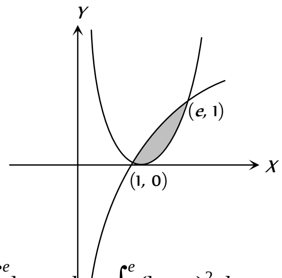
हम जानते हैं कि परवलयों द्वारा घिरा हुआ क्षेत्रफल $= \int_0^4 2\sqrt{x}\,dx - \int_0^4 \frac{x^2}{4}dx = \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3}$ वर्ग इकाई.

58. (b) $y^2 = 8x$ व $y = x \Rightarrow x^2 = 8x \Rightarrow x = 0, 8$

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^8 (2\sqrt{2}\sqrt{x} - x)dx$

$\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^8 = \frac{128}{3} - \frac{64}{2} = \frac{32}{3}$ वर्ग इकाई.

59. (a) अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_1^e [\log x - (\log x)^2]\,dx$



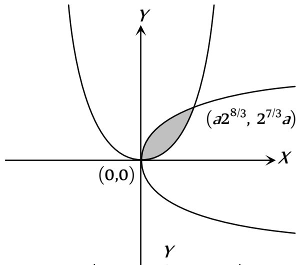
$A = \int_1^e \log x\,dx - \int_1^e (\log x)^2\,dx$

$= [x\log x - x]_1^e - [x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x]_1^e$

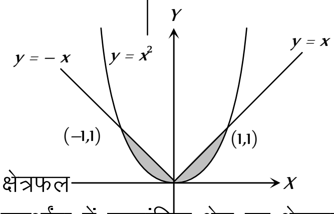
$= [e - e - (-1)] - [e(1)^2 - 2e + 2e - (2)]$

$= (1) - (e - 2) = 3 - e$.

60. (c) अभीष्ट क्षेत्रफल $A = \int_0^{(a2^{8/3})}\sqrt{4ax}\,dx - \int_0^{a2^{8/3}} \frac{x^2}{8a}dx = \frac{32a^2}{3}$



61. (b)



घिरा हुआ क्षेत्रफल

$= 2$ (प्रथम चतुर्थांश में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल)

$= 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

62. (c) वक्रों के समीकरण $y = \cos x$ तथा $y = \sin x$ हैं एवं कोटियाँ $x = 0$ व $x = \frac{\pi}{4}$ हैं। इसलिए घिरे हुए क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \int_0^{\pi/4}\cos x\,dx - \int_0^{\pi/4}\sin x\,dx$

$= [\sin x]_0^{\pi/4} - [-\cos x]_0^{\pi/4}$

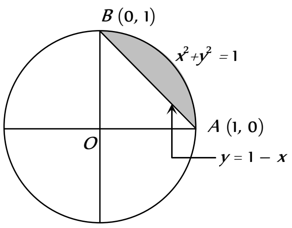
$= \left(\sin\frac{\pi}{4} - \sin 0\right) + \left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 0\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$

$= \sqrt{2} - 1$.

63. (a) प्रथम चतुर्थांश में वृत्त का क्षेत्रफल= $\frac{\pi(\pi^2)}{4}$ अर्थात् $\frac{\pi^3}{4}$ है तथा वृत्त व वक्र $y = \sin x$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल 2 वर्ग इकाई है। अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $\frac{\pi^3}{4} - 2 = \frac{\pi^3 - 8}{4}$.

64. (b) $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{1}{3}$.

65. (d) वक्र $x^2 + y^2 = 1$ तथा $x + y = 1$ मिलते है, जब $x^2 + (1-x)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 1 + x^2 - 2x = 1$



$\Rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow 2x(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 0, x = 1 \quad \Rightarrow y = 1, y = 0$,

अर्थात् $A(1,0)$; $B(0,1)$

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^1 [\sqrt{1-x^2} - (1-x)]\, dx$

$$= \left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1} x - x + \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

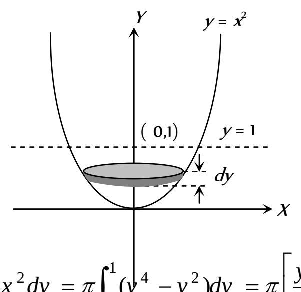
$$= \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

66. (c) वक्रों द्वारा घिरे हुए क्षेत्र का क्षेत्रफल

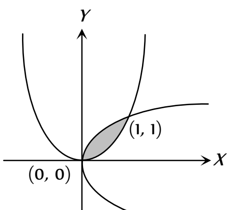
$= \int_0^1 (e^x - e^{-x})dx = [e^x + e^{-x}]_0^1 = e + \frac{1}{e} - 2.$

67. (b) $y = x^2$ व रेखा $y = 1$ से घिरा अभीष्ट क्षेत्रफल

$\int_0^1 2\pi\, xdy = 2\int_0^1 \pi\sqrt{y}dy = \frac{4\pi}{3}[y^{3/2}]_0^1 = \frac{4\pi}{3}$.



68. (c) $V = \int_0^1 \pi x^2 dy = \pi\int_0^1 (y^4 - y^2)dy = \pi\left[\frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1$

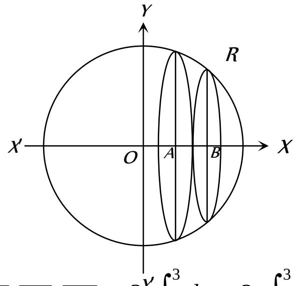


$= \pi\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right] = \frac{-2\pi}{15}$, (∵ आयतन धनात्मक होगा)

$\therefore$ ठोस का आयतन = $\frac{2\pi}{15}$ घन इकाई.

69. (b) वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 = 5^2$

$\therefore y^2 = 25 - x^2$, $2y\frac{dy}{dx} = -2x$, $\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$



छिन्नक का वक्र पृष्ठ $= 2\pi\int_2^3 yds = 2\pi\int_2^3 y.\frac{5}{y}dx$

$= 2\pi\int_2^3 5dx = 2\pi[5x]_2^3 = 10\pi$ सेमी.

70. (c) परवलय व जीवा के प्रतिच्छेद बिन्दु निम्न प्रकार ज्ञात किये जा सकते हैं

$y^2 = 4ax, y = 2ax \Rightarrow (2ax)^2 = 4ax$

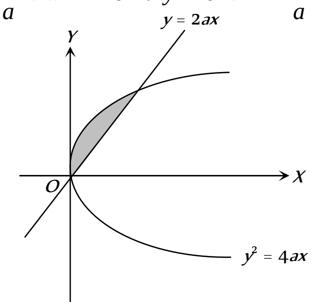
$\Rightarrow x[4a^2x - 4a] = 0 \Rightarrow 4ax[ax - 1] = 0$

$\Rightarrow x = 0$ या $x = \frac{1}{a}$ तथा $x = 0 \Rightarrow y = 0$ व $x = \frac{1}{a}$

$\Rightarrow y = \pm 2$

अतः अभीष्ट बिन्दु

(0,0) व $\left(\frac{1}{a}, 2\right)$ हैं



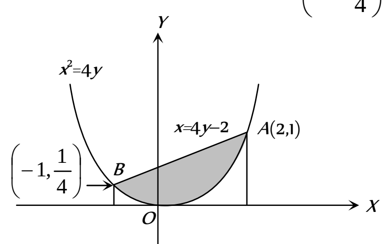
71. (a) वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ के $y = 0$ तथा $y = 2$ के बीच के भाग को y-अक्ष के परितः घुमाने पर प्राप्त गोले के छिन्नक का आयतन

$= \pi\int_0^2 x^2 dy = \pi\int_0^2 (9 - y^2)dy$

$= \pi\left[9y - \frac{1}{3}y^3\right]_0^2 = \pi\left[9 \times 2 - \frac{1}{3}(2)^3 - (9.0 - \frac{1}{3}.0)\right]$

$= \pi\left[18 - \frac{8}{3}\right] = \frac{46}{3}\pi$ घन इकाई.

72. (b) समीकरणों $x^2 = 4y$ व $x = 4y - 2$ को हल करने पर परवलय व रेखा के प्रतिच्छेद बिन्दु $A(2,1)$ व $B\left(-1, \frac{1}{4}\right)$ होंगे।



$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल = छायांकित क्षेत्रफल

$$= \left[\int_{-1}^{2} y\,dx_{(x=4y-2 \text{ से})}\right] - \left[\int_{-1}^{2} y dx_{(x^2=4y \text{ से})}\right]$$

$$= \int_{-1}^{2} \frac{1}{4}(x+2)dx - \int_{-1}^{2} \frac{1}{4}x^2 dx$$

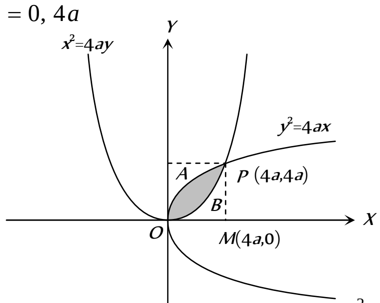
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2} - \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{8}$$ वर्ग इकाई.

73. (c) अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_{-1}^{1} x|\,x|\,dx = \int_{-1}^{0} -x^2 dx + \int_{0}^{1} x^2 dx$

$$= \left(\frac{-x^3}{3}\right)_{-1}^{0} + \left(\frac{x^3}{3}\right)_{0}^{1} = \left|\frac{-1}{3}\right| + \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3}.$$

74. (d) दिये गये समीकरणों को हल करने पर, $x^4 = 64a^3x$

$\Rightarrow x = 0, 4a$

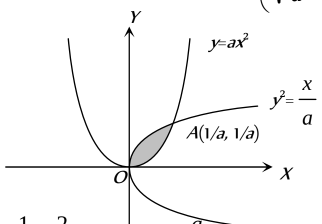


अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_{0}^{4a} 2a^{1/2}x^{1/2}dx - \int_{0}^{4a} \frac{x^2}{4a}dx$

$$= \frac{32}{3}a^2 - \frac{16}{3}a^2 = \frac{16}{3}a^2$$ वर्ग इकाई.

75. (b) A का x निर्देशांक $\frac{1}{a}$ है।

दी गई शर्त के अनुसार, $I = \int_{0}^{1/a}\left(\sqrt{\frac{x}{a}} - ax^2\right)dx$

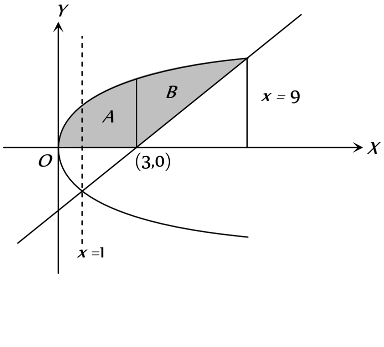


$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{\sqrt{a}}.\frac{2}{3}[x^{3/2}]_0^{1/a} - \frac{a}{3}[x^3]_0^{1/a} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

76. (a) $y^2 = x$ तथा $x = 2y+3$

$4y^2 = (x-3)^2$, $4x = x^2 - 6x + 9$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-9) = 0 \Rightarrow x = 1, 9$



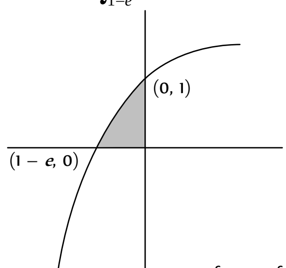
अभीष्ट क्षेत्रफल $= A+B = \int_{0}^{3}\sqrt{x}\,dx + \int_{3}^{9}\left[\sqrt{x} - \left(\frac{x-3}{2}\right)\right]dx$

$$= \frac{2}{3}[x^{3/2}]_0^3 + \frac{2}{3}[x^{3/2}]_3^9 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_3^9$$

$$= \frac{2}{3}3\sqrt{3} + \frac{2}{3}[9\times3 - 3\sqrt{3}] - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{81}{2} - 27\right) - \left(\frac{9}{2} - 9\right)\right]$$

$$= 18 - \frac{1}{2}[36 - 18] = 18 - 9 = 9$$ वर्ग इकाई.

77. (c) अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_{1-e}^{0} \log_e(x+e)\,dx$

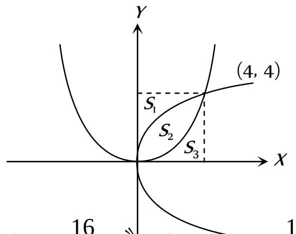


$= \int_{1}^{e} \log t\,dt = [t\log t - t]_1^e = 1$ वर्ग इकाई, ($x+e=t$ रखने पर).

78. (b) $y^2 = 4x$ और $x^2 = 4y$ रेखा $y = x$ के परितः सममित है

$\Rightarrow y^2 = 4x$ और $y = x$ के बीच का क्षेत्रफल

$$= \int_{0}^{4}(2\sqrt{x} - x)dx = \frac{8}{3}$$



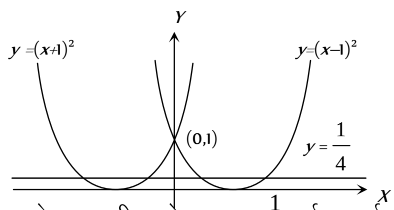
$\Rightarrow A_{s_2} = \frac{16}{3}$ और $A_{s_1} = A_{S_3} = \frac{16}{3}$

$\Rightarrow A_{S_1} : A_{S_2} : A_{S_2} :: 1:1:1.$

79. (a) दोनों स्थितियों में क्षेत्रफल समान होंगे, अतः $A : B = 1:1$.

80. (d) $9x^2 + 4y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, जोकि दीर्घवृत्त का समीकरण है। दीर्घवृत्त का क्षेत्रफल $= \pi\ 2.3 = 6\pi$.

81. (d) अभीष्ट क्षेत्रफल $= 2\left|\int_{1/4}^{1}(\sqrt{y} - 1)\,dy\right|$, (सममिति से)



हल करने पर अभीष्ट क्षेत्रफल $= \frac{1}{3}$ वर्ग इकाई.

82. (b) $\int_{\pi/4}^{\beta} f(x)dx = \beta\sin\beta + \frac{\pi}{4}\cos\beta + \sqrt{2}\beta$

β के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\therefore\ f(\beta) = \sin\beta + \beta\cos\beta - \frac{\pi}{4}\sin\beta + \sqrt{2}$,

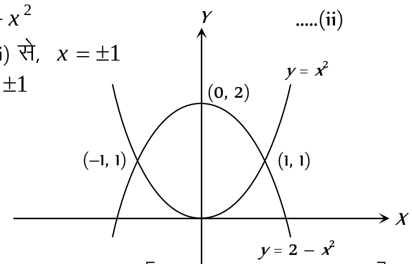
अतः $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(1 - \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\right)$.

83. (a) $y = x^2$ .....(i)

$y = 2 - x^2$ .....(ii)

(i) व (ii) से, $x = \pm 1$

$\therefore\ y = \pm 1$



$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= 2\left[\int_0^1 (2 - x^2)dx - \int_0^1 x^2 dx\right]$

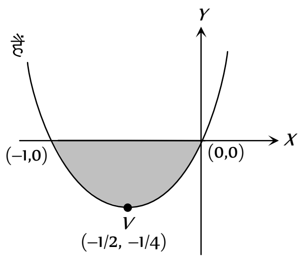
$= 2\left[2x - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = 4\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 4\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}$.

84. (c) $\frac{dy}{dx} = 2x + 1 \Rightarrow y = x^2 + x + c$

$\Rightarrow y = x^2 + x$, [$\because x = 1, y = 2$ रखने पर, $c = 0$)

$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = y + \frac{1}{4}$, जोकि परवलय का समीकरण है

जिसके शीर्ष $V = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}\right)$ हैं



$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \left|\int_{-1}^0 (x^2 + x)\,dx\right| = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)_{-1}^0$

$= \left|\frac{-1}{3} + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{6}$ वर्ग इकाई.

Critical Thinking Questions

1. (d) $0 < x < 1$ के लिए $\frac{1}{2}x^2 < x^2 < x$

$\Rightarrow -x^2 > -x$, अतः $e^{-x^2} < e^{-x}$,

अतः $\int_0^1 e^{-x^2}\cos^2 x\,dx > \int_0^1 e^{-x}\cos^2 x\,dx$.

तथा $\cos^2 x \le 1$

इसलिए $\int_0^1 e^{-x^2}\cos^2 x dx \le \int_0^1 e^{-x^2} dx < \int_0^1 e^{-x^2/2} dx = I_4$

अतः I_4 सबसे बड़ा समाकलन है।

2. (d) दिया है $f'(x) = f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1$

$\Rightarrow \log f(x) = x + \log c \Rightarrow f(x) = ce^x$

चूँकि $f(0) = 1$, अतः $1 = ce^0 \Rightarrow c = 1$

$f(x) = e^x$ एवं $g(x) = x^2 - e^x$

$\therefore \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 e^x(x^2 - e^x)dx = e - \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2}$.

3. (b) $I_m = \int_1^x (\log x)^m\,dx = ((\log x)^m . x)_1^x - \int_1^x m(\log x)^{m-1} . \frac{1}{x} x\,dx$

$= (\log x)^m . x - mI_{m-1}$

$\therefore\ I_m = k - l\,I_{m-1} \Rightarrow k - l\,I_{m-1} = x(\log x)^m - mI_{m-1}$

$\Rightarrow k = x(\log x)^m, l = m$.

4. (c) $I_1 = \int_{1-k}^k xf\{x(1-x)\}dx$

$= \int_{1-k}^k (1 - k + k - x) f[(1 - k + k - x)\{1 - (1 - k + k - x)\}]dx$

$\left(\because \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a + b - x)dx\right)$

$= \int_{1-k}^k (1 - x) f\{x(1-x)\}\,dx$

$= \int_{1-k}^k f\{x(1-x)\}\,dx - \int_{1-k}^k xf\{x(1-x)\}\,dx = I_2 - I_1$

$\therefore 2I_1 = I_2 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2}$.

5. (a) $\int_0^x f(t)dt = x + \int_x^1 t\,f(t)dt \Rightarrow \int_0^x f(t)dt = x - \int_1^x t\,f(t)dt$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $f(x) = 1 + \{0 - xf(x)\}$

$\Rightarrow f(x) = 1 - xf(x) \Rightarrow (1 + x)f(x) = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{1 + x}$

$\therefore\ f(1) = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$.

6. (b) $I = \int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt{1 - x^4}}dx = \int_0^1 \frac{x^6 x\,dx}{\sqrt{1 - x^4}}$

$x^2 = \sin\theta \Rightarrow 2x\,dx = \cos\theta\,d\theta$ रखने पर,

$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3\theta . \cos\theta\,d\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\,d\theta$

$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma 2\,\Gamma(1/2)}{2.\Gamma(5/2)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}$.

7. (c) चूँकि $\cos(2n + 1)(\pi - x) = \cos[(2n + 1)\pi - (2n + 1)x]$

$= -\cos(2n + 1)x$ व $\cos^2(\pi - x) = \cos^2 x$

अर्थात् $f(2a - x) = -f(x)$

अतः निश्चित समाकल प्रगुण से $\int_0^\pi e^{\cos^2 x}\cos^3(2n + 1)x\,dx = 0$

8. (a) फलन $f(x) = \frac{x}{x^3 + 16}$ एक वर्धमान फलन है। अतः

Min $f(x) = f(0) = 0$ व *Max* $f(x) = f(1) = \frac{1}{17}$

अतः $m(b - a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b - a)$

(जहाँ m व M फलन के क्रमशः सबसे छोटे व सबसे बड़े मान हैं)

$\Rightarrow 0 \le \int_0^1 \frac{x}{x^3 + 16}dx \le \frac{1}{17}$.

9. (b) यहाँ $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$,

जहाँ $f(x) = (ax^2 + bx + c)(1 + \cos^8 x)$

यदि $f(x) > 0(< 0) \forall x \in (1, 2)$ तो $\int_1^2 f(x)dx > 0(< 0)$. इस प्रकार $f(x) = (1 + \cos^8 x)(ax^2 + bx + c)$ को $x \in [1, 2]$ के कुछ मानों के लिए धनात्मक होना चाहिए एवं $x \in [1, 2]$ के लिए कुछ मानों के लिए ऋणात्मक होना चाहिए। चूँकि $(1 + \cos^8 x) \geq 1$ इसका अर्थ है कि यदि $g(x) = ax^2 + bx + c$, तो $\alpha, \beta \in (1, 2)$ के कुछ मानों का अस्तित्व इस प्रकार है कि $g(\alpha) > 0$ व $g(\beta) < 0$. चूँकि g, R में सतत् है। अतः α व β के बीच c के कुछ मानों का अस्तित्व इस प्रकार होगा कि $g(c) = 0$. इस प्रकार $ax^2 + bx + c = 0$ का कम से कम एक मूल (1, 2) में है अतः (0, 2) में है।

10. (a) अन्तराल को दो उपअन्तरालों I_1, $-1 \leq x < 0$ अर्थात् x ऋणात्मक है एवं $I_2, x \geq 0$ अर्थात् x धनात्मक है, में बदलने पर I_1 के लिए, $f(x) = \int_{-1}^x (-t)dt = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)$ .....(i)

I_2 के लिए, $f(x) = \int_{-1}^x (-t)dt + \int_0^x tdt$

$= -\frac{1}{2}[t^2]_{-1}^0 + \frac{1}{2}[t^2]_0^x = \frac{1}{2}(1 + x^2)$ .....(ii)

अतः फलन निम्न प्रकार परिभाषित होगा

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x^2 - 1), \text{यदि } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2}(x^2 + 1), \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -x, \text{ यदि } -1 < x < 0 \\ 0, \text{यदि } x = 0 \\ x, \text{यदि } x > 0 \end{cases}$$

f के लिए $x = 0$ पर $L = R = V = \frac{1}{2}$, अतः फलन $x = 0$ पर सतत् है। f' के लिए $x = 0$ पर $L = R = V = 0$ अतः f व f', $x = 0$ पर सतत् हैं। अतः दोनों फलन $x > -1$ के लिए सतत् हैं; अर्थात् $x + 1 > 0$.

11. (b) $g(2) = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt$

$\frac{1}{2} \leq f(t) \leq 1$ के लिए, $0 \leq t \leq 1$

$\int_0^1 \frac{1}{2} dt \leq \int_0^1 f(t)dt \leq \int_0^1 tdt$ के लिए, $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 f(t)dt \leq 1$ .....(i)

$0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$ के लिए,

$1 < t \leq 2$, $\int_1^2 0dt \leq \int_1^2 f(t)dt \leq \int_1^2 \frac{1}{2}dt$

$\therefore 0 \leq \int_1^2 f(t)dt \leq \frac{1}{2}$ .....(ii)

(i) तथा (ii) को जोड़ने पर, $1/2 \leq g(2) \leq 3/2$

$\therefore g(2)$, असमिका $0 \leq g(2) < 2$ को संतुष्ट करता है।

12. (c) $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + a^x} dx = \int_{\pi}^{-\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + a^{-x}}(-dx)$,

($-x$ के स्थान पर x रखने पर)

$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + a^{-x}} dx \Rightarrow I + I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\left(\frac{1}{1 + a^x} + \frac{1}{1 + a^{-x}}\right)dx$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\, dx \Rightarrow 2I = 2\int_0^{\pi} \cos^2 x.\, dx = \int_0^{\pi}(1 + \cos 2x)dx$

$\Rightarrow 2I = [x]_0^{\pi} + \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} \Rightarrow 2I = \pi \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}$.

13. (d) $f(x) = \frac{e^x}{x + 1}, I_1 = \int_{f(-a)}^{f(a)} xg\{x(1 - x)\}dx$

$I_2 = \int_{f(-a)}^{f(a)} g\{x(1 - x)\}dx$

$f(a) = \frac{e^a}{1 + e^a}, f(-a) = \frac{e^{-a}}{1 + e^{-a}}$

$\therefore f(a) + f(-a) = 1$

$2I_1 = \int_{f(-a)}^{f(a)} xg\{x(1 - x)\}dx$

$+ \int_{f(-a)}^{f(a)} \{f(a) + f(-a) - x\}g\{(1 - x)(x)\}dx$

$\Rightarrow 2I_1 = \int_{f(-a)}^{f(a)} g\{x(1 - x)\}dx = I_2$, $(\because f(a) + f(-a) = 1)$

$\therefore 2I_1 = I_2 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = 2$.

14. (d) माना $h(x) = \{f(x) + f(-x)\}\{g(x) - g(-x)\}$

$h(-x) = \{f(-x) + f(x)\}\{g(-x) - g(x)\}$

$= -\{f(-x) + f(x)\}\{g(x) - g(-x)\} = -h(x)$

अतः, $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} h(x)dx = 0$.

15. (d) यहाँ $f'(x) = 2Pe^{2x} + Qe^x + R$

$\Rightarrow f'(\log 2) = 8P + 2Q + R$ एवं $-1 = f(0) = P + Q$

व $\frac{39}{2} = \int_0^{\log 4} [f(x) - Rx]dx = \int_0^{\log 4} (Pe^{2x} + Qe^x)dx$

$\Rightarrow \frac{15P}{2} + 3Q = \frac{39}{2}$

हल करने पर, $P = 5, Q = -6$ व $R = 3$.

16. (d) $\sum_{n=1}^{10} \int_{-2n-1}^{2n} \sin^{27} x\, dx + \sum_{n=1}^{10} \int_{2n}^{2n+1} \sin^{27} x\, dx$

प्रथम भाग में $x = -t$ रखने पर,

$\sum_{n=1}^{10} \int_{-2n-1}^{2n} \sin^{27}(-t)(-dt) + \sum_{n=1}^{10} \int_{2n}^{2n+1} \sin^{27} x\, dx$

$= -\sum_{n=1}^{10} \int_{2n}^{2n+1} \sin^{27} x\, dx + \sum_{n=1}^{10} \int_{2n}^{2n+1} \sin^{27} x\, dx = 0$.

17. (a) $\int_0^1 (x - a)^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 f(x)dx + a^2 \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 2axf(x)dx$

$= a^2 + a^2 - 2a \times a = 0$.

18. (a) दिये गये समाकल में $a = 2$, $b = 3$ व $c = 0$ रखने पर अभीष्ट समाकल प्राप्त हो जाएगा।

19. (a) $l(m,n) = \int_0^1 t^m (1+t)^n\, dt$

$$\left[(1+t)^n \frac{t^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 - \int_0^1 n(1+t)^{n-1} \frac{t^{m+1}}{m+1} dt$$

$$= \frac{2^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} l(m+1, n-1).$$

20. (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{2}{n}\right)^4 + \left(\frac{3}{n}\right)^4 + ... + \left(\frac{n}{n}\right)^4\right\} -$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n^4}\right) + \left(\frac{2^3}{n^4}\right) + ... + \left(\frac{n^3}{n^4}\right)\right\}$$

$$= \int_0^1 (x)^4 dx - 0 = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}.$$

21. (a) $\int_0^{t^2} xf(x)dx = \frac{2}{5}t^5, t > 0$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर, $t^2 f(t^2)2t = 2t^4$

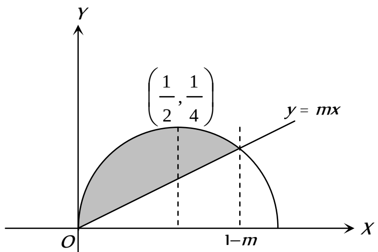
$\Rightarrow f(t^2) = t$

$t = \frac{2}{5}$ रखने पर, $f\left(\frac{4}{25}\right) = \frac{2}{5}.$

22. (b) दिया गया वक्र है, $y = x - x^2$

$\Rightarrow x^2 - x = -y \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\left(y - \frac{1}{4}\right)$

जो कि एक परवलय है जिसका शीर्ष $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ है।



अतः वक्र और रेखा के प्रतिच्छेद बिन्दु के लिये,

$x - x^2 = mx \Rightarrow x(1 - x - m) = 0$ अर्थात् $x = 0$ या $x = 1 - m$

$$\therefore \frac{9}{2} = \int_0^{1-m} (x - x^2 - mx)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - m\frac{x^2}{2}\right)_0^{1-m}$$

$$= (1-m)\frac{(1-m)^2}{2} - \frac{(1-m)^3}{3} = \frac{(1-m)^3}{6}$$

$\therefore (1-m)^3 = \frac{6 \times 9}{2} = 27 \Rightarrow 1 - m = 27^{1/3} = 3 \Rightarrow m = -2$

साथ ही, $(1-m)^3 - 3^3 = 0$

$\Rightarrow (1 - m - 3)[(1-m)^2 + 9 + (1-m)3] = 0$

$\Rightarrow (1-m)^2 + 3(1-m) + 9 = 0$

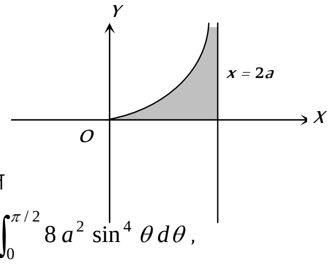
$\Rightarrow m^2 - 2m + 1 - 3m + 3 + 9 = 0 \Rightarrow m^2 - 5m + 13 = 0$

$m = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 52}}{2}$, अर्थात् m काल्पनिक है।

$\therefore m = -2$.

23. (b) वक्र के समीकरण $y^2(2a - x) = x^3$ से स्पष्ट है कि यह x-अक्ष के परितः सममित है तथा मूल बिन्दु से गुजरता है। अब $\frac{x^3}{2a - x} < 0$, जब $x > 2a$ या $x < 0$

अतः वक्र $x > 2a$ और $x < 0$ में अस्तित्व नहीं रखता है, केवल वक्र पूर्णतः $0 \le x \le 2a$ में अस्तित्व रखता है।



$\therefore$ घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= \int_0^{2a} \frac{x^{3/2}}{\sqrt{2a - x}} dx = \int_0^{\pi/2} 8a^2 \sin^4 \theta\, d\theta,$$

($x = 2a\sin^2\theta$ रखने पर)

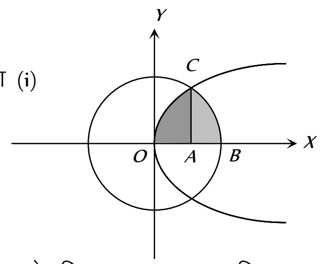
$$= 8a^2\left[\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}\right] = \frac{3\pi a^2}{2}$$, (गामा फलन के प्रयोग से).

24. (b)

$x^2 + y^2 = 9$ .....(i)

$y^2 = 8x$ .....(ii)

समीकरण (ii) को समीकरण (i) में रखने पर,



$x^2 + 8x - 9 = 0$

$\Rightarrow (x + 9)(x - 1) = 0$

अर्थात् $x = -9$ या 1

$x = -9$ पर समीकरण (ii) के लिए y का काल्पनिक मान प्राप्त होता है अतः यह अग्राहय है।

$\therefore A \equiv (1, 0)$ तथा $B \equiv (3, 0)$

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल = 2 × (छायांकित भाग का क्षेत्रफल)

$$= 2\left[\int_0^1 y\,dx \text{ (ii)के लिए} + \int_1^3 y\,dx \text{ (i)के लिए}\right]$$

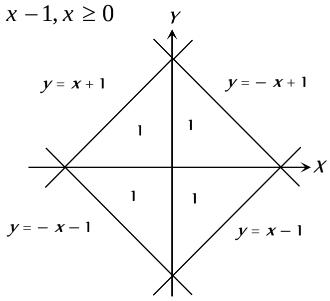
$$= 2\left[\int_0^1 2\sqrt{2}\ (x)^{1/2}\ dx + \int_1^3 \sqrt{3^2 - x^2}\ dx\right]$$

$$= 2\left[2\sqrt{2} \times \left(\frac{x^{3/2}}{3/2}\right)_0^1 + \left(\frac{x\sqrt{9 - x^2}}{2} + \frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right)_1^3\right]$$

$$= 2\left[\frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{9}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{8}}{2} - \frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{9\pi}{2} - 9\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right).$$

25. (b) $y = x - 1, x \ge 0$

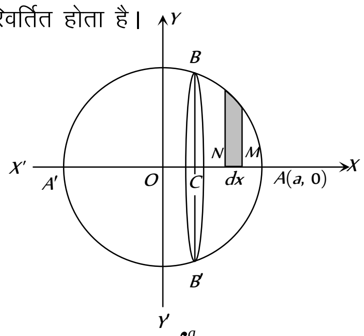


$y = -x-1, x<0$, $y=-x+1, x \ge 0$, $y = x+1, x<0$

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $= 4 \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1\right) = 2$.

26. (a) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के क्षेत्र $ABCA$ को x-अक्ष के परितः तथा चाप BA में परिक्रमण कराने पर प्राप्त खण्ड का आयतन ही अभीष्ट आयतन होता है। यहाँ $CA = h$ और $OA = a$

$\therefore$ $OC = OA - CA = a - h$, $\therefore$ x, $a-h$ से a तक परिवर्तित होता है।



$\therefore$ अभीष्ट आयतन $= \int_{a-h}^{a} \pi y^2 dx$

$= \pi \int_{a-h}^{a} (a^2 - x^2) dx$, $(\because x^2 + y^2 = a^2)$

$$= \pi\left[a^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{a-h}^{a} = \pi\left[(a^3 - \frac{1}{3}a^3 - \left\{a^2(a-h) - \frac{1}{3}(a-h)^3\right\}\right]$$

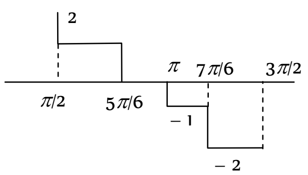
$$= \pi\left[\left(a^3 - \frac{1}{3}a^3\right) - \left\{a^3 - a^2 h - \frac{1}{3}\left(a^3 - 3a^2 h + 3ah^2 - h^3\right)\right\}\right]$$

$$= \pi\left[a^2 h - a^2 h + ah^2 - \frac{1}{3}h^3\right] = \frac{1}{3}\pi h^2 (3a - h).$$

27. (c) हम जानते हैं $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -2 \le 2\sin x \le 2$

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} [2\sin x] dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} [2\sin x] dx + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} [2\sin x] dx$$

$$+ \int_{\pi}^{\frac{7\pi}{6}} [2\sin x] dx + \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}} [2\sin x] dx$$



$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} (1) dx + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} (0) dx + \int_{\pi}^{\frac{7\pi}{6}} (-1) dx + \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}} (-2) dx$$

$$= \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) + 0 - \left(\frac{7\pi}{6} - \pi\right) - 2\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{7\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{6} - \frac{\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}.$$

28. (c) $f(x) = A\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + B, f'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$,

$\int_0^1 f(x) dx = \frac{2A}{\pi}$, (दिया गया है)

$$\Rightarrow \int_0^1 \left\{A\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + B\right\} dx = \frac{2A}{\pi}$$

$$\Rightarrow \left|-\frac{2A}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2} + Bx\right|_0^1 = \frac{2A}{\pi}$$

$$\Rightarrow B - \left(\frac{-2A}{\pi}\right) = \frac{2A}{\pi} \Rightarrow B = 0$$

$$\therefore f(x) = A\sin\frac{\pi x}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\pi A}{2}\cos\frac{\pi x}{2}$$

$$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi A}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow \pi A = 4 \Rightarrow A = \frac{4}{\pi}$$

$$\therefore A = \frac{4}{\pi}, B = 0.$$

29. (c) $\lambda x = t$ व $\lambda dx = dt$ रखने पर,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^{n-1} dx$$

$$= \frac{1}{\lambda^n}\int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt = \frac{1}{\lambda^n}\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx = \frac{I_n}{\lambda^n}.$$

30. (b) $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 1)\tan^{n-2} x\, dx$

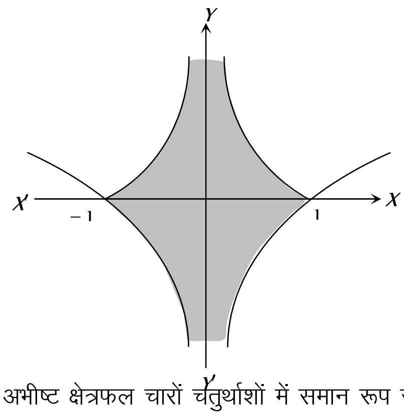
$$= \int_0^{\pi/4} \sec^2 x \tan^{n-2} x\, dx - \int_0^{\pi/4} \tan^{n-2} x\, dx$$

$$= \left[\frac{\tan^{n-1} x}{n-1}\right]_0^{\pi/4} - I_{n-2} \Rightarrow I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$$

अब $\lim_{n\to\infty} n[I_n + I_{n-2}] = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = 1$.

31. (a) हम जानते हैं कि $\log x$, $x > 0$ के लिए परिभाषित है , तथा $\log|x|$, सभी $x \in R - \{0\}$ के लिए परिभाषित है।

साथ ही, $|\log x| \ge 0$ तथा $|\log|x|| \ge 0$



$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल चारों चतुर्थांशों में समान रूप से सममित होगा

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $= 4\int_0^1 |\log x|\, dx = -4\int_0^1 \log x\, dx$,

$(\because (0,1)$ में $\log x < 0)$

$= -4[x\log x - x]_0^1 = -4(-1) = 4$, $\left(\because \lim_{x\to 0} x\log x = 0\right)$.

32. (c) $2\sin\frac{x}{2}.\left(\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+.....+\cos nx\right)$

$= \sin\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos x+2\sin\frac{x}{2}\cos 2x+....+2\sin\frac{x}{2}\cos nx$

$= \sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{5x}{2}-\sin\frac{3x}{2}+.....$

$+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x$

$\therefore \frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+.....+\cos nx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

$\Rightarrow \int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}dx = 2\left(\int_0^\pi \frac{1}{2}dx+\int_0^\pi \cos x dx+.....+\int_0^\pi \cos nx\,dx\right)$

$= 2\left(\frac{\pi}{2}+\sin x+.....+\frac{\sin nx}{n}\right)_0^\pi = \pi$.

33. (c) $\int_0^1 e^{x^2}(x-\alpha)dx = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 2x.e^{x^2}dx = \alpha\int_0^1 e^{x^2}dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2}|e^{x^2}|_0^1 = \alpha\int_0^1 e^{x^2}dx \Rightarrow \frac{1}{2}(e-1) = \alpha\int_0^1 e^{x^2}dx$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\frac{1}{2}(e-1)}{\int_0^1 e^{x^2}dx} > 0$ व $\alpha < 1$. $\therefore\ 0<\alpha<1$.

34. (d) $\int_\pi^{10\pi}|\sin x|\,dx = \int_0^\pi|\sin x|\,dx+\int_\pi^{10\pi}|\sin x|\,dx-\int_0^\pi|\sin x|\,dx$

$= \int_0^{10\pi}|\sin x|\,dx - \int_0^\pi|\sin x|\,dx$

$= 10\int_0^\pi|\sin x|\,dx - \int_0^\pi|\sin x|\,dx = 9\int_0^\pi \sin x\,dx$

[$\because |\sin x|$ एक आवर्ती फलन है, जिसका आवर्तनांक π है तथा $[0,\pi], \sin x \ge 0$]

$= 9[-\cos x]_0^\pi = 9(-\cos\pi+\cos 0) = 9(1+1) = 18$.

35. (b) $I = \int_{-\pi}^\pi \frac{2x(1+\sin x)}{1+\cos^2 x}dx = \int_{-\pi}^\pi \frac{2x}{1+\cos^2 x}dx + \int_{-\pi}^\pi \frac{2x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$\Rightarrow I = 0+\int_{-\pi}^\pi \frac{2x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$\left[\begin{array}{ll}\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx, & \text{यदि } f(-x)=f(x)\\ = 0, & \text{यदि } f(-x)=-f(x)\end{array}\right]$

$\Rightarrow I = 2\int_0^\pi \frac{2x\sin x}{1+\cos^2 x}dx \Rightarrow I = 4\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ .....(i)

$\Rightarrow I = 4\int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ ......(ii)

$\left(\because \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx\right)$

समीकरण (i) तथा (ii) को जोड़ने पर,

$\Rightarrow 2I = 4\int_0^\pi \frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx \Rightarrow I = 2\pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$\cos x = t \Rightarrow -\sin x\,dx = dt$ रखने पर,

$I = 2\pi\int_1^{-1}\frac{-dt}{1+t^2}$

$\Rightarrow I = -2\pi[\tan^{-1}t]_1^{-1} \Rightarrow I = -2\pi\left(\frac{-\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = \pi^2$.

36. (b) $f'(x) = (6\cos x - 2\sin x)1 - 0$

$= 2[3\cos x - \sin x] > 0 \left[\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right]$

$\therefore$ $f(x)$ एक वर्धमान फलन है। इसलिए $f(x)$ का $x = \frac{7\pi}{4}$ पर अधिकतम मान होगा

$\therefore$ अधिकतम $f(x) = f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = [6\sin t + 2\cos t]_{5\pi/3}^{7\pi/4}$

$= -6\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}+6\frac{\sqrt{3}}{2}-1 = 3\sqrt{3}-2\sqrt{2}-1$.

37. (d) $0<x<1$ के लिए, $x^2>x^3$ और $1<x<2$ के लिए, $x^3>x^2$

$\therefore$ $0<x<1$ के लिये, $2^{x^2}>2^{x^3}$ तथा $1<x<2$ के लिये $2x^2<2x^3$

$\therefore$ $\int_0^1 2^{x^2}dx > \int_0^1 2^{x^3}dx$ और $\int_1^2 2^{x^2}dx < \int_1^2 2^{x^3}dx$

$\therefore$ $I_1 > I_2$ और $I_3 < I_4$.

38. (b) $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ ......(i)

समी. (i) में x के स्थान पर $\frac{1}{x}$ रखने पर,

$2f\left(\frac{1}{x}\right) - 3f(x) = \frac{1}{x}$ .....(ii)

समी. (i) व (ii) से $f\left(\frac{1}{x}\right)$ का विलोपन करने पर,

$-5f(x) = 2x+\frac{3}{x} = \frac{2x^2+3}{3} \Rightarrow f(x) = -\left(\frac{2x^2+3}{5x}\right)$

$\int_1^2 f(x)dx = -\int_1^2\left(\frac{2x^2+3}{5x}\right)dx = -\frac{1}{5}[x^2+3\log_e x]_1^2$

$= -\frac{3}{5}[1+\log_e 2] = -\frac{3}{5}[1+\ln 2]$.

39. (d) $\int_a^b x^3 dx = 0$, (दिया गया है)

$\left|\frac{1}{4}x^4\right|_a^b = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}(b^4 - a^4) = 0 \Rightarrow b^4 - a^4 = 0$

$\int_a^b x^2 dx = \frac{2}{3} \Rightarrow \left|\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{2}{3} \Rightarrow b^3 - a^3 = 2$

$\Rightarrow b^4 - a^4 = 0 \Rightarrow (b^2 - a^2)(b^2 + a^2) = 0$

$(b-a)(b+a) = 0 \Rightarrow b = \pm a$

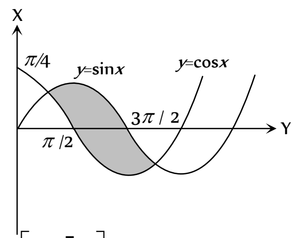
लेकिन $b = a$ समीकरण को सन्तुष्ट नहीं करता है,

अब, $b^3 - a^3 = 2 \Rightarrow (-a)^3 - a^3 = 2$

$-2a^3 = 2$ या $a^3 = -1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = -a$

अतः $b = -(-1) = 1 \Rightarrow a = -1,\ b = 1 \Rightarrow (a, b) = (-1, 1)$.

40. (b) $y = \sin x$ और $y = \cos x$ के प्रतिच्छेद बिन्दु $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ हैं



चूँकि अन्तराल $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ में, $\sin x \geq \cos x$

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\, dx$

$= 2\sqrt{2}$ वर्ग इकाई.

निश्चित समाकलन एवं वक्रों से घिरा क्षेत्रफल

SET Self Evaluation Test - 24

1. माना $f(x)=\begin{vmatrix} \sec x & \cos x & \sec^2 x+\cot x \operatorname{cosec} x \\ \cos^2 x & \cos^2 x & \operatorname{cosec}^2 x \\ 1 & \cos^2 x & \cos^2 x \end{vmatrix}$, तब $\int_0^{\pi/2} f(x)dx =$ [IIT 1987]

(a) $\frac{\pi}{4}+\frac{8}{15}$ (b) $\frac{\pi}{4}-\frac{8}{15}$

(c) $-\frac{\pi}{4}-\frac{8}{15}$ (d) $-\frac{\pi}{4}+\frac{8}{15}$

2. यदि $I_n=\int_0^{\pi/4} \tan^n \theta \, d\theta$, तो किसी भी धनात्मक पूर्णांक n के लिये $n(I_{n-1}+I_{n+1})$ का मान है [RPET 1999; Karnataka CET 2000]

(a) 1 (b) 2

(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) π

3. यदि $\int_{\pi/2}^{\alpha} \sin x \, dx = \sin 2\alpha$; $(\alpha \in [0, 2\pi])$, तो α के मान हैं [IIT Screening]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{3\pi}{2}$

(c) $\frac{7\pi}{6}$ (d) उपरोक्त सभी

4. यदि $\frac{d[f(x)]}{dx}=g(x)$; $a \le x \le b$, तो $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx =$ [CEE 1993]

(a) $f(b)-f(a)$ (b) $g(b)-g(a)$

(c) $\frac{[f(b)]^2-[f(a)]^2}{2}$ (d) $\frac{[g(b)]^2-[g(a)]^2}{2}$

5. यदि $\int_2^e \left[\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^2}\right]dx=\alpha+\frac{\beta}{\log 2}$, तो [SCRA 1986]

(a) $\alpha=e,\ \beta=-2$ (b) $\alpha=e,\ \beta=2$

(c) $\alpha=-e,\ \beta=2$ (d) $\alpha=-e,\ \beta=-2$

6. यदि $h(a)=h(b)$, तो

$\int_a^b [f(g(h(x)))]^{-1} f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)dx =$ [MP PET 2001]

(a) 0 (b) $f(a)-f(b)$

(c) $f(g(a))-f(g(b))$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. समाकलन $\int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x}dx$ का मान है [Kurukshetra CEE 1996]

(a) 1 (b) 2

(c) 0 (d) 4

8. माना सभी वास्तविक संख्याओं x के लिए $f(x)=x-[x]$ है, जहाँ x का पूर्णांकीय भाग $[x]$ है। तब $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ का मान होगा [IIT 1998]

(a) 1 (b) 2

(c) 0 (d) $1/2$

9. यदि f व g, अंतराल $[0, a]$ में सतत् फलन है जो $f(x)=f(a-x)$ तथा $g(x)+g(a-x)=2$ को सन्तुष्ट करते हैं, तो $\int_0^a f(x)g(x)dx =$ [IIT 1989]

(a) $\int_0^a f(x)dx$ (b) $\int_a^0 f(x)dx$

(c) $2\int_0^a f(x)dx$ (d) इनमें से कोई नहीं

10. $\int_1^3 \sqrt{3+x^3}\,dx$ का मान निम्न अन्तराल में है [CEE 1993]

(a) $(1, 3)$ (b) $(2, 30)$

(c) $(4, 2\sqrt{30})$ (d) इनमें से कोई नहीं

11. $\int_{-1/2}^{1/2}\left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2-2\right]^{1/2} dx =$

(a) $\log\left(\frac{4}{3}\right)$ (b) $4\log\left(\frac{3}{4}\right)$

(c) $4\log\left(\frac{4}{3}\right)$ (d) $\log\left(\frac{3}{4}\right)$

12. $n>0$ के लिये, $\int_0^{2\pi}\frac{x\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x+\cos^{2n} x}dx =$ [IIT 1996]

(a) π^{-1} (b) π

(c) π^{-2} (d) π^2

13. माना $T>0$ एक निश्चित संख्या है तथा f एक सतत् फलन इस प्रकार है कि $x \in R$ के लिये $f(x+T)=f(x)$. यदि $I=\int_0^T f(x)dx$, तब $\int_3^{3+3T} f(2x)dx =$ [IIT Screening 2002]

(a) $\frac{3}{2}I$ (b) $2I$

(c) $3I$ (d) $6I$

14. $\int_0^{x^2} \frac{t^2 - 5t + 4}{2 + e^t} dt$ के चरम बिन्दु (Points of extremum) हैं [IIT Screening]

(a) $x = -2$ (b) $x = 1$

(c) $x = 0$ (d) उपरोक्त सभी

15. $\int_0^{\pi} \frac{xdx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} =$ [Karnataka CET 2003]

(a) $\frac{\pi}{ab}$ (b) $\frac{\pi}{2ab}$

(c) $\frac{\pi^2}{ab}$ (d) $\frac{\pi^2}{2ab}$

16. यदि $\int_{\pi/2}^{x} \sqrt{3 - 2\sin^2 u}\, du + \int_0^y \cos t\, dt = 0$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) $\frac{\sqrt{4 - 3\sin^2 x}}{\cos y}$ (b) $-\frac{\sqrt{3 - 2\sin^2 x}}{\cos y}$

(c) $\sqrt{3 - 2\sin^2 x} + \cos y$ (d) इनमें से कोई नहीं

17. यदि $f(y) = e^y, g(y) = y; y > 0$ तथा $F(t) = \int_0^t f(t - y) g(y) dy$, तब [AIEEE 2003]

(a) $F(t) = 1 - e^{-t}(1 + t)$ (b) $F(t) = e^t - (1 + t)$

(c) $F(t) = t e^t$ (d) $F(t) = te^{-t}$

18. वक्र $y = \log x$, x- अक्ष और भुज $x = e$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है [MP PET 1994; Pb. CET 2000]

(a) e (b) 1

(c) ∞ (d) इनमें से कोई नहीं

19. वक्रों $y = |x - 1|$ तथा $y = 3 - |x|$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा

[AIEEE 2003; Orissa JEE 2003]

(a) 2 वर्ग इकाई (b) 3 वर्ग इकाई

(c) 4 वर्ग इकाई (d) 1 वर्ग इकाई

20. उस ठोस का आयतन, जो $y-$अक्ष के परितः घुमाया गया है एवं रेखा $x + 3y = 3$ व दीर्घवृत्त $x^2 + 9y^2 = 9$ से प्रथम चतुर्थांश में परिबद्ध है, है [MNR 1994]

(a) 3π (b) 4π

(c) 6π (d) 9π

AS Answers and Solutions

(SET - 24)

1. (c) संक्रिया $R_1 \to R_1 - \sec x R_3$ से,

$f(x) = -\sin^2 x - \cos^5 x$

इस प्रकार $\int_0^{\pi/2} f(x)dx = -\int_0^{\pi/2}(\sin^2 x + \cos^5 x)dx$

$$= -\left[\frac{\pi}{4} + \frac{8}{15}\right] = \frac{-\pi}{4} - \frac{8}{15}.$$

2. (a) $I_{n+1} = \int_0^{\pi/4} \tan^{n+1}\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \tan^{n-1}\theta(\sec^2\theta - 1)d\theta$

$= \int_0^{\pi/4} \tan^{n-1}\theta \sec^2\theta\, d\theta - \int_0^{\pi/4} \tan^{n-1}\theta\, d\theta$

$= \int_0^{\pi/4} \tan^{n-1}\theta \sec^2\theta\, d\theta - I_{n-1}$

$\Rightarrow I_{n+1} + I_{n-1} = \frac{1}{n} \Rightarrow n(I_{n+1} + I_{n-1}) = 1.$

3. (d) $\int_{\pi/2}^{\alpha} \sin x\, dx = \sin 2\alpha,\ (\alpha \in [0, 2\pi])$

$\Rightarrow -[\cos x]_{\pi/2}^{\alpha} = \sin 2\alpha$

$\Rightarrow -\cos\alpha = \sin 2\alpha \Rightarrow \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2\alpha$

अतः $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}$.

4. (c) माना $I = \int_a^b f(x)g(x)dx$

$f(x) = t$ या $f'(x)dx = dt$ या $g(x)dx = dt$ रखने पर,

$\Rightarrow I = \int_{f(a)}^{f(b)} t\,dt = \left|\frac{t^2}{2}\right|_{f(a)}^{f(b)} = \frac{[f(b)]^2 - [f(a)]^2}{2}.$

5. (a) $\int_2^e \left[\frac{1}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2}\right]dx = \alpha + \frac{\beta}{\log 2}$

L.H.S. $= \int_2^e \left[\frac{1}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2}\right]dx = \int_2^e \frac{1}{\log x}dx - \int_2^e \frac{1}{(\log x)^2}dx$

$= \left[\left(\frac{x}{\log x}\right)_2^e - \int_2^e\left\{-\frac{1}{x(\log x)^2}\right\}x\,dx\right] - \int_2^e \frac{1}{(\log x)^2}dx$

$= \left|\frac{x}{\log x}\right|_2^e = e - \frac{2}{\log 2}$

इसकी तुलना दिये गये मान से करने पर, $\alpha = e$ व $\beta = -2$.

6. (a) यदि $h(x) = t$, तो $\int_{h(a)}^{h(b)} [f(g(h(t)))]^{-1} f'(g(t))g'(t)dt = 0$,

$[\because h(a) = h(b)]$

7. (b) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x}dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$

$= [2\sqrt{t}]_0^1 = 2 - 0 = 2.$

8. (a) $f(x) = x - [x]$, $-1 \le x < 0 \Rightarrow f(x) = x + 1$

$0 \le x < 1 \Rightarrow f(x) = x$

$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 (x+1)dx + \int_0^1 x\,dx$

$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 = 0 - \left[\frac{(-1)^2}{2} - 1\right] + \frac{1}{2} = 1.$

9. (a) हम जानते हैं कि $\int_0^a f(x)g(x)dx = \int_0^a f(a-x)g(a-x)dx$

$= \int_0^a f(x)[2 - g(x)]dx$

$\Rightarrow 2\int_0^a f(x)g(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ या $\int_0^a f(x)g(x)dx = \int_0^a f(x)dx$.

10. (c) $I = \int_1^3 \sqrt{3 + x^3}\,dx$, $(b-a)[f(x)_{\min}] \le I \le (b-a)[f(x)_{\max}]$

समाकल $f(x) = \sqrt{3 + x^3}$ के लिए, $I = \int_a^b f(x)dx$

यह फलन अन्तराल (1,3) मे वर्धमान है,

$\therefore f(x)_{\min} = 2$, $f(x)_{\max} = \sqrt{30}$ अतः $4 \le I \le 2\sqrt{30}$.

11. (c) $\int_{-1/2}^{1/2} \left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - 2\right]^{1/2} dx$

$= \int_{-1/2}^{1/2} \left[\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}\right)^2\right]^{1/2} dx$

$= \int_{-1/2}^{1/2} \left|\frac{4x}{x^2 - 1}\right|dx = \int_{-1/2}^0 \left|\frac{4x}{1 - x^2}\right|dx + \int_0^{1/2} \left|\frac{4x}{1 - x^2}\right|dx$

$= -4\int_{-1/2}^0 \frac{x}{1 - x^2}dx + 4\int_0^{1/2} \frac{x}{1 - x^2}dx$

$= 2(\log(1 - x^2))_{-1/2}^0 - 2(\log(1 - x^2))_0^{1/2}$

$= -2\log\left(1 - \frac{1}{4}\right) - 2\log\left(1 - \frac{1}{4}\right) = -4\log\frac{3}{4} = 4\log\frac{4}{3}.$

12. (d) माना $I = \int_0^{2\pi} \frac{x\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}dx$

$= \int_0^{2\pi} \frac{(2\pi - x)[\sin(2\pi - x)]^{2n}}{[\sin(2\pi - x)]^{2n} + [\cos(2\pi - x)]^{2n}}dx$,

$[\because \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx]$

$= \int_0^{2\pi} \frac{(2\pi - x)\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}dx$

$\Rightarrow 2I = 2\pi\int_0^{2\pi} \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}dx$

$\Rightarrow I = \pi\int_0^{2\pi} \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}dx$

प्रगुण $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(2a - x)]dx$ का प्रयोग करने पर,

$$I = 2\pi\int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}dx$$

उपरोक्त प्रगुण का पुनः प्रयोग करने पर,

$$I = 4\pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}dx$$ .....(i)

$$\Rightarrow I = 4\pi\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}dx$$ .....(ii)

$$\left[\because \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx\right]$$

(i) व (ii) को जोड़ने पर,

$$2I = 4\pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}dx$$

$$= 4\pi\int_0^{\pi/2} dx = (4\pi)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi^2 \Rightarrow I = \pi^2 .$$

13. (c) $2x = z$ रखने पर, $\int_3^{3+3T} f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_6^{6+6T} f(z)dz$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_6^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{6+6T} f(x)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\int_0^6 f(x)dx + I + \int_T^{6+5T} f(T+z)dz\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\int_0^6 f(x)dx + I + \int_0^T f(z)dz + \int_T^{6+5T} f(T+z)dz\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\int_0^6 f(x)dx + I + I + \int_T^{6+5T} f(x)dz\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\int_0^6 f(x)dx + I + 5I + \int_T^{6+T} f(x)dz\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\int_0^6 f(x)dx + 6I + \int_0^6 f(z+T)dz\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\int_0^6 f(x)dx + 6I + \int_0^6 f(z)dz\right] = \frac{1}{2}\times 6I = 3I.$$

14. (d) माना

$$F(x) = \int_0^{x^2} \frac{t^2 - 5t + 4}{2 + e^t}dt \Rightarrow F'(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{2 + e^{x^2}}2x$$

अतः $F'(x) = 0$ से, $x = 0$ या $x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = 4, 1$.

अतः $x = 0, \pm 2, \pm 1$.

15. (d) $I = \int_0^{\pi} \frac{xdx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$ .....(i)

तथा $I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)dx}{a^2\cos^2(\pi - x) + b^2\sin^2(\pi - x)}$,

$$\left[\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx\right]$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$ .....(ii)

समी (i) व (ii) को जोडने पर, $2I = \int_0^{\pi} \frac{(x + \pi - x)dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$

$$2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

$$= 2.\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

अंश व हर में $\cos^2 x$ से भाग देने पर

$$\therefore I = \pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 xdx}{a^2 + b^2\tan^2 x}$$

$b\tan x = t$ रखने पर, $\therefore b\sec^2 xdx = dt$

$$\therefore I = \frac{\pi}{b}\int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{\pi}{b}.\frac{1}{a}\left[\tan^{-1}\frac{t}{a}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{ab}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi^2}{2ab}.$$

16. (b) चूँकि $\int_{\pi/2}^{x} \sqrt{3 - 2\sin^2 u}\, du + \int_0^y \cos t\, dt = 0$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\sqrt{3 - 2\sin^2 x} + \frac{dy}{dx}\cos y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{3 - 2\sin^2 x}}{\cos y}.$$

17. (b) $F(t) = \int_0^t f(t-y)g(y)dy = \int_0^t e^{t-y}y\,dy = e^t\int_0^t e^{-y}ydy$

$$= e^t[-ye^{-y} - e^{-y}]_0^t = -e^t[ye^{-y} + e^{-y}]_0^t$$

$$= -e^t[te^{-t} + e^{-t} - 0 - 1] = e^t - (1+t).$$

18. (b) दिया है, $y = \log x$ .....(i)

तथा कोटि $x = e$

समी (i) में $y = 0$ रखने पर, $0 = \log x$ या $x = 1$.

$x = 1$ और $x = e$ के द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= A = \int_{x_1}^{x_2} ydx = \int_1^e \log x\, dx$$

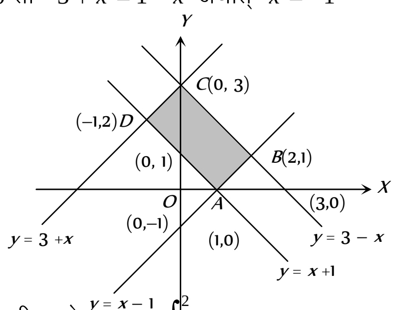
अतः $A = [x\log x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}.x\,dx = e - e + 1 = 1$.

19. (c) समीकरणों को हल करने पर,

यदि $x \ge 1$ तो $3 - x = x - 1 \Rightarrow x = 2$

यदि $0 \le x \le 1$ तो $3 - x = 1 - x$, अर्थात

$x < 0$ तो $3 + x = 1 - x$ अर्थात् $x = -1$



अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_{-1}^{2}(3 - |x| - |x-1|)\,dx$

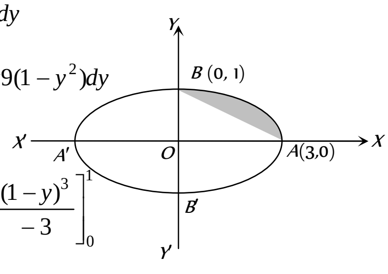
$$= \int_{-1}^{0}[3 + x - (1-x)]dx + \int_0^1[(3-x) - (1-x)]dx$$

$$+ \int_1^2[(3-x) - (x-1)]dx$$

$= 1 + 2 + 1 = 4$ वर्ग इकाई.

20. (a) $V = \int_0^1 \pi x_1^2 dy - \int_0^1 \pi x_2^2 dy$

$$V = \int_0^1 \pi(9 - 9y^2)dy - \int_0^1 \pi 9(1-y^2)dy$$



$$= 9\pi\left[y - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 - 9\pi\left[\frac{(1-y)^3}{-3}\right]_0^1$$

$= 6\pi - 3\pi = 3\pi$.

* * *