Chapter – 27
Dyanamics

प्रस्तावना (Introduction)

गति विज्ञान यांत्रिकी की वह शाखा है जिसके अन्तर्गत कणों अथवा पिण्डों की गत्यात्मक अवस्था का अध्ययन किया जाता है।

(1) **विस्थापन :** किसी गतिशील बिन्दु के स्थिति परिवर्तन को उस बिन्दु का विस्थापन कहते हैं। किसी गतिशील बिन्दु का विस्थापन ज्ञात करने के लिये हमें गतिशील बिन्दु की दोनों स्थितियों को मिलाने वाली रेखा की लम्बाई तथा दिशा ज्ञात होना चाहिए। इस प्रकार विस्थापन में परिमाण तथा दिशा दोनों होते हैं, अर्थात् यह एक सदिश राशि है।

(2) **चाल :** स्थिति परिवर्तन की वह दर जिसके द्वारा कोई गतिशील बिन्दु अपने पथ पर चलता है, कण की चाल कहलाती है। किसी गतिशील कण या पिंड की चाल से गति की दिशा के बारे में कोई जानकारी प्राप्त नहीं होती हैं अतः यह अदिश राशि है। M.K.S. अथवा S.I. पद्धति में, चाल की इकाई मीटर प्रति सेकण्ड (m/s) है।

औसत चाल : दिये गये समयान्तराल में गतिशील कण की औसत चाल, तय की गयी दूरी का समयान्तराल से अनुपात होती है।

यदि कोई कण, t समयान्तराल में s दूरी तय करता है, तब औसत चाल $= \frac{s}{t}$

औसत चाल, दिये गये अन्तराल में किसी कण की सम्पूर्ण गति की चाल का औसत बताती है।

तात्क्षणिक चाल : किसी गतिशील कण की तात्क्षणिक चाल या चाल, इसके पथ (सरल या वक्र) के अनुदिश दूरी के परिवर्तन की दर द्वारा परिभाषित की जाती है।

यदि t समय में कण द्वारा इसके पथ के अनुदिश तय की गयी दूरी s हो, तब

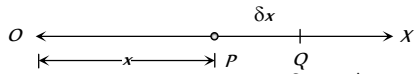
तात्क्षणिक चाल $= \frac{ds}{dt}$ या t समय पर चाल $= \frac{ds}{dt}$

किसी समयान्तराल के लिये औसत चाल परिभाषित है तथा किसी विशेष क्षण पर तात्क्षणिक चाल परिभाषित है।

वेग तथा त्वरण (Velocity and acceleration)

(1) **वेग :** किसी गतिशील बिन्दु के विस्थापन की दर को उस गतिशील बिन्दु का वेग कहते हैं। वेग एक सदिश राशि है।

माना एक कण स्थिर बिन्दु O से चलना प्रारम्भ करता है तथा सरल रेखा OX के अनुदिश t समय में दूरी $OP = x$ तय करता है। यदि कण δt समय में $PQ = \delta x$ दूरी ओर तय करता है, तब $\frac{\delta x}{\delta t}$, δt समय में कण का औसत वेग कहलाती है।



किसी समय t पर कण का तात्क्षणिक वेग (साधारणतः वेग) $\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{dx}{dt} = v$ कहलाता है।

t समय में औसत वेग, प्रारम्भिक तथा अंतिम वेग का माध्य होता है।

(2) **त्वरण :** किसी गतिशील कण के वेग में परिवर्तन की दर त्वरण कहलाती है। यह एक सदिश राशि है।

किसी गतिशील बिन्दु का t समय पश्चात् x दूरी पर त्वरण निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं।

$$f = \frac{v_2 - v_1}{t} \Rightarrow f = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = v.\frac{dv}{dx}$$

M.K.S. या S.I. पद्धति में, त्वरण की इकाई मीटर/सेकण्ड है।

यदि वेग v में वृद्धि हो रही हो, तब $a > 0$ तथा यदि वेग v में कमी हो रही हो, तब $a < 0$ । ऋणात्मक त्वरण मंदन कहलाता है।

स्पष्टतः मंदन का अभिप्राय वेग में कमी होना है।

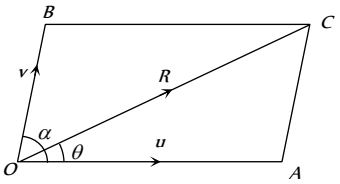
वेगों के परिणामी तथा घटक (Resultant and components of velocities)

(1) **वेगों के परिणामी :** किसी कण के दो वेगों का परिणामी समान्तर चतुर्भुज नियम द्वारा ज्ञात करते हैं।

वेगों के समान्तर चतुर्भुज का नियम : यदि एक बिन्दु पर एक साथ कार्यरत दो वेग, किसी समान्तर चर्तुभुज के एक शीर्ष से होकर जाने वाली दो आसन्न भुजाओं के द्वारा परिमाण एवं दिशा में निरुपित होते हैं, तो इनका परिणामी वेग परिमाण एवं दिशा में इस शीर्ष से होकर जाने वाले विकर्ण के द्वारा निरुपित होगा।

माना एक बिन्दु पर एक साथ लगने वाले दो वेग u तथा v परिमाण एवं दिशा में समान्तर चतुर्भुज $OACB$ की भुजाओं OA तथा OB द्वारा

निरुपित हो, तो इनका परिणामी वेग R परिमाण एवं दिशा में O से होकर जाने वाले विकर्ण OC के द्वारा निरुपित होगा।



यदि $\angle AOB = \alpha$ तथा $\angle AOC = \theta$ है, तब इन वेगों के परिणामी वेग का परिमाण $R = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$ है तथा परिणामी वेग की दिशा, u की दिशा से θ कोण इस प्रकार बनाती है कि $\tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$.

स्थिति I : जब $\alpha = 0$, तब $R_{max} = u + v$

स्थिति II : जब $\alpha = \pi$, तब $R_{min} = |u - v|$

स्थिति III : जब $\alpha = \pi/2$, अर्थात् u तथा v परस्पर समकोण पर हैं, तब $R = \sqrt{u^2 + v^2}$ तथा $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$

स्थिति IV : जब $u = v$, तब $R = 2u\cos\frac{\alpha}{2}$ तथा $\theta = \frac{\alpha}{2}$.

परिणामी वेग द्वारा, v की दिशा से बनाया गया कोण

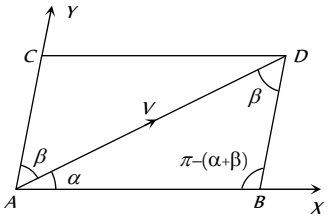
$$= \tan^{-1}\left(\frac{u\sin\alpha}{v + u\cos\alpha}\right).$$

यदि परिणामी वेग, $\vec{u}$ की दिशा से θ कोण बनाता है, तब

$\sin\theta = \frac{v\sin\alpha}{R}$ तथा $\cos\theta = \frac{u + v\cos\alpha}{R}$.

(2) **दी गई दो दिशाओं में वेगों के घटक :** यदि वेग V के घटक दो दी गई दिशाओं से α तथा β कोण बनाते हैं तब वेगों के समान्तर चतुर्भुज नियम से V के अभीष्ट घटकों को AX तथा AY के अनुदिश क्रमशः AB तथा AC (= BD) द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

इस प्रकार, $\frac{AB}{\sin ADB} = \frac{BD}{\sin BAD} = \frac{AD}{\sin ABD}$



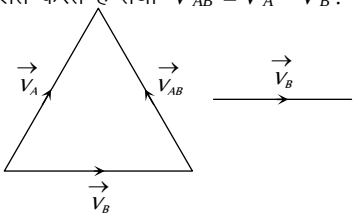
अर्थात् $\frac{AB}{\sin\beta} = \frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin(\alpha+\beta)}$

$\therefore AB = AD.\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ तथा $BD = AD.\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

अतः, α तथा β कोण की दिशा में वेग V के घटक क्रमशः $\frac{V\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ तथा $\frac{V\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ हैं।

आपेक्षिक वेग (Relative velocity)

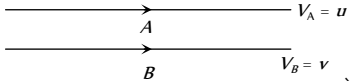
माना A तथा B दो गतिशील पिण्ड हैं। B के सापेक्ष A का आपेक्षिक वेग वह वेग है, जो B से A की गति का अवलोकन करने पर प्रतीत होता है। B के सापेक्ष A का आपेक्षिक वेग, B के सापेक्ष A का वेग भी कहलाता है। इसे $\vec{V}_{AB}$ से प्रदर्शित करते हैं तथा $\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$.



यदि दो पिंड A तथा B क्रमशः वेग V_A तथा V_B से (जो परस्पर α कोण पर है) गति कर रहे हैं, तब $\vec{V}_{AB} = \sqrt{V_A^2 + V_B^2 - 2V_AV_B\cos\alpha}$

यदि B के सापेक्ष A का आपेक्षिक वेग, B के वेग की दिशा से θ कोण बनाता है, तब $\tan\theta = \frac{V_A\sin\alpha}{V_B - V_A\cos\alpha}$

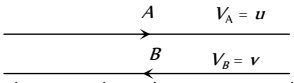
स्थिति I : जब कण A तथा B क्रमशः u तथा v वेग से एक दूसरे के समान्तर एक ही दिशा में गति कर रहे हैं। यहाँ $\alpha = 0$, तब $V_{AB} = (u - v)$, A की दिशा में तथा $V_{BA} = (v - u)$, B की दिशा में होगा।



स्थिति II : जब कण A तथा B क्रमशः u तथा v वेग से एक दूसरे के समान्तर विपरीत दिशा में गति कर रहे हैं।

यहाँ $\alpha = \pi$, तब $V_{AB} = (u + v)$, A की दिशा में

$V_{BA} = (v + u)$, B की दिशा में

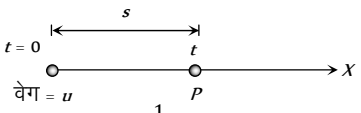


A का वास्तविक वेग = B के सापेक्ष A का आपेक्षिक वेग तथा B के वास्तविक वेग का परिणामी

अर्थात् $\vec{V}_A = \vec{V}_{AB} + \vec{V}_B$, [चूँकि $\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$].

अचर त्वरण के अधीन समरेखीय गति (Rectilinear motion with uniform acceleration)

माना एक बिन्दु या कण प्रारम्भिक वेग u से एक सरल रेखा में एक समान त्वरण f से गतिमान है। यदि t समय पश्चात् अन्तिम वेग v है तथा इस क्षण पर प्रारम्भिक बिन्दु से कण की दूरी s है, तब गति के समीकरण हैं,



(i) $v = u + ft$ (ii) $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ (iii) $v^2 = u^2 + 2fs$

(iv) t वें सेकण्ड में कण द्वारा चली गयी दूरी : किसी कण या पिण्ड द्वारा t वें सेकण्ड में चली गयी दूरी $s_n = u + \frac{1}{2}f(2n-1)$.

गुरुत्वाधीन गति (Motion under gravity)

जब किसी पिण्ड को ऊर्ध्वाधर ऊपर या नीचे की ओर प्रक्षेपित किया जाता है, तो उस पर गुरूत्व के कारण गुरूत्वीय त्वरण (g) कार्य करता है। पृथ्वी पर किसी एक स्थान पर g का मान नियत रहता है, किन्तु स्थान परिवर्तित होने पर g का मान परिवर्तित होता है।

g का मान M.K.S. पद्धति में 9.8 मीटर/सेकण्ड², C.G.S. पद्धति में 981 सेमी/सेकण्ड² तथा F.P.S. पद्धति में 32 फुट/सेकण्ड² होता है।

(1) **ऊर्ध्वाधर रेखा में नीचे की ओर गति :** यदि किसी पिण्ड को पृथ्वी की सतह से h ऊँचाई से, u वेग से फेंका जाता है तथा t समय पश्चात् पिण्ड का वेग v हो जाता है, तब $v = u + gt$, $h = ut + \frac{1}{2}gt^2$, $v^2 = u^2 + 2gh$, $s_t = u + \frac{1}{2}g(2t-1)$.

यदि किसी पिण्ड को विरामावस्था से ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर फेंका जाता है, तब $v = gt$, $h = \frac{1}{2}gt^2$, $v^2 = 2gh$ $(\because u = 0)$.

(2) **ऊर्ध्वाधर रेखा में ऊपर की ओर गति :** इस स्थिति में ऋणात्मक गुरूत्वीय त्वरण अर्थात् $(-g)$ कार्य करता है

$v = u - gt$, $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$

$v^2 = u^2 - 2gh$, $s_t = u - \frac{1}{2}g(2t-1)$

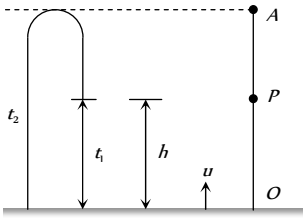
(3) **महत्वपूर्ण निष्कर्ष :**

(i) **अधिकतम ऊँचाई :** अधिकतम बिन्दु पर अंतिम वेग शून्य होता है। माना अधिकतम ऊँचाई H है तब $v^2 = u^2 - 2gh$ से, $0 = u^2 - 2gH$

$\therefore$ अधिकतम ऊँचाई $H = \frac{u^2}{2g}$.

(ii) **अधिकतम ऊँचाई तक जाने में लगा समय :** माना अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचने में लगा समय T है। तब $v = u - gt$ से, $0 = u - gT$ अर्थात् $T = \frac{u}{g}$.

(iii) **दी गई ऊँचाई तक जाने में लगा समय:** माना दी गई ऊँचाई h तक किसी पिण्ड को पहुँचने में लगा समय t है, तब $h = ut - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow gt^2 - 2ut + 2h = 0$.



अतः $t_1 = \frac{u - \sqrt{u^2 - 2gh}}{g}$ तथा $t_2 = \frac{u + \sqrt{u^2 - 2gh}}{g}$

स्पष्टतः t_1 तथा t_2 वास्तविक हैं, यदि $u^2 \geq 2gh$.

यदि $u^2 = 2gh$, तब $t_1 = t_2 = \frac{u}{g}$, जो कि अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचने में लगा समय है। अतः $u^2 > 2gh$, t_1 $(< t_2)$ वह समय है, जो पिण्ड को ऊपर जाने में अर्थात् O से P तक जाने में लगता है तथा बड़ा मान t_2 वह समय है, जो पिण्ड को अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचकर वापस दिये गये बिन्दु तक आने में लगता है अर्थात् यह O से A तथा पुनः A से P तक आने में लगा समय है।

(iv) **उड्डयन काल:** यह किसी पिण्ड को अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचकर पुनः प्रारम्भिक बिन्दु तक आने में लगा समय है।

जब कण प्रारंभिक बिन्दु पर लौटता है, $h = 0$

$\therefore$ $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ से, $0 = ut - \frac{1}{2}gt^2$ या $t = 0$ या $\frac{2u}{g}$

जब पिण्ड गति प्रारंभ करता है, तब $t = 0$ तथा जब पिण्ड अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचकर प्रारंभिक बिन्दु पर वापस लौटता है, तब $t = \frac{2u}{g}$, $\therefore$ उड्डयन काल $= \frac{2u}{g}$.

गति के नियम (Laws of motion)

(1) **न्यूटन के गति के नियम :**

(i) **प्रथम नियम :** कोई पिण्ड अपनी विरामावस्था अथवा गत्यावस्था में ही रहता है, जब तक कि उस पर कोई बाह्य बल आरोपित न किया जाए।

(ii) **द्वितीय नियम :** संवेग परिवर्तन की दर आरोपित बल के समानुपाती होती है तथा उसकी दिशा आरोपित बल की दिशा में होती है।

$\frac{d}{dt}(mv) \propto F \Rightarrow m\frac{dv}{dt} \propto F$

$m\frac{dv}{dt} = kF$

$F = mf$, (k = 1 के लिये)

बल = द्रव्यमान × त्वरण

बल की S.I. इकाई न्यूटन तथा C.G.S. इकाई डाईन होती है। 1 न्यूटन = 1 किग्रा मी/सेकण्ड^2, 1 डाइन = 1 ग्राम सेमी/सेकण्ड^2

अतः 1 न्यूटन = 10^5 डाइन

(iii) **तृतीय नियम :** प्रत्येक क्रिया के बराबर और विपरीत प्रतिक्रिया होती है।

क्रिया तथा प्रतिक्रिया एक ही पिण्ड पर या पिण्ड के एक ही भाग पर एक साथ क्रियारत् नहीं होती है।

(2) **भार :** किसी पिण्ड का भार वह बल है, जिससे पृथ्वी उस पिण्ड को अपने केन्द्र की ओर आकर्षित करती है।

m द्रव्यमान के किसी पिण्ड के लिये भार W निम्न प्रकार दिया जाता है, $W = mg$ (न्यूटन के गति के नियम से)

माना m_1 तथा m_2 द्रव्यमान के दो पिण्डों के भार पृथ्वी पर क्रमशः W_1 तथा W_2 हैं तब $W_1 = m_1 g$ तथा $W_2 = m_2 g \Rightarrow \frac{W_1}{W_2} = \frac{m_1}{m_2}$

1 ग्राम भार = g डाइन = 981 डाइन

1 किग्रा भार = g न्यूटन = 9.81 न्यूटन

(3) **संवेग :** किसी पिण्ड के द्रव्यमान (m) और वेग (v) के गुणनफल को पिण्ड का संवेग कहते हैं।

अतः संवेग = द्रव्यमान × वेग = $m \times v$

संवेग की इकाई ग्राम-सेमी/सेकण्ड या किग्रा-मीटर/सेकण्ड होती है।

(4) **आवेग :** किसी दिये गये समयान्तराल में बल का आवेग बल तथा समयान्तराल के गुणनफल के बराबर होता है। किसी दिये गये समयांतराल t में बल F का आवेग निम्न प्रकार दिया जाता है।

बल का आवेग = बल × समयान्तराल = $m.v.$

गुब्बारे या लिफ्ट में किसी पिण्ड की गति
(Motion of a body released from a balloon or a lift)

(1) जब लिफ्ट एकसमान त्वरण f मीटर/सेकण्ड^2 से ऊपर की ओर जा रही है तथा t सेकण्ड के पश्चात् इस लिफ्ट से एक पिण्ड गिराया जाता है, तब इस समय पर निम्न स्थितियाँ होंगी :

(i) पिण्ड का प्रारंभिक वेग लिफ्ट के वेग के समान तथा उसी दिशा में होता है, अतः पिण्ड का वेग ft मीटर/सेकण्ड है।

(ii) लिफ्ट के सापेक्ष पिण्ड का प्रारम्भिक वेग = पिण्ड का वेग – लिफ्ट का वेग = $ft - ft = 0$

(iii) पिण्ड का त्वरण = g मीटर/सेकण्ड^2, नीचे की ओर।

(iv) लिफ्ट के सापेक्ष पिण्ड का त्वरण = पिण्ड का त्वरण – लिफ्ट का त्वरण = $g - (-f) = f + g$, नीचे की ओर।

(2) जब लिफ्ट एकसमान त्वरण f मीटर/सेकण्ड^2 से ऊपर की ओर जा रही है तथा t समय पश्चात् इस लिफ्ट से एक पिण्ड v मीटर/सेकण्ड के वेग से ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर फेंका जाता है, तब इस समय पर निम्न स्थितियाँ होंगी :

(i) पिण्ड का प्रारम्भिक वेग = v + लिफ्ट का वेग = $v + ft$, ऊपर की ओर

(ii) लिफ्ट के सापेक्ष पिण्ड का प्रारम्भिक वेग = पिण्ड का वेग – लिफ्ट का वेग = $(v + ft) - ft = v$ मीटर/सेकण्ड

(iii) लिफ्ट के सापेक्ष पिण्ड का त्वरण = $(f + g)$ मीटर/सेकण्ड^2, ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर।

(3) जब लिफ्ट एकसमान त्वरण f मीटर/सेकण्ड से नीचे की ओर जा रही है तथा t समय पश्चात् इससे एक पिण्ड गिराया जाता है तब इस समय पर निम्न स्थितियाँ होंगी :

(i) पिण्ड का वेग = लिफ्ट का वेग = ft मीटर/सेकण्ड, नीचे की ओर

(ii) लिफ्ट के सापेक्ष पिण्ड का त्वरण = पिण्ड का त्वरण – लिफ्ट का त्वरण = $(g - f)$ मीटर/सेकण्ड^2, नीचे की ओर।

किसी गतिमान क्षैतिज तल या लिफ्ट पर रखे पिण्ड का आभासी भार (Apparent weight of a body resting on a moving horizontal plane or a lift)

माना f त्वरण से गति कर रही लिफ्ट पर m द्रव्यमान का एक पिण्ड रखा है तथा R अभिलम्ब प्रतिक्रिया है, तब

(i) **जब लिफ्ट ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर गति कर रही है :** ऊपर की ओर प्रभावी बल = एक ही दिशा में बाह्य बलों का योग

$\Rightarrow mf = R - Mg \Rightarrow R = m(f + g)$

स्पष्टतः, तल पर पिण्ड द्वारा उत्पन्न दबाब R, पिण्ड के वास्तविक भार mg से अधिक है। इस दबाब को पिण्ड का आभासी भार भी कहते हैं।

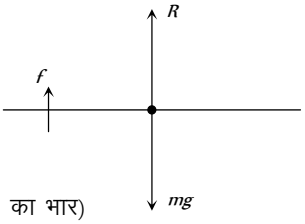
यदि m द्रव्यमान का एक व्यक्ति ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर f त्वरण से गति कर रही लिफ्ट पर खड़ा है, तब

$R = m(g + f)$

$\Rightarrow R = mg\left(1 + \frac{f}{g}\right)$

$\Rightarrow R$ = (व्यक्ति का भार) $\left(1 + \frac{f}{g}\right)$

$\Rightarrow R$ = व्यक्ति का भार + $\frac{f}{g}$ (व्यक्ति का भार)



अतः व्यक्ति का आभासी भार, व्यक्ति के वास्तविक भार का $\frac{f}{g}$ गुना अधिक है।

(2) **जब लिफ्ट ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर गति कर रही है %** नीचे की ओर प्रभावी बल = एक ही दिशा में कार्यरत बलों का योग

$\Rightarrow mf = mg - R$

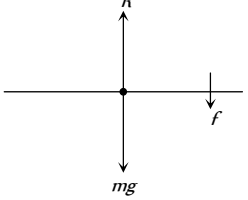
$\Rightarrow R = m(g - f)$

स्पष्टतः, तल पर पिण्ड द्वारा उत्पन्न दबाब, पिण्ड के वास्तविक भार से कम है।

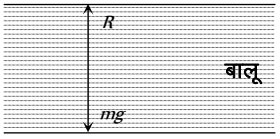
यदि m द्रव्यमान का एक व्यक्ति ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर f त्वरण से गति कर रही लिफ्ट पर खड़ा है, तब दबाब

$R = m(g - f) = mg\left(1 - \frac{f}{g}\right)$

$\Rightarrow R$ = व्यक्ति का भार – $\frac{f}{g}$ (व्यक्ति का भार)



अतः व्यक्ति का आभासी भार, वास्तविक भार का $\frac{f}{g}$ गुना कम है।



किसी गिरते हुये पिण्ड को रोकने के लिये प्रभावी बल = $F - mg$

यदि रेत (sand) में गिरते हुए m द्रव्यमान के पिण्ड के लिये रेत का प्रतिरोध R है, तब प्रभावी बल = $R - mg$.

एक डोरी से बँधे दो पिण्डों की गति (Motion of two particles connected by a string)

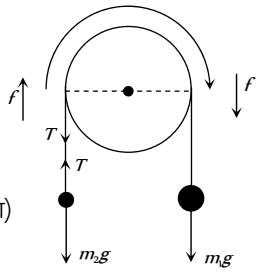
(1) **जब दोनों पिंड ऊर्ध्वाधर लटके हुए हैं %** यदि m_1 और m_2 द्रव्यमान $(m_1 > m_2)$ के दो पिंड एक भारहीन अवितान्य डोरी के सिरों से बंधें हैं, जो कि एक हल्की स्थिर चिकनी घिरनी के ऊपर से होकर जाती है तब $m_1 > m_2$ द्रव्यमान का पिंड नीचे की ओर गति करेगा और उसका

त्वरण $f = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$

डोरी में तनाव $T = \frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2}$

(यह तनाव पूरी रस्सी में एक समान होगा)

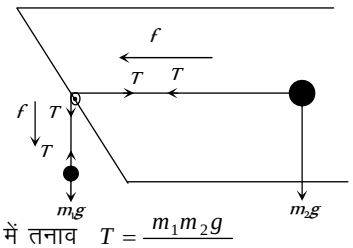
घिरनी पर दबाब $= 2T = \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}.g$



(2) **एक पिंड चिकनी क्षैतिज मेज के ऊपर है :** m_1 और m_2 द्रव्यमान के दो पिंड एक हल्की अवितान्य डोरी से बँधे हैं। डोरी एक चिकनी क्षैतिज मेज के किनारे पर लगी हल्की स्थिर चिकनी घिरनी के ऊपर से होकर जाती है। m_1 द्रव्यमान स्वतंत्रता पूर्वक ऊर्ध्वाधर लटक रहा है और द्रव्यमान m_2 चिकनी मेज पर रखा है।

m_1 द्रव्यमान का पिंड ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर गति करेगा और द्रव्यमान m_2 को घिरनी की ओर खींचेगा, तब निकाय का

त्वरण $f = \frac{m_1g}{m_1 + m_2}$



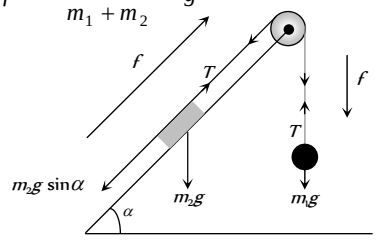
डोरी में तनाव $T = \frac{m_1m_2g}{m_1 + m_2}$

घिरनी पर दबाब $= T\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}m_1m_2g}{m_1 + m_2}$

(3) **जब एक पिंड एक चिकने नतसमतल के ऊपर है :** m_1 द्रव्यमान का एक पिंड, एक अवितान्य डोरी के एक सिरे पर बँधा है और ऊर्ध्वाधर लटका हुआ है। डोरी समतल के शिखर पर लगी एक भारहीन स्थिर चिकनी घिरनी पर से जाती हुई कोण α पर झुके चिकने नतसमतल पर रखे एक द्रव्यमान m_2 से दूसरे सिरे पर बँधी हुई है।

यदि द्रव्यमान m_1 ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर गति करता है (जबकि $m_1 g > m_2 g \sin\alpha$) तो निकाय के लिए

त्वरण $f = \dfrac{m_1 - m_2 \sin\alpha}{m_1 + m_2} g$



डोरी में तनाव $T = \dfrac{m_1 m_2 (1 + \sin\alpha)}{m_1 + m_2} g$

घिरनी पर दबाव $= \sqrt{\{2(1+\sin\alpha)\}} T = \dfrac{\sqrt{2} m_1 m_2 g (1+\sin\alpha)^{3/2}}{m_1 + m_2}$

प्रत्यास्थ पिण्डों का संघट्ट (Impact of elastic bodies)

(1) **प्रत्यास्थता :** यदि किसी पिण्ड को दबाया या संकुचित किया जा सके और संकुचन के पश्चात् पिंड अपनी पूर्वावस्था में आ जाए तब पिण्ड के इस गुण को प्रत्यास्थता कहते हैं। प्रत्यास्थता प्रदर्शित करने वाले पिण्डों को प्रत्यास्थ पिण्ड कहते हैं।

(2) **संवेग संरक्षण का नियम :** किसी निकाय का संघट्ट के ठीक पहले तथा संघट्ट के ठीक पश्चात् संवेग नियत रहता है।

गणितीय रूप में, $m_1.u_1 + m_2.u_2 = m_1.v_1 + m_2.v_2$

जहाँ, m_1 = प्रथम पिंड का द्रव्यमान

u_1 = प्रथम पिंड का प्रारम्भिक वेग

v_1 = प्रथम पिंड का अन्तिम वेग

m_2, u_2, v_2 = द्वितीय पिंड के लिए संगत मान

(3) **प्रत्यानन गुणांक** (Coefficient of restitution)**:** यह निश्चित अनुपात होता है, जिसे e से प्रदर्शित करते हैं। e का मान 0 से 1 की सीमा में होता है। e का मान पिण्डों के पदार्थों की प्रकृति पर निर्भर करता है तथा पिण्डों के द्रव्यमान से स्वतंत्र होता है। यदि पिण्ड पूर्णतः प्रत्यास्थ है, तब $e = 1$ तथा यदि पिण्ड अप्रत्यास्थ है, तब $e = 0$.

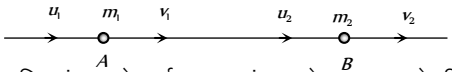
(4) **संघट्ट :** जब दो पिण्ड परस्पर टकराते हैं, तब यह पिण्डों का संघट्ट कहलाता है। यह दो प्रकार का होता है, प्रत्यक्ष (सीधा) तथा तिर्यक।

(5) **न्यूटन का प्रयोगात्मक संघट्ट का नियम :** न्यूटन के इस नियम के अनुसार जब दो प्रत्यास्थ पिंड़ों का संघट्ट होता है, तब उभयनिष्ठ अभिलम्ब के अनुदिश संघट्ट के ठीक पश्चात् आपेक्षिक वेग तथा संघट्ट के ठीक पूर्व आपेक्षिक वेग में एक अचर अनुपात होता है। दोनों स्थितियों में संघट्ट की दिशा विपरीत होती है।

यदि उभयनिष्ठ अभिलम्ब के अनुदिश स्पर्श बिन्दु पर, संघट्ट के पहले दो पिण्डों के वेग u_1 व u_2 तथा संघट्ट के पश्चात् उसी दिशा में वेग v_1 व v_2 हैं, तब $v_1 - v_2 = -e(u_1 - u_2)$

स्थिति I : यदि दो पिण्ड निम्न चित्रानुसार गति करते हैं, तब

(a) $v_1 - v_2 = -e(u_1 - u_2)$ तथा (b) $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$

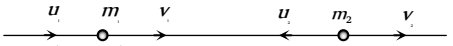


स्थिति II : यदि संघट्ट के पूर्व तथा संघट्ट के पश्चात् दो पिण्डों की गति की दिशा निम्न चित्रानुसार है, तब प्रत्यक्ष संघट्ट के नियम से,

(a) $v_1 - v_2 = -e[u_1 - (-u_2)]$ या $v_1 - v_2 = -e(u_1 + u_2)$

तथा (b) $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 (-u_2)$

या $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 - m_2 u_2$

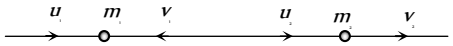


स्थिति III : यदि दो पिण्डों की गति की दिशा निम्न चित्रानुसार है, तब

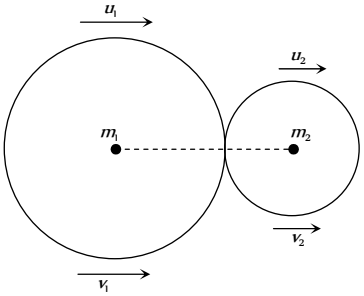
(a) $v_1 - (-v_2) = -e[-u_1 - (-u_2)]$ या $v_1 + v_2 = -e(u_2 - u_1)$

तथा (b) $m_1 v_1 + m_2 (-v_2) = m_1 (-u_1) + m_2 (-u_2)$

या $m_1 v_1 - m_2 v_2 = -(m_1 u_1 + m_2 u_2)$



(6) **दो चिकने** (Smooth) **गोलों का सीधा** (Direct) **संघट्ट :** माना m_1, m_2 द्रव्यमान के दो चिकने गोले, उनके केंद्रो को मिलाने वाली रेखा की दिशा में वेगों u_1, u_2 ($u_1 > u_2$) से चलते हुए संघट्ट करते हैं। यदि संघट्ट के बाद इनके वेग केंद्रो को मिलाने वाली रेखा की दिशा में क्रमशः v_1 और v_2 हो जाते हैं और e उनका प्रत्यानन गुणांक हो, तो संवेग संरक्षण के नियम से,



$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$ .....(i)

तथा न्यूटन के प्रयोगात्मक नियम से,

$v_2 - v_1 = e[u_1 - u_2]$ .....(ii)

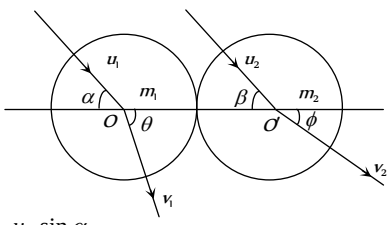
समीकरण (ii) को m_2 से गुणा करके समीकरण (i) से घटाने पर,

$(m_1 + m_2) v_1 = (m_1 - e m_2) u_1 + m_2 u_2 (1 + e)$

$\therefore \quad v_1 = \dfrac{(m_1 - e m_2) u_1 + m_2 u_2 (1 + e)}{m_1 + m_2}$ .....(iii)

(7) **दो गोलों का तिर्यक** (Oblique) **संघट्ट :** माना m_1 द्रव्यमान का एक चिकना गोला m_2 द्रव्यमान के दूसरे चिकने गोले से संघट्ट करता है। माना दोनों गोलों के संघट्ट से ठीक पहले वेग u_1, u_2 गोलों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा से क्रमशः कोण α, β बनाते हैं। माना संघट्ट के ठीक बाद में उनके वेग v_1, v_2 हैं, जो कि केंद्रो को मिलाने वाली रेखा से क्रमशः कोण θ, ϕ बनाते हैं।

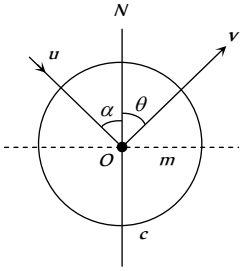
चूँकि गोले चिकने हैं अतः केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा O_1O_2 के लम्ब दिशा में, गोलों के वेगों के वियोजित भाग टकराने से पहले तथा बाद में अपरिवर्तित रहेंगे।



$v_1 \sin\theta = u_1 \sin\alpha$ .....(i)

$v_2 \sin\phi = u_2 \sin\beta$ .....(ii)

गोलों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा O_1O_2 के अनुदिश न्यूटन के नियम से,



$v_2 \cos\phi - v_1 \cos\theta = -e(u_2 \cos\beta - u_1 \cos\alpha)$ .....(iii)

पुनः गोले के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा O_1O_2 के अनुदिश संवेग संरक्षण के नियम से,

$\therefore m_1v_1 \cos\theta + m_2v_2 \cos\phi = m_1u_1 \cos\alpha + m_2u_2 \cos\beta$ .....(iv)

समी. (i), (ii), (iii) व (iv) का उपयोग करके अज्ञात राशियों के मान ज्ञात कर सकते हैं।

(8) **चिकने गोले का चिकने स्थिर समतल पर संघट्ट :** माना m द्रव्यमान का एक गतिमान चिकना गोला u वेग से, ऊर्ध्वाधर से α कोण बनाते हुये एक चिकने स्थिर क्षैतिज तल पर O बिन्दु पर संघट्ट करता है और माना संघट्ट के बाद गोला v वेग से ऊर्ध्वाधर से θ कोण बनाने वाली दिशा में चलता है।

$\because$ गोला और समतल दोनों चिकने हैं, अतः क्षैतिज तल की समान्तर दिशा में वेग में कोई परिवर्तन नहीं होगा।

$\therefore v \sin\theta = u \sin\alpha$ .....(i)

क्षैतिज समतल पर लम्ब के अनुदिश, न्यूटन के नियम से,

टकराने के बाद अलग होने का आपेक्षिक वेग = टकराने के पहले पास आने का आपेक्षिक वेग

$\therefore v \cos\theta - 0 = eu \cos\alpha \;\; v\cos\theta = eu\cos\alpha$ ....(ii)

समीकरण (ii) को (i) से भाग देने पर, $\cot\theta = e \cot\alpha$

विशेष स्थिति % यदि $\alpha = 0$ तब (i) से, $v \sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0$

$\because v \neq 0$, $\therefore \theta = 0$ तथा (ii) से, $v = eu$

यदि एक चिकना गोला एक चिकने स्थिर समतल पर अभिलम्बवत् संघट्ट करता है तो यह संघट्ट के बाद अभिलम्ब के अनुदिश संघट्ट के वेग के e गुना वेग से विपरीत दिशा में वापस लौटेगा।

अर्थात संघट्ट के बाद वापस लौटने का वेग = e (संघट्ट से पहले का वेग)

चिकने गोले का चिकने स्थिर क्षैतिज समतल पर संघट्ट का कुल समय एवं तय की गई कुल दूरी : यदि एक चिकना गोला h ऊँचाई से गिरकर एक चिकने स्थिर क्षैतिज समतल पर संघट्ट करता है, और e प्रत्यानन गुणांक है, तब गोले का उछलना बन्द होने तक का कुल समय $= \frac{1+e}{1-e}\cdot\sqrt{\left(\frac{2h}{g}\right)}$ तथा गोले का उछलना बंद होने तक इसके द्वारा चली कुल दूरी $= \frac{1+e^2}{1-e^2}h$.

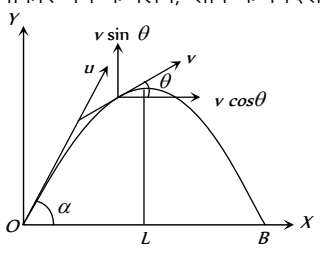
प्रक्षेप्य गति (Projectile motion)

जब किसी पिण्ड को ऊर्ध्वाधर से भिन्न अन्य दिशा में u वेग से, क्षैतिज से α कोण बनाते हुए फेंका जाता है तब वह परवलयाकार पथ बनाते हुए गति करता है, फेंके जाने वाले पिण्ड को प्रक्षेप्य कहते हैं तथा पिण्ड द्वारा बनाए गए वक्र पथ को प्रक्षेप्य पथ कहते हैं।

प्रक्षेप्य का पथ एक परवलय होता है और इस पथ का समीकरण निम्न है

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

इस परवलयाकार पथ के लिये, शीर्ष के निर्देशांक



$\left(\frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}, \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\right)$ होंगे।

नाभिलम्ब जीवा की लंबाई = $(2u^2\cos^2\alpha)/g$

नाभि के निर्देशांक = $\left(\frac{u^2\sin 2\alpha}{2g}, \frac{-u^2\cos 2\alpha}{2g}\right)$.

(i) **प्रक्षेप्य गति से संबंधित महत्वपूर्ण परिणाम :** माना एक पिण्ड OX से α कोण की दिशा में u वेग से प्रक्षेपित होता है। माना t समय पश्चात् पिण्ड बिन्दु $P(x,y)$ पर है तथा OX से θ कोण बनाते हुये वेग v है।

(i) उड्डयन काल (Time of flight) $T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$

(ii) क्षैतिज समतल पर परास (Horizontal range), $R = (u^2\sin 2\alpha)/g$

= (वेग का क्षैतिज घटक × वेग का ऊर्ध्वाधर घटक)/g

महत्तम क्षैतिज परास = $\frac{u^2}{g}$, जबकि = $\frac{\pi}{4}$.

(iii) महत्तम ऊँचाई $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

महत्तम ऊँचाई तक पहुँचने का समय $= \frac{u\sin\alpha}{g}$

(iv) माना t समय पर किसी कण की स्थिति $P(x,y)$ है, तब $x = (u\cos\alpha)t, \;\; y = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$.

(v) t समय पर क्षैतिज वेग $= \frac{dx}{dt} = u\cos\alpha$

t समय पर ऊर्ध्वाधर वेग $= \frac{dy}{dt} = u\sin\alpha - gt$

(vi) **t समय बाद वेग व दिशा :** यदि फेंकने के t समय बाद, पिंड क्षैतिज से θ कोण बनाते हुये वेग V से चल रहा है तो $V = \sqrt{u^2 - 2ugt\sin\alpha + g^2t^2}$ और $\tan\theta = \left(\frac{u\sin\alpha - gt}{u\cos\alpha}\right)$.

(vii) यदि एक पिंड क्षैतिज से α कोण बनाते हुये वेग u से फेंका गया है, तो यह $u/(g\sin\alpha)$ समय बाद अपनी प्रक्षेप्य दिशा के लम्ब दिशा में चलेगा।

(viii) **ऊँचाई पर वेग व दिशा :** यदि h ऊँचाई पर पिंड का वेग V, क्षैतिज से θ कोण बनाती हुई दिशा में है, तो

$V = \sqrt{u^2 - 2gh}$ और $\theta = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{u^2\sin^2\alpha - 2gh}}{u\cos\alpha}\right]$.

(ix) एक ही क्षैतिज परास के लिये, दो प्रक्षेप्य कोण α और $(90^o - \alpha)$ होते हैं।

(x) प्रक्षेप्य के पथ के प्रत्येक बिन्दु पर वेग का क्षैतिज घटक $u\cos\theta$ होता है।

(xi) प्रक्षेप्य पथ के उच्चतम बिन्दु पर, प्रक्षेप्य का वेग क्षैतिज दिशा में होता है और यह $u\cos\alpha$ के बराबर होता है।

उच्चतम बिन्दु पर वेग का ऊर्ध्वाधर घटक = 0

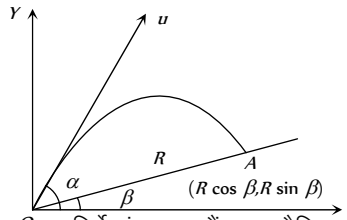
(xii) एक ही ऊँचाई के लिये दो समय होते हैं।

यदि h ऊँचाई तक जाने में पिंड t समय लेता है तो $h = (u\sin\alpha).y - \frac{1}{2}gt^2$ और t_1 और t_2 दो अभीष्ट समय हैं तो

$t_1 + t_2 = (2u\sin\alpha)/g$

$t_1 t_2 = 2h/g$ अर्थात् $h = \frac{1}{2}gt_1t_2$

(2) **किसी नत समतल पर परास तथा उड्डयन काल :**



माना OX तथा OY निर्देशांक अक्ष हैं तथा क्षैतिज अक्ष OX से β कोण पर एक नतसमतल OA है। माना बिन्दु O से क्षैतिज अक्ष OX से α कोण बनाते हुये एक पिण्ड प्रारंभिक वेग u से प्रक्षेपित किया जाता है तब प्रक्षेप्य पथ का समीकरण है, $y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$.

(i) नत समतल पर ऊपर की दिशा में परास

$$R = \frac{2u^2\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)}{g\cos^2\beta}$$

नत समतल पर ऊपर की दिशा में महत्तम परास $= \frac{u^2}{g(1+\sin\beta)}$,

जहाँ $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$

(ii) नत समतल पर ऊपर की दिशा में उड्डयन काल

$$T = \frac{2u\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}$$

(iii) नत समतल पर नीचे की दिशा में परास

$$= \frac{2u^2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)}{g\cos^2\beta}$$

(iv) नत समतल पर नीचे की दिशा में महत्तम परास $= \frac{u^2}{g(1-\sin\beta)}$,

जहाँ $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

(v) नत समतल पर नीचे की दिशा में उड्डयन काल

$$= \frac{2u\sin(\alpha+\beta)}{g\cos\beta}$$

(vi) पिंड के नत समतल के लम्बवत् दिशा में टकराने की दशा में प्रतिबन्ध है, $\cot\beta = 2\tan(\alpha-\beta)$.

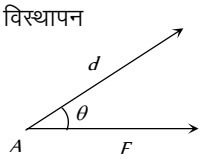
कार्य, शक्ति और ऊर्जा (Work, Power and Energy)

(1) **कार्य** (Work) **:** यदि किसी पिंड पर एक बल लगाया जाता है और वह बल पिंड को एक स्थान से दूसरे स्थान तक विस्थापित करता है, तो बल कार्य करता हुआ कहा जाता है। कार्य अदिश राशि है।

किया गया कार्य = बल × बल की दिशा में विस्थापन

$W = \vec{F}.\vec{d}$

$W = Fd\cos\theta$



जहाँ θ, F व d के मध्य कोण है।

(2) **शक्ति** (Power)% किसी पिंड के कार्य करने की दर को पिंड की शक्ति कहते हैं।

1 वाट = 10^7 अर्ग / सेकण्ड = 1 जूल / सेकण्ड,

1 अश्वशक्ति (H.P.) = 746 वाट.

(3) **ऊर्जा** (Energy) **:** किसी पिंड के कार्य करने की क्षमता को उसकी ऊर्जा कहते हैं।

(i) **गतिज ऊर्जा :** किसी पिंड की गतिज ऊर्जा वह है, जो उसमें उसकी गति के कारण होती है। यदि m द्रव्यमान के पिंड का वेग v हो, तो इसकी गतिज ऊर्जा (K.E.) $= \frac{1}{2}mv^2$.

(ii) **स्थितिज ऊर्जा** : किसी पिंड की स्थितिज ऊर्जा उसकी स्थिति के कारण, उसके कार्य करने की क्षमता होती है।

क्षैतिज समतल से h ऊँचाई पर, m द्रव्यमान के पिंड के लिए स्थितिज ऊर्जा (P.E.) $= mgh$.

Tips & Tricks

✍ यदि वेग V के घटक परस्पर लम्बवत् हैं, तब $\beta = 90^o - \alpha$ इस प्रकार V के घटक, AX के अनुदिश $V\cos\alpha$ तथा AY के अनुदिश $V\sin\alpha$ हैं।

✍ यदि एक कण सरल रेखा में प्रारंभिक वेग u मीटर / सेकण्ड तथा अचर त्वरण f मीटर/सेकण्ड^2 से गति कर रहा है, तब t सेकण्ड में चली गयी दूरी निम्न प्रकार दी जाती है

$$s = ut + \frac{1}{2}ft^2 = \frac{1}{2}[2ut + ft^2] = \frac{1}{2}[u + (u+ft)]t = \left(\frac{u+v}{2}\right).t,$$

जहाँ $v = u + ft$

= (औसत वेग) × t, {औसत वेग = $\frac{u+v}{2}$}

✍ यदि कोई तल ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर मंदन g से गति करता है, अर्थात् $f = -g$, तब $R = m(f+g)$ से, $R = 0$. अतः इस स्थिति में तल पर पिण्ड का दबाब शून्य होता है।

✍ यदि तल गुरुत्व के अधीन स्वतंत्रापूर्वक नीचे की ओर त्वरण g से गति करता है, तब $R = m(g-f)$ से, $R = 0$. अतः इस स्थिति में तल पर पिण्ड का दबाब शून्य होता है।