5259CH02

باب 2

معکوس ٹرگنومیٹریائی تفاعلات
(INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS)

❖'ریاضی عموماً بنیادی طور پر خودد کھائی دینے والی اشیاء کی سائنس ہے۔ فیلکس کلین❖

2.1 تعارف

آریہ بھٹہ
(476-550A.D.)

باب '1' میں، ہم پڑھ چکے ہیں کہ فنکشن f کا معکوس جو کہ f^{-1}, سے، ظاہر کیا جاتا ہے، وجود پزیر ہوتا ہے اگر f یک۔ یک اور اون ٹو (onto) ہے۔ کچھ ایسے تفاعلات ہیں جو یک۔ یک نہیں ہیں، پر یا پھر دونوں خصوصیات نہیں ہیں اس لیے ہم ان کے معکوس کے بارے میں بات نہیں کرتے۔ گیارویں جماعت میں ہم پڑھ چکے ہیں کہ ٹرگنومیٹریائی تفاعلات یک۔ یک اور اون ٹو نہیں ہیں۔ اپنے طبعی علاقہ اور وسعت میں اور اس لیے ان کے معکوس وجود پزیر نہیں ہیں۔ اس باب میں ہم ٹرگنومیٹریائی تفاعلات کے علاقوں اور وسعت کی بندشوں کے بارے میں مطالعہ کریں گے جو ان کے معکوس کے وجود میں ہونے کی یقین دہانی کرتے ہیں اور ان کے کردار کا مشاہدہ گراف کے ذریعے ہوتا ہے۔

معکوس ٹرگنومیٹریائی تفاعلات احصا (Calculus) میں ایک اہم رول ادا کرتے ہیں جس کے لیے وہ بہت سے تکملہ (Integrals) کی تعریف بیان کرتے ہیں۔

2.2 بنیادی تصور

گیارہویں جماعت میں ہم نے ٹرگنومیٹریائی تفاعلات کا مطالعہ کیا ہے۔ جنہیں ذیل طریقے سے بیان کیا گیا ہے۔

سائن تفاعل (فنکشن) $\text{sine} : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$

کوسائن فنکشن — i.e $\cos : \mathbf{R} \to [-1, 1]$

ٹیجنٹ فنکشن i. e., $\tan: \mathbf{R} - \{x : x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in\} \to \mathbf{R}$

کوٹ فنکشن i.e. $\text{Cot}: \mathbf{R} - \{x : x = n\pi, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$

سیکنیٹ فنکشن i.e., $\text{Sec}: \mathbf{R} - \{x : x = (2n+)1\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R} - (-1,1)$

کوسیکینٹ فنکشن i.e. $\text{cosec}: \mathbf{R} - \{x : x = (2n\pi, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R} - (1-1,1)$

ہم نے باب '1' میں بھی پڑھا ہے کہ اگر $f : X \to Y$ تا کہ $f(x) = y$ یک یک 'اون ٹو' ہے تب ہم ایک یکتا تفاعل $g : Y \to X$ کو بیان کر سکتے ہیں تا کہ $g(y) = x$ ، جہاں $x \in X$ اور $y \in f(x)$ یہاں، g کا علاقہ $= f$ کی وسعت اور g کی وسعت $= f$ کا علاقہ۔ تفاعل g کو f کا معکوس کہا جاتا ہے اور f^{-1} ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس کے علاوہ g یک۔ یک اور اون ٹو بھی ہے۔ اور g کا معکوس f ہے۔ اس طرح $g^{-1}(f^{-1})^{-1} = f$ ہمارے پاس اور بھی ہے۔

$$(f^{-1} o f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

$$(f o f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

کیونکہ سائن فنکشن کا علاقہ تمام حقیقی اعداد کا سیٹ ہے اور وسعت بند وقفہ $[-1,1]$ ہے۔

اگر ہم اس کے علاقہ کو $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ تک محدود رکھیں، تب یہ یک یک اور اون ٹو ہو جاتا ہے جس کی وسعت $[-1,1]$ ہے۔

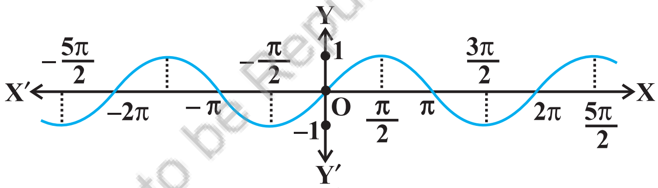
اصلیت میں، سائن فنکشن کسی بھی وقفہ $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ وغیرہ یک۔ یک تک محدود ہے۔ اور اس کی وسعت $[-1,1]$ ہے۔ اور وسعت کوئی بھی قفہ $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right], \left[\frac{3-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$ یا $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ شاخ حاصل ہوتی ہے۔ وہ شاخ جس کی وسعت $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$ ہے۔ اصل قیمت شاخ کہلاتی ہے، جب کہ دوسرے وقفے سمت کی طرح $\sin^{-1}$ کی مختلف شاخیں دیتی ہے۔ جب ہم فنکشن $\sin^{-1}$ کا حوالہ دیتے ہیں، ہم اسے ایک تفاعل کے طور پر لیتے ہیں جس کا حلقہ $[-1,1]$ ہے اور سمت $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$ ہے۔

ہم $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ لکھتے ہیں۔

معکوس فنکشن کی تعریف سے یہ نکلتا ہے کہ اگر $-1 \le x \le 1$ تو $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ $\sin(\sin x) = x \text{ if}$ دوسرے الفاظ میں، اگر $y=\sin^{-1} x$ تب $\sin y = x$ ۔

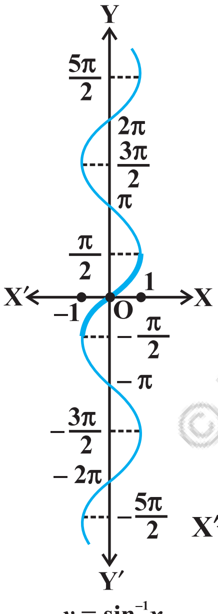
ریمارک

(i) ہم باب '1' سے جانتے ہیں کہ، اگر $y = f(x)$ ایک قابلِ تعکیس فنکشن ہے، تب $x = f^{-1}(y)$ ہے۔ اس لئے $\sin^{-1}$ فنکشن کا گراف اصلی فنکشن سے x اور y محور کو پلٹ کر حاصل کیا جا سکتا ہے، .i.e. اگر (a,b) سائن فنکشن کے گراف پر ایک نقطہ ہے، تب (b,a) سائن فنکشن کے گراف کے معکوس کے مطابق نقطہ بن جاتا ہے۔ اس طرح $y = \sin^{-1} x$ کا گراف $y = \sin x$ کے گراف x اور y محور کو آپس میں بدلنے سے حاصل ہوسکتا ہے۔



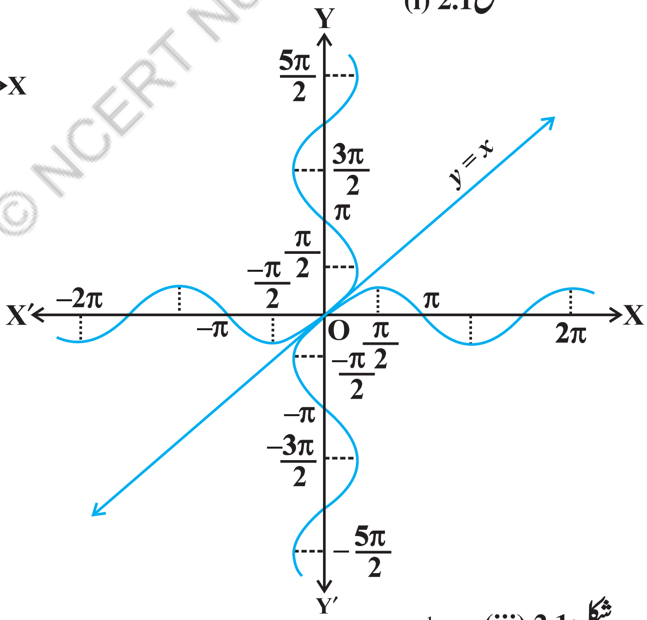
$y = \sin x$

شکل 2.1 (i)



$y = \sin^{-1} x$

شکل 2.1 (ii)



$y = \sin x$ and $y = \sin^{-1} x$ شکل 2.1 (iii)

$y = \sin^{-1} x$ کے گراف شکل 2.1 (i)، (ii) اور (iii) کی طرح دیئے گئے ہیں۔ $y = \sin^{1} x$ کا گراف کا گہرا حصہ شاخ کی اصل قیمت (principal value branch) کو دکھاتا ہے۔

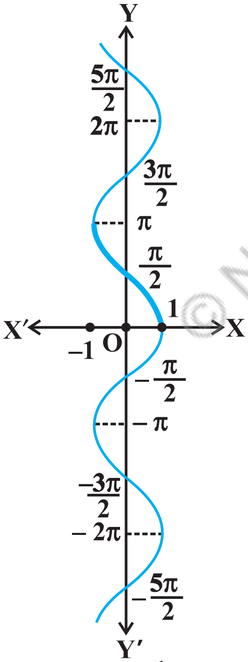
(ii) یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ معکوس فنکشن کا گراف اصل فنکشن کے گراف کے مطابق حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ایک شیشے کی طرح (یعنی انعکاس) خط $x = x$ کے ساتھ اسے گراف $y = \sin x$ کے ساتھ $y = \sin^{1} x$ پر غور کر کے دیکھا جاسکتا ہے۔ جس طرح اسی محور میں دیا گیا ہے۔ (شکل 2.1 (iii))

سائن فنکشن کی طرح کوسائیں فکشن وہ فنکشن ہے جس کا علاقہ تمام حقیقی اعداد کا سیٹ ہے اور وسعت $[-1,1]$ سیٹ ہے اگر ہم کوسائن فنکشن کے علاوہ پر $[0,\pi]$ تک بندش لگائیں، تب یہ سمت $[-1,1]$ کے ساتھ یک۔ یک اور اون ٹو (onto) ہو جاتا ہے۔ دراصل میں، کوسائس فنکشن کسی بھی وقفہ $[-\pi,0],[\pi,2\pi]$ تک بندش میں رہتا ہے۔، ایک دوقسمی ہے۔ جس کی وسعت $[-1,1]$ ہے۔ اس لیے ہم کوسائن فنکشن کے معکوس کو ان میں سے کسی بھی وقفہ پر بیان کرسکتے ہیں۔ ہم کوسائس فنکشن کے معکوس کو $\cos^{-1}$ (جس کوسائین فنکشن) سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس طرح $\cos^{-1}$ ایک فنکشن ہے جس کا علاقہ $[-1,1]$ ہے اور وسعت کوئی بھی وقفہ $[-\pi,0],[0,\pi],[\pi,2\pi]$ وغیرہ ہوسکتا ہے۔ ہر ایک وقفہ کے مطابق ہمیں $\cos^{-1}$ تفاعل کی شاخ حاصل ہوتی ہے۔ وہ شاخ جس کی وسعت $[0,\pi]$ ہے $\cos^{-1}$ تفاعل کی اصل قیمت شاخ کہلاتی ہے۔ ہم لکھتے ہیں۔

$$\cos^{-1}[-1,1]\rightarrow[0,\pi]$$

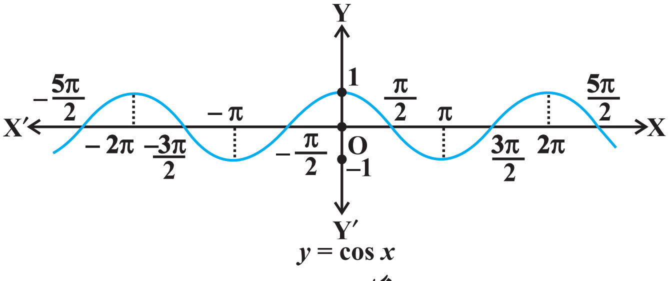
$y = \cos^{-1} x$ کا گراف بھی $y = \sin^{-1} x$ کے گراف کی طرح کھینچا جاسکتا ہے جس طرح اوپر بحث و مباحثہ کیا گیا ہے۔ $y = \cos x$ اور $y = \cos^{-1} x$ کے گراف شکل 2.2 (i) اور (ii) میں دیئے گئے ہیں۔

اب ہمیں $\cos^{-1} x$ اور $\sec^{-1} x$ پر ذیل کی طرح بحث و مباحثہ کرنا چاہیئے۔



$y = \cos^{-1} x$

شکل 2.2 (ii)



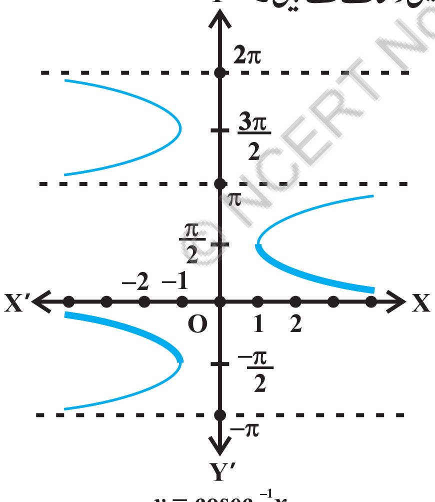
$y = \cos x$

شکل 2.2 (ii)

کیونکہ $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ ، cosec فنکشن کا حلقہ $\{x : x \in \mathbf{R}, x \neq n\pi \in \mathbf{Z}\}$ کا سیٹ ہے اوروسعت $\{y : y \in \mathrm{R}, y \geq 1 \, or \, y \leq -1\}$ کا سیٹ ہے یعنی سیٹ $\mathbf{R} - (-1,1)$ ہے۔اس کا مطلب ہے کہ $y = \operatorname{cosec} x$ تمام حقیقی قدریں $-1 < y > 1$ کے اختیار کرتا ہے اور جو π کے تکملہ ضریب کے لیے بیان نہیں کیا جاسکتا۔اگر ہم cosec فنکشن کے علاقہ $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ پر بندش لگادیں تب یہ اپنی وسعت جیسا کہ سیٹ $\mathbf{R} - (-1,1)$ کے ساتھ یک۔یک اور اون ٹو ہے۔اصلیت میں Cosec فنکشن کسی بھی وقفہ $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$، $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right] - \{-\pi\}$، $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ وغیرہ تک کے لیے محدود ہے۔دوربطی ہے اوراس کی وسعت تمام حقیقی اعداد $\mathbf{R} - (-1,1)$ کا سیٹ ہے۔اس طرح $\operatorname{cosec}^{-1}$ کو ایک فنکشن کی طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔ جس کا علاقہ $\mathbf{R} - (1-,1)$ ہے اور وسعت کوئی بھی وقفہ $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$، $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right] - \{-\pi\}$، $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$ قدر کی شاخ کہلاتا ہے۔اس طرح ہمارے پاس اصل شاخ اس طرح ہے۔

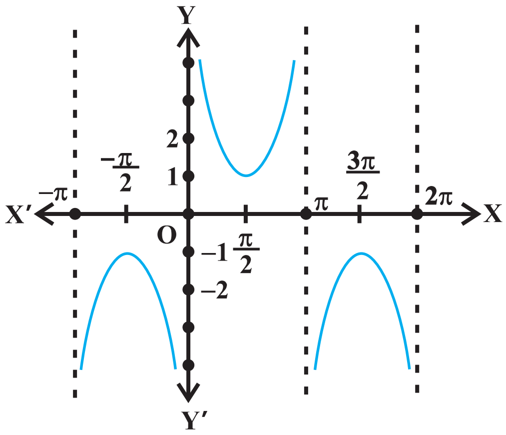
$$\operatorname{cosec}^{-1} : \mathbf{R} - (-1,1) \rightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$$

$y = \operatorname{cosec} x$ اور $y = \operatorname{cosec}^{-1} x$ کے گراف شکل 2.3(i) میں دکھائے گئے ہیں۔



$y = \operatorname{cosec}^{-1} x$

شکل 2.3 (ii)



$y = \operatorname{cosec} x$

شکل 2.3 (i)

ساتھ ہی کیوں کہ $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ ، $y = \sec x$ کا علاقہ $\mathrm{R} - \{x : x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ ہے اور وسعت

اس کے آگے ،اگر دو متغیر x اور y ایک دوسرے متغیر t کے ساتھ تبدیل ہو رہے ہوں،یعنی اگر $x = f(t)$ اور $y = g(t)$ ہے،تب زنجیری اصول سے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} \quad \text{اگرتو} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

اس طرح y کی تبدیلی x کے ساتھ کا اندازہ لگایا جاسکتا ہے y کی شرح تبدیلی استعمال کر کے اور x کی t کو مدنظر رکھتے ہوئے ہم ذیل مثالوں پرغور کرتے ہیں۔

مثال 1 ایک دائرہ کے رقبے کی شرح تبدیلی فی سیکنڈ اس کے نصف قطر کی مناسبت سے دریافت کیجیے جبکہ $r = 5$ سینٹی میٹر ہے

حل دائرہ کا رقبہ نصف قطر x کے ساتھ دیا گیا ہے $A = \pi r^2$ ۔اس لیے رقبہ A کی شرح تبدیلی نصف قطر x کی مناسبت سے $\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r$ سے دی گئی ہے ۔جب $r=5$ سینٹی میٹر، $\frac{dA}{dr} = 10\pi$ ہے ۔اس طرح ،دائرہ کا رقبہ 10π مربع سینٹی میٹر $10\pi \text{cm}^2/\text{s}$ کی در سے تبدیل ہو رہا ہے۔

مثال 2 ایک کعب کا حجم 9 مکعب سینٹی میٹر فی سیکنڈ کی شرح سے بڑھ رہا ہے۔جب ایک کنارے کی لمبائی 10 سینٹی میٹر ہوتو بتائیے کہ سطحی رقبہ کتنی تیزی سے بڑھ رہا ہے۔

حل مان لیجیے ایک ضلع کی لمبائی x ہے، v حجم ہے اور سطح رقبہ s ہے کعب کا۔تب $V = x^3$ اور $S = 6x^2$ ہے، جہاں x وقفہ t کا فنکشن ہے۔

اب
$$\frac{dV}{dt} = 9\text{cm}^3/\text{s} \quad (\text{دیا ہوا ہے})$$

اس لیے
$$9 = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(x^3) = \frac{d}{dx}(x^3) \cdot \frac{dx}{dt} \quad (\text{زنجیری اصول سے})$$

$$= 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

یا
$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{x^2} \qquad (1)....$$

اب
$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(6x^2) = \frac{d}{dx}(6x^2) \cdot \frac{dx}{dt} \quad (\text{زنجیری اصول سے})$$

$$= 12x \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right) = \frac{36}{x}$$ ((1) کا استعمال کرکے)

جب، اس لیے $x = 10\text{cm},\ \frac{dS}{dt} = 3.6 \text{ cm}^2/\text{s}$

مثال 3 ایک پتھر ایک خاموش جھیل میں پھینکا گیا اور لہریں دائرہ کی شکل میں 4 سینٹی میٹر فی سیکنڈ کی رفتار سے آگے بڑھیں لمحہ جب دائری لہر کا نصف قطر 10 سینٹی میٹر ہے، اس سے گھرا ہوا رقبہ کتنی رفتار (یا تیزی سے) بڑھ رہا ہے؟

حل ایک دائرہ کا رقبہ A جس کا نصف قطر r ہے دیا گیا ہے۔ $A = \pi x^2$ سے۔ اس لیے، رقبہ A کی شرح تبدیلی وقت t کے ساتھ ہے۔

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = \frac{d}{dr}(\pi r^2)\cdot\frac{dr}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$$ (زنجیری اصول سے)

یہ دیا ہوا ہے کہ $\frac{dr}{dt} = 4$ سینٹی میٹر فی سیکنڈ

اس لیے جب $r = 10$ سینٹی میٹر ہے $\frac{dA}{dt} = 2\pi(10)(4) = 80\pi$

اس طرح گھرا ہوا رقبہ 80π کی شرح سے بڑھ رہا ہے، جب $r = 10$ سینٹی میٹر ہے۔

نوٹ $\frac{dy}{dx}$ مثبت ہے اگر y بڑھتا ہے جیسے ہی x بڑھتا ہے اور منفی ہے اگر y گھٹ رہا ہے جب کہ x بڑھ رہا ہے۔

مثال 4 ایک مستطیل کی لمبائی x، 3 سم فی منٹ کی شرح سے گھٹ رہی ہے اور چوڑائی y کی شرح سے بڑھ رہی ہے۔ جب $r = 10$ سینٹی میٹر اور $y = 6$ سینٹی میٹر ہے، شرح تبدیلی معلوم کیجیے (a) احاطہ کی (b) مستطیل کے رقبہ کی۔

حل کیونکہ لمبائی لمبائی x گھٹ رہی ہے اور چوڑائی y بڑھ رہی ہے وقت کے ساتھ، ہمارے پاس ہے۔

$\frac{dx}{dt} = -3$ سینٹی میٹر فی منٹ اور $\frac{dy}{dt} = 2$ سینٹی میٹر فی منٹ

(a) احاطہ P ایک مستطیل کا دیا گیا ہے۔

$$P = 2(x + y)$$

اس لیے $\frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) = 2(-3+2) = -2$ سینٹی میٹر فی منٹ

(b) مستطیل کا رقبہ A دیا گیا ہے۔

$$A = x \cdot y$$

اس لیے $\frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dt}$

$= -3(6) + 10(2)$ (کیونکہ $x = 10$ سینٹی میٹر اور $y = 6$ سینٹی میٹر ہے)

$=2$ مربع سینٹی میٹر فی منٹ

مثال 5 کل قیمت $c(x)$ روپیوں میں، ایک شئے کے x یونٹ پیداوار کے ساتھ اس طرح منسلک دیا گیا ہے۔

$$C(x)=0.005x^3-0.02x^2+30x+5000$$

حاشیائی قیمت معلوم کیجیے جب کہ پیداوار 3 یونٹ ہو، جہاں حاشیائی پیداوار سے ہمارا مطلب ہے فوری طور پر کسی بھی وقت پیداوار کی کل قیمت کی شرح تبدیلی۔

حل ہمارے پاس ہے۔

حاشیائی قیمت $(MC) = \frac{dC}{dx} = 0.005(3x^2) - 0.02(2x) + 30$

جبکہ $x = 3, MC - 0.015(3^2) - 0.04(3) + 30$

اس لیے مطلوبہ حاشیائی قیمت 30.02 روپیے ہے (قریب قریب)

مثال 6 ایک شئے کی پیداوار کے x یونٹ کی بکری سے جو کل رقم روپیوں میں حاصل ہوئی ہے وہ $R(x) = 3x^2+36x+5$ سے دی گئی ہے، حاشیائی آمدنی معلوم کیجیے، جبکہ $x=5$ ہے، جہاں حاشیائی آمدنی سے ہمارا مطلب ہے کل آمدنی کا اس کے اسی لمحہ کے ہوئے سامان کی تعداد کی شرح تبدیلی۔

حل کیونکہ حاشیائی آمدنی کل آمدنی کی شرح تبدیلی ہے جس کے یونٹ کی تعداد کے ساتھ، ہمارے پاس ہے۔

حاشیائی آمدنی $(MR) = \frac{dR}{dx} = 6x + 36$

جب کہ $x = 5, MR = 6(5) + 36 = 66$

اس لیے، مطلوبہ حاشیائی آمدنی 66 روپیے ہے۔

مشق 6.1

1۔ ایک دائرہ کے رقبہ کا شرح تبدیلی نصف قطر r کو مدنظر رکھتے ہوئے معلوم کیجیے جب کہ
(a) $r = 3$ سینٹی میٹر (b) $r = 4$ سینٹی میٹر

2۔ ایک کعب کا حجم مکعب سینٹی میٹر فی سیکنڈ کی شرح سے بڑھ رہا ہے۔ سطحی رقبہ کس رفتار سے بڑھ رہا ہے جب کہ ایک کنارے کی لمبائی 12 سینٹی میٹر ہے؟

3۔ دائرہ کا رقبہ ایک مسلسل 3 سینٹی میٹر فی سیکنڈ کی رفتار سے بڑھ رہا ہے۔ معلوم کیجیے دائرہ کا رقبہ کس رفتار سے بڑھ رہا ہے جب کہ نصف قطر 10 سینٹی میٹر ہے۔

4۔ متغیر کعب کا ایک کنارہ 3 سینٹی میٹر فی سیکنڈ کی رفتار سے بڑھ رہا ہے۔ کعب کا حجم کس رفتار سے بڑھ رہا ہے جب کہ کنارہ 10 سینٹی میٹر لمبا ہے؟

5۔ ایک پتھر ایک خاموش جھیل میں پھینکا گیا اور لہریں دائری انداز میں 5 سینٹی میٹر فی سیکنڈ کی رفتار سے آگے بڑھیں۔ اس لمحہ جب کہ دائری لہر کا نصف قطر 8 سینٹی میٹر ہے، بند رقبہ کس رفتار سے بڑھ رہا ہے؟

6۔ ایک دائرہ کا رقبہ 0.7 سینٹی میٹر فی سیکنڈ کی شرح سے بڑھ رہا ہے۔ اس کے احاطہ کے بڑھنے کی شرح معلوم کیجیے؟

7۔ ایک مستطیل کی لمبائی 5 سینٹی میٹر فی منٹ کی رفتار سے گھٹ رہی ہے اور اس کی چوڑائی 4 سینٹی میٹر فی منٹ کی رفتار سے بڑھ رہی ہے جب کہ سینٹی میٹر $x=8$ اور سینٹی میٹر $y=6$ ہو، تب شرح تبدیلی معلوم کیجیے (a) احاطہ، اور (b) مستطیل کا رقبہ۔

8۔ ایک غبارہ، جو ہوا بھرنے پر ہمیشہ کرہ کی شکل میں رہتا ہے، میں 900 مکعب سینٹی میٹر فی سیکنڈ کے حساب سے ہوا ڈالی جا رہی ہے۔ وہ شرح معلوم کیجیے جس سے غبارہ کا نصف قطر بڑھ رہا ہے جب کہ نصف قطر 15cm ہے۔

9۔ ایک غبارہ جس کا نصف قطر متغیر ہے ہمیشہ کرہ کی شکل میں رہتا ہے۔ اس کے حجم کی نصف قطر کے ساتھ بڑھنے کی شرح معلوم کیجیے جب کہ بعد والا 10cm ہے۔

10۔ ایک سیڑھی جس کی لمبائی 5 میٹر ہے ایک دیوار کے سہارے کھڑی ہے۔ سیڑھی کا نیچے کا سرا، دیوار سے دور 2 سینٹی میٹر فی سیکنڈ کی شرح سے کھینچا گیا۔ اس کی اونچائی دیوار پر کتنی گھٹ رہی ہے جب کہ سیڑھی کے پیر دیوار سے 4 میٹر کے فاصلے پر ہیں؟

11۔ ایک ذرہ ایک منحنی $6y = x^3+2$ کے ساتھ بڑھ رہا ہے۔ منحنی پر وہ نقاط دریافت کیجیے جہاں y– مختص x– مختص سے 8 گنا رفتار سے بڑھ رہا ہے۔

12۔ ایک ہوا کے بلبلے کا نصف قطر $\frac{1}{2}$ سینٹی میٹر فی سیکنڈ شرح سے بڑھ رہا ہے۔ بلبلے کا حجم کس شرح سے بڑھ رہا ہے جب کہ نصف قطر 1 سینٹی میٹر ہے؟

13۔ ایک غبارہ، جو کہ ہمیشہ کرئی شکل میں رہتا ہے کا متغیر قطر $\frac{3}{2}(2x+1)$ ہے اس کے حجم کی تبدیلی کی شرح x کے ساتھ معلوم کیجیے۔

14۔ ایک پائپ سے ریت 12 مکعب سینٹی میٹر فی سیکنڈ شرح سے باہر آ رہا ہے۔ گرتا ہو ریت زمین پر ایک مخروط شکل اس طرح بنا دیتا ہے کہ مخروط کی اونچائی ہمیشہ اس کے اساس کے نصف قطر کا چھٹا حصہ ہے۔ ریت کے مخروط کی اونچائی کتنی تیزی سے بڑھ رہی ہے جب کہ اس کی اونچائی 4 سینٹی میٹر ہے؟

15۔ کل قیمت $C(x)$ روپیوں میں ایک شئے کے x یونٹ کی پیداوار پر مبنی ہے۔ جو کہ دیا گیا ہے

$$C(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$$

17 یونٹ کی پیداوار کی حاشیائی قیمت معلوم کیجیے۔

16۔ ایک شئے کے x یونٹ کی فروخت سے کل حاصل شدہ رقم روپیوں میں اس طرح دی گئی ہے۔

$$R(x) = 13x^2 + 26x + 15$$

حاشیائی رقم معلوم کیجیے جب کہ $x = 7$ ہے۔

سوال 17 اور 18 میں صحیح جواب چنیے۔

17۔ ایک دائرہ کا رقبہ کی اس کے نصف قطر کو مدنظر رکھتے ہوئے شرح تبدیلی معلوم کیجیے جب کہ $r = 6$ سینٹی میٹر ہے۔

(A) 10π (B) 12π (C) 8π (D) 11π

18۔ ایک شئے کے x یونٹ کی فروخت سے کل حاصل شدہ رقم روپیوں میں اس طرح دی گئی ہے۔

حاشیائی رقم جب کہ $x = 15$ ہے۔

(A) 116   (B) 96   (C) 90   (D) 126

6.3 بڑھتے اور گھٹتے ہوئے تفاعلات

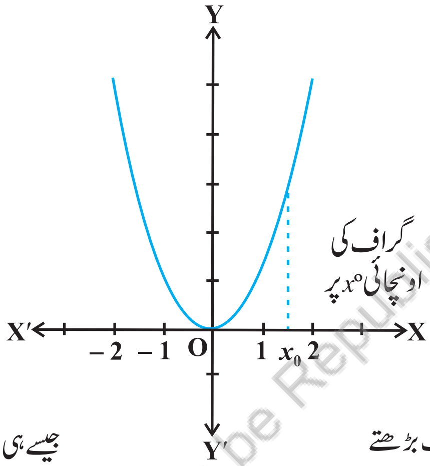
اس سیکشن میں یہ معلوم کرنے کے لیے تفرق کا استعمال کریں گے کہ کیا تفاعلات بڑھ رہا ہے یا گھٹ رہا ہے یا کچھ نہیں ہو رہا ہے۔

تفاعل f پر غور کیجیے جو کہ $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ سے دیا گیا ہے۔اس تفاعل کا گراف ایک مکافی ہے جو کہ شکل 6.1 میں دیا گیا ہے۔

مبداء سے دائیں طرف قدریں

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

جیسے ہی ہم بائیں سے دائیں کی طرف بڑھتے ہیں گراف کی اونچائی بڑھ جاتی ہے۔



شکل 6.1

مبداء سے بائیں طرف قدریں

$f(x) = x^2$	
$\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{2}$
$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$

جیسے ہی ہم بائیں سے دائیں کی طرف بڑھتے ہیں گراف کی اونچائی کم ہو جاتی ہے۔

پہلے ہم مبداء سے دائیں طرف کے گراف (شکل 6.1) پر غور کریں گے۔اس کا مشاہدہ کیجیے کہ ہم گراف کے ساتھ بائیں سے دائیں چلتے ہیں،گراف کی اونچائی لگاتار بڑھ رہی ہے۔اس وجہ کے لیے،حقیقی اعداد $x>0$ کے لیے کہا گیا ہے کہ تفاعل بڑھ رہا ہے۔

اب غور کیجیے کہ گراف مبداء سے بائیں طرف ہے اور یہاں مشاہدہ کیجیے کہ ہم گراف کے ساتھ بائیں سے دائیں طرف چلیں،گراف کی اونچائی لگاتار گھٹ رہی ہے۔نتیجتاً کہا جاتا ہے کہ حقیقی اعداد $0 > x$ کے لیے تفاعل گھٹ رہا ہے۔

اب ہمیں ذیل تحلیلی تعریفیں دینی چاہتے ہیں ایک تفاعل کے لیے جو ایک وقفہ پر بڑھ یا گھٹ رہا ہے۔

تعریف 1 مان لیجیے I ایک کھلا ہوا وقفہ ہے جو کہ ایک حقیقی قدر والے تفاعل f کے حلقہ میں موجود ہے۔تب f کو کہا جاتا ہے۔

(i) I پر بڑھ رہا ہے اگر $x_1 < x_2$ I میں ہے $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ تمام $x_1, x_2 \in I$ کے لیے۔

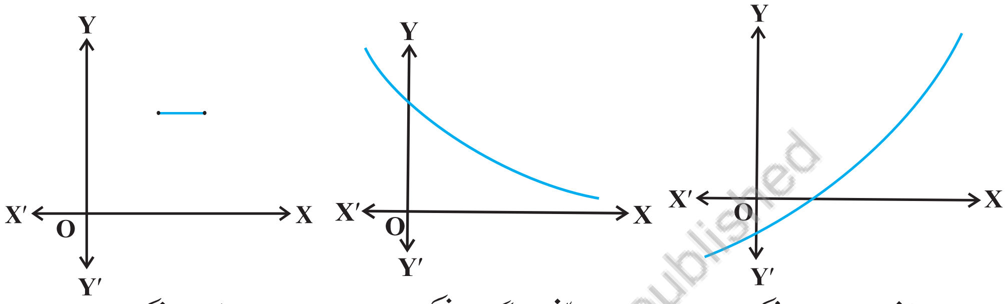
(ii) I پر کم ہو رہا ہے اگر x_1, x_2 I میں ہے $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ،تمام $x_1, x_2 \in I$ کے لیے۔ I میں منتقل ہے اگر $f(x)=C$ تمام $I \in 2$ جہاں C ایک مستقلہ

(iii) I پر کم ہو رہا ہے اگر $x_1 < x_2$ میں ہے $\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ ،تمام $x_1, x_2 \in I$ کے لیے۔

(iv) I پر سختی سے کم ہو رہا ہے اگر $x_1 < x_2$ میں I ہے $\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$، تمام $x_1, x_2 \in I$ کے لیے۔

اس طرح کے فنکشن کو گراف کے ذریعہ دکھانے کے لیے شکل 6.2 دیکھیے۔

اب ہم بیان کریں گے جب کہ ایک فنکشن ایک نقطہ پر بڑھ رہا یا گھٹ رہا ہے۔



(i) سختی سے بڑھتا ہوا فنکشن (ii) سختی سے گھٹتا ہوا فنکشن (iii) گھٹتا ہوا فنکشن

شکل 6.2

تعریف 2 مان لیجیے ایک حقیقی قدر والے فنکشن f کی تعریف کے علاقہ میں x_0 ایک نقطہ ہے۔ تب یہ کہا جاتا ہے کہ f بڑھ رہا ہے، گھٹ رہا ہے x_0 پر اگر ایک کھلا ہوا وقفہ I جس میں x_0 شامل ہے تاکہ f بالترتیب بڑھ رہا ہے، گھٹ رہا ہے I میں ہمیں اس تعریف کی صفائی دینی ہے بڑھتے ہوئے فنکشن کے مسئلہ میں

مثال 7 دکھایئے کہ فنکشن f جو کہ $f(x)=7x-3$ سے دیا گیا ہے **R** پر بڑھ رہا ہے۔

حل مان لیجیے x_1 اور x_2، **R** میں دو اعداد ہیں۔ تب

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 7x_1 < 7x_2 \Rightarrow 7x_1 - 3 < 7x_2 - 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

اس طرح، تعریف 1 سے یہ نکلتا ہے کہ **R** پر f سختی سے بڑھ رہا ہے۔

اب ہمیں بڑھتے ہوئے اور گھٹتے ہوئے فنکشن کے لیے پہلے مشتق جانچ کو دیا جائے۔ اس جانچ کے ثبوت کے لیے درمیانہ قدر مسئلہ درکار ہے جو کہ باب 5 میں پڑھا ہے۔

مسئلہ 1 مان لیجیے f $[a,b]$ پر مسلسل ہے اور کھلے ہوئے وقفہ (a,b) پر تفرق پذیر ہے۔ تب

(a) f، $[a,b]$ میں بڑھ رہا ہے اگر $f'(x) > 0$ ہے ہر ایک $x \in (a, b)$ کے لیے

(b) $[a,b], f$ میں گھٹ رہا ہے اگر $f'(x) < 0$ ہے ہر ایک $x \in (a, b)$ کے لیے

(c) $[a,b]$ میں f مستقل فنکشن ہے اگر $f'(x) = 0$ ہے ہر ایک $x \in (a, b)$ کے لیے

ثبوت (a) مان لیجیے $x_1, x_2 \in [a, b]$ تا کہ $x_1 < x_2$

تب، درمیانی قدر مسئلہ (باب 5 میں مسئلہ 8) x_1 اور x_2 کے درمیان ایک نقطہ موجود ہے تا کہ

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

یعنی $f(x_2) - f(x_1) > 0$ (جیسا کہ دیا $f'(c) > 0$ دیا ہوا ہے)

یعنی $f(x_2) > f(x_1)$

اس طرح ہمارے پاس ہے۔

$x_1, x_2 \in [a,b]$ تمام $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ کے لیے

اس لیے $[a,b]$ میں f ایک بڑھتا ہوا فنکشن ہے۔

حصہ (b) اور (c) ایک جیسے ہیں۔ یہ پڑھنے والے کے لیے ایک مشق کے طور پر چھوڑا گیا ہے۔

ریمارکس

(i) یہاں ایک تعمیم شدہ مسئلہ ہے جس کی رو سے اگر x کسی کھلے وقفہ میں مسلسل ہے تو $f'(x)>0$۔ تب f بڑھتا ہوا تفاعل ہے۔ اسی طرح سے اگر x کسی کھلے وقفہ میں مسلسل ہے تو $f'(x)<0$ تب f ایک گھٹتا ہوا تفاعل ہے۔

مثال 8 دکھائیے کہ فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے۔

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x, x \in \mathbf{R}$$

سے **R** میں بڑھ رہا ہے۔

حل یہ نوٹ کر لیجیے کہ

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

$$= 3(x^2 - 2x + 1) + 1$$

$$= 3(x-1)^2 + 1 > 0$$ ہر ایک وقفہ **R** میں

اس لیے تفاعل f، **R** میں سختی سے بڑھ رہا ہے۔

مثال 9 ثابت کیجیے کہ فنکشن جو کہ $f(x) = \cos x$ دیا گیا ہے۔

(a) گھٹ رہا ہے $(0, \pi)$ میں

(b) بڑھ رہا ہے $(\pi, 2\pi)$ میں اور

(c) نہ تو بڑھ رہا ہے اور نہ ہی گھٹ رہا ہے $(0, 2\pi)$

حل نوٹ کر لیجیے کہ $f'(x) = -\sin x$

(a) کیونکہ ہر ایک $x \in (0, \pi)$ کے لیے $\sin x > 0$، ہمارے پاس ہے $f'(x) < 0$ اور اس لیے f کم ہو رہا ہے $(0, \pi)$

(b) کیونکہ ہر ایک $x \in (\pi, 2\pi)$ کے لیے $\sin x < 0$، ہمارے پاس ہے $f'(x) > 0$ اور اس لیے f بڑھ رہا ہے $(\pi, 2\pi)$

(c) صاف طور پر اوپر کے (a) اور (b) سے، f نہ تو بڑھ رہا ہے اور نا ہی کم ہو رہا ہے $(0, 2\pi)$ میں۔

مثال 10 وہ وقفہ معلوم کیجیے جن میں فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے $f(x) = x2 - 4x + 6$ سے

(a) بڑھ رہا ہے۔ (b) کم ہو رہا ہے

حل ہمارے پاس ہے۔

شکل 6.3

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

یا

$$f'(x) = 2x - 4$$

اس لیے $f'(x) = 0$ دیتا ہے $x = 2$، اب نقطہ $x = 2$ حقیقی خط کو دو مختلف وقفوں میں بانٹتا ہے جن کے نام، $(-\infty, 2)$ اور $(2, \infty)$ ہیں (شکل 6.3) وقفہ $(-\infty, 2)$ میں $f'(x) = 2x - 4 < 0$ ہے۔

اس لیے، اس وقفہ میں f کم ہو رہا ہے۔ ساتھ ہی، وقفہ $(2, \infty)$ میں $f'(x) > 0$ ہے۔ اور اس لیے فنکشن f بڑھ رہا ہے۔

مثال 11 وہ وقفے معلوم کیجیے جن میں فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے، $f(x) = 4x3 - 6x^2 - 72x + 30$ سے (a) بڑھ رہا ہے

(b) گھٹ رہا ہے۔

حل ہمارے پاس ہے

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$$

$$f'(x)=12x^2-12x-72$$
$$=12(x^2-x-6)$$
$$=12(x-3)(x+2)$$

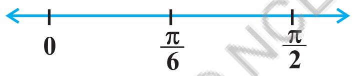
شکل 6.4

اس لیے $f'(x)=0$ دیتا ہے $x=-2,3$۔ نقاط $x=-2$ اور $x=3$ حقیقی خط کو تین مختلف وقفوں میں بانٹتے ہیں، جن کے نام ہیں $(-\infty,-2)$، $(-2,3)$ اور $(3,\infty)$

وقفوں $(-\infty,-2)$ اور $(3,\infty)$ میں $f'(x)$ مثبت ہے جب کہ وقفہ $(-2,3)$ میں $f'(x)$ منفی ہے۔ نتیجتاً فنکشن f وقفوں $(-\infty,-2)$ اور $(3,\infty)$ میں بڑھ رہا ہے جب کہ فنکشن وقفہ $(-2,3)$ میں کم ہو رہا ہے۔ حالانکہ **R** میں فنکشن نہ تو بڑھ رہا ہے اور نہ ہی گھٹ رہا ہے۔

وقفہ	$f'(x)$ کا نشان	تفاعل f کا مزاج
$(-\infty,-2)$	$(-)(-)>0$	f بڑھ رہا ہے
$(-2,3)$	$(-)(+)<0$	f کم ہو رہا ہے
$(3,\infty)$	$(+)(+)>0$	f بڑھ رہا ہے

مثال 12 وہ وقفہ معلوم کیجیے جن میں فنکشن جو کہ دیا گیا ہے $f(x)=\sin 3x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ سے (a) بڑھ رہا ہے (b) گھٹ رہا ہے۔



شکل 6.5

حل ہمارے پاس ہے

$$f(x)=\sin 3x$$

یا
$$f'(x)=3\cos 3x$$

اس لیے $f'(x)=0$ دیتا ہے $\cos 3x=0$ جو کہ پلٹ میں دیتا ہے $3x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ کیونکہ $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ کا مطلب ہے $3x\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$، تا کہ $x=\frac{\pi}{6}$ اور $\frac{\pi}{2}$ ہے۔ نقطہ $x=\frac{\pi}{6}$ وقفہ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ کو دو مشترک وقفوں $\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$ اور $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ میں بانٹتا ہے۔

اب $f'(x) > 0$ تمام $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ کے لیے کیونکہ $0 \le x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 \le 3x < \frac{\pi}{2}$ اور $f'(x) < 0$ تمام $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ کے لیے، کیونکہ $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 3x < \frac{3\pi}{2}$ ہے۔

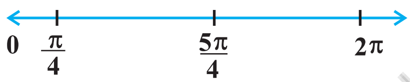
اس لیے f $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ میں بڑھ رہا ہے اور $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ میں کم ہو رہا ہے۔

ساتھ ہی دیا ہوا فنکشن $x = 0$ اور $x = \frac{\pi}{6}$ میں مسلسل ہے۔ اس لیے، مسئلہ 1 سے f $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ میں بڑھ رہا ہے اور $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ میں کم ہو رہا ہے۔

مثال 13 وہ وقفہ دریافت کیجیے جس میں فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے۔

$$f(x) = \sin x + \cos x,\ 0 \le x \le 2\pi$$

بڑھ رہا ہے یا کم ہو رہا ہے



شکل 6.6

حل ہمارے پاس ہے

$$f(x) = \sin x + \cos x,$$

یا

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

اب $f'(x) = 0$ دیتا ہے $\sin x = \cos x$، جو کہ دیتا ہے $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$، کیونکہ $0 \le x \le 2\pi$ ہے نقاط $x = \frac{\pi}{4}$ اور $x = \frac{5\pi}{4}$ وقفہ $[0, 2\pi]$ کو تین غیر مشترک وقفوں میں بانٹتے ہیں، جن کے نام ہیں $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$، $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ اور $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ میں

یہ نوٹ کر لیجیے کہ $f'(x) > 0$ اگر $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$

یا f وقفوں $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ اور $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ میں بڑھ رہا ہے۔

ساتھ ہی $f'(x) < 0$ اگر $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

یا f $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ میں گھٹ رہا ہے۔

وقفہ	$f'(x)$ کی علامت	تفاعل کا مزاج
$\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$	>0	f بڑھ رہا ہے
$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$	<0	f گھٹ رہا ہے
$\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$	>0	f بڑھ رہا ہے

مشق 6.2

1۔ دکھایئے کہ فنکشن جو کہ دیا گیا ہے $f(x) = 3x + 17$ سے R میں بڑھ رہا ہے۔

2۔ دکھایئے کہ فنکشن جو کہ دیا گیا ہے $f(x)=e^{2x}$ سے R میں بڑھ رہا ہے۔

3۔ دکھایئے کہ فنکشن جو کہ دیا گیا ہے $f(x) = \sin x$ سے

(a) بڑھ رہا ہے $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ میں (b) کم ہو رہا ہے $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ میں

(c) $(0, \pi)$ میں نہ تو بڑھ رہا ہے اور نہ ہی گھٹ رہا ہے۔

4۔ وہ وقفہ معلوم کیجیے جس میں فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے $f(x) = 2x^2 - 3x$ سے

(a) بڑھ رہا ہے (b) گھٹ رہا ہے۔

5۔ وہ وقفہ معلوم کیجیے جس میں فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے $f(x)=2x^3-3x^2-36x+7$ سے

(a) بڑھ رہا ہے (b) کم ہو رہا ہے۔

6۔ وہ وقفہ معلوم کیجیے جن میں ذیل فنکشن یا تو سختی سے بڑھ رہے ہیں یا کم ہو رہے ہیں۔

(a) $x^2 + 2x - 5$ (b) $10 - 6x - 2x^2$

(c) $-2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$ (d) $6 - 9x - x^2$

(e) $(x+1)3\ (x-3)^3$

7۔ دکھایئے کہ $y = \log(1+x) - \dfrac{2x}{2+x}$ اپنے پورے علاقے میں x کا بڑھتا ہوا فنکشن ہے۔

8۔ x کی وہ قدر معلوم کیجیے جس کے لیے $y = [x(x-2)]^2$ ایک بڑھتا ہوا فنکشن ہے۔

9۔ ثابت کیجیے کہ $y = \dfrac{4\sin\theta}{(2+\cos\theta)} - \theta$ ، θ کا $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ میں ایک بڑھتا ہوا فنکشن ہے۔

10۔ ثابت کیجیے کہ لوگارتمی فنکشن $(0, \infty)$ میں سختی سے بڑھ رہا ہے۔

11۔ ثابت کیجیے کہ فنکشن جو کہ دیا گیا ہے $f(x) = x^2 - x + 1$ سے $(-1, 1)$ پر نہ تو بڑھ رہا ہے اور نہ ہی گھٹ رہا ہے۔

12۔ ذیل میں کون سے فنکشن $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ پر کم ہو رہے ہیں؟

(A) $\cos x$ (B) $\cos 2x$ (C) $\cos 3x$ (D) $\tan x$

13۔ ذیل میں کون سے وقفوں پر فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$ سے گھٹ رہا ہے؟

(A) $(0,1)$ (B) $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ (C) $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (D) ان میں سے کوئی بھی نہیں

14۔ a کی کس قدر کے لیے تفاعل f جو کہ دیا گیا ہے $f(x) = x^2 + ax + 1$ وقفہ $(1,2)$ پر بڑھ رہا ہے؟

15۔ مان لیجیے I ایک وقفہ ہے جو کہ $(-1,1)$ کے علاوہ ہے۔ ثابت کیجیے کہ فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ سے سختی سے I پر بڑھ رہا ہے۔

16۔ ثابت کیجیے کہ فنکشن f جو کہ $f(x) = \log \sin x$ سے دیا گیا ہے $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ پر بڑھ رہا ہے اور $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ پر کم ہو رہا ہے۔

17۔ ثابت کیجیے کہ فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے $f(x) = \log \cos x$ سے $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ پر کم ہو رہا ہے اور $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ پر بڑھ رہا ہے۔

18۔ ثابت کیجیے کہ فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ ، $\mathbf{R}$ میں بڑھ رہا ہے۔

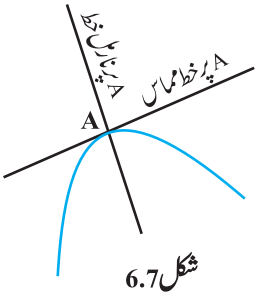
19۔ وہ وقفہ جس میں $y = x^2 e^{-x}$ ہے بڑھ رہا ہے۔

(A) $(-\infty, \infty)$ (B) $(-2, 0)$ (C) $(2, \infty)$ (D) $(0, 2)$

6.4 مماس اور نارمل

اس سیکشن میں ہم تفرق کا استعمال منحنی کے ایک دئے ہوئے نقطے پر مماس خط اور نارمل خط کی مساوات معلوم کرنے کے لیے کریں گے۔

اسے یاد کیجیے کہ ایک سیدھے خط کی مساوات جس کا سلوپ m ہے اور جو کہ دیئے ہوئے نقطے (x_0, y_0) سے گزر رہی ہے اور دی ہوئی ہے۔



شکل 6.7

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

یہ نوٹ کر لیجیے کہ مماس کا سلوپ منحنی $y = f(x)$ کے ایک نقطے (x_0, y_0) پر اس سے دیا گیا ہے $\left.\dfrac{dy}{dx}\right]_{(x_0, y_0)} (= f'(x_0))$۔ اس طرح مماس کی مساوات کی $y = f(x)$ کے لیے (x_0, y_0) پر اس طرح دی گئی ہے۔

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

ساتھ ہی کیونکہ نارمل مماس پر عمود ہے، نارمل کا سلوپ منحنی $y = f(x)$ کے نقطہ (x_0, y_0) پر دیا گیا ہے $\dfrac{-1}{f'(x_0)}$ سے، $f'(x_0) \neq 0$ ہے۔ اس لیے نارمل کی مساوات منحنی $y = f(x)$ کے نقطہ (x_0, y_0) پر اس طرح دی گئی ہے۔

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

یعنی

$$(y - y_0) f'(x_0) + (x - x_0) = 0$$

نوٹ اگر ایک مماس خط منحنی $y = f(x)$ پر x-axis کے ساتھ مثبت سمت میں یعنی θ کا زاویہ بناتا ہے، تب $\dfrac{dy}{dx} =$ مماس کا سلوپ $= \tan\theta$

خاص مرحلے (کیس)

(i) اگر مماس خط کا سلوپ صفر ہے، تب $\tan\theta = 0$، اور اس لیے $\theta = 0$ ہے جس کا مطلب ہے مماس خط x-axis (محور) کے متوازی ہے اس کیس میں، مماس کی مساوات نقطہ (x_0, y_0) پر $y = y_0$ سے دی گئی ہے۔

(ii) اگر $\theta \to \dfrac{\pi}{2}$ ہے، تب $\infty \to \theta$ جس کا مطلب ہے مماس خط x- محور پر عمود ہے، یعنی y- محور کے متوازی ہے۔

اس کیس میں مماس کی مساوات (x_0, y_0) پر $(x = x_0)$ سے دی گئی ہے (کیوں)۔

مثال 14 مماس کا سلوپ منحنی $y = x^3 - x$ کے لیے نقطہ $x = 2$ پر معلوم کیجیے۔

حل مماس کا سلوپ $x=2$ پر دیا گیا ہے۔

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = 3x^2 - 1\Big]_{x=2} = 11.$$

مثال 15 وہ نقطہ معلوم کیجیے جس پر منحنی $y = \sqrt{4x-3} - 1$ پر مماس کا سلوپ $\frac{2}{3}$ ہے۔

حل نقطہ (x, y) پر دی ہوئی منحنی کا سلوپ ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4x-3)^{\frac{-1}{2}} 4 = \frac{2}{\sqrt{4x-3}}$$

سلوپ دیا ہوگا $\frac{2}{3}$

اس لیے
$$\frac{2}{\sqrt{4x-3}} = \frac{2}{3}$$

یا
$$4x - 3 = 9$$

یا
$$x = 3$$

اب $y = \sqrt{4x-3} - 1$ ہے، اس لیے $x = 3$، $y = \sqrt{4(3)-3} - 1 = 2$ ہے۔

اس لیے مطلوبہ نقطہ $(3,2)$ ہے۔

مثال 16 ان تمام خطوط کی مساواتیں معلوم کیجیے جن کا سلوپ 2 ہے اور جو منحنی $y + \frac{2}{x-3} = 0$ پر مماس ہیں۔

حل دیے ہوئے نقطہ (x,y) پر دی ہوئی منحنی کا سلوپ اس طرح دیا گیا ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x-3)^2}$$

لیکن سلوپ 2 دیا ہوگا۔ اس لیے

$$\frac{2}{(x-3)^2}=2$$

یا $(x-3)^2=1$

یا $x-3=\pm 1$

یا $x=2, 4$

اب $x = 2$، $y = 2$ دیتا ہے،اس طرح سلوپ 2 کے ساتھ دو مماس میں دیئے ہوئی منحنی کے لیے اور نقاط (2,2) اور (4,–2) سے گزر رہا ہے۔مماس کی مساوات جو (2,2) سے ہوکر گزر رہی ہے یہ ہے

$$y-2=2(x-2)$$

یا $y-2x+2=0$

اورمماس کی مساوات (4,–2) سے ہوکر گزر رہی ہے، دیا ہوا ہے $y-(-2)=L(x-4)$

یا $y-2x+10=0$

مثال 17 منحنی $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ پر نقاط معلوم کیجیے جہاں مماس (i) x– محور کے متوازی ہے (ii) y– محور کے متوازی ہے۔

حل x کو مدنظر رکھتے ہوئے $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ کا تفرق کیجیے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{x}{2}+\frac{2y}{25}\frac{dy}{dx}=0$$

یا
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-25}{4}\frac{x}{y}$$

(i) اب مماس x– محو کے متوازی ہے اگر مماس کا سلوپ صفر ہے جو دیتا ہے $\frac{-25}{4}\frac{x}{y}=0$ یہ ممکن ہے اگر $x = 0$ ہے۔

تب $x = 0$ کے لیے $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ ہے جو دیتا ہے $y^2 = 25$ یعنی $y = \pm 5$

اس طرح، وہ نقاط جن پر مماس x– محور کے متوازی ہیں (0,5) اور (0,–5)

(ii) اگر نارمل کا سلوپ 0 ہے تو مماس خط y– محور کے متوازی ہے جو دیتا ہے $\frac{4y}{25x}=0$ یعنی $y = 0$ اس لیے، $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ ہے، $y = 0$ کے لیے جو دیتا ہے $x = \pm 2$۔اس طرح وہ نقاط جن پر مماس y– محور کے متوازی ہیں

(2,0) اور (–2,0) ہے۔

مثال 18 مماس کی مساوات منحنی $y = \frac{x-7}{(x-2)(x-3)}$ کے لیے معلوم کیجیے، جہاں یہ x– محور کو کاٹتا ہے۔

حل نوٹ کیجیے کہ x– محور پر، $y = 0$ ہے اس لیے منحنی کی مساوات جب کہ $y = 0$ ہے، $x = 7$ دیتا ہے۔ اس لیے منحنی x– محور کو (7,0) پر کاٹتا ہے۔ اب x کو مدنظر رکھتے ہوئے مساوات کا تفرق کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y(2x-5)}{(x-2)(x-3)} \qquad \text{(کیوں؟)}$$

یا
$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(7,0)} = \frac{1-0}{(5)(4)} = \frac{1}{20}$$

اس لیے مماس کا اسلوب (7,0) پر $\frac{1}{20}$ ہے۔ اس طرح مماس کی مساوات نقطہ (7,0) پر ہے۔

$$y - 0 = \frac{1}{20}(x-7) \qquad \text{یا} \qquad 20y - x + 7 = 0$$

مثال 19 مماس اور نارمل کی مساواتیں منحنی $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2$ کے لیے (1,1) پر معلوم کیجیے۔

حل $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2$ کی x کی مناسبت سے تفرق کیجیے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} + \frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$$

یا
$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

اس لیے مماس کا سلوپ (1,1) پر ہے $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(1,1)} = -1$

اس طرح مماس کی مساوات (1,1) پر دی گئی ہے۔

$$y - 1 = -1\,(x-1) \qquad \text{یا} \qquad y + x - 2 = 0$$

ساتھ ہی $1 = \frac{-1}{\text{(1,1) پر مماس کا سلوپ}}$ نارمل کا سلوپ (1,1) پر دی گئی ہے۔

اس لیے نارمل کی مساوات (1,1) پر ہے۔

$$y - 1 = 1\,(x-1) \qquad \text{یا} \qquad y - x = 0$$

مثال 20 مماس کی مساوات دی ہوئی منحنی کے لیے دریافت کیجیے جو کہ دی گئی ہے۔

$$x = a \sin^3 t \qquad y = b \cos^3 t \qquad (1)...$$

اس نقطہ پر جہاں $t = \frac{\pi}{2}$ ہو۔

حل (1) کو t کی مناسبت سے تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{dx}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t \quad \text{اور} \quad \frac{dy}{dt} = -3b\cos^2 t\sin t$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3b\cos^2 t\sin t}{3a\sin^2 t\cos t} = \frac{-b}{a}\frac{\cos t}{\sin t}$$

اس لیے مماس کا $t = \frac{\pi}{2}$ پر سلوپ ہے

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-b\cos\frac{\pi}{2}}{a\sin\frac{\pi}{2}} = 0$$

ساتھ ہی جب کہ $t = \frac{\pi}{2}$، $x = a$ اور $y = 0$ ہے۔ اس لیے مماس کی مساوات دی ہوئی $t = \frac{\pi}{2}$ یعنی، $(a,0)$ پر مماس کی مساوات ہے

$$y - 0 = 0(x - a), \text{ یعنی } y = 0$$

مشق 6.3

1۔ منحنی $y = 3x^4 - 4x$ کے نقطہ $x = 4$ پر مماس کا سلوپ معلوم کیجیے۔

2۔ منحنی $y = \frac{x-1}{x-2},\ x \neq 2$ کے نقطہ $x = 10$ پر مماس کا سلوپ معلوم کیجیے۔

3۔ منحنی $y = x^3 - x + 1$ کے اس نقطہ پر جس کا x-مختص 2 ہے پر مماس کا سلوپ معلوم کیجیے۔

4۔ منحنی $y = x^3 - 3x + 2$ کے اس نقطہ پر جس کا x-مختص 3 ہے۔ پر مماس کا سلوپ معلوم کیجیے۔

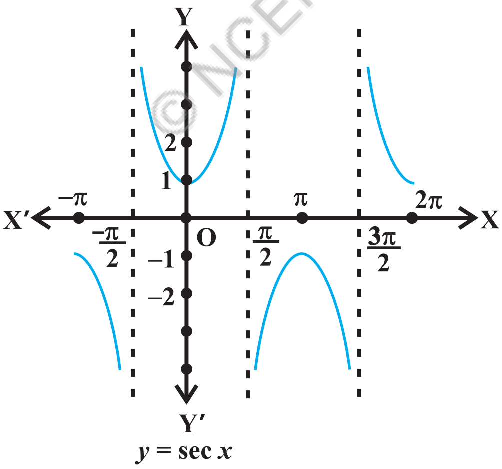
$R-(-1,1)$ ہے۔اس کا مطلب ہے Sec (سیکنٹ فنکشن) تمام حقیقی قدروں کا تصور کرتا ہے، $-1<y<1$ کی بجائے اور $\frac{\pi}{2}$ کے طاق ضریب نہیں کیا گیا ہے۔ اگر ہم سیکنٹ فنکشن کے حلقہ کو $[0, \pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ تک محدود کر دیں، تب یہ یک۔یک۔اور پر ہے جس وسعت سیٹ $R-(-1,1)$ ہے۔ دراصل سیکینٹ فنکشن کسی بھی وقفہ $[0, \pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\},[-\pi, 0]-\left\{\frac{-\pi}{2}\right\}$، $[0, 2\pi]-\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$, وغیرہ تک کے لیے محدد ہے دوقسمی ہے اور اس کی وسعت $R-\{-1,1\}$ ہے۔اس طرح Sec^{-1} کو ایک فنکشن کی طرح معرف کیا جا سکتا ہے جس کا حلقہ $R-(-1,1)$ اور کوئی بھی وقفہ $[0\pi]-\left[\frac{\pi}{2}\right],[-\pi, 0]-\left\{\frac{-\pi}{2}\right\}$، $[\pi, 2\pi]-\left[\frac{3\pi}{2}\right]$, وغیرہ میں ہوسکتا ہے۔ ہر ایک وقفہ کے مطابق ہمیں Sec^{-1} فنکشن کی مختلف شاخیں ملتی ہیں۔ وہ شاخ جس کی وسعت $[0, \pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ہے Sec^{-1} فنکشن کی اصل قیمت کی شاخ کہلاتی ہے۔اس طرح ہمارے پاس ہے۔

$$\sec^{-1} : \mathbf{R}-(-1,1) \rightarrow [0, p]- \{\frac{\pi}{2}\}$$

فنکشن $y = \sec x$ اور $y=\sec^{-1}x$ کے گراف شکل 2.4, (i), (ii) میں دیے گیے ہیں۔

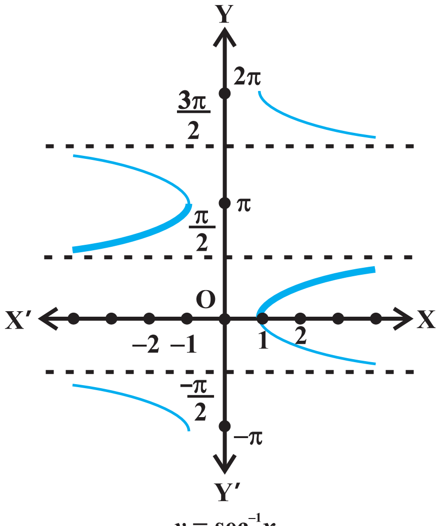
آخر میں ہم $\tan^{-1}$ اور $\cot^{-1}$ پر بحث ومباحثہ کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ tan فنکشن (ٹینجنٹ فنکشن) کا علاقہ $\{x : x \in \mathbf{R}$ اور $x \neq (2n+1), n \in \mathbf{Z}\}$ ہے۔اور



$y = \sec x$

شکل 2.4 (i)



$y = \sec^{-1}x$

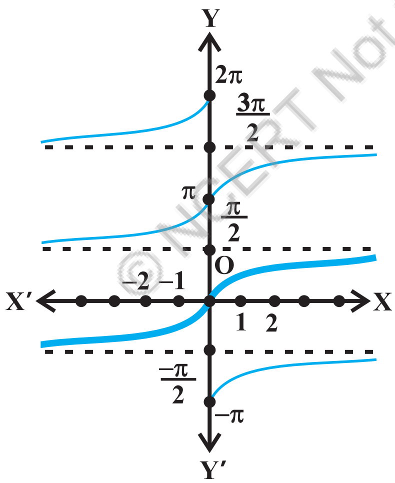
شکل 2.4 (i)

وسعت **R** ہے۔اس کا مطلب ہے کہ $\tan$ فنکشن $\frac{\pi}{2}$ کے طاق ضریب کے لیے معرف نہیں کیا گیا ہے اگر ہم tangent فنکشن کے علاقہ کو $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ تک محدود رکھیں، تب یہ یک یک اور پر ہے اپنی وسعت **R** کے ساتھ دراصل، ٹینجنٹ فنکشن کسی بھی وقفہ $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{-3\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right)$ وغیرہ تک بندش میں دو ربطی ہے اور اس کی وسعت **R** ہے۔ اس طرح $\tan^{-1}$ جس کا حلقہ **R** ہے اور وسعت کوئی بھی وقفہ $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{-3\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right)$ اور اس کے آگے ہے ایک فنکشن کی طرح بیان کیا جا سکتا ہے۔ یہ وقفہ فنکشن $\tan^{-1}$ کی مختلف شاخیں دیتا ہے۔ وہ شاخ جس کی وسعت $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ہے $\tan^{-1}$ فنکشن کی اصل قیمت کی شاخ کہلاتی ہے۔

اس طرح ہمارے پاس ہے

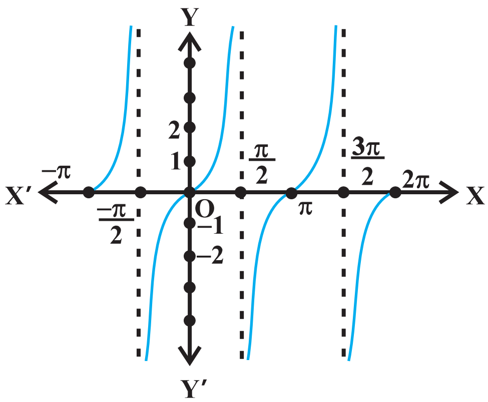
$$\tan^{-1}:\mathbf{R}\rightarrow\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

فنکشن $y=\tan x$ اور $y=\tan^{-1}x$ کے گراف شکل (ii) ,(i) 2.5 میں دئے گئے ہیں



$y=\tan^{-1}x$

شکل (i) 2.5



$y=\tan x$

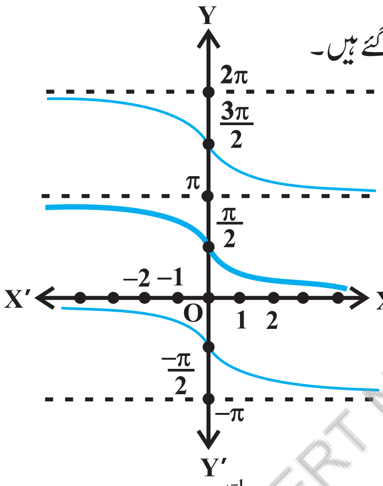
شکل (i) 2.5

ہم جانتے ہیں کہ cot فنکشن (cotangent فنکشن) کا حلقہ سیٹ $\{x : x\in\mathbf{R}$ اور $x\neq n\pi, n\in Z\}$ ہے اور وسعت **R** ہے ۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ cotangent فنکشن π کے ضربی تکملہ کے لیے بیان نہیں کیا گیا ہے۔ اگر ہم

cotangent فنکشن کے علاقہ کو$(0,\pi)$ تک محدود کریں، تب یہ دورقسمی ہے اوراس کی وسعت R ہے ۔ حقیقت میں، اگر cotangent فنکشن کسی بھی حلقہ$(-\pi, 0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,2\pi)$وغیرہ کے لیے محدود ہےتو یہ دوقسمی ہےاوراس کی وسعت R ہے۔ اس طرح $\cot^{-1}$ ایک فنکشن کی طرح بیان کیا جا سکتا ہےجس کا حلقہ R ہےاوراس کی وسعت کوئی بھی وقفہ $(-\pi, 0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,2\pi)$وغیرہ ہے۔ یہ وقفہ فنکشن $\cot^{-1}$ کی مختلف شاخیں دیتے ہیں۔وہ فنکشن جس کی وسعت$(0,\pi)$ ہے $\cot^{-1}$ فنکشن کی بنیادی قدرشاخ کہلاتا ہے۔اس طرح ہمارے پاس ہے

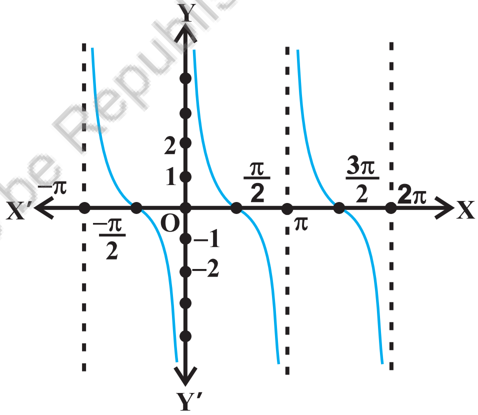
$$\cot^{-1}x : \mathbf{R} \to (0, \pi)$$

$y=\cot x$ اور $y = \cot^{-1}x$ کے گراف شکل2.6 (i), (ii)میں دیے گئے ہیں۔



$y = \cot^{-1}x$

شکل2.6 (i)



$y = \cot x$

شکل2.6 (i)

ذیل جدول معکوس ٹرگنومیٹریائی فنکشن (بنیادی قدرشاخیں) حلقوں اورسمت کے ساتھ دیتی ہے۔

$\sin^{-1}$	:	$[-1, 1]$	$\to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}$	:	$[-1, 1]$	$\to [0, \pi]$
cosec^{-1}	:	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$\to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

$\sec^{-1}$	:	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$\rightarrow [0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$
$\tan^{-1}$	:	$\mathbf{R}$	$\rightarrow \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\cot^{1}$	:	$\mathbf{R}$	$\rightarrow (0, \pi)$

نوٹ

1۔ $\sin^{-1}x$ اور $\sin x^{-1}$ کے ساتھ نہیں جوڑا جاسکتا۔ دراصل $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$ اور اسی طرح دوسرے ٹرگنومیٹریائی فنکشن کے لیے۔

2۔ جب بھی معکوس ٹرگنومیٹریائی فنکشن کی شاخ کوئی ذکر نہ ہو۔ ہمارا مطلب اس فنکشن کی بنیادی قدر کی شاخ سے ہے۔ ہوتا ہے

3۔ ایک معکوس ٹرگنومیٹریائی فنکشن کی قدر جو کہ بنیادی شاخ کی وسعت میں موجود ہے معکوس ٹرگنومیٹر یائی کی بنیادی قدر کہلاتا ہے۔

اب ہم ذیل مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 1 $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ کی اصل قیمت معلوم کیجیے۔

حل مان لیجیے $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = y$ تب $\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ہم جانتے ہیں کہ $\sin^{-1}$ کی اصل قیمت شاخ کی سمت $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ہے اور $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$۔

اس لیے $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ کی اصل قیمت $\frac{\pi}{2}$ ہے۔

مثال 2 $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ اصل قیمت معلوم کیجیے۔

حل مان لیجیے $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ تب۔

$$\cot y = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

ہم جانتے ہیں کہ $\cot^{-1}$ کی سمت کی بنیادی قدر $(0,\pi)$ ہے اور $\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{-1}{\sqrt{3}}$

اس لیے $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ کہ بنیادی قدر $\frac{2\pi}{3}$ ہے۔

مشق 2.1

ذیل کی اصل قیمتیں معلوم کیجیے۔

1. $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$
2. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
3. $\operatorname{cosec}^{-1}(2)$
4. $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$
5. $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$
6. $\tan^{-1}(-1)$
7. $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$
8. $\cot^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$
9. $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$
10. $\operatorname{cosec}^{-1}\left(-\sqrt{2}\right)$

ذیل کی قدریں معلوم کیجیے:

11. $\tan^{-1}(1)+\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$
12. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

13۔ اگر $\sin^{-1}x=y$، تب

(A) $0\le y\le\pi$ (B) $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$

(C) $0< y<\pi$ (D) $-\frac{\pi}{2}< y<\frac{\pi}{2}$

14۔ $\tan^{-1}\sqrt{3}-\sec^{-1}(-2)$ برابر ہے

A. π (B) $-\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{3}$ (E) $\frac{2\pi}{3}$

2.3 معکوس ٹرگنومیٹریائی تفاعلات کی خصوصیات

اس حصہ میں ہم کچھ معکوس ٹرگنومیٹریائی فنکشن کی خصوصیات ثابت کریں گے۔ یہاں یہ بتایا جا سکتا ہے کہ یہ نتائج معکوس

ٹرگنومیٹریائی فنکشن کی اصل قیمت والی شاخوں کے اندر معتبر نہیں اور جب کبھی بھی ان کی تعریف بیان کی جائے۔ممکن ہے کہ کچھ نتائج معلوم ٹرگنومیٹریائی فنکشن کی تمام قدروں کے لیے معتبر نہ ہو۔ہم وقفہ میں x وقفہ کی ان قدروں کے تفصیل میں نہیں جائیں گے کیونکہ یہ بحث ومباحثہ اس کتاب کی حد سے باہر ہے۔اصلیت میں وہ x کی کچھ قدروں کے لیے معتبر ہوں جن کے لیے معکوس ٹرگنومیٹریائی فنکشن کے لیے بیان کیا گیا ہو۔

ذرا ہم یہ دہراتے ہیں کہ اگر $y = \sin^{-1}x$ تب $x = \sin y$ اور،اگر $x = \sin y$ تب $y = \sin^{-1}x$ یہ مندرجہ ذیل کے معادل ہیں

$$\sin(\sin^{-1} x) = x, x \in [-1, 1] \text{ اور } \sin^{-1}(\sin x) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

اس طرح دوسرے پانچ معکوس ٹرگنومیٹریائی فنکشن کے لیے بھی یہی صحیح ہے۔

1. (i) $\sin^{-1}\frac{1}{x} = \operatorname{cosec}^{-1} x, x \geq 1$ or $x \leq -1$

(ii) $\cos^{-1}\frac{1}{x} = \sec^{-1} x, x \geq 1$ or $x \leq -1$

(iii) $\tan^{-1}\frac{1}{x} = \cot^{-1} x, x > 0$

اس پہلے نتیجے کو ثابت کرنے کے لیے،ہم $\operatorname{cosec}^{-1}x = y$ رکھتے ہیں یعنی $x = \operatorname{cosec} y$

اس لیے $\frac{1}{x} = \sin y$

اس طرح $\sin^{-1}\frac{1}{x} = y$

یا $\sin^{-1}\frac{1}{x} = \operatorname{cosec}^{-1} x$

اسی طرح،ہم دوسرے حصے بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

2. (i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x, x \in [-1, 1]$

(ii) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x, x \in \mathbf{R}$

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1} x, |x| \geq 1$

مان لیجیے $\sin^{-1}(-x) = y$ یعنی $-x = \sin y$ تا کہ $x = -\sin y$،یعنی $x = \sin(-y)$

اس لیے $\sin^{-1} x = -y = -\sin^{-1}(-x)$

اس طرح $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$

اس طرح، ہم دوسرے حصے بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

3. (i) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x, x \in [-1, 1]$

(ii) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} |x| \geq 1$

(iii) $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x, x \in \mathbf{R}$

مان لیجیے $\cos^{-1}(-x) = y$ یعنی $-x = \cos y$ تاکہ $x = -\cos y = \cos(\pi - y)$ ہو

اس لیے $\cos^{-1} x = \pi - y$

اس طرح $\cos^{1}(-x) = \pi - \cos^{1} x$

اسی طرح، ہم دوسرے حصے بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

4. (i) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1]$

(ii) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}, x \in \mathbf{R}$

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}, |x| \geq 1$

مان لیجیے $\sin^{-1} x = y$، تب $x = \sin y = \cos\left[\frac{\pi}{2} y\right]$

اس لیے $\cos^{1} x = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$

اس طرح $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

اسی طرح سے ہم دوسرے حصے ثابت کر سکتے ہیں۔

5. (i) $\tan^{-1}x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1+xy}, xy < 1$

(ii) $\tan^{-1}x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x-y}{1+xy}, xy < -1$

(iii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{x \quad y}{1-xy}\right) xy > 1, xy > 0$

مان لیجیے $\tan^{-1}x = \theta$ اور $\tan^{-1}y = \phi$ – تب $x = \tan\theta$ ، $y = \tan\phi$

اب $$\tan(\theta+\phi) = \frac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi} = \frac{x+y}{1-xy}$$

یہ دیتا ہے $$\theta + = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$$

اس لئے $$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1} = \frac{x+y}{1-xy}$$

اوپر کے نتیجے میں اگر ہم y کو $-y$ سے تبدیل کر دیں، تو ہمیں دوسرا نتیجہ ملتا ہے اور اگر y کو x سے تبدیل کر دیا جائے تو ہمیں تیسرا نتیجہ ملتا ہے۔

6. (i) $\mathbf{2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}, |x| \le 1}$

(ii) $\mathbf{2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}, x \ge 0}$

(iii) $\mathbf{2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}, -1 < x > 1}$

مان لیجیے $\tan^{-1}x = y$ ، تب $x = \tan y$ ہے اب

$$\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \sin^{-1}\frac{2\tan y}{1+\tan^2 y}$$

$$= \sin^{-1}(\sin 2y) = 2y = 2\tan^{-1}x$$

ساتھ ہی $$\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-\tan^2 y}{1+\tan^2 y} = \cos^{-1}(\cos 2y) = 2y = 2y^{-1}x$$

(iii) اسی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے

اب ہم کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 3 دکھائیے کہ

(i) $\sin^{-1} = \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sin^{-1} - x, \frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\sin^{-1} = \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1}x, \frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le$

حل

(i) مان لیجئے $x=\sin\theta$ – تب $\sin^{-1}x=\theta$ ہوگا۔ ہمارے پاس ہے

$$\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)=\sin^{-1}\left(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)$$

$$=\sin^{-1}\ (2\sin\theta\cos\theta)=\sin^{-1}\ (\sin^2\theta)=2\theta$$

$$=2\sin^{-1}x$$

(ii) $x=\cos\theta$ لیجئے، تب اوپر کی طرح آگے بڑھانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے،

مثال 4 دکھایئے کہ $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{2}{11}=\tan^{-1}\frac{3}{4}$

حل خاصیت 5(i) ہے، ہمارے پاس ہے۔

$$\text{R.H.S.}\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{2}{11}==\tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{11}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{11}}=\tan^{-1}\frac{15}{20}\tan^{-1}\frac{3}{4}\text{R.H.S.}$$

مثال 5 $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right), -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ کو آسان ترین شکل میں دکھایئے۔

حل ہم لکھتے ہیں

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)=\tan^{-1}\left[\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right]$$

$$=\tan^{-1}\left[\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}\right]$$

$$=\tan^{-1}\left[\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right]=\tan^{-1}\left[\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$$

دوسرے طریقے سے

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\sin\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\cot\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)\right] = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi-2x}{4}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$$

مثال 6 $|x|>1$, $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$ کو آسان ترین شکل میں لکھیے

حل مان لیجیے $x=\sec\theta$ تب $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\sec^2\theta-1}=\tan\theta$

اس لئے $\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\cot^{-1}(\cot\theta)=\theta=\sec^{-1}x$ ہے جو کہ آسان ترین شکل ہے۔

مثال 7 ثابت کیجیے $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=\tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right), =|x|<\frac{1}{\sqrt{3}}$

حل مان لیجیے کہ $x=\tan\theta$ ہے۔ تب $\theta=\tan^{-1}x$ ہمارے پاس ہے

$$\text{R.H.S.} = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\tan 3\theta) = 3\theta = 3\tan^{-1}x = \tan^{-1}x+2\tan^{-1}x$$

$$= \tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\ \text{L.H.S.}$$ (کیوں؟)

مثال 8 $\cos\left(\sec^{-1}x+\operatorname{cosec}^{-1}x\right),\ |x|\geq 1$ کی قدر معلوم کیجیے

حل ہمارے پاس $\cos\left(\sec^{-1}x+\operatorname{cosec}^{-1}x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

مشق 2.2.

ذیل کو ثابت کیجیے

1. $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3),\ x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

2. $3\cos^{-1}x=\cos^{-1}(4x^3-3x),\ x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$

3. $\tan^{1}\frac{2}{11}+\tan^{1}\frac{7}{24}=\tan^{1}\frac{1}{2}$

4. $2\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{31}{17}$

ذیل فنکشن کو آسان ترین شکل میں لکھیے

5. $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} x\neq 0$

6. $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}|x>1$

7. $\tan^{1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right), x>\pi$

8. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right),\ \frac{-\pi}{4}<x\angle\frac{3\pi}{4}$

9. $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ |x|<a$

10. $\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x-x^3}{a^3-3ax^2}\right), a>0; \frac{-a}{\sqrt{3}}\leq x\leq\frac{a}{\sqrt{3}}$

ذیل میں ہر ایک کی قدریں معلوم کیجیے۔

11. $\tan^{1}\left[2\cos\left(2\sin^{1}\frac{1}{2}\right)\right]$

12. $\cot\left(\tan^{-1}a+\cot^{-1}a\right)$

13۔ $\tan\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right],\ |x|<1, y>0$ اور $xy<1$

14۔ اگر $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5}+\cos^{-1}x\right)=1$ ہو، تب 'x' کی قدر معلوم کیجیے۔

15۔ اگر $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{\pi}{4}$، تب x کی قدر معلوم کیجیے۔

مشق 16 تا 18 ہر ایک عبارت میں قدریں معلوم کیجیے۔

16. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ **17.** $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

18. $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$

19۔ $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ کے برابر ہے

(A) $\frac{7\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

20۔ $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}(-\frac{1}{2})\right)$ کے برابر ہے

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 1

21۔ $\tan^{-1}\sqrt{3}-\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ کے برابر ہے

(A) π (B) $-\frac{\pi}{2}$ (C) 0 (D) $2\sqrt{3}$

متفرق مثالیں

مثال 9 $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5})$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل ہم جانتے ہیں کہ $\sin^{-1}(\sin x)=x$ ۔ اس لئے $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5})=\frac{3\pi}{5}$

لیکن $\frac{3\pi}{5}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$، جوکہ $\sin^{-1}x$ کی سربراہی شاخ ہے۔

حالانکہ $\sin(\frac{3\pi}{5})=\sin(\pi-\frac{3\pi}{5})=\sin\frac{2\pi}{5}$ اور $\frac{2\pi}{5}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

اس لئے $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5})=\sin^{-1}(\sin\frac{2\pi}{5})=\frac{2\pi}{5}$

مثال 10 دکھایئے کہ $\sin^{-1}\frac{3}{5}-\sin^{-1}\frac{8}{17}=\cos^{-1}\frac{84}{85}$

حل مان لیجیے کہ $\sin^{-1}\frac{3}{5}=x$ اور $\sin^{-1}\frac{8}{17}=y$ ہے۔

اس لئے $\sin x=\frac{3}{5}$ اور $\sin y=\frac{8}{17}$

ہمارے پاس ہے $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{15}{17}+\frac{3}{5}\times\frac{8}{17}=\frac{84}{85}$$

اس لئے $x-y=\cos^{-1}\left(\frac{84}{85}\right)$

اس طرح $\sin^{-1}\frac{3}{5}-\sin^{-1}\frac{8}{17}=\cos^{-1}\frac{84}{85}$

مثال 11 دکھایئے کہ $\sin^{-1}\frac{12}{13}+\cos^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{63}{16}=\pi$

حل مان لیجیے کہ $\sin^{-1}\frac{12}{13}=x,\quad \cos^{-1}\frac{4}{5}=y, \tan^{-1}\frac{63}{16}=z$

تب $\sin x=\frac{12}{13},\quad \cos y=\frac{4}{5},\quad \tan z=\frac{63}{16}$

اس لئے $\cos x=\frac{5}{13},\ \sin y=\frac{3}{5},\ \tan x=\frac{12}{5}$ and $\tan y=\frac{3}{4}$ ہے۔

ہمارے پاس ہے $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\frac{\frac{12}{5}+\frac{3}{4}}{1-\frac{12}{5}\times\frac{3}{4}}=-\frac{63}{16}$

اس لئے $\tan(x+y)=-\tan z$

یعنی $\tan(x+y)=\tan(\pi-z)$ یا $\tan(x+y)=\tan(-z)$

اس لئے $x+y=-z$ یا $x+y=\pi-z$

کیونکہ x, y اور z مثبت ہیں، (کیونکہ؟) $x+y\neq -z$

اس لئے $x+y+z=\pi$ یا $\sin^{-1}\frac{12}{13}+\cos^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{63}{16}=\pi$

مثال 12 $\tan^{-1}\left[\dfrac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right]$، اگر $\dfrac{a}{b}\tan x > -1$ کو آسان کیجیے۔

حل ہمارے پاس ہے

$$\tan^{-1}\left[\frac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\dfrac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x}}{\dfrac{b\cos x + a\sin x}{b\cos x}}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\dfrac{a}{b} - \tan x}{1 + \dfrac{a}{b}\tan x}\right]$$

$$= \tan^{-1}\frac{a}{b} - \tan^{-1}(\tan x) = \tan^{-1}\frac{a}{b} - x$$

مثال 13 $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \dfrac{\pi}{4}$ کو حل کیجیے

حل ہمارے پاس ہے $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \dfrac{\pi}{4}$

یا $\tan^{-1}\left(\dfrac{2x + 3x}{1 - 2x \times 3x}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

یعنی $\tan^{-1}\left(\dfrac{5x}{1 - 6x^2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

اس لئے $\dfrac{5x}{1 - 6x^2} = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$

یعنی $6x^2 + 5x - 1 = 0$ ، $(6x - 1)(x + 1) = 0$

جو دیتا ہے $x = -1$ یا $x = \dfrac{1}{6}$

کیونکہ $x = -1$ مساوات کو مطمئن نہیں کرتا، جیسا کہ مساوات کی L.H.S. منفی ہو جاتی ہے۔ $x = \dfrac{1}{6}$ دی ہوئی مساوات کو اکلوتا حل ہے۔

باب 2 پر مبنی متفرق مثالیں

ذیل کی قدر معلوم کیجیے۔

1. $\cos^{-1}\left(\cos\dfrac{13\pi}{6}\right)$ **2.** $\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{7\pi}{6}\right)$

ثابت کیجیے کہ

3. $2\sin^{-1}\dfrac{3}{5} = \tan^{-1}\dfrac{24}{7}$

4. $\sin^{-1}\dfrac{8}{17} + \sin^{-1}\dfrac{3}{5} = \tan^{-1}\dfrac{77}{36}$

5. $\cos^{-1}\dfrac{4}{5} + \cos^{-1}\dfrac{12}{13} = \cos^{-1}\dfrac{33}{65}$

6. $\cos^{-1}\dfrac{12}{13} + \sin^{-1}\dfrac{3}{5} = \sin^{-1}\dfrac{56}{65}$

7. $\tan^{-1}\dfrac{63}{16} = \sin^{-1}\dfrac{5}{13} + \cos^{-1}\dfrac{3}{5}$

8. $\tan^{-1}\dfrac{1}{5} + \tan^{-1}\dfrac{1}{7} + \tan^{-1}\dfrac{1}{3} + \tan^{-1}\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$

ثابت کیجیے کہ

9. $\tan^{-1}\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\cos^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right), x \in [0, 1]$

10. $\cot^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right) = \dfrac{x}{2}, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$

11. $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\cos^{-1}x, -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$ [اشارہ کیجیے $x = \cos 2\theta$ رکھیے]

12. $\dfrac{9\pi}{8} - \dfrac{9}{4}\sin^{-1}\dfrac{1}{3} = \dfrac{9}{4}\sin^{-1}\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

ذیل مساواتوں کو حل کیجیے:

13. $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\,\mathrm{cosec}\, x)$

14. $\tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{1}{2}\tan^{-1}x, (x > 0)$

15۔ $\sin(\tan^{-1} x), |x| < 1$ برابر ہے

(A) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (B) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (C) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (D) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

16۔ ہے، تب x برابر ہے

(A) $0, \dfrac{1}{2}$ (B) $1, \dfrac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\dfrac{1}{2}$

17۔ $\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right) - \tan^{-1}\dfrac{x-y}{x+y}$ برابر ہے

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

خلاصہ (Summary)

◆ معکوس ٹرگنومیٹریائی فنکشن کی علاقے اور وسعتیں (اصل قیمت شاخیں) ذیل جدول میں دی گئی ہیں۔

فنکشن	حلقہ	وسعت سربراہی قدر کی شاخیں
$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1,1]$	$y = \sin^{-1} x$
$[0,\theta]$	$[-1,1]$	$y = \cos^{-1} x$
$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$	$\mathbf{R}-(-1,1)$	$y - \operatorname{cosec}^{-1} x$
$[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$	$\mathbf{R}-(-1,1)$	$y = \sec^{-1} x$
$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbf{R}$	$[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$
$[0,\pi]$	$\mathbf{R}$	$y = \cot^{-1} x$

◆ $\sin^{-1}x$ کو $(\sin x)^{-1}$ کے ساتھ نہ الجھائیں ۔ حقیقت میں $\frac{1}{\sin x}$ $(\sin)^{-1}$ اور اسی طرح دوسرے ٹرگنومیٹریائی فنکشن کے لئے۔

◆ ایک معکوس ٹرگنومیٹریائی فنکشن کی قدر جو کہ اپنی اصل قیمت شاخ میں واقع ہے۔اس معکوس میں ٹرگنومیٹریائی فنکشن کی اصل قیمت کہلاتی ہے۔

علاقہ کی مناسب قدروں کے لیے ہمارے پاس ہے۔

◆ $y - \sin^{-1} x \Rightarrow x - \sin y$

◆ $x - \sin y \Rightarrow y - \sin^{-1} x$

◆ $x = \sin\left(\sin^{-1} x\right) = x$

◆ $\sin^{-1}\left(\sin x\right) = x$

◆ $\sin^{-1} \frac{1}{x} = \operatorname{cosec}^{-1} x$

◆ $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

- $\cos^{-1}\dfrac{1}{x} = \sec^{-1} x$
- $\cot^{-1}(-x) - \pi - \cot^{-1} x$
- $\tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \cot^{-1} x$
- $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$
- $\sin^{-1}(-x) - -\sin^{-1} x$
- $\tan^{-1}(-x) - -\tan^{-1} x$
- $\tan^{-1}x + \cot^{-1} = \dfrac{\pi}{2}$
- $\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1} x$
- $\sin^{-1}x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$
- $\operatorname{cosec}^{-1}x + \sec^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$
- $\tan^{-1}x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$
- $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$
- $\tan^{-1}x - \tan^{-1} == \tan^{-1}\dfrac{x-y}{1+xy}$
- $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

تاریخ کے اوراق

ٹرگنومیٹری کا مطالعہ پہلے ہندوستان میں شروع ہوا تھا۔ پرانے زمانے کے ہندوستانی ریاضی داں آریہ بھٹ (476A.D.)، برہم گپتا (598 A.D.)، بھاسکر I (600 A.D.) اور بھاسکر II (1114A.D.) ٹرگنومیٹری کے اہم نتائج حاصل ہوئے۔ یہ تمام معلومات ہندوستان سے عرب تک گئی اور پھر اس کے بعد وہاں سے یورپ تک۔ گریک کے لوگوں نے بھی ٹرگنومیٹری کا مطالعہ شروع کر دیا تھا، لیکن ان کے کام کرنے کا طریقہ بہت آہستہ تھا کہ جب ہندوستانی کام کو جانا گیا، یہ فوراً پوری دنیا میں اپنا لیا گیا۔

ہندوستان میں، جدید ٹرگنومیٹریائی فنکشن سے پہلے، اسے ایک زاویہ کا سائن (sine) کہا جاتا تھا، اور سائن فنکشن کا تعارف ریاضی میں سیدھانتاس (سنسکرت کا علمِ فلکی کا کام) اصل دین تھا۔

بھاسکر I (600A.D. کے لگ بھگ) نے 90° سے زیادہ سائن فنکشن کی قدر معلوم کرنے کے لئے، فارمولہ دیا

تھا۔ سولھویں صدی کے ملیالم کے کام یوکتی بھاسا (Yuktibhasa) میں $\sin(A+B)$ کے پھیلاؤ کا ثبوت ہے۔ $18°, 36°, 54°, 72°$ وغیرہ کے سائن یا کوسائن کا بالکل ایک خیال بھاسکر II نے دیا تھا۔

$\sin^{-1} x$ ، $\cos^{-1} x$ وغیرہ کی علامتیں، قوس $\sin x$ قوس $\cos x$ وغیرہ اجرام فلکی کے ماہر سر جون ایف۔ ڈبلیو۔ ہرسیجل (1813)(Sir John F.W. Hersehel) نے بتائی تھیں۔ تھیلس (Thales) کا نام اونچائی اور فاصلوں کے مسئلہ کے ساتھ بغیر مشتق پنچ کے ساتھ جڑا ہے۔ اس کو عزت سے مصر میں موجود عظیم ہرم (Pyramid) کی اونچائی معلوم کرنے کے ساتھ جڑا ہوا ہے۔ یہ اونچائی ہرم کی پرچھائی کو ناپنے سے معلوم ہوتی ہے اور ایک معاون اسٹاف (یا گنومون) مانی ہوئی اور اونچائی کے ساتھ، اور نسبت کا مقابلہ کرنے پر۔

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan \text{(سورج کا ارتقا)}$$

یہ بھی کہا جاتا ہے کہ تھیلس نے ایک کشتی کا فاصلہ سمندر پر یکساں مثلثوں کے ضلع کی نسبت سے معلوم کیا تھا۔ پرانے ہندوستانی کام میں اونچائی اور فاصلے پر مبنی مسئلہ یکسانی خصوصیت کا استعمال کر کے کیا جاتا تھا۔