باب 5

تسلسل اور تفرق پذیری
(CONTINUITY AND DIFFERENTIABILITY)

❖ 'مکمل سائنس روز مرہ سوچ کو بہتر بنانے سے زیادہ
اور کچھ نہیں'۔۔ البرٹ۔ آئینس ٹائین ❖

5.1 تعارف

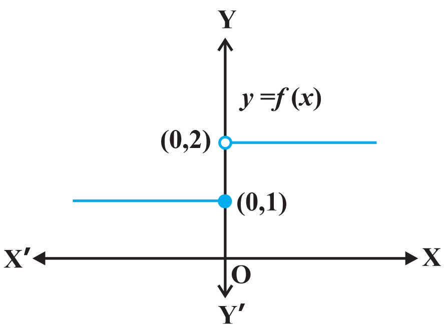
سر اساک نیوٹن
(1642-1727)

یہ باب گیارہویں جماعت میں مطالعہ کیے گئے فنکشن کے تفرق کے سلسلہ کی اگلی کڑی ہے ہم پہلے بہت سے فنکشن کا تفرق کرنا پڑھ چکے ہیں مثال کے طور پر کثیر رکنی فنکشن اور ٹرگنو میٹریائی فنکشن۔ اس باب میں ہم ایک بہت اہم تسلسل کی سوچ سے روشناس کرا رہے ہیں، تفرقی اور ان کے بیچ رشتہ، ہم معکوس ٹرگنو میٹریائی فلنکشن کے تفرق کے بارے میں بھی پڑھیں گے۔ اس کے آگے ہم، ایک نئے تفاعل کی جماعت سے بھی تعارف کرائیں گے جسے ہم قوت نمائی (Exponetilal) اور لوگارتمی فنکشن کہتے ہیں۔ یہ تفرقی احصا کے ذریعہ سمجھاتے ہیں۔ اس سلسلہ میں میں ہم تفرق سے متعلق کچھ بنیادی مسئلہ بھی پڑھیں گے۔

5.2 تسلسل (Continuity)

ہم اس حصہ کو دو غیر اصولی مثالوں سے شروع کرتے ہیں تسلسل کو محسوس کرنے کے لیے اس فنکشن پر غور کیجیے۔

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ if } x \le 0 \\ 2, \text{ if } x > 0 \end{cases}$$



شکل 5.1

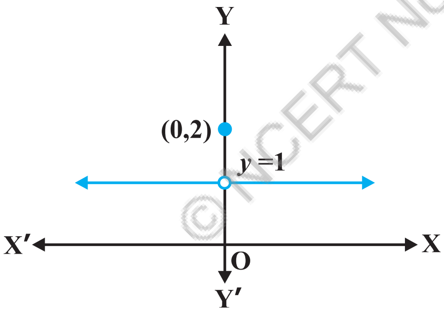
حالانکہ یہ تفاعل حقیقی خط کے ہر نقطہ پر معرف ہے۔ اس فنکشن کا گراف شکل 5.1 میں دیا گیا ہے۔ اس گراف سے یہ نکالا جا سکتا ہے کہ x–axis پر تفاعل کی قدر قریبی نقطوں پر ایک

دوسرے کے قریب رہتی ہے، 0 = x کی بجائے۔ 0 یا 0 کے بائیں طرف نقطوں پر یعنی مثال کے طور پر 0.01–، 0.01–، 0.001 فنکشن کی قدر 1 ہے۔ 0 یا 0 کے دائیں طرف نقطوں پر یعنی مثال کے طور پر 0.1، 0.01، 0.001، فنکشن کی قدر 2 ہے۔ دائیں اور بائیں ہاتھ کی انتہا کی زبان کا استعمال کرتے ہوئے، ہم یہ کہتے ہیں کہ بائیں (اس طرح دائیں) ہاتھ کہ f کی انتہا 0 پر ہے (اسی طرح 2) خاص طور پر بائیں اور دائیں ہاتھ کی انتہا نہیں ملتیں (یا برابر نہیں ہوتیں)۔ ہم اس بات کا بھی مشاہدہ کرتے ہیں کہ تفاعل کی 0 = x پر قدر بائیں ہاتھ کی انتہا ساتھ ملتی ہے۔ اس بات کو ذہن نشین کر لیجیے کہ جب ہم گراف بنانے کی کوشش کرتے ہیں، تو ہم ایک ہی باری میں نہیں بنا سکتے یعنی کاغذ کی مستوی سے بغیر پین اٹھائے، ہم اس تفاعل کا گراف نہیں بنا سکتے۔ درحقیقت، جب ہم بائیں سے 0 کی طرف آتے ہیں، ہمیں پین اٹھانے کی ضرورت ہوتی ہے۔ یہ تفاعل کی مثال ہے کہ $x =$ 0 پر مسلسل نہیں ہے۔

اب، اس طرح فنکشن کی تعریف کا مشاہدہ کیجیے۔

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ if } x \neq 0 \\ 2, \text{ if } x = 0 \end{cases}$$

یہ تفاعل ہر نقطے پر معرف ہے۔ بائیں اور دائیں ہاتھ کی انتہا دونوں 0 = x پر 1 کے برابر ہیں۔ لیکن فنکشن کی قدر 0 = x پر 2 کے برابر ہے جو بائیں اور دائیں ہاتھ کی انتہا کی مشترک قدر سے نہیں میل کھاتی ہے۔ دوبارہ ہم اس بات پر غور کریں کہ ہم فنکشن کا گراف بغیر قلم کو اٹھائے نہیں بنا سکتے۔ یہ فنکشن کا دوسرا مرحلہ ہے جو x 0 = پر مسلسل نہیں ہے۔



شکل 5.2

سادہ طور پر، ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ فنکشن ایک مقرر نقطہ پر مسلسل ہے، اگر ہم فنکشن کا گراف اس نقطے کے اردگرد بغیر قلم اٹھائے کاغذ کی مستوی میں کھینچ سکتے ہیں۔

ریاضیاتی انداز میں، اسے خلاصہ کے طور پر ذیل طریقے سے دکھا سکتے ہیں۔

تعریف 1 مان لیجیے حقیقی اعداد کے ذیلی سیٹ پر f ایک تفاعل ہے اور c حلقہ f پر ایک نقطہ ہے۔ تب f، c پر مسلسل ہے اگر

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

زیادہ غور سے (باریکی سے)، اگر بائیں ہاتھ کی انتہا، دائیں ہاتھ کی انتہا اور فنکشن کی قدر $x = c$ پر ممکن ہے اور ایک دوسرے کے برابر ہیں، تب f، $x = c$ پر مسلسل ہے۔ دوبارہ غور کیجیے کہ اگر $x = c$ پر دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ کی انتہائیں ایک دوسرے سے ملتی ہیں، تب ہم یہ کہتے ہیں کہ مشترک قدر تفاعل کی $x = c$ پر مسلسل ہے اگر تفاعل $x = c$ پر معرف ہے اور اگر تفاعل کی قدر $x = c$ پر تفاعل کی انتہا $x = c$ پر برابر ہے۔ اگر f، c پر مسلسل نہیں ہے، ہم کہتے ہیں کہ f، c پر غیر مسلسل ہے اور c، f کا غیر تسلسلی نقطہ کہلاتا ہے۔

مثال 1 $x = 1$ پر تفاعل f کے تسلسل کی جانچ $x = 1$ پر کیجیے جو کہ $f(x) = 2x + 3$ سے دیا گیا ہے۔

حل پہلے اسے نوٹ کیجیے کہ فنکشن دیے ہوئے نقطہ $x = 1$ پر معرف ہے اور اس کی قدر 5 ہے، تب فنکشن کی انتہا $x=1$ پر دریافت کریں۔ صاف طور پر

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x + 3) = 2(1) + 3 = 5$$

اس طرح
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 5 = f(1)$$

اس لیے f، $x = 1$ پر مسلسل ہے۔

مثال 2 جانچ کیجیے کہ کیا فنکشن f جو کہ $f(x) = x^2$ دیا گیا ہے، $x = 0$ پر مسلسل ہے۔

حل پہلے یہ نوٹ کیجیے کہ فنکشن دیے ہوئے نقطے $x = 0$ پر معرف ہے اور اس کی قدر 0 ہے۔
تب فنکشن کی انتہا $x = 0$ پر دریافت کیجیے۔ صاف طور پر

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0^2 = 0$$

اس طرح
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

اس لیے f، $x = 0$ پر مسلسل ہے۔

مثال 3 فنکشن f جو کہ $f(x) = |x|$ سے دیا گیا ہے اس کی $x = 0$ پر تسلسل پر بحث و مباحثہ کیجیے۔

حل تعریف سے

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{if } x < 0 \\ x, & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

صاف طور پر فنکشن 0 پر بیان کیا گیا ہے اور $f(0)=0$ ، f کی 0 پر بائیں ہاتھ کی انتہا ہے۔

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$$

اسی طرح f کی 0 پر دائیں ہاتھ کی انتہا ہے۔

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

اس طرح، بائیں ہاتھ کی انتہا، دائیں ہاتھ کی انتہا اور فنکشن کی $x = 0$ پر قدر برابر ہیں۔ اس لئے، f، $x = 0$ پر مسلسل ہے۔

مثال 4 دکھائیے کہ فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3, & \text{if } x \neq 0 \\ 1, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

0 پر مسلسل نہیں ہے۔

حل فنکشن $x = 0$ پر بیان کیا گیا ہے اور اس کی قدر $x = 0$ پر 1 ہے۔ جب $x \neq 0$، تب فنکشن ایک کثیر رکنی ہے۔ اس لیے

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (x^3 + 3) = 0^3 + 3 = 3$$

کیونکہ f کی $x = 0$ پر انتہا $f(0)$ سے کے برابر نہیں ہے، فنکشن $x = 0$ پر مسلسل نہیں ہے۔ اس بات پر غور کرنا چاہیے کہ اس فنکشن کی غیر تسلسل کا اکلوتا نقطہ $x = 0$ ہے۔

مثال 5 ان نقاط کی جانچ کیجیے جہاں مستقل فنکشن $f(x) = k$ مسلسل ہے۔

حل فنکشن تمام حقیقی اعداد پر بیان کیا گیا ہے اور تعریف کے مطابق، اس کی قدر کسی بھی حقیقی عدد پر k کے برابر ہے۔ مان لیجیے c کوئی بھی حقیقی عدد ہے۔ تب

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} k = k$$

کیونکہ کسی بھی حقیقی عدد c کے لیے $f(c) = k = \lim_{x\to c}$ ہے، اس لیے فنکشن $f(x)$ ہر ایک حقیقی عدد پر مسلسل ہے۔

مثال 6 ثابت کیجیے کہ حقیقی اعداد پر تماثلہ تفاعل جو کہ $f(x) = x$ سے دیا گیا ہے ہر حقیقی عدد پر مسلسل ہے۔

حل صاف طور پر تفاعل ہر ایک نقطے پر بیان کیا گیا ہے اور $f(c) = c$ ہے ہر ایک حقیقی عدد c کے لیے۔ ساتھ ہی

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$$

اس طرح $\lim_{x \to c} f(x) = c = f(c)$ اور اس لیے تفاعل ہر حقیقی عدد پر مسلسل ہے۔

ایک تفاعل کا تسلسل ایک دیے ہوئے نقطے پر بیان کرنے کے بعد، اب ہم ایک تفاعل کے تسلسل پر بحث و مباحثہ کرنے کے لیے اس تعریف (بیان) کا طبعی توسیع کرتے ہیں۔

تعریف 2 ایک حقیقی فنکشن f کو اس وقت مسلسل کہا جائے گا اگر یہ f کے علاقہ میں ہر ایک نقطہ پر مسلسل ہو۔

یہ تعریف کو مزید تشریح کی ضرورت ہے۔ مان لیجیے f ایک تفاعل ہے جو کہ بند وقفہ $[a,b]$ کے ہر ایک نقطہ پر مسلسل ہو جس میں انتہائی نقاط a اور b شامل ہوں۔ f کی a پر تسلسل کا مطلب ہے۔

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

اور f کی b پر تسلسل کا مطلب ہے۔

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

اس کا مشاہدہ کیجیے کہ $\lim_{x \to a^-} f(x)$ اور $\lim_{x \to b^+} f(x)$ کا کوئی مطلب نہیں نکلتا ہے۔ اس تعریف سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ، اگر f صرف ایک نقطہ پر معرف ہے، یہ وہ مسلسل ہے، یعنی، اگر f کا علاقہ ایک واحد عنصری ہے، تب f ایک مسلسل فنکشن ہے۔

مثال 7 کیا فنکشن جو کہ $f(x) = |x|$ سے معرف ہے، ایک مسلسل فنکشن ہے؟

حل ہم f کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{اگر } x < 0 \\ x, & \text{اگر } x \geq 0 \end{cases}$$

ہم مثال 3 سے یہ جانتے ہیں کہ f، $n = 0$ پر مسلسل ہے۔

مان لیجیے c ایک حقیقی عدد ہے تاکہ $c < 0$ تب $f(c) = -c$۔ ساتھ ہی

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (-x) = -c \qquad \text{(کیوں؟)}$$

کیونکہ $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$، f تمام منفی حقیقی اعداد پر مسلسل ہے۔

اب مان لیجیے c ایک حقیقی عدد ہے تا کہ $c > 0$۔ تب $f(c) = c$ ساتھ ہی

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c \qquad \text{(کیوں؟)}$$

کیونکہ $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$، f تمام مثبت حقیقی اعداد پر مسلسل ہے۔ اس لیے f تمام اعداد پر مسلسل ہے۔

مثال 8 فنکشن f کے تسلسل پر بحث و مباحثہ کیجیے جو کہ $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ ہے۔

حل صاف طور پر f ہر ایک حقیقی عدد c پر بیان کیا گیا ہے اور اس کی قدر c پر $c^3 + c^2 - 1$ ہے۔ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (x^3 + x^2 - 1) = c^3 + c^2 - 1$$

اس لیے $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ اور اس طرح f ہر ایک حقیقی عدد پر مسلسل ہے۔ اس کا مطلب f ایک مسلسل فنکشن ہے۔

مثال 9 فنکشن f جو کہ $f(x) \frac{1}{x}$، $x \neq 0$ سے معرف ہے، کے تسلسل پر بحث و مباحثہ کیجیے۔

حل کسی بھی غیر صفر حقیقی عدد c کے لیے، ہمارے پاس ہے۔

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$$

ساتھ ہی، کیونکہ $c \neq 0$ کے لیے $f(c) = \frac{1}{c}$ ہے، ہمارے پاس ہے $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ اور اس لیے، f علاقہ f کے ہر ایک نقطہ پر مسلسل ہے۔ اس لیے f ایک مسلسل فنکشن ہے۔

ہم اس موقع کو لامتناہی کے تصوّر سوچ کو بیان کرنے میں استعمال کریں گے۔ ایسا ہم، تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ کو $x = 0$ کے قریب تجزیہ کرنے کے بعد کریں گے۔ اس تجزیہ کو کرنے کے لیے ہم جانا پہچانا طریقہ استعمال کریں گے جس میں تفاعل کی قدر کو 0 کے قریب حقیقی اعداد پر معلوم کیا جاتا ہے۔ ضروری طور پر ہم f کی دائیں ہاتھ کی انتہا 0 پر معلوم کرنے کی کوشش کر رہے ہیں۔ ہم اسے ذیل میں جدول کے طور پر لکھیں گے۔ (جدول 5.1)

جدول 5.1

x	1	0.3	0.2	$0.1 = 10^{2}$	$0.1 = 10^{-2}$	$0.001 = 10^{-3}$	10^{-n}
$f(x)$	1	3.333...	5	10	$100 = 10^{2}$	$1000 = 10^{3}$	10^{n}

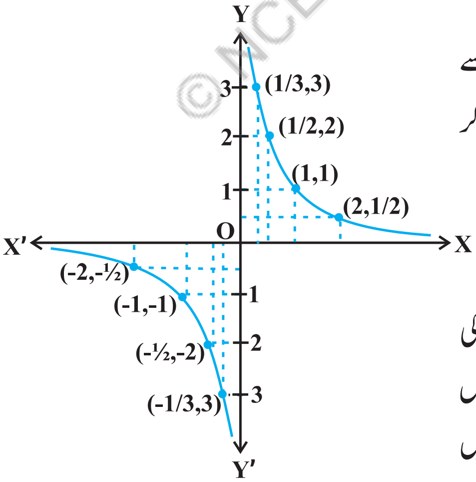
ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ جیسے ہی دائیں طرف سے x، 0 کے قریب آتا ہے۔ $f(x)$ کی قدر بہت زیادہ ہو جاتی ہے۔ اسے اس طرح بھی کہا جا سکتا ہے۔ $f(x)$ کی قدر کی بھی دیے ہوئے عدد سے زیادہ کی جا سکتی ہے، 0 کے بہت زیادہ قریب مثبت حقیقی عدد چن کر علامت کے طور پر ہم لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \to 0^{+}} f(x) = +\infty$$

(اسے اس طرح پڑھا جاتا ہے: $f(n)$ کی 0 پر دائیں ہاتھ کی انتہا جمع کی لامتناہی ہے)۔ ہماری یہ خواہش ہے کہ ہم اس پر زور ڈالیں کہ $+\infty$ ایک حقیقی عدد نہیں ہے اور اس لیے f کی 0 پر دائیں ہاتھ کی انتہا وجود میں نہیں ہے (ایک حقیقی عدد کی طرح) اس طرح f کی 0 پر بائیں ہاتھ کی انتہا کو دریافت کیا جا سکتا ہے۔ ذیل جدول یہ ظاہر کرنے کے لیے خود کفیل ہے۔

جدول 5.2

x	-1	-0.3	-0.2	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-n}
$f(x)$	-1	$-3\ 333$	-5	-10	-10^{2}	-10^{3}	-10^{n}



شکل 5.3

جدول 5.2 سے کہ $f(x)$ کی قدر کو کسی بھی دیے ہوئے عدد سے چھوٹا کیا جا سکتا ہے ایک منفی حقیقی عدد 0 کے بہت قریب چن کر علامتی طور پر ہم لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \to 0^{-}} f(x) = -\infty$$

(اسے اس طرح پڑھا جاتا ہے: $f(x)$ کی 0 پر بائیں ہاتھ کی انتہا منفی لامتناہی ہے)۔ اس کے آگے ہماری خواہش ہے کہ ہم اس پر زور ڈالیں کہ $-\infty$ ایک حقیقی عدد نہیں ہے اور اس لیے f کی 0 پر بائیں ہاتھ کی انتہا وجود میں نہیں ہے (ایک حقیقی عدد کی طرح) اس کے

شکل 5.3 میں دیے گئے مقلوب تفاعل کا گراف اوپر دی گئی حقیقتوں کا جیومیٹریائی اظہار ہے۔

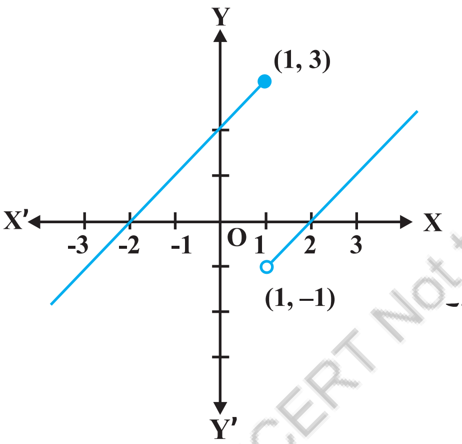
مثال 10 تفاعل f کے تسلسل پر بحث و مباحثہ کیجیے جو کہ اس طرح بیان کیا گیا ہے

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{اگر } x \le 1 \\ -x+2 & \text{اگر } x > 1 \end{cases}$$

حل تفاعل f حقیقی خط کے تمام نقاط پر معرف ہے۔

کیس 1 اگر $c < 1$، تب $f(c) = c + 2$۔ اس لیے $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} f(x+2) = c+2$

اس طرح 1 سے چھوٹے تمام حقیقی اعداد پر x مسلسل ہے۔



شکل 5.4

کیس 2 اگر $c > 1$، تب $f(c) = c - 2$ اس لیے

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} (x-2) = c-2 = f(c)$$

اس طرح $x > 1$، تمام نقاط پر f مسلسل ہے۔

کیس 3 اگر $c = 1$ ہے تب f کی $x = 1$ پر بائیں ہاتھ کی انتہا ہے۔

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x+2) = 1+2 = 3$$

$x = 1$ پر f کی دائیں ہاتھ کی انتہا ہے۔

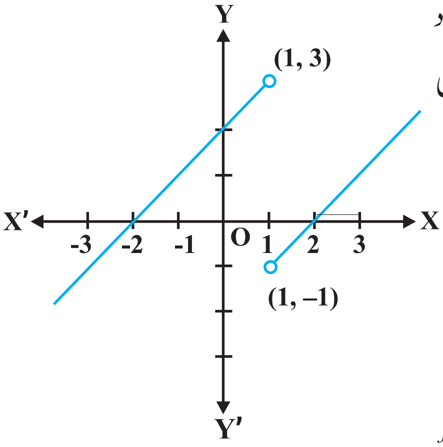
$x = 1$ پر f کی

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-2) = 1-2 = -1$$

کیوں کہ بائیں اور دائیں ہاتھ کی انتہا آپس میں برابر نہیں ہیں۔ اس لیے f، $x = 1$ پر مسلسل نہیں ہے۔ اس طرح f کا $x=1$ پر غیر مسلسلی کا اکلوتا نقطہ ہے۔ فنکشن کا گراف شکل 5.4 میں دیا گیا ہے۔

مثال 11 تفاعل f کے غیر تسلسل کے تمام نقاط معلوم کیجیے جو اس طرح معرف ہیں۔

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{اگر } x < 1 \\ 0 & \text{اگر } x = 1 \\ x-2 & \text{اگر } x > 1 \end{cases}$$



شکل 5.5

حل جیسا کہ پچھلی مثال میں ہے ہم دیکھ چکے ہیں کہ f تمام حقیقی اعداد $x\neq1$ پر فنکشن f غیر تسلسل ہے۔اس طرح $x=1$ پر f کی بائیں ہاتھ کی انتہا ہے۔

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}(x+2) = 1+2 = 3$$

$x=1$ پر f کی دائیں ہاتھ کی انتہا ہے۔

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+}(x-2) = 1-2 = -1$$

اس لیے $x = 1$ پر فنکشن f غیر مسلسل ہے۔اس طرح $x = 1$، f کی غیر تسلسل کا اکلوتا نقطہ ہے،فنکشن کا گراف شکل 5.5 میں دیا گیا ہے۔

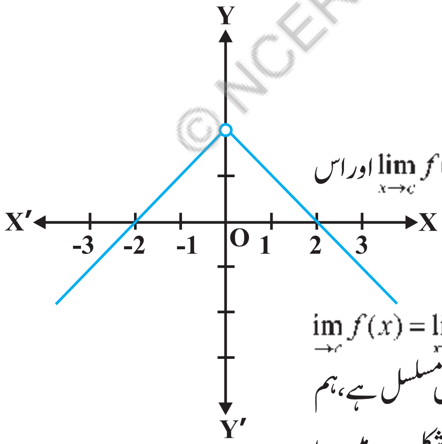
مثال 12 فنکشن کے مسلہ پر بحث ومباحثہ کیجیے جو اس طرح بیان کیا گیا ہے۔

$$\begin{cases} x+2, & \text{اگر } x<0 \\ x-2, & \text{اگر } x>0 \end{cases}$$

حل یہ مشاہدہ کیجیے کہ فنکشن 0 کے علاوہ تمام حقیقی اعداد پر معرف ہے۔اس فنکشن کی تعریف کا علاقہ ہے۔

$D_1 \cup D_2$ جہاں $D_1 = \{x \in \mathbf{R} : x<0\}$ اور

$D_2 = \{x \in \mathbf{R} : x>0\}$



شکل 5.6

کیس 1 اگر $c \in D_1$، تب $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}(x+2) = c+2 = f(c)$ اور اس طرح f، D_1 میں مسلسل ہے۔

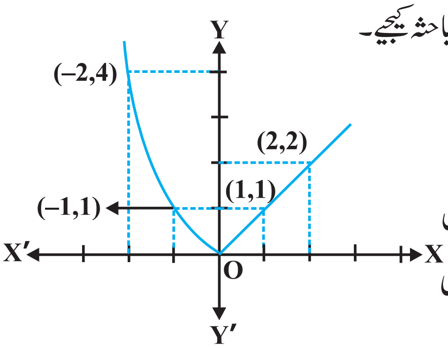
کیس 2 اگر $c \in D_1$ تب $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}(-x+2) = -+2 = f(c)$

اور اسی طرح f D_2 میں مسلسل ہے، کیونکہ f تمام نقاط پر f کے حلقہ میں مسلسل ہے، ہم اس سے یہ مطلب نکالتے ہیں کہ f مسلسل ہے۔اس فنکشن کا گراف شکل 5.6 میں دیا گیا ہے۔اس بات پر غور کیجیے کہ اس فنکشن کا گراف بنانے کے لیے ہمیں کاغذ کی

مستوی سے اپنا قلم اٹھانے کی ضرورت ہے، لیکن ہمیں اس بات کی ضرورت ہے کہ ہم صرف وہ نقاط لیں جہاں فنکشن معرف نہیں ہے۔

مثال 13 فنکشن f جو کہ نیچے دیا گیا ہے اس کے تسلسل پر بحث و مباحثہ کیجیے۔

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{اگر } x \geq 0 \\ x^2 & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$



شکل 5.7

حل صاف طور پر فنکشن ہر ایک حقیقی عدد پر بیان کیا گیا ہے۔ فنکشن کا گراف شکل 5.7 میں دیا گیا ہے۔ معائنہ سے ایسا لگتا ہے، ہوشیاری سے تین مختلف ذیلی سیٹوں کے حقیقی خط کو علاقہ میں بانٹنے سے۔

مان لیجیے $D_1 = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}, D_2 = \{0\}$

$D_3 = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$

کیس 1 D_1 کے کسی بھی نقطے پر، ہمارے پاس ہے $f(x) = x^2$ اور یہ دیکھنا آسان ہے کہ یہ وہاں مسلسل ہے (مثال 2 دیکھئے)

کیس 2 D_3 کے کسی بھی نقطے پر، ہمارے پاس ہے $f(x) = x$ اور یہ دیکھنا آسان ہے کہ یہ وہاں مسلسل ہے (مثال 6 دیکھئے)

کیس 3 اب ہم فنکشن کا $x = 0$ پر تجزیہ کر کے دیکھیں گے۔ فنکشن کی قدر 0 پر $f(0) = 0$ ہے۔

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0^2 = 0$$

f کی 0 پر بائیں ہاتھ کی انتہا ہے۔

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

اس طرح $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 f(0)$ اور اس لیے f، 0 پر مسلسل ہے۔ اس کا مطلب ہے f اپنے علاقہ کے ہر ایک نقطہ پر مسلسل ہے اور اس لیے f ایک مسلسل فنکشن ہے۔

مثال 14 دکھائیے کہ ہر ایک کثیر رکنی فنکشن مسلسل ہے۔

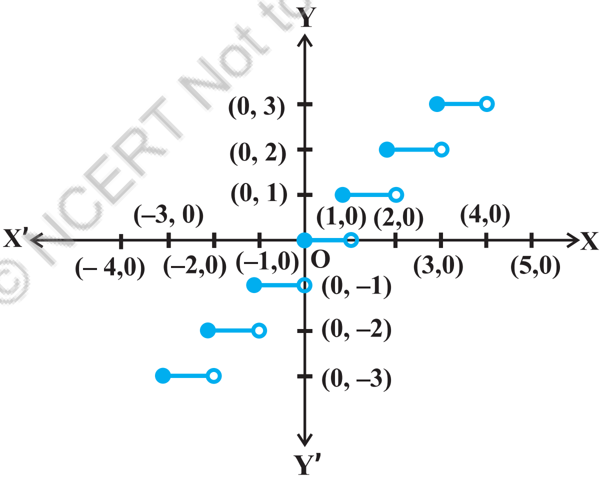
حل اس بات کی یاددہانی کیجیے کہ ایک فنکشن p ایک کثیر رکنی فنکشن ہے اگر اسے $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ سے معرف کیا جائے کچھ طبعی اعداد n کے لیے $a_n \neq 0$، اور $a_i \in \mathbf{R}$، صاف طور پر فنکشن ہر ایک حقیقی عدد کے لیے بیان کیا گیا ہے۔ ایک متعین حقیقی عدد c کے لیے، ہمارے پاس ہے۔

$$\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$$

تعریف کے لحاظ سے c، p پر مسلسل ہے۔ کیونکہ c کوئی بھی حقیقی عدد ہے، p ہر ایک حقیقی عدد کے لیے مسلسل ہے اور اس لیے p ایک مسلسل فنکشن ہے۔

مثال 15 عظیم صحیح عدد فنکشن جو کہ $f(x) = [x]$ سے معرف ہے، جہاں $[x]$ عظیم صحیح عدد کو ظاہر کرتا ہے جو x سے چھوٹا یا برابر ہے c کے تمام غیر مسلسل کے نقاط معلوم کیجیے۔

حل سب سے پہلے اس کا مشاہدہ کیجیے کہ f تمام حقیقی اعداد کے لیے معرف ہے۔ فنکشن کا گراف شکل 5.8 میں دیا گیا ہے۔ گراف سے یہ دکھائی دیتا ہے کہ f ہر صحیح عدد پر غیر مسلسل ہے۔ اگر یہ صحیح ہے تو ذیل میں اس کو معلوم کرتے ہیں۔



شکل 5.8

کیس 1 مان لیجیے c کوئی بھی ایک حقیقی عدد ہے جو کسی صحیح عدد کے برابر نہیں ہے۔ یہ گراف سے صاف طور پر ظاہر ہے کہ تمام صحیح اعداد کے لیے جو c کے قریب ہیں فنکشن کی قدر $[c]$ کے برابر ہے، یعنی $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} [x] = [c]$ ساتھ ہی $f(c) = [c]$ اور اس طرح فنکشن تمام حقیقی اعداد پر مسلسل ہے اور صحیح اعداد کے برابر نہیں ہے۔

کیس 2 مان لیجیے c ایک صحیح عدد ہے۔ تب ہم یہ کافی چھوٹا صحیح عدد $r>0$ معلوم کرسکتے ہیں تا کہ $[c-r]=c-1$ جہاں $[c+r]=c$

اس طرح انتہا کی اصطلاح میں اس کا مطلب ہے کہ

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = c-1,\ \lim_{x\to c^-} f(x) = c$$

کیونکہ یہ انتہا کسی بھی c کے لیے آپس میں برابر نہیں ہوسکتی ہے اس لیے، فنکشن ہر ایک صحیح عدد پر غیر مسلسل ہے۔

5.2.1 مسلسل فنکشن کا الجبرا (Algebra of continuous functions)

پچھلی جماعت میں، انتہا کا مطلب سمجھنے کے بعد، ہم نے کچھ انتہا کا الجبرا پڑھا ہے اب ہم کچھ مسلسل فنکشن کا الجبرا پڑھیں گے۔ کیونکہ فنکشن کا تسلسل ایک نقطہ پر پورے طور پر ایک فنکشن کی انتہا کے ماتحت ہے۔ اس لیے یہ سوچنا جائز ہوگا کہ انتہا کے سلسلہ میں بھی یہ درست ہوگا۔

کیس 1 مان لیجیے f اور g حقیقی عدد c پر دو حقیقی مسلسل فنکشن ہیں۔

تب

(1) $f+g$ مسلسل ہے $x=c$ پر

(2) $f-g$ مسلسل ہے $x=c$ پر

(3) $f\,.\,g$ مسلسل ہے $x=c$ پر

(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ مسلسل ہے $x=c$ پر (جب کہ $g(c)\neq 0$ ہو)

ثبوت ہم $(f+g)$ کی مسلسلی کی $x=c$ پر کھوج کررہے ہیں۔ یہ صاف طور پر $x=c$ پر بیان کیا گیا ہے۔ ہمارے پاس ہے۔

$$\lim_{x\to c}(f+g)(x) = \lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] \qquad (f+g \text{ کی تعریف سے})$$

$$= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) \qquad (\text{انتہائی کے مسئلہ سے})$$

$$= f(c)+g(c) \qquad (\text{جیسا کہ } f \text{ اور } g \text{ مسلسل ہیں})$$

$$= (f+g)(c) \qquad (f+g \text{ کی تعریف سے})$$

اس لیے $x=c$ پر، $f+g$ مسلسل ہے

باقی حصہ کا ثبوت بھی ایسا ہی ہے اور پڑھنے والے کے لیے مشق کے طور پر چھوڑ دیا گیا ہے۔

ریمارکس

(i) اوپر کے (3) کے ایک خاص کیس کے طور پر، اگر f ایک مستقل فنکشن ہے، یعنی $f(x) = \lambda$ کسی بھی حقیقی عدد λ کے لیے، تب فنکشن $(\lambda . g)$ جو کہ $(\lambda . g)(x) = \lambda . g(x)$ سے معرف ہے بھی مسلسل ہے۔ خاص طور پر اگر $\lambda = -1$ ہے، f کے تسلسل کا مطلب ہے $-f$ کے تسلسل۔

(ii) اوپر کے (4) کے ایک خاص کیس کے طور پر اگر ایک f ایک مستقل فنکشن $f(x) = \lambda$، تب فنکشن $\frac{\lambda}{g}$ جو کہ $\frac{\lambda}{g}(x) = \frac{\lambda}{g(x)}$ سے معرف ہے بھی مسلسل ہے جہاں کہ $g(x) \neq 0$ خاص طور پر، g کے تسلسل کا مطلب ہے $\frac{1}{g}$ کے تسلسل۔

اوپر دیئے ہوئے مسئلہ کو بہت سے مسلسل فنکشن کو بنانے کے لئے استعمال کرتے ہیں۔ یہ فیصلہ لینے میں بھی مدد کرتے ہیں کہ اگر کچھ فنکشن مسلسل ہیں یا نہیں۔ ذیل مثالیں اس کو سمجھاتی ہیں۔

مثال 16 ثابت کیجئے کہ ہر ایک ناطق فنکشن مسلسل ہے۔

حل یاد کیجئے کہ ہر ایک ناطق فنکشن f دیا گیا ہے۔

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad q(x) \neq 0$$

جہاں p اور q کثیر رکنی فنکشن ہیں، f کا علاقہ تمام حقیقی اعداد ہیں ان نقاط کے علاوہ جہاں q صفر ہے۔ کیونکہ کثیر رکنی فنکشن مسلسل ہے (مثال 14) f مسئلہ 1 کے حصہ (4) سے مسلسل ہے۔

مثال 17 Sine فنکشن کی مسلسلی پر بحث ومباحثہ کیجیے۔

حل اس کی جانچ کے لیے ہم ذیل حقیقت کا استعمال کرتے ہیں۔

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

ہم نے اسے ثابت نہیں کیا ہے، لیکن 0 کے قریب $\sin x$ کے گراف سے یہ صاف ظاہر ہے اب، مشاہدہ کیجیے کہ $f(x) = \sin x$ تمام حقیقی اعداد کے لیے، معرف ہے۔ مان لیجیے c ایک حقیقی عدد ہے۔ $x = c + h$ رکھئے۔ اگر $x \to c$ ہم جانتے ہیں

$x \to c$ ہم جانتے ہیں کہ $h \to 0$، اس لیے

$$= \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \sin x$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin(c+h)$$

$$= \lim_{h\to 0} [\sin c \cos h + \cos c \sin h]$$

$$= \lim_{h\to 0} [\sin c \cos h] + \lim_{h\to 0} [\cos c \sin h]$$

$$= \sin c + 0 = \sin c = f(c)$$

اس طرح $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ اور اس لیے f ایک مسلسل فنکشن ہے۔

ریمارک Cosine فنکشن کے تسلسل کے لیے بھی اسی طرح کا ثبوت دیا جاسکتا ہے۔

مثال 18 ثابت کیجیے کہ فنکشن جو کہ $f(x) = \tan x$ سے بیان کیا گیا ہے ایک مسلسل فنکشن ہے۔

حل فنکشن $f(x) = \tan = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ یہ تمام حقیقی اعداد کے لیے معرف ہے تا کہ $\cos x \neq 0$ یعنی $x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ ابھی ہم نے ثابت کیا ہے کہ دونوں sin اور cos فنکشن مسلسل ہیں۔ اس طرح کیونکہ tan ایک دو مسلسل فنکشن کا خارج قسمت ہے، اس لیے مسلسل ہے، جہاں بھی یہ معرف ہے۔

فنکشن کی ترتیب کی مناسبت سے مسلسل فنکشن سے متعلق ایک دل چسپ حقیقت ہے۔ اسے یاد کیجیے کہ اگر f اور g دو حقیقی فنکشن ہیں، تب

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

معرف ہے جب کہ g کی وسعت، علاقہ f کا ایک ماتحت شیٹ ہے، ذیل مسئلہ (جو بغیر ثبوت کے بیان کیا گیا ہے) ترکیبی فنکشن کے تسلسل کے لیے اہم ہے۔

کیس 2 مان لیجیے کہ f اور g حقیقی قدر والے فنکشن اس طرح ہیں کہ $(f \circ g)$، c پر معرف ہے۔ اگر g، c پر مسلسل ہے اور f، $g(c)$ پر مسلسل ہے، تب $(f \circ g)$، c پر مسلسل ہے۔

ذیل مثالیں اس مسئلہ کی وضاحت کرتی ہیں۔

مثال 19 دکھایئے کہ فنکشن جو کہ $f(x) = \sin(x^2)$ سے معرف ہے ایک مسلسل فنکشن ہے۔

حل اس کا مشاہدہ کیجیے کہ فنکشن ہر ایک حقیقی عدد کے لیے بیان کیا گیا ہے۔ فنکشن f کے بارے میں سوچا جا سکتا ہے کہ یہ $g\, o\, h$ دو فنکشن g اور h کی ترکیب ہے، جہاں $g(x) = \sin x$ اور $h(x) = x^2$ ہے۔ کیونکہ دونوں g اور h مسلسل فنکشن ہیں، مسئلہ 2 سے، اس سے یہ نکالا جا سکتا ہے کہ f ایک مسلسل فنکشن ہے۔

مثال 20 دکھایئے کہ فنکشن f جو کہ معرف ہے۔

$$f(x) = |1 - x + |x||,$$

جہاں x ایک کوئی بھی حقیقی عدد ہے، ایک مسلسل فنکشن ہے۔

حل g کو $g(x) = 1 - x + |x|$ اور h کو $h(x) = |x|$ سے تمام حقیقی x کے لیے بیان کیجیے۔ تب

$$(h\, o\, g)(x) = h(g(x))$$

$$= h(1 - x + |x|)$$

$$= |1 - x + |x|| = f(x)$$

مثال 7 میں ہم نے دیکھا ہے کہ h ایک مسلسل فنکشن ہے۔ اس لیے g کیونکہ ایک کثیر رکنی فنکشن کا مجموعہ ہے اور مقیاس (Modulus) فنکشن مسلسل ہے۔ لیکن تب ہی کیونکہ f دو مسلسل فنکشن کا ترکیبی فنکشن ہے اس لیے مسلسل ہے۔

مشق 5.1

1۔ ثابت کیجیے کہ فنکشن $f(x) = 5x - 3$، $x = -3$، $x = 5$ اور $x = 0$ پر مسلسل ہے۔

2۔ فنکشن $f(x) = 2x^2 - 1$ کے تسلسل کی $x = 3$ پر جانچ کیجیے۔

3۔ ذیل فنکشن کو تسلسل کے لیے جانچیے۔

(a) $f(x) = x - 5$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x+5}$ (d) $f(x) = |x - 5|$

4۔ ثابت کیجیے کہ فنکشن $f(x) = x^n$ پر مسلسل ہے، جہاں a ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

5۔ کیا فنکشن f جو کہ بیان کیا گیا ہے۔

$x = 0$ پر مسلسل ہے؟ $x = 1$ پر؟ $x = 22$ پر؟

f کے غیر مسلسلی کے تمام نقاط معلوم کیجیے، جہاں f اس طرح بیان $f(x) = \begin{cases} x, & \text{اگر } x \le 1 \\ 5, & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$ کیا گیا ہے۔

6. $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{if } x \le 2 \\ 2x-3, & \text{if } x > 2 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} |x|+3, & \text{if } x \le -3 \\ -2x, & \text{if } -3 < x < 3 \\ 6x+2, & \text{if } x \ge 3 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{if } x \ne 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & \text{if } x < 0 \\ -1, & \text{if } x \ge 0 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{if } x \ge 1 \\ x^2+1, & \text{if } x < 1 \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} x^3-3, & \text{if } x \le 2 \\ x^2+1, & \text{if } x > 2 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} x^{10}-1, & \text{if } x \le 1 \\ x^2, & \text{if } x > 1 \end{cases}$

13۔ کیا بیان کیا گیا فنکشن ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} x+5, & \text{if } x \le 1 \\ x-5, & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

ایک مسلسل فنکشن ہے؟

فنکشن f کے تسلسل پر بحث و مباحثہ کیجیے، جہاں f بیان کیا گیا ہے۔

14. $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{if } 0 \le x \le 1 \\ 4, & \text{if } 1 < x < 3 \\ 5, & \text{if } 3 \le x \le 10 \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{if } x < 0 \\ 0, & \text{if } 0 \le x \le 1 \\ 4x, & \text{if } x > 1 \end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases}-2, & \text{if } x\le -1\\ 2x, & \text{if } -1<x\le 1\\ 2, & \text{if } x>1\end{cases}$

17۔ a اور b میں رشتہ معلوم کیجیے تاکہ فنکشن

$$f(x)=\begin{cases}ax+1, & \text{if } x\le 3\\ bx+3, & \text{if } x>3\end{cases}$$

18۔ λ کی کس قدر کے لیے اس طرح بیان کیا گیا فنکشن

$$f(x)=\begin{cases}\lambda(x^2-2x), & \text{if } x\le 0\\ 4x+1, & \text{if } x>0\end{cases}$$

$x=0$ پر مسلسل ہے؟ $x=1$ پر اس کی مسلسل کے بارے میں کیا خیال ہے؟

19۔ دکھایئے کہ $g(x)=x-[x]$ سے معرف فنکشن تمام صحیح اعداد پر غیر مسلسل ہے۔ یہاں $[x]$ عظیم صحیح اعداد x سے کم یا برابر کو ظاہر کرتا ہے۔

20۔ کیا $f(x)=x^2-\sin x+5$ سے بیان کیا گیا فنکشن $x=\pi$ پر مسلسل ہے؟

21۔ ذیل فنکشن کی تسلسل پر بحث ومباحثہ کیجیے۔

(a) $f(x)=\sin x+\cos x$ (b) $f(x)=\sin x-\cos x$

(c) $f(x)=\sin x\,.\cos x$

22۔ cosine, cosecant, secant اور cotangent فنکشن کے تسلسل پر بحث ومباحثہ کیجیے۔

23۔ f کی غیر تسلسل کے تمام نقاط دریافت کیجیے، جہاں

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{if } x<0\\ x+1, & \text{if } x\ge 0\end{cases}$$

24۔ f دریافت کیجیے اگر معرف فنکشن

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{if } x\ne 0\\ 0, & \text{if } x=0\end{cases}$$

ایک مسلسل فنکشن ہے۔

25۔ f کی مسلسل جانچ کیجیے جہاں f اس طرح معرف ہے۔

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-\cos x, & x\neq 0 \text{ اگر}\\ -1, & x=0 \text{ اگر}\end{cases}$$

26۔ $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{k\cos x}{\pi-2x} & x\neq\dfrac{\pi}{2} \text{ اگر}\\ 3 & x=\dfrac{\pi}{2} \text{ اگر}\end{cases} \qquad x=\frac{\pi}{2} \text{ پر}$$

27۔ $$f(x)=\begin{cases}kx^2 & x<2 \text{ اگر}\\ 3 & x>2 \text{ اگر}\end{cases} \qquad x=2 \text{ پر}$$

28۔ $$f(x)=\begin{cases}kx+1 & x<\pi \text{ اگر}\\ \cos x & x>\pi \text{ اگر}\end{cases} \qquad x=\pi \text{ پر}$$

29۔ $$f(x)=\begin{cases}kx+1 & x<5 \text{ اگر}\\ 3x-5 & x>5 \text{ اگر}\end{cases} \qquad x=5 \text{ پر}$$

30۔ a اور b کی قدریں دریافت کیجیے تاکہ معرف فنکشن

$$f(x)=\begin{cases}5 & x<2 \text{ اگر}\\ ax+b & 2<x<10 \text{ اگر}\\ 21 & x>10 \text{ اگر}\end{cases}$$

ایک مسلسل فنکشن ہو جائے۔

31۔ دکھایئے کہ فنکشن $f(x)=\cos(x^2)$ ایک مسلسل فنکشن ہے۔

32۔ دکھایئے کہ فنکشن $f(x)=|\cos x|$ ایک مسلسل فنکشن ہے۔

33۔ جانچ کیجیے کہ $\sin|x|$ ایک مسلسل فنکشن ہے۔

34۔ f جو کہ $f(x)=|x|-|x+1|$ سے بیان کیا گیا ہے کہ تمام غیر تسلسل کے نقاط دریافت کیجیے۔

5.3 تفرق پذیری (Differentiability)

پچھلی جماعت سے ذیل حقیقتوں کو یاد کیجیے، ہم حقیقی فنکشن کے مشتق اسی طرح سے بیان کر چکے ہیں۔

مان لیجیے f ایک حقیقی فنکشن ہے اور c اس کے علاقہ میں ایک نقطہ ہے۔ c پر f کا مشتق اس طرح معرف ہے۔

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

بشرطیکہ یہ انتہا موجود ہو نقطہ c پر f کے مشتق کو $f'(c)$ یا $\frac{d}{dx}(f(x))|_c$ سے ظاہر کیا جاتا ہے یا فنکشن جو $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ سے معرف ہے اور جب اشیاء کا وجود ہے۔ f کا مشتق کہلاتا ہے، f کے مشتق کو $f^1(x)$ یا $\frac{dy}{dx}(f(x))$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اگر $y=f(x)$ تب یہ $\frac{dy}{dx}$ یا y سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایک مشتق کو دریافت کرنے کے عمل کو تفرق کہتے ہیں۔ ہم $f^1(x)$ کے لیے جملہ "x کی مناسبت سے $f(x)$ کا تفرق معلوم کیجیے" کا استعمال کرتے ہیں جس کا مطلب ہے $f'(x)$

ذیل اصول مشتق کے الجبرا کے حصے کے طور پر بنائے گئے تھے۔

$$(u\pm v)'=u'\pm v' \qquad (1)$$

$$(uv)'=u'v+uv' \qquad (2)$$ (لیبنز یا ضربی اصول)

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2} \qquad (3)$$ جہاں، $v\neq 0$ (خارج قسمت یا مخروجہ اصول)

ذیل جدول کچھ معیاری فنکشن کے مشتق کی ایک فہرست فراہم کرتی ہے۔

جدول 5.3

tan x	cos x	sin x	x^n	$f(x)$
$\sec^2 x$	$-\sin x$	$\cos x$	nx^{n-1}	$f'(x)$

جب کبھی ہم نے مشتق کو بیان کیا ہے، ہم نے یہ شرط لگائی ہے کہ اس کی انتہا موجود ہو۔ اب عام سوال ہے، کیا ہے اگر یہ نہیں ہے؟ سوال بہت ہی عام ہے اور اسی طرح اس کا جواب بھی۔ اگر $\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ موجود نہیں ہے، ہم کہتے

ہیں کہ f، c پر تفرق پذیر نہیں ہے۔ دوسرے الفاظ میں، ہم کہتے ہیں کہ ایک فنکشن f اپنے علاقہ میں ایک نقطہ پر تفرق پذیر ہے اگر دونوں $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ اور $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ محدود ہوں اور برابر ہوں۔ ایک فنکشن ایک وقفہ $[a, b]$ کے ہر نقطہ پر تفرق پذیر ہے۔ جیسا کہ تسلسل کے کیس میں ہے، آخری نقاط a اور b پر، ہم دائیں ہاتھ کی انتہا اور بائیں ہاتھ کی انتہا لیتے ہیں، جو کہ اور کچھ نہیں ہے بلکہ فنکشن کا بالترتیب a اور b پر بائیں ہاتھ کا مشتق اور دائیں ہاتھ کا مشتق ہے۔ اسی طرح طرح، ایک فنکشن اسی وقت ایک قفہ (a,b) میں تفرق پذیر ہے اگر یہ $(a\ ,\ b)$ کے ہر نقطہ پر تفرق پذیر ہے۔

مسئلہ 3 اگر ایک فنکشن f ایک نقطہ c پر تفرق پذیر ہے، تب یہ اس نقطہ پر مسلسل بھی ہوگا۔

ثبوت کیونکہ f نقطہ c پر تفرق پذیر ہے، اس لیے ہمارے پاس ہے۔

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

لیکن $x \neq c$ کے لیے، ہمارے پاس ہے

$$f(x) - f(c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} . (x - c)$$

اس لیے

$$\lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] = \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} . (x - c)\right]$$

یا

$$\lim_{x \to c} [f(x)] - \lim_{x \to c} [f(c)] = \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right] . \lim_{x \to c} [(x - c)]$$

$$= f'(c) \ .\ 0 = 0$$

یا

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

اس لیے f، $x = c$ پر مسلسل ہے۔

ضمنی نتیجہ 1 Corollary ہر ایک تفرق پذیر فنکشن مسلسل ہے۔

ہم یہ ریمارک دیتے ہیں کہ اوپر دیئے ہوئے بیان کا معکوس صحیح نہیں ہے۔ حقیقت میں ہم نے دیکھا ہے کہ فنکشن جو $f(x) = |x|$ سے بیان کیا گیا ہے ایک مسلسل فنکشن ہے۔ بائیں ہاتھ کی انتہا پر غور کیجیے۔

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

دائیں ہاتھ کی انتہا پر غور کیجیے

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

کیونکہ اوپر بائیں اور دائیں ہاتھ کی انتہائیں '0' پر برابر نہیں ہیں، اس لیے $\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ موجود نہیں ہیں اور اس لیے f، 0 پر تفرق پذیر فنکشن نہیں ہے۔

5.3.1 ترکیبی فنکشن کے مشتق *Derivatives of composite functions*

غیر مفرد فنکشن کے مشتقوں کا مطالعہ کرنے کے لیے، ہم ایک سمجھانے والی مثال سے شروع کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر، ہم f کا مشتق معلوم کرنا چاہتے ہیں، جہاں

$$f(x) = (2x+1)^3$$

ایک طریقہ تو یہ ہے کہ $(2x+1)^3$ کو دورکنی مسئلہ کا استعمال کر کے کھولا جائے اور اس کا مشتق معلوم کیا جائے ایک کثیر رکنی فنکشن کی طرح جیسا کہ نیچے سمجھایا گیا ہے۔

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\left[(2x+1)^3\right]$$

$$= \frac{d}{dx}(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1)$$

$$= 24x^2 + 24x + 6$$

$$= 6(2x+1)^2$$

اب، مشاہدہ کیجیے کہ $f(x) = (h \circ g)(x)$

جہاں $g(x) = 2x + 1$ اور $h(x) = x^3$ ہے۔ $t = g(x) = 2x + 1$ رکھیئے۔ تب $f(x) = h(t) = t^3$۔ اس طرح

$$\frac{df}{dx} = 6(2x+1)^2 = 3(2x+1)^2 . 2 = 3t^2 . 2 = \frac{dh}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

اس طرح کے مشاہدوں کی یہ برتری کہ یہ مشتق دریافت کرنے کو آسان کر دیتا ہے، مثال کے طور پر $(2x+1)^{100}$۔ اس مشاہدہ کو ہم ذیل مسئلہ میں فارمولے کے طور پر استعمال کر سکتے ہیں جسے (زنجیری اصول) چین رول کہا جاتا ہے۔

مسئلہ 4 **چین رول (زنجیری اصول)** مان لیجیے f ایک حقیقی قدر والا فنکشن ہے جو کہ دو فنکشن u اور v کا ترکیبی فنکشن ہے، یعنی

$f = v\,o\,u$۔ مان لیجیے $t = u(x)$ اور اگر دونوں $\frac{dt}{dx}$ اور $\frac{dv}{dt}$ موجود ہیں، ہمارے پاس ہے۔

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

ہم اس مسئلہ کے ثبوت کو چھوڑ دیتے ہیں۔ زنجیری اصول کی توسیع ذیل طریقہ سے کی جاسکتی ہے۔

مان لیجیے f ایک حقیقی قدر والا فنکشن ہے جو کہ تین فنکشن ہے جو کہ تین فنکشن u، v اور w کا غیر مفرد ہے، یعنی،

$f = (w\ o\ u)\ o\ v$ اگر $t = v(x)$ اور $s = u(t)$ ہو، تب

$$\frac{df}{dx} = \frac{d(w o u)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dw}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

جب کہ بیان میں تمام مشتق موجود ہیں۔ پڑھنے والے کو اور زیادہ فنکشن کو زنجیری اصول میں لانے کے لیے مدعو کیا جاتا ہے۔

مثال 21 دئے ہوئے فنکشن $f(x) = \sin(x^2)$ کا مشتق دریافت کیجیے۔

حل مشاہدہ کیجیے کہ دیا ہوا فنکشن دو فنکشن کی ترکیب ہے۔ اصلیت میں، اگر $t = u(x) = x^2$ اور $v(t) = \sin t$، تب

$$f(x) = (v\ o\ u)(x) = v(u(x)) = v(x^2) = \sin x^2$$

$t = u(x) = x^2$ رکھئے۔ مشاہدہ کیجیے کہ $\frac{dv}{dt} = \cos t$ اور $\frac{dt}{dx} = 2x$ موجود ہے۔ اس طرح، زنجیری اصول سے

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \cos t\cdot 2x$$

متبادل کے طور پر، ہم سیدھے طور پر اس طرح بھی آگے بڑھ سکتے ہیں۔

$$y = \sin(x^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x^2)$$

$$= \cos x^2 \frac{d}{dx}(x^2) = 2x\cos x^2$$

مثال 22 $\tan(2x+3)$ کا مشتق معلوم کیجیے۔

حل مان لیجیے $f(x) = \tan(2x+3)$، $u(x) = 2x + 3$ اور $v(t) = \tan t$ تب

$$(v\ o\ u)(x) = v(u(x)) = v(2x+3) = \tan(2x+3) = f(x)$$

اس طرح f دو فنکشن کا غیر مفرد $t = u(x) = 2x + 3$ رکھئے۔ تب $\frac{dv}{dt} = \sec^2 t$ اور $\frac{dt}{dx} = 2$ وجود میں ہے۔ اس

طرح، زنجیری اصول سے

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2\sec^2(2x+3)$$

مثال 23 $\sin(\cos(x^2))$ کا x کی مناسبت سے تفرق معلوم کیجیے۔

حل فنکشن $f(x) = \sin(\cos(x^2))$ ایک ترکیب اجزائی $f(x) = (w \circ v \circ u)(x)$ ہے تین فنکشن u, v اور w کا جہاں $u(x) = x^2, v(t) = \cos t$ اور $w(s) = \sin s$ ہے۔ $t = u(x) = x^2$ اور $s = v(t) = \cos t$ رکھئے۔ مشاہدہ کیجیے کہ $\frac{ds}{dt} = -\sin t$, $\frac{dw}{ds} = \cos s$ اور $\frac{dt}{dx} = 2x$ موجود ہیں تمام حقیقی x کے لیے۔ اس طرح زنجیری اصول کو عام کرتے ہوئے، ہمارے پاس ہے

$$\frac{df}{dx} = \frac{dw}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (\cos s).\ (-\sin t)\ .\ (2x) = -2x \sin x^2 . \cos(\cos x^2)$$

متبادل کے طور پر (Alternatively) ہم اس طرح آگے بڑھ سکتے ہیں۔

$$y = \sin(\cos x^2)$$

اس لیے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin(\cos x^2) = \cos(\cos x^2)\frac{d}{dx}(\cos x^2)$$

$$= \cos(\cos x^2)(-\sin x^2)\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= -\sin x^2 \cos(\cos x^2)(2x)$$

$$= -2x \sin x^2 \cos(\cos x^2)$$

مشق 5.2

مشق 1 تا 8 میں تفاعلات کا تفرق x کی مناسبت سے کیجیے۔

1. $\sin(x^2+5)$ **2.** $\cos(\sin x)$ **3.** $\sin(ax+b)$

4. s a x **5.** $\frac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}$ **6.** $\cos x^3 . \sin^2(x^5)$

7. $2\sqrt{\cot(x^2)}$ **8.** $\cos(\sqrt{x})$

9- ثابت کیجیے کہ دیا گیا فنکشن f $\quad f(x) = |x-1|, x \in \mathbf{R}$

$x = 1$ پر غیر تفرق پذیر ہے۔

10- ثابت کیجیے کہ عظیم صحیح عدد فنکشن جو کہ بیان کیا گیا ہے۔

$$f(x) = [x],\ 0 < x < 3$$

$x = 1$ اور $x = 2$ پر غیر تفرق پذیر ہے۔

5.3.2 صریح تفاعلات کے مشتق (Derivatives of implicit functions)

ابھی تک ہم مختلف فنکشن جو کہ $y = f(x)$ کی شکل میں دیے گیے تھے۔ کا تفرق دریافت کر رہے تھے لیکن یہ ضروری نہیں ہے کہ فنکشن ہمیشہ اس شکل میں دئے گیے ہوں۔ مثال کے طور پر، x اور y کے درمیان ذیل رشتہ پر غور کیجیے۔

$$x - y - \pi = 0$$

$$x + \sin xy - y = 0$$

پہلے مرحلہ میں ہم y کے لیے حل کر سکتے ہیں اور رشتہ کو دوبارہ اس طرح لکھ سکتے ہیں $y = x - \pi$ دوسرے مرحلے میں، ایسا نہیں لگتا کہ y کو حل کرنے کا آسان طریقہ ہوگا۔ اس طرح دونوں مرحلوں میں y کے x پر تابع ہونے پر کوئی شک نہیں ہے۔ جب x اور y کے درمیان رشتے کو اس طرح ظاہر کیا جائے کہ y کے لیے حل کرنا آسان ہو اور لکھئے کہ $y = f(x)$، ہم کہتے ہیں کہ اوپر دوسرے طریقے میں رشتہ مضمری فنکشن دیتا ہے۔ اس ذیلی حصہ میں صریح فنکشن کو تفرق کرنے کے بارے میں پڑھیں گے۔

مثال 24 اگر $x - y = \pi$ تب $\dfrac{dy}{dx}$ دریافت کیجیے۔

حل ایک طریقہ یہ ہے کہ y کے لیے حل کیجیے اور اوپر دی ہوئی مساوات کو اس طرح لکھئے۔

$$y = x - \pi$$

لیکن تب $\quad \dfrac{dy}{dx} = 1$

متبادل کے طور پر، رشتہ کو x کو مدنظر رکھتے ہوئے سیدھے طور پر تفرق کیجیے، ہمارے پاس ہے۔

$$\frac{dy}{dx}(x - y) = \frac{d\pi}{dx}$$

یاد رکھئے کہ $\dfrac{d\pi}{dx}$ کا مطلب ہے کہ مستقل فنکشن کا تفرق کرنا π کی قدر کو ہر جگہ لینا، x کو مدنظر رکھتے ہوئے اس طرح،

$$\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(y) = 0$$

جس کا مطلب ہے کہ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

مثال 25 اگر $y + \sin y = \cos x$، ہوتو $\frac{dy}{dx}$ دریافت کیجیے۔

حل ہم x کو مدنظر رکھتے ہوئے رشتہ کا سیدھے طور پر تفرق کرتے ہیں۔یعنی

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dx}(\cos x)$$

زنجیری اصول کا استعمال کرتے ہوئے جس سے نکلتا ہے۔

$$\frac{dy}{dx} + \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

یہ دیتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{1 + \cos y}$$

جہاں

$$y \neq (2n + 1)\pi$$

5.3.3 معکوس ٹرگنو میٹریائی فنکشن کے تفرق (Derivatives of inverse trigonometric functions)

ہم یہ اشارہ کرتے ہیں کہ ٹرگنو میٹریائی فنکشن مسلسل فنکشن ہوتے ہیں، لیکن ہم اسے ثابت نہیں کریں گے ۔اب ہم زنجیری اصول کا استعمال ان فنکشن کے مشتق دریافت کرنے کے لیے کریں گے۔

مثال 26 اسے تسلیم کرتے ہوئے کہ فنکشن f جو کہ $f(x) = \sin^{-1}$ سے ظاہر کیا گیا ہے موجود ہے، اس کا مشتق معلوم کیجیے۔

حل مان لیجیے $y = \sin^{-1} x$ ہے، تب $x = \sin y$

دونوں طرف کا x کی مناسبت سے تفرق معلوم کیجیے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$1 = \cos y \frac{dy}{dx}$$

جس کا مطلب ہے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)}$$

اس کا مشاہدہ کیجیے کہ یہ صرف $y \neq 0$ کے لیے بیان کیا گیا ہے، یعنی $\sin^{-1}x \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ یعنی $x \neq -1, 1,$

یعنی $x \in (-1, 1)$

اس نتیجہ کو اور زیادہ دلکش بنانے کے لیے، ہم ذیل تبدیلی کو کرتے ہیں۔

اسے یاد کیجیے کہ $x \in (-1,1)$ کے لیے $\sin(\sin^{-1} x) = x$ ہے اور اس لیے

$$\cos^2 y = 1-(\sin y)^2 = 1-(\sin(\sin^{-1} x))^2 = 1-x^2$$

ساتھ ہی، کیونکہ $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$، $\cos y$ مثبت ہے اور اس طرح $\cos y = \sqrt{1-x^2}$

اس طرح، $x \in (-1, 1)$ کے لیے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

مثال 27 f کا تفرق دریافت کیجیے جو کہ $f(x) = \tan^{-1} x$ سے دیا گیا ہے یہ مانتے ہوئے کہ یہ موجود ہے۔

حل مان لیجیے $y = \tan^{-1} x$ ہے تب $x = \tan y$ ہے

x کو مدنظر رکھتے ہوئے دونوں طرف کا تفرق کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$1 = \sec^2 y \frac{dy}{dx}$$

جس کا مطلب ہے کہ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+(\tan(\tan^{-1} x))^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

دوسرے معکوس ٹرگنومیٹریائی فنکشن کا مشتق دریافت کرنا ایک مشتق کے لیے چھوڑ دیا گیا ہے ذیل جدول باقی معکوس ٹرگنومیٹریائی فنکشن کے مشتق دیتا ہے۔ (جدول 5.4)

جدول 5.4

$f(x)$	$\cos^{-1} x$	$\cot^{-1} x$	$\sec^{-1} x$	$\operatorname{cosec}^{-1} x$
$f'(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
Domain of f'	$(-1, 1)$	**R**	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

مشق 5.3

ذیل میں $\frac{dy}{dx}$ دریافت کیجیے۔

1. $2x + 3y = \sin x$ 2. $2x + 3y = \sin y$ 3. $ax + by^2 = \cos y$

4. $xy + y^2 = \tan x + y$ 5. $x^2 + xy + y^2 = 100$ 6. $x^3 + x^2 y + xy^2 + y^3 = 81$

7. $\sin^2 y + \cos xy = \pi$ 8. $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$ 9. $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

10. $y = \tan^{-1}\left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right), -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

11. $y = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$

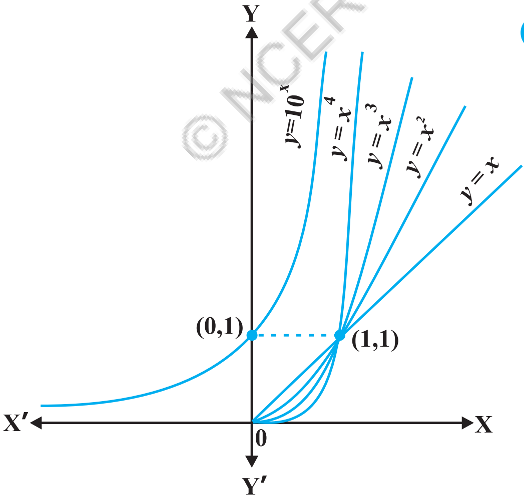
12. $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$

13. $y = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), -1 < x < 1$

14. $y = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

15. $y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2 - 1}\right), 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

5.4 قوت نما اور لوگارتمی تفاعل (Exponential and Logarithmic Functions)



شکل 5.9

ابھی تک ہم نے فنکشن کی مختلف جماعتوں کے کچھ قسم کا مطالعہ کیا ہے مثال کے طور پر کثیر رکنی فنکشن ناطق فنکشن اور ٹرگنومیٹریائی فنکشن۔ اس حصہ میں فنکشن کی نئی جماعت (تعلق رکھنے والی) جسے ہم قوت نما فنکشن اور لوگارتمی فنکشن کہتے ہیں کے بارے میں پڑھیں گے۔ اس بات پر زور دینے کی ضرورت ہے کہ اس حصے میں بتائے

گئے بہت سے بیانات بڑھاوا دینے والے ہیں اور ان کے صاف ثبوت اس کتاب کی پہنچ سے باہر ہیں۔

شکل 5.9، $y = f_1(x) = x$ ، $y = f_2(x) = x^2$ $y = f_3(x) = x^3$ کے خاکے دیتی ہے۔ اس بات کا مشاہدہ کیجیے کہ جیسے جیسے x کی طاقت بڑھتی ہے منحنی بلند ہوتا جاتا ہے۔ منحنی جتنا بلند ہوگا، نمو کی رفتار بھی اتنی ہی تیز ہوگی۔ اس کا کیا مطلب ہے کہ x کی مقرر قدر (x) کی بڑھوتری کے لیے، y کی قدر کی بڑھوتری $y = f_n(x)$ بڑھتی ہے جیسے ہی n بڑھتا ہے۔ $n = 1, 2, 3, 4$ کے لیے۔ یہ تسلیم کرنے کی بات ہے کہ اس طرح کا بیان n کی تمام مثبت قدروں کے لیے درست ہے، جہاں $f_n(x) = x^n$ ہے۔ یہ ضروری ہے، اس کا مطلب ہے کہ $y = f_n(x)$ کا گراف y = axis کی طرف زیادہ مڑ جاتا ہے۔ جیسے جیسے n بڑھتا ہے۔ مثال کے طور پر، غور کیجیے کہ $f_{10}(x) = x^{10}$ اور $f_{15}(x) = x^{15}$ ہے۔ اگر x، 1 سے 2 کی طرف بڑھتا ہے جب کہ f_{15} اسے 2^{15} کی طرف بڑھتا ہے۔ اس طرح x کے اسی بڑھاوے کے لیے، f_{15} ، f_{10} سے زیادہ تیز بڑھتا ہے۔

اوپر کے بحث و مباحثہ کا جز یہ ہے کہ کثیر رکنی فنکشن کی بڑھوتری کثیر رکنی کی ڈگری پر منحصر ہے۔ جتنی ڈگری زیادہ ہوگی۔ اتنی ہی نمو زیادہ ہوگا۔ اگلا قدرتی (طبعی) سوال یہ ہے کہ: کیا کوئی فنکشن ایسا ہے جو کثیر رکنی فنکشن سے زیادہ جلدی نمو پاتا ہو اس کا جواب اقرار میں یہ ہے اور اس طرح کے فنکشن کی ایک مثال ہے۔

$$y = f(x) = 10^x$$

ہمارا مطالبہ یہ ہے کہ فنکشن f کسی بھی مثبت صحیح عدد x کے لیے $f_n(x) = x^n$ سے زیادہ جلدی اگتا ہے۔ مثال کے طور، ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ $f_{100}(x) = x^{100}$ سے زیادہ جلدی اگتا ہے۔ x کی بڑی قدروں کے لیے مثال کے طور پر، $x = 10^3$ کے لیے، یہ نوٹ کیجیے کہ $f_{100}\ (x) = (103)^{100} = 10^{300}$ جہاں $f(10^3) = 10^{10^3} = 10^{1000}$ ہے۔ صاف طور پر $f(x)$ $f_{100}\ (x)$ سے زیادہ بڑا ہے۔ یہ ثابت کرنا مشکل نہیں ہے کہ تمام $x > 10^3, f(x) > f_{100}(x)$ کے لیے ہے۔ لیکن ہم یہاں اس کا ثبوت دینے کی کوشش نہیں کریں گے۔ اسی طرح، x کی بڑی قدریں چننے سے، یہ جانچ کی جا سکتی ہے کہ $f(x)$، $f_n(x)$ سے کسی بھی مثبت صحیح عدد n کے لیے زیادہ جلدی اگتا ہے۔

تعریف 3 قوت نما فنکشن مثبت اساس $b>1$ کے ساتھ ایک فنکشن ہے۔

$$y = f(x) = b^x$$

$y = 10^x$ کا گراف شکل 5.9 میں دیا گیا ہے۔

یہ مشورہ دیا جاتا ہے کہ پڑھنے والا یہ گراف b کی خاص قدروں کے لیے مثال کے طور پر 2,3 اور 4 کے لیے بنائیے۔

قوت نما فنکشن کی کچھ خاص خصوصیات مندرجہ ذیل ہیں۔

(1) قوت نما فنکشن کا علاقہ تمام حقیقی اعداد کا سیٹ **R** ہے۔

(2) قوت نما فنکشن کی وسعت تمام مثبت حقیقی اعداد کا سیٹ ہے۔

(3) نقطہ (0,1) قوت نما فنکشن کے ہمیشہ گراف پر ہوگا (یہ حقیقت $b^0=1$، کسی بھی حقیقی $b>1$ کے لیے کا دوبارہ دیا گیا بیان ہے)

(4) حقیقی فنکشن ہمیشہ بڑھتا رہتا ہے، یعنی جیسے جیسے ہم بائیں سے دائیں کی طرف بڑھتے ہیں گراف اوپر کی طرف بڑھتا ہے۔

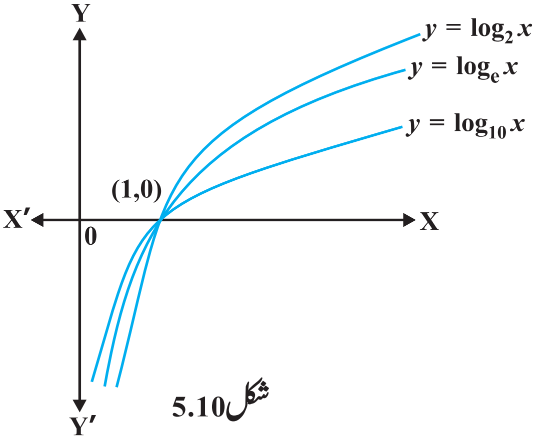
(5) بہت زیادہ x کی منفی قدروں کے لیے قوت نما فنکشن 0 کے بہت قریب ہوتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں، دوسرے ربع میں، گراف x– محور کی طرف بڑھتا ہے (لیکن کبھی نہیں ملتا)

قوت نما فنکشن جس کی اساس 10 ہے، مشترک قوت نما فنکشن کہلاتا ہے۔ گیارہویں جماعت کی ضمیمہ A.1.4 میں، اس کا مشاہدہ کیا گیا ہے کہ مسلسل $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+ ...$ کا مجموعہ ایک عدد ہے جو 2 اور 3 کے درمیان ہے اور جسے e سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس e کو ایک اساس کے طور پر استعمال کر کے ہمیں ایک بہت ہی اہم قوت نما فنکشن $y = e^x$ حاصل ہوتا ہے۔ اسے طبعی قوت نما فنکشن کہا جاتا ہے۔

یہ جاننا دلچسپ ہوگا کہ اگر قوت نما فنکشن کا معکوس وجود میں ہے اور ایک اچھا مطلب نکالتا ہے۔ یہ کھوج ذیل تعریف کی معاونت کرتی ہے۔

تعریف 4 مان لیجیے $b > 1$ ایک حقیقی عدد ہے۔ تب ہم کہتے ہیں کہ a کا لوگارتمی اساس b کے ساتھ x ہے۔ اگر $b^x = a$ ہے۔ a کا لوگارتمی اساس b کے ساتھ $\log_b a$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس طرح $\log_b a = x$ اگر $b^x = a$ ہے۔ اب ہم اسے محسوس کرنے کے لیے کچھ صریح مثالوں کے ساتھ کام کرتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ $2^3=8$ ہے۔ لوگارتمی کی زبان میں، ہم اسے اس طرح دوبارہ لکھ سکتے ہیں $\log_2 8 = 3$۔ اسی طرح $10^4=10000$ برابر کہا جاتا ہے $\log_{10}10000 = 4$ کے ساتھ ہی $625=5^4=25^2$ برابر کہا جاتا ہے۔ $\log_5 625=4$ یا $\log_{25} 625=2$۔

اور ذرا زیادہ غور کرتے ہوئے، اساس $b > 1$ کو متعین کرتے ہوئے، ہم لوگارتمی پر ایک فنکشن کی طرح مثبت حقیقی اعداد سے تمام حقیقی اعداد پر غور کر سکتے ہیں۔ اس فنکشن کو لوگارتمی فنکشن کہتے ہیں، اور اسے اس طرح بیان کیا جاتا ہے۔



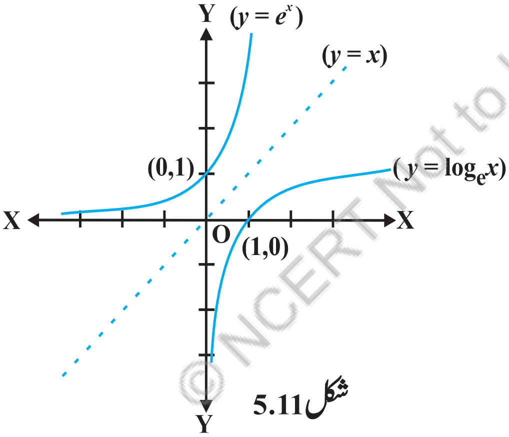
شکل 5.10

$$\log_b : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$$

$$x \to \log_b x = y \text{ اگر } b^y = x$$

پہلے کی طرح اگر اساس $b = 10$ ہے، ہم کہتے ہیں کہ یہ مشترک لوگارتم ہے اور اگر $b = e$ ہے، تب ہم کہتے کہ یہ قدرتی لوگارتم ہے۔ عام طور پر قدرتی لوگارتم ln سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس باب میں x لوگارتم فنکشن کو اساس e سے ظاہر کرتے ہیں۔ $\ln x$ کو سادہ طور پر $\log x$ لکھا جائے گا۔ شکل 5.10 لوگارتم فنکشن کا خاکہ اساس e, 2 اور 10 کے ساتھ دیتی ہے۔

لوگارتم فنکشن سے تعلق رکھنے والے کچھ خاص مشاہدے کسی بھی اساس $b > 1$ کے لیے نیچے فہرست کی شکل میں دیے گیے ہیں۔



شکل 5.11

(1) ہم غیر مثبت اعداد کے لوگارتمی کی بمعنی تعریف نہیں بیان کر سکتے اور اس لیے لاگ فنکشن کا علاقہ $\mathbf{R}^+$ ہے۔

(2) لاگ فنکشن کی وسعت تمام حقیقی اعداد کا سیٹ ہے۔

(3) نقطہ (1,0) ہمیشہ لاگ فنکشن کے گراف پر ہوتا ہے۔

(4) لاگ فنکشن ہمیشہ بڑھتا رہتا ہے، یعنی جیسے جیسے ہم بائیں سے دائیں کی طرف بڑھتے ہیں، گراف اوپر کی طرف بڑھتا ہے۔

(5) x کے لیے، جو صفر کے بہت قریب ہے، $\log x$ کی قدر کسی بھی دیے ہوئے حقیقی عدد سے کم کی جا سکتی ہے۔ دوسرے الفاظ میں چوتھے ربع میں گراف y– محور کی طرف بڑھتا ہے (لیکن اس سے کبھی نہیں مل پاتا ہے)

(6) شکل 5.11، $y = e^x$ کا خاکہ دیتی ہے اور $y = \ln x$ کا۔ یہ مشاہدہ کرنا ایک دلچسپی کی بات ہے کہ دو منحنی ایک دوسرے کی جو شکلیں ہیں جو کہ خط $y = x$ سے منعکس ہو رہی ہیں۔

لاگ فنکشن کی دو خصوصیات نیچے ثابت کی گئی ہیں۔

(1) $\log_a p$ کو $\log_b p$ کی شکل میں حاصل کرنے کے لیے اساس اصول میں ایک معیاری بدلاؤ ہے۔ مان لیجیے

$\log_a p = \alpha$ ، $\log_b p = \beta$ اور $\log_b a = \gamma$ ہے۔ اس کا مطلب ہے $a^\alpha = p, b^\beta = p$ اور $b^\gamma = a$

تیسری مساوات کو پہلی میں رکھنے پر، ہمارے پاس ہے۔

$$(b^\gamma)^\alpha = b^{\gamma\alpha} = p$$

اسے دوسری مساوات میں استعمال کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$b^\beta = p = b^{\gamma\alpha}$$

جس سے حاصل ہوتا ہے $\beta = \alpha\gamma$ یا $\alpha = \frac{\beta}{\gamma}$۔ لیکن تب

$$\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a}$$

(2) لاگ فنکشن کی دوسری دلچسپ خصوصیت اپنے حاصل ضرب پر اس کا اثر ہے۔ مان لیجیے $\log_b pq = \alpha$ تب

$b^\alpha = pq$ ہے۔ اگر $\log_b p = \beta$ اور $\log_b q = \gamma$ ہے، تب $b^\beta = p$ اور $b^\gamma = q$ ہے لیکن تب

$$b^\alpha = pq = b^\beta b^\gamma = b^{\beta+\gamma}$$

جس سے نکلتا ہے $\alpha = \beta + \gamma$ یعنی

$$\log_b pq = \log_b p + \log_b q$$

اس کا ایک خاص دلچسپ اور اہم اثر یہ ہے کہ جب $p = q$ ہے۔ اس کیس میں اوپر دیا ہوا اس طرح دوبارہ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\log_b p^2 = \log_b p + \log_b p = 2 \log p$$

اس کا عام کرنا (ایک مشق کے طور پر چھوڑا گیا ہے!) وہ یہ ہے۔

$$\log_b p^n = n \log_b p$$

کسی بھی مثبت صحیح عدد n کے لیے۔ حقیقت میں یہ کسی بھی حقیقی عدد n کے لیے صحیح ہے، لیکن ہم اس کو ثابت کرنے کی کوشش نہیں کریں گے۔ اسی طرح عمل کر کے پڑھنے والے کو جانچ کے لیے مدعو کیا جا رہا ہے۔

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

مثال 28 تمام حقیقی اعداد x کے لیے کیا $x = e^{\log x}$ صحیح ہے؟

حل پہلے اس بات کا مشاہدہ کیجیے کہ لاگ فنکشن کا علاقہ تمام مثبت حقیقی اعداد کا سیٹ ہے۔ اس لیے اوپر کی مساوات غیر مثبت حقیقی اعداد کے لیے درست نہیں ہے۔ اب مان لیجیے کہ $y = e^{\log x}$ ہے۔ اگر $y > 0$ ہے، ہم لوگارتمی لے سکتے ہیں جو ہمیں دیتا ہے $\log y = \log(e^{\log x}) = \log x . \log e = \log x$۔ اس طرح $y = x$ ہے۔ اس لیے $x = e^{\log x}$ صرف x کی مثبت قدروں کے لیے درست ہے۔

طبعی قوت نما فنکشن کی تفرقی احصا میں ایک با اثر خصوصیت یہ ہے کہ یہ تفرق کرنے پر نہیں بدلتا۔ اسے ذیل مسئلہ میں قید کیا گیا ہے اور جس کے ثبوت کو ہم نظر انداز کرتے ہیں۔

مسئلہ 5

(1) x کی مناسبت سے e^x کا مشتق e^x ہے، یعنی، $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

(2) x کی مناسبت سے $\log x$ کا مشتق $\frac{1}{x}$ ہے، یعنی $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$

مثال 29 x کی مناسبت سے ذیل کا تفرق دریافت کیجیے۔

(i) e^{-x} (ii) $\sin(\log x), x > 0$ (iii) $\cos^{-1}(e^x)$ (iv) $e^{\cos x}$

حل

(i) مان لیجیے $y = e^{-x}$ ہے۔ زنجیری اصول کا استعمال کرتے ہوئے، ہمارے پاس ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}(-x) = -e^{-x}$$

(ii) مان لیجیے $y = \sin(\log x)$ ہے۔ زنجیری اصول کا استعمال کرتے ہوئے ہمارے پاس ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = \cos(\log x) \cdot \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{\cos(\log x)}{x}$$

(iii) مان لیجیے $y = \cos^{-1}(e^x)$ ہے۔ زنجیری اصول کا استعمال کرتے ہوئے، ہمارے پاس ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

(iv) مان لیجیے $y = e^{\cos x}$ ہے، زنجیری اصول کا استعمال کرتے ہوئے، ہمارے پاس ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -(\sin x)\, e^{\cos x}$$

مشق 5.4

x کی مناسبت سے ذیل کا تفرق معلوم کیجیے۔

1. $\dfrac{e^x}{\sin x}$
2. $e^{\sin^{-1} x}$
3. e^{x^3}
4. $\sin(\tan^{-1} e^{-x})$
5. $\log(\cos e^x)$
6. $e^x + e^{x^2} + ... + e^{x^5}$
7. $\sqrt{e^{\sqrt{x}}},\ x > 0$
8. $\log(\log x), x > 1$
9. $\dfrac{\cos x}{\log x},\ x > 0$
10. $\cos(\log^x + e^x),\ x > 0$

5.5 لوگارتمی تفرق (Logarithmic Differentiation)

اس حصہ میں، ہم فنکشن کی کچھ خاص جماعت کا تفرق کرنا سیکھیں گے جو اس شکل میں دیے گیے ہیں۔

$$y = f(x) = [u(x)]^{v(x)}$$

اور لوگارتمی (اساس) لینے پر اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\log y = v(x) \log [u(x)]$$

زنجیری اصول کا استعمال کر کے ہم اس کا تفرق کر سکتے ہیں یہ حاصل کرنے کے لیے

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} . u'(x) + v'(x).\log[u(x)]$$

جس سے نکلتا ہے کہ

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x) + v'(x) \cdot \log[u(x)]\right]$$

اس طریقہ میں جو اصل نقطہ نوٹ کرنا ہے وہ یہ ہے کہ $f(x)$ اور $u(x)$ ہمیشہ مثبت ہونے ضروری ہیں ورنہ ان کا لوگارتم معرف نہیں ہے۔ تفرق کے اس طریقہ کو لوگارتم تفرق کہتے ہیں اور اسے ذیل مثالوں سے سمجھایا گیا ہے۔

مثال 30 $\sqrt{\dfrac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}$ کا تفرق x کو مدنظر رکھتے ہوئے کیجیے۔

حل مان لیا $y=\sqrt{\dfrac{(x-3)(x^2+4)}{(3x^2+4x+5)}}$

دونوں طرف کا لاگ لینے پر، ہمارے پاس ہے

$$\log\ y=\frac{1}{2}[\log(x-3)+\log(x^2+4)-\log(3x^2+4x+5)]$$

اب، x کی مناسبت سے دونو طرف کا تفرق کرنے پر

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x-3)}+\frac{2x}{x^2+4}-\frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

یا

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2}\left[\frac{1}{(x-3)}+\frac{2x}{x^2+4}-\frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}\left[\frac{1}{(x-3)}+\frac{2x}{x^2+4}-\frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

مثال 31 x کی مناسبت سے a^x کا تفرق معلوم کیجیے، جہاں a ایک مثبت مستقلہ ہے۔

حل مان لیجیے $y=a^x$ تب

$$\log y=x\log a$$

x کی مناسبت سے دونوں طرف کا تفرق کرنے پر، ہمارے پاس ہے

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\log a$$

یا $$\frac{dy}{dx}=y\ \log\ a$$

اس طرح $$\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\ \log\ a$$

متبادل کے طور پر $$\frac{d}{dx}(a^x)=\frac{d}{dx}(e^{x\log a})=e^{x\log a}\frac{d}{dx}(x\log a)$$

$$=e^{x\log a}.\log a=a^x\ \log\ a$$

مثال 32 x کی مناسبت سے $x^{\sin x}$ کا تفرق کیجیے $x>0$

حل مان لیجیے $y = x^{\sin x}$ دونوں طرف کالاگ لینے پر، ہمارے پاس ہے

$$\log y = \sin x \log x$$

اس لیے $$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \sin x \frac{d}{dx}(\log x) + \log x \frac{d}{dx}(\sin x)$$

یا $$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (\sin x)\frac{1}{x} + \log x \cos x$$

یا $$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right]$$

$$= x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right]$$

$$= x^{\sin x - 1} \cdot \sin x + x^{\sin x} \cdot \cos x \log x$$

مثال 33 اگر $y^x + x^y + x^x = a^b$ ہوتو، $\frac{dy}{dx}$ دریافت کیجیے۔

حل دیا ہوا ہے $y^x + x^y + x^x = a^b$

$u = y^x$، $v = x^y$ اور $w = x^x$ رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے $u + v + w = a^b$

اس لیے $$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} = 0 \qquad \ldots(1)$$

اب $u = y^x$ ہے۔ دونوں طرف کالاگ لینے پر، ہمارے پاس ہے۔

$$\log u = x \log y$$

x کی مناسبت سے دونوں طرف کا تفرق کرنے پر، ہمارے پاس ہے

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = x\frac{d}{dx}(\log y) + \log y \frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} + \log y \cdot 1$$

اس لیے $$\frac{du}{dx} = u\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right) = y^x\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right] \qquad (2)$$

ساتھ ہی $v = x^y$

دونوں طرف کا لاگ لینے پر، ہمارے پاس ہے

$\log v = y \log x$

x کو مدنظر رکھتے ہوئے دونوں طرف کا تفرق کرنے پر، ہمارے پاس ہے

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx} = y\frac{d}{dx}(\log x) + \log x\frac{dy}{dx}$$

$$= y\cdot\frac{1}{x} + \log x\cdot\frac{dy}{dx}$$

تا کہ $$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{y}{x} + \log x\frac{dy}{dx}\right]$$

$$= x^y\left[\frac{y}{x} + \log x\frac{dy}{dx}\right] \qquad (3)$$

دوبارہ $w = x^x$

دونوں طرف کا لاگ لینے پر، ہمارے پاس

$$\frac{1}{w}\cdot\frac{dw}{dx} = x\frac{d}{dx}(\log x) + \log x\cdot\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\cdot\frac{1}{x} + \log x\cdot 1$$

بھی $$\frac{dw}{dx} = w\ (1 + \log\ x)$$

$$= x^x\ (1 + \log\ x)\ \ldots \qquad (4)$$

(1)، (2)، (3)، (4) سے، ہمارے پاس ہے

$$y^x\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right) + x^y\left(\frac{y}{x} + \log x\frac{dy}{dx}\right) + x^x\ (1 + \log\ x) - 0$$

$$(x\ .\ y^{x-1} + x^y.\log\ x)\frac{dy}{dx} = -x^x(1 + \log\ x) - y.\ x^{y-1} - y^x\ \log\ y$$

اس لیے $$\frac{dy}{dx} = \frac{-[y^x\log y + y\ .\ x^{y-1} + x^x(1 + \log x)]}{x\ .\ y^{x-1} + x^y\log x}$$

مشق 5.5

مشق 1 تا 11 میں x کی مناسبت فنکشن کا تفرق کیجیے۔

1. $\cos x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos 3x$

2. $\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$

2. $(\log x)^{\cos x}$

4. $x^x - 2^{\sin x}$

5. $(x+3)^2 \,.\, (x+4)^3 \,.\, (x+5)^4$

6. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x + x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

7. $(\log x)^x + x^{\log x}$

8. $(\sin x)^x + \sin^{-1}\sqrt{x}$

9. $x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$

10. $x^{x\cos x} + \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

11. $(x\cos x)^x + (x\sin x)^{\frac{1}{x}}$

12 تا 15 دی ہوئی مشقوں میں فنکشن کا $\dfrac{dy}{dx}$ معلوم کیجیے۔

12. $x^y + y^x = 1$

13. $y^x = x^y$

14. $(\cos x)^y = (\cos y)^x$

15. $xy = e^{(x-y)}$

16۔ دیے ہوئے فنکشن $f(x) = (1+x)\,(1+x^2)\,(1+x^4)\,(1+x^8)$ کا مشتق معلوم کیجیے اور اس طرح $f'(1)$ دریافت کیجیے۔

17۔ $(x^2-5x+8)\,(x^3+7x+9)$ کا نیچے دیے گئے تین طریقوں سے تفرق معلوم کیجیے:

(i) ضربی اصول استعمال کر کے

(ii) اکیلا کثیر رکنی حاصل کرنے کے لیے حاصل ضرب کو پھیلا کر

(iii) لوگارتم تفرق استعمال کر کے۔

کیا یہ سبھی یکساں نتیجہ دیتے ہیں؟

18۔ اگر u، v، اور w، x، کے فنکشن ہیں، تب دکھائیے کہ

$$\frac{d}{dx}(u.v.w) = \frac{du}{dx}\,v.w + u.\frac{dv}{dx}.w + u.v\frac{dw}{dx}$$

دو طریقوں سے پہلے ضربی اصول کو دہرا کر، دوسرا لوگارتمی تفرق کا استعمال کر کے۔

5.6 پیرامیٹرک شکل میں تفاعل کے مشتق

کئی بار دو متغیر کے درمیان تعلق نہ تو صریح ہے اور نہ ہی مضمر، لیکن دونوں متغیر کا تیسرے متغیر کے ساتھ ربط، پہلے دونوں متغیروں کے ساتھ ایک تعلق قائم کرتا ہے۔ اس طرح کے حالات میں، ہم کہتے ہیں کہ ان دونوں کے درمیان تعلق تیسرے متغیر کو پیرامیٹر کہتے ہیں۔ زیادہ بہتر طریقے سے، دو متغیر x اور y کے درمیان رشتہ $x=f(t)$، $y=g(f)$ کی شکل میں ایک تعلق کو دکھاتے ہیں جسے پیرامیٹرک شکل کہا جاتا ہے جہاں t ایک پیرامیٹر ہے۔

اس شکل میں فنکشن کے مشتق کو معلوم کرنے کی ترتیب میں، ہم زنجیری اصول سے معلوم کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

یا $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\quad\left(\text{جبکہ } \frac{dx}{dt}\neq 0\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}\left(\frac{dy}{dt}=g'(t) \text{ اور } \frac{dx}{dt}=f'(t)\right)[\text{جبکہ } f'(t)\neq 0]$$

مثال 34 $\frac{dy}{dx}$ دریافت کیجیے، اگر $x=a\cos\theta$ اور $y=a\sin\theta$ ہو۔

حل دیا ہے

$$x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta$$

اس لیے $$\frac{dx}{d\theta}=a\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=a\cos\theta$$

اس طرح $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{a\cos\theta}{-a\sin\theta}=-\cot\theta$$

مثال 35 $\frac{dy}{dx}$ دریافت کیجیے اگر $x=at^2$ اور $y=2at$

حل دیا ہوا $x=at^2$، $y=2at$

تا کہ $\frac{dx}{dt}=2a$ اور $\frac{dy}{dt}=2a$

اس لیے $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2a}{2at}=\frac{1}{t}$$

مثال 36 $\frac{dy}{dx}$ دریافت کیجیے، اگر $x = a\ (\theta+\sin\theta)$ اور $y=a(1-\cos\theta)$ ہو

حل ہمارے پاس ہے $$\frac{dx}{d\theta}=a(1+\cos\theta),\quad \frac{dy}{d\theta}=a\ (\sin\theta)$$

اس لیے $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)}=\tan\frac{\theta}{2}$$

> **نوٹ** یہاں یہ نوٹ کر لینا چاہیے کہ $\frac{dy}{dx}$ صرف پیرامیٹر کی شکل میں سمجھایا جاتا ہے جس میں اصل متغیر x اور y غیر راست طریقہ سے شامل ہیں۔

مثال 37 $\frac{dy}{dx}$ اگر کیجیے، اگر $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ہو

حل مان لیجیے $x=a\cos^3\theta,\ y=a\sin 3\ \theta$

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=(a\cos^3\theta)^{\frac{2}{3}}+(a\sin^3\theta)^{\frac{2}{3}}$$

$$=a^{\frac{2}{3}}(\cos^2\theta+(\sin^2\theta)=a^{\frac{2}{3}}$$

اس طرح $x=a\cos^3\theta,\ y=a\sin^3\theta$ ، $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

اب $\frac{dx}{d\theta}=-3a\cos^2\theta\sin\theta$ اور $\frac{dy}{d\theta}=3a\sin^2\theta\cos\theta$

اس لیے $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta}=-\tan\theta=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

مشق 5.6

1 تا 10 مشقوں میں دی گی مساوات سے x اور y پیرامیٹری طریقے سے جڑے ہوئے ہیں، بغیر پیرامیٹر کو خارج کرتے ہوئے dy/dx دریافت کیجیے۔

1. $x = 2at^2,\ y = at^4$

2. $x = a\cos\theta,\ y = b\cos\theta$

3. $x = \sin t,\ y = \cos 2t$

4. $x = 4t,\ y = \dfrac{4}{t}$

5. $x = \cos\theta - \cos 2\theta,\ y = \sin\theta - \sin 2\theta$

6. $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1 + \cos\theta)$

7. $x = \dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}},\ y = \dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$

8. $x = a\left(\cos t + \log\tan\dfrac{t}{2}\right),\ y = a\sin t$

9. $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$

10. $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta),\ y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

11۔ اگر $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}}$ ، $y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$ ہو، تب دکھائیے کہ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$ ہے۔

5.7 دوسرے درجہ کا مشتق (Second Order Derivative)

مان لیجیے $y = f(x)$ تب

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad (1)$$

اگر $f'(x)$ تفرق پذیر ہے، ہم مساوات (1) میں x کو مدنظر رکھ کر تفرق کر سکتے ہیں۔ تب بائیں ہاتھ کا حصہ $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ بن جاتا ہے جو کہ y کا دوسری ترتیب کا مشتق بن جاتا ہے x کو مدنظر رکھتے ہوئے اور $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ $f(x)$ کا دوسرے درجہ کا مشتق $f''(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسے D^2y سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے یا y'' یا y_2 سے اگر $y = f(x)$ ہو۔ ہم اس کا ریمارک دیتے ہیں کہ اونچی ترتیب والے مشتق بھی اسی طرح سے بیان کیے جاتے ہیں۔

مثال 38 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ دریافت کیجیے، اگر $y = x^3 + \tan x$ ہو

حل دیا ہوا ہے $y = x^3 + \tan x$، تب

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + \sec^2 x$$

اس لیے۔ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(3x^2 + \sec^2 x)$

$$= 6x + 2\sec x . \sec x \tan x = 6x + 2\sec^2 x \tan x$$

مثال 39 اگر $y = \text{A} \sin x + \text{B} \cos x$ ہو، تب ثابت کیجیے کہ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ ہے

حل ہمارے پاس ہے

$$\frac{dy}{dx} = \text{A} \cos x - \text{B} \sin x$$

اس لیے $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\text{A} \cos x - \text{B} \sin x)$

$$= -\text{A} \sin x - \text{B} \cos x = -y$$

اس لیے $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

مثال 40 اگر $y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$ ہے، ثابت کیجیے کہ $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

حل دیا گیا ہے $y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$ تب

$$\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} + 6e^{3x} = 6(e^{2x} + e^{3x})$$

اس لیے $\frac{d^2y}{dx^2} = 12e^{2x} + 18e^{3x} = 6(2e^{2x} + 3e^{3x})$

اس طرح $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 6(2e^{2x} + 3e^{3x})$

$$-30(e^{2x} + e^{3x}) + 6(3e^{2x} + 2e^{3x}) = 0$$

مثال 41 اگر $y = \sin^{-1} x$ دکھائیے کہ $(1-x2)\ \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$

حل ہمارے پاس ہے $y = \sin^{-1} x$ تب

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

یا
$$\sqrt{(1-x^2)}\,\frac{dy}{dx} = 1$$

تاکہ
$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(1-x^2)}\,.\,\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

یا
$$\sqrt{(1-x^2)}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(1-x^2)}\right) = 0$$

یا
$$\sqrt{(1-x^2)}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 0$$

اس طرح
$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$$

متبادل کے طور پر دیا ہوا ہے $y = \sin^{-1} x$ ہمارے پاس ہے

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ یعنی } (1-x^2)\,y_1^2 = 1$$

تاکہ $(1-x^2)\,.\,2y_1y_2 + y_1^2(0-2x) = 0$

اس لیے $(1-x^2)\,y_2 - xy_1 = 0$

مشق 5.7

1 تا 10 تک مشقوں میں دئے ہوئے فنکشن کے دوسری ترتیب والے مشتق دریافت کیجیے

1. $x^2 + 3x + 2$ **2.** x^{20} **3.** $x.\cos x$

4. $\log x$ **5.** $x^3 \log x$ **6.** $e^x \sin 5x$

7. $e^{6x} \cos 3x$ **8.** $\tan^{-1} x$ **9.** $\log(\log x)$

10. $\sin(\log x)$

11۔ اگر $y = 5\cos x - 3\sin x$ ہو، تو ثابت کیجیے کہ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ ہے

12۔ $y = \cos^{-1} x$ ہے، $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ، اکیلے y کے ارکان میں دریافت کیجیے۔

13۔ اگر $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$ ہے، دکھائیے کہ $x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$ ہے۔

14۔ اگر $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$ ہے، دکھائیے کہ $\dfrac{d^2y}{dx^2} - (m+n)\dfrac{dy}{dx} + mny = 0$ ہے۔

15۔ اگر $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$ ہے، دکھائیے کہ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 49y$ ہے

16۔ اگر $e^y(x+1) = 1$ ہو، تو دکھائیے کہ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ ہے

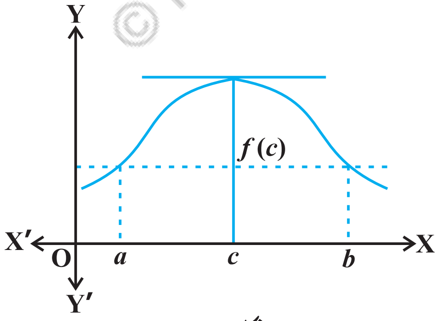
17۔ اگر $y = (\tan^{-1} x)^2$ ہو تو دکھائیے کہ $(x^2+1)^2 y_2 + 2x(x^2+1) y_1 = 2$ ہے

5.8 درمیانہ قدر والا مسئلہ Mean Value Theorem

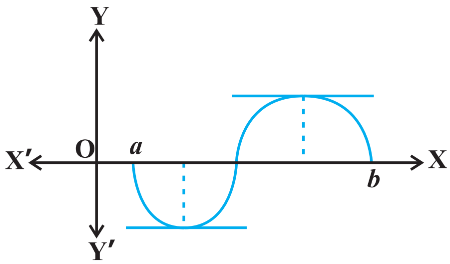
اس حصہ میں ہم احصا (Calculus) میں دو بنیادی نتائج بغیر ثبوت کے بیان کریں گے۔ ہم ان مسئلوں کی جیومیٹریائی ترجمانی کریں گے۔

مسئلہ 6 رولس مسئلہ (Roll's Theorem): مان لیجیے $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ، $[a, b]$ پر مسلسل ہے اور (a,b) پر تفرق پذیر ہے، تا کہ $f(a) = f(b)$ جہاں a اور b کچھ حقیقی اعداد ہیں۔ تب (a,b) میں کوئی حقیقی عدد c ایسا موجود ہے تا کہ $f'(c) = 0$

اشکال 5.12 اور 5.13 میں کچھ مخصوص تفرق پذیر فنکشنوں کے گراف دیئے ہوئے ہیں جو رولس مسئلہ کی سوچ کو مطمئن کرتے ہیں۔



شکل 5.13



شکل 5.12

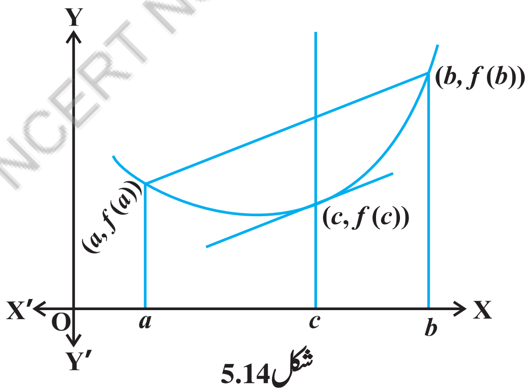
اس بات کا مشاہدہ کیجیے کہ منحنی پر a اور b کے درمیان مختلف نقاط پر مماس کے سلوپ کو کیا ہوا۔ ہر ایک گراف میں کم سے کم

ایک نقطے پر سلوپ صفر ہو جاتا ہے۔ یہ رولس مسئلہ کا ایک اہم دعوہ ہے کیونکہ مماس کا سلوپ $y = f(x)$ کے گراف کے کسی بھی نقطہ پر کچھ نہیں ہے بجائے اس کے کہ یہ اس نقطہ پر $f(x)$ کا مشتق ہے۔

مسئلہ 7 درمیانہ قدر والا مسئلہ (Mean Value Theorem) مان لیجیے $f : [a, b] \to \mathbf{R}$، $[a,b]$ پر ایک مسلسل فنکشن ہے اور (a,b) پر تفرق پذیر ہے۔ تب (a,b) میں کوئی حقیقی عدد c ایسا موجود ہوتا ہے کہ

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

یہ مشاہدہ کیجیے کہ درمیان قدر مسئلہ (MVT) رولس مسئلہ کی ایک توضیح ہے۔ اب ہمیں MTV کو جیومیٹریائی ترجمہ سمجھنا چاہیئے۔ فنکشن $y = f(x)$ کا گراف شکل 5.14 میں دیا گیا ہے۔ ہم پہلے ہی $f'(c)$ کا ترجمہ منحنی $y = f(x)$ کا $(c, f(c))$ پر مماس کے سلوپ کا کر چکے ہیں۔ شکل 5.14 سے یہ صاف ہے کہ $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$، $(a, f(a))$ اور $(b, f(b))$ کے درمیان کھینچا گیا خط قاطع کا سلوپ ہے MVT یہ بیان کرتی ہے کہ (a,b) میں ایک نقطہ C موجود ہے کہ مماس کا سلوپ $(c, f(c))$ پر وہی ہے جو خط قاطع کا $(a, f(a))$ اور $(b, f(b))$ کے درمیان ہے۔ دوسرے الفاظ میں (a,b) میں c ایک ایسا نقطہ ہے کہ $(c, f(c))$ پر مماس $(a, f(a))$ اور $(b, f(b))$ کے درمیان خط قاطع کے متوازی ہے۔



شکل 5.14

مثال 42 فنکشن $y = x^2 + 2, a = -2$ اور $b=2$ کے لیے رولس مسئلہ کی تصدیق کیجیے۔

حل فنکشن $y = x^2 + 2$، $[-2, 2]$ میں مسلسل ہے اور $(-2, 2)$ میں تفرق پذیر ہے۔ ساتھ ہی $f(-2) = f(2) = 6$ اور اس لیے $f(x)$ کی قدر (-2) اور (2) پر آپس میں ملتی ہے۔ رولس مسئلہ بیان کرتا ہے کہ c ایک نقطہ جو $c \in (-2, 2)$، جہاں $f'(c) =$

0 کیونکہ $f'(x)=2x$ ہے، ہمیں c=0 حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح c=0 پر ہمارے پاس ہے $f'(c) = 0$ اور $c = 0 \in (-2, 2)$

مثال 43 فنکشن $f(x) = x^2$ کی وقفہ [2, 4] میں درمیانہ قدر مسئلہ کی تصدیق کیجیے۔

حل فنکشن $f(x) = x^2$، [2, 4] میں مسلسل ہے اور (2,4) میں تفرق پذیر ہے کیونکہ اس کا مشتق $f'(x)=2x$ (2,4) میں معرف ہے۔

اب $f(2) = 4$ اور $f(4) = 16$ ہے۔ اس طرح

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{16-4}{4-2} = 6$$

MVT یہ بیان کرتا ہے کہ ایک نقطہ $c \in (2, 4)$ تا کہ $f'(c)=6$ ہے۔ لیکن $f'(x) = 2x$ ہے جس کا مطلب ہے $c = 3$۔

اس طرح $c = 3$ (2, 4)، ہمارے پاس ہے $f'(c)=6$۔

مشق 5.8

1۔ فنکشن $f(x) = x^2 + 2x - 8,\ x \in [-4, 2]$ کے لیے رولس مسئلہ کی تصدیق کیجیے۔

2۔ یہ تصدیق کیجیے کہ کیا رولس مسئلہ ذیل میں سے کسی بھی فنکشن پر استعمال کیا جاسکتا ہے۔

(i) $f(x) = [x]$ کے لیے (ii) $f(x) = [x]$ کے لیے $x \in [-2, 2]$

(iii) $f(x) = x^2 - 1$ کے لیے، $x \in [1, 2]$

3۔ اگر $f: [-5,5] \to \mathbf{R}$ ایک تفرق پذیر فنکشن ہے اور اگر $f'(x)$ کہیں بھی ختم نہیں ہوتا، تو ثابت کیجیے $f(-5) \neq f(5)$

4۔ درمیانی قدر مسئلہ کی تصدیق کیجیے، اگر $f(x) = x^2 - 4x - 3$، وقفہ $[a,b]$ میں موجود ہے جہاں $a=1$ اور $b=4$ ہے۔

5۔ درمیانی قدر مسئلہ کی تصدیق کیجیے، اگر $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ وقفہ $[a,b]$ میں موجود ہے جہاں $a=1$ اور $b=3$ ہے تمام c معلوم کیجیے جہاں $c \in (1, 3)$ اور جس کے لیے $f'(c) = 0$ ہے۔

6۔ درمیانی قدر مسئلہ کی اوپر مشق 2 میں دیئے گئے فنکشن کے لیے استعمال کی جانچ کیجیے۔

متفرق مثالیں

مثال 44 ذیل فنکشنوں کا x کی مناسبت سے تفرق کیجیے۔

(i) $\sqrt{3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+4}}$ (ii) $e^{\sec^2 x}+3\cos^{-1} x$ (iii) $\log_7 (\log x)$

حل مان لیجیے

(i) Let $y=\sqrt{3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+4}} = (3x+2)^{\frac{1}{2}}+(2x^2+4)^{-\frac{1}{2}}$

یہ نوٹ کر لیجیے کہ یہ فنکشن تمام حقیقی اعداد $x>-\dfrac{2}{3}$ پر بیان کیا گیا ہے۔اس لیے

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(3x+2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{d}{dx}(3x+2)+\left(-\frac{1}{2}\right)(2x^2+4)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{d}{dx}(2x^2+4)$$

$$=\frac{1}{2}(3x+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(3)-\left(\frac{1}{2}\right)(2x^2+4)^{-\frac{3}{2}}\cdot 4x$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}-\frac{2x}{(2x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$$

یہ تمام حقیقی اعداد $x>-\dfrac{2}{3}$ کے لیے بیان کیا گیا ہے۔

(ii) مان لیجیے $y=e^{\sec^2 x}+3\cos^{-1}x$

یہ ہر ایک حقیقی عدد $[-1,1]-\{0\}$ پر بیان کیا گیا ہے۔اس لیے

$$\frac{dy}{dx}=e^{\sec^2 x}\cdot\frac{d}{dx}(\sec^2 x)+3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$=e^{\sec^2 x}\cdot\left(2\sec x\frac{d}{dx}(\sec x)\right)+3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$=2\sec x(\sec x\tan x)\,e^{\sec^2 x}+3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$=2\sec^2 x\tan x\,e^{\sec^2 x}+3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

یہ مشاہدہ کیجیے کہ دیئے ہوئے فنکشن کا مشتق ضرب $(-1,1)$ میں ہی صحیح ہے کیونکہ $\cos^{-1} x$ کا مشتق صرف $(-1,1)$ میں موجود ہے۔

(iii) مان لیجیے

$$y = \log_7 (\log x) = \frac{\log (\log x)}{\log 7}$$ (اساس کا فارمولہ بدلنے پر)

فنکشن تمام حقیقی اعداد $x > 1$ پر بیان کیا گیا ہے۔ اس لیے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log 7} \frac{d}{dx}(\log (\log x))$$

$$= \frac{1}{\log 7} \frac{1}{\log x} \cdot \frac{d}{dx}(\log x)$$

$$= \frac{1}{x \log 7 \log x}$$

مثال 45 x کی مناسبت سے ذیل کا تفرق کیجیے۔

(i) $\cos^{-1} (\sin x)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ (iii) $\sin^{-1}\left(\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$

حل (i) مان لیجیے $f(x) = \cos^{-1} (\sin x)$ ہے۔ یہ مشاہدہ کیجیے کہ یہ فنکشن تمام حقیقی اعداد کے لیے بیان کیا گیا ہے۔ ہم اس فنکشن کو دوبارہ اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$f(x) = \cos^{-1}(\sin x)$$

$$= \cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - x$$

اس طرح $f'(x) = -1.$

(ii) مان لیجیے $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ ہے۔ یہ مشاہدہ کیجیے کہ یہ فنکشن تمام حقیقی اعداد کے لیے بیان کیا گیا ہے، جہاں $x \neq -1$؛ یعنی۔ π کا تمام ناطق ضریب پر ہم اس فنکشن کو دوبارہ اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{x}{2}$$

اس کا مشاہدہ کیجیے کہ ہم شمار کنندہ اور نسب نما دونوں میں $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ کو کاٹ سکتے ہیں۔

ہمیں تمام x معلوم کرنے کی ضرورت ہے تا کہ $\frac{2^{x+1}}{1+4^x} \le 1$، یعنی، تمام x تا کہ $2^{x+1} \le 1 + 4^x$ ۔ہم اسے دوبارہ اس طرح لکھ سکتے ہیں۔ $2 \le \frac{1}{2^x} + 2x$ ۔ جو تمام x کے لیے درست ہے۔اس لیے فنکشن پر ایک حقیقی عدد پر معرف ہے۔

$2x = \tan\theta$ رکھنے پر، اس فنکشن کو دوبارہ اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(x) = \sin^{-1}\left[\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{2^x \cdot 2}{1+\left(2^x\right)^2}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right]$$

$$= \sin^{-1}\ [\sin\ 2\theta]$$

$$= 2\theta = 2\ \tan^{-1}(2x)$$

اس طرح $f'(x) = 2\cdot\frac{1}{1+\left(2^x\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}(2^x)$

$$= \frac{2}{1+4^x}\cdot(2^x)\log 2$$

$$= \frac{2^{x+1}\log 2}{1+4^x}$$

مثال 46 $f'(x)$ دریافت کیجیے اگر $f(x) = (\sin\ x)^{\sin x}$ ہے تمام $< x < \pi$ کے لیے

حل فنکشن $x = (\sin\ x)^{\sin x}$ تمام مثبت صحیح اعداد کے لیے بیان کیا گیا ہے۔دونوں طرف کا لاگ لینے پر ہمارے پاس ہے۔

$$\log y = \log(\sin x)^{\sin x} = \sin x \log(\sin x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \log(\sin x))$$

$$= \cos x \log(\sin x) + \sin x \,.$$

$$= \cos x \log(\sin x) + \cos x$$

$$= (1 + \log(\sin x))\cos x$$

اس طرح
$$\frac{dy}{dx} = y((1+\log(\sin x))\cos x) = (1+\log(\sin x))(\sin x)^{\sin x}\cos x$$

مثال 47 مثبت مستقل a کے لیے $\frac{dy}{dx}$ دریافت کیجیے، جہاں

$$y = a^{t+\frac{1}{t}} \text{ اور } x = \left(t+\frac{1}{t}\right)^a$$

حل مشاہدہ کیجیے کہ دونوں y اور x تمام حقیقی $t \neq 0$ کے لیے بیان کئے گیے ہیں صاف طور پر

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a^{t+\frac{1}{t}}\right) = a^{t+\frac{1}{t}}\frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right)\cdot\log a$$

$$= a^{t+\frac{1}{t}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\log a$$

اسی طرح
$$\frac{dx}{dt} = a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1}\cdot\frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

$$= a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1}\cdot\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$$

$\frac{dx}{dt} \neq 0$ اگر صرف $t \neq \pm 1$ کے اس لیے $t \neq \pm 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a^{t+\frac{1}{t}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\log a}{a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1}\cdot\left(1-\frac{1}{t^2}\right)}$$

$$= \frac{a^{t+\frac{1}{t}}\log a}{a\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1}}$$

مثال 48

Missing Translation

$$\frac{du}{dv}=\frac{2\sin x\cos x}{-\sin x\, e^{\cos x}}=-\frac{2\cos x}{e^{\cos x}}$$

باب 5 پر مبنی متفرق مشق

مشق 1 تا 11 تک کا x کی مناسبت سے تفرق کیجیے۔

1. $(3x^2-9x+5)^9$
2. $\sin^3 x+\cos^6 x$
3. $(5x)^{3\cos 2x}$
4. $\sin^{-1}(x\sqrt{x}),\ 0\le x\le 1$
5. $\dfrac{\cos^{-1}\frac{x}{2}}{\sqrt{2x+7}},\ -2<x<2$
6. $\cot^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right],,\ 0<x<$
7. $(\log x)^{\log x},\ x>1$

8۔ $\cos(a\cos x+b\sin x)$، کچھ مستقلہ a اور b کے لیے

9. $(\sin x-\cos x)^{(\sin x-\cos x)},\ \dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3\pi}{4}$

10۔ $x^x+x^a+a^x+a^a$، کچھ مستقل $a>0$ اور $x>0$ کے لیے

11۔ $x^{x^2-3}+(x-3)^{x^2}$ کے لیے $x>3$

12۔ $\dfrac{dy}{dx}$ دریافت کیجیے، اگر $y=12(1-\cos t),\ x=10(t-\sin t),\ -\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$ کے لیے

13۔ $\dfrac{dy}{dx}$ دریافت کیجیے، اگر $y=\sin^{-1}x+\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ ، $-1\le x\le 1$

14۔ اگر $x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}=0$ ہے، $-1<x<1$ کے لیے، تو ثابت کیجیے کہ $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$

15۔ $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ ، $c>0$

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

16۔ اگر $\cos y = x \cos (a+y)$، جس میں $\cos a \neq \pm 1$، ثابت کیجیے $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$

17۔ اگر $x = a(\cos t + t \sin t)$ اور $y = a(\sin t - t\cos t)$، تو $\frac{d^2y}{dx^2}$ دریافت کیجیے۔

18۔ اگر $f(x) = |x|^3$ ہے، دکھائیے کہ $f''(x)$ موجود ہے تمام حقیقی اعداد x کے لیے، اور اسے دریافت کیجیے۔

19۔ ریاضی کے امالا کا اصول استعمال کر کے ثابت کیجیے کہ تمام مثبت صحیح اعداد n کے لیے $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

20۔ اس حقیقت کا استعمال کر کے $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ اور تفرق ہے، cosines کے لیے مجموعہ کا فارمولہ دریافت کیجیے۔

21۔ کیا ایسا فنکشن موجود ہے جو ہر جگہ مسلسل ہے لیکن صرف دو نقاط پر تفرق پذیر نہیں ہے؟ اپنے جواب کی وضاحت کیجیے۔

22۔ اگر $y = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$ ہو، تو ثابت کیجیے کہ $\frac{dy}{dx} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$

23۔ اگر $y = e^{a\cos^{-1}x}$، $-1 \le x \le 1$ کے لیے تو دکھائیے کہ $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$ ہے۔

خلاصہ Summary

- ایک حقیقی قدر والا فنکشن اپنے علاقہ میں ایک نقطہ پر مسلسل ہے اگر اس فنکشن کی انتہا اسی نقطہ پر فنکشن کی اسی نقطہ پر قدر کے برابر ہے۔ ایک فنکشن اس وقت مسلسل ہوگا اگر یہ مکمل علاقہ میں مسلسل ہے۔
- مسلسل فنکشن کے مجموعہ فرق، حاصل ضرب اور خارج قسمت مسلسل ہوتے ہیں۔ یعنی اگر f اور g مسلسل فنکشن ہے۔

  $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ is continuous. مسلسل

  $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ is continuous. مسلسل

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (wherever $g(x) \neq 0$) is continuous. جہاں $g(x) \neq 0$ مسلسل ہے

- زنجیری اصول وہ اصول ہے جو غیر مفرد فنکشن کا تفرق کرتا ہے۔ اگر $f = v \circ u,\ t = u(x)$ اور اگر دونوں $\frac{dt}{dx}$ اور $\frac{dv}{dt}$ موجود ہیں تب

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

- ذیل میں کچھ معیاری مشتق دیئے گئے ہیں (اپنے صحیح علاقوں میں)

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

- $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ کی شکل کے فنکشن کا تفرق کرنے کے لیے لوگارتم تفرق ایک طاقت ور طریقہ ہے۔ یہاں دونوں $f(x)$ اور $u(x)$ کو اس طریقہ کو باشعور بنانے کے لیے مثبت ہونا ضروری ہے۔

- **رولس مسئلہ:** اگر $f:[a, b] \to \mathbf{R}$، $[a, b]$ پر مسلسل ہے اور (a, b) پر تفرق پذیر ہے اس طرح $f(a) = f(b)$، تب ایک c عدد (a, b) میں ہوتا ہے جس کے لیے $f'(c) = 0$

- **درمیانی قدر مسئلہ:** اگر $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ایک مسلسل ہے $[a, b]$ پر اور (a, b) پر تفرق پذیر ہے۔ تب ایک c (a,b) میں موجود ہے، جس کے لیے

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$