2 ضمیمہ

# ریاضیاتی ماڈلنگ
# (MATHEMATICAL MODELLING)

## A.2.1 تعارف

گیارہویں جماعت میں ہم نے ریاضیاتی ماڈلنگ کے بارے میں پڑھا ہے، جو کہ حقیقی زندگی کے کچھ مسئلوں (یا شکلوں) کا مطالعہ کرنے کی ایک کوشش تھی ریاضیاتی ارکان میں، یعنی، ایک طبعی حالات کو ریاضی میں بدلنے کی کچھ مناسب شرطوں کا استعمال کرکے۔ موٹے طور پر ریاضیاتی ماڈلنگ ایک طریقہ ہے جس میں ہم ماڈل بناتے ہیں جس میں ہم اپنی پسند کے غیر معمولی کاموں کو مختلف طریقوں سے الفاظ کا استعمال کرکے جیسے ڈرائنگ یا تصویر بنانا، کمپیوٹر پروگرام ریاضیاتی فارمولوں وغیرہ۔

پچھلی جماعتوں میں ہم نے ، یہ مشاہدہ کیا ہے کہ بہت سے مسئلوں کے حل، جن میں بہت سے ریاضیاتی تصوروں کا استعمال شامل ہے میں ریاضیاتی ماڈلنگ ایک یا دوسرے طریقے ملوث ہے۔

اس سبق میں ہم، ماترس احفاء خطی پروگرامنگ کے طریقوں کے نتائج کا استعمال کرکے ریاضیاتی ماڈلنگ کا مطالعہ آگے کی کچھ حقیقی زندگی کے مسئلوں کے بارے میں کریں گے۔

## A.2.2 ریاضیاتی ماڈلنگ کیوں؟

طلباء حساب، الجبرا، ٹرگنومیٹری اور خطی پروگرامنگ وغیرہ کے عبارتی مسئلوں کے حل سے بخوبی واقف ہیں۔ کئی بار ہم حالاتی مسئلوں کا حل بغیر طبعی گہرائی میں جائے بغیر مسئلوں کو حل کرتے ہیں۔ وضعی مسئلوں کو طبعی گہرائی کی ضرورت ہوتی ہے جو کہ طبعی خانوں اور کچھ علامتوں کے متعارف کرانے اور ریاضیاتی نتائج کو عملی قدروں کے ساتھ موازنہ کرانے سے حاصل ہوتا ہے۔ بہت سے مسئلے جو ہمیں درپیش حل کرنے کے لیے ہمیں ایک طریقہ کی ضرورت ہے جسے ہم ریاضیاتی ماڈلنگ کہتے ہیں۔ ہم ذیل مسئلوں پر غور کرتے ہیں۔

(i) ایک دریا کی چوڑائی معلوم کرنے کے لیے (خاص طور پر، جب دریا کو پار کرنا مشکل ہو)۔

(ii) شاٹ پٹ یا گولا پھینکنے کے کیس میں زیادہ سے زیادہ (optimal) زاویہ معلوم کرنا: پھینکنے والے کی اونچائی، ہوا کی وجہ سے لگائی گئی طاقت، زمین کی قوت کشش سے پیدا ہوا اسراع وغیرہ وغیرہ۔

(iii) ایک مینار کی اونچائی معلوم کرنا (خاص طور پر، جب مینار کی چھت پر پہنچنا ناممکن ہو۔

(iv) سورج کی سطح پر درجۂ حرارت معلوم کرنا۔

(v) دل کے مریضوں کے لیے لفٹ کا استعمال کرنا کیوں ممنوع ہے۔

(vi) زمین کا وزن معلوم کرنا۔

(vii) ہندوستان میں کھڑی فصلوں سے دالوں کی پیداوار کا تخمینہ لگانا۔

(viii) ایک انسان کے جسم کے اندر خون کا حجم معلوم کرنا (ایک انسان کا مکمل خون نکالنے کی اجازت نہیں ہے)۔

(ix) سال 2020 میں ہندوستان کی آمدنی کا تخمینہ لگانا (ایک انسان کو اس وقت تک انتظار کرنے کی ضرورت نہیں ہے)

یہ تمام مسئلہ حل کیے جا سکتے ہیں اور حقیقت میں ریاضی کی مدد سے ریاضیاتی ماڈلنگ کا استعمال کر کے حل کیے جا چکے ہیں۔ حقیقت میں آپ نے موجودہ کتاب میں خود ان میں سے کچھ مسئلوں کو حل کرنے کے بارے میں پڑھا ہوگا حالانکہ، یہ کیا اچھا ہوگا کہ آپ ریاضی کی طاقت سے لطف اندوز ہوں گے اور ریاضیاتی ماڈلنگ کی ضرورت کو محسوس کریں گے۔

## A.2.3 ریاضی ماڈلنگ کے اصول

ریاضیاتی ماڈلنگ ایک اصولی کام ہے اور اس لیے اس کے پیچھے کچھ اصول ہیں۔ یہ اصول زیادہ تر حقیقت سے قریب ہیں۔ ریاضیاتی ماڈلنگ کے کچھ بنیادی اصولوں کی فہرست کے طور پر نیچے دی گئی ہے۔

(i) ماڈل کو پہچاننے کی ضرورت (جس کے لیے ہم دیکھ رہے ہیں)

(ii) ماڈل میں جن پیرامیٹرس/متغیروں کی ضرورت ہے ان کی فہرست بنانا۔

(iii) موجود ملتے جلتے اعداد و شمار کی پہچان کرنا (کیا دیا ہوا ہے؟)

(iv) ان حالات کی پہچان کرنا جو عمل میں لائے جا سکیں (تصورات) اثر کرنے والے طبعی اصولوں کی پہچان کرنا۔

(v) اثر انداز ہونے والے طبعی اصولوں کی پہچان کرنا۔

(vi) پہچان کرنا۔

(a) اس مساوات کی جو استعمال ہونی ہے۔

(b) وہ تحسیب جو کی جائیگی۔

(c) حل جن کو ماننا ہوگا۔

(vii) ان ٹیسٹ کی پہچان کرنا جو یہ جانچ کریں

(a) ماڈل کی ہم آہنگی

(b) ماڈل کی افادیت

(viii) ان پیرامیٹر قدروں کی پہچان کرنا جو ماڈل کو بہتر بنا سکیں۔

ریاضیاتی ماڈلنگ کے اوپر دیئے ہوئے اصول ذیل کی طرف لے جاتے ہیں: ریاضیاتی ماڈلنگ کے اقدامات۔

**قدم 1:** طبعی صورت کی پہچان کرنا۔

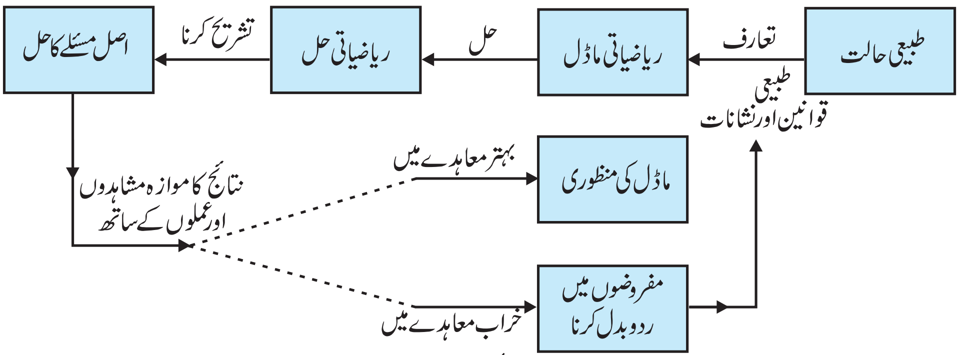
**قدم 2:** طبعی حالات کو پیرامیٹرس / متغیروں سے متعارف کرا کے ریاضیاتی ماڈل میں بدلنا اور بہت سے جانے پہچانے قوانین اور علامتوں کا استعمال کرنا۔

**قدم 3:** ریاضیاتی مسئلوں کا حل معلوم کرنا۔

**قدم 4:** اصل مسئلوں کے نتائج کی ترجمانی کرنا اور نتائج کا موازنہ مشاہدوں اور عملوں کے ساتھ کرنا۔

**قدم 5:** اگر نتیجہ اچھی مطابقت میں ہے، تب ماڈل کو منظور کرنا۔ ورنہ مفروضہ / مانے ہوئے کو طبعی حالت کے حساب سے ردو بدل کرنا اور پھر قدم 2 کے حساب سے آگے بڑھنا۔

اوپر دیئے اقدامات ذیل میں دی گئی تصویر کے حساب سے دیکھے جا سکتے ہیں۔

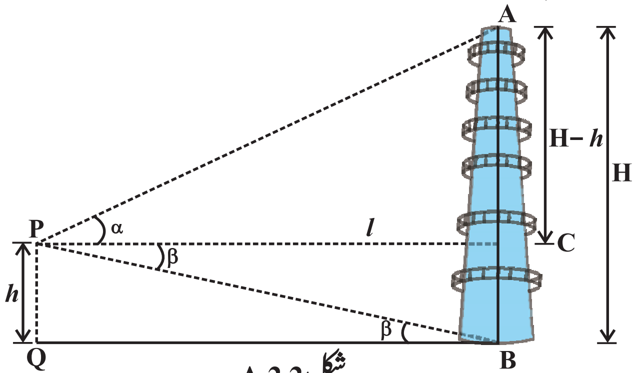



شکل A2.1

**مثال 1** ریاضیاتی ماڈلنگ کا استعمال کر کے ایک دی ہوئی مینار کی اونچائی معلوم کیجیے۔

**حل قدم 1** دی ہوئی طبعی حالت ہے ''دی ہوئی مینار کی اونچائی معلوم کرنا۔''

**قدم 2** مان لیجیے AB ایک دی ہوئی مینار ہے (شکل A.2.2) مان لیجیے PQ ایک دیکھنے والا ہے جو مینار کی اونچائی معلوم کر رہا ہے جس کی آنکھ P پر ہے۔ مان لیجیے $PQ=h$ اور مینار کی اونچائی H ہے۔ مان لیجیے α ایک زاویہ ہے جو کہ دیکھنے والے کی آنکھ مینار کی کسی چھت کے ساتھ بنا رہی ہے۔




شکل A.2.2

مان لیجیے $l = PC = QB$

اب $\tan\alpha = \dfrac{AC}{PC} = \dfrac{H-h}{l}$

$$H = h + l\tan\alpha \quad ...(1)$$

**قدم3:** نوٹ کر لیجیے کہ پیرامیٹرس $l, h$ اور $a$ کی قدریں (sextant کا استعمال کرنے پر) دیکھنے والے کو معلوم ہیں اس طرح (1) مسئلہ کا حل دیتی ہے۔

**قدم4:** اس حال میں جب کہ اگر مینار کے پایہ تک پہنچنا ممکن نہیں ہے، یعنی، جب کہ دیکھنے والے کو $l$ نہیں معلوم مان لیجیے، جھکاؤ کا زاویہ β ہے نقطہ P سے مینار کے پایہ B تک۔ اس طرح DPQB سے ہمارے پاس ہے۔

**قدم5:** کی اس صورت حال میں ضرورت نہیں ہے کیونکہ پیرامیٹرس $a, l, h$ اور B کی ایک دم صحیح قدریں معلوم ہیں۔

**مثال 2** مان لیجیے ایک کاروباری فرم تین طرح کی اشیاء $P_1, P_2$ اور $P_3$ تیار کرتی ہے جو تین طرح کے خام مال $R_1$ ، $R_2$

اور $R_3$ کا استعمال کرتی ہے۔ مان لیجیے فرم کے پاس دو گراہکوں $F_1$ اور $F_2$ سے خریداری کے آرڈر ہیں۔ ان حالات کو مدنظر رکھتے ہوئے کہ فرم کے پاس بالترتیب اشیاء $R_1$ ، $R_2$ اور $R_3$ کی انتہائی مقدار موجود ہے، ایک ماڈل تیار کیجیے جو یہ معلوم کر سکے کہ خام مال $R_1$ ، $R_2$ اور $R_3$ کی مقدار معلوم کر سکے جو خریدار کے آرڈر کے مطابق ہو۔

**حل قدم 1** مسئلہ میں طبعی صورتِ حال کو بخوبی پہچانا گیا ہے۔

**قدم 2** مان لیجیے خریداری کے آرڈر کو دو گراہک $F_1$ اور $F_2$ کو ماترس A سے ظاہر کیا گیا ہے۔ تب A اس شکل کا ہے۔

$$A = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{array}$$

مان لیجیے B ایک ماترس ہے جو خام مال کی مقدار $R_1$ ، $R_2$ اور $R_3$ سے ظاہر کرتی ہے، جو اشیاء کے ہر اکائی $P_1$ ، $P_2$ اور $P_3$ کو بنانے میں درکار ہے۔ تب، B اس شکل کی ہے۔

$$B = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{array}$$

قدم 3 نوٹ کر لیجیے ماترس A اور B کا حاصل ضرب (جو کہ اس کیس میں بخوبی بیان کیا گیا ہے) ذیل ماترس سے دیا گیا ہے۔

$$AB = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{array}$$

جو کہ حقیقت میں خام مال کی مطلوبہ مقدار $R_1$ ، $R_2$ اور $R_3$ کو دیتا ہے جو کہ خریدار $F_1$ اور $F_2$ خریداری آرڈر پورے کرنے کے لیے ہے۔

**مثال 3** مثال 2 میں جو ماڈل دیا گیا ہے اس کی ترجمانی کیجیے۔ جب کہ

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

اورموجودخام مال کے 330یونٹ ہیں، $R_1$ کے،445یونٹ میں $R_2$ کےاور140یونٹ ہیں $R_3$ کے

**حل** نوٹ کریجیے کہ

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} R_1 & R_2 & R_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 165 & 247 & 87 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix} \end{array}$$

$F_1$ اور $F_2$ کےخریداری کے آرڈرمکمل کرنے کے لیے یہ صاف طور پر دکھا تا ہے کہ، $R_1$ کے لیے مطلوبہ خام مال کی مقدار 335یونٹ ہے، $R_2$ کے لیے 467یونٹ ہےاور $R_3$ کے لیے 147یونٹ ہے جوکہ موجود خام مال سے کہیں زیادہ ہے۔کیونکہ تینوں اشیاء کے ہر یونٹ کو بنانے کے لیے خام مال کی مقدار مستقل ہے،موجودخام مال کی مقدار بڑھانے کا مطالبہ کرسکتے ہیں۔یاہم خریدار سے آرڈر کی تعداد کم کرنے کی سفارش کرسکتے ہیں۔

**ریمارک** اگرہم مثال 3میں A کو $A_1$ سے بدل دیں جوکہ دیا گیا ہے۔

اگر $$A_1 = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

یعنی اگرخریداراپناخریداری کا آرڈرکم کرنے کے لیے تیار ہوگیا ہے،تب

$$A_1B = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 141 & 216 & 78 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix}$$

اس میں $R_1$ کے 311یونٹ، $R_2$ کے 436یونٹ $R_3$ یونٹ درکار ہیں جوکہ موجودخام مال کی مقدار،یعنی، $R_1$ کے 330یونٹ، $R_2$ کے 445یونٹ اور $R_3$ کے 140یونٹ سے کہیں کم ہے۔اس طرح،خریدار کے بدلے ہوئے خریداری کے آرڈر $A_1$ سے دیئے گئے ہیں،تب فرم آسانی سے دوخریداروں کے لیے خریداری کے آرڈرآرام سے دے سکتی ہے۔

**نوٹ** کوئی بھی A میں مزید ترمیم کرسکتا ہے تاکہ موجودخام مال کا پورااستعمال ہوسکے

**سوالیہ نشان** کیا دیئے ہوئے B سے ایک ماڈل بنا سکتے ہیں،جس میں موجودخام مال کی مقدار مستقل ہے جوکہ فرم کے مالک

کی مدد کر سکے تا کہ وہ خریدار سے کہہ سکے کہ وہ اپنے آرڈر میں اس طرح ترمیم کریں کہ فرم اپنے موجودہ خام مال کا بھرپور استعمال کر سکے۔

اس سوال کا جواب دینے کے لیے ذیل مثال دی گئی ہے۔

**مثال 4** مان لیجیے $P_1$ ، $P_2$ ، $P_3$ اور $R_1$ ، $R_2$ ، $R_3$ ایسے ہی ہیں جیسا کہ مثال 2 میں۔ مان لیجیے فرم میں $R_1$ کے 330 یونٹ ہیں، $R_2$ کے 445 یونٹ ہیں اور $R_3$ کے 140 یونٹ موجود ہیں اور مان لیجیے خام مال کی مقدار $R_1$ ، $R_2$ اور ہے جو کہ تینوں اشیاء بنانے میں درکار ہیں، اس طرح دیئے گئے ہیں۔

$$B = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

ہر ایک شئے کے کتنے یونٹ بنیں گے تا کہ دستیاب پورے خام مال کا استعمال بخوبی ہو سکے۔

**حل قدم 1** صورتِ حال آسانی سے پہچانا جاسکتا ہے۔

قدم 2 مان لیجیے کہ فرم $P_1$ کے $x$ یونٹ، $P_2$ کے $y$ یونٹ اور $P_3$ کے z یونٹ تیار کر رہی ہے۔ کیونکہ اشیاء کو $R_1$ کے 3 یونٹ درکار ہیں، $P_2$ کو $P_2$ کے 7 یونٹ درکار ہیں اور $P_3$ کو $R_3$ کے 5 یونٹ درکار ہیں (ماترس B کا مشاہدہ کیجیے) اور $R_1$ کے کل دستیاب یونٹ 330 ہیں، ہمارے پاس ہے۔

$3x+7y+5z=330$ (خام مال $R_1$ کے لیے)

اسی طرح، ہمارے پاس ہے

$4x+9y+12z=455$ (خام مال $R_2$ کے لیے)

$3y+7z=140$ (خام مال $R_3$ کے لیے)

یہ مساوات کا نظام ماترس شکل میں اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔

**قدم 3** ابتدائی قطار عمل کا استعمال کر کے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\35\\5\end{bmatrix}$$

یہ $x=20$، $y=35$ اور $z=5$ دیتا ہے۔ اس طرح فرم $P_1$ کے 20 یونٹ، $P_2$ کے 5 یونٹ بنا سکتی ہے تاکہ اس کے پاس دستیاب خام مال کا پورا استعمال ہو سکے۔

**ریمارک:** اس کا مشاہدہ کیا جا سکتا ہے کہ اگر فرم، اس بات کا فیصلہ کر لے کہ وہ صرف دستیاب خام مال کا استعمال کر کے ہی اشیاء بنائے گی تاکہ دوگرا ہک $F_1$ اور $F_2$ کے خریداری کے آرڈر کے حساب سے (جیسا کہ مثال میں دیا گیا ہے) وہ مرد/عورت خریدار کے آرڈر کے حساب سے مال تیار کرنے میں ناکام ہے کیونکہ $F_1$ کی ضرورت $P_3$ کے 6 یونٹ کی ہی جب کہ صنعت کار $P_3$ کے صرف 5 یونٹ ہی بنا سکتا ہے۔

**مثال 5** ایک دوائیوں کا بنانے والا صنعت کار دوائیوں $M_1$ اور $M_2$ کو تیار کرنے کا پلان بنا رہا ہے۔ $M_1$ کی 20000 بوتلیں اور $M_2$ کی 40000 بوتلیں تیار کرنے کے لیے کافی مقدار میں خام مال موجود ہے، لیکن اس کے پاس صرف 45000 بوتلیں موجود ہیں جن میں کوئی بھی دوائی رکھی جا سکتی ہے۔ اس کے آگے $M_1$ کی 1000 بوتلیں بھرنے کے لیے ہال میں 3 گھنٹے لگتے ہیں۔ اور $M_2$ کی 1000 بوتلیں بھرنے کے لیے مال تیار کرنے میں 1 گھنٹہ لگتا اور اس عمل کو پورا کرنے میں کل 66 گھنٹے دستیاب ہیں جب کہ $M_1$ کی بوتل پر منافع 8 روپے اور $M_2$ کی بوتل پر منافع 7 روپے ہے۔ صنعت کار کس طرح اپنا دوا بنانے کے لیے مرد اور عورت کا استعمال کرے تاکہ زیادہ سے زیادہ منافع حاصل ہو۔

**حل** قدم 1 $M_1$ اور $M_2$ بوتلوں کی تعداد معلوم کرنا تاکہ دیئے ہوئے مفروضہ کے تحت منافع کو زیادہ سے زیادہ کیا جا سکے۔

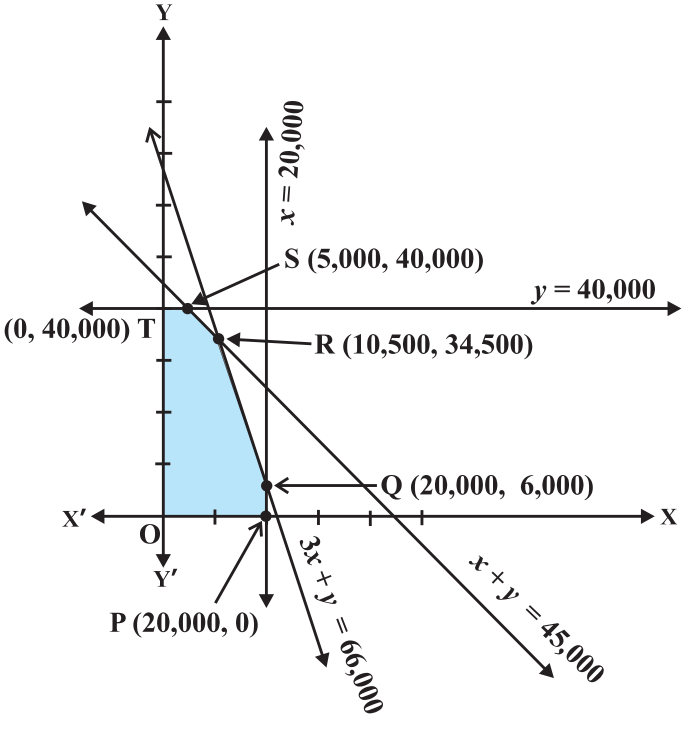
**قدم 2** مان لیجیے $M_1$ کی طرح کی دوائی والی بوتولوں کی تعداد $x$ ہے اور $M_2$ کی طرح کی دوائی والی بوتلوں کی تعداد $y$ ہے۔ کیونکہ $M_1$ کی بوتل پر منافع 8 روپے ہے اور $M_2$ کی بوتل پر منافع 7 روپے ہے، اس لیے معروضی فنکشن (جو کہ زیادہ سے زیادہ ہونا چاہئے) اس طرح دیا گیا ہے۔

$$Z \equiv Z(x, y) = 8x + 7y$$

معروضی فنکشن زیادہ سے زیادہ ہونے والا شعور پابندی کے ساتھ ہے (خطی پروگرامنگ پر مبنی باب 12 کے حوالے سے)

$$\left.\begin{array}{l} x \leq 20000 \\ y \leq 40000 \\ x+y \leq 45000 \\ 3x+y \leq 66000 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\} \qquad \ldots(1)$$

**قدم 3** عکس والا خط OPQRST پابندیوں (1) کے لیے معقول خط ہے (شکل A.2.3)۔ راس O, P, Q, R, S اور T کے مختص بالترتیب ہے۔ (0, 0), (20000, 0), (20000, 6000), (10500, 34500), (5000, 40000) اور (0, 40000) ہیں۔




شکل A.2.3

Z پر at P (0, 0) = 0

Z پر P (20000, 0) = 8 × 20000 = 160000

Z پر P (0, 0) = 0 + 7 × 6000 = 202000

$Z$ پر $R (10500, 34500) = 8 \times 10500 + 7 \times 34500 = 325500$

$Z$ پر $S = (5000, 40000) = 8 \times 5000 + 7 \times 40000 = 320000$

$Z$ پر $T = (0, 40000) = 7 \times 40000 = 280000$

اب مشاہدہ کیجیے کہ $x=10500$ اور $y=34500$ پر منافع اعظم ترین ہے اور اعظم ترین منافع 325500 روپے ہے۔ اس لیے صنعت کار دوائی $M_1$ کی 10500 بوتلیں تیار کرے اور دوائی $M_2$ کی 34500 بوتلیں تیار کرے تا کہ اعظم ترین 325500 روپیہ حاصل کرنے کے لیے۔

**مثال 6** ایک مان لیجیے ایک کمپنی ایک نئی اشیاء تیار کرنے کا پلان بناتی ہے اور اس پر کچھ روپیہ صرف کرتی ہے (متعین اور تغیر پذیر) اور مان لیجیے کہ کمپنی اشیاء کو ایک متعین قیمت پر فروخت کرتی ہے۔ اس کے منافع کی جانچ کرنے کے لیے ایک ریاضیاتی ماڈل تیار کیجیے۔

**حل قدم 1** صورتِ حال کی صاف طور پر پہچان کی جاسکتی ہے۔

**قدم 2** فارمولہ بنانا (Formulation) ہمیں یہ دیا ہوا ہے کہ قیمت دو طرح کی ہے: متعین اور متغیر مستقل قیمت بننے والے یونٹ کی اعداد (نمبر) پر منحصر نہیں ہے۔ (مثال کے طور پر کرایہ اور قیمتوں کی شرح) جب کہ متغیر کی قیمت بڑھتی ہے بننے والی اشیاء کی مقدار (نمبر) کے ساتھ (مثال کے طور پر)۔ پہلے ہم مانتے ہیں کہ متغیر قیمتیں بنائے گئے یونٹ کے ساتھ سیدھے طور پر نسبت میں ہیں۔ یہ ہمارے ماڈل کو آسان کردے گا۔ کمپنی اپنی شیاء فروخت کرنے سے کچھ روپیہ پیدا کرتی ہے اور یقین چاہتی ہے کہ یہ اعظم ترین ہو۔ اپنی آسانی کے لیے ہم یہ مانتے ہیں کہ بنائے گئے سبھی یونٹ ایک دم فروخت ہو گئے ہیں۔

## ریاضیاتی ماڈل

مان لیجیے $x$ = پیدا کیے گیے اور فروخت کیے گیے یونٹ کی تعداد

$C$ = بننے میں لگی کل قیمت (روپیوں میں)

$I$ = بکری سے آمدنی (روپیوں میں)

$P$ = منافع (روپیوں میں)

جو اوپر ہم نے مانا ہے وہ بیان کرتی ہے کہ C میں دو حصہ موجود ہیں:

(i) متعین قیمت $= a$ (روپیوں میں)

(ii) متغیر قیمت $= b$ (روپیہ پیدا کیے گیے یونٹ)

تب $C = a + bx$ ... (i)

ساتھ ہی آمدنی I، قیمت فروخت پر مبنی ہے (روپیہ/یونٹ)

اس طرح

$$I = sx \qquad \text{... (2)}$$

تب منافع P آمدنی اور لاگت کا فرق ہے۔ اس لیے

$$P = I - C$$

$$= sx - (a + bx)$$

$$= (s - b)x - a \qquad \text{... (3)}$$

اب ہمارے پاس متغیر x, C, I, P, a, b, s کے درمیان رشتوں (1) تا (3) تک کے لیے ایک ماڈل موجود ہے۔ ان متغیروں کی اس طرح ترتیب بندی کی جاسکتی ہے۔

غیر منحصر $x$

منحصر C, I, P

پیرامیٹرس $a, b, s$

صنعت کار $x, a, b, s$ کو جانتے ہوئے P معلوم کرسکتا ہے۔

**قدم 3** (3) سے، ہم یہ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ توڑا گیا مثبت نقطہ (یعنی، نہ تو منافع ہوتا اور نہ ہی نقصان)، اس کے پاس $P = 0$ ہونا ہی چاہیئے، یعنی، $x = \dfrac{a}{s - b}$ یونٹ

**اقدام 4 اور 5** توڑے گئے مثبت نقطہ کے حوالے سے، کوئی بھی اس نتیجہ پر پہنچ سکتا ہے کہ کمپنی کچھ یونٹ پیدا کرتی ہے، یعنی،

$x = \frac{a}{s-b}$ یونٹ سے زیادہ، تب یہ زیادہ منافع پیدا کر سکتی ہے۔ مزید، اگر ہم سطح (break even point) نقطہ غیر حقیقی ثابت ہو جائے، تب ایک دوسرے ماڈل کی کوشش کرنی چاہیئے یا رقم کے پھیلاؤ کے مطابق مانے گئے بہتر بنانا چاہیئے۔

**ریمارک** مساوات '3' سے ہمارے پاس اور بھی ہے۔

$$\frac{dP}{dx} = s - b$$

اس کا مطلب ہے کہ P کی شرح تبدیلی $x$ کے ساتھ $s-b$ کی مقدار پر منحصر ہے، جو کہ ہر اشیاء کی قیمت فروخت اور متغیر قیمت کا فرق ہے۔ اس طرح، منافع حاصل کرنے کے لیے، یہ مثبت ہونا چاہیئے اور زیادہ منافع کے لیے، ہمیں اشیاء کی زیادہ پیداوار کی ضرورت ہے اور اسی وقت متغیر کیمت کو کم کرنے کی کوشش کریں۔

**مثال 7** مان لیجیے ایک ٹینک میں 1000 لیٹر نمکین پانی ہے جس میں 1 لیٹر 250 گرام نمک ہے۔ نمکین پانی جس میں 200 گرام فی لیٹر کے حساب سے نمک موجود ہے ٹینک میں 25 لیٹر فی منٹ کے حساب سے بہت ہے اور اسی رفتار سے گھول ٹینک سے باہر بہہ جاتا ہے۔ یہ مانتے ہوئے کہ گھول کو ہر وقت چلا کر یکساں رکھا گیا ہے۔ ٹینک میں ہر وقت 't' نمک کی مقدار کیا ہوگی؟

**حل قدم 1** صورتِ حال کی صاف طور پر پہچان کی جا سکتی ہے۔

قدم 2 مان لیجیے $y=y(t)$ کسی بھی وقت t (منٹوں میں) پر ٹینک میں نمک کی مقدار (کلوگرام میں) ظاہر کرتی ہے جبکہ گھول کا اندر آنا اور باہر جانا شروع ہو گیا ہو۔ اس کے بعد یہ مان لیجیے کہ $y$ ایک تفرق پذیر فنکشن ہے۔ جبکہ $t = 0$ ہے، یعنی نمک کا پانی اندر آنے سے پہلے نمک کا پانی باہر جانے سے پہلے

$$y = 250 \text{ g} \times 1000 = 250 \text{ kg}$$

یہ نوٹ کر لیجیے کہ $y$ کو وجود گھول کے ٹینک میں اندر آنے اور باہر جانے کی وجہ سے ہے۔

اب نمک والے پانی کا اندر آنا نمک کو 5 کلوگرام فی منٹ کے حساب سے ٹینک میں لاتا ہے (کیونکہ $25 \times 200$ گرام = 5 کلوگرام) اور نمک والے پانی کا باہر جانا نمک $25\left(\frac{y}{1000}\right) = \frac{y}{40}$ کلوگرام فی منٹ (کیونکہ وقت t پر، ٹینک میں موجود

(نمک $\frac{y}{1000}$ کلوگرام ہے) کے حساب سے باہر لے جاتا ہے۔

اس طرح نمک کی شرح تبدیلی وقت t کے ساتھ دی گئی ہے۔

$$\frac{dy}{dt} = 5 - \frac{y}{40} \text{ (کیونکہ؟)}$$

یا
$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{40} y = 5 \quad ...(1)$$

یہ دیئے ہوئے مسئلہ کے لیے ریاضی ماڈل دیتا ہے۔

**قدم 3** مساوات (1) ایک خطی مساوات ہے اور بہ آسانی حل کی جاسکتی ہے۔ (1) کا حل دیا گیا ہے

$$y e^{\frac{t}{40}} = 200 e^{\frac{t}{40}} + C \text{ یا } y(t) = 200 + C\, e^{-\frac{t}{40}} \quad ...(2)$$

جہاں $C$ تکمل کا مستقل ہے

نوٹ کر لیجیے کہ جبکہ $t = 0$ ہے، $y = 250$ ہو گا۔ اس لیے $250 = 200 + C$

یا $C = 50$

تب '2' کم ہو جاتی ہے

$$y = 200 + 50\, e^{-\frac{t}{40}} \quad ...(3)$$

یا
$$\frac{y - 200}{50} = e^{-\frac{t}{40}}$$

یا
$$e^{\frac{t}{40}} = \frac{50}{y - 200}$$

$$t = 40 \log_e \left(\frac{50}{y - 200}\right) \quad ...(4)$$

اس طرح مساوات (4) وقت t دیتی ہے جن پر ٹینک میں نمک کی تعداد y کلوگرام ہے۔

**قدم 4** کیونکہ $e^{-\frac{t}{40}}$ ہمیشہ مثبت ہوتا ہے، مساوات 3 سے، ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ تمام وقت $y > 200$ ہے۔ اس لیے ٹینک میں نمک کی کم سے کم مقدار 200 کلوگرام ہے۔

ساتھ ہی، (4) سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ $t>0$ ہوگا اگر اور صرف اگر $50 < 200 - y < 0$ ہے یعنی، اگر صرف اگر $250 > y > 200$ یعنی، نمک کی مقدار ٹینک میں اندر آنے والے نمک کے پانی کے بہاؤ اور باہر جانے والے بہاؤ کے شروع ہونے کے بعد 200 کلوگرام اور 250 کلوگرام ہے۔

## ریاضیاتی ماڈلنگ کی حدود

آج تک بہت سے ریاضیاتی ماڈل بنائے جا چکے ہیں اور ہزاروں حالتوں میں کامیابی کے ساتھ سمجھنے میں لاگو کئے جا چکے ہیں۔ کچھ مضامین مثال کے طور پر ریاضیاتی فزکس، ریاضیاتی اکنامکس، آپریشنل ریسرچ، بائیو۔ریاضی وغیرہ وغیرہ سب کے سب ریاضیاتی ماڈلنگ کے لیے ایک جیسے ہیں۔

لیکن ابھی بھی ایسے بہت سے حالات ہیں جہاں ابھی بھی ماڈل بننے باقی ہیں۔ اس کے پیچھے یہ وجہ ہے کہ یا تو حالات بہت پیچیدہ ہو گئے ہیں یا جو ریاضیاتی ماڈل بنائے گئے ہیں وہ بہت ہی الٹے سیدھے تھے۔

طاقتور کمپیوٹرس کا بننا اور سُپر (اعلیٰ) کمپیوٹرس کے بننے سے ہمیں اس قابل بنا دیا ہے کہ بہت زیادہ حال کے لئے ہم ریاضیاتی ماڈل تیار کر سکیں۔ (یہاں تک کے پیچیدہ سے پیچیدہ حالات کے لیے) اس طرح کی تیز اور جدید کمپیوٹرس کی وجہ سے یہ ممکن ہو سکتا ہے کہ زیادہ حقیقت پسند ماڈل تیار کئے جا سکیں جو کہ مشاہدوں کے ساتھ بہتر مطابقت دے سکیں۔

حالانکہ، ہمارے پاس بہت سے پیرامیٹر / متغیروں کے چننے کے لیے بہتر گائیڈ لائینس نہیں ہیں اور ساتھ ہی ان پیرامیٹرس / متغیروں کی قدروں کا حساب لگانے کے لیے جو کہ ریاضیاتی ماڈل میں استعمال کئے جاتے ہیں۔ حقیقت میں، ہم پانچ یا چھ پیرامیٹرس / متغیر بن کر ایک مناسب صحیح ماڈل بنا سکتے ہیں جن میں کسی بھی اعداد و شمار کو فٹ کیا جا سکے۔

بڑے اور پیچیدہ حالات میں ریاضیاتی ماڈلنگ کے کچھ خاص اپنے مسائل ہیں۔ اس طرح کے حالات عام طور پر دنیا کی آب ہوا کا مطالعہ کرنے کے ماڈل میں، سمندری معلومات کرنے کے ماڈل میں، آلودگی کنٹرول کرنے والے ماڈل میں وغیرہ وغیرہ۔ ریاضیاتی ماڈل بنانے والے تمام شعبوں، ریاضی، کمپیوٹر سائنس، فزکس انجینئرنگ، سوشل سائینس وغیرہ وغیرہ شامل ہیں۔ ہمت کے ساتھ اس طرح کی چنیوتیاں کا سامنے کرنے کے لئے۔