

ریاضی

حصہ دوم

بารھویں جماعت کے لیے درسی کتاب



5260

جامعہ ملیہ اسلامیہ



نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ



- ناشر کی پہلے سے اچات حاصل کیے بغیر، اس کتاب کے کسی بھی حصے کو دوبارہ پیش کرنا، باورداشت کے ذریعے بازیافت کے ستم میں اس کو خویں کرنا یا بر قیانی، دیکائیں یوں لوکا چینگ، ریکارڈنگ کے کسی بھروسے سے اس کی ترمیم کرنا منع ہے۔
- اس کتاب کو اس شرط کے ساتھ فروخت کیا جانا ہے کہ اسے ناشر کی اجازت کے بغیر، اس محل کے علاوہ، جس میں کہیہ چھپائی گئی ہے یعنی اس کی موہونہ جلد بندی اور سروق میں تمدی کر کے، تجارت کے طور پر نہ معمول ریا جاسکتا ہے، نہ دوبارہ فروخت کیا جاسکتا ہے، نہ کہیہ پر دیا جاسکتا ہے اور نہ تلف کیا جاسکتا ہے۔
- کتاب کے صفحے پر جو یقینت درج ہے وہ اس کتاب کی صحیح یقینت ہے۔ کوئی بھی نظرخانی شدید یقینت چاہے وہ برکی مہر کے ذریعے یا ٹینی یا کسی اور ذریعے طاہر کی جائے تو وہ غلط متصحّر رہو گی اور ناقابل قبول ہو گی۔

این سی ای آرٹی کے پہلی کیش ڈپارٹمنٹ کے دفاتر

این سی ای آرٹی کیپس	108,100
سری ارونڈو مارگ	110016
نئی دہلی - 011-26562708	اچٹنیشن بانٹکری III اچ
080-26725740	560085
فون	تو چیون ٹرسٹ بھومن
079-27541446	ڈاک گھر، تو چیون
فون	احمد آباد - 380014
سی ڈبلیوی کیپس	سی ڈبلیوی کیپس
بمقابلہ ڈھانکل، اس اسٹاپ، پانی ہائی	بمقابلہ ڈھانکل، اس اسٹاپ، پانی ہائی
033-25530454	کوکاتا - 700114
فون	سی ڈبلیوی کامپلکس
0361-2674869	بالی گاؤں
فون	گواہانی - 781021

اشاعتی ٹیکم

انوپ کمار راجپوت	:	ہیڈپلی کیش ڈویژن
شویتا اپل	:	چیف ایڈیٹر
ارون چتکارا	:	چیف پر ڈوکشن آفسیر
بیباش کماردادس	:	چیف بنس فیجر
سید پرویز احمد	:	ایڈیٹر
موکیش گوڑ	:	پر ڈوکشن اسٹنٹ
سرورق اور آرٹ		
ارون در چاولہ		

پہلا اردو ایڈیشن
ماج 2008 پہالگن 1929

دیگر طباعت
جون 2012 جیشہ 1934

اکتوبر 2019 کارتک 1941

PD 5H SPA

© نیشنل کوسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ، 2008

قیمت : ₹ 150.00

این سی ای آرٹی والٹر مارک 80.جی ایس ایم کاغذ پر شائع شدہ
سکریپری، نیشنل کوسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ،
شری ارونڈو مارگ، نئی دہلی نے رائل آفسیٹ پر نیس،
نئی دہلی-110028 میں چھپوا کر پہلی کیش ڈویژن
سے شائع کیا۔

پیش لفظ

”قومی درسیات کا خاکہ—2005“ میں سفارش کی گئی ہے کہ بچوں کی اسکول کی زندگی، ان کی باہر کی زندگی سے ہم آہنگ ہونی چاہیے۔ یہ زاویہ نظر، کتابی علم کی اس روایت کی نفی کرتا ہے جس کے باعث آج تک ہمارے نظام میں گھر اور سماج کے درمیان فاصلے حاصل ہیں۔ نئے قومی درسیات کے خاکے پر مبنی نصاب اور درسی کتابیں اسی بنیادی خیال پر عمل آوری کی ایک کوشش ہے۔ اس کوشش میں مختلف مضامین کو ایک دوسرے سے الگ رکھنے اور رٹ کر پڑھنے کے طریقہ کارکی حوصلہ شکنی بھی شامل ہے۔ ہمیں امید ہے کہ ان اقدامات سے قومی تعلیمی پالیسی 1986 میں مذکور ”تعلیم کے طفل مرکوز نظام“ کی طرف مزید پیش رفت ہوگی۔

اس کوشش کی کامیابی کا انحصار اس پر ہے کہ سبھی اسکولوں کے پنسپل اور اساتذہ بچوں میں اپنے تاثرات خود ظاہر کرنے اور ذہنی سرگرمیوں اور سوالوں کے ذریعے سیکھنے کی ہمت افزائی کریں۔ ہمیں یہ ضرور تسلیم کرنا چاہیے کہ بچوں کو اگر موقع، وقت اور آزادی دی جائے تو وہ بڑوں سے حاصل شدہ معلومات سے وابستہ ہو کر، نئی معلومات مرتب کرتے ہیں۔ آموزش کے دوسرے ذرائع اور محل وقوع کو نظر انداز کرنے کے بنیادی اسباب میں سے ایک اہم سبب تجویزہ درسی کتاب کو امتحان کے لیے واحد ذریعہ بنانا ہے۔ بچوں کے اندر تخلیقی صلاحیت اور پیش قدمی کے ربحان کو فروغ دینا سی وقت ممکن ہے جب ہم آموزشی عمل میں بچوں کو بحیثیت شریک کا قبول کریں اور ان سے اسی طرح پیش آئیں۔ انھیں محض مقررہ معلومات کا پابند نہ بھیں۔

یہ مقاصد اسکول کے معمولات اور طریقہ کار میں معقول تبدیلی کا مطالبہ کرتے ہیں۔ روزمرہ نظام الاوقات (Time-Table) میں لچکیا پن اُسی قدر ضروری ہے جتنی کہ سالانہ کیلئہ نفاذ میں سخت محنت کی تاکہ مطلوبہ ایسا مکالمہ کو حقیقتاً تدریس کے لیے وقف کیا جاسکے۔ تدریس اور اندازہ قدر کے طریقوں سے بھی اس امر کا تعین ہوگا کہ یہ درسی کتاب، بچوں میں ذہنی تناؤ اور اکتاہٹ کا ذریعہ بننے کے بجائے ان کی اسکولی زندگی کو خوش گوار بنانے میں کس حد تک موثر ثابت ہوتی ہے۔ نصابی بوجھ کے مسئلے کو حل کرنے کے لیے نصاب سازوں نے مختلف سطحوں پر معلومات کی تشکیل نواور اسے نیارخ دینے کی غرض سے بچوں کی نفسیات اور تدریس کے لیے دستیاب وقت پر زیادہ سنجیدگی کے ساتھ توجہ دی ہے۔ اس مخصوصہ کوشش کو مزید بہتر بنانے کے لیے یہ درسی کتاب سوچنے اور محسوس کرنے کی تربیت، چھوٹے گروپوں میں بحث و مباحثہ کرنے اور عملاً انجام دی جانے والی سرگرمیوں کو زیادہ اولیت دیتی ہے۔

ایں سی ای آرٹی اس کتاب کے لیے تشكیل دی جانے والی ”کمیٹی برائے درسی کتاب“ کی ملکاہ کو ششون کو شکرگزار ہے۔ کوسل سائنس اور ریاضی کے مشاورتی گروپ کے چیئرمین پروفیسر ہے۔ وی۔ نارلیکر اور اس کتاب کے خصوصی صلاح کار پروفیسر پون کمار جین کی ممنون ہے۔ اس درسی کتاب کی تیاری میں جن اسامتہ نے حصہ لیا، ہم ان کے متعلقہ اداروں کے بھی شکرگزار ہیں۔ ہم ان سب ہی اداروں اور تنظیموں کا بھی شکریہ ادا کرتے ہیں جنہوں نے اپنے وسائل، آخذ اور عملی کی فراہمی میں فراخ دلی کا ثبوت دیا۔ ہم وزارت برائے فروع انسانی وسائل کے شعبے برائے ثانوی اور اعلیٰ ثانوی تعلیم کی جانب سے پروفیسر مری نال مری اور پروفیسر جی۔ پی۔ دیش پانڈے کی سربراہی میں تشكیل شدہ نگر اس کمیٹی (مانیٹر گنگ کمیٹی) کے اراکین کا بھی شکریہ ادا کرتے ہیں جنہوں نے اپنی قیمتی وقت اور تعاون ہمیں دیا۔ ہم اس نصابی کتاب کے اردو ترجمے کی ذمے داری بخوبی انجام دینے کے لیے جامعہ ملیہ اسلامیہ کے وائس چانسلر پروفیسر مشیر الحسن اور محترمہ رخشیدہ جلیل کے ممنون اور شکرگزار ہیں جنہوں نے مرکز برائے جواہر لعل نہر و استاد ہیز، جامعہ ملیہ اسلامیہ کے آٹھ ایجنس پروگرام کے ذریعے اس عمل میں رابطہ کارکے فرائض بخوبی انجام دیئے۔ کوسل اس کتاب کے اردو ترجمے کے لیے ڈاکٹر اطہر پرویز کی شکرگزار ہے۔ باضابطہ اصلاح اور اپنی اشاعت کے معیار کو مسلسل بہتر بنانے کے مقصد کی پابند ایک تنظیم کے طور پر این سی ای آرٹی، تمام مشوروں اور آرکا کا خیر مقدم کرتی ہے تاکہ کتاب کو مزید غور و فکر کے بعد اور زیادہ کارآمد اور بامعنی بنایا جاسکے۔

ڈاکٹر یکیٹر

نیشنل کوسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ

نئی دہلی

نومبر 2006

دیباچہ

این تی ای آرٹی نے تعلیمی میدان میں نئے نئے چیلنجوں اور نئی تبدیلوں کے پیش نظر، اسکول ایجوکیشن کے مختلف مضامین کی تدریس سے متعلق 21 فوکس گروپ تشکیل دیے تھے جس کا مقصد یہ تھا کہ قومی خاکہ درسیات برائے اسکولی تعلیم 2000 پر نظر ثانی کی جائے، ان فوکس گروپوں نے اپنے اپنے مضامین سے متعلق عمومی اور خصوصی تبصرے اور ایں پیش کیں۔ نتیجہ انہی فوکس گروپوں کی روپریتوں پر مبنی قومی خاکہ درسیات (NCF) 2005 کا راقعہ میں آیا۔

این سی ای آرٹی نے ایک نیا صاب ڈیزائن کیا اور گیارہویں جماعتوں کے لیے حساب کی کتابیں تیار کرنے کے لیے کمیٹی برائے نصابی کتب تشکیل کی گئی۔ گیارہویں جماعت کے لیے درسی کتاب پہلے ہی منظر عام پر آچکی ہے۔

موجودہ کتاب (بارہویں جماعت) کا پہلا ڈرافٹ جس ٹیم نے تیار کیا ہے اس میں این تی ای آرٹی کی فیکٹری ماہرین تعلیم اور اساتذہ شریک تھے۔ اس ڈرافٹ کا ان اساتذہ نے مطالعہ کیا جو ہائی سکیوریٹی سٹھپ پر ملک بھر میں ریاضی کی تدریس میں مشغول ہیں۔ اس ڈرافٹ پر نظر ثانی کے لیے درکشاپ کے انتظام کی ذمہ داری این سی ای آرٹی نے انجام دی۔ اساتذہ نے اپنے پیش بہا مشورے اور مفید تجاویز پیش کیں جن کو اس کتاب میں شامل کیا گیا۔ اس کتاب کے ڈرافٹ کو ادارتی بورڈ نے آخری شکل دی۔ بالآخر سائنس اور ریاضی کے لیے مشاورتی گروپ اور وزارت فروع وسائل انسانی (حکومت ہند) کے تحت قائم شدہ مانیئرگ کمیٹی نے اس ڈرافٹ کو اپنی منظوری دی۔

یہاں اس درسی کتاب کی کچھ اہم خصوصیات کی طرف اشارہ کرنا بھی بے موقع نہ ہوگا۔ کتاب کی یہ خصوصیات سمجھی ابواب میں آپ کو نظر آئیں گی۔ موجودہ کتاب میں 13 ابواب اور دو ٹھیکھے شامل ہیں۔ ہر باب درج ذیل پر مشتمل ہے۔

■ تعارف: تعارف میں موضوع کی اہمیت کو واضح کیا گیا ہے۔ پچھلے پڑھے ہوئے موضوعات سے رابطہ اور موجودہ باب میں پیش کیے گئے نئے تصورات پر محض غنٹوں کی گئی ہے۔

■ باب کو ذیل سیکشنوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور ہر ایک سیکشن میں ایک نیا تصور یا ذیلی تصویر پیش کیا گیا ہے۔

■ نئے تصورات یا ذیلی تصورات کو جہاں تک ممکن ہو سماں مثالوں سے واضح کیا گیا ہے۔

■ ریاضیاتی تصورات کے اطلاق کو سائنس اور سوشل سائنس وغیرہ مضامین سے مربوط اور وابستہ کیا گیا ہے۔

- ہر سیشن میں مختلف قسم کی مثالیں اور مشقیں فراہم کی گئی ہیں۔
- آخر میں فارمولوں، نتیجوں اور خاص تصورات کے براہ راست اعادے کے لیے باب کا خلاصہ دیا گیا ہے۔
- میں پروفیسر کرشن کمار، ڈائریکٹر، این سی ای آرٹی کا انتہائی شکر گزار ہوں جنہوں نے ٹیم کی تشکیل کی اور مجھے ریاضتی کی تعلیم جیسی قومی خدمت کے لیے مدعو کیا۔ موصوف کی کاؤنٹوں سے کتاب کی تیاری بہت خوبصور اور قبل افتخار ہو گئی۔ میں پروفیسر بے وی نار لیکر کا بھی ممنون جا سان ہوں۔ موصوف سائنس اور ریاضتی کی مشاورتی گروپ کے چیئرمیٹ پرسن ہیں اور انہوں نے وقتاً نوقتاً کتاب کو خوب سے خوب تر بنانے کے لیے خصوصی مشوروں سے نواز اور اپنی پیش قیمت آرابھی پیش کیں۔ میں پروفیسر جی رو بندر جوان سٹڈیز ڈائریکٹر، این سی ای آرٹی کا بھی ان کے تعاون کے لیے بے حد مشکور ہوں، میں خاص طور پر پروفیسر حکم سنگھ چیف کوارڈیئٹر اور ہیڈ، ڈی ای ایمس ایم، ڈاکٹروں پی سنگھ اور پروفیسر ایس کے سنگھ گوم کا بھی بے حد سپاس گزار ہوں جنہوں نے اس پروجیکٹ کی کامیابی کے لیے تعاون کرنے سے کبھی دربغ نہیں کیا۔ نہ تعلیمی سطح پر اور نہ انتظامی سطح پر۔ اس کے علاوہ میں ٹیم کے تمام ممبر ان اور اساتذہ کا بھی رہیں ملت ہوں جنہوں نے اس قومی افادیت کے کام کے لیے اپنا تعاون پیش کیا۔

پون کے جیں
خصوصی صلاح کار
کمیٹی برائے درسی کتب

کمیٹی برائے درسی کتاب

چیئر پرنس مشاورتی کمیٹی برائے ریاضی اور سائنس

جے وی نار لیکر، پروفیسر ایم ریڈس، یونیورسٹی سینٹر فار ایسٹرنومی اینڈ ایسٹرن فزکس (آئی یوسی اے اے) پونے یونیورسٹی، پونہ

خصوصی صلاح کار

پی۔ کے۔ جین، پروفیسر، شعبہ ریاضیات، دہلی یونیورسٹی، دہلی

چیف کو آرڈر نیٹر

حکم سنگھ، پروفیسر، صدر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آرٹی، نئی دہلی

ارا کین

ارون پال منگھ، سنیٹر لیکچر شعبہ ریاضیات، دیال گنگھ کالج، دہلی یونیورسٹی، دہلی

اے۔ کے۔ راجپوت، ریڈر، آر آئی ای، این سی ای آرٹی، بھوپال

بی۔ ایس۔ پی۔ راجہ، پروفیسر، آر آئی ای، این سی ای آرٹی، میسور

سی۔ آر۔ پردیپ، اسٹیشنٹ پروفیسر، شعبہ ریاضیات، انڈین انسٹی ٹیوٹ آف سائنس، بنگلور

ڈی۔ آر۔ شرما، پی جی ٹی، جواہر نوودہ دھیالیہ، منڈیش پور، دہلی

رام اوتار، پروفیسر (ریٹائرڈ) اور صلاح کار، ڈی ای ایس ایم این سی ای آرٹی

آر۔ پی۔ موریہ، ریڈر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آرٹی، نئی دہلی

ایس۔ ایس۔ کھرے، پروفیسر، پروواس چانسلر، این ای ایچ یو، توارکیمپس، میگھالیہ

ایس۔ کے۔ ایس۔ گوتم پروفیسر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آرٹی، نئی دہلی

ایس۔ کے۔ کوئنک، ریڈر، کروڑی مل کالج، دہلی یونیورسٹی، دہلی

سینگتا اروڑا، پی جی ٹی، اپی جے اسکول، ساکیت، نئی دہلی

شلیچا تیواری، پی جی ٹی، سینٹرل اسکول، برکا کانا، ہزاری باغ
وینا کیک بجاڑے، پی جی ٹی، وور بھ بنیادی جونیئر کالج، ناگپور
سنیل بجان، سینٹرال اسپیشلیست، الیس سی ای آرٹی، گرگاؤں

ممبر کو آرڈی نیٹر
وی۔ پی۔ سنگھ، ریدر، ڈی ای الیس ایم، این سی ای آرٹی، ننی دہلی

اطھار تشرک

کوںل درج ذیل حضرات کی صمیم قلب سے ممنون و تشكیر ہے جنہوں نے اس درسی کتاب کی روپیوور کشاپ میں شرکت فرمائی اور اپنے بیش قیمتی مشوروں سے نواز:

جگد لیش سرن، پوفیسر، ڈپارٹمنٹ آف اسٹیٹھک، دہلی یونیورسٹی، دہلی؛ قدوس خان، لیکھر، شبانیشل پی جی کالج، عظم گڑھ؛
پی۔ کے۔ تیواری، اسٹینٹ کمشنر (ریٹائرڈ)، کیندر یہودھیالیہ سنگھٹن؛ ایس۔ بی۔ ترپاٹھی، لیکھر، آرپی وی وی، سورج مل وہار،
دہلی؛ او۔ این۔ سنگھریڈر، آرائی ای، بھوئیشور؛ سروج، لیکھر، گورنمنٹ گرینسینٹر سینڈری اسکول نمبر 1، روپنگر، دہلی؛ پی۔ بھاسکر کمار،
پی جی ٹی، جواہر نو دیا ودھیالیہ، لیپاکشی، انت پور؛ ایس کلپاگم، پی جی ٹی، کے۔ وی۔ این۔ اے۔ ایل کیمپس، بینگلورو؛ رامل
سوٹ، لیکھر، ایم ۷ فورس گولڈن جبلی انسٹی ٹیوٹ، سہرت پارک، نئی دہلی؛ وندیتا کالرا، لیکھر، سروود یکنیا ودھیالیہ، دکاس پوری،
نئی دہلی؛ جناردن ترپاٹھی، لیکھر، گورنمنٹ آر اچ ایس ایس، آمیزوول، میزورم؛ اور شما جے رتح، ریڈر، ڈی ڈبليو ایس،
این ای ای آر ٹی، نئی دہلی۔

کوںل اس کتاب کی تیاری اور اشاعت میں ڈی ای ایس ایم کے انتظامیہ اور پبلیکیشن ڈویژن کے سبھی اشاف کے
تعاون کا بھی اعتراض کرتی ہے۔

فہرست

ریاضی (حصہ اول)

1-41	رشته اور تفاعلات	باب 1
42-64	معکوس ٹرگنومیٹریائی تفاعلات	باب 2
65-114	ماترس	باب 3
115-161	مقطوع	باب 4
162-213	تسلسل اور تفرقہ پذیری	باب 5
214-273	مشتق کا اطلاق	باب 6
274-284	ضیمہ 1 ریاضی میں ثبوت	
285-298	ضیمہ 2 ریاضیاتی ماڈلنگ	
299-316	جوابات	

فہرست

	پیش لفظ	
	دیباچہ	
317	تکملہ	.7
317	تعارف	7.1
318	تکملہ تفرق کے معاوں عمل کے طور پر	7.2
331	تکملہ کے طریقے	7.3
339	کچھ مخصوص تفااعلات کے تکملہ	7.4
348	جزوی کسر و کم کے ذریعے تکملہ	7.5
355	با خصوصیات تکملہ	7.6
363	معین تکملہ	7.7
367	احصا کا بنیادی مسئلہ	7.8
371	بدل کے ذریعے معین تکملوں کی قدر معلوم کرنا	7.9
373	معین تکملوں کی کچھ مخصوصیات	7.10
392	تکملوں کا استعمال / اطلاق	.8
392	تعارف	8.1
392	سادہ مخفینیوں سے گھرا ہوا رقبہ	8.2
400	دو مخفینیوں کے درمیان رقبہ	8.3
413	تفقی مساواتیں	.9
413	تعارف	9.1
414	بنیادی تصورات	9.2

417	ایک تفرقی مساوات کے عام اور خصوصی حل	9.3
420	ایک تفرقی مساوات کی تشكیل جس کا عام حل دیا ہوا ہے	9.4
427	پہلی ترتیب، پہلے درج کی تفرقی مساواتیں حل کرنے کے طریقے	9.5
462	سمتیہ الجبرا	.10
462	تعارف	10.1
463	کچھ بنیادی تصورات	10.2
465	سمتیوں کی فتمیں	10.3
468	سمتیوں کی جمع	10.4
471	ایک سمتیہ کی ایک عدد یہ سے ضرب	10.5
481	دو سمتیوں کا حاصل ضرب	10.6
504	سے بعادی جیو میٹری	.11
504	تعارف	11.1
505	ایک خط کی سمتی کو سائن اور سمتی نسبتیں	11.2
510	فضا میں ایک خط کی مساوات	11.3
514	دو خطوط کے درمیان زاویہ	11.4
517	دو خطوط کے درمیان کم از کم فاصلہ	11.5
522	مستوی	11.6
532	دو خطوط کی ہم مستویت	11.7
534	دو مستویوں کے درمیان زاویہ	11.8
536	ایک نقطہ کا ایک مستوی سے فاصلہ	11.9
537	ایک خط اور ایک مستوی کے درمیان زاویہ	11.10
551	خطی پروگرامنگ	.12
551	تعارف	12.1

552	خطی پروگرامنگ مسئلہ اور ان کی ریاضیاتی تکمیل	12.2
563	مختلف قسم کے خطی پروگرامنگ مسائل	12.3
583	احتمال	.13
583	تعارف	13.1
584	مشروط احتمال	13.2
593	احتمال پر ضربی مسئلہ	13.3
596	غیر تابع وقوعات	13.4
603	باکیس کا مسئلہ	13.5
614	بلا منصوبہ متغیر اور ان کا احتمال بٹاؤ	13.6
630	برنوی کی کوشش اور دور کنی بٹاؤ	13.7
649	جوابات	
675	ضمیمه کے مشمولات	

بھارت کا آئین

تمهید

ہم بھارت کے عوام متنانت و سنجیدگی سے عزم کرتے ہیں کہ بھارت کو ایک مقندر، سماج وادی، غیر مذہبی عوامی جمہوریہ بنائیں اور اس کے تمام شہریوں کے لیے حاصل کریں۔

النصاف سماجی، معاشی اور سیاسی
آزادی خیال، اظہار، عقیدہ، دین اور عبادت
مساوات بے اعتبار حیثیت اور موقع اور ان سب میں
اخوت کو ترقی دیں جس سے فرد کی عظمت اور قوم کے اتحاد اور
سامانیت کا تینقین ہو۔

اپنی آئین ساز اسمبلی میں آج چھپیں نومبر 1949ء کو یہ آئین ذریعہ
ہذا اختیار کرتے ہیں، وضع کرتے ہیں اور اپنے آپ پر نافذ کرتے ہیں۔