باب **8**

تکملوں کا استعمال/اطلاق
(APPLICATION OF INTEGRALS)

ہمیں ریاضی کا مطالعہ کرنا چاہیے کیونکہ ہم ریاضی کے ذریعے ہی قدرت کو ہم آہنگ شکل میں دیکھ سکتے ہیں-برک ہوف

تعارف (Introduction)

اے۔ایل۔کوچی (A.L. Cauchy)
(1789–1857)

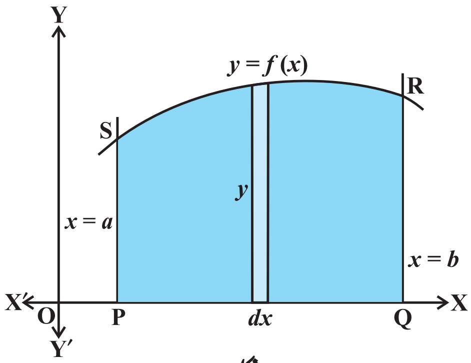
جیومیٹری میں ہم بہت سی جیومیٹریائی اشکال جیسے مثلث، مستطیل، منحرف اور دائروں کے رقبے معلوم کرنے کے فارمولے پڑھتے ہیں۔ ریاضی کے استعمال میں اس طرح کے فارمولے زندگی میں بہت سے حقیقی مسئلوں کے لیے بنیادی ہیں۔ بنیادی جیومیٹری کے فارمولے ہمیں بہت سی آسان شکلوں کا رقبہ دریافت کرنے کے معاون نہیں ہوتے۔ حالانکہ یہ منحنی سے گھرے ہوئے رقبہ کا حساب لگانے میں ناکافی ہیں۔ اس کے لیے ہمیں یہاں تکملی احصا کے تصور کی ضرورت ہوگی۔

پچھلے باب میں جب ہم تکملہ کی قدر انتہا کے حاصل جمع کے طور پر معلوم کر رہے تھے۔ تو ہم نے منحنی $y = f(x)$، مختص $x = a$، $x = b$ اور x– محور سے گھرے ہوئے رقبہ کو نکالنے کے بارے میں پڑھا ہے۔ یہاں، اس باب میں ہم تکملوں کے خاص استعمال کے بارے میں پڑھیں گے جس میں آسان منحنیوں کا رقبہ معلوم کرنا، خطوط اور دائروں کے قوس کے درمیان کا رقبہ، مکافی اور ناقص (صرف معیاری شکل میں) شامل ہے۔

8.2 سادہ منحنیوں سے گھرا ہوا رقبہ (Area under Simple Curves)

پچھلے باب میں ہم نے معین تکملے کو انتہا کے حاصل جمع کے طور پر پڑھا ہے اور کس طرح معین تکملے کی قدر معلوم کی جاتی ہے یہ ہم

© NCERT not to be republished

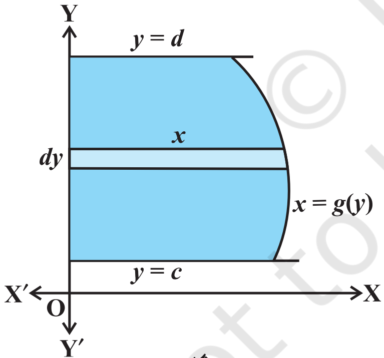


شکل 8.1

نے احصا کے بنیادی مسئلے کا استعمال کر کے سیکھا ہے۔ منحنی y = f(x) ، x – محور اور طولی مختص x = a اور x=b سے گھرے ہوئے رقبہ کو معلوم کرنے کے لیے اب ہم آسان اور وجدانی طریقے پر غور کریں گے۔ شکل 8.1 سے ہم منحنی کے زیر سایہ رقبہ جو کہ بہت زیادہ تعداد میں بہت پتلی عمودی پتیوں سے بنا ہوا ہے کے بارے میں سوچ سکتے ہیں۔ ایک اختیاری پتی جس کی اونچائی y اور چوڑائی dx پر غور کیجیے، تب dA (بنیادی پتی کا رقبہ) = ydx ، جہاں y=f(x) ہے۔ یہ رقبہ ابتدائی رقبہ کہلاتا ہے جو کہ اختیاری پوزیشن پر علاقہ کے اندر واقع ہے اور جسے x کی کچھ خاص قدروں a اور b کے درمیان دکھایا گیا ہے۔

ہم x محور طولی مختص x=a، x=b اور منحنی y=f(x) کے درمیان واقع علاقہ کے کل رقبہ A کے بارے میں سوچ سکتے ہیں، جو کہ نتیجتاً پتلی پتیوں کے ابتدائی رقبوں کو جمع کر کے علاقہ PQRSP سے ہو کر گزرتا ہے۔ علامتی طور پر ہم اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

$$A= \int_a^b dA = \int_a^b ydx = \int_a^b f(x)\,dx$$



شکل 8.2

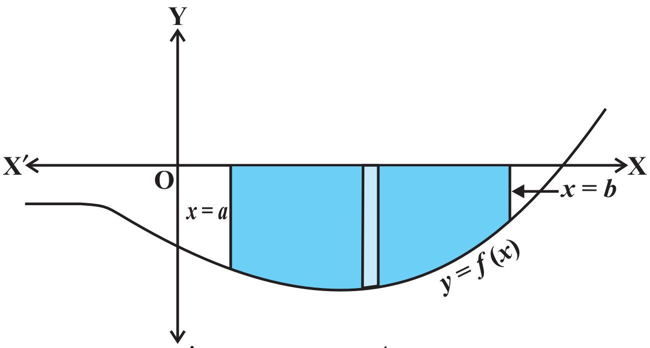
منحنی x=g(y)، y محور اور خطوط y=c، y=d سے گھرے ہوئے علاقہ A کا رقبہ اس طرح دیا گیا ہے

$$A= \int_c^d xdy = \int_c^d g(y)\,dy$$

یہاں ہم عرضی پتیوں پر غور کرتے ہیں جیسا کہ شکل 8.2 میں دکھایا گیا ہے۔

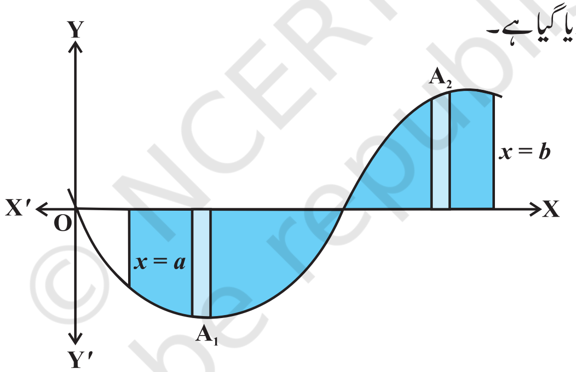
ریمارک (Remark): جس منحنی پر غور کیا جا رہا ہے اگر اس کی پوزیشن x محور کے نیچے ہے، تب کیونکہ $f(x) < 0$، x=a سے x=b تک، جیسا کہ شکل 8.3 میں دکھایا گیا ہے، منحنی، x– محور اور طولی مختص x=a، سے گھرا ہوا رقبہ منفی ہو جاتا ہے۔ لیکن، یہ صرف اس رقبہ کی عددی قدر ہے جس پر غور کیا جا رہا ہے۔ اس طرح، اگر رقبہ منفی ہے، ہم اس کی مطلق قدر لیتے ہیں، یعنی، $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$

© NCERT not to be republished

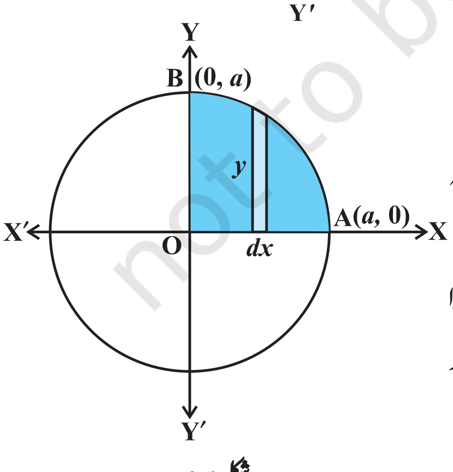


شکل 8.3

عام طور پر ایسا ہوسکتا ہے کہ منحنی کا کچھ حصہ x- محور کے اوپر ہو اور کچھ x- محور کے نیچے، جیسا کہ شکل 8.4 میں دکھایا گیا ہے۔ یہاں، $A_1 < 0$ اور $A_2 > 0$ ہے۔ اس لیے، منحنی $y = f(x)$، x- محور اور طولی مختص x=a اور x=b سے گھرا ہوا رقبہ A، $A = |A_1| + A_2$ دیا گیا ہے۔



شکل 8.4



شکل 8.5

مثال 1: دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ سے گھرے ہوئے علاقہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: شکل 8.5 سے مکمل رقبہ جو کہ دیے ہوئے دائرہ سے گھرا ہوا ہے = 4(علاقہ AOBA کا رقبہ جو کہ منحنی x محور اور طولی مختص x=0 اور x=a سے گھرا ہوا ہے)

© NCERT not to be republished

(کیونکہ دائرہ دونوں x–محور اور y–محور پر متشاکل ہے)

$= 4\int_0^a y\,dx$ (عمودی پتیاں لینے پر)

$= 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

کیونکہ $x^2 + y^2 = a^2$ ، $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ دیتا ہے

کیونکہ AOBA علاقہ ، پہلے ربع میں واقع ہے، y کو مثبت لیا گیا ہے۔تکمل کرنے پر، ہمیں وہ تمام رقبہ معلوم ہوجاتا ہے جو کہ دائرہ سے گھرا ہے

$$= 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= 4\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right] \quad = 4\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi a^2$$

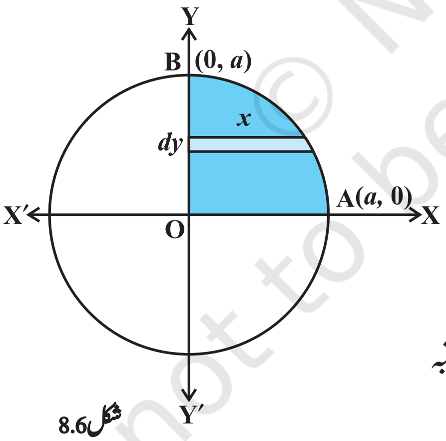
متبادل کے طور پر، عرضی پتیوں پر غور کرتے ہوئے جیسا کہ شکل 8.6 میں دکھایا گیا ہے، وہ تمام رقبہ جو کہ دائرہ کے حلقہ سے گھرا ہوا ہے۔

$= 4\int_0^a x\,dy = 4\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\,dy$ (کیوں؟)

$$= 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{a}\right]_0^a$$

$$= 4\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= 4\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2} = \pi a^2$$



شکل 8.6

مثال 2: ناقص (ellipse) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ سے گھرا ہوا رقبہ معلوم کیجیے

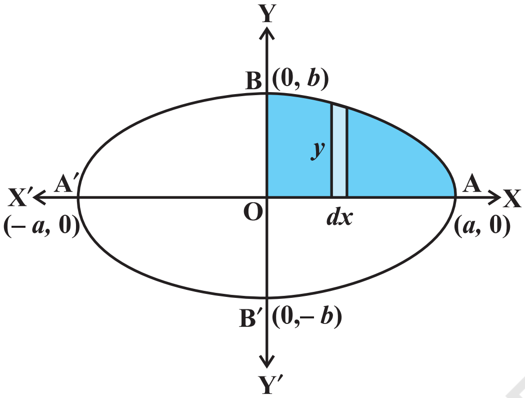
حل: شکل 8.7 سے، ناقص سے گھرے ہوئے علاقہ ABA′B′A کا رقبہ

$= 4$ (پہلے ربع میں منحنی، x محور اور مختص x=0، x=a سے گھرے ہوئے علاقہ AOBA کا رقبہ)

(کیونکہ ناقص دونوں x– محور اور y– محور کے متشاکل ہے)

$$= 4\int_0^a y\,dx \qquad \text{(عمودی پتیاں لینے پر)}$$

اب $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ، $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ دیتا ہے،لیکن کیونکہ علاقہ AOBA پہلے ربع میں واقع ہے، y کو مثبت لیا گیا ہے۔اس لیے،مطلوب رقبہ ہے



شکل 8.7

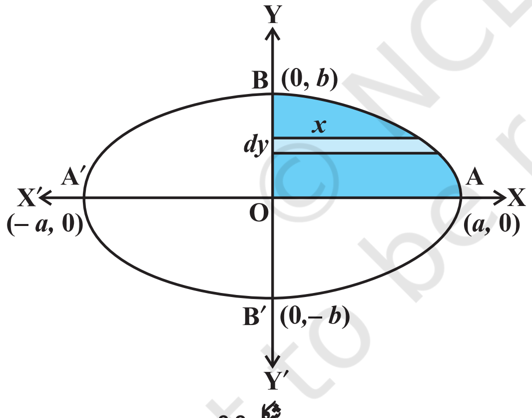
$$= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a \quad \text{(کیوں؟)}$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\left(\frac{a}{2}\times 0+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right)-0\right]$$

$$= \frac{4b}{a}\,\frac{a^2}{2}\,\frac{\pi}{2}=\pi ab$$

متبادل کے طور پر،عرضی پٹیوں پر غور کرتے ہوئے جیسا کہ شکل 8.8 میں دکھایا گیا ہے،ناقص کا رقبہ برابر ہے



شکل 8.8

$$= 4\int_0^b x\,dy = 4\frac{a}{b}\int_0^{0}\sqrt{b^2-y^2}\,dy \quad \text{(کیوں؟)}$$

$$= \frac{4a}{b}\left[\frac{y}{2}\sqrt{b^2-y^2}+\frac{b^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{b}\right]_0^b$$

$$= \frac{4a}{b}\left[\left(\frac{b}{2}\times 0+\frac{b^2}{2}\sin^{-1}1\right)-0\right]$$

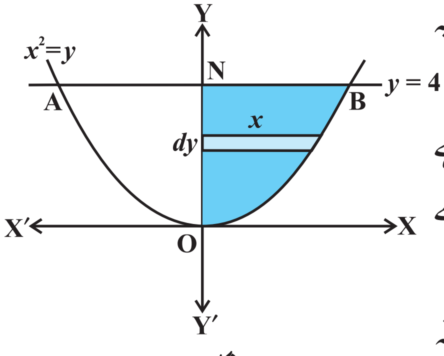
$$= \frac{4a}{b}\,\frac{b^2}{2}\,\frac{\pi}{2}=\pi ab$$

8.2.1 ایک منحنی اور ایک خط سے گھرے ہوئے علاقہ کا رقبہ

(The area of the region bounded by a curve and a line)

اس ذیلی سیکشن میں، ہم ایک خط اور دائرہ، ایک خط اور ایک مکافی، ایک خط اور ایک ناقص کے درمیان گھرے ہوئے علاقہ کا رقبہ معلوم کریں گے۔ اوپر بتائے ہوئے منحنیوں کی مساواتیں اپنی صرف معیاری شکل میں ہی ہوں گی کیونکہ دوسری شکل میں مسئلہ(Case) اس کتاب کی حدود سے باہر ہیں۔

© NCERT not to be republished



شکل 8.9

مثال 3: منحنی $y = x^2$ اور خط y=4 سے گھرے ہوئے علاقہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

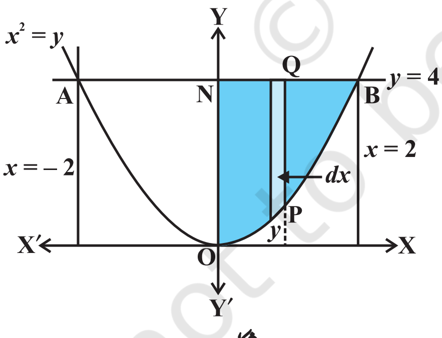
حل: کیونکہ دیا ہوا منحنی جو کہ مساوات $y = x^2$ سے ظاہر کیا گیا ہے ایک مکافی ہے جو کہ صرف y محور پر متشاکل ہے، اس لیے شکل 8.9 سے علاقہ AOBA کا مطلوبہ رقبہ اس طرح دیا گیا ہے

(منحنی، y محور اور خطوط y=0 اور y=4) سے گھرے ہوئے علاقہ BONB کا رقبہ $2 = 2\int_0^4 x dy$

$$= 2\int_0^4 \sqrt{y}\, dy = 2\times\frac{2}{3}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{4}{3}\times 8 = \frac{32}{3}$$ (کیوں؟)

یہاں، ہم نے عرضی پٹیاں لی ہیں جیسا کہ شکل 8.9 میں دکھایا گیا ہے۔

متبادل کے طور پر، AOBA علاقہ کا رقبہ حاصل کرنے کے لیے ہم عمودی پٹیوں پر غور کر سکتے ہیں جیسا کہ شکل 8.10 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے آخر میں، ہم مساوات $x^2 = y$ اور y=4 کو حل کرتے ہیں جو x=–2 اور x=2 دیتا ہے۔



شکل 8.10

اس طرح علاقہ AOBA کو منحنی $y = 4$، $y = x^2$ اور طولی مختص $x = -2$ اور $x = 2$ سے گھرے ہوئے علاقہ کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

اس لیے علاقہ AOBA کا رقبہ

$$= \int_{-2}^{2} y dx$$

(y = (Q کا y مختص) – (P کا y مختص) $= 4 - x^2$)

$$= 2\int_0^2 \left(4 - x^2\right) dx \qquad \text{(کیوں؟)}$$

$$= 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2\left[4 \times 2 - \frac{8}{3}\right] = \frac{32}{3}$$

ریمارک (Remark) مندرجہ بالا مثالوں سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ہم کسی خطہ کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے عمودی پٹیوں یا عرضی پٹیوں میں سے کسی پر بھی غور کر سکتے ہیں۔ آج کے بعد، ہم ان دونوں میں سے کسی پر بھی غور کر سکتے ہیں، زیادہ اہمیت راسی پٹیوں کو دیں گے۔

مثال 4: پہلے ربع میں x محور، خط y=x اور دائرہ $x^2 + y^2 = 32$ سے گھرے ہوئے حلقہ کا خطہ معلوم کیجیے۔

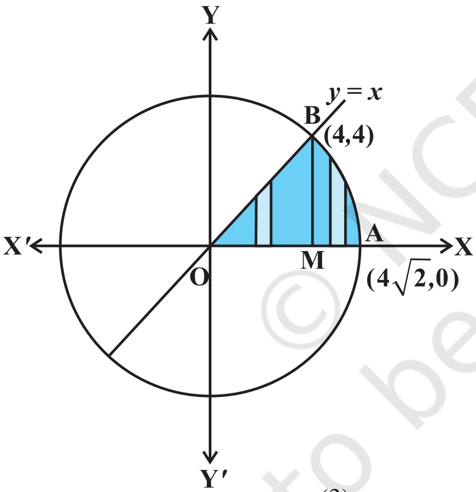
حل: دی ہوئی مساوات ہیں

$$y = x \qquad \text{(1)}\ldots\ldots\ldots$$

اور

$$x^2 + y^2 = 32 \qquad \text{(2)}\ldots\ldots\ldots$$

(1) اور (2) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ خط اور دائرہ B(4,4) پر پہلے ربع میں ملتے ہیں شکل (8.11)۔ x محور پر BM عمود کھینچیے۔



شکل 8.11

اس لیے، مطلوبہ رقبہ = خطہ OBMO کا رقبہ + خطہ BMAB کا رقبہ

اب، خطہ OBMO کا رقبہ

$$= \int_0^4 y\,dx = \int_0^4 x\,dx \qquad \text{(3)}\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^4 = 8$$

دوبارہ، خطہ BMAB کا رقبہ

$$= \int_4^{4\sqrt{2}} y\,dx = \int_4^{4\sqrt{2}} \sqrt{32 - x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x\sqrt{32 - x^2} + \frac{1}{2} \times 32 \times \sin^{-1}\frac{x}{4\sqrt{2}}\right]_4^{4\sqrt{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}4\sqrt{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times 32\times \sin^{-1}1\right) - \left(\frac{4}{2}\sqrt{32-16} + \frac{1}{2}\times 32\times \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

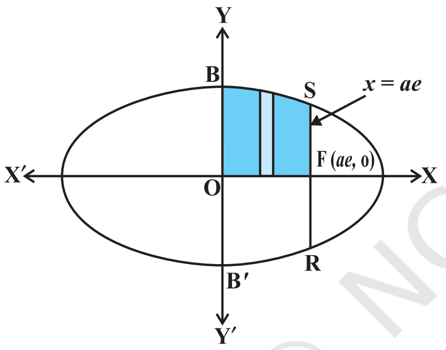
$$= 8\pi - (8+4\pi) = 4\pi - 8 \quad \text{(4)}\ldots\ldots\ldots$$

(3) اور (4) کا مجموعہ کرنے پر، ہمیں مطلوبہ رقبہ حاصل ہوتا ہے = 4π

مثال 5: ناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ اور طولی مختص x=0 اور x=ae سے گھری ہوئی جگہ کا رقبہ معلوم کیجیے، جہاں $b^2 = a^2(1-e^2)$ اور $e<1$ ہے۔

حل: حلقہ BOB'RFSB کا مطلوب رقبہ ہے (شکل 8.12) ناقص اور قطاروں x=0 اور x=ae سے گھرا ہوا ہے۔

یہ نوٹ کر لیجیے کہ حلقہ BOB'RFSB کا رقبہ برابر ہے



شکل 8.12

$$= 2\int_0^{ae} y\,dx = 2\frac{b}{a}\int_0^{ae}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{2b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^{ae}$$

$$= \frac{2b}{2a}\left[ae\sqrt{a^2-a^2e^2} + a^2\sin^{-1}e\right]$$

$$= ab\left[e\sqrt{1-e^2} + \sin^{-1}e\right]$$

مشق 8.1

1۔ منحنی $y^2 = x$ اور خطوط $x = 1$ ، $x = 4$ اور x– محور سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

2۔ پہلے ربع میں $x = 4$ ، $x = 2$ ، $y^2 = 9x$ اور x– محور سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

3۔ پہلے ربع میں $y = 4$ ، $y = 2$ ، $x^2 = 4y$ اور y– محور سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

4۔ ناقص $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

5۔ ناقص $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

6۔ پہلے ربع میں x– محور، خط $x = \sqrt{3}y$ اور دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

© NCERT not to be republished

7۔ خط $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ کے ذریعہ کاٹے گئے دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے چھوٹے حصے کا رقبہ معلوم کیجیے۔

8۔ $x=y^2$ اور $x=4$ کے درمیان کا رقبہ خط $x=a$ سے دو برابر حصوں میں باٹا گیا ہے، a کی قدر معلوم کیجیے۔

9۔ مکافی $y=x^2$ اور $y=|x|$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

10۔ مخنی $x^2=4y$ اور خط $x=4y-2$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

11۔ مخنی $y^2=4x$ اور خط $x=3$ گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

درج ذیل سوال 12 اور 13 میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے۔

12۔ پہلے ربع میں دائرہ $x^2+y^2=4$ اور خطوط $x=0$ اور $x=2$ سے گھرے ہوئے خطّہ کا رقبہ ہے

(A) π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D)

13۔ مخنی $y^2=4x$، y–محور اور خط $y=3$ سے گھرے ہوئے خطّہ کا رقبہ ہے

(A) 2 (B) $\frac{9}{4}$ (C) $\frac{9}{3}$ (D)

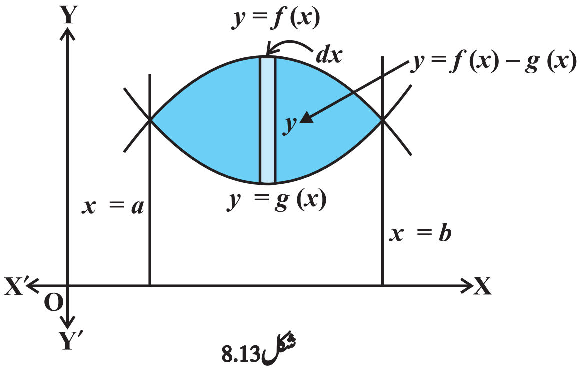
8.3 دو منحنیوں کے درمیان رقبہ (Area between Two Curves)

وجدانی طور پر لیبنیٹز کی صحیح سمجھ سے تکمل ایک رقبہ معلوم کرنے کا عمل ہے، جس میں خطہ کے ابتدائی رقبہ کو لاتعداد چھوٹی چھوٹی پتیوں میں کاٹا جاتا ہے اور پھر ان ابتدائی رقبوں کو جمع کیا جاتا ہے۔ مان لیجیے ہمیں دو منحنی جو کہ $y=f(x)$ ، $y=g(x)$ جنھیں ظاہر کیا گیا ہے، جہاں، $[a,b]$ میں $f(x)\geq g(x)$ ہے جیسا کہ شکل 8.13 میں دکھایا گیا ہے۔ یہاں ان دونوں منحنیوں کے نقطہ تقاطع $x=a$ اور $x=b$ سے دیے گئے ہیں جو کہ دونوں منحنیوں کی دی ہوئی مساوات سے y کی مشترک قدر لینے پر حاصل ہوئے ہیں۔

تکملے کے ضابطہ کو شکل دینے کے لیے ابتدائی رقبہ کو عمودی پتیوں کی شکل میں لینا زیادہ بہتر ہے (آسان ہے) جیسا کہ شکل (8.13) میں ظاہر کیا گیا ہے۔ ابتدائی پتیوں کی اونچائی $f(x)-g(x)$ ہے اور چوڑائی dx ہے اس طرح ابتدائی رقبہ dA برابر ہے

$$dA=[f(x)-g(x)]dx$$

© NCERT not to be republished



شکل 8.13

اور کل رقبہ A اس طرح لیا گیا ہے

$$A = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

متبادل کے طور پر،

A = [$y = f(x)$، x محور اور خطوط $x = a$، $x = b$ سے گھرا ہوا رقبہ]

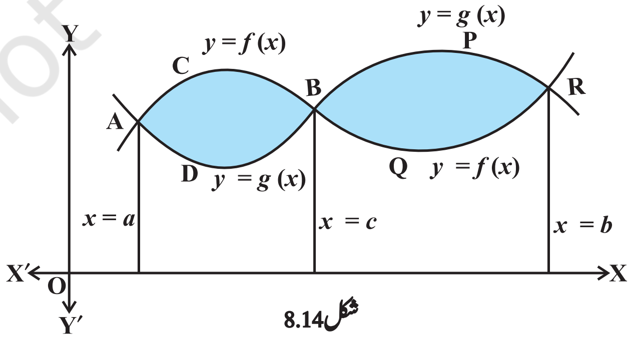
− [$y = g(x)$، x محور اور خطوط $x = a$، $x = b$ سے گھرا ہوا رقبہ]

$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$، جہاں $[a,b]$ میں $f(x) \ge g(x)$ ہے

اگر $[a,c]$ میں $f(x) \ge g(x)$ ہے اور $[c,b]$ میں $f(x) \le g(x)$ ہے، جہاں $a < c < b$ ہے جیسا کہ شکل 8.14 میں دکھایا گیا ہے۔ تب منحنیوں سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ اس طرح لکھا جا سکتا ہے

کل رقبہ = حلقہ ABCDA کا رقبہ + حلقہ BPRQB کا رقبہ

$$= \int_a^c [f(x)-g(x)]dx + \int_c^b [g(x)-f(x)]dx$$

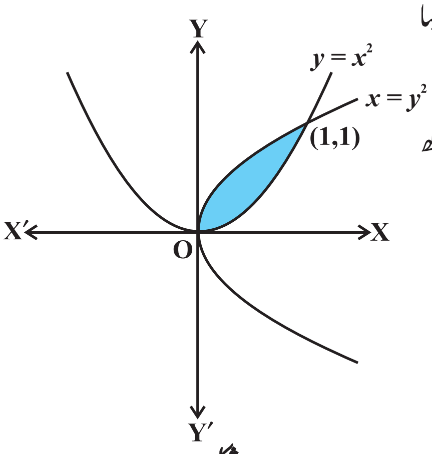


شکل 8.14

© NCERT not to be republished

مثال6: دو مکافیوں $y = x^2$ اور $y^2 = x$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: ان دونوں مکافیوں کے نقطہ تقاطع O(0,0) اور A(1,1) ہیں جیسا کہ شکل 8.15 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 8.15

یہاں ہم $y^2 = x$ یا $y = \sqrt{x} = f(x)$ اور $y = x^2 = g(x)$ رکھ سکتے ہیں، جہاں، [0,1] میں $f(x) \geq g(x)$ ہے۔

اس لیے، شیڈ خطہ کا مطلوبہ رقبہ ہے

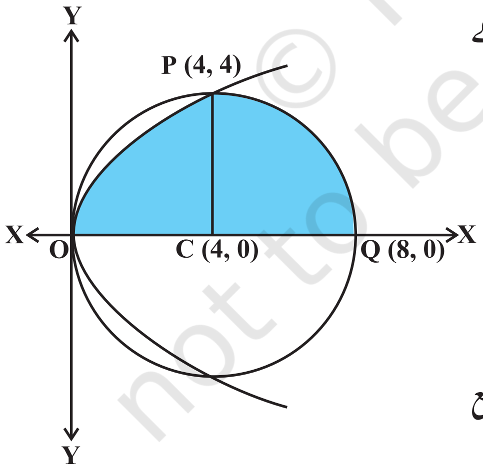
$$= \int_0^1 [f(x) - g(x)]\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^2\right] dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

مثال7: دائرہ $x^2 + y^2 = 8x$ اور مکافی $y^2 = 4x$ کے درمیان اور x- محور سے اوپر واقع خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: دائرہ کی دی ہوئی مساوات $x^2 + y^2 = 8x$ کو $(x-4)^2 + y^2 = 16$ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح دائرہ کا مرکز (4,0) اور نصف قطر 4 ہے۔ اس کا مکافی $y^2 = 4x$ کے ساتھ نقطہ تقاطع ہیں



شکل 8.16

$$x^2 + 4x = 8x$$

یا $x^2 - 4x = 0$

یا $x(x-4) = 0$

یا $x = 0$ ، $x = 4$

اس طرح، ان دونوں منحنیوں کے x- محور کے اوپر نقطہ تقاطع O(0,0) اور P(4,4) ہیں۔

شکل 8.16 سے خطہ OPQCO کا مطلوبہ رقبہ x- محور کے اوپر دونوں منحنیوں کے درمیان ہے

(حلقہ OCPO کا رقبہ) + (حلقہ PCQP کا رقبہ) =

$$= \int_0^4 y\,dx + \int_4^8 y\,dx$$

$$= 2\int_0^4 \sqrt{x}\,dx + \int_4^8 \sqrt{4^2-(x-4)^2}\,dx \qquad \text{(کیوں؟)}$$

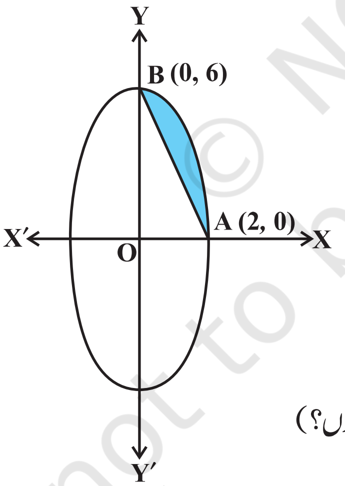
$$= 2\times\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 + \int_0^4 \sqrt{4^2-t^2}\,dt \qquad \text{جہاں } x-4=t \quad \text{(کیوں؟)}$$

$$= \frac{32}{3} + \left[\frac{t}{2}\sqrt{4^2-t^2} + \frac{1}{2}\times 4^2\times \sin^{-1}\frac{t}{4}\right]_0^4$$

$$= \frac{32}{3} + \left[\frac{4}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times 4^2\times \sin^{-1} 1\right] = \frac{32}{3} + \left[0 + 8\times\frac{\pi}{2}\right] = \frac{32}{3} + 4\pi = \frac{4}{3}(8+3\pi)$$

مثال 8: شکل 8.17 میں AOBA ناقص $9x^2 + y^2 = 36$ کا پہلے ربع میں ایک حصہ ہے جب کہ OA=2 اور OB=6 ہے۔قوس AB اور وتر AB کے درمیان رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: ناقص کی دی ہوئی مساوات $9x^2 + y^2 = 36$ کو $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$ یا $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے اور اس طرح اس کی تصویر جیسا کہ شکل 8.17 میں دیا گیا ہے، کی طرح ہے۔



شکل 8.17

اسی طرح، وتر AB کی مساوات ہے

$$y - 0 = \frac{6-0}{0-2}(x-2)$$

یا $y = -3(x-2)$

یا $y = -3x + 6$

شیڈیڈ خطہ کا رقبہ جیسا کہ شکل 8.17 میں دکھایا گیا ہے۔

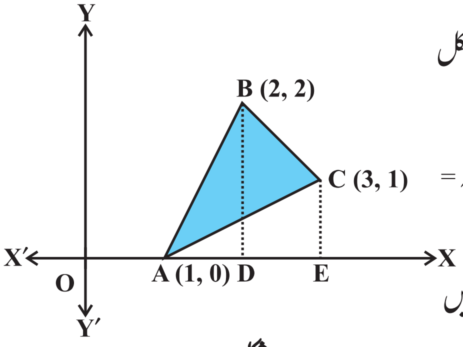
$$= 3\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx - \int_0^2 (6-3x)\,dx \qquad \text{(کیوں؟)}$$

$$= 3\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2 - \left[6x - \frac{3x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= 3\left[\frac{2}{2}\times 0 + 2\sin^{-1}(1)\right] - \left[12 - \frac{12}{2}\right] = 3\times 2\times\frac{\pi}{2} - 6 = 3\pi - 6$$

مثال 9: تکمل کا استعمال کر کے ایک مثلث سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے راس (1,0)، (2,2) اور (3,1) ہیں۔

© NCERT not to be republished



شکل 8.18

حل: مان لیجیے A(1,0)، B(2,2) اور C(3,1) مثلث ABC (شکل 8.18) کے راس ہیں۔

ΔABD کا رقبہ + منحرف BDEC کا رقبہ – ΔAEC کا رقبہ =

مثلث ABC کا رقبہ = رقبہ

اب ضلع AB، BC اور CA کی مساوات بالترتیب اس طرح دی گئی ہیں

$$y = 2(x-1) \text{ ، } y = 4 - x \text{ ، } y = \frac{1}{2}(x-1)$$

اس طرح،

$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ } = \int_1^2 2(x-1)\,dx + \int_2^3 (4-x)\,dx - \int_1^3 \frac{x-1}{2}\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 + \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_2^3 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^3$$

$$= 2\left[\left(\frac{2^2}{2}-2\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]+\left[\left(4\times 3-\frac{3^2}{2}\right)-\left(4\times 2-\frac{2^2}{2}\right)\right]-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{3^2}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2}$$

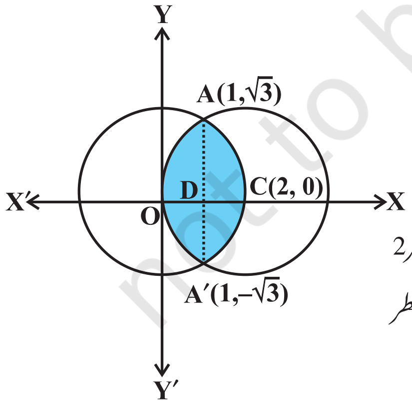
مثال 10: دو دائروں $x^2 + y^2 = 4$ اور $(x-2)^2 + y^2 = 4$ کے درمیان بند خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: دیے ہوئے دائروں کی مساوات ہیں

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad \text{(1)}\ldots\ldots\ldots$$

اور

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 \qquad \text{(2)}\ldots\ldots\ldots$$



شکل 8.19

مساوات (1) ایک دائرہ ہے جس کا مرکز O مبدا پر ہے اور نصف قطر 2 ہے۔ مساوات (2) ایک دائرہ ہے جس کا مرکز C (2,0) ہے اور نصف قطر 2 ہے۔ مساوات (1) اور (2) کو حل کرنے پر ہمارے پاس ہے

$$(x-2)^2 + y^2 = x^2 + y^2$$

یا

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2$$

© NCERT not to be republished

یا $x=1$ ، جو $y=\pm\sqrt{3}$ دیتا ہے

اس طرح دیے ہوئے دائروں کے نقطہ تقاطع $A(1,\sqrt{3})$ اور $A'(1,-\sqrt{3})$ ہیں جیسا کہ شکل 8.19 میں دکھایا گیا ہے۔

دائروں کے درمیان درکار بند خطہ کا رقبہ OACA'O

$= 2$ [علاقہ ODCAO کا رقبہ] (کیوں؟)

$= 2$ [علاقہ ODAO کا رقبہ + علاقہ DCAD کا رقبہ]

$$=2\left[\int_0^1 y\,dx+\int_1^2 y\,dx\right]$$

$$=2\left[\int_0^1\sqrt{4-(x-2)^2}\,dx+\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,dx\right]$$ (کیوں؟)

$$=2\left[\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{4-(x-2)^2}+\frac{1}{2}\times 4\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]_0^1$$

$$+2\left[\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{2}\times 4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_1^2$$

$$=\left[(x-2)\sqrt{4-(x-2)^2}+4\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]_0^1+\left[x\sqrt{4-x^2}+4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_1^2$$

$$=\left[\left(-\sqrt{3}+4\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)\right)-4\sin^{-1}(-1)\right]+\left[4\sin^{-1}1-\sqrt{3}-4\sin^{-1}\frac{1}{2}\right]$$

$$=\left[\left(-\sqrt{3}-4\times\frac{\pi}{6}\right)+4\times\frac{\pi}{2}\right]+\left[4\times\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}-4\times\frac{\pi}{6}\right]$$

$$=\left(-\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}+2\pi\right)+\left(2\pi-\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$$

مشق 8.2

1۔ ایک دائرہ $4x^2+4y^2=9$ کا رقبہ معلوم کیجیے جو کہ مکافی $x^2=4y$ کے اندر واقع ہے۔

2۔ منحنیوں $(x-1)^2+y^2=1$ اور $x^2+y^2=1$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

© NCERT not to be republished

3۔ منحنیوں $y = x^2 + 2$ ، $y = x$ ، $x = 0$ اور $x = 3$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

4۔ تکمل کا استعمال کر کے اس خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے جو کہ ایک مثلث سے گھرا ہوا ہے اور مثلث کے راس $(-1,0)$، $(1,3)$ اور $(3,2)$ ہے۔

5۔ تکمل کا استعمال کر کے اس مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے ضلعوں کی مساوات $y = 2x + 1$ ، $y = 3x + 1$ اور $x = 4$ ہیں۔

ذیل سوال 6 اور 7 میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے:

6۔ دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ اور خط $x + y = 2$ سے گھرا ہوا چھوٹا رقبہ ہے

(A) $2(\pi - 2)$ (B) $\pi - 2$ (C) $2\pi - 1$ (D)

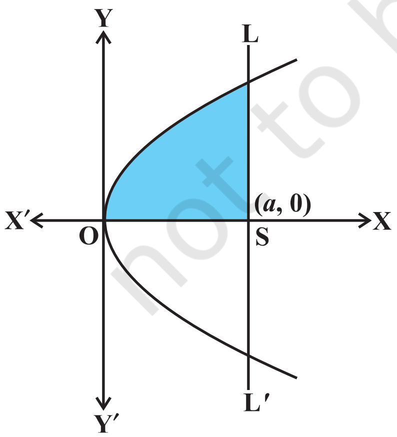
7۔ منحنیوں $y^2 = 4x$ اور $y = 2x$ کے درمیان واقع رقبہ ہے

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D)

متفرق مثالیں

مثال 11: مکافی $y^2 = 4ax$ کا رقبہ معلوم کیجیے جو کہ وتر خاص (Latus rectum) سے گھرا ہوا ہے۔

حل: شکل 8.20 سے، مکافی $y^2 = 4ax$ کا راس مبدا $(0,0)$ پر ہے۔ وتر خاص LSL' کی مساوات $x = a$ ہے۔ ساتھ ہی مکافی x–محور پر متشاکل ہے۔



شکل 8.20

خطہ $OLL'O$ کا مطلوبہ رقبہ

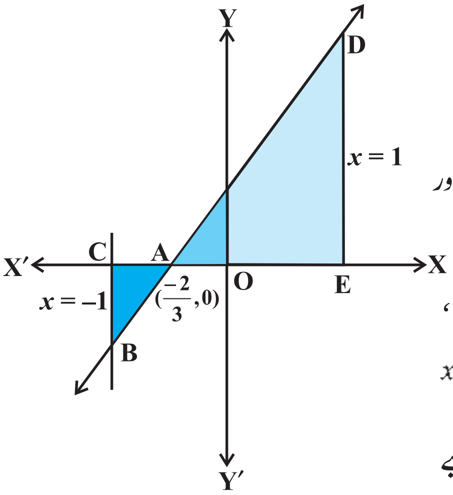
$= 2$(خطہ $OLSO$ کا رقبہ)

$$= 2\int_0^a y\,dx = 2\int_0^a \sqrt{4ax}\,dx$$

$$= 2 \times 2\sqrt{a}\int_0^a \sqrt{x}\,dx$$

$$= 4\sqrt{a} \times \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

© NCERT not to be republished



شکل 8.21

$$= \frac{8}{3}\sqrt{a}\left[a^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{8}{3}a^2$$

مثال 12: خط $y = 3x + 2$ ، x محور اور طولی مختص $x = -1$ اور $x = 1$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

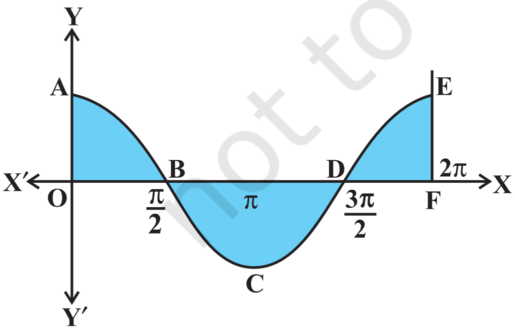
حل: جیسا کہ شکل 8.21 میں دکھایا گیا ہے، خط $y = 3x + 2$ ، x– محور سے $x = \frac{-2}{3}$ پر ملتا ہے اور اس کا گراف $x \in \left(-1, \frac{-2}{3}\right)$ کے لیے x– محور کے نیچے واقع ہے اور $x \in \left(\frac{-2}{3}, 1\right)$ کے لیے x– محور کے اوپر واقع ہے۔

مطلوبہ رقبہ = خطہ ACBA کا رقبہ + خطہ ADEA کا رقبہ

$$= \left|\int_{-1}^{\frac{-2}{3}}(3x+2)dx\right| + \int_{\frac{-2}{3}}^{1}(3x+2)dx$$

$$= \left|\left[\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{\frac{-2}{3}}\right| + \left[\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{\frac{-2}{3}}^{1} = \frac{1}{6}+\frac{25}{6} = \frac{13}{3}$$

مثال 13: $x = 0$ اور $x = 2\pi$ کے درمیان منحنی $y = \cos x$ سے گھرے ہوئے خطہ کے رقبہ کو معلوم کیجیے۔



شکل 8.22

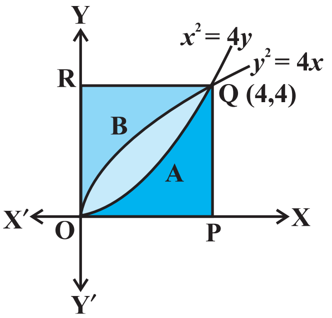
حل: شکل 8.22 سے مطلوبہ رقبہ = خطہ OABO کا رقبہ + خطہ BCDB کا رقبہ + خطہ DEFD کا رقبہ

اس طرح، ہمارے پاس مطلوبہ رقبہ ہے

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\,dx\right| + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos x\,dx$$

© NCERT not to be republished

$$= \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left|\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right| + \left[\sin x\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$



شکل 8.23

مثال 14: ثابت کیجیے کہ منحنیوں $y^2 = 4x$ اور $x^2 = 4y$، مربع کا رقبہ جو کہ $x = 0$، $x = 4$، $y = 4$ اور $y = 0$ سے گھرا ہوا ہے کو تین برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہیں۔

حل: ذہن نشین کر لیجیے کہ مکافیوں $y^2 = 4x$ اور $x^2 = 4y$ کے نقطہ تقاطع (0,0) اور (4,4) ہیں جیسا کہ شکل 8.23 میں دکھایا گیا ہے۔

اب، خطّہ OAQBO کا رقبہ جو کہ منحنیوں $y^2 = 4x$ اور $x^2 = 4y$ سے گھرا ہوا ہے

$$= \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left[2 \times \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{12}\right]_0^4$$

$$= \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3} \qquad \text{(1)}\cdots\cdots\cdots$$

دوبارہ، منحنیوں $x^2 = 4y$، $x = 0$، $x = 4$ اور x–محور سے گھرے ہوئے خطہ OPQAO کا رقبہ

$$= \int_0^4 \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{12}\left[x^3\right]_0^4 = \frac{16}{3} \qquad \text{(2)}\cdots\cdots\cdots$$

اسی طرح منحنی $y^2 = 4x$، y–محور، $y = 0$ اور $y = 4$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ

$$= \int_0^4 x dy = \int_0^4 \frac{y^2}{4} dy = \frac{1}{12}\left[y^3\right]_0^4 = \frac{16}{3} \qquad \text{(3)}\cdots\cdots\cdots$$

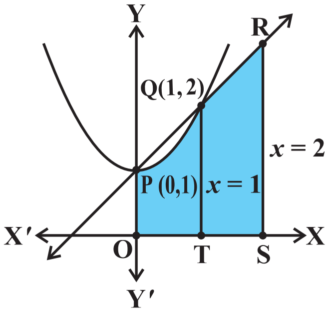
(1)، (2) اور (3) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ خطّہ OAQBO کا رقبہ = خطّہ OPQAO کا رقبہ = خطّہ OBQRO کا رقبہ، یعنی؛ مکافیوں $y^2 = 4x$ اور $x^2 = 4y$ سے گھرا ہوا رقبہ مربع کے رقبہ کو تین برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

مثال 15: خطّہ $\{(x, y) : 0 \le y \le x^2 + 1,\ 0 \le y \le x + 1,\ 0 \le x \le 2\}$ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: ہم سب سے پہلے اس خطّہ کا نقشہ بناتے ہیں جس کا رقبہ معلوم کرنا ہے۔ یہ خط درج ذیل خطوں کا تقاطع ہے۔

$$A_1 = \{(x, y) : 0 \le y \le x^2 + 1\}$$

$$A_2 = \{(x, y) : 0 \le y \le x + 1\}$$



شکل 8.24

اور $A_3 = \{(x, y) : 0 \le x \le 2\}$

$y = x^2 + 1$ اور $y = x + 1$ کے نقطہ تقاطع P(0,1) اور Q(1,2) ہیں۔ شکل 8.24 سے، مطلوبہ خطّہ OPQRSTO شیڈیڈ خطّہ ہے جس کا رقبہ ہے

= خطّہ TSRQT کا رقبہ + خطّہ OTQPO کا رقبہ

$$= \int_0^1 (x^2 + 1)\, dx + \int_1^2 (x + 1)\, dx \quad \text{(کیوں؟)}$$

$$= \left[\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\right]_0^1 + \left[\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\right]_1^2$$

$$= \left[\left(\frac{1}{3} + 1\right) - 0\right] + \left[(2 + 2) - \left(\frac{1}{2} + 1\right)\right] = \frac{23}{6}$$

باب 8 پر مبنی متفرق مشق

1۔ دی ہوئی منحنیوں اور دیے ہوئے خطوط سے گھرے خطّہ کا رقبہ معلوم کیجیے:

(i) $y = x^2$، $x = 1$، $x = 2$ اور x-محور

(ii) $y = x^4$، $x = 1$، $x = 5$ اور x-محور

2۔ منحنیوں $y = x$ اور $y = x^2$ کے درمیان رقبہ معلوم کیجیے۔

3۔ اس خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے جو کہ پہلے ربع میں واقع ہے اور $y = 4x^2$، $x = 0$، $y = 1$ اور $y = 4$ سے گھرا ہوا ہے۔

4۔ گراف $y = |x + 3|$ کا گراف بنایئے اور $\int_{-6}^{0} |x + 3|\, dx$ کی قیمت کا اندازہ لگایئے۔

5۔ منحنی $y = \sin x$ سے گھرے ہوئے اور $x = 0$ اور $x = 2\pi$ کے درمیان خطّہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

6۔ مکافی $y^2 = 4ax$ اور خط $y = mx$ کے درمیان بند خطّہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

7۔ مکافی $4y = 3x^2$ اور خط $2y = 3x + 12$ کے درمیان بند خطّہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

8۔ چھوٹے خطّہ کا رقبہ معلوم کیجیے جو کہ ناقص $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ اور خط $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ سے گھرا ہوا ہے۔

9۔ چھوٹے خطّہ کا رقبہ معلوم کیجیے جو کہ ناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ اور خط $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ سے گھرا ہوا ہے۔

© NCERT not to be republished

10۔ مکافی $x^2 = y$، خط $y = x + 2$ اور x-محور سے گھرے ہوئے بند خطّہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

11۔ تکمل کے طریقے کا استعمال کر کے منحنی $|x|+|y|=1$ سے گھرے ہوئے خطّہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

(اشارہ: مطلوبہ خطّہ (علاقہ) خطوط $x + y = 1$، $x - y = 1$، $x + y = 1$ اور $-x+y = 1$ سے گھرا ہوا ہے)

12۔ منحنیوں $\{(x, y) : y \geq x^2$ اور $y = |x|\}$ سے گھرے ہوئے خطّہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

13۔ تکمل کے طریقے کا استعمال کر کے مثلث ABC کا رقبہ معلوم کیجیے، جس کے راسوں کے مختص A(2,0)، B(4,5) اور C(6,3) ہیں۔

14۔ تکمل کے طریقے کا استعمال کر کے اس خطّہ کا رقبہ معلوم کیجیے جو خطوط $2x + y = 4$، $3x - 2y = 6$ اور $x - 3y + 5 = 0$ سے گھرا ہوا ہے۔

15۔ خطہ $\{(x, y) : y^2 \leq 4x,\ 4x^2 + 4y^2 \leq 9\}$ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

مندرجہ ذیل سوال 16 تا 20 میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے

16۔ منحنی $y = x^3$، x-محور اور طولِ مختص $x = -2$ اور $x = 1$ سے گھرا ہوا رقبہ ہے

(A) -9 (B) $\frac{-15}{4}$ (C) $\frac{15}{4}$ (D) $\frac{17}{4}$

17۔ منحنی $y = x|x|$، x-محور اور طولِ مختص $x = -1$ اور $x = 1$ سے گھرا ہوا رقبہ ہے

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

18۔ دائرہ $x^2 + y^2 = 16$ کا وہ رقبہ جو مکافی $y^2 = 6x$ کے باہر ہے

(A) $\frac{4}{3}(4\pi - \sqrt{3})$ (B) $\frac{4}{3}(4\pi + \sqrt{3})$ (C) $\frac{4}{3}(8\pi - \sqrt{3})$ (D) $\frac{4}{3}(8\pi + \sqrt{3})$

19۔ y محور، $y = \cos x$ اور $y = \sin x$، جہاں $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ سے گھرا ہوا رقبہ ہے

(A) $2(\sqrt{2} - 1)$ (B) $\sqrt{2} - 1$ (C) $\sqrt{2} + 1$ (D) $\sqrt{2}$

© NCERT not to be republished

خلاصہ (Summary)

- منحنی $y = (f)x$، x–محور اور خطوط $x = a$ اور $x = b$ $(b > a)$ سے گھرے ہوئے خطّہ کا رقبہ اس ضابطہ کی مدد سے دیا گیا ہے: $\text{رقبہ} = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx$
- منحنی $x = \phi(y)$، y–محور اور خطوط $y = c$، $y = d$ سے گھرے ہوئے خطّہ کا رقبہ اس ضابطہ سے دیا گیا ہے۔

$$\text{رقبہ} = \int_c^d x dy = \int_c^d \phi(y) dy$$

- منحنیوں $y = f(x)$، $y = g(x)$ اور خطوط $x = a$، $x = b$ سے گھرے ہوئے خطّہ کا رقبہ اس ضابطہ سے دیا گیا ہے

$$\text{رقبہ} = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$ جہاں $[a,b]$ میں $f(x) \geq g(x)$

- اگر $[a,b]$ میں $f(x) \geq g(x)$ ہے اور $[c,b]$ میں $f(x) \leq g(x)$، $a < c < b$ تب

$$\text{رقبہ} = \int_a^c [f(x) - g(x)] dx + \int_c^b [g(x) - f(x)] dx$$

تاریخ کے اوراق سے (Historical Note)

تکمل احصا کا اصل پچھلے زمانے میں ریاضی کی پیدائش کے ساتھ چلا جاتا ہے اور پرانے زمانے کے یونانی (Greece) ریاضی دانوں کے خالی کرنے کے طریقے سے اس کا رشتہ ہے۔ ہموار شکلوں کے رقبہ، سطحی رقبہ اور ٹھوس اشیا کا حجم وغیرہ معلوم کرنے کے مسئلہ میں یہ طریقہ وجود میں آیا۔ اس سوچ سے خالی کرنے کے طریقے کو تکمل کا پہلا طریقہ مانا جاسکتا ہے۔ یوڈوکس (Eudoxus)(440BC) اور آرکے میڈیز (Archimedes)(300BC) کے کام میں خالی کرنے کے طریقہ میں پرانے زمانے میں عظیم بدلاؤ آیا۔

احصا کی عبارت میں متشاکل کا نظریہ سترھویں صدی میں شروع ہوا۔ 1665 میں نیوٹن نے احصا پر اپنا کام شروع کیا اور جسے اس نے فلکسن کی عبارت کا نام دیا اور اس نے اپنی اس عبارت کا استعمال مماس اور منحنی کے ایک

© NCERT not to be republished

نقطہ پر انحنا کا نصف قطر معلوم کرنے کے لیے کیا۔ نیوٹن نے معکوس تفاعل کی بنیادی علامت سے متعارف کرایا جسے مخالف مشتق (غیر معین تکملہ) یا مماس کا معکوس طریقہ کہتے ہیں۔

لیبنٹز (Leibnitz) نے 86-1684 کے درمیان ایک مضمون ایکٹا اروڈیٹوریم میں شائع کرایا جس کو اس نے کیلکولس کے خلاصہ کا نام دیا، کیونکہ یہ لامحدود چھوٹے رقبہ کے اعداد کے مجموعہ سے تعلق رکھتا تھا، جس کا مجموعہ، اس نے علامت '∫' سے ظاہر کیا۔ 1696ء میں اس نے جے- برنولی (J. Bernoulli) کی صلاح پر عمل کیا اور اس مضمون کو تکمل احصا کا نام دیا۔ یہ نیوٹن کے مماس کے معکوس طریقہ کے مطابق ہے۔

نیوٹن اور لیبنیٹز دونوں نے کافی غیر انحصار نظریہ کو اپنایا جو کہ کافی مختلف تھا۔ حالانکہ، ان کے مطابق نظریہ اسی نتیجہ پر پہنچے جو کہ عملی طور پر یکساں تھے۔ لیبنیٹز نے معین تکملہ کی علامت کا استعمال کیا اور اس سے صاف ظاہر ہے کہ پہلے اس نے صاف طور پر مخالف مشتق اور محدود تکملہ کہ درمیان بنے رشتے کو خوش آمدید کہا۔

نتیجتاً، تکملہ احصا کا نظریہ اور بنیادی نظریہ اور اس کی سوچ اور تفرق احصا کے ساتھ اس کا بنیادی رشتہ سترھویں صدی کے آخیر میں پی- ڈی- فرمیٹ(P.de Fermat)، آئی- نیوٹن(I. Newton)اور جی- لیبنیٹز(G. Leibnitz) کے کام کے ساتھ فروغ پایا۔

حالانکہ انتہا کا تصور قابل سوچ تھا جو کہ انیسویں صدی میں اے- ایل- کوچے(A.L.Cauchy) کے کام میں فروغ پایا۔ آخیر میں لی- سوفیس(Lie Sophie's) کے ذریعہ دیا گیا درج ذیل قول بیش قیمتی ہے۔

''یہ کہا جا سکتا ہے کہ تفرقی خارج قسمت اور تکملہ جو اپنے مبدا میں آرکیمیڈیز (Archimedes) کی طرف واپس جاتے ہیں، سائنس میں کیپلر، ڈیس کارٹیں، کاویلیری، فریٹ اور ویلس کی کھوج میں تعارف کرایا۔ اس بات کا دریافت کرنا کہ تفرق اور تکمل معکوس عمل ہیں نیوٹن اور لیبنیٹز سے تعلق رکھتی ہے۔