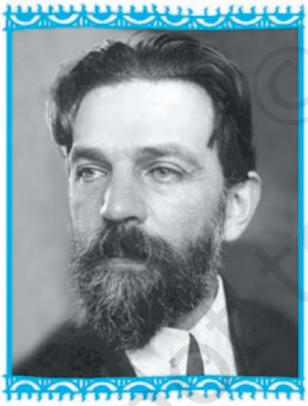
باب 12

خطی پروگرامنگ
(LINEAR PROGRAMMING)

❖ ایک طالب علم کا ریاضیاتی تجربہ نامکمل ہے اگر اسے خود ہی ایجاد کیے ہوئے مسئلہ کو حل کرنے کا موقع نہیں ملا ہو—جی. پولیا ❖

12.1 تعارف (Introduction)


ایل۔کانٹرووچ
(L. Kantorovich)

پچھلی جماعتوں میں ہم نے خطی مساواتوں کے نظام اور روزمرہ کے مسئلوں میں ان کے استعمال پر بحث کی ہے۔گیارھویں جماعت میں ہم نے خطی نامساواتوں اور دومتغیر میں خطی نامساواتوں کے نظام اور گرافی طریقہ کے ذریعے حل کے بارے میں پڑھا ہے۔ریاضی کے بہت سے استعمال میں نامساوات/مساوات کا نظم شامل ہوتا ہے۔اس باب میں ہم ذیل میں دیے گئے کچھ حقیقی زندگی کے مسئلوں کا حل خطی نامساواتوں/مساواتوں کے نظام کو عمل میں لا کر کریں گے۔

ایک فرنیچر کا تاجر صرف دوطرح کی اشیا کا کاروبار کرتا ہے۔میزیں اور کرسیاں۔اس کے پاس صرف کرنے کے لیے 50,000 روپیے ہیں،اور زیادہ سے زیادہ 60 اشیا کو رکھنے کی جگہ ہے۔ایک میز کی قیمت 2500 روپیے اور ایک کرسی کی 500 روپیے ہے۔اس کا تخمینہ ہے کہ ایک میز کی فروخت سے اسے 250 روپیے کا منافع ہوگا اور ایک کرسی کی فروخت سے 75 روپیے کا منافع حاصل ہوگا۔وہ یہ جاننا چاہتا

© NCERT not to be republished

ہے کہ موجودہ رقم سے وہ کتنی میزیں اور کتنی کرسیاں خریدے تا کہ اس کا منافع زیادہ سے زیادہ ہو، یہ مانتے ہوئے کہ جتنی اشیا وہ خریدتا ہے وہ تمام اشیا فروخت کر سکے گا۔

اس طرح کے مسئلے جو زیادہ سے زیادہ (یا کم سے کم) منافع چاہتے ہیں، مسئلہ کی عام جماعت بناتے ہیں، اوپٹیما ئیزیشن مسئلہ (Optimisation problems) کہلاتے ہیں۔ اس لیے، استحسان مسئلہ میں زیادہ سے زیادہ منافع معلوم کرنا، کم سے کم قیمت یا دستیاب ذرائع کا کم سے کم استعمال ہوسکتا ہے وغیرہ۔

ایک خاص لیکن ایک بہت اہم استحسان مسئلہ کی جماعت خطی پروگرامنگ مسئلہ ہے۔ اوپر بیان کیا گیا استحسان مسئلہ خطی پروگرامی مسئلے کی ایک مثال ہے۔ خطی پروگرامی مسئلے بہت دلچسپ ہوتے ہیں کیونکہ صنعت، تجارت اور مینجمنٹ سائنس میں ان کا بہت زیادہ استعمال ہوتا ہے۔

اس باب میں ہم صرف گرافی حل کے ذریعہ کچھ خطی پروگرامی مسئلوں کا مطالعہ کریں گے، جب کہ اس طرح کے مسائل کو حل کرنے کے اور بھی بہت سے طریقے ہیں۔

12.2 خطی پروگرامنگ مسئلہ اور ان کی ریاضیاتی تشکیل

(Linear Programming Problem and its Mathematical Formulation)

ہم اپنی بحث فرنیچر اور تاجر کی مندرجہ بالا مثال سے شروع کریں گے جو کہ ریاضیاتی مسئلہ کو دو متغیر کی تشکیل میں آگے لے جاتی ہے۔ اس مثال میں ہم مشاہدہ کرتے ہیں:

(i) تاجر اپنی رقم میز میں خریدنے یا کرسیاں خریدنے اور دونوں کو اکٹھا کرنے میں صرف کر سکتا ہے۔ اس کے آگے وہ مختلف طریقے سے روپیے صرف کر کے مختلف منافع کما سکتا ہے۔

(ii) بہت سی مختلف چڑھتی ہوئی شرطیں یا پابندیاں ہیں، جس کی وجہ سے وہ زیادہ سے زیادہ 50,000 روپیے خرچ کر سکتا ہے اور اسی طرح اس کے پاس رکھنے کی جگہ جو کہ زیادہ سے زیادہ 60 اشیا کے لیے ہے۔

مان لیجیے وہ صرف میزیں خریدنا چاہتا ہے اور کوئی کرسی نہیں، اس لیے وہ $50000 \div 2500$، یعنی 20 میزیں خرید سکتا ہے اس صورت میں اس کا منافع (250×20)، یعنی **5000 روپیے** ہوگا۔

مان لیجیے وہ صرف کرسیاں ہی خریدنا چاہتا ہے اور کوئی میز نہیں۔ وہ اپنی 50,000 روپیے کی رقم سے $50,000 \div 500$ یعنی 100 کرسیاں خرید سکتا ہے۔ لیکن وہ صرف 60 اشیا ہی رکھ سکتا ہے اس لیے اس پر صرف 60 کرسیاں ہی خریدنے کا دباؤ ہے۔

جو اسے کل منافع (60×75) یعنی **4500 روپیے** دے سکتا ہے۔

دیگر کئی ممکنات ہیں، مثال کے طور پر، وہ 10 میزیں اور 50 کرسیاں خریدتا ہے، کیونکہ وہ صرف 60 اشیا ہی جمع کر سکتا ہے۔ اس صورت میں کل منافع (10×250+50×75)، یعنی **6250 روپیے** ہوگا اور اسی طرح آگے۔

اس طرح، ہم نے دیکھا کہ تاجر اپنی رقم کو مختلف طریقوں سے خرچ کر سکتا ہے اور اسے ان ہی طریقوں سے مختلف منافع ملے گا۔

اب مسئلہ یہ ہے کہ وہ اپنی رقم کس طرح خرچ کرے تاکہ منافع زیادہ سے زیادہ ہو؟ اس سوال کا جواب دینے کے لیے ہم مسئلہ کو ریاضیاتی طور پر قاعدہ کی شکل دیں۔

12.2.1 مسئلہ کی ریاضیاتی تشکیل (Mathematical formulation of the problem)

مان لیجیے میزوں کی تعداد x اور کرسیوں کی تعداد y ہے جو کہ تاجر خریدتا ہے۔ صاف طور پر x اور y غیر منفی ہوں گے یعنی:

$$x \geq 0 \quad \text{.................(1)}$$
$$y \geq 0 \quad \text{.................(2)}$$
(غیر منفی پابندی)

تاجر پر زیادہ سے زیادہ رقم خرچ کرنے کی پابندی ہے، (یہاں یہ 50,000 روپیے ہے) اور اشیا کی زیادہ سے زیادہ تعداد جمع کرنے کی (یہاں یہ 60 ہے)۔ ریاضیاتی طور پر بیان کیا گیا ہے،

$$2500x + 500y \leq 50000$$ (سرمایہ کاری پر پابندی)

یا
$$5x + y \leq 100 \quad \text{.................(3)}$$

اور
$$5\,x + y \leq 60 \quad \text{.................(4)}$$ (ذخیرہ پر پابندی)

تاجر اس طرح سے سرمایہ کاری کرنا چاہتا ہے تاکہ اسے زیادہ سے زیادہ منافع ہو، مان لیجیے Z جو کہ x اور y کے تفاعل کے طور پر بیان کیا گیا ہے اور اس طرح

$$Z = 250x + 75y \quad \text{.................(5)}$$ (جسے معروضی تفاعل کہتے ہیں)

ریاضیاتی طور پر، دیا ہوا مسئلہ اب اس طرح چھوٹا ہو جاتا ہے

$Z = 250x + 75y$ زیادہ سے زیادہ

© NCERT not to be republished

پابندی پر منحصر:

$$5x + y \leq 100$$
$$x + y \leq 60$$
$$x \geq 0, \ y \geq 0$$

اس لیے کچھ حالات کو مدنظر رکھتے ہوئے،ہمیں خطی تفاعل z کو بڑھانا ہوگا جو کہ خطی غیر مساوات کے سیٹ سے معلوم کیا گیا ہے اور جس کے متغیر غیر منفی ہیں۔دوسرے اور کچھ مسئلہ بھی ہیں جہاں ہمیں کچھ حالات کے ساتھ تفاعل کو کم سے کم کرنا ہے جو کہ غیر منفی متغیر کے ساتھ ایک خطی غیر مساوات کے سیٹ سے معلوم کرنا ہے۔اس طرح کے مسائل کو **خطی پروگرامی مسئلے** کہا جاتا ہے۔

اس طرح،خطی پروگرامی مسئلہ وہ ہے جو احسن قدر (زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قدر) دریافت کرنے سے تعلق رکھتا ہے ایک خطی تفاعل (جسے معروضی فنکشن کہتے ہیں) بہت سے متغیروں کی (مان لیجیے x اور y)،جس کے ساتھ یہ شرط ہے کہ متغیر غیر منفی ہیں اور خطی نامساواتوں کا سیٹ اسے مطمئن کرتا ہے (جسے خطی پابندیاں کہتے ہیں) خطی رکن کا مطلب ہے کہ مسئلہ میں استعمال کیے گئے تمام ریاضیاتی رشتے خطی رشتے ہیں جب کہ پروگرامی رکن ایک خاص پروگرام یا کام کے منصوبہ کو معلوم کرنے کے طریقے کی سفارش کرتا ہے۔

اس سے پہلے کے ہم آگے بڑھیں،اب ہم کچھ ارکان کو باضابطہ بیان کرتے ہیں (جو کہ اوپر استعمال کیے گئے ہیں) جو کہ ہم خطی پروگرامی مسئلوں میں استعمال کریں گے۔

معروضی تفاعل(Objective function) خطی تفاعل $Z = ax + by$، جہاں a،b مستقلہ ہیں،جنھیں زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم تر کرنا ہے ایک خطی معروضی تفاعل کہلاتا ہے۔

اوپر کی مثال میں $Z=250x+75y$ ایک خطی معروضی تفاعل ہے۔متغیر x اور y فیصلہ کن متغیر (decision Veriables) کہلاتے ہیں۔

پابندیاں(Constraints) ایک خطی پروگرامی مسئلہ کے متغیر پر خطی نامساواتیں یا مساواتیں یا بندشیں،پابندیاں کہلاتی ہیں۔ شرطیں $x \geq 0, \ y \geq 0$ غیر منفی پابندیاں کہلاتی ہیں۔مندرجہ بالا مثال میں،(1) سے (4) نامساواتوں کا سیٹ پابندیاں ہیں۔

استحسان مسئلہ(Optimisation problem) ایک مسئلہ جو ایک خطی تفاعل (مان لیجیے دو متغیر x اور y کا) کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ نکالنا چاہتے ہے جو کہ کچھ پابندیوں پر مبنی ہے اور خطی نامساواتوں کے سیٹ کے ذریعہ معلوم کیا جاتا ہے ایک استحسان مسئلہ کہلاتا ہے۔خطی پروگرامی مسئلہ خاص قسم کے استحسان مسئلے ہیں۔مندرجہ بالا مسئلہ جو کہ ایک تاجر کے ذریعہ دی ہوئی رقم کو کرسیاں اور میزیں خرید کر خرچ کرنا ہے ایک استحسان مسئلہ کی مثال ہے اور ساتھ ہی یہ ایک خطی پروگرامی مسئلہ ہے۔

اب ہم اس پر بحث کریں گے کہ کس طرح ایک خطی پروگرامی مسئلہ کا حل معلوم کیا جاتا ہے۔اس باب میں ہم صرف گرافی طریقوں کا ہی استعمال کریں گے۔

12.2.2 خطی پروگرامی مسئلوں کو گرافی طریقہ سے حل کرنا

(Graphical method of solving linear programming problems)

گیارھویں جماعت میں ہم نے دو متغیروں x اور y میں ملوث ایک خطی نامساوات کے نظام کو بنانے اور اس کا حل گراف کے ذریعے معلوم کرنے کے بارے میں پڑھا تھا۔ ہم سیکشن 12.2 میں بحث کیے گئے میز اور کرسیوں میں سرمایہ کاری کیے گئے مسئلہ کا حوالہ دیتے ہیں۔ ہم اب اس مسئلہ کو گراف کے ذریعہ حل کریں گے۔ ہم بندشوں کا گراف بنانا چاہتے ہیں جس طرح خطی نامساواتیں بیان کی گئی ہیں۔

$$5x + y \le 100 \quad \text{.................(1)}$$

$$x + y \le 60 \quad \text{.................(2)}$$

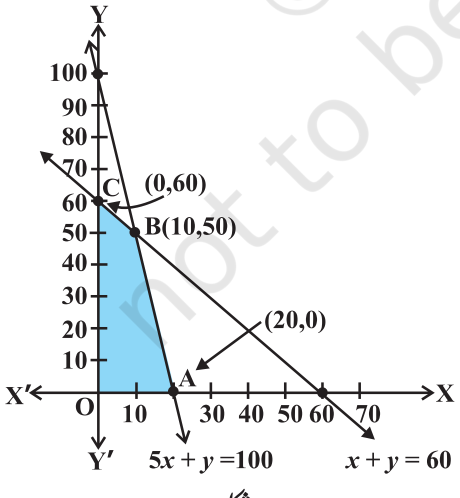
$$x \ge 0 \quad \text{.................(3)}$$

$$y \ge 0 \quad \text{.................(4)}$$

اس نظام کا گراف (شیڈ کیا ہوا حصہ) دو نقاط پر مبنی ہے جو آدھی مستوی پر مشترک ہیں اور جو کہ (1) سے (4) نامساواتوں کے ذریعے معلوم کی گئی ہیں (شکل 12.1)۔ اس علاقہ میں ہر ایک نقطہ ایک ممکن پسند کو ظاہر کرتا ہے جو کہ تاجر کے لیے میزوں اور کرسیوں میں سرمایہ کاری کے لیے کھلا ہے۔ اس لیے علاقہ مسئلہ کے لیے ممکن علاقہ کہلاتا ہے۔ اس علاقہ کا ہر ایک نقطہ مسئلہ کا ممکن حل کہلاتا ہے۔ اس طرح ہمارے پاس ہے،

معقول خطہ (feasible region) ایک خطی پروگرامی مسئلہ کا مشترکہ علاقہ جو کہ تمام پابندیوں سے معلوم کیا گیا ہے اور جس میں غیر منفی پابندیاں $x, y \ge 0$ بھی شامل ہیں مسئلہ کے لیے معقول حل کہلاتا ہے۔ شکل 12.1 میں، علاقہ OABC (شیڈ) مسئلہ کا معقول حل کہلاتا ہے۔ ممکن علاقہ کے علاوہ علاقہ ایک غیر ممکن علاقہ **(infeasible region)** کہلاتا ہے۔

معقول حل (Feasible solution) معقول خطہ کی حد پر اور حد کے اندر نقاط پابندیوں کا معقول حل کہلاتا ہے۔ شکل 12.1 میں ممکن علاقہ OABC کی حد پر اور حد کے اندر ایک نقطہ مسئلہ کا ممکن حل ہے۔ مثال کے طور پر (10, 50) مسئلہ کا معقول حل ہے اور اسی طرح نقاط (0,60)، (20,0) وغیرہ ہیں۔



شکل 12.1

معقول خطّہ کے باہر کوئی بھی نقطہ ایک غیر ممکن حل کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر، نقطہ (25,40) مسئلہ کا ایک غیر ممکن حل ہے۔

© NCERT not to be republished

احسن (معقول) حل: (Optimal (feasible) Solution): کوئی بھی نقطہ معقول خطّہ میں جو کہ معروضی تفاعل کی احسن قدر (عظیم یا قلیل) دیتا ہے، احسن حل کہلاتا ہے۔

اب، ہم دیکھتے ہیں کہ ممکن علاقہ OABC میں ہر ایک نقطہ تمام پابندیوں کو مطمئن کرتا ہے جیسا کہ (1) تا (4) میں دیا گیا ہے اور کیونکہ بہت سے لاتعداد نقاط ہیں، ظاہر نہیں ہے کہ ہم کس طرح نقطہ کو معلوم کریں جو کہ معروضی تفاعل Z = 250x + 75y کی عظیم قدر دے۔ اِن حالات سے نمٹنے کے لیے، ہم ذیل مسئلہ کا استعمال کرتے ہیں جو کہ خطی پروگرامی مسئلہ کو حل کرنے کے لیے بنیادی ہے۔ ان مسئلوں کا ثبوت اس کتاب کی حدود سے باہر ہے۔

مسئلہ 1: مان لیجیے ایک خطی پروگرامی مسئلہ کے لیے R ایک معقول خطّہ (محدب کثیر ضلعی) ہے اور معروضی تفاعل سے $Z=ax+by$ ہے۔ جب Z ایک احسن قدر (عظیم یا قلیل) رکھتا ہے جہاں متغیر x اور y خطی نامساواتوں کی پابندی پر ظاہر کرنے پر مبنی ہیں، یہ احسن قدر ممکن علاقہ میں ایک کونے کے نقطہ پر ملنی چاہیے*

مسئلہ 2: مان لیجیے R ایک خطی پروگرامی مسئلہ کے لیے ممکن علاقہ ہے، اور مان لیجیے $Z = ax + by$ ایک معروضی تفاعل ہے۔ اگر R کی حدود** (bounded) ہیں، تب معروضی تفاعل Z، R پر دونوں عظیم اور قلیل قدریں رکھتا ہے، اور اس میں سے ہر ایک R کے کونے کے نقطہ پر ملتی ہے

ریمارک: اگر R لامحدود ہے، تب ہوسکتا ہے معروضی تفاعل کی عظیم یا قلیل قدر وجود میں نہ ہو۔ حالانکہ، اگر یہ وجود میں ہے، تو یہ R کے ایک کونے کے نقطہ پر ہوسکتی ہے (مسئلہ 1 سے)

اوپر کی مثال میں محدود (ممکن) علاقہ کے کونے کے نقاط O,A,B اور C ہیں اور ان کے مختصات بالترتیب جیسے (0, 0)، (0، 60) (10, 50) اور (0, 60) معلوم کرنا آسان ہے۔ اب ہم Z کی ان قدروں کا ان نقاط پر حساب لگاتے ہیں، ہمارے پاس ہے۔

ممکن علاقہ کا راس	Z کی (روپیوں میں) مطابق قدر	
O (0,0)	0	
A (0،60)	4500	
B (10,50)	→ **6250**	عظیم
C (20,0)	5000	

* ایک معقول خطّہ کا ایک کونے کا نقطہ علاقہ میں وہ نقطہ ہے جو کہ حدود خطوط کا تقاطع ہے۔

** ایک خطی نامساواتوں کے نظام کا معقول خطّہ میں اس وقت محدود کیا جاتا ہے جب کہ یہ ایک دائرہ میں بند کیا جاسکے۔ ورنہ یہ لامحدود ہے۔ غیر محدود کا مطلب ہے کہ اس کا معقول خطّہ کسی بھی سمت میں لامحدود پھیل سکے۔

ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ تاجر کے عظیم منافع کا نتیجہ خرچ کی (10,50) کام کرنے کے طریقے سے ہے، یعنی 10 میزیں اور 50 کرسیاں خریدنا۔

خطی پروگرامی مسئلہ کے حل کرنے کے اس طریقے کو کارنر نقطہ طریقہ کہتے ہیں۔

یہ طریقہ ذیل مراحل پر مبنی ہے۔

1۔ خطی پروگرامی مسئلہ کا معقول خطّہ معلوم کیجیے اور اس کے کارنر کے نقاط (راس) معلوم کیجیے یا تو جانچ (inspection) کے طریقے سے یا ایک نقطہ پر دو نقاط خطوط کی دو مساوات کو حل کرنے کے طریقے سے۔

2۔ ہر کونے پر معروضی تفاعل $Z = ax + by$ کی قیمت کا اندازہ لگائیے۔ مان لیجیے M اور m بالترتیب ان نقاط کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قدروں کو ظاہر کرتے ہیں۔

3۔ (i) جب **ممکن علاقہ محدود** ہے، M اور m، Z کی عظیم اور قلیل قدریں ہیں۔

(ii) اگر کسی کیس میں، **ممکن علاقہ غیر محدود** ہے، ہمارے پاس ہے:

4۔ (a) Z کی عظیم قدر M ہے، اگر ممکن علاقہ کے ساتھ کھلی ہوئی آدھی مستوی جو کہ $ax + by > M$ سے معلوم کی گئی ہے، کے ساتھ کوئی مشترک نقطہ نہیں رکھتی۔ ورنہ z کی کوئی عظیم قدر نہیں ہے۔

(b) اسی طرح، m، Z کی قلیل قدر ہے، اگر کھلی ہوئی آدھی مستوی جو کہ $ax + by < m$ سے معلوم کی گئی ہے، معقول خطّہ کے ساتھ کوئی مشترک نقطہ نہیں رکھتی۔ ورنہ Z کی کوئی قلیل قدر نہیں ہے۔

اب ہم کچھ مثالوں کو مدنظر رکھتے ہوئے ان اقدامات کو کارنر نقطہ طریقے سے سمجھائیں گے۔

مثال 1: ذیل خطی پروگرامی مسئلہ کو گراف کے ذریعہ حل کیجیے:

زیادہ سے زیادہ $Z = 4x + y$ ...(1)

معروضی پابندی کے ساتھ

$x + y \leq 50$ ...(2)

$3x + y \leq 90$ ...(3)

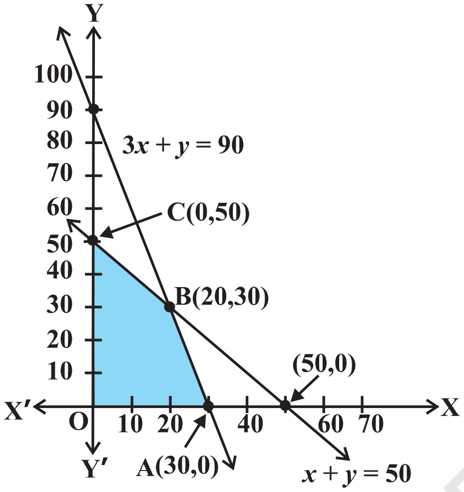
$x \geq 0, y \geq 0$ ...(4)

حل: شکل 12.2 میں شیڈڈ علاقہ ممکن علاقہ ہے جو کہ (2) تا (4) پابندیوں کے نظام سے معلوم کیا گیا ہے۔ ہم مشاہدہ کرتے ہیں

© NCERT not to be republished

کہ معقول خطّہ OABC محدود ہے۔اس لیے،اب ہم Z کی عظیم قدر معلوم کرنے کے لیے کارنر نقطہ طریقہ کا استعمال کرتے ہیں۔

کارنر نقاط O،A،B اور C کے مختص بالترتیب (0, 0)،(30, 0), (20, 30) اور (0, 50) ہیں۔اب ہم Z کا حساب ہر کارنر نقطہ پر لگاتے ہیں۔



شکل 12.2

کارنر نقطہ	Z کی مطابق قدر	
(0, 0)	0	
(30, 0)	→ 120	عظیم
(20, 30)	110	
(0, 50)	50	

اس لیے،نقطہ (30, 0) پر Z کی عظیم قدر 120 ہے۔

مثال 2: ذیل خطی پروگرامی مسئلہ کو گراف کے ذریعے حل کیجیے:

$$Z = 200\,x + 500\,y \quad \text{کم سے کم} \qquad ...(1)$$

پابندی پر منحصر

$$x + 2y \geq 10 \qquad ...(2)$$

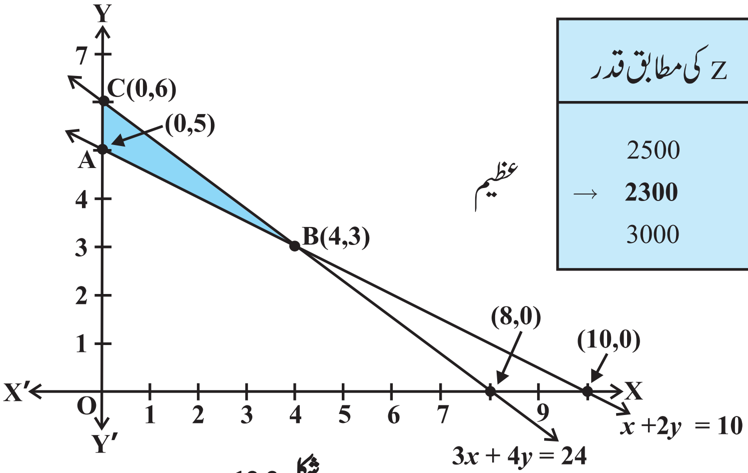
$$3x + 4y \leq 24 \qquad ...(3)$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0 \qquad ...(4)$$

حل: شکل 12.3 میں شیڈ ڈ علاقہ ABC معقول خطّہ ہے جو کہ (2) تا (4) پابندیوں کے نظام سے معلوم کیے گئے ہیں اور حدود میں ہیں۔کارنر نقاط A،B اور C کے مختصات بالترتیب (0,5)،(4,3) اور (0,6) ہیں۔اب ہم ان نقاط پر $Z = 200x + 500y$ کی قدر کا اندازہ لگائیں گے۔

اس لیے،Z کی کم از کم قدر 2300 ہے جو کہ نقطہ (4,3) پر ہے۔

© NCERT not to be republished



شکل 12.3

Z کی مطابق قدر		کارنر نقطہ
	2500	(0,5)
عظیم	→ **2300**	(4,3)
	3000	(0,6)

مثال 3: ذیل مسئلہ کو گراف کے ذریعے حل کیجیے۔

$Z = 3x + 9y$ کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ ...(1)

پابندی پر منحصر:

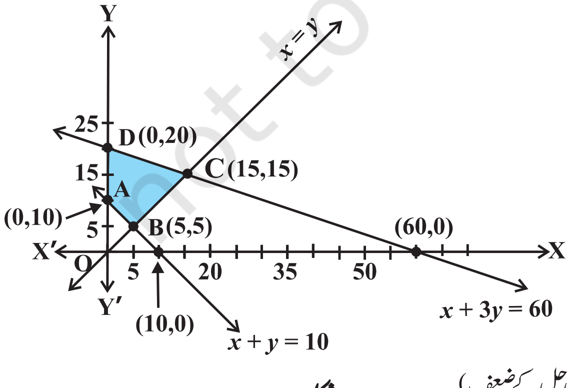
$x + 3y \leq 60$ ...(2)

$x + y \geq 10$ ...(3)

$x \leq y$ ...(4)

$x \geq 0,\ y \geq 0$ ...(5)

حل: سب سے پہلے ہم (2) تا (5) خطی نامساواتوں کے نظام کے معقول خطّہ کا گراف کھینچتے ہیں۔ معقول خطّہ ABCD شکل 12.4 میں دکھایا گیا ہے۔ نوٹ کیجیے کہ خطّہ حدود میں ہے۔ کارنر نقاط A، B، C اور D کے مختص بالترتیب (0, 10)، (5, 5)، (15,15) اور (0, 20) ہیں۔



شکل 12.4

$Z = 3x + 9y$ کی مطابق قدریں		کارنر نقاط
	90	A (0, 10)
قلیل	→ 60	B (5, 5)
عظیم	→ 180	C (15, 15)
(آپٹیمل حل کے ضعف)	180	D (0, 20)

اب ہم Z کی قلیل اور عظیم قدریں معلوم کرتے ہیں۔ جدول سے، ہم معلوم کرتے ہیں کہ نقطہ B(5,5) پر معقول خطّہ میں Z کی قدر 60 ہے۔

ہر ایک معاملے میں Z کی معقول خطّہ پر عظیم قدر دو کارنر نقاط C (15,15) اور D (0,20) پر 180 ہے۔

ریمارک (Remark): مشاہدہ کیجیے کہ، اوپر کی مثال میں، مسئلہ کے کارنر نقاط C اور D پر کثیر احسن حل ہیں، یعنی، دونوں نقاط یکساں عظیم قدر 180 دیتے ہیں۔ اس طرح کے معاملوں میں، آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قطع خط CD کے ہر ایک نقطہ پر جو کہ دو کارنر نقاط C اور D کو ملانے سے بنتا ہے، بھی یکساں عظیم قدر دیتا ہے۔ یہی اس کیس میں بھی صحیح ہے اگر دو نقاط یکساں قلیل قدریں دیتے ہیں۔

مثال 4: معروضی تفاعل کی قلیل قدر گراف کے ذریعے معلوم کیجیے:

$$Z = -50x + 20y \quad ...(1)$$

پابندیوں پر مبنی

$$2x - y \geq -5 \quad ...(2)$$

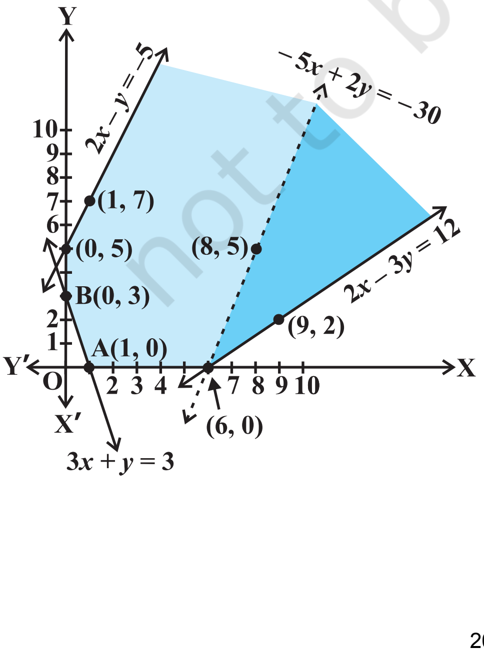
$$3x + y \geq 3 \quad ...(3)$$

$$2x - 3y \leq 12 \quad ...(4)$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \quad ...(5)$$

حل: سب سے پہلے، ہمیں (2) یا (5) نامساواتوں کے نظام کے محدود علاقہ کا گراف بنانا چاہیے۔ ممکن علاقہ (شیڈڈ) شکل 12.5 میں دکھایا گیا ہے۔ مشاہدہ کیجیے کہ معقول خطّہ کھلا ہوائے میں ہے۔

اب ہم Z کی قدر کا اندازہ کارنر نقاط پر لگاتے ہیں۔



کارنر نقاط	$Z = -50x + 20y$
(0, 5)	100
(0, 3)	60
(1, 0)	–50
(6, 0)	→ –300 سب سے چھوٹا

شکل 12.5

© NCERT not to be republished

اس جدول سے ہمیں کارنر نقطے (6,0) پر Z کی کم سے کم قدر 300– حاصل ہوئی ہے۔کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ Z کی قلیل قدر 300– ہے؟ یہ نوٹ کر لیجیے کہ اگر خطّہ کی حدود ہوتیں، یہ Z کی کم سے کم قدر Z کی قلیل قدر ہے (مسئلہ 2)۔لیکن یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ معقول خطّہ کھلا ہوا ہے۔اس لیے، Z کی قلیل قدر 300– بھی ہو سکتی ہے اور نہیں بھی۔اس کا فیصلہ کرنے کے لیے، ہم نامساوات کا گراف کھینچتے ہیں۔

$-50x + 20y < -300$ (کارنر نقطہ طریقہ کا قدم 3(ii) دیکھیے)

یعنی، $-5x + 2y < -30$

جانچ کیجیے کہ کیا نتیجتاً کھلی ہوئی آدھی مستوی میں معقول خطّہ کے ساتھ نقاط مشترک ہیں یا نہیں۔اگر اس میں نقاط مشترک ہیں، تب Z کی قلیل قدر 300– نہیں ہوگی۔ورنہ، Z، 300– کی قلیل قدر ہوگی۔

جیسا کہ شکل 12.5 میں دکھایا گیا ہے، اس میں مشترک نقاط موجود ہیں۔اس لیے $Z = -50x + 20y$ کی دی ہوئی پابندیوں کے ساتھ کوئی قلیل قدر نہیں ہے۔

اوپر کی مثال میں نقطہ (0,5) پر کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ $z = -50x + 20y$ کی عظیم قدر 100 ہے؟ اس کے لیے، جانچ کیجیے کہ کیا $-50x + 20y > 100$ کے گراف کے معقول خطّہ کے ساتھ مشترک نقاط ہیں (کیوں؟)

مثال 5: $Z = 3x + 2y$ کو کم سے کم کیجیے

پابندیوں پر منحصر

$$x + y \geq 8 \quad \dots(1)$$

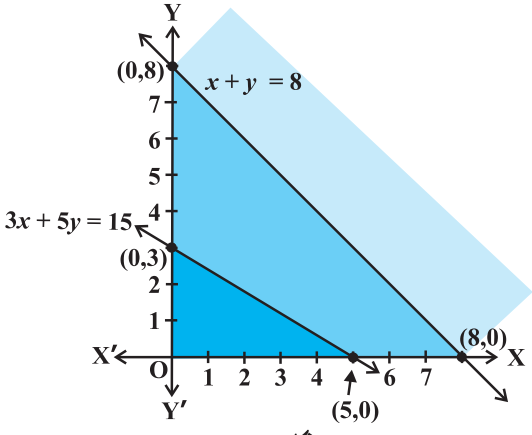
$$3x + 5y \leq 15 \quad \dots(2)$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \quad \dots(3)$$

حل: ہم (1) تا (3) نامساواتوں کے گراف کھینچتے ہیں (شکل 12.6)۔کیا کوئی معقول خطّہ ہے؟ ایسا کیوں ہے؟

شکل 12.6 سے، آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کوئی ایسا نقطہ نہیں ہے جو ایک کے بعد ایک پابندیوں کو مطمئن کر رہا ہو۔اس لیے، مسئلہ کا کوئی معقول خطّہ نہیں ہے اور اس لیے کوئی معقول حل نہیں ہے۔

© NCERT not to be republished



شکل 12.6

ریمارک (Remark): ان مثالوں سے جن پر ابھی تک ہم نے بحث کی ہے، ہم یہ غور کرتے ہیں کہ خطی پروگرامی مسئلہ کی کچھ عام خصوصیت ہیں:

(i) معقول خطّہ ہمیشہ محدب علاقہ ہے۔

(ii) معروضی تفاعل کا حل عظیم (یا قلیل)، ممکن علاقہ کے راس (کارنر) پر وجود میں آتا ہے۔ اگر کارنر دو نقاط معروضی تفاعل کی یکساں عظیم (یا قلیل) قدر دیتے ہیں، تب ان دو نقاط سے ملنے والے قطعہ خط کا ہر ایک نقطہ یکساں عظیم (یا قلیل) قدر دے گا۔

مشق 12.1

ذیل خطی پروگرامی مسئلہ کو گراف کے ذریعے حل کیجیے:

1۔ $Z = 3x + 4y$ کو زیادہ سے زیادہ کیجیے

پابندیوں پر منحصر: $x + y \le 4, x \ge 0, y \ge 0$

2۔ $Z = -3x + 4y$ کو کم سے کم کیجیے

ان پر منحصر. $x + 2y \le 8, 3x + 2y \le 12, x \ge 0, y \ge 0$

3۔ $Z = 5x + 3y$ کو زیادہ سے زیادہ کیجیے

ان پر منحصر $3x + 5y \le 15, 5x + 2y \le 10, x \ge 0, y \ge 0$

4۔ $Z = 3x + 5y$ کو کم سے کم کیجیے

تاکہ $x + 3y \ge 3, x + y \ge 2, x, y \ge 0$

5۔ $Z = 3x + 2y$ کو زیادہ سے زیادہ کیجیے

ان پر منحصر $x + 2y \le 10, 3x + y \le 15, x, y \ge 0$

6۔ $Z = x + 2y$ کو کم سے کم کیجیے

© NCERT not to be republished

اس پر منحصر $2x + y \geq 3, x + 2y \geq 6, x, y \geq 0$

دکھائیے کہ Z کا قلیل ترین دو سے زیادہ نقطوں پر واقع ہے۔

7۔ $Z = 5x + 10y$ کو کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ کیجیے

اس پر منحصر $x + 2y \leq 120, x + y \geq 60, x - 2y \geq 0, x, y \geq 0$

8۔ $Z = x + 2y$ کو کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ کیجیے

اس پر منحصر ہے $x + 2y \geq 100, 2x - y \leq 0, 2x + y \leq 200; x, y \geq 0$

9۔ $Z = -x + 2y$ کو زیادہ سے زیادہ کیجیے

ان پابندیوں پر منحصر ہے $x \geq 3, x + y \geq 5, x + 2y \geq 6, y \geq 0$

10۔ $Z = x + y$ کو زیادہ سے زیادہ کیجیے

ان پابندیوں پر منحصر ہے $x - y \leq -1, -x + y \leq 0, x, y \geq 0$

12.3 مختلف قسم کے خطی پروگرامنگ مسائل

(Different Types of Linear Programming Problems)

کچھ اہم خطی پروگرامنگ مسئلوں کی ذیل میں فہرست بنائی گئی ہے۔

1۔ صنعت کاری مسئلے (Manufacturing problems): ان مسئلوں میں ہم مختلف اشیا کی اکائیوں کی تعداد معلوم کرتے ہیں جو کہ ایک فرم کے ذریعے تیار کی گئی ہوں اور بیچی گئی ہوں، جب کہ ہر اشیا کو ایک مخصوص انسانی طاقت، مشین پر لگا ہوا وقت، اشیا کی ایک اکائی کو تیار کرنے یں مزدوری فی گھنٹہ، بنی ہوئی اشیا کی ایک اکائی کو رکھنے کی جگہ کا کرایہ وغیرہ وغیرہ درکار ہوں، تا کہ منافع زیادہ سے زیادہ ہو سکے۔

2۔ خوراک کے مسئلے (Diet problems): ان مسئلوں میں ہم مختلف قسم کے ترکیبی/غذائیت والی اشیا کی قیمت کو معلوم کرتے ہیں جو کہ خوراک میں شامل کی گئی ہیں تا کہ مطلوبہ خوراک کی قیمت کم سے کم ہو، اور ساتھ ہی اس میں ہر ایک جزو ترکیبی/غذائیت والی اشیا کی تعداد کم سے کم ہو۔

3۔ نقل وحمل مسئلے (Transportation problems): ان مسئلوں میں ہم نقل وحمل شیڈیول معلوم کرتے ہیں تا کہ ایک

© NCERT not to be republished

تا کہ ایک اشیا کو ایک پلانٹ فیکٹری سے مختلف بازاروں میں لانے لے جانے میں جو کہ مختلف مقامات پر واقع ہیں کم سے کم رقم خرچ ہو۔

آیئے اب کچھ اس طرح کے خطی پروگرامنگ مسئلوں کو حل کریں:

مثال 6: (خوراک کے مسئلہ): ایک ماہر خوراک دو طرح کے کھانوں کو اس طرح ملانے کی خواہش ظاہر کرتا ہے تا کہ مرکب میں وٹامن کی موجودگی اس طرح ہو کہ وٹامن A کی کم سے کم 8 اکائیاں اور وٹامن C کی 10 اکائیاں۔ کھانہ 'I' میں وٹامن A کی مقدار 2 اکائی/فی کلوگرام اور وہ وٹامن C کی مقدار '1' اکائی/فی کلوگرام ہو۔ کھانہ II میں وٹامن A کی مقدار '1' اکائی/فی کلوگرام اور وٹامن C کی مقدار '2' اکائی/فی کلوگرام ہو۔ اس کھانہ I کی قیمت خرید/لاگت 50 روپیے فی کلوگرام پڑتی ہے اور کھانہ II کی قیمت خرید (لاگت) 70 روپیے فی کلوگرام پڑتی ہے۔ اس مسئلہ کو ایک خطی پروگرامی مسئلہ کے طور پر فارمولے کی شکل دیجیے تا کہ اس طرح کے مرکب کی لاگت کم سے کم ہو۔

حل: مان لیجیے کہ مرکب میں غذا 'I' کی مقدار x کلوگرام اور کھانہ 'II' کی مقدار y کلوگرام ہے۔ صاف طور پر $x \geq 0, y \geq 0$ ہے۔

ہم دیے ہوئے اعداد و شمار سے ذیل جدول بناتے ہیں:

ذرائع	غذا II (y)	غذا I (x)	ضروریات
وٹامن A (اکائی/کلوگرام)	1	2	8
وٹامن C (اکائی/کلوگرام)	2	1	10
لاگت (Rs./Kg.)	70	50	

کیوں کہ مرکب میں ہر حال میں وٹامن A کی 8 اکائیاں اور وٹامن C کی 10 اکائیاں ہونی چاہیے ہیں، ہمارے پاس پابندیاں ہیں:

$$2x + y \geq 8$$

$$x + 2y \geq 10$$

x ، Z کی کلوگرام کھانہ 'I' اور y کلوگرام کھانہ 'II' خریدنے کی کل قیمت ہے

$$Z = 50x + 70y$$

© NCERT not to be republished

اس لیے مسئلہ کی ریاضیاتی تشکیل یہ ہے:

...(1) $Z = 50x + 70y$ کم سے کم کیجیے

پابندیوں پر منحصر:

...(2) $2x + y \geq 8$

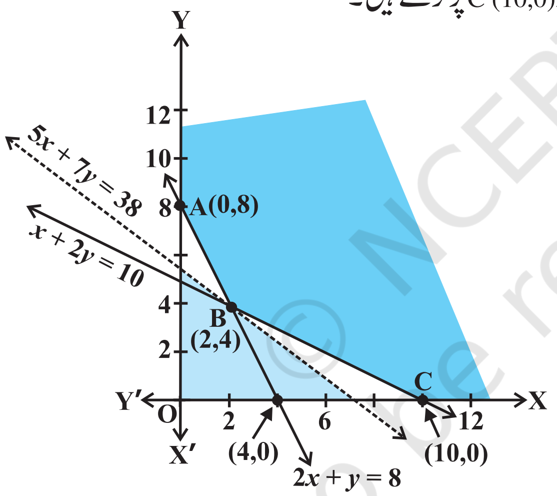
...(3) $x + 2y \geq 10$

...(4) $x, y \geq 0$

نامساواتوں (2) تا (4) کا ہم گراف کھینچتے ہیں۔ اس نظام کے ذریعہ معلوم کیا گیا معقول خطّہ شکل 12.7 میں دیا گیا ہے۔

یہاں دوبارہ، مشاہدہ کیجیے کہ معقول خطّہ کھلا ہوا ہے۔

ہم Z کی قیمت کا اندازہ کارنر نقاط A (0,8)، B (2,4) اور C (10,0) پر کرتے ہیں۔



$Z = 50x + 70y$	کارنر نقاط
560	(0,8)
380 ← قلیل	(2,4)
500	(10,0)

شکل 12.7

جدول میں ہم نے نقطہ (2,4) پر Z کی کم از کم قدر 380 معلوم کی ہے۔ کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ Z کی قلیل قدر 380 ہے؟ یاد رکھیے کہ معقول خطّہ کھلا ہوا ہے۔ اس لیے، ہمیں نامساواتوں کا گراف کھینچنا ہوگا

$50x + 70y < 380$ یعنی $5x + 7y < 38$

یہ جانچ کرنے کے لیے کہ کیا کھلی ہوئی آدھی مستوی میں معقول خطّہ کے ساتھ کوئی نقطہ مشترک ہے۔ شکل 12.7 سے ہم دیکھتے ہیں کہ اس میں کوئی نقطہ مشترک نہیں ہے۔

اس طرح، Z کی قلیل قدر 380 ہے جو کہ نقطہ (2,4) پر موجود ہے۔ اس لیے، ماہر خوراک کی مرکب کو ملانے کی احسن صلاحیت یہ ہوگی کہ وہ کھانہ 'I' کا 2 کلوگرام اور کھانہ 'II' کا 4 کلوگرام ملایئے، اور اس خصوصیت کے ساتھ، مرکب کی کم سے کم قیمت 380 روپے ہوگی۔

مثال 7: مقرر کرنے کا مسئلہ (Allocation problem): کسانوں کی ایک کوآپریٹو سوسائٹی کے پاس دو طرح کی فصلیں X اور Y اُگانے کے لیے 50 ہیکٹر زمین دستیاب ہے۔ فصل X اور Y سے منافع فی ہیکٹر بالترتیب 10,500 روپے اور 9000 روپے تخمینہ لگایا گیا ہے۔ کیڑے وغیرہ کو مارنے کے لیے X اور Y فصلوں کے لیے 20 لیٹر اور 10 لیٹر فی ہیکٹر کی شرح سے جڑی بوٹی سے بنے ایک رقیق کا استعمال کرنا ہے اس کے آگے، 800 لیٹر سے زیادہ ہر رقیق کو استعمال نہیں کرنا ہے تا کہ مچھلیاں اور جنگلی جانور جو اس تالاب کو استعمال کریں گے تو نقصان نہ ہو جہاں اس زمین سے کوڑا کرکٹ جمع ہوگا۔ ہر ایک فصل کے لیے کتنی زمین مقرر کی جائے تا کہ سوسائٹی کا کل منافع زیادہ سے زیادہ ہو؟

حل: مان لیجیے فصل X کے لیے x ہیکٹر اور فصل Y کے لیے y ہیکٹر زمین مقرر کی گئی ہے۔ صاف طور پر $x \geq 0, y \geq 0$

فصل X پر فی ہیکٹر منافع = 10500 روپے

فصل Y پر فی ہیکٹر منافع = 9000 روپے

اس لیے، کل منافع = $(10500x + 9000y)$ روپے

مسئلہ کی ریاضیاتی تشکیل ذیل طرح ہے:

$Z = 10500\,x + 9000\,y$، زیادہ سے زیادہ کیجیے

پابندیوں پر منحصر ہے:

$x + y \leq 50$ (زمین پر مبنی پابندیاں) ...(1)

$20x + 10y \leq 800$ (جڑی بوٹیوں سے بنے رقیق ہربیسائیڈ کے استعمال پر مبنی پابندی)

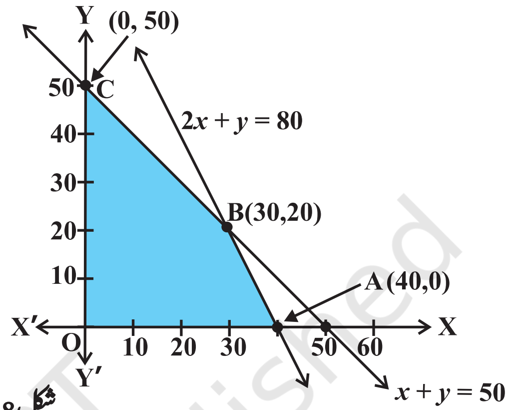
یعنی، $2x + y \leq 80$ ...(2)

$x \geq 0, y \geq 0$ (غیر منفی پابندیاں) ...(3)

ہم (1) تا (3) نامساواتوں کے نظام کا گراف کھینچتے ہیں۔ ممکن علاقہ OABC شکل 12.8 میں (شیڈڈ) دکھایا گیا ہے۔ مشاہدہ کیجیے کہ معقول خطہ بند ہوا ہے۔

کارنر نقاط O،A،B اور C کے مختصات بالترتیب (0,0)،(40,0)،(30,20) اور (0,50) ہیں۔ہم ان راسوں پر معروضی تفاعل Z =10500 x + 9000y کی قیمت کا اندازہ یہ معلوم کرنے کے لیے لگاتے ہیں کہ کون زیادہ سے زیادہ منافع دیتا ہے۔

$Z = 10500x + 9000y$	کارنر نقاط
0	O(0, 0)
420000	A(40, 0)
عظیم → **495000**	B(30, 20)
450000	C(0,50)



شکل 12.8

اس لیے،سوسائٹی کو 4,95,000 روپیے زیادہ سے زیادہ منافع فصل X کو 30 ہیکٹر اور فصل Y کو 20 ہیکٹر زمین مقرر کرنے پر ملے گا۔

مثال 8: صنعت کاری مسئلہ (Manufacturing problem) ایک صنعت کار کمپنی ایک اشیا کے دو ماڈل A اور B تیار کرتی ہے۔ ماڈل A کے ہر ٹکڑے کو تیار کرنے میں 9 گھنٹے کی محنت لگتی ہے اور مکمل کرنے میں کا ایک گھنٹہ کی محنت لگتی ہے۔ ماڈل B کے ہر ٹکڑے کو تیار کرنے میں 12 گھنٹے کی محنت لگتی ہے اور مکمل کرنے میں 3 گھنٹے کی محنت لگتی ہے۔تشکیل کرنے اور مکمل کرنے میں بالترتیب مزدوری کے 180 اور 30 گھنٹے کی محنت دستیاب ہے۔کمپنی ماڈل A کے ہر ٹکڑے پر 8000 روپیے منافع اور ماڈل B کے ہر ٹکڑے پر 12000 روپیے منافع کماتی ہے۔زیادہ سے زیادہ منافع حاصل کرنے کے لیے ماڈل A اور ماڈل B کے کتنے ٹکڑے ایک ہفتہ میں تیار کیے جائیں؟ ایک ہفتہ میں زیادہ سے زیادہ منافع کیا ہے؟

حل: مان لیجیے ماڈل A کے ٹکڑوں کی تعداد x ہے اور ماڈل B کے ٹکڑوں کی تعداد y ہے۔ تب

کل منافع (روپیہ میں) = $8000\,x + 12000\,y$

مان لیجیے $Z = 8000\,x + 12000\,y$

اب ہمارے پاس د   ہوئے مسئلہ کے لیے ریاضیاتی ماڈل ہے

$$Z = 8000\,x + 12000\,y \quad \text{(زیادہ سے زیادہ کیجیے)} \qquad ...(1)$$

پابندیوں پر منحصر:

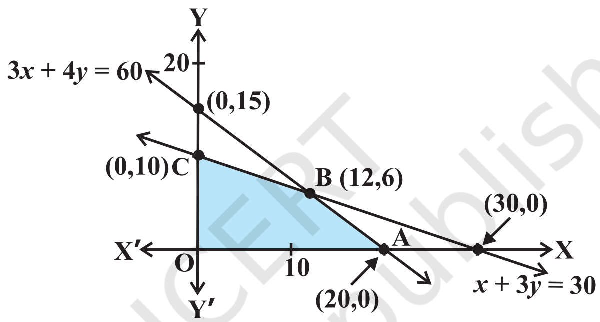
$9x + 12y \leq 180$ (پابندیاں کی تشکیل کرنے پر)

$3x + 4y \leq 60$ ...(2)

$x + 3y \leq 30$ (پابندی مکمل کرنے پر) ... (3)

$x \geq 0, y \geq 0$ (غیر– منفی پابندی) ... (4)

OABC (شیڈڈ) معقول خطّہ، جو کہ (2) تا (4) نامساواتوں کے ذریعہ حاصل کیا گیا شکل 12.9 میں دکھایا گیا ہے۔ یہ نوٹ کیجیے کہ معقول خطّہ حدود میں ہے۔



شکل 12.9

ہمیں معروضی تفاعل Z کے ہر ایک کارنر نقطہ پر قیمت کا اندازہ لگانا چاہیے جیسا کہ نیچے دکھایا گیا ہے:

کارنر نقطہ	$Z = 8000x + 12000y$	
0 (0, 0)	0	
A (20, 0)	160000	
B (12, 6)	**168000** ←	عظیم
C (0, 10)	120000	

ہمیں نقطہ B (12, 6) پر Z کی عظیم قدر 1,68,000 حاصل ہوتی ہے۔ اس لیے، کمپنی ماڈل A کے 12 ٹکڑے اور ماڈل B کے 6 ٹکڑے تیار کرے تا کہ زیادہ سے زیادہ منافع کما سکے اور تب زیادہ سے زیادہ منافع 1,68,000 روپیے ہوگا۔

© NCERT not to be republished

مشق 12.2

1۔ ریشما کی خواہش ہے کہ وہ دو قسم کے کھانے P اور Q اس طرح ملائے تا کہ مرکب میں کم سے کم وٹامن A کی مقدار 8 اکائیاں اور وٹامن B کی مقدار 11 اکائیاں ہوں۔ کھانہ P کی قیمت 60 روپیے فی کلوگرام اور کھانہ Q کی قیمت 80 روپیے فی کلوگرام ہے۔ کھانہ P میں وٹامن A کی مقدار 3 اکائیاں فی کلوگرام ہے اور وٹامن B کی مقدار 5 اکائیاں فی کلوگرام ہے جب کہ کھانہ Q میں وٹامن A کی مقدار 4 اکائیاں فی کلوگرام اور وٹامن B کی مقدار 2 اکائیاں فی کلوگرام ہے۔ مرکب کی کم سے کم قیمت معلوم کیجیے۔

2۔ ایک قسم کے کیک میں 200 گرام آٹے کی ضرورت ہوتی ہے اور 25 گرام چربی (*Fat*) کی، اور دوسرے قسم کے کیک میں 100 گرام آٹے اور 50 گرام چربی کی ضرورت ہے۔ تو یہ مانتے ہوئے کہ کیک بنانے میں استعمال ہونے والے دوسرے جزو ترکیبی کی کوئی کمی نہیں ہے۔ بتایئے کہ 5 کلوگرام آٹے اور 1 کلوگرام چربی میں کیک کی زیادہ سے زیادہ کتنی تعداد تیار کی جاسکتی ہے۔

3۔ ایک فیکٹری ٹینس کے ریکٹ اور کرکٹ کے بلے بناتی ہے۔ ٹینس کا ایک ریکٹ کو تیار کرنے میں مشین 1.5 گھنٹے لیتی ہے اور دستکار اسے مکمل کرنے میں 3 گھنٹے لیتا ہے جب کہ ایک کرکٹ کا بلا بنانے میں مشین 3 گھنٹے لیتی ہے اور دستکار 1 گھنٹہ کا وقت لیتا ہے۔ ایک دن میں، فیکٹری کے پاس مشین کے 42 گھنٹوں سے زیادہ نہیں ہیں اور دستکار کے پاس 24 گھنٹے ہیں۔

(i) اگر فیکٹری اپنی پوری صلاحیت کے ساتھ کام کرے تو ریکٹ اور بلوں کی تیار ہونے والی تعداد کیا ہے؟

(ii) اگر ایک ریکٹ اور ایک بلے پر منافع بالترتیب 20 روپیے اور 10 روپیے ہے، تو فیکٹری کا زیادہ سے زیادہ منافع معلوم کیجیے جب کہ یہ اپنی مکمل صلاحیت کے ساتھ کام کرتی ہے۔

4۔ ایک صنعت کار نٹ اور بولٹ تیار کرتا ہے۔ یہ نٹ کا ایک پیکٹ تیار کرنے کے لیے مشین A پر '1' گھنٹہ اور مشین B پر '1' گھنٹہ کام کرتا ہے۔ یہ بولٹ کے ایک پیکٹ کو تیار کرنے کے لیے مشین A پر '3' گھنٹہ اور مشین B پر '1' گھنٹہ کام کرتا ہے۔ وہ نٹ کے ایک پیکٹ پر 17.50 روپیہ منافع اور بولٹ کے ایک پیکٹ پر 7 روپیہ منافع کماتا ہے۔ ہر ایک دن میں وہ زیادہ سے زیادہ منافع کمانے کے لیے ہر ایک کے کتنے پیکٹ تیار کرے اگر وہ روزانہ اپنی مشینوں کو زیادہ سے زیادہ 12 گھنٹے چلاتا ہے۔

© NCERT not to be republished

5۔ ایک فیکٹری A اور B دو طرح کے پیچ (Screws) تیار کرتی ہے۔ ہر ایک پیچ کو دو طرح کی مشینوں کی ضرورت ہے، ایک خودکار اور ایک ہاتھ سے کام کرنے والی کی۔ پیچ A کے ایک پیکٹ کو تیار کرنے کے لیے خودکار مشین 4 منٹ اور ہاتھ سے کام کرنے والی مشین 6 منٹ لیتی ہے، جب کہ پیچ B کے ایک پیکٹ کو تیار کرنے کے لیے خودکار مشین 6 منٹ اور ہاتھ سے کام کرنے والی مشین 3 منٹ لیتی ہے۔ ہر ایک مشین کسی بھی دن زیادہ سے زیادہ کام کرنے کے لیے 4 گھنٹے موجود ہے۔ صنعت کار پیچ A کے پیکٹ کو 7 روپے منافع سے بیچ سکتا ہے اور پیچ B کے پیکٹ کو 10 روپے پر، یہ مانتے ہوئے کہ ہر ایک قسم کے وہ جتنے بیچ تیار کرتا ہے، فیکٹری مالک ایک دن میں کتنے پیکٹ تیار کرے تاکہ اسکا منافع زیادہ سے زیادہ ہو؟ اس کا زیادہ سے زیادہ منافع معلوم کیجیے۔

6۔ ایک کاٹیج صنعت پیڈسٹل لیمپ اور لکڑی کے شیڈ تیار کرتی ہے، ہر ایک میں گھسنے/کاٹنے کی مشین کے استعمال کی ضرورت ہوتی ہے اور رنگ ڈالنے کی مشین کی ایک پیڈسٹل لیمپ تیار کرنے کے لیے گھسنے/کاٹنے کی مشین 2 گھنٹے اور رنگ چھڑکنے کی مشین 3 گھنٹے لیتی ہے۔ ایک شیڈ تیار کرنے کرنے کے لیے گھسنے/کاٹنے کی مشین '1' گھنٹہ اور رنگ چھڑکنے کی مشین 2 گھنٹے لیتی ہے۔ کسی بھی دن، رنگ چھڑکنے کی مشین (Sprayer) زیادہ سے زیادہ 20 گھنٹہ کے لیے مل سکتی ہے اور گھسنے/کاٹنے کی مشین 12 گھنٹے کے لیے مل سکتی ہے۔ یہ مانتے ہوئے کہ صنعت کار جتنے لیمپ اور شیڈ تیار کرتا ہے، وہ انھیں بیچ سکتا ہے، وہ اپنا روزانہ کے کام کرنے کا جدول کس طرح تیار کرے تاکہ اس کا منافع زیادہ سے زیادہ ہو جائے؟

7۔ ایک کمپنی دو طرح کی انوکھی نشانیاں تیار کرتی ہے جو کہ پلائی وڈ سے بنی ہیں۔ نشانی A کو کاٹنے کے لیے 5 منٹ اور جوڑنے کے لیے 10 منٹ کی ضرورت ہوتی ہے۔ نشانی B کو کاٹنے کے لیے 8 منٹ اور جوڑنے کے لیے 8 منٹ کی ضرورت ہوتی ہے۔ کاٹنے کے لیے 3 گھنٹہ، 20 منٹ موجود ہیں اور جوڑنے کے لیے 4 گھنٹے۔ A قسم کی نشانی پر 5 روپے منافع ہے اور B قسم کی نشانی پر 6 روپے منافع ہے۔ کمپنی ہر ایک قسم کی کتنی نشانیاں تیار کرے تاکہ اس کا منافع زیادہ سے زیادہ ہو سکے؟

8۔ ایک کاروباری دو طرح کے ذاتی کمپیوٹر بیچنے کا پلان بنانا ہے۔ ایک ڈیسک ٹاپ (Desktop) ماڈل اور ایک پورٹیبل (Portable) ماڈل جن کی قیمت بالترتیب 25000 روپے اور 40000 روپے ہوگی۔ اس کا تخمینہ ہے کہ ایک مہینہ میں کمپیوٹرس کی مانگ 250 اکائیوں سے زیادہ نہیں بڑھے گی ہر قسم کمپیوٹرس کی وہ تعداد معلوم کیجیے جو کہ کاروباری ذخیرہ کرے تاکہ اس کا منافع عظیم ہو جب کہ وہ 70 لاکھ روپے سے رقم سے زیادہ خرچ نہیں کرنا چاہتا اور اگر اس کا ڈیسک ٹاپ ماڈل پر منافع 4500 روپے اور پورٹیبل ماڈل پر منافع 5000 روپے ہے۔

9۔ ایک خوراک میں وٹامن A کی کم سے کم 80 اکائیاں اور معدنیات کی 100 اکائیاں ہونی چاہئیں۔ دوغذاوں F_1 اور F_2 دستیاب ہیں۔ غذا F_1 کی قیمت 4 روپے فی اکائی غذا ہے اور F_2 کی قیمت 6 روپیہ فی اکائی غذا ہے۔ غذا F_1 کی ایک اکائی میں وٹامن A کی 3 اکائیاں اور معدنیات کی 4 اکائیاں ہیں۔ غذا F_2 کی ایک اکائی میں وٹامن A کی 6 اکائی اور معدنیات کی 3 اکائیاں ہیں۔ اسے ایک خطی پروگرامنگ مسئلہ کے طور پر قانونی شکل دیجیے۔ خوراک کی قلیل قدر معلوم کیجیے جس میں دوغذاؤں کے مرکب ہوں اور معدونیاتی غذائیت کی ضروریات مکمل ہوں۔

10۔ F_1 اور F_2 دوقسم کی مصنوعی کھاد ہیں۔ F_1 میں 10 فی صد نائیٹروجن اور 6 فی صد فاسفورک ایسڈ ہے اور F_2 میں 5 فی صد نائیٹروجن اور 10 فی صد فاسفورک ایسڈ ہے۔ مٹی کے حالات کو ٹیسٹ کرنے کے بعد ایک کسان کو پتہ چلتا ہے کہ اسے فصل کے لیے کم سے کم 14 کلو نائیٹروجن اور 14 کلو فاسفورس کی ضرورت ہے۔ اگر F_1 کی قیمت 6 روپے فی کلوگرام اور F_2 کی قیمت 5 روپے فی کلوگرام ہے، تو معلوم کیجیے کہ ہر طرح کی مصنوعی کھاد کی کتنی تعداد استعمال کی جائے تاکہ کم سے کم روپے صرف ہو۔ کم سے کم قیمت کیا ہے؟

11۔ ذیل خطی نامساواتوں کے $x, y \geq 0$، $x + 3y \leq 15$، $2x + y \leq 10$ کے نظام سے معقول خطّہ کے کارنر نقاط (0,0)، (5,0)، (3,4) اور (0, 5) ہیں۔ مان لیجیے کہ $Z = px + qy$ ہے۔ جہاں $p, q > 0$ ہے۔ p اور q پر یہ شرط ہے کہ Z کا عظیم (3,4) اور (0,5) دونوں پر ملتا ہے یہ ہے:

(A) $p = q$ (B) $p = 2q$ (C) $p = 3q$ (D) $q = 3p$

متفرق مشقیں

مثال 9: (کھانے کا مسئلہ) ایک ماہرِ خوراک کو دو کھانوں P اور Q کا استعمال کر کے ایک خاص قسم کی خوراک بناتا ہے۔ P کھانے کے ہر ایک پیکٹ میں (جس میں 30 گرام ہے) 12 اکائی کیلشیم کی، 4 اکائی آئرن کی، 6 اکائی کولیسٹرول اور 6 اکائی وٹامن A کی ہیں۔ Q کھانے کے ہر ایک پیکٹ میں جس میں برابر مقدار ہے، 3 اکائی کیلشیم، 20 اکائی آئرن، 4 اکائی کولیسٹرول اور 3 اکائی وٹامن A کی ہیں۔ خوراک میں کم سے کم 240 اکائی کیلشیم، کم سے کم 460 اکائی آئرن اور زیادہ سے زیادہ 300 اکائی کولیسٹرول کی ضرورت ہے۔ ہر کھانے کے کتنے پیکٹ استعمال کیے جائیں کہ خوراک میں وٹامن A کی کم سے کم مقدار ہو سکے؟ وٹامن A کی قلیل مقدار کیا ہے؟

© NCERT not to be republished

حل: مان لیجیے P اور Q کے پیکٹوں کی تعداد بالترتیب x اور y ہے۔ صاف طور پر $x \geq 0, y \geq 0$ ہے۔ دیے ہوئے مسئلے کی ریاضیاتی تشکیل ذیل کی طرح ہے:

(وٹامن A) $z = 6x + 3y$ کم سے کم کیجیے

پابندیاں

(کیلشیم پر پابندی) $12x + 3y \geq 240$ یعنی، $4x + y \geq 80$ ...(1)

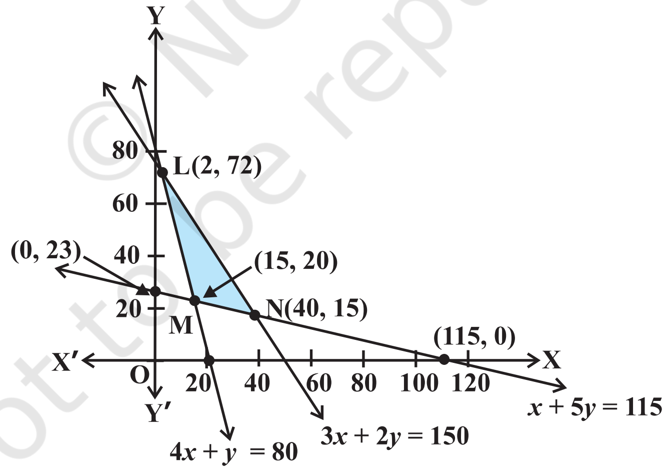
(آئرن پر پابندی) $4x + 20y \geq 460$ یعنی، $x + 5y \geq 115$ ...(2)

(کولیسٹرول پر پابندی) $6x + 4y \leq 300$ یعنی، $3x + 2y \leq 150$ ...(3)

$x \geq 0, y \geq 0$ ...(4)

ہمیں (1) تا (4) نامساواتوں کا گراف کھینچنا چاہیے۔

(1) تا (4) پابندیوں کے ذریعہ معلوم کیا گیا معقول علاقہ (شیڈڈ) شکل 12.10 میں دیا گیا ہے اور یہ نوٹ کیجیے کہ یہ بند ہے۔



شکل 12.10

کارنر نقاط L، M اور N کے مختصات بالترتیب (2, 72)، (15, 20) اور (40, 15) ہیں۔ ہمیں ان نقاط پر Z کی قیمت کا اندازہ لگانا چاہیے:

© NCERT not to be republished

کارنر نقطہ	$Z = 6x + 3y$	
(2, 72)	228	
(15, 20)	$\longrightarrow$ **150**	قلیل
(40, 15)	285	

جدول سے، ہمیں نقطہ (15, 20) پر Z قلیل معلوم ہوا ہے۔ اس لیے مسئلے کی دی ہوئی پابندیوں کے تحت وٹامن A کی مقدار قلیل ہوگی، اگر غذا P کے 15 پیکٹ اور غذا Q کے 18 پیکٹ خاص خوراک بنانے میں استعمال ہوئے ہیں۔ وٹامن A کی قلیل مقدار 150 اکائی ہوگی۔

مثال 10: **(صنعت کاری مسئلہ)** ایک صنعت کار نے تین مشینیں I، II اور III اپنی فیکٹری میں لگائیں۔ مشین I اور II ایک دن میں زیادہ سے زیادہ 12 گھنٹے کام کرنے کی صلاحیت رکھتی ہیں جب کہ مشین III کو روزانہ کم سے کم 5 گھنٹے کام کرنا ہی ہے۔ وہ M اور N دو قسم کی اشیا بناتی ہے جس میں تینوں مشینوں کا استعمال ہوتا ہے۔

تینوں مشینوں پر M اور N قسم کی اشیاء کی 'I' اکائی بنانے کے لیے ذیل جدول میں ان کے گھنٹے د گئے ہیں:

اشیا	مشین پر کام کرنے کے لیے درکار گھنٹہ		
	I	II	III
M	1	2	I
N	2	1	1.25

وہ اشیا M اور N پر بالترتیب 600 روپے اور 400 روپے منافع کماتی ہے۔ وہ ہر قسم کی کتنی اشیا تیار کرے تا کہ اس کا منافع زیادہ سے زیادہ ہو سکے، یہ مانتے ہوئے کہ اس نے جتنی اشیا تیار کی ہیں وہ سب بیچ سکتی ہے؟ زیادہ سے زیادہ منافع کیا ہوگا؟

حل: مان لیجیے اشیا M اور N کی تعداد بالترتیب x اور y ہے۔

پیداوار پر کل منافع = $(600x+400y)$ روپے

د ہوئے مسئلہ کی ریاضیاتی تشکیل ذیل کی طرح ہے:

$Z=600x+400y$ زیادہ سے زیادہ کیجیے

پابندیوں پر منحصر:

(مشین I پر پابندی) $x + 2y \le 12$ ...(1)

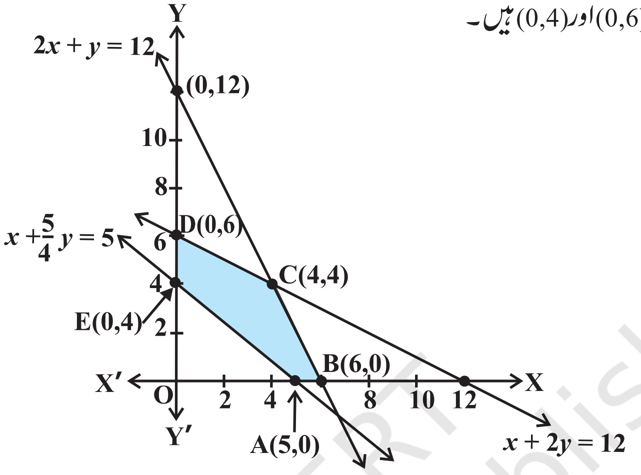
(مشین II پر پابندی) $2x + y \le 12$ ...(2)

(مشین III پر پابندی) $x + \frac{5}{4}y \ge 5$ ...(3)

$x \ge 0,\ y \ge 0$ ...(4)

© NCERT not to be republished

آیئے(1) تا(4) پابندیوں کا گراف کھینچیں۔ پابندیوں (1) تا(4) کے ذریعے معلوم کیا گیا معقول خطّہ ABCDE (شیڈڈ) 12.11 میں دکھایا گیا ہے۔ مشاہدہ کیجیے کہ ممکن علاقہ بند ہے، کارنر نقاط D،C،B،A اور E کے بالترتیب مختصات (5,0)، (6,0)، (4,4)، (0,6) اور (0,4) ہیں۔



شکل 12.11

ہمیں ان کارنر نقاط پر $Z=600x+400y$ کی قیمت کا اندازہ لگانا چاہیے۔

کارنر نقاط	$Z = 600x + 400y$
(5, 0)	3000
(6, 0)	3600
(4, 4)	→ 4000 عظیم
(0, 6)	2400
(0, 4)	1600

ہم نے دیکھا کہ نقطہ (4,4)، Z کی عظیم قدر دے رہا ہے۔ اس لیے، صنعت کار کو ہر قسم کی اشیا کی 4 اکائیاں تیار کرنی چاہئیں تاکہ زیادہ سے زیادہ منافع 4000 روپے حاصل ہو۔

مثال 11: (نقل وحمل مسئلہ) **(Transportation problem)**: دو فیکٹریاں ہیں۔ ایک P پر واقع ہے اور دوسری Q پر واقع ہے۔ ان جگہوں سے، کچھ سامان تین ڈپو A، B اور C پر جانا ہے۔ ڈپوں کی ہفتہ وار ضرورت بالترتیب اشیا کی 5،5 اور 4

© NCERT not to be republished

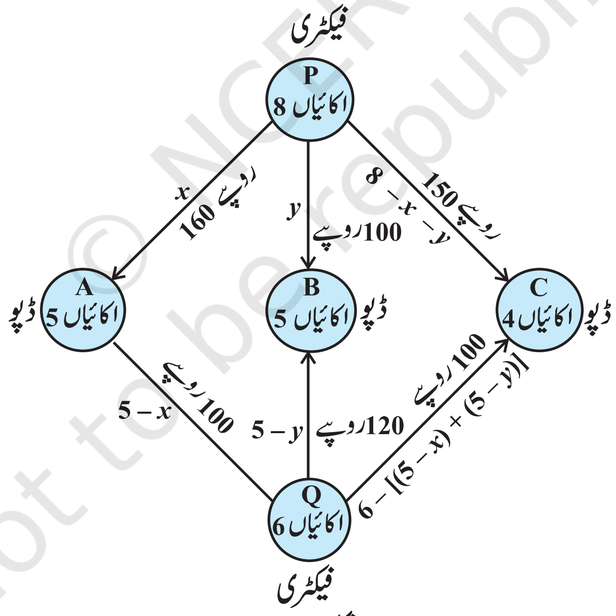
اکائیاں ہیں جب کہ P اور Q جگہ پر واقع فیکٹریوں کی اشیا بنانے کی صلاحیت بالترتیب 8 اور 6 اکائیاں ہیں۔ آمدورفت پر فی اکائی خرچ نیچے دیا گیا ہے:

سے/تک	خرچ (روپیہ میں)		
	A	B	C
P	160	100	150
Q	100	120	100

ہر ایک فیکٹری سے ہر ایک ڈپو پر کتنی اشیا لے جائی جائیں تا کہ آمدورفت پر خرچ کم سے کم ہو۔ آمدورفت کی قلیل قیمت کیا ہوگی؟

حل: مسئلہ کو شکل (ڈائیگرام) کے ذریعہ ذیل طرح سمجھا جاسکتا ہے (شکل 12.12):

مان لیجیے فیکٹری P سے اشیا کی x اکائی اور y اکائی بالترتیب ڈپو A اور B کو لے جائی گئیں ہیں۔ تب (8–x–y) اکائی ڈپو C تک لے جائی جائیں گی (کیوں؟)



شکل 12.12

اس لیے، ہمارے پاس ہے $8 - x - y \geq 0$ اور $x \geq 0, y \geq 0$

یعنی، $x + y \leq 8$ اور $x \geq 0, y \geq 0$

اب، ڈپو A پر اشیا کی ہفتہ وار ضرورت 5 اکائیوں کی ہے۔ کیونکہ فیکٹری سے P پر x اکائی لے جائی گئی ہیں، باقی (5–x) اکائی فیکٹری سے Q پر لے جانے کی ضرورت ہے۔ صاف طور پر، $5 - x \geq 0$، یعنی $x \leq 5$

اسی طرح، (5–y) اور $6 - (5 - x + 5 - y) = x + y - 4$ اکائیاں Q پر فیکٹری سے بالترتیب ڈپو B اور C پر لے جائی جائیں گی۔

اس لیے، $x + y - 4 \geq 0$، $5 - y \geq 0$

یعنی، $x + y \geq 4$، $y \leq 5$

Z کی کل آمدورفت کی قیمت اس طرح دی گئی ہے

$$Z = 160\,x + 100\,y + 100\,(5 - x) + 120\,(5 - y) + 100\,(x + y - 4) + 150\,(8 - x - y)$$
$$= 10\,(x - 7\,y + 190)$$

اس لیے، مسئلہ اس طرح چھوٹا ہو جاتا ہے

$Z = 10\,(x - 7y + 190)$ کم سے کم کیجیے

پابندیوں پر منحصر

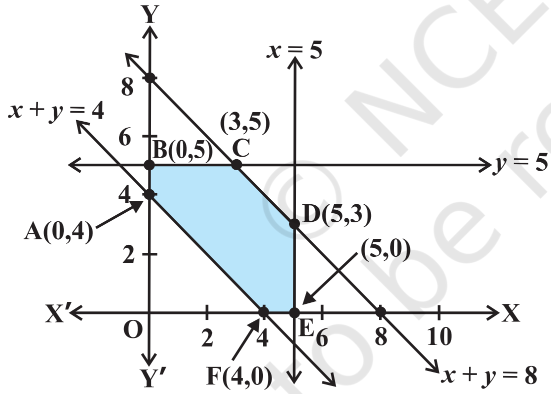
$x \geq 0,\ 0 \geq 0$ ... (1)

$x + y \leq 8$ ... (2)

$x \leq 5$ ... (3)

$y \leq 5$ ... (4)

$x + y \geq 4$ ... (5)



شکل 12.13

شیڈڈ علاقہ ABCDEF پابندیوں (1) تا (5) سے ظاہر کیا گیا معقول خطّہ ہے (شکل 12.13)

مشاہدہ کیجیے کہ معقول خطّہ بند ہے۔ معقول خطّہ کے کارنر نقاط کے مختصات (0,4)، (0,5)، (3,5)، (5,3)، (5,0) اور (4,0) ہیں۔

ہمیں ان نقاط پر Z کی قیمت کا اندازہ لگانا چاہیے۔

© NCERT not to be republished

Z = 10 (x – 7 y + 190)	کارنر نقاط
1620	(0, 4)
→ **1550** قلیل	(0, 5)
1580	(3, 5)
1740	(5, 3)
1950	(5, 0)
1940	(4, 0)

ہم جدول سے دیکھتے ہیں کہ نقطہ (0,5) پر Z کی قلیل قدر 1550 ہے۔

اس لیے، نقل وحمل کی احسن کارکردگی فیکٹری سے P پر 0، 5 اور 3 اکائی پہنچانے کی ہوگی، اور فیکٹری سے Q پر ڈپو A، B اور C پر بالترتیب 5، 0 اور 1 اکائی لے جانے کی ہوگی۔اس کارکردگی کے مطابق نقل وحمل کی کم سے کم قیمت ہوگی، یعنی 1550 روپیے۔

متفرق مشقیں باب 12 پر مبنی

1۔ مثال 9 کے حوالے سے، ہر ایک کھانے کے کتنے پیکٹ استعمال کیے جائیں تاکہ خوراک میں وٹامن A کی مقدار عظیم ہو؟ خوراک میں وٹامن A کی زیادہ سے زیادہ مقدار کیا ہے؟

2۔ مویشیوں کے کھانے میں ایک کسان دو قسم (برانڈ) P اور Q ملاتا ہے۔قسم P کی قیمت 250 روپیے فی بیگ ہے جس میں غذائی عنصر A کی 3 اکائیاں، عنصر B کی 2.5 اکائیاں اور عنصر C کی 2 اکائیاں موجود ہیں۔قسم Q کی قیمت 200 روپیے فی بیگ ہے جس میں غذائی عنصر A کی 1.5 اکائیاں غذائی عنصر B کی 11.25 اکائیاں، اور وٹامن C کی 3 اکائیاں موجود ہیں وٹامن A، B اور C کی کم سے کم ضرورت بالترتیب 18 اکائیاں، 45 اکائیاں اور 24 اکائیاں ہے۔ ہر قسم کے بیگوں کی تعداد معلوم کیجیے جو کہ اس ترتیب میں ملائے جائیں کہ حاصل ہونے والے مرکب کی فی بیگ کم سے کم کی قیمت ہو؟ ہر مرکب کے فی بیگ کی کم سے کم قیمت کیا ہے؟

3۔ ایک ماہر خوراک x اور y دو قسم کے کھانے اس طرح آپس میں ملانا چاہتا ہے تاکہ مرکب میں وٹامن A کی کم سے

© NCERT not to be republished

کم 10 اکائیاں ہوں، وٹامن B کی '12' اکائیاں اور وٹامن C کی '8' اکائیاں ہوں۔ ایک کلوگرام کھانے میں وٹامن کی مقدار ذیل میں دی گئی ہے:

غذا	وٹامن A	وٹامن B	وٹامن C
X	1	2	3
Y	2	2	1

X غذا کی ایک کلوگرام کی قیمت 16 روپیہ ہے اور Y غذا کی ایک کلوگرام کی قیمت 20 روپیہ ہے۔ مرکب کی کم سے کم قیمت معلوم کیجیے جو کہ مطلوبہ خوراک بنائے گا؟

4۔ ایک صنعت کار A اور B دو قسم کے کھلونے بناتا ہے۔ اس کام کے لیے تین مشینیں درکار ہیں اور ہر کھلونے کے لیے مشین پر درکار وقت (منٹ میں) ذیل میں دیا گیا ہے:

کھلونوں کی قسمیں	مشینیں		
	I	II	III
A	12	18	6
B	6	0	9

ہر مشین روزانہ زیادہ سے زیادہ 6 گھنٹہ دستیاب ہے۔ اگر A قسم کے ہر کھلونے پر 7.50 روپے منافع ہے اور B قسم کے ہر کھلونے پر منافع 5 روپیہ ہے، تب دکھایئے کہ ایک دن میں زیادہ سے زیادہ منافع کمانے کے لیے صنعت کار A قسم کے 15 کھلونے اور B قسم کے 30 کھولنے تیار کرے۔

5۔ ایک ہوائی جہاز زیادہ سے زیادہ 200 مسافر لے جاسکتا ہے۔ ہر اعلا درجے کے ٹکٹ پر 1000 روپے منافع ہوتا ہے اور ہر عام درجہ کے ٹکٹ پر 600 روپے منافع ہوتا ہے۔ ہوائی کمپنی کم سے کم 20 سیٹیں اعلا درجے کے لیے معین کرتی ہے۔ حالانکہ، چار گنا مسافر عام درجہ سے سفر کرنے کو ترجیح دیتے ہیں بہ نسبت اعلا درجہ کے۔ معلوم کیجیے کہ ہر ایک قسم کے کتنے ٹکٹ بیچے جائیں تا کہ ہوائی کمپنی کو زیادہ سے زیادہ منافع ہو۔ زیادہ سے زیادہ کتنا منافع حاصل ہوسکتا ہے؟

6۔ دو گوداموں A اور B کی گیہوں رکھنے کی گنجائش بالترتیب 100 کوئنٹل اور 50 کوئنٹل ہے۔ وہ راشن کی تین دکانوں D، E اور F کو بالترتیب 60، 50 اور 40 کوئنٹل گیہوؤں کی سپلائی کرتی ہیں۔ گوداموں سے دکانوں تک گیہوں پہنچانے کی فی کوئنٹل رقم ذیل جدول میں دی گئی ہے:

© NCERT not to be republished

آمدورفت کی فی کوئنٹل رقم (روپیوں میں)		
سے/تک	A	B
D	6	4
E	3	2
F	2.50	3

سپلائی کو کس طرح انجام دیا جائے کہ لانے لے جانے کی رقم کم سے کم ہو؟ کم سے کم قیمت کیا ہے؟

7۔ ایک تیل کی کمپنی کے پاس دو ڈپو A اور B ہیں جن کی تیل رکھنے کی صلاحیت بالترتیب 7000 لیٹر اور 4000 لیٹر ہے۔ کمپنی کو تین پیٹرول پمپوں D، E اور F کو تیل سپلائی کرنا ہے جن کی ضرورت بالترتیب 4500 لیٹر، 3000 لیٹر اور 3500 لیٹر ہے۔ ڈپوں اور پٹرول پمپوں کے درمیان فاصلہ (کلومیٹر میں) ذیل میں دیا گیا ہے:

فاصلہ (کلومیٹر میں)		
سے/تک	A	B
D	7	3
E	6	4
F	3	2

یہ مانتے ہوئے کہ 10 لیٹر تیل لانے لے جانے کی رقم ایک روپیہ فی کلومیٹر ہے، تیل کو کس طرح پہنچایا جائے کہ آمدورفت کی رقم کم سے کم ہو؟ کم سے کم قیمت کیا ہے؟

8۔ ایک پھل اُگانے والا اپنے باغ میں دو قسم کی مصنوعی کھاد P اور Q استعمال کرسکتا ہے۔ نائیٹروجن، فاسفورک ایسڈ، پوٹاش اور کلورین کی ایک بیگ میں ہر قسم کی مقدار (کلوگرام میں) جدول میں دی گئی ہیں۔ ٹیسٹ بتاتے ہیں کہ باغ کو کم سے کم 240 کلوگرام فاسفورک ایسڈ، کم سے کم 270 کلوگرام پوٹاش اور زیادہ سے زیادہ 310 کلوگرام کلورین کی ضرورت ہے۔

اگر پھل اگانے والا باغ میں ڈالنے والی نائیٹروجن کی مقدار کم سے کم کرنا چاہتا ہے، تو ہر قسم کے بیگوں کے استعمال کی تعداد کتنی ہوگی؟ باغ میں کم سے کم نائیٹروجن کی کتنی مقدار ڈالی گئی ہے؟

فی بیگ		
کلوگرام	قسم P	قسم Q
نائیٹروجن	3	3.5
فاسفورک ایسڈ	1	2
پوٹاش	3	1.5
کلورین	1.5	2

9۔ سوال نمبر 8 کے حوالے سے، اگر پھل اُگانے والا چاہتا ہے کہ باغ میں ڈالی گئی نائیٹروجن کی مقدار زیادہ سے زیادہ ہو، تو ہر قسم کے کتنے بیگ ڈالے جائیں؟ زیادہ سے زیادہ ڈالی گئی نائیٹروجن کی مقدار کیا ہوگی؟

10۔ ایک کھلونے بنانے والی کمپنی A اور B دو طرح کی گڑیاں تیار کرتی ہے۔ بازار میں کی گئی جانچ اور دستیاب ذرائع یہ اشارہ کرتے ہیں کہ دونوں قسم کی گڑیاں بنانے کی مقدار ایک ہفتہ میں 1200 سے زیادہ نہیں ہونی چاہیے، اور B قسم کی گڑیا کی مانگ A قسم کی گڑیا کی مانگ کی زیادہ سے زیادہ آدھی ہے۔ مزید یہ کہ A قسم کی گڑیا کے بننے کا لیول دوسری گڑیا کے بننے کے لیول سے تین گنا بڑھ سکتا ہے جو کہ زیادہ سے زیادہ 600 اکائیاں ہے۔ اگر کمپنی کو A اور B گڑیوں پر منافع بالترتیب 12 روپیے اور 16 روپیے ہے، تو ایک ہفتہ میں ہر ایک قسم کی کتنی گڑیاں بنائی جائیں تا کہ منافع زیادہ سے زیادہ ہو سکے؟

خلاصہ (Summary)

- ایک خطی پروگرامنگ مسئلہ وہ ہے جو کہ بہت سے متغیروں کی (جنھیں معروضی تفاعل کہتے ہیں) ایک خطی تفاعل کی احسن قدر (عظیم یا قلیل) معلوم کرنے سے جڑا ہو، اوران شرائط پر مبنی ہو کہ متغیر غیر منفی ہیں اور خطی نامساواتوں کے ایک سیٹ کو مطمئن کرتے ہیں (جنھیں خطی پابندیاں کہا جاتا ہے)۔ متغیروں کو کئی بار فیصلہ کن متغیر کہا جاتا ہے اور یہ غیر منفی ہوتے ہیں۔
- کچھ اہم خطی پروگرامنگ مسئلے یہ ہیں:
  (i) خوراک کے مسئلے
  (ii) صنعت کاری مسئلے
  (iii) آمدورفت کے مسئلے
- ایک خطی پروگرامنگ مسئلہ کا مشترک علاقہ، جو کہ تمام پابندیوں سے معلوم کیا گیا ہو اور جس میں غیر منفی پابندیاں $x \geq 0, y \geq 0$

© NCERT not to be republished

شامل ہوں مسئلے کے لیے ایک معقول خطّہ کہلاتا ہے (یا علاقہ کا حل)

- معقول خطّہ کی حدود یا حدود کے اندر نقاط پابندیوں کے ممکن حل کو ظاہر کرتے ہیں۔ ممکن علاقہ کے باہر کوئی بھی نقطہ ایک غیر معقول حل کہلاتا ہے۔
- معقول خطّہ کے اندر کوئی بھی نقطہ جو معروضی تفاعل کی احسن قدر دیتا ہے (عظیم یا قلیل) احسن حل کہلاتا ہے۔
- خطی پروگرامنگ مسئلہ کو حل کرنے میں ذیل مسئلہ بنیادی ہیں:

مسئلہ 1: مان لیجیے ایک خطی پروگرامنگ مسئلہ کے لیے R ایک معقول خطّہ ہے (محدّب کثیر ضلعی) اور مان لیجیے $Z = ax + by$ ایک معروضی تفاعل ہے۔ جب کہ Z ایک احسن قدر (عظیم یا قلیل) رکھتا ہے، جہاں x اور y متغیر پابندیوں پر منحصر ہیں جو کہ خطی نامساواتوں سے ظاہر کیے گئے ہیں یہ احسن قدر ممکن علاقہ کے ایک کارنر نقطہ (راس) پر وجود میں آسکے۔

مسئلہ 2: مان لیجیے خطی پروگرامی مسئلہ کے لیے R ایک معقول خطّہ ہے، اور مان لیجیے $Z = ax + by$ معروضی تفاعل ہے۔ اگر R محدود ہے، تب معروضی تفاعل Z پر R دونوں عظیم اور قلیل قدر رکھتا ہے اور ان میں سے ہر ایک R کے کارنر نقطہ (راس) پر وجود میں آتی ہے۔

- اگر معقول خطّہ کھلا ہوا ہے، تب قلیل یا عظیم وجود میں آسکتا ہے۔ حالانکہ، اگر یہ وجود میں ہے، تب یہ R کے ایک کارنر نقطہ پر ہی ملنا چاہیے۔
- کارنر نقطہ طریقہ (Corner point method): ایک خطی پروگرامنگ مسئلہ کو حل کرنے کے لیے، یہ طریقہ ذیل اقدامات پر مشتمل ہے۔

(i) خطی پروگرامی مسئلہ کا معقول خطّہ معلوم کیجیے اور اس کے کارنر نقاط معلوم کیجیے، (راس)

(ii) ہر کارنر پر معروضی تفاعل $Z = ax + by$ کی قیمت کا اندازہ لگایئے۔ مان لیجیے ان نقاط پر بالترتیب M اور m بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قدریں ہیں۔

(iii) اگر معقول خطّہ حدود میں ہے، تب معروضی تفاعل کی عظیم اور قلیل قدریں بالترتیب M اور m ہیں۔

اگر معقول خطّہ غیر محدود ہے؟ تب

(i) M معروضی تفاعل کی عظیم قدر ہے، اگر کھلی ہوئی آدھی مستوی جو کہ $ax + by > M$ سے معلوم کی گئی ہے، معقول خطّہ کے ساتھ کوئی مشترک نقطہ نہیں رکھتی۔ ورنہ، معروضی تفاعل کی کوئی عظیم قدر نہیں ہے۔

(ii) m معروضی تفاعل کی قلیل قدر ہے، اگر کھلی ہوئی آدھی مستوی جو کہ $ax + by < m$ سے معلوم کی گئی ہے، ممکن علاقہ کے ساتھ کوئی مشترک نقطہ نہیں رکھتی۔ ورنہ، معروضی تفاعل کی کوئی قلیل قدر نہیں ہے۔

- اگر ممکن علاقہ کے دو کارنر نقاط، ایک ہی قسم کے احسن حل ہیں، یعنی، دونوں یکساں عظیم یا قلیل دیتے ہیں، تب ان نقاط کو ملانے والے کسی بھی قطع خط پر کوئی بھی نقطہ ایک ہی قسم کا ایک آپٹیمل حل ہے۔

تاریخی نوٹ (Historical Note)

دوسری عالمی جنگ میں، جب لڑائی کے عمل کو عملی جامہ پہنانا تھا تا کہ خرچ کم سے کم ہو، دشمن کی بربادی زیادہ سے زیادہ ہو، تب خطی پروگرامنگ کے مسئلے پیش پیش رہے۔

خطی پروگرامنگ میں پہلا مسئلہ، روسی ریاضی داں، ایل. کنتوروچ اور امریکی ماہر معاشیات، ایف. ایل. ہٹ جوک نے 1941 میں تشکیل دیا، ان دونوں نے آزادانہ طور پر کام کیا، بغیر ایک دوسرے کی مدد کے۔ جو آمدورفت کے مسئلے کے نام سے بہت مشہور ہوا۔ 1945 میں ایک انگریزی ماہر معاشیات جی. اسٹگلر نے ایک دوسرے خطی پروگرامی مسئلہ کو بیان کیا۔ جو کہ ایک آپٹیمل خوراک کو معلوم کرنے کا تھا۔

1947 میں امریکی ماہر معاشیات، جی. بی. ڈنیٹ ڈگ نے ایک بہت اہم طریقہ تجویز کیا، جسے سب سے آسان طریقہ مانا گیا ہے، جو کہ کسی بھی خطی پروگرامی مسئلہ کو اقدام کی محدود تعداد میں حل کرنے کا بار بار عمل ہے۔

ایل. کینتوروچ اور امریکی ماہر ریاضیاتی معاشیات جی. بی. کوپ مینس کو 1975 میں معاشیات میں نوبل انعام سے نوازا گیا ان کے خطی پروگرامی میں باریک کام کے لیے کمپیوٹر اور دوسرے ضروری سافٹ ویئر کے آنے سے، خطی پروگرام ماڈل کو بہت سے دوسرے حلقوں اور بڑھتے ہوئے پیچیدہ مسئلوں میں لاگو کرنا ممکن ہو گیا ہے۔

© NCERT not to be republished