गतिकी
(KINEMATICS)

CHAPTER 3

3.1 प्रस्तावना (Introduction)

- संसार की प्रत्येक वस्तु प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष रूप से गतिमान है। हमारा चलना, दौड़ना, साइकिल चलाना आदि पृथ्वी का अपनी धुरी पर घूर्णन करना तथा वर्ष में एक बार सूर्य की परिक्रमा पूरी करना। सूर्य भी अपने ग्रहों सहित विचरण करता है। इस प्रकार समय के सापेक्ष वस्तु की स्थिति में परिवर्तन को गति कहते हैं। परन्तु गति एक सापेक्ष पद है। यदि एक वस्तु किसी एक प्रेक्षक के लिए विरामावस्था में है तब वही वस्तु अन्य प्रेक्षक के लिए गतिशील अवस्था में हो सकती है।
- वस्तुओं की निम्न वेगों पर व्यवस्थित गति के अध्ययन से सम्बन्धित भौतिकी की शाखा को यांत्रिकी (Mechanics) कहते हैं। यांत्रिकी की मुख्य शाखाएँ निम्न प्रकार हैं-

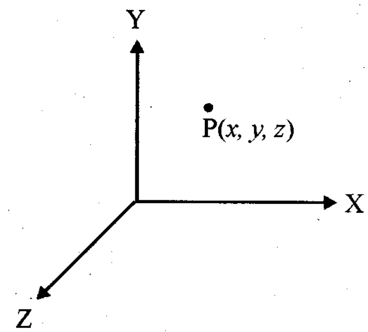
1. **स्थैतिकी (Statics)**– इस शाखा के अन्तर्गत विरामावस्था में स्थित वस्तुओं का अध्ययन किया जाता है।
2. **गतिकी (Dynamics)**– इस शाखा के अन्तर्गत वस्तु की गति का गति के कारणों सहित अध्ययन किया जाता है।
3. **शुद्ध गतिकी (Kinematics)**– इस शाखा के अन्तर्गत वस्तु की गति का अध्ययन गति के कारणों को ज्ञात किये बिना किया जाता है।

बिन्दुवत् वस्तु की अभिधारणा
(Concept of a point object)

- जब किसी गतिशील वस्तु का आकार उसके द्वारा तय की गई दूरी की तुलना में नगण्य हो तब वस्तु को बिन्दुवत् वस्तु के रूप में माना जा सकता है। उदाहरण: खेल के मैदान में गतिशील फुटबॉल, पटरियों पर गतिशील रेलगाड़ी आदि।
- बिन्दुवत् वस्तु से तात्पर्य है कि वस्तु का आकार नगण्य है। यदि क्रिकेट मैदान में क्रिकेट गेंद को तीव्र गति से फेंका जाये तब क्रिकेट गेंद को बिन्दुवत् वस्तु माना जा सकता है।
- गेंद के चक्रण करने पर इसे बिन्दुवत् वस्तु नहीं माना जा सकता है क्योंकि एक बिन्दु कण चक्रण नहीं कर सकता है।

3.2 निर्देश तंत्र (Frame of Reference)

- किसी कण की स्थिति या गति का अध्ययन करने के लिए एक निर्देश तंत्र की आवश्यकता होती है। **निर्देशांकों का वह समूह या निकाय जिसके सापेक्ष प्रेक्षक किसी स्थिति या घटना की व्याख्या कर सकता है, निर्देश तंत्र कहलाता है।**
- प्लेटफार्म पर खड़ा यात्री प्लेट फार्म पर स्थित किसी पेड़ को विरामावस्था में पाता है लेकिन वही यात्री जब स्टेशन से गुजरती हुई रेलगाड़ी से पेड़ को देखता है तो उसे गत्यावस्था में पाता है, दोनों ही स्थितियों में प्रेक्षक वही है लेकिन प्रेक्षण भिन्न है क्योंकि प्रथम स्थिति में प्रेक्षक प्लेटफार्म पर खड़ा है जो कि एक स्थिर निर्देशतंत्र है तथा दूसरी स्थिति में प्रेक्षक गतिमान रेलगाड़ी में है जो एक गतिमान निर्देश तंत्र है।



चित्र 3.1

- किसी वस्तु की गति भिन्न-भिन्न निर्देश तंत्रों में भिन्न-भिन्न प्रतीत होती है। जैसे एक गतिशील रेलगाड़ी में से एक पत्थर का टुकड़ा ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर फेंका जाता है तब रेलगाड़ी में बैठे प्रेक्षक को पत्थर का टुकड़ा सरल रेखीय ऊर्ध्वाधर मार्ग में लौटता प्रतीत होता है जबकि पृथ्वी पर खड़े प्रेक्षक को पत्थर के टुकड़े का मार्ग परवलयाकार प्रतीत होता है। इस प्रकार गतिशील वस्तु के वेग के साथ उसका मार्ग निर्देश तंत्र पर निर्भर करता है। यह निर्देश तंत्र की आवश्यकता तथा महत्व को व्यक्त करता है। साधारणतया किसी वस्तु की गति को व्यक्त करने के लिए उस निर्देश तंत्र का चयन करते हैं जिसमें वस्तु की गति सरल प्रतीत होती है।
- **निर्देश तंत्रों के प्रकार**–निर्देश तंत्र विभिन्न प्रकार के होते हैं–

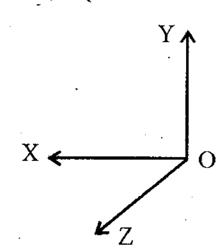
(i) कार्तीय निर्देश तंत्र
(ii) गोलीय ध्रुवीय निर्देश तंत्र
(iii) बेलनाकार निर्देश तंत्र।

यहाँ हम केवल कार्तीय निर्देश तंत्र की चर्चा करेंगे।

कार्तीय निर्देश तंत्र में तीन परस्पर लम्बवत् अक्ष होते हैं जिन्हें X, Y तथा Z अक्ष कहते हैं। इन अक्षों के कटान बिन्दु को मूल बिन्दु (O) कहते हैं तथा यह संदर्भ बिन्दु होता है।

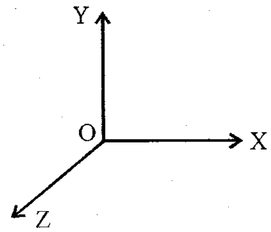
किसी वस्तु के निर्देशांक (x, y, z) निकाय के सापेक्ष वस्तु की स्थिति को निरूपित करते हैं। समय मापने के लिए निकाय में घड़ी रख देते हैं। कार्तीय निर्देश पद्धति में दो प्रकार की निर्देशांक पद्धतियाँ प्रयुक्त की जाती है-

(i) वामावर्ती निर्देशांक पद्धति (Anticlockwise co-ordinate system)



चित्र 3.2

(ii) दक्षिणावर्ती निर्देशांक पद्धति (Clockwise co-ordinate system)



चित्र 3.3

सामान्यतया हम दक्षिणावर्ती कार्तीय निर्देशांक पद्धति प्रयुक्त करते हैं।

3.3 विराम एवं गति की संकल्पना (Concept of Rest and Motion)

जब किसी वस्तु की स्थिति में किसी निर्देश तंत्र तथा समय के सापेक्ष परिवर्तन नहीं हो तब वस्तु विराम अवस्था में होती है। जैसे–पहाड़, मकान, वृक्ष आदि जमीन पर खड़े प्रेक्षक के सापेक्ष विराम अवस्था में होते हैं। परन्तु ये सभी वस्तुएँ गतिशील रेलगाड़ी में बैठे प्रेक्षक को गतिशील प्रतीत होती है।

जब किसी वस्तु की स्थिति में किसी निर्देश तंत्र तथा समय के सापेक्ष परिवर्तन होता है तब वस्तु गतिशील अवस्था में होती है। जैसे–सूर्य के चारों ओर ग्रहों की गति, सड़क के किनारे खड़े प्रेक्षक के सापेक्ष बस, रेलगाड़ी की गति, गैस के अणुओं की गति आदि। निर्देश तंत्र के संदर्भ में यदि किसी निर्देश तंत्र के सापेक्ष किसी वस्तु के एक या अधिक निर्देशांक (x, y, z) समय के सापेक्ष परिवर्तन होते हैं तो वस्तु गतिशील अवस्था में होती है जबकि वस्तु के निर्देशांक अपरिवर्तित रहने पर वस्तु विराम अवस्था में होती है।

इस प्रकार विराम अवस्था तथा गतिशील अवस्था सापेक्षिक पद है।

3.4 गति के प्रकार (Types of Motion)

वस्तु की गति को निम्न आधार पर विभिन्न भागों में बाँटा जा सकता है।

3.4.1 विमीय आधार पर (On Dimensional Basis)

विमीय आधार अर्थात् निर्देश तंत्र के आधार पर गति को निम्न भागों में बाँटा गया है–

(i) एकविमीय गति (One dimensional motion)–

यदि किसी निर्देश तंत्र के सापेक्ष किसी कण के तीन निर्देशांकों में से कोई भी दो स्थिर रहें और केवल एक निर्देशांक समय के साथ परिवर्तित होता है तो कण की गति एकविमीय कहलाती है अर्थात् एक कण एक सरल रेखा के अनुदिश गति करता है। एक विमीय गति में मात्र दो ही दिशायें धनात्मक व ऋणात्मक होती है जिन्हें + और – संकेतों से व्यक्त कर सकते हैं अतः इनका वर्णन करने के लिए सदिश की आवश्यकता भी नहीं होती है।

जैसे–(i) चींटी का रस्सी पर चलना, (ii) ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर फेंकी गयी वस्तु की गति।

(ii) द्विविमीय गति (Two Dimensional Motion)– यदि किसी निर्देश तंत्र के सापेक्ष किसी कण के तीन निर्देशांकों में से कोई भी एक निर्देशांक स्थिर रहे तथा दो निर्देशांक समय के साथ परिवर्तित होते है तो कण की गति द्विविमीय गति कहलाती है। इस स्थिति में कण एक तल में गति करता है। जैसे-टेढ़े-मेढ़े पथ पर चींटी की गति, मैदान में फुटबाल खेलता खिलाड़ी, क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर तल में वृत्ताकार गति, प्रक्षेप गति आदि।

(iii) त्रिविमीय गति (Three Dimensional Motion)– यदि किसी निर्देश तंत्र के सापेक्ष किसी कण के तीनों निर्देशांक समय के साथ परिवर्तित हो तो कण की गति त्रिविमीय गति कहलाती है। यह गति आकाश में होती है। जैसे-उड़ती हुई पतंग की गति, उड़ते हुए वायुयान की गति, गैसीय अणुओं की यादृच्छिक गति आदि।

3.4.2 कण की गति की प्रकृति के आधार पर (On the basis of Nature of motion of Particle)

- कण की गति की प्रकृति के आधार पर गति को निम्न भागों में बाँटा गया है–

(i) स्थानान्तरीय गति (Translational Motion)– जब गति करता हुआ कण किसी निर्देश तंत्र के सापेक्ष एक स्थिति से दूसरी स्थिति पर स्थानान्तरित होता है तब कण की गति स्थानान्तरीय गति कहलाती है। इस गति में किसी वस्तु पर किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा वस्तु की सम्पूर्ण गति के दौरान स्वयं के समान्तर रहती है। जैसे-सीधी सड़क पर वाहन की गति, निश्चित ऊँचाई से गिर रही वस्तु की ऊर्ध्व गति आदि।

(ii) घूर्णन गति (Rotational Motion)– जब कोई दृढ़ पिण्ड किसी स्थिर अक्ष के परितः घूर्णन करता है तब पिण्ड की गति घूर्णन गति कहलाती है। जैसे-छत के पंखे की गति, कुम्हार के चाक की गति आदि।

(iii) दोलन या कम्पन गति (Oscillatory or Vibrational Motion)– जब कोई कण अपनी माध्य स्थिति के इर्द-गिर्द अपनी गति को निश्चित समयान्तराल में दोहराता है तब कण की गति दोलन या कम्पन गति कहलाती है। जैसे-दीवार घड़ी के लोलक की गति, स्प्रिंग से जुड़े द्रव्यमान की गति आदि।

महत्वपूर्ण तथ्य

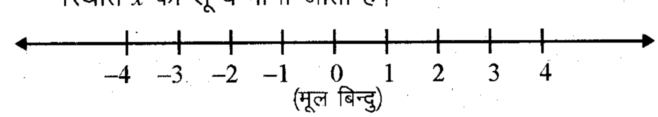
- सरल रेखा में गतिशील कण प्रत्येक क्षण एक निश्चित स्थिति प्राप्त करता है जिसे x से व्यक्त किया जाता है जो समय (t) पर निर्भर करती है। किसी कण की सरल रेखीय गति के लिए भिन्न-भिन्न समयों पर कण की स्थिति का मापन आवश्यक होता है।

  स्थिति तथा समय दोनों के मापन के लिए प्रत्येक मापन में तीन बातों की जानकारी आवश्यक है–

  (i) मूल बिन्दु (ii) विमा तथा (iii) मात्रक

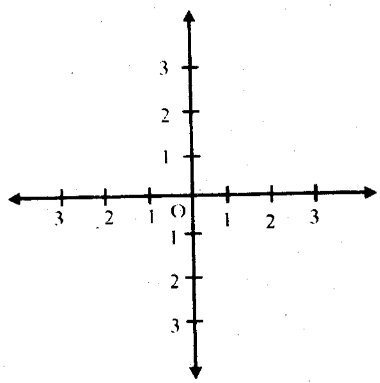
1. स्थिति का मापन (Measurement of Position)

(i) मूल बिन्दु (origin)–किसी वस्तु की स्थिति के मापन के लिए एक निर्देश बिन्दु का चुनाव किया जाता है, जिसे मूल बिन्दु कहते हैं। इस बिन्दु का चुनाव स्वैच्छिक होता है। मूल बिन्दु पर स्थिति x को शून्य माना जाता है।



(ii) दिशा (Direction)–मूल बिन्दु के दांयी ओर की दिशा धनात्मक तथा बांयी ओर की दिशा ऋणात्मक ली जाती है। इसी प्रकार ऊर्ध्वाधर ऊपर की दिशा धनात्मक तथा नीचे की दिशा

ऋणात्मक ली जाती है।



(iii) मात्रक (Unit)–स्थिति के मात्रक का चयन तय की गई दूरी के परिमाण पर निर्भर करता है तथा सुविधानुसार सेन्टीमीटर, मीटर, किलोमीटर आदि हो सकता है।

2. **समय का मापन (Measurement of Time)**–

(i) मूल बिन्दु (Origin)–समय के मापन के लिए प्रारंभिक समय को मूल बिन्दु माना जाता है तथा मूल बिन्दु पर समय $t = 0$ लेते हैं।

(ii) दिशा (Direction)–मूल बिन्दु के बाद में नापा गया समय धनात्मक लेते हैं।

(iii) मात्रक (Unit)–समय के मात्रक का चयन समय अन्तराल के परिमाण पर निर्भर करता है तथा सुविधानुसार घण्टा, मिनट, सेकण्ड, माह, वर्ष आदि हो सकता है।

- **स्थिति अक्ष पर दो बिन्दुओं के बीच की दूरी तथा समय अक्ष पर दो बिन्दुओं के बीच का समय अन्तराल मूल बिन्दु के चयन पर निर्भर नहीं करता है।**

3.5 दूरी व विस्थापन (Distance and Displacement)

3.5.1 दूरी (Distance)

1. किसी कण द्वारा निश्चित समय में तय किए गए पथ की लम्बाई को दूरी कहते हैं। यह अदिश राशि है।
2. गतिशील वस्तु के लिए समय बढ़ने पर दूरी का मान सदैव बढ़ता है। दूरी को ओडोमीटर द्वारा मापा जाता है।

3.5.2 विस्थापन (Displacement)

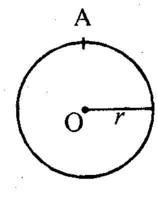
1. किसी निर्देश बिन्दु के सापेक्ष वस्तु द्वारा निश्चित दिशा में तय की गई दूरी को विस्थापन कहते हैं।
2. किसी निर्देश बिन्दु के सापेक्ष कण की अंतिम स्थिति व प्रारंभिक स्थिति के अन्तर को विस्थापन कहते हैं। यह सदिश राशि है।

जैसे–

(i) वृत्ताकार पथ के लिए यदि कोई वस्तु स्थिति A से गतिशील होकर पुनः A पर आ जाए।

दूरी $= 2\pi r$

विस्थापन = शून्य

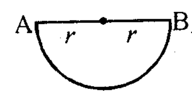


चित्र 3.4

(ii) स्थिति A से B तक जाने पर

दूरी $= \pi r$

विस्थापन $= 2r$



चित्र 3.5

दूरी तथा विस्थापन की तुलना–

(i) विस्थापन का परिमाण, दो स्थितियों के बीच न्यूनतम संभव दूरी के तुल्य होता है अर्थात्

दूरी $\geq$ | विस्थापन |

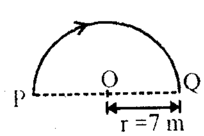
(ii) गतिशील कण के लिए दूरी कभी ऋणात्मक अथवा शून्य नहीं हो सकती जबकि विस्थापन हो सकता है। शून्य विस्थापन का तात्पर्य है कि गतिशील वस्तु अपनी प्रारंभिक स्थिति पर पुनः आ चुकी है अर्थात् दूरी > 0 परन्तु विस्थापन = अथवा < 0

(iii) गतिशील कण के लिए दूरी समय के साथ कभी घट नहीं सकती है, जबकि विस्थापन समय के साथ घट सकता है। समय के साथ विस्थापन घटने का तात्पर्य है कि कण प्रारंभिक स्थिति की ओर गतिशील है।

(iv) दो बिन्दुओं के मध्य गति के लिए विस्थापन अद्वितीय (Unique) फलन होता है जबकि दूरी वास्तविक पथ पर निर्भर करती है तथा इसके अनन्त मान हो सकते हैं।

उदा.1. यदि एक वस्तु बिन्दु P से 7 मीटर त्रिज्या के अर्द्धवृत्तीय पथ पर चलकर P के ठीक विपरीत स्थिति में Q बिन्दु पर पहुँचे तो वस्तु द्वारा तय की गई दूरी व विस्थापन का परिमाण ज्ञात कीजिए। (पुस्तक उदाहरण 3.1)

हल–



चित्र 3.6

चित्रानुसार वस्तु द्वारा तय की गई दूरी = अर्द्धवृत्ताकार पथ की लम्बाई

$$= \frac{1}{2} \times \text{परिधि}$$

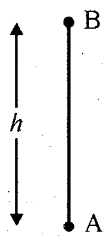
$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r$$

$$= \frac{22}{7} \times 7 = 22 \text{ मीटर}$$

वस्तु के विस्थापन का परिमाण = अर्द्धवृत्ताकार पथ पर बिन्दुओं P तथा Q के मध्य सीधी दूरी

$= r + r = 2r = 2 \times 7 = 14$ मीटर

उदा.2. निम्न चित्रानुसार कोई वस्तु पृथ्वी पर किसी बिन्दु A से ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर उछाली जाती है जो बिन्दु B पर h ऊँचाई तक जाकर पुनः पृथ्वी पर बिन्दु A पर लौट आती है। अन्तिम स्थिति में इसका विस्थापन व तय की गई दूरी क्या होगी?



चित्र 3.7

हल– वस्तु द्वारा तय की गई दूरी = पथ की कुल लम्बाई

$= h + h = 2h$

कुल विस्थापन = विस्थापन AB + विस्थापन BA

$$= \vec{h} + \left(-\vec{h}\right) = \vec{h} - \vec{h} = 0$$

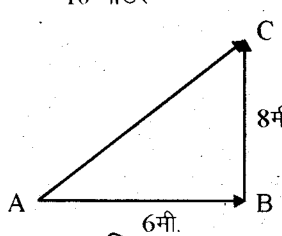
उदा.3. एक पिण्ड 6 मीटर पूर्व की ओर चलता है तत्पश्चात् 8 मीटर उत्तर की ओर। वस्तु द्वारा चली गयी दूरी व विस्थापन की गणना करो।

हल– पिण्ड द्वारा तय की गई दूरी $= 6 + 8 = 14$ मीटर

विस्थापन $= \sqrt{(6)^2 + (8)^2}$

$= \sqrt{100}$

$= 10$ मीटर



चित्र 3.8

3.6 चाल व वेग (Speed and Velocity)

3.6.1 चाल (Speed)

किसी वस्तु द्वारा एकांक समय में तय की गई दूरी को वस्तु की चाल कहते हैं।

(i) चाल एक अदिश राशि है।

(ii) **विमा** : $[M^0 L^1 T^{-1}]$

(iii) **SI मात्रक** : $\frac{\text{मीटर}}{\text{सेकण्ड}}$, **CGS मात्रक** : $\frac{\text{सेमी}}{\text{सेकण्ड}}$

(iv) चाल के प्रकार–

(a) **एक समान चाल**–जब कोई कण समान समय अन्तराल में समान दूरी तय करता है तब कण की चाल एकसमान चाल कहलाती है।

(b) **असमान (परिवर्ती) चाल**–जब कोई कण समान समय अन्तराल में असमान दूरी तय करता है तब कण की चाल असमान अथवा परिवर्ती चाल कहलाती है।

(c) **औसत चाल (माध्य चाल) (Average speed)**–किसी वस्तु द्वारा तय की गई कुल दूरी तथा उस दूरी को तय करने में लगे समय के अनुपात को औसत चाल कहते हैं।

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad ...(1)$$

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad ...(2)$$

(d) **तात्क्षणिक चाल (Instantaneous speed)**–किसी निश्चित समय या क्षण पर वस्तु की चाल को तात्क्षणिक चाल कहते हैं। जब हम चाल कहते हैं तो इसका सामान्य अर्थ तात्क्षणिक चाल से ही होता है। इसके लिए समय अन्तराल Δt बहुत अल्प होना चाहिए अर्थात् $\Delta t \to 0$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} \quad ...(3)$$

तात्क्षणिक चाल या चाल गतिमान वस्तु के वेग का परिमाण है जैसे वेग $+24.0 ms^{-1}$ व $-24.0 ms^{-1}$ दोनों में प्रत्येक का परिमाण $24.0 ms^{-1}$ होगा। किसी वाहन का चाल मापक यंत्र स्पीडोमीटर वाहन की तात्क्षणिक चाल को ही मापता है।

3.6.2 वेग (Velocity)

किसी गतिशील वस्तु द्वारा निश्चित दिशा में एकांक समय में तय की गई दूरी को वस्तु का वेग कहते हैं।

(i) वेग एक सदिश राशि है।

(ii) विमा : $[M^0 L^1 T^{-1}]$

(iii) SI मात्रक : $\frac{\text{मीटर}}{\text{सेकण्ड}}$, CGS मात्रक : $\frac{\text{सेमी}}{\text{सेकण्ड}}$

(iv) वेग के प्रकार–

(a) **एक समान वेग**–जब कोई कण इस प्रकार गतिशील हो ताकि कण के वेग का परिमाण तथा दिशा दोनों ही समान रहें तब कण का वेग एकसमान वेग कहलाता है। यह केवल तभी संभव है जब कण एक सरल रेखा में एक ही दिशा में नियत वेग से गतिशील हो, तब त्वरण शून्य होगा

(b) **असमान वेग**–जब कोई कण इस प्रकार गतिशील हो ताकि

कण के वेग का परिमाण अथवा दिशा अथवा दोनों परिवर्तित हो तब कण का वेग असमान वेग कहलाता है।

(c) औसत वेग (माध्य वेग) (Average velocity)–किसी वस्तु के कुल विस्थापन तथा उस विस्थापन में लगे कुल समय के अनुपात को औसत वेग कहते हैं।

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \qquad ...(4)$$

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{x_2} - \vec{x_1}}{t_2 - t_1} \qquad ...(5)$$

(d) तात्क्षणिक वेग (Instantaneous velocity)–किसी निश्चित समय या क्षण पर वस्तु के वेग को तात्क्षणिक वेग कहते हैं।

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \qquad ...(6)$$

औसत चाल तथा औसत वेग में तुलना–

(i) ∵ किसी दिए गए समयान्तराल के लिए

दूरी ≥ |विस्थापन|

∴ औसत चाल ≥ |औसत वेग|

विस्थापन की भांति औसत वेग भी एक सदिश राशि है। इसमें परिमाण व दिशा दोनों ही होते हैं।

(ii) गतिशील कण के लिए औसत चाल कभी ऋणात्मक अथवा शून्य नहीं हो सकती (जब तक कि $t \to \infty$) जबकि औसत वेग ऋणात्मक अथवा शून्य हो सकता है अर्थात् v_{av} 0 जबकि $\vec{v}_{av}$ = अथवा < 0.

(iii) यदि गतिशील कण अपनी प्रारंभिक स्थिति में पुनः आ जाता है तब $v_{av} = 0$ $(\because \Delta\vec{x} = 0)$ परन्तु $v_{av} > 0$ तथा नियत $(\because \Delta s > 0)$.

(iv) किसी दिए गए समय अन्तराल के लिए औसत वेग का केवल एक ही मान होता है जबकि औसत चाल के अनेक मान हो सकते हैं जो तय किये गये पथ पर निर्भर करते हैं।

(v) जब विस्थापन का परिमाण कुल पथ लम्बाई के बराबर होगा तब वस्तु के औसत वेग का परिमाण उसकी औसत चाल के बराबर होगा।

तात्क्षणिक चाल तथा तात्क्षणिक वेग में तुलना–

(i) तात्क्षणिक वेग का परिमाण, तात्क्षणिक चाल के बराबर होता है।

(ii) जब कोई कण नियत वेग से गतिशील होता है तब कण का औसत वेग तथा तात्क्षणिक वेग सदैव समान होता है।

(iii) तात्क्षणिक वेग सदैव कण द्वारा तय किये गये पथ की स्पर्शरेखीय दिशा में होता है।

(iv) ऐसा संभव है कि किसी कण की तात्क्षणिक चाल नियत हो परन्तु तात्क्षणिक वेग परिवर्ती हो।

उदाहरण–किसी कण की एकसमान वृत्तीय गति।

महत्वपूर्ण तथ्य

1. समय औसत चाल–जब कोई कण भिन्न–भिन्न समयान्तरालों $t_1, t_2, t_3, ...$ में भिन्न–भिन्न चालों क्रमशः $v_1, v_2, v_3, ...$ से गतिशील हो तो यात्रा के सम्पूर्ण समय हेतु इसकी औसत चाल 'समय औसत चाल' कहलाती है।

$$v_{av} = \frac{\text{कुल तय दूरी}}{\text{कुल लगा समय}}$$

$$= \frac{d_1 + d_2 + d_3 + ...}{t_1 + t_2 + t_3 + ...}$$

$$= \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2 + v_3 t_3 + ...}{t_1 + t_2 + t_3 + ...}$$

विशेष स्थिति–जब कण अपनी कुल यात्रा के आधे समय तक v_1 चाल से तथा शेष आधे समय तक v_2 चाल से गति करता है तो

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

2. दूरी औसत चाल–जब कोई कण भिन्न–भिन्न दूरियाँ $d_1, d_2, d_3, ...$ क्रमशः $v_1, v_2, v_3, ...$ चाल से तय करता है, तो यात्रा की सम्पूर्ण दूरी हेतु इसकी औसत चाल 'दूरी औसत चाल' कहलाती है।

$$v_{av} = \frac{\text{तय की गई कुल दूरी}}{\text{कुल समय}}$$

$$= \frac{d_1 + d_2 + d_3 + ...}{t_1 + t_2 + t_3 + ...}$$

$$= \frac{d_1 + d_2 + d_3 + ...}{\frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} + \frac{d_3}{v_3} + ...}$$

(i) जब कण पहली आधी दूरी v_1 चाल से तथा आधी दूरी v_2 चाल से तय करता है तो

$$v_{av} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

(ii) जब कण प्रथम एक–तिहाई दूरी v_1 चाल से, अगली एक–तिहाई दूरी v_2 चाल से तथा अन्तिम एक–तिहाई दूरी v_3 चाल से तय करता है

तो $$v_{av} = \frac{3v_1 v_2 v_3}{v_1 v_2 + v_2 v_3 + v_3 v_1}$$

3.7 त्वरण (Acceleration)

किसी वस्तु के वेग में परिवर्तन की दर को त्वरण कहते हैं।

(i) यह एक सदिश राशि है। इसकी दिशा वेग परिवर्तन की दिशा होती है (वेग की दिशा नहीं)।

(ii) **विमा** : $[M^0L^1T^{-2}]$

(iii) **मात्रक** : SI $\frac{\text{मीटर}}{\text{सेकण्ड}^2}$. CGS $\frac{\text{सेमी}}{\text{सेकण्ड}^2}$

(iv) त्वरण के प्रकार

(a) **एकसमान त्वरण**–जब गतिशील कण के त्वरण का परिमाण तथा दिशा दोनों नियत रहे तब कण का त्वरण एकसमान त्वरण होता है।

(b) **असमान (परिवर्ती) त्वरण**–जब गतिशील कण के त्वरण का परिमाण अथवा दिशा अथवा दोनों परिवर्तित हो तब कण का त्वरण परिवर्ती त्वरण होता है।

(c) **औसत त्वरण(माध्य त्वरण) (Average acceleration)**– किसी वस्तु के एकांक समय में कुल वेग में परिवर्तन को औसत त्वरण कहते हैं।

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \quad ...(1)$$

(d) **तात्क्षणिक त्वरण (Instantaneous acceleration)**—किसी निश्चित समय या क्षण पर वस्तु के त्वरण को तात्क्षणिक त्वरण कहते हैं।

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad ...(2)$$

$$\because \quad \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \quad ...(3)$$

इस प्रकार वस्तु का तात्क्षणिक त्वरण वस्तु की स्थिति का समय के सापेक्ष द्वितीय अवकलन होता है।

त्वरण से सम्बन्धित महत्त्वपूर्ण तथ्य–

(i) त्वरण धनात्मक, शून्य अथवा ऋणात्मक हो सकता है। धनात्मक त्वरण का तात्पर्य है कि वेग, समय के साथ बढ़ रहा है, शून्य त्वरण का तात्पर्य है कि वेग नियत हैं जबकि ऋणात्मक त्वरण का तात्पर्य है कि वेग, समय के साथ कम हो रहा है। ऋणात्मक त्वरण को **मंदन (Deceleration)** कहते हैं।

(ii) गतिशील कण के तात्क्षणिक वेग की दिशा तथा त्वरण की दिशा में कोई सम्बन्ध नहीं होता है।

(iii) यदि कोई वस्तु किसी वृत्ताकार पथ पर एकसमान चाल से गतिशील होती है तो भी वेग की दिशा निरन्तर परिवर्तित होने के कारण वस्तु की गति त्वरित गति होती है।

उदा.4. एक कार अपनी यात्रा में लगे कुल समय का आधा समय 80km/h की चाल से चलती है और शेष आधा समय 40 km/h की चाल से चलती है। यदि यात्रा की कुल दूरी 60km हो तो कार की माध्य चाल, प्रत्येक चाल से चली गई दूरियाँ ज्ञात कीजिए। कार सरल रेखा में गति करती है। (पुस्तक उदाहरण 3.2)

हल– माना कि कार द्वारा तय की गई कुल दूरी S तथा यात्रा करने में लगा कुल समय t है। अब यदि कार द्वारा प्रथम $\frac{t}{2}$ समय में V_1 चाल से तय की गई दूरी S_1 तथा शेष $\frac{t}{2}$ समय में V_2 चाल से तय की गई दूरी S_2 हो तो प्रश्नानुसार

$S = 60$ km, $V_1 = 80$ km/h, $V_2 = 40$ km/h

$$\because \quad S = S_1 + S_2 = V_1\frac{t}{2} + V_2\frac{t}{2} = \frac{V_1 t + V_2 t}{2}$$

माध्य चाल
$$V_{av} = \frac{S}{t} = \frac{V_1 t + V_2 t}{2t}$$
$$= \frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{80 + 40}{2}$$
$$= 60 \text{ km/h}$$

$$\because \quad V_{av} = \frac{S}{t} \qquad t = \frac{S}{V_{av}} = \frac{60}{60} = 1\text{h}$$

$\therefore$ 80 km/h की चाल से पहले $\frac{1}{2}$h में चली गई दूरी

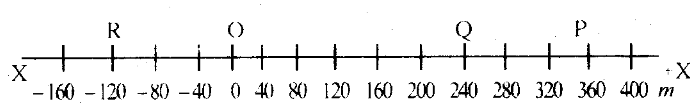
$$= 80 \times \frac{1}{2} = 40 \text{ km}$$

तथा 40km/h की चाल से शेष $\frac{1}{2}$ h में चली गई दूरी

$$= 40 \times \frac{1}{2} = 20 \text{ km}$$

इस स्थिति में कार की सरल रेखीय गति के कारण कार के माध्य वेग का मान माध्य चाल के बराबर होगा।

उदा.5. कोई कार एक सरल रेखा (चित्रानुसार) के अनुदिश गतिमान है। कार O से चलकर 18 सेकण्ड में P तक पहुँचती है, फिर 6.0 सेकण्ड में स्थिति Q पर वापस आ जाती है। कार के औसत वेग तथा औसत चाल की गणना कीजिए, जब (i) कार O से P तक जाती है तथा (ii) जब वह O से P तक जाकर पुनः Q पर वापस आ जाती है।



चित्र 3.9

हल– (i) जब कार O से P तक जाती है–

$$\text{औसत वेग} = \frac{\text{कुल विस्थापन}}{\text{कुल समय}}$$

$$= \frac{360}{18} = +20 \ \frac{\text{मीटर}}{\text{सेकण्ड}}$$

$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल समय}}$$

$$= \frac{360}{18} = 20 \ \frac{\text{मीटर}}{\text{सेकण्ड}}$$

इस स्थिति में गति की दिशा एक ही होने से औसत वेग का परिमाण

औसत चाल के तुल्य है।

(ii) $$\text{औसत वेग} = \frac{\text{कुल विस्थापन}}{\text{कुल समय}}$$

$$= \frac{240}{18+6} = +10\ \frac{\text{मीटर}}{\text{सेकण्ड}}$$

$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल समय}}$$

$$= \frac{360+120}{18+6} = 20\ \frac{\text{मीटर}}{\text{सेकण्ड}}$$

इस स्थिति में गति की दिशा परिवर्तित होने से दूरी का मान विस्थापन के परिमाण से अधिक है जिससे औसत वेग का परिमाण औसत चाल के तुल्य नहीं है। अतः औसत चाल, औसत वेग से अधिक है।

उदा.6. X–अक्ष के अनुदिश किसी गतिमान वस्तु की स्थिति निम्नलिखित सूत्र से व्यक्त की जाती है। $x = a + bt^2$। यहाँ $a = 8.5$ m, $b = 2.5\ m\ s^{-2}$ तथा समय t को सेकंड में व्यक्त किया गया है। t = 0 s तथा t = 2.0 s क्षणों पर वस्तु का वेग क्या होगा? t = 2.0 s तथा t = 4.0 s के मध्य के समय अंतराल में वस्तु का औसत वेग क्या होगा?

हल– $\because$ $$x = a + bt^2$$

$\therefore$ $$\text{वस्तु का वेग } v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(a + bt^2)$$

$$= 0 + 2bt = 2bt$$

$$= 2 \times 2.5t = 5t\ \frac{\text{मीटर}}{\text{सेकण्ड}}$$

$t = 0$ सेकण्ड पर वस्तु का वेग

$$v_{t=0} = 5 \times 0 = 0\ \frac{\text{मीटर}}{\text{सेकण्ड}}$$

$t = 2$ सेकण्ड पर वस्तु का वेग

$$v_{t=2} = 5 \times 2 = 10\ \frac{\text{मीटर}}{\text{सेकण्ड}}$$

$$\text{वस्तु का औसत वेग } \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x_{t=4} - x_{t=2}}{4-2}$$

$$= \frac{[a + b(4)^2] - [a + b(2)^2]}{2}$$

$$= \frac{(a+16b) - (a+4b)}{2} = 6b$$

$$= 6 \times 2.5 = 15\ \frac{\text{मी.}}{\text{सेकण्ड}}$$

उदा.7. मूल बिन्दु के सापेक्ष एक कण की स्थिति निम्नानुसार दी जाती है:

$$\mathbf{x = 7t^3 + 8t^2 + 5 \text{ मीटर}}$$

t = 5 सेकण्ड पर कण का वेग तथा त्वरण ज्ञात कीजिए।

(पुस्तक उदाहरण 3.3)

हल– $\because$ कण की स्थिति $x = 7t^3 + 8t^2 + 5$

$$\therefore \text{कण का वेग } V = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(7t^3 + 8t^2 + 5)$$

$$= 7(3t^2) + 8(2t) + (0)$$

$$= 21t^2 + 16t \qquad ....(1)$$

t = 5 सेकण्ड पर कण का वेग

$$V_{t=5} = 21(5)^2 + 16(5) = 525 + 80 = 605 \text{ मीटर/सेकण्ड}$$

$$\text{कण का त्वरण } a = \frac{dv}{dt}$$

$\therefore$ समी. (1) की सहायता से

$$a = \frac{d}{dt}(21t^2 + 16t) = 21(2t) + 16(1)$$

$$= 42t + 16$$

t = 5 सेकण्ड पर कण का त्वरण

$$a_{t=5} = 42(5) + 16 = 210 + 16 = 226 \text{ मीटर/सेकण्ड}^2$$

3.8 गति का आलेखीय निरूपण (Graphical Representation of Motion)

गति का आलेखीय निरूपण करने में स्वतन्त्र निर्देशांक को X- अक्ष पर दर्शाते हैं जबकि परतन्त्र (dependent) निर्देशांक को Y- अक्ष पर दर्शाते हैं। समय के सदैव स्वतन्त्र निर्देशांक होने के कारण समय को X- अक्ष पर दर्शाया जाता है। अब ग्राफ के ढाल (Slope) तथा प्राप्त आकृति के क्षेत्रफल द्वारा अन्य भौतिक राशि प्राप्त होती है। ग्राफ के ढाल को tan θ द्वारा ज्ञात करते हैं जो Y- अक्ष तथा X- अक्ष पर ली गई भौतिक राशियों का अनुपात होता है। जबकि आकृति के क्षेत्रफल द्वारा Y- अक्ष तथा X- अक्ष पर ली गई राशियों का गुणनफल होता है जो आकृति तथा उसके आकार पर निर्भर करता है।

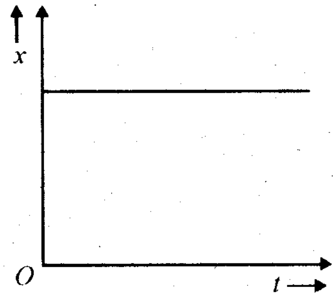
3.8.1 स्थिति-समय आलेख (Position-Time Graph)

गतिशील वस्तु की विभिन्न क्षणों पर स्थिति तथा उसके संगत समय के मध्य खींचा गया आलेख, स्थिति समय आलेख कहलाता है। इस आलेख द्वारा वस्तु के वेग, उसकी एकसमान या असमान गति तथा त्वरण के धनात्मक या ऋणात्मक होने की जानकारी मिलती है। स्थिति–समय आलेख के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा का ढाल (tan θ) उस बिन्दु पर वस्तु के तात्क्षणिक वेग को व्यक्त करता है अर्थात् $\tan\theta = v$

(i) जब कण विराम अवस्था है

यदि समय के साथ कण की स्थिति नियत बनी रहती है अर्थात् कण विरामावस्था में है तो स्थिति- समय ग्राफ समय अक्ष के समान्तर एक सीधी सरल रेखा होता है जिसका ढाल अर्थात् वेग शून्य होगा।

अतः $\theta = 0,\ \tan\theta = 0,\ \therefore v = 0$



(i)

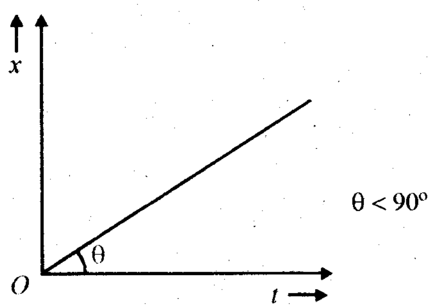
(ii) जब कण एक समान गति अर्थात् समान वेग से गतिमान है–

यदि कोई कण समान समय अंतराल में समान दूरियां समान दिशा में तय करता है, अर्थात् कण एक समान वेग से गति करता है तो स्थिति–समय ग्राफ एक सरल रेखा के रूप में प्राप्त होता है जिसका ढाल अर्थात् वेग नियत होगा।

(a) जब कण धनात्मक वेग से गतिमान है तो स्थिति समय ग्राफ का ढाल धनात्मक होगा।

अतः θ = नियत परन्तु $\theta < 90°$, $\tan\theta$ धनात्मक तब v नियत परन्तु धनात्मक तथा $a = 0$

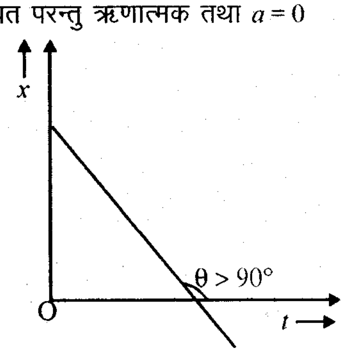
इस रेखा का ढाल (झुकाव) जितना अधिक होगा उतना ही अधिक कण का वेग होगा।



(ii)

(b) जब कण ऋणात्मक वेग से गतिमान है तो स्थिति समय ग्राफ का ढाल ऋणात्मक होगा इसमें कण निर्देश बिन्दु की ओर लौटता है।

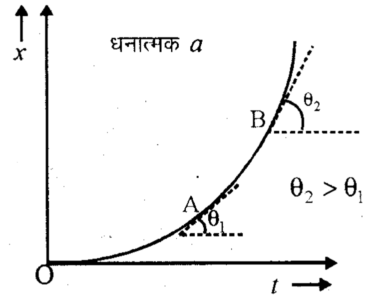
अतः θ = नियत परन्तु $\theta > 90°$, $\tan\theta$ ऋणात्मक तब v नियत परन्तु ऋणात्मक तथा $a = 0$



(iii)

(iii) जब कण परिवर्ती वेग से गतिमान है-

(a) धनात्मक दिशा में गतिशील त्वरित कण अर्थात् धनात्मक त्वरण के लिए–



(त्वरित गति के लिए)

(iv)

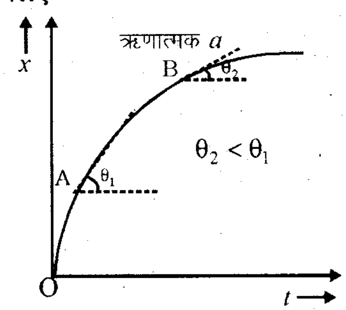
स्थिति समय में खींचे गये वक्र पर स्पर्श रेखा खींचे, तब भिन्न–भिन्न समय के संगत वक्र पर स्पर्श रेखा का ढाल अर्थात् वेग भिन्न–भिन्न प्राप्त होता है।

चित्रानुसार आलेख पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं के लिए $\theta_2 > \theta_1$ जिससे $\tan\theta_2 > \tan\theta_1$

अर्थात् बिन्दु B पर स्पर्श रेखा का ढाल $\tan\theta_2$ बिन्दु A पर स्पर्श रेखा के ढाल $\tan\theta_1$ से अधिक है जिससे समय वृद्धि के साथ यह ढाल अर्थात् वेग बढ़ रहा है अर्थात् कण त्वरित हो रहा है। अतः त्वरण धनात्मक है।

θ बढ़ रहा है अतः v बढ़ रहा है तथा त्वरण a धनात्मक है

(b) ऋणात्मक दिशा में गतिशील मंदित कण अर्थात् ऋणात्मक त्वरण के लिए–



(मंदन गति के लिए)

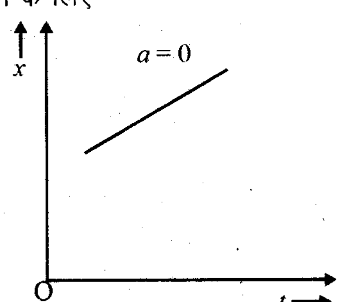
(v)

चित्रानुसार आलेख पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं के लिए $\theta_2 < \theta_1$ जिससे $\tan\theta_2 < \tan\theta_1$

अर्थात् बिन्दु B पर स्पर्श रेखा का ढ़ाल $\tan\theta_2$, बिन्दु A पर स्पर्श रेखा के ढाल $\tan\theta_1$ से कम है जिससे समय वृद्धि के साथ यह ढाल अर्थात् वेग घट रहा है अर्थात् कण मंदित हो रहा है अतः त्वरण a ऋणात्मक है। यह कण अन्ततः स्थिर हो जाता है।

θ घट रहा है, अतः v घट रहा है तथा त्वरण a ऋणात्मक है।

(c) शून्य त्वरण के लिए–



चित्र 3.10 (vi)

स्थिति समय में ग्राफ एक सरल रेखा है जिसका ढाल अर्थात् वेग नियत है।

θ = नियत $\therefore$ v = नियत अतः त्वरण $a = 0$

3.8.2 वेग-समय आलेख (Velocity Time Graph)

गतिशील वस्तु के विभिन्न क्षणों पर वेग तथा उसके संगत समय के मध्य खींचा गया आलेख, वेग-समय आलेख कहलाता है। इस आलेख द्वारा वस्तु के त्वरण तथा विस्थापन के बारे में जानकारी मिलती है। वेग-समय आलेख के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा का ढाल उस बिन्दु पर तात्क्षणिक त्वरण को व्यक्त करता है। किसी समयान्तराल में वेग-समय आलेख तथा समय अक्ष के मध्य घिरा क्षेत्रफल वस्तु के विस्थापन को व्यक्त करता है। वेग ऋणात्मक होने पर संगत समयान्तराल का विस्थापन ऋणात्मक होता है अतः समय अक्ष के नीचे के क्षेत्रफल को ऋणात्मक लेते हैं।

1. नियत वेग से गतिमान कण के लिए

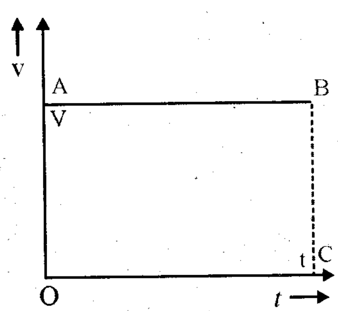
$\theta = 0°, \tan\theta = 0$, वेग v = नियत अतः त्वरण $a = 0$

अर्थात् गतिशील कण के लिए वेग समय ग्राफ समय अक्ष के समान्तर सरल रेखा प्राप्त होती है जो यह व्यक्त करती है कि कण का वेग नियत है अर्थात् कण एक समान गति से गतिमान है तथा जिसका ढाल अर्थात् त्वरण शून्य है।

वेग-समय आलेख व समय अक्ष के मध्य का क्षेत्रफल = आयत OABC का क्षेत्रफल

$$= v \times t = \frac{x}{t} \times t = x$$

= t समय में तय की गई दूरी या विस्थापन अर्थात् नियत वेग से गति (एक समान गति) में वेग व समय के मध्य खींचे गए आलेख के अन्तर्गत प्राप्त क्षेत्रफल कण द्वारा निश्चित समयान्तराल में दूरी या विस्थापन को व्यक्त करता है।



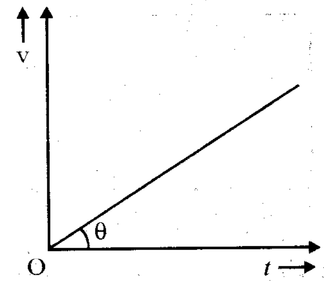
(i)

2. एकसमान त्वरण के साथ गतिमान कण के लिए–

(i) धनात्मक त्वरण से धनात्मक दिशा में गति

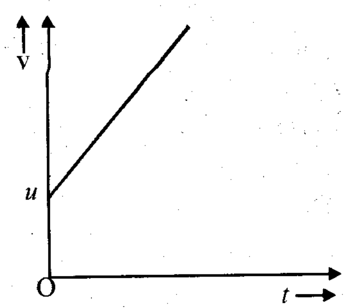
θ = नियत तथा $\theta < 90°$ अतः a = धनात्मक तथा नियत परन्तु कण का प्रारंभिक वेग शून्य है।

अर्थात् गतिशील कण के लिए वेग समय ग्राफ एक सरल रेखा प्राप्त होती है जो यह व्यक्त करती है कि कण एक समान त्वरण अर्थात् एक समान त्वरित गति से गतिशील हैं तथा जिसका ढाल अर्थात् त्वरण धनात्मक व नियत है तथा कण धनात्मक दिशा में गतिमान है।



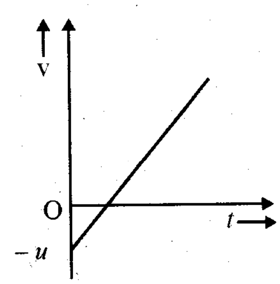
(ii)

(ii) θ = नियत तथा $\theta < 90°$ अतः a = धनात्मक तथा नियत परन्तु कण का प्रारंभिक वेग धनात्मक है तथा कण धनात्मक दिशा में गतिमान है।



(iii)

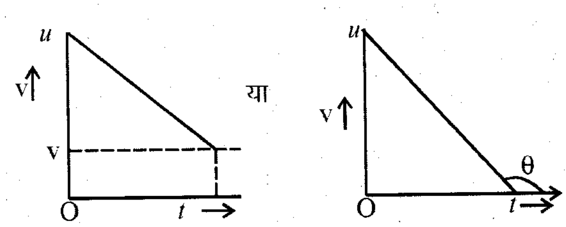
(iii) θ नियत तथा $\theta < 90°$ अतः त्वरण a = धनात्मक तथा नियत परन्तु कण का प्रारंभिक वेग ऋणात्मक है तथा कण धनात्मक दिशा में गतिमान है।



(iv)

(iv) ऋणात्मक त्वरण से धनात्मक दिशा में गति

θ = नियत तथा $\theta > 90°$ अतः त्वरण a ऋणात्मक तथा नियत है।



(v)

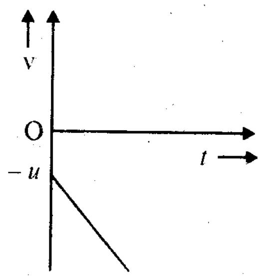
वेग-समय ग्राफ का ढाल ऋणात्मक। अतः कण की गति मंदित तथा कण का प्रारंभिक वेग धनात्मक है।

(v) ऋणात्मक त्वरण से ऋणात्मक दिशा में गति

θ = नियत तथा $\theta > 90°$

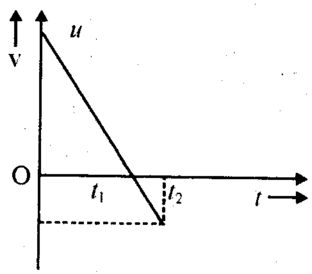
अतः त्वरण a ऋणात्मक तथा नियत है परन्तु कण का प्रारंभिक वेग ऋणात्मक है।

अतः वेग समय ग्राफ का ढाल ऋणात्मक होगा तथा कण ऋणात्मक दिशा में गतिमान है।



(vi)

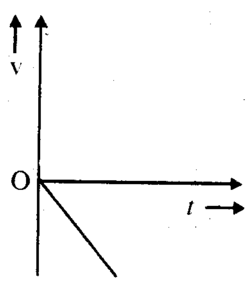
(vi) θ = नियत तथा $\theta > 90°$ अतः त्वरण ऋणात्मक तथा नियत है।



(vii)

ऋणात्मक त्वरण के साथ कण की गति जो समय t_1 पर दिशा बदलती है। 0 से t_1 तक धनात्मक x की दिशा में जबकि t_1 व t_2 के मध्य विपरीत दिशा में गतिमान है अर्थात् ऋणात्मक दिशा में गतिमान है।

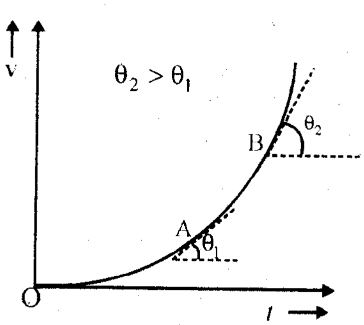
(vii) θ = नियत तथा $\theta > 90°$ अतः त्वरण ऋणात्मक तथा नियत है तथा ऋणात्मक दिशा में गतिमान है परन्तु कण का प्रारंभिक वेग शून्य है।



(viii)

3. असमान त्वरण के साथ गतिमान कण के लिए–

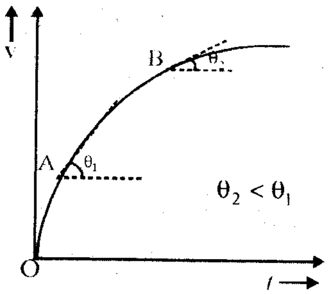
(a) θ बढ़ रहा है। अतः त्वरण बढ़ रहा है।



(ix)

चित्रानुसार आलेख पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं के लिए $\theta_2 > \theta_1$ जिससे $\tan\theta_2 > \tan\theta_1$ अर्थात् बिन्दु B पर स्पर्श रेखा का ढाल $\tan\theta_2$, बिन्दु A पर स्पर्श रेखा के ढाल $\tan\theta_1$ से अधिक है जिससे त्वरण लगातार बढ़ रहा है।

(b)

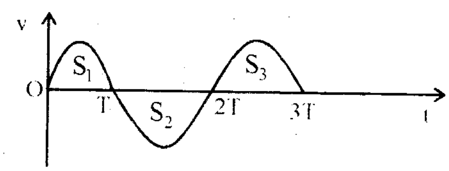


(x)

चित्रानुसार आलेख पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं के लिए $\theta_2 < \theta_1$ जिससे $\tan\theta_2 < \tan\theta_1$ अर्थात् बिन्दु B पर स्पर्श रेखा का ढाल $\tan\theta_2$ बिन्दु A पर स्पर्श रेखा के ढाल $\tan\theta_1$ से कम है जिससे त्वरण घट रहा है।

4. ज्यावक्रीय वेग-समय आलेख

चित्र में ज्यावक्रीय वेग–समय आलेख प्रदर्शित है। इस प्रकार की गति सामान्यतः सरल आवर्त गति होती है। सरल आवर्त गति में वेग, समय के साथ ज्या (sine) फलन के रूप में परिवर्तित होता है। इस आलेख द्वारा धनात्मक व ऋणात्मक विस्थापन को समझाया जा सकता है। चित्र में 0 से T तथा 2T से 3T समयान्तराल में वेग धनात्मक होने से क्षेत्रफल धनात्मक होगा जबकि T से 2T समयान्तराल में वेग ऋणात्मक होने से क्षेत्रफल ऋणात्मक होगा।



चित्र 3.11 (xi)

$\therefore$ चित्रानुसार 0 से 3T समयान्तराल में विस्थापन

$$= S_1 - S_2 + S_3$$

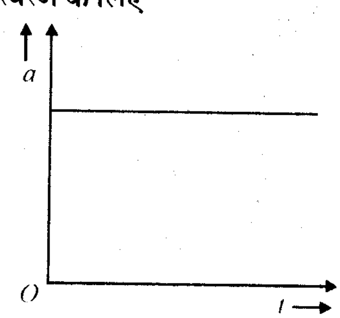
जबकि 0 से 3T समयान्तराल में तय की गई दूरी

$$= S_1 + S_2 + S_3$$

3.8.3 त्वरण-समय आलेख (Acceleration Time Graph)

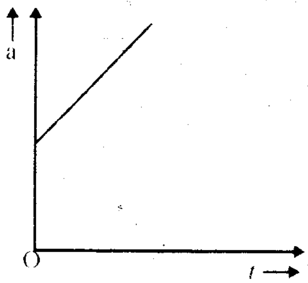
त्वरण समय आलेख भी कण की गति को व्यक्त करता है। किसी दिए गए समयान्तराल में त्वरण समय आलेख तथा समय अक्ष के मध्य घिरा क्षेत्रफल वेग परिवर्तन को व्यक्त करता है।

(i) एकसमान त्वरण के लिए

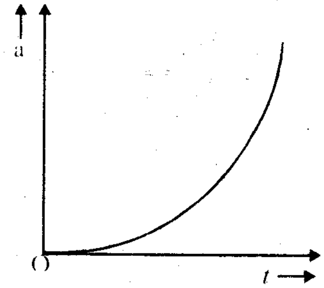


(i)

(ii) असमान त्वरण के लिए



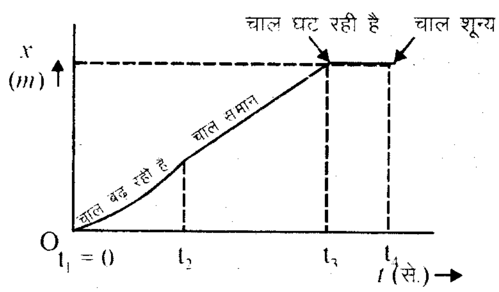
(i)



(ii)

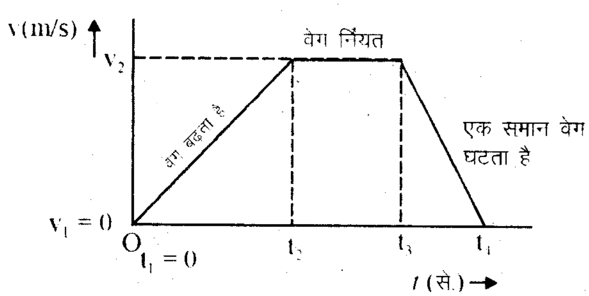
महत्त्वपूर्ण तथ्य

असमान गति के लिए समय के सापेक्ष स्थिति में परिवर्तन–
यदि एक कार जो मूल बिन्दु O से $t_1 = 0$ सेकण्ड पर विरामावस्था से चलती है। इसकी चाल उत्तरोत्तर $t = t_2$ से. तक बढ़ती जाती है इसके बाद $t = t_3$ से. तक एक समान चाल से चलती है। इस समय इसमें ब्रेक लगाया जाता है। जिसके कारण $t = t_4$ से. पर और x मीटर पर रूक जाती है।
ऐसी कार का स्थिति समय ग्राफ



(i)

2. **असमान गति के लिए समय के सापेक्ष वेग में परिवर्तन–**



(ii)

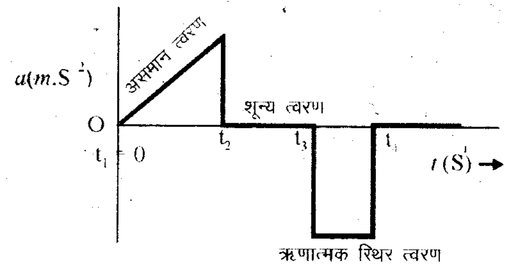
v – t ग्राफ से तात्क्षणिक त्वरण–
v – t ग्राफ में किसी क्षण कार का त्वरण उस क्षण वक्र पर खींची गई स्पर्श रेखा की प्रवणता के बराबर होता है।
v – t ग्राफ से औसत त्वरण–
v – t ग्राफ से कार का औसत त्वरण उस सरल रेखा की प्रवणता के बराबर होता है जो बिन्दु (v_2, t_2) को (v_1, t_1) से जोड़ती है। जैसे t_1 से t_2 तक औसत त्वरण असमान होगा

$$\overrightarrow{a_{av}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

गति के विभिन्न समय अंतरालों में वस्तु का औसत त्वरण ज्ञात कर सकते हैं।

t_2 से t_3 की अवधि में $\vec{a}_{av} = 0$ तथा t_3 से t_4 की अवधि में $\vec{a}_{av}$ स्थिर व ऋणात्मक होगा।

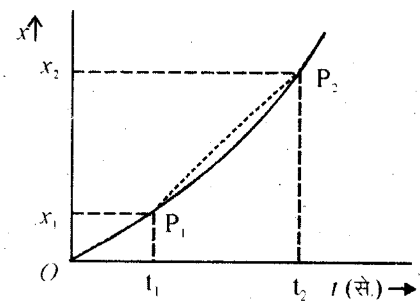
3. **असमान गति के लिए समय के सापेक्ष त्वरण में परिवर्तन–**



(iii)

त्वरण समय ग्राफ से स्पष्ट है कि t_1 से t_2 की अवधि में त्वरण असमान है। t_2 से t_3 की अवधि में यह शून्य है। जबकि t_3 से t_4 के बीच यह स्थिर है तथा ऋणात्मक है।
जब त्वरण एक समान होता है तो यह स्पष्ट है कि वह उस अवधि में औसत त्वरण के बराबर होता है।

4. **औसत वेग x–t ग्राफ से–**



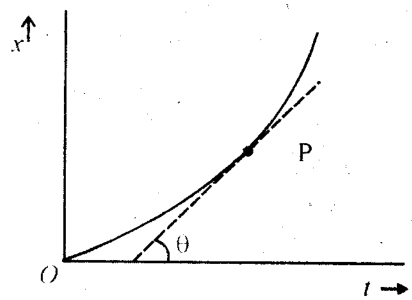
(iv)

t_1 तथा t_2 के मध्य समय अंतराल में किसी कण का औसत त्वरण

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

x–t ग्राफ में सरल रेखा P_1P_2 की प्रवणता औसत वेग के बराबर होगी। यह सरल रेखा कण की प्रारंभिक स्थिति P_1 को उसको अंतिम स्थिति P_2 से मिलाती है।

5. **तात्क्षणिक वेग x–t ग्राफ से–**



(v)

स्थिति समय ग्राफ से किसी क्षण पर कण का वेग उस बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा की प्रवणता के बराबर होता है।

अतः $m = \tan\theta = \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}$

3.9 एकसमान त्वरित गति के समीकरण (Equations of Motion for Uniform Accelerated motion)

एक समान त्वरण से गतिमान वस्तु के त्वरण का परिमाण तथा दिशा दोनों नियत रहते हैं। इस प्रकार की गति समान त्वरित गति कहलाती है।

उदाहरण–पृथ्वी की सतह के समीप ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर गिरते पिण्ड की गति।

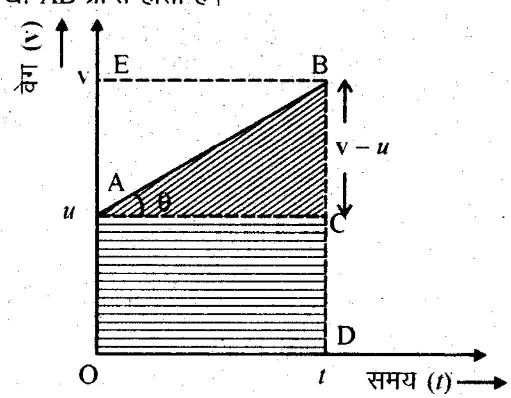
(1) एक समान त्वरित गति के लिए–वेग व समय के मध्य खींचा गया ग्राफ एक सरल रेखा के रूप में प्राप्त होता है। जिसका ढाल त्वरण के बराबर होता है।।

(2) वेग–समय वक्र के नीचे का क्षेत्रफल दूरी या विस्थापन को व्यक्त करता है।

एकसमान त्वरित गति के अध्ययन हेतु गति से सम्बन्धित विभिन्न भौतिक राशियों जैसे वेग (v), विस्थापन (x), समय (t) आदि में सम्बन्ध दर्शाने वाले समीकरण गति के समीकरण कहलाते हैं।

(i) ग्राफीय विधि द्वारा एकसमान त्वरण से गतिमान वस्तु के समीकरणों की उत्पत्ति–

माना कि कोई वस्तु एक समान त्वरण a से एक सरल रेखा में गतिशील है। वस्तु का प्रारंभिक वेग u तथा t समय पश्चात् वेग बढ़कर v हो जाता है। यदि समय (t) को X-अक्ष पर तथा वेग (v) को Y-अक्ष पर निरूपित करें तब प्राप्त ग्राफ एक झुकी हुई सरल रेखा AB प्राप्त होता है।



चित्र 3.13

चित्र की ज्यामिती से

$t = 0$ पर वेग $= u =$ OA

$t = t$ पर वेग $=$ v $=$ OE $=$ BD

प्रथम समीकरण (v = $u + at$)—

सीधी रेखा AB का ढाल

$$\tan\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{v-u}{t-0} = \frac{v-u}{t} = a$$

$\Rightarrow$ $$v - u = at$$

$\Rightarrow$ $$v = u + at \quad ....(1)$$

द्वितीय समीकरण ($s = ut + \frac{1}{2}at^2$)–

वेग–समय ग्राफ का क्षेत्रफल = आयत OACD का क्षेत्रफल + त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$$= u \times t + \frac{1}{2}(t)(v-u) \quad ....(2)$$

$\because$ $$a = \frac{v-u}{t}$$

$\therefore$ वेग–समय ग्राफ का क्षेत्रफल $= ut + \frac{1}{2}(t)(at)$

$$= ut + \frac{1}{2}at^2$$

परन्तु वेग–समय ग्राफ का क्षेत्रफल तय की गई दूरी के बराबर होता है अर्थात् तय की गई दूरी $(x - x_0)$

जहां $t = 0$ पर वस्तु की स्थिति x_0 तथा t समय पर x है।

$\therefore$ $$x - x_0 = ut + \frac{1}{2}at^2$$

यदि $x - x_0 =$ s हो तो

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \quad ...(3)$$

तृतीय समीकरण ($v^2 = u^2 + 2as$)—

समी. (2) से t समय में तय की गई दूरी

$$s = ut + \frac{1}{2}(v-u)t$$

$$s = ut + \frac{vt}{2} - \frac{ut}{2}$$

$$s = \frac{ut}{2} + \frac{vt}{2} = \left(\frac{u+v}{2}\right)t \quad ....(4)$$

समीकरण (1) से $t = \frac{v-u}{a}$ का मान समीकरण (4) में रखने पर

$$s = \left(\frac{u+v}{2}\right)\left(\frac{v-u}{a}\right)$$

$$s = \left(\frac{v+u}{2}\right)\left(\frac{v-u}{a}\right)$$

$$s = \frac{v^2 - u^2}{2a}$$

$\Rightarrow$ $$v^2 - u^2 = 2as$$

$\Rightarrow$ $$v^2 = u^2 + 2as \quad ....(5)$$

उपरोक्त समीकरणों की व्युत्पत्ति में $x - x_0 =$ s लिया गया है यदि ऐसा नहीं हो तब

समीकरण (3) का रूप

$$x - x_0 = ut + \frac{1}{2}at^2$$

(ii) कलन विधि (Calculus Method) द्वारा एकसमान त्वरण से गतिमान वस्तु के समीकरणों की उत्पत्ति

प्रथम समीकरण-

$\because$ त्वरण $a = \frac{dv}{dt}$

$\Rightarrow$ $$dv = adt$$

$\Rightarrow$ $$x = x_0 + ut + \frac{1}{2}at^2 \quad ....(6)$$

तथा समी. (5) का रूप

$$v^2 = u^2 + 2a(x - x_0) \quad ....(7)$$

समाकलन करने पर

$$\int_u^v dv = \int_0^t a\,dt$$

$\Rightarrow \quad [v]_u^v = a[t]_0^t$

$\Rightarrow \quad v - u = a(t - 0)$

$\Rightarrow \quad v - u = at$

$\Rightarrow \quad v = u + at \quad \text{...(1)}$

यही गति का प्रथम समीकरण है।

द्वितीय समीकरण–

$\because$ वेग $v = \dfrac{dx}{dt}$

प्रथम समीकरण से $v = u + at$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dx}{dt} = u + at$

$\Rightarrow \quad dx = udt + at\,dt$

समाकलन करने पर

$\Rightarrow \quad \displaystyle\int_{x_0}^{x} dx = u\int_0^t dt + a\int_0^t t\,dt$

$\Rightarrow \quad [x]_{x_0}^{x} = u[t]_0^t + a\left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^t$

$\Rightarrow \quad x - x_0 = ut + \dfrac{1}{2}at^2$

$x - x_0 = s$ लेने पर $\quad s = ut + \dfrac{1}{2}at^2 \quad \text{...(2)}$

यही गति का द्वितीय समीकरण है।

तीसरा समीकरण–प्रथम समीकरण से

$$v = u + at$$
$$v^2 = (u + at)^2$$
$$= u^2 + 2uat + a^2t^2$$
$$= u^2 + 2a\left(ut + \frac{1}{2}at^2\right)$$

समीकरण (2) $s = ut + \dfrac{1}{2}at^2$ का प्रयोग करने पर

$$u^2 = u^2 + 2as$$

यह गति का तृतीय समीकरण है। इस विधि का उपयोग असमान त्वरण वाले गति के लिए भी कर सकते हैं।

महत्वपूर्ण तथ्य

- **गुरुत्व के अन्तर्गत गति (Motion under gravity)**
  यदि कोई वस्तु गुरुत्व के अन्तर्गत मुक्त रूप से गिर रही हो तब वस्तु के त्वरण को गुरुत्व–जनित त्वरण 'g' कहते हैं। g का मान 9.8 मी./से.^{2} अथवा 980 सेमी./से.^{2} अथवा 32 $\dfrac{feet}{s^2}$ होता है।
  गति की समीकरणों में $a = g = 9.8$ मी/से^{2} तथा विस्थापन s के स्थान पर ऊँचाई h लिखते हैं। अतः गति की समीकरणें निम्न प्रकार होंगी–
  जब वस्तु को ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर फेंका जाये तो

$$v = u + gt$$
$$h = ut + \frac{1}{2}gt^2$$
$$v^2 = u^2 + 2gh$$

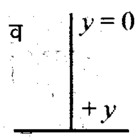
  परन्तु यदि वस्तु को ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर फेंका जाये, तो गति मन्दित कहलाती है

  $\therefore \quad a = -g = -9.8$ मी/से^{2}

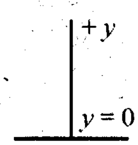
  अब गति की समीकरणें निम्न प्रकार होंगी–

$$v = u - gt$$
$$h = ut - \frac{1}{2}gt^2$$
$$v^2 = u^2 - 2gh$$

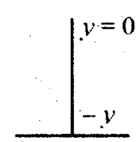
- गुरुत्वीय त्वरण की दिशा सदैव नीचे की ओर होती है।
- जब ऊर्ध्वाधर नीचे की दिशा को Y अक्ष की धनात्मक दिशा मानते हैं तथा उच्चतम बिन्दु पर $y = 0$ लेते हैं तो



  (a) वस्तु की ऊपर की ओर गति के लिए स्थिति व वेग ऋणात्मक तथा त्वरण धनात्मक होंगे।
  (b) वस्तु की नीचे की ओर गति के लिए स्थिति, वेग व त्वरण धनात्मक होंगे।
- जब ऊर्ध्वाधर ऊपर की दिशा को Y अक्ष की धनात्मक दिशा मानते हैं तथा धरातल पर $y = 0$ लेते हैं, तो



  (a) वस्तु की ऊपर की ओर गति के लिए स्थिति व वेग धनात्मक तथा त्वरण ऋणात्मक होंगे।
  (b) वस्तु की नीचे की ओर गति के लिए स्थिति, वेग व त्वरण ऋणात्मक होंगे।
- यदि कोई वस्तु मुक्त रूप से पृथ्वी की ओर गिरायी जाती है तो वस्तु की गति $-y$ दिशा में होगी यदि ऊर्ध्वाधर ऊपर की दिशा को हम धनात्मक मानते हैं तो गुरुत्वीय त्वरण की दिशा सदैव नीचे की ओर होती है। अतः $a = -g = -9.8\ m/s^2$
  जब वस्तु $y = 0$ स्थिति से विरामावस्था से गिराते हैं।
  तो $u = 0$ तब गति के समीकरण



  $v = 0 - gt = -9.8\,t$ मी./से.

  $y = 0 - \dfrac{1}{2}gt^2 = -4.9\,t^2$ मी

  $v^2 = 0 - 2gy = -19.6\,y$ मी^{2}/से^{2}

  अतः स्थिति व वेग ऋणात्मक होंगे।
- जब वस्तु ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर आती है तो ऊर्ध्वाधर नीचे की दिशा को धनात्मक मान लेते हैं जिससे स्थिति, वेग व त्वरण धनात्मक होंगे।
- जब वस्तु को ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर फेंका जाता है तो ऊर्ध्वाधर ऊपर की दिशा को धनात्मक मान लेते हैं जिससे स्थिति, वेग धनात्मक तथा त्वरण ऋणात्मक होगा।
- जब वस्तु मुक्त रूप से ऊर्ध्वाधर नीचे गिरायी जाती है तो $u = 0$, $a = g$ तब गति के समीकरण

  $v = 0 + gt \quad \Rightarrow v = gt$

$$h = 0 + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$v^2 = 0 + 2gh \Rightarrow v^2 = 2gh$$

- जब वस्तु को नीचे से ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर फेंका जाता है तो अधिकतम ऊँचाई के लिए

$$v = 0, a = -g$$

तब गति के समीकरण

$$0 = u - gt \quad \Rightarrow u = gt$$

$$h_{max} = ut \quad \frac{1}{2}gt^2$$

$$0 = u^2 - 2gh_{max} \Rightarrow u^2 = 2gh_{max}$$

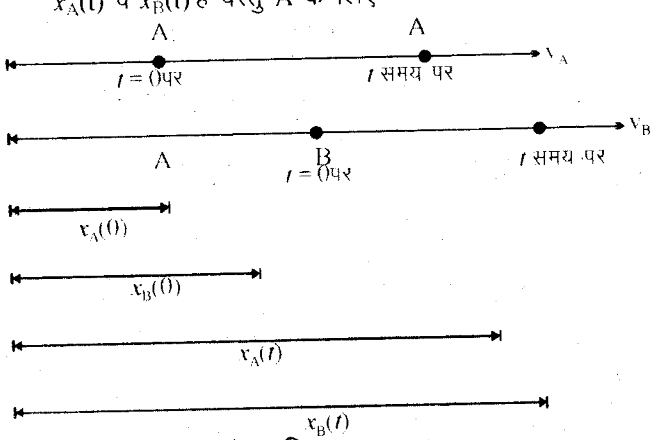
$$h_{max} = u^2/2g.$$

3.10 आपेक्षिक गति (Relative Motion)

किसी गतिशील या स्थिर वस्तु के सापेक्ष दूसरी वस्तु का आपेक्षिक वेग वह दर है जिसमें कि पहली वस्तु के सापेक्ष दूसरी वस्तु की स्थिति में समय के साथ परिवर्तन होता है।

जब हम किसी कण की गति पर विचार करते हैं तो हमें एक बिन्दु नियत मानना होता है जिसके सापेक्ष दिया गया कण गति करता है। उदाहरणार्थ यदि हम कहते हैं कि पानी बह रहा है या कोई व्यक्ति v चाल से दौड़ रहा है तब इन सभी से हमारा तात्पर्य है कि ये सभी गतियाँ पृथ्वी (जिसे नियत माना जाता है) के सापेक्ष है।

किसी गतिमान वस्तु का वेग अन्य किसी वस्तु के सापेक्ष ज्ञात करने के लिए माना कि दोनों वस्तुएँ A तथा B एक सरल रेखा में एक समान वेगों v_A व v_B से गतिमान है। माना कि प्रारंभिक स्थितियाँ ($t = 0$ पर) $x_A(0)$ व $x_B(0)$ हैं तथा t समय पश्चात् यह स्थितियाँ $x_A(t)$ व $x_B(t)$ हैं वस्तु A के लिए



चित्र 3.14

$$x_A(t) = x_A(0) + v_A t \quad ...(1)$$

t समय में वस्तु A का विस्थापन

$$s_A = x_A(t) - x_A(0) = v_A t \quad ...(2)$$

वस्तु B के लिए $\quad x_B(t) = x_B(0) + v_B t \quad ...(3)$

t समय में वस्तु B का विस्थापन

$$s_B = x_B(t) - x_B(0) = v_B t \quad ...(4)$$

समीकरण (4) में से समीकरण (2) को घटाने पर

$$s_B - s_A = (v_B - v_A)t \quad ...(5)$$

समीकरण (5) वस्तु B का A के सापेक्ष विस्थापन को प्रदर्शित करता है। इसे आपेक्षिक विस्थापन कहते हैं तथा राशि ($v_B - v_A$) को वस्तु B का A के सापेक्ष आपेक्षिक वेग कहते हैं।

समीकरण (5) से $\quad v_B - v_A = \frac{s_B - s_A}{t}$

अतः एक वस्तु के सापेक्ष किसी अन्य वस्तु के विस्थापन में परिवर्तन की दर को आपेक्षिक वेग कहते हैं।

अतः वस्तु B का A के सापेक्ष वेग

$$v_{BA} = v_B - v_A$$

इसी प्रकार वस्तु A का B के सापेक्ष वेग $v_{AB} = v_A - v_B$

अतः $\quad v_{BA} = -v_{AB}$

$\Rightarrow \quad |v_{BA}| = |v_{AB}|$

आपेक्षिक विस्थापन तथा आपेक्षिक वेग धनात्मक, ऋणात्मक तथा शून्य हो सकता है।

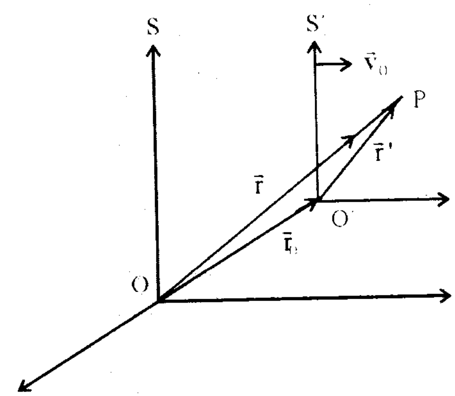
यदि $v_B > v_A$, तब आपेक्षिक वेग $v_{BA} = v_B - v_A$ धनात्मक होगा।

यदि $v_B < v_A$, तब आपेक्षिक वेग $v_{BA} = v_B - v_A$ ऋणात्मक होगा।

यदि $v_B = v_A$, तब आपेक्षिक वेग v_{BA} शून्य होगा।

निरपेक्ष गति या निरपेक्ष स्थिर अवस्था केवल कल्पना मात्र है। गति सदैव आपेक्षिक होती है। निर्देश तंत्र की स्थितियों के अनुसार किसी वस्तु की गति भिन्न-भिन्न निर्देश तंत्रों के सापेक्ष समान या भिन्न-भिन्न प्रतीत हो सकती है।

अब माना कि दो जड़त्वीय निर्देश तंत्र S व S' इस प्रकार है कि प्रारंभ में इनके मूल बिन्दु सम्पाती है। अब तंत्र S' तंत्र S के सापेक्ष नियत वेग $\vec{v}_0$ से गतिशील है। अब यदि किसी बिन्दु P का तंत्र S के सापेक्ष स्थिति सदिश $\vec{r}$ तथा तंत्र S' के सापेक्ष स्थिति सदिश $\vec{r}'$ हो तो O' का तंत्र S के सापेक्ष स्थिति सदिश $\vec{r}_0$ होने पर चित्र की ज्यामिति से-



चित्र 3.15

$$\vec{r}_0 + \vec{r}' = \vec{r}$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0$$

उपरोक्त समीकरण का समय t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{r}_0}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0 \quad ...(1)$$

समीकरण (1) निर्देश तंत्र S व S' में वेग सदिश सम्बन्ध व्यक्त करता है।

समी. (1) का समय t के सापेक्ष अवकलन करने पर

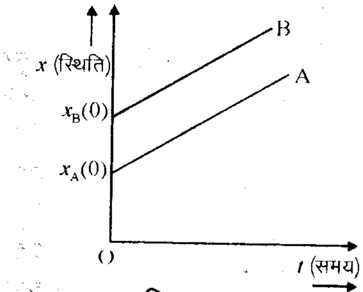
$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d\vec{v}_0}{dt}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0 \qquad ...(2)$$

यहाँ $\vec{a}_0$ तंत्र S' का तंत्र S के सापेक्ष त्वरण है। अब यदि तंत्र S', तंत्र S के सापेक्ष नियत वेग से गतिशील हो तो $\vec{a}_0 = 0$ जिससे $\vec{a}' = \vec{a}$ अर्थात् इस स्थिति में कण का दोनों निर्देश तंत्रों में मापा गया त्वरण समान होता है।

आपेक्षिक गति में वस्तु का स्थिति-समय ग्राफ–

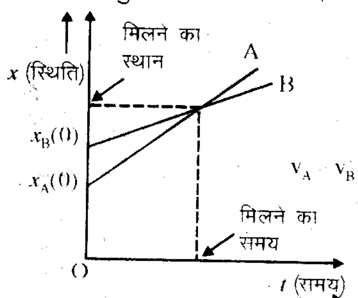
(a) यदि $v_A = v_B$ तब $v_{BA} = v_{AB} = 0$ तथा वस्तुएँ एक नियत दूरी पर पृथक्कित रहती है अर्थात् दोनों वस्तुओं के बीच की दूरी समान रहती है। इसलिए एक वस्तु के सापेक्ष दूसरी वस्तु स्थिर प्रतीत होती है। अतः उनके स्थिति–समय ग्राफों के ढाल समान होगें अर्थात् ग्राफ समान्तर सरल–रेखाओं के रूप में होंगे।



चित्र 3.16

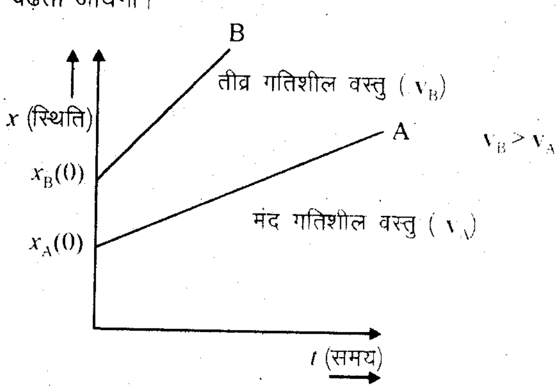
(b) यदि $v_B - v_A$ अशून्य हो अथवा $v_B \neq v_A$ तब उनके स्थिति समय ग्राफों के ढाल भिन्न–भिन्न होंगे अर्थात् एक ग्राफ का ढाल दूसरे से अधिक होगा।

यदि $v_A > v_B$ तब $v_{BA} = v_B - v_A$ ऋणात्मक है तो दोनों एक उभयनिष्ठ बिन्दु पर परस्पर मिलेंगे।



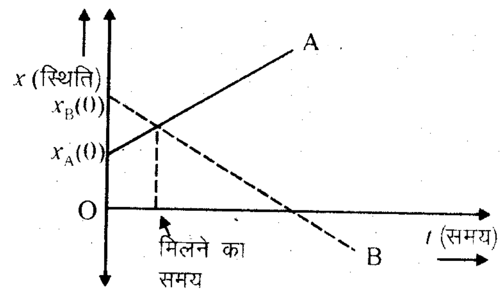
चित्र 3.17

यदि $v_B > v_A$ तब $v_{BA} = v_B - v_A$ धनात्मक है तब उनके स्थिति समय ग्राफों में दोनों वस्तुओं के मध्य पृथक्करण समय के साथ बढ़ता जायेगा।



चित्र 3.18

(c) यदि v_A व v_B विपरीत चिन्हों के हैं अर्थात् अब वस्तुएं परस्पर विपरीत दिशाओं में गतिमान हैं।



चित्र 3.19

तब वस्तु B का A के सापेक्ष वेग

$$v_{BA} = -v_B - (v_A) = -(v_B + v_A) = -v_{AB}$$

जहां A दायीं ओर अर्थात् धनात्मक x दिशा में व B बायीं ओर अर्थात् ऋणात्मक x दिशा में गतिशील है।

इसमें v_{BA} या v_{AB} का परिमाण वस्तु A या B के वेग के परिमाण से अधिक है। यदि दो रेलगाड़ी लें तो उस व्यक्ति के लिए जो किसी एक रेलगाड़ी में बैठा है दूसरी रेलगाड़ी बहुत तेज चलती हुई प्रतीत होती है।

(d) यदि $v_A = -v_B = v$ अर्थात् दो वस्तुएं विपरीत दिशाओं में समान चाल से गति करती हैं।

अतः वस्तु B का A के सापेक्ष वेग

$$v_{BA} = -v_B - v_A = -(v_B + v_A)$$
$$= -2v$$

वस्तु A का B के सापेक्ष वेग

$$v_{AB} = v_A - (-v_B) = v_A + v_B$$
$$= 2v$$

महत्वपूर्ण तथ्य

(A) आपेक्षिक वेग ज्ञात करने के नियम–

(i) प्रेक्षक के वेग को विपरीत कर देते हैं।

(ii) दिए गए वेग को प्रेक्षक के वेग पर अध्यारोपित करते हैं।

(iii) दोनों अध्यारोपित वेगों का परिणामी वेग आपेक्षिक वेग होता है।

(iv) दायीं ओर गतिशील वाहन का वेग धनात्मक तथा बायीं ओर वाहन का वेग ऋणात्मक लिया जाता है।

स्थिति–(i) जब दो वेग समान्तर तथा समान दिशा में हो–

$$\underset{A}{\xrightarrow{v_A}} \quad \underset{B}{\xrightarrow{v_B}}$$

A के सापेक्ष B का वेग ज्ञात करना है।

$$\underset{A}{\xleftarrow{v_A}} \quad \underset{B}{\xrightarrow{v_B}} \text{ A (प्रेक्षक)}$$

$$v_{BA} = v_B - v_A$$

स्थिति-(ii) जब दो वेग समान्तर तथा विपरीत दिशा में हो–

$$\underset{A}{\xleftarrow{v_A}} \quad \underset{B}{\xrightarrow{v_B}}$$

A के सापेक्ष B का वेग ज्ञात करना है।

$$\underset{A}{\xrightarrow{v_A}} \quad \underset{B}{\xrightarrow{v_B}} \quad v_{BA} = v_B - (-v_A)$$

$$v_{BA} = v_B + v_A$$

माना कि दो वस्तुएँ A व B सीधी सड़क पर क्रमशः v_A व v_B वेग से गतिशील है तब A का B के सापेक्ष वेग

$$v_{AB} = v_A - v_B \quad ....(1)$$

B का A के सापेक्ष वेग

$$v_{BA} = v_B - v_A \quad ....(2)$$

स्थिति-(iii) जब दो वेग एक दूसरे के लम्बवत् दिशा में हो–

$$v = \sqrt{v_A^2 + v_B^2}$$

स्थिति-(iv) जब दोनों वेगों के मध्य कोण θ हो–

$$v = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos\theta}$$

सापेक्ष वेग पर आधारित अनुप्रयोग–

1. उपग्रह का सापेक्ष वेग–यदि एक उपग्रह $\vec{v}_s$ वेग से भूमध्यरेखीय तल में गतिमान है तथा पृथ्वी के तल पर स्थित एक बिन्दु पृथ्वी के केन्द्र के सापेक्ष $\vec{v}_e$ वेग से गतिमान है, तो उपग्रह का पृथ्वी के तल के सापेक्ष वेग होगा

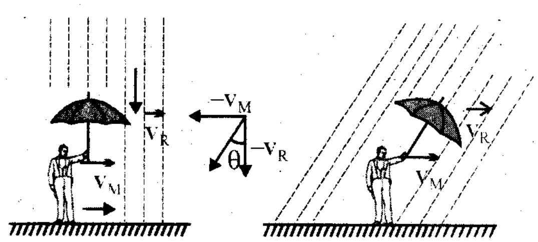
$$\vec{v}_{se} = \vec{v}_s - \vec{v}_e$$

अतः यदि उपग्रह पश्चिम से पूर्व की ओर (पृथ्वी के अपनी अक्ष पर घूर्णन दिशा में) गतिमान हो तो पृथ्वी के सापेक्ष इसका वेग होगा–

$$v_{se} = v_s - v_e$$

तथा यदि उपग्रह पूर्व से पश्चिम की ओर (पृथ्वी की गति के विपरीत) गतिमान हो तो $v_{se} = v_s - (-v_e) = v_s + v_e$

2. वर्षा का सापेक्ष वेग–यदि $\vec{v}_R$ वेग के साथ ऊर्ध्वाधर बारिश हो रही है तथा एक प्रेक्षक $\vec{v}_M$ चाल के क्षैतिजतः गतिमान है तो वर्षा का वेग प्रेक्षक के सापेक्ष होगा $\vec{v}_{RM} = \vec{v}_R - \vec{v}_M$



सदिश योग के नियम से इसका परिमाण $v_{RM} = \sqrt{v_R^2 + v_M^2}$
दिशा $\theta = \tan^{-1}(v_M/v_R)$ ऊर्ध्वाधर के साथ

3. तैराक का सापेक्ष वेग–यदि एक व्यक्ति $\vec{v}$ वेग से पानी के सापेक्ष तैर सकता है तथा पानी, जमीन के सापेक्ष $\vec{v}_R$ वेग से बह रहा है तो व्यक्ति का जमीन के सापेक्ष वेग $\vec{v}_M$ निम्न सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं

$$\vec{v} = \vec{v}_M - \vec{v}_R, \text{ अर्थात् } \vec{v}_M = \vec{v} + \vec{v}_R$$

यदि तैराक पानी के बहने की दिशा में तैर रहा है तो

$$v_M = v + v_R$$

और यदि तैराक पानी के बहने की दिशा के विपरीत तैर रहा है तो

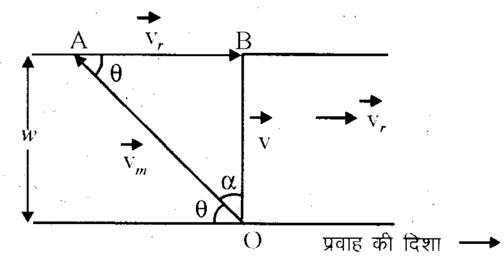
$$v_M = v - v_R$$

4. नदी को पार करना–माना v_r वेग से नदी बह रही है। एक व्यक्ति शान्त जल में v_m वेग से तैर सकता है। वह नदी के किनारे पर खड़ा है और नदी पार करना चाहता है तो दो स्थितियाँ हो सकती हैः

(i) न्यूनतम दूरी में नदी पार करना–नदी को सीधे पार करने के लिए व्यक्ति को जल प्रवाह के विपरीत दिशा से चित्रानुसार θ कोण बनाते हुए तैरना चाहिए।

यहाँ OAB सदिशों का त्रिभुज है जिसमें

$$\vec{OA} = \vec{v}_m, \vec{AB} = \vec{v}_r$$



उनका परिणामी $\vec{OB} = \vec{v}$ होगा। जल प्रवाह की विपरीत दिशा से व्यक्ति θ कोण बनाता है अतः ΔOBA से, हम ज्ञात करेंगे।

$$\cos\theta = \frac{v_r}{v_m} \text{ तथा } \sin\alpha = \frac{v_r}{v_m}$$

जहाँ α न्यूनतम दूरी (OB) के साथ तैराक की दिशा द्वारा बना कोण है। नदी पार करने में लगा समय यदि w नदी की चौड़ाई हो तो नदी पार करने में लगा समय होगा: $t_1 = \frac{w}{v} = \frac{w}{\sqrt{v_m^2 - v_r^2}}$

(ii) न्यूनतम संभव समय में नदी पार करना–व्यक्ति को नदी के किनारे के लम्बवत् तैरना चाहिए।

नदी पार करने में लगा समय $t_2 = \frac{w}{v_m}$

इस स्थिति में, व्यक्ति दूसरे किनारे को जल प्रवाह की दिशा में दूरी AB तैर कर करेगा।

$$AB = v_r t_2 = v_r \frac{w}{v_m}$$

या

$$AB = \frac{v_r}{v_m} w$$

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. दूरी तथा विस्थापन में सम्बन्ध सूत्र लिखिये।
प्र.2. मंदन से क्या तात्पर्य है?
प्र.3. एक समान त्वरण से गतिमान वस्तु के गति के समीकरण लिखिये।
प्र.4. किसी वस्तु द्वारा nवें सेकण्ड में पार की गई दूरी का सूत्र लिखिए।
प्र.5. FPS पद्धति में गुरुत्वीय त्वरण g का मान लिखिए।
प्र.6. जब दो वस्तुएँ A व B के वेग समान्तर व समान दिशा में हो तब उनके आपेक्षिक वेग का सूत्र लिखिए।

प्र.7. जब दो वस्तुएँ A व B के वेग समान्तर तथा विपरीत दिशा में हो तब उनके आपेक्षिक वेग का सूत्र लिखिए।

उत्तरमाला

उ.1. दूरी $\geq$ विस्थापन।

उ.2. ऋणात्मक त्वरण को मंदन कहते हैं।

उ.3. प्रथम समीकरण $v = u + at$

द्वितीय समीकरण $s = ut + \frac{1}{2} at^2$

तृतीय समीकरण $v^2 = u^2 + 2as$

उ.4. $S_n = u + \frac{1}{2} a(2n-1)$ उ. 5. $g = 32 \frac{\text{feet}}{s^2}$

उ.6. $v_{BA} = v_B - v_A$ उ. 7. $v_{BA} = v_B + v_A$

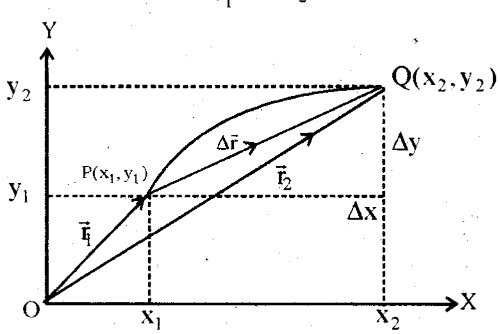
3.11 द्विविमीय एवं त्रिविमीय गति (Two dimensional and Three Dimensional Motion)

एक समतल में गति द्विविमीय गति होती है। जब कोई वस्तु एकतल में गति करती है तब इसकी गति द्विविमीय गति कहलाती है। जैसे–टेढ़े–मेढ़े पथ पर चींटी की गति, मैदान में फुटबाल खेलता खिलाड़ी तथा क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर तल में वृत्ताकार गति आदि।

3.11.1 द्विविमीय गति में कण के विस्थापन, वेग तथा त्वरण का सदिश निरूपण (Vector representation of displacement, velocity and acceleration of a particle in two dimensional motion)

माना कि एक कण द्विविमीय निर्देश तंत्र के तल X-Y में गतिशील है। कण की स्थिति P के संगत स्थिति सदिश $\vec{r}_1 = x_1\hat{i} + y_1\hat{j}$ तथा स्थिति Q के संगत स्थिति सदिश $\vec{r}_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j}$ है।

विस्थापन (Displacement)–माना किसी समय t_1 पर कण की स्थिति का स्थिति सदिश $\overrightarrow{r_1}$ तथा t_2 समय पर स्थिति सदिश $\overrightarrow{r_2}$ है।



चित्र 3.20

कण के विस्थापन का विस्थापन सदिश $\Delta\vec{r}$ है तो त्रिभुज OPQ में त्रिभुज नियम से-

$$\vec{r}_1 + \Delta\vec{r} = \vec{r}_2$$

$$\Delta\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} \quad ...(1)$$

स्थिति सदिशों को घटकों के रूप में व्यक्त करने पर

$$\overrightarrow{r_1} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j}$$

$$\overrightarrow{r_2} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j}$$

∴ समीकरण (1) से

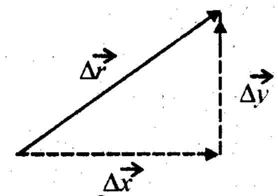
$$\Delta\overrightarrow{r} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j})$$

$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$$

$$= \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} \quad ...(2)$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = \Delta\overrightarrow{x} + \Delta\overrightarrow{y} \quad ...(3)$$

तथा $|\overrightarrow{\Delta r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$



चित्र 3.21

समी. (3) से स्पष्ट है विस्थापन सदिश $\Delta\overrightarrow{r}$ को $\Delta\overrightarrow{x}$ व $\Delta\overrightarrow{y}$ के सदिश योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

◆ **वेग (Velocity)**–समयान्तराल $\Delta t = t_2 - t_1$ में कण का विस्थापन सदिश $\Delta\overrightarrow{r}$ व समयान्तराल Δt का अनुपात कण का औसत वेग कहलाता है। औसत वेग की दिशा वही होगी जो $\Delta\vec{r}$ की होगी।

$$\text{औसत वेग } \overrightarrow{v_{av}} = \frac{\Delta\overrightarrow{r}}{\Delta t}$$

$$= \frac{\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}}{t_2 - t_1}$$

$$= \frac{\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}}{t_2 - t_1}$$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}$$

$$= \langle v_x \rangle\hat{i} + \langle v_y \rangle\hat{j} \quad ...(4)$$

इस प्रकार $\overrightarrow{v_{av}} = \overrightarrow{\langle v_x \rangle} + \overrightarrow{\langle v_y \rangle} \quad ...(5)$

अतः कण का औसत वेग लम्बवत् औसत वेगों क्रमशः $\langle \vec{v}_x \rangle$ तथा $\langle \vec{v}_y \rangle$ के सदिश योग के तुल्य होता है।

कण के किसी क्षण t पर वेग को तात्क्षणिक वेग कहते हैं।

$$\text{तात्क्षणिक वेग } \vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{r}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$$

$$= \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}$$

$$= v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

इस प्रकार $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$ ...(6)

$$\vec{v} = \vec{v_x} + \vec{v_y} \quad ...(7)$$

अतः कण के वेग $\vec{v}$ को $\vec{v_x}$ व $\vec{v_y}$ के सदिश योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

वेग की दिशा गतिशील कण के पथ की स्पर्शज्या के अनुदिश होती है।

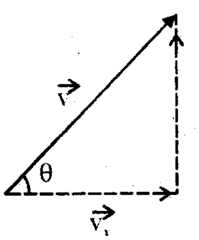
तात्क्षणिक वेग का परिमाण

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

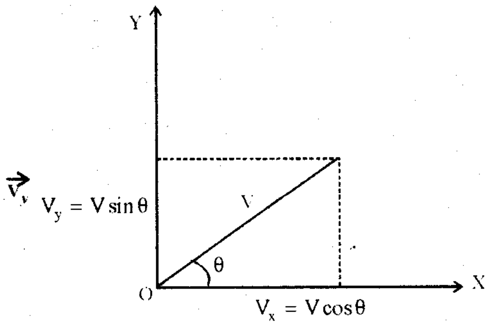
यदि वेग $\vec{v}$ की दिशा X अक्ष से θ कोण पर हो तो चित्र के अनुसार वेग के घटक

$$v_x = v\cos\theta,\ v_y = v\sin\theta$$

अतः $\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$, $\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x}$



चित्र 3.22 (i)



चित्र 3.22 (ii)

◆ **त्वरण (Acceleration)**—समयान्तराल Δt में कण के वेग में परिवर्तन $\Delta\vec{v}$ तथा समयान्तराल Δt के अनुपात को कण का औसत त्वरण कहते हैं।

औसत त्वरण $\vec{a_{av}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ ...(8)

कण के किसी क्षण t पर त्वरण को तात्क्षणिक त्वरण कहते हैं।

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j}$$

$$= a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

इस प्रकार $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$ ...(9)

$$\vec{a} = \vec{a_x} + \vec{a_y} \quad ...(10)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad ...(11)$$

इस प्रकार द्विविमीय गति को परस्पर लम्बवत् दो एक विमीय गतियों के संयोजन से बना हुआ माना जा सकता है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

एक विमा में वस्तु का वेग एवं त्वरण सदैव सरल रेखा में होते हैं। (एक ही दिशा में या विपरीत दिशा में) परन्तु दो या तीन विमाओं में गति के लिए वेग एवं त्वरण सदिशों के बीच 0° से 180° के बीच कोई भी कोण हो सकता है।

3.11.2 त्रिविमीय गति में कण के विस्थापन, वेग एवं त्वरण का सदिश निरुपण (Vector Representation of Displacement, Velocity and Acceleration of a particle in Two Dimensional Motion)

आकाश (space) में किसी वस्तु की गति त्रिविमीय गति होती है। त्रिविमीय गति का वर्णन करने के लिए परस्पर लम्बवत् तीन अक्षों X, Y तथा Z की आवश्यकता होती है जिनके अनुदिश एकांक सदिश क्रमशः $\hat{i}$, $\hat{j}$ तथा $\hat{k}$ हो तो किसी क्षण कण का स्थिति सदिश

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad ...(1)$$

अब यदि Δt समयान्तराल में कण बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से (x_2, y_2, z_2) स्थिति पर विस्थापित होता हो तो विस्थापन सदिश

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k} \quad ...(2)$$

कण का औसत वेग

$$\vec{V}_{av} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}$$

$$\vec{V}_{av} = \langle V_x\rangle\hat{i} + \langle V_y\rangle\hat{j} + \langle V_z\rangle\hat{k} \quad ...(3)$$

$$\vec{V}_{av} = \langle\vec{V}_x\rangle + \langle\vec{V}_y\rangle + \langle\vec{V}_z\rangle \quad ...(4)$$

तात्क्षणिक वेग

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k} \quad ...(5)$$

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z \quad ...(6)$$

त्वरण

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} \quad ...(7)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \quad ...(9)$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

जबकि $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

उदा.8. एक रॉकेट को पृथ्वी धरातल के ऊपर इस प्रकार छोड़ा गया है कि उसमें 19.6 m/s² का त्वरण उत्पन्न होता है। 5 सेकण्ड बाद यदि उसका इंजन बंद कर दिया जाये तो पृथ्वी तक आने में लगे समय के लिए निम्न गणनाएँ कीजिए-

(i) रॉकेट द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई

(ii) पृथ्वी पर पहुँचने पर रॉकेट का वेग

(iii) रॉकेट की यात्रा का कुल समय

(iv) रॉकेट के वेग-समय व त्वरण-समय में ग्राफ

(पुस्तक उदाहरण 3.4)

हल- रॉकेट छोड़ने के 5 सेकण्ड बाद का वेग

$$v = u + at$$
$$= 0 + 19.6 \times 5$$
$$= 98 \text{ मी./से.}$$

रॉकेट द्वारा 5 सेकण्ड में चली गई दूरी

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2$$
$$= 0 \times 5 + \frac{1}{2} \times 19.6(5)^2$$
$$= 9.8 \times 25$$
$$= 245 \text{ मीटर}$$

इंजन बन्द होने के बाद रॉकेट द्वारा पार की गई दूरी

$$v^2 = u^2 - 2gh$$
$$0 = (98)^2 - 2 \times 9.8 \times h$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{(98)^2}{2 \times 9.8} = 490 \text{ मीटर}$$

$\therefore$ रॉकेट द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई

$$= 490 + 245 = 735 \text{ मीटर}$$

(ii) इंजन बन्द करने के बाद रॉकेट द्वारा इस दूरी को तय करने में लगा समय

$$v = u - gt$$
$$0 = 98 - 9.8 \times t$$
$$t = 10 \text{ सेकण्ड}$$

$\therefore$ ऊपर की ओर यात्रा में कुल समय

$$= 5 + 10 = 15 \text{ सेकण्ड}$$

पृथ्वी तक आने में लगा समय

$$h = ut + \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \quad 735 = 0 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$$

$$\Rightarrow \quad t^2 = \frac{2 \times 735}{9.8} = 150$$

$$\Rightarrow \quad t = \sqrt{150} = 12.25 \text{ सेकण्ड}$$

$\therefore$ उड़ान में लगा कुल समय $= 15 + 12.25$

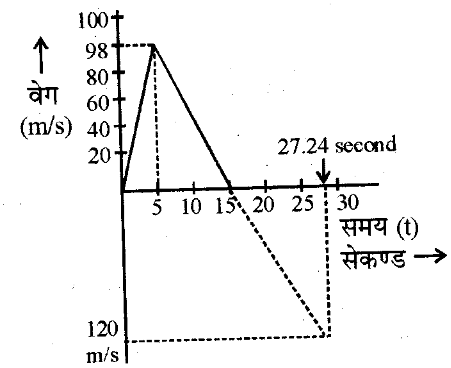
$$= 27.25 \text{ सेकण्ड}$$

पृथ्वी पर लौटने का वेग $\quad v^2 = u^2 + 2gh \quad \because u = 0$

$$v^2 = 2gh$$

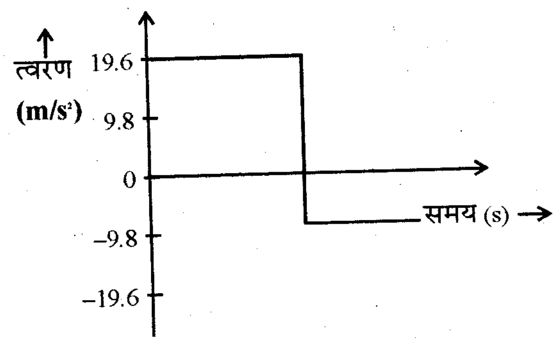
$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 735}$$
$$= 120 \text{ मी./से.}$$

रॉकेट के लिए वेग समय ग्राफ-



चित्र 3.23

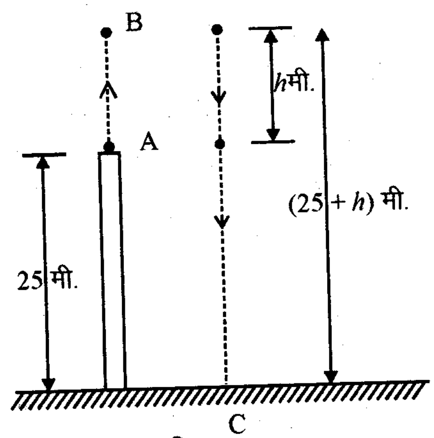
रॉकेट के लिए त्वरण-समय वक्र-



चित्र 3.24

उदा.9. किसी बहुमंजिलें भवन की ऊपरी छत से कोई गेंद 20 m s⁻¹ के वेग से ऊपर की ओर ऊर्ध्वाधर दिशा में फेंकी गई है। जिस बिन्दु से गेंद फेंकी गई है धरती से उसकी ऊँचाई 25.0 m है। (a) गेंद कितनी ऊपर जाएगी?, तथा (b) गेंद धरती से टकराने के पहले कितना समय लेगी? g = 10 m s⁻²।

हल-



चित्र 3.25

(a) $\because$ $u = 20 \dfrac{\text{मी}}{\text{से}}$

$g = 10 \dfrac{\text{मी}}{\text{से}^2}$

अधिकतम ऊँचाई पर $v = 0 \dfrac{\text{मी}}{\text{से}}$

गति के तृतीय समीकरण से

$$v^2 = u^2 - 2gh$$
$$0 = (20)^2 - 2 \times 10 \times h$$
$$\Rightarrow \quad 20h = 400$$
$$\Rightarrow \quad h = 20 \text{ मीटर}$$

(b) अधिकतम ऊँचाई (स्थिति B) तक जाने में लगा समय

$$v = u - gt$$
$$0 = 20 - 10 \times t$$
$$\Rightarrow \quad 10t = 20$$
$$\Rightarrow \quad t = 2 \text{ सेकण्ड}$$

गेंद को स्थिति B से स्थिति C तक आने में लगा समय-

अब क्योंकि स्थिति B पर गेंद का प्रारंभिक वेग

$$u = 0$$

$\therefore$ गति के द्वितीय समीकरण से

$$s = ut + \frac{1}{2} gt^2$$
$$\Rightarrow \quad 25 + h = 0 + \frac{1}{2} \times 10 \times t^2$$
$$\Rightarrow \quad 25 + 20 = 5t^2$$
$$\Rightarrow \quad t^2 = 9$$
$$\Rightarrow \quad t = 3 \text{ सेकण्ड}$$

अतः धरती पर टकराने से पूर्व गेंद द्वारा लिया कुल समय

$$= 2 + 3 = 5 \text{ सेकण्ड}$$

उदा.10. एक कार विराम से चलकर 12 सेकण्ड में 30 मीटर/सेकण्ड का वेग प्राप्त करती हो तो (a) उस कार का त्वरण (b) तय की गई दूरी मीटर में तथा (c) 7 सेकण्ड पश्चात् वेग ज्ञात कीजिए।

(पुस्तक उदाहरण 3.5)

हल– दिया गया है– $u = 0$, $t = 12$ सेकण्ड, $V = 30$ मीटर/सेकण्ड

(a) कार का त्वरण $a = ?$

गति के प्रथम समीकरण से $V = u + at$

$$\Rightarrow \quad 30 = 0 + a \times 12$$
$$\Rightarrow \quad a = \frac{30}{12} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ मीटर/सेकण्ड}^2$$

(b) तय की गई दूरी $s = ?$

गति के द्वितीय समीकरण से

$$S = ut + \frac{1}{2} at^2$$
$$S = 0 + \frac{1}{2} \times 2.5 \times (12)^2 = 180 \text{ मी.}$$

(c) 7 सेकण्ड पश्चात् वेग = ?

गति के प्रथम समीकरण से-

$$V = u + at$$
$$V = 0 + 2.5 \times 7 = 17.5 \text{ मीटर/सेकण्ड}$$

उदा.11. यदि कोई वस्तु समान त्वरण *a* से गतिशील हो तो उसके द्वारा *n* वें सेकण्ड में पार की गई दूरी का सूत्र प्राप्त करो। वस्तु का प्रारम्भिक वेग *u* है। **(पुस्तक उदाहरण 3.6)**

हल– वस्तु द्वारा n सेकण्ड में पार की गई दूरी

$$d_n = un + \frac{1}{2} an^2 \quad \text{....(1)}$$

($t = n$ रखने पर)

$(n-1)$ सेकण्ड में पार की गई दूरी

$$d_{n-1} = u(n-1) + \frac{1}{2} a(n-1)^2 \quad \text{...(2)}$$

n वें सेकण्ड में पार की गई दूरी

$$s_n = d_n - d_{n-1}$$
$$s_n = \left[un + \frac{1}{2} an^2\right] - \left[u(n-1) + \frac{1}{2} a(n-1)^2\right]$$
$$\mathbf{s_n = u + \frac{1}{2} a\,(2n-1)} \quad \text{....(3)}$$

उदा.12. एक बिन्दु XY तल में $x = K \sin \omega t$ तथा $y = K(1 - \cos \omega t)$ के अनुसार गतिमान है, जहाँ K व ω धनात्मक नियतांक है। कण द्वारा t समय में तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

हल– $\because$ $x = K \sin \omega t$

$\therefore$ X अक्ष के अनुदिश वेग का घटक

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(K \sin \omega t)$$
$$= K\omega \cos \omega t \quad \text{...(1)}$$

$\because$ $y = K[1 - \cos \omega t]$

Y अक्ष के अनुदिश वेग का घटक

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}[K(1 - \cos \omega t)]$$
$$= K\omega \sin \omega t \quad \text{...(2)}$$

$\therefore$ $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$

तथा $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$$= \sqrt{K^2\omega^2 \cos^2 \omega t + K^2\omega^2 \sin^2 \omega t}$$
$$= K\omega \sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t}$$
$$= K\omega$$

$\because$ $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$

$\therefore$ कण द्वारा t समय में तय की गई दूरी

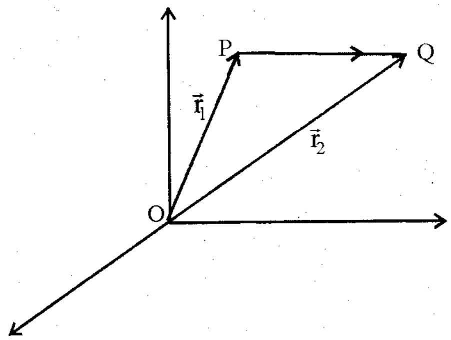
$$S = vt = K\omega t$$

उदा.13. दो बिन्दुओं P व Q की स्थिति क्रमशः $\vec{r}_1 = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ व $\vec{r}_2 = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ द्वारा व्यक्त होती हो तो $\overrightarrow{PQ}$ को सदिश संकेतन में व्यक्त कर इसका परिमाण ज्ञात कीजिए।

(पुस्तक उदाहरण 3.9)

हल– त्रिभुज OPQ से सदिश योग के त्रिभुज नियम से

$$\vec{r}_1 + \overrightarrow{PQ} = \vec{r}_2$$
$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$
$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = (4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) - (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$$



चित्र 3.26

$$\vec{PQ} = 2\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$PQ = \sqrt{(2)^2 + (-6)^2 + (3)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 36 + 9} = \sqrt{49} = 7$$

उदा.14. किसी वस्तु की त्रिविमीय गति हेतु समीकरण निम्नानुसार है-

$$\mathbf{x(t) = 3t^2 + 5}$$
$$\mathbf{y(t) = -t^2 + 3t - 2}$$
$$\mathbf{z(t) = 2t + 1}$$

समय $t = 0$ व $t = 2$ पर विस्थापन, वेग तथा त्वरण के परिमाण ज्ञात कीजिए। (पुस्तक उदाहरण 3.10)

हल- वेग के घटक

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 + 5) = 6t$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(-t^2 + 3t - 2) = -2t + 3$$

$$V_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(2t + 1) = 2$$

त्वरण के घटक

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d}{dt}(6t) = 6$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d}{dt}(-2t + 3) = -2$$

$$a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d}{dt}(2) = 0$$

अब समय $t = 0$ पर

$$x = 3(0)^2 + 5 = 5$$
$$y = -(0)^2 + 3(0) - 2 = -2$$
$$z = 2(0) + 1 = 1$$

$\therefore t = 0$ पर विस्थापन का परिमाण

$$r = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{25 + 4 + 1} = \sqrt{30}$$

समय $t = 0$ पर

$$V_x = 6(0) = 0$$
$$V_y = -2(0) + 3 = 3$$
$$V_z = 2$$

$\therefore t = 0$ पर वेग का परिमाण

$$V = \sqrt{(0)^2 + (3)^2 + (2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

समय $t = 0$ पर

$$a_x = 6$$
$$a_y = -2$$
$$a_z = 0$$

$\therefore t = 0$ पर त्वरण का परिमाण

$$a = \sqrt{(6)^2 + (-2)^2 + (0)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$$
$$= 2\sqrt{10}$$

अब समय $t = 2$ पर

$$x = 3(2)^2 + 5 = 17$$
$$y = -(2)^2 + 3(2) - 2 = -4 + 6 - 2 = 0$$
$$z = 2(2) + 1 = 5$$

$\therefore t = 2$ पर विस्थापन का परिमाण

$$r = \sqrt{(17)^2 + (0)^2 + (5)^2} = \sqrt{289 + 25} = \sqrt{314}$$

समय $t = 2$ पर

$$V_x = 6(2) = 12$$
$$V_y = -2(2) + 3 = -4 + 3 = -1$$
$$V_z = 2$$

$\therefore t = 2$ पर वेग का परिमाण

$$V = \sqrt{(12)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{144 + 1 + 4}$$
$$V = \sqrt{149}$$

समय $t = 2$ पर

त्वरण का परिमाण $a = 2\sqrt{10}$

$\because$ त्वरण, समय पर निर्भर नहीं है अर्थात् सम्पूर्ण गति के दौरान त्वरण नियत है।

3.12 प्रक्षेप्य गति (Projectile motion)

कोई पिण्ड आकाश में निश्चित वेग से फेंके जाने के पश्चात् यह पृथ्वी के गुरूत्वीय क्षेत्र में स्वतन्त्रापूर्वक गति करता है तब उसे प्रक्षेप्य कहते हैं तथा पिण्ड की गति प्रक्षेप्य गति कहलाती है। गति के दौरान पिण्ड पर एक नियत बल (जैसे पृथ्वी का गुरूत्वीय बल) जिसका परिमाण तथा दिशा अपरिवर्तित रहते हैं, कार्यरत होता है। सर्वप्रथम गैलीलियो ने अपने लेख डायलॉग ऑन दि ग्रेट वर्ल्ड सिस्टम (Dialogue on the great world system (1632)) में प्रक्षेप्य गति के क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर घटकों की स्वतंत्र प्रकृति का उल्लेख किया था।

प्रक्षेप्य गति की परिकल्पनाएँ (Assumptions of Projectile Motion)

पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र के अन्तर्गत प्रक्षेप्य गति का अध्ययन सरल रूप में करने के लिए निम्नलिखित दो परिकल्पनाएँ की जाती हैं–

1. गति की परास में, गुरुत्वीय त्वरण 'g' का मान नियत तथा दिशा सदैव ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर होती है।

2. वायु का अवरोध (air resistance) नगण्य है।

इन परिकल्पनाओं के अन्तर्गत ही प्रक्षेप्य पथ परवलयाकार (Parabolic) होता है।

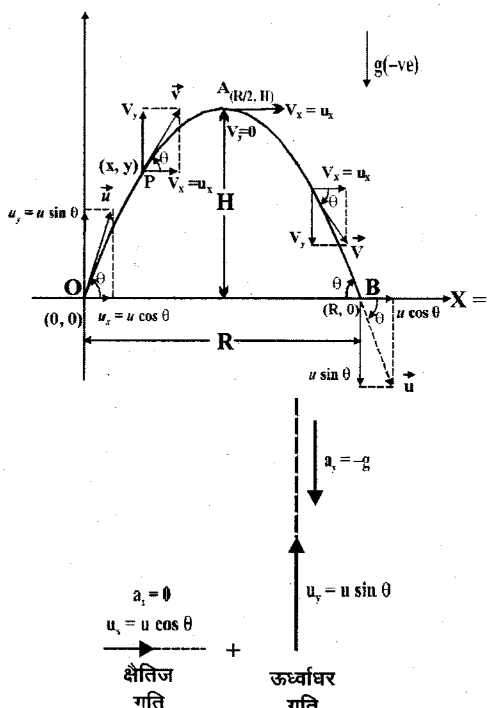
प्रक्षेप्य पथ के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा, उस बिन्दु पर प्रक्षेप्य के वेग की दिशा प्रदर्शित करती है।

प्रक्षेप्य गति में यह तथ्य भी महत्त्वपूर्ण है कि प्रक्षेप्य की क्षैतिज गति तथा ऊर्ध्वाधर गति, एक–दूसरे पर निर्भर नहीं करती है तथा एक गति का दूसरी गति पर कोई प्रभाव नहीं होता है।

उदाहरण–पृथ्वी की सतह से किसी कोण पर फेंके गये पिण्ड की गति, क्षैतिज गति करते वायुयान से गिराये गये बम की गति, फेंके गये भाले की गति, धनुष से छोड़ा गया तीर आदि।

3.12.1 प्रक्षेप्य का पथ (Trajectory of projectile)–

माना कि किसी पिण्ड को क्षैतिज से θ कोण पर u वेग से फेंका जाता है।



चित्र 3.27

पिण्ड के वेग का क्षैतिज घटक

$$u_x = u\cos\theta \qquad ...(1)$$

ऊर्ध्वाधर घटक $u_y = u\sin\theta$ ...(2)

पिण्ड के त्वरण का क्षैतिज घटक

$$a_x = 0 \qquad ...(3)$$

ऊर्ध्वाधर घटक $a_y = -g$ ...(4)

गति के द्वितीय समीकरण से

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

x-घटक

$$x = u_x t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

समी. (1) व (3) से मान रखने पर

$$x = u_x t$$

$$\Rightarrow \quad x = (u\cos\theta)\,t \qquad ...(5)$$

y-घटक $\quad y = u_y t + \frac{1}{2}a_y t^2$

समी. (3) व (4) से मान रखने पर

$$y = (u\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad ...(6$$

समी.(5) से $t = \dfrac{x}{u\cos\theta}$ रखने पर

$$y = (u\sin\theta)\left(\frac{x}{u\cos\theta}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{u\cos\theta}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad y = x\tan\theta - \left(\frac{g}{2u^2\cos^2\theta}\right)x^2 \qquad ...(7$$

उपरोक्त समीकरण को निम्न प्रकार भी लिखा जा सकता है–

$$y = bx - cx^2$$

जहाँ $\quad b = \tan\theta \quad$ तथा $\quad c = \dfrac{g}{2u^2\cos^2\theta}$

समी. (7) परवलय के समीकरण को व्यक्त करता है। इस प्रका प्रक्षेप्य का पथ परवलयाकार होता है।

3.12.2 प्रक्षेप्य की अधिकतम ऊँचाई (Maximum height of projectile

वेग का ऊर्ध्वाधर घटक

$$v_y = u_y + a_y t$$

समी. (2) व (4) से मान रखने पर

$$v_y = u\sin\theta - gt$$

अधिकतम ऊँचाई पर

$$v_y = 0$$

माना प्रक्षेप्य को अधिकतम ऊँचाई में $t = t_1$ समय लगता है।

अतः $\quad 0 = u\sin\theta - gt_1$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \frac{u\sin\theta}{g} \qquad ...(8$$

प्रक्षेप्य की अधिकतम ऊँचाई (समी. 6 से)

$$y = h_{max} = (u\sin\theta)t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$

$$h_{max} = (u\sin\theta)\left(\frac{u\sin\theta}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{u\sin\theta}{g}\right)^2$$

$$= \left(\frac{u^2\sin^2\theta}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{u^2\sin^2\theta}{g^2}\right)$$

$$= \left(\frac{u^2\sin^2\theta}{g}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{h_{max} = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}} \qquad ...(9$$

3.12.3 प्रक्षेप्य का उड्डयन काल (उड़ान का कुल समय) (Time of Flight of projectile)

प्रक्षेप्य को जिस स्थान से फेंका जाता है पुनः उसी समतल तक आ में लगा कुल समय उड़ान का कुल समय कहलाता है।

उड्डयन काल $T = 2t_1$

समी. (8) से t_1 का मान रखने पर

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\frac{2u\sin\theta}{g}} \qquad ...(10$$

3.12.4 क्षैतिज परास (Horizontal range)

प्रक्षेप्य को जिस स्थान से फेंका जाता है पुनः उसी समतल तक आने में उसके द्वारा तय की गई कुल क्षैतिज दूरी परास कहलाती है; यदि क्षैतिज परास R है तो

समी. (5) से

$$x = (u\cos\theta)\,t$$

$$\Rightarrow \quad R = (u\cos\theta)\,T$$

समी. (10) से

$$R = (u\cos\theta)\left(\frac{2u\sin\theta}{g}\right)$$

$$R = \frac{u^2}{g}(2\sin\theta\cos\theta)$$

$$(\because \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta)$$

$$\therefore \quad R = \frac{u^2\sin 2\theta}{g} \quad ...(11)$$

अधिकतम क्षैतिज परास (Maximum horizontal range)

क्षैतिज परास अधिकतम होने के लिए समी. (11) से

$$R_{max} = \frac{u^2}{g} \quad ...(12)$$

जबकि $\sin 2\theta = 1 = \sin 90°$

$$\Rightarrow \quad 2\theta = 90°$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 45°$$

अर्थात् किसी पिण्ड के अधिकतम क्षैतिज परास के लिए प्रक्षेप्य कोण $\theta = 45°$ होना चाहिए।

नोट– $\because \ \sin(\pi - 2\theta) = \sin 2\theta$

अतः प्रक्षेप्य कोण θ तथा $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$ के लिए क्षैतिज परास समान प्राप्त होती है। उदाहरण के लिए $\theta = 40°$ तथा $\theta = 50°$ दोनों के लिये एक समान चाल के लिए प्रक्षेप्यों की परास समान प्राप्त होती है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

1. **प्रक्षेप्य पथ के परवलयाकार होने की सीमायें** (Limitations of Projectile's Path)

किसी प्रक्षेप्य का पथ परवलयाकार तभी होगा, जब प्रक्षेप्य के वेग की दिशा, इसके त्वरण की दिशा से भिन्न हो तथा इसका त्वरण (g) परिमाण तथा दिशा में नियत रहे, जो निम्न सीमाओं के अन्तर्गत ही संभव है–

(i) प्रक्षेप्य बहुत ऊँचाई तक न जाये, अन्यथा g का मान कम हो जायेगा।

(ii) प्रक्षेप्य का क्षैतिज परास अधिक न हो, अन्यथा g का मान बदल जायेगा।

(iii) प्रक्षेप्य का प्रारम्भिक वेग बहुत अधिक न हो, ताकि वायु का प्रतिरोध (श्यान बल) नगण्य रहे।

इन सीमाओं के अन्तर्गत, तोप से छोड़े गये गोले का प्रक्षेप्य पथ परवलयाकार होता है, परन्तु बहुत दूर तक मार करनी वाली मिसाइलों का प्रक्षेप्य पथ परवलयाकार न होकर दीर्घवृत्तीय (elliptical) होता है।

(iv) प्रक्षेप्य का कोण क्षैतिज के 0° से 90° के बीच में होना चाहिए।

प्रक्षेप्य गति का एक अन्य उदाहरण, एकसमान विद्युत क्षेत्र में क्षेत्र के लम्बवत्, किसी आवेशित कण की गति है क्योंकि आवेशित कण पर एकसमान विद्युत क्षेत्र द्वारा लगने वाला बल, परिमाण तथा दिशा में नियत रहता है तथा इसकी दिशा आवेशित कण के वेग की दिशा से भिन्न है इसलिए इस आवेशित कण का पथ भी परवलयाकार ही होता है।

2. **प्रक्षेप्य की गति पर वायु प्रतिरोध का प्रभाव (Effect of Air Resistance on Projectile's motion)**

यदि प्रक्षेप्य पर लगने वाला वायु प्रतिरोध नगण्य न हो (चित्र) तो

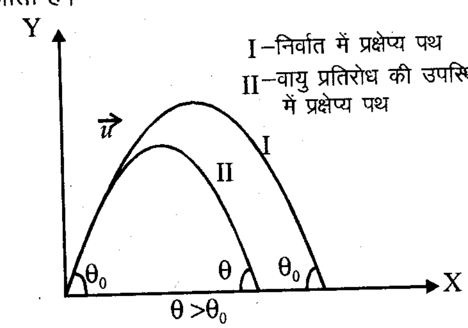
(i) प्रक्षेप्य को ऊपर जाने में लगा समय < प्रक्षेप्य को वापस नीचे आने में लगा समय।

(ii) प्रक्षेप्य द्वारा प्राप्त ऊँचाई h तथा क्षैतिज परास R के मान घट जाते हैं।

(iii) प्रक्षेप्य जिस चाल से पृथ्वी पर लौटता है, उसका मान कम हो जाता है। पथ पर क्षैतिज वेग भी नियत नहीं रहता बल्कि घटता रहता है।

(iv) प्रक्षेप्य का उड्डयन काल कम हो जाता है।

(v) प्रक्षेप्य जिस कोण पर पृथ्वी पर वापस लौटता है वह कोण बढ़ जाता है।



3. प्रक्षेप्य गति एक द्विविमीय गति है।

4. किसी प्रक्षेप्य गति को दो अलग–अलग समकालिक गतियों के घटक के परिमाण के रूप में लिया जा सकता है।
(i) क्षैतिज गति (ii) ऊर्ध्वाधर गति

5. प्रक्षेप्य की क्षैतिज गति में वेग का क्षैतिज घटक नियत रहता है क्योंकि गुरुत्वीय त्वरण का क्षैतिज घटक शून्य है।

6. प्रक्षेप्य की ऊर्ध्वगति में वेग का ऊर्ध्वाधर घटक गुरुत्वीय त्वरण g के कारण समय के साथ बदलता रहता है।
गुरुत्वीय त्वरण g नीचे की ओर कार्य करता है।

7. क्षैतिज गति एक समान गति है जबकि ऊर्ध्वाधर गति एक समान त्वरित गति है।

8. अधिकतम ऊँचाई वाले बिन्दु के लिए

$$v_y = 0$$

तथा

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = 0$$

9. उड्डयन काल $\quad T = \frac{2u\sin\theta}{g}$

एक प्रक्षेप्य को ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर फेंकने पर ही यह अधिकतम समय तक हवा में रहता है।

अतः $\sin\theta = 1, \theta = 90°$

तो $T_{max} = \frac{2u}{g}$

अन्य किसी कोण पर उड्डयन काल का मान सदैव $\frac{2u}{g}$ से कम प्राप्त होगा।

अधिकतम ऊँचाई $h_m = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$

एक प्रक्षेप्य को ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर फेंकने पर ही यह सबसे अधिक ऊँचाई पर जाता है।

अतः $\sin^2\theta = 1, \theta = 90°$

तो $h_{max} = \frac{u^2}{2g}$

यही कारण है कि ऊँची कूद कूदने वाला खिलाड़ी अपने शरीर को ऊर्ध्वाधर दिशा में उछालता है।

11. क्षैतिज परास $R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$

जब $\sin 2\theta = 1, 2\theta = 90°$

$\theta = 45°$

तब $R_{max} = \frac{u^2}{g}$

अतः एक प्रक्षेप्य को जब 45° के कोण पर फेंका जाता है तब उसकी परास सबसे अधिकतम होती है। यही कारण है कि भाला फेंक या गोला फेंक में खिलाड़ी अधिकतम परास प्राप्त करने के लिए उसे 45° कोण से प्रक्षेपित करता है।

12. अधिकतम ऊँचाई व अधिकतम परास में सम्बन्ध

$h_{max} = \frac{u^2}{2g}$ जब $\theta = 90°$

$R_{max} = \frac{u^2}{g}$ जब $\theta = 45°$

अतः $h_{max} = \frac{R_{max}}{2}$

13. यदि $\theta = 45°$ तो $h_{max} = \frac{1}{u}\left(\frac{u^2}{g}\right)$

$R_{max} = \frac{u^2}{g}$

$h_{max} = \frac{R_{max}}{4}$

3.13 त्रिविमीय गति के उदाहरण (Examples of Three Dimensional Motion)

किसी वस्तु की आकाश में गति त्रिविमीय गति होती है। उदाहरण– उड़ती पतंग की गति, उड़ते हुए पक्षी की गति, हवाई जहाज की गति आदि त्रिविमीय गति के उदाहरण है।

उदा.15. एक फुटबॉल का खिलाड़ी गेंद को क्षैतिज से 30° के कोण पर 50m/s के वेग से उछालता है तो ज्ञात कीजिए।

(i) गेंद द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई
(ii) गेंद की परास
(iii) अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचने में लगा समय
(iv) गेंद का हवा में रहने का कुल समय
(यहाँ $g = 10\ m/s^2$) **(पुस्तक उदाहरण 3.7)**

हल– दिया गया है– $\theta = 30°$, $u = 50$ m/s

(i) गेंद द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई

$$h_{max} = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{(50)^2 \sin^2 30°}{2\times10}$$

$$h_{max} = \frac{50\times50\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{2\times10} = 31.25 \text{ मीटर}$$

(ii) गेंद की परास

$$R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{(50)^2 \sin 2\times30°}{10}$$

$$= \frac{50\times50\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{10} = 216.5 \text{ मीटर}$$

(iii) अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचने में लगा समय

$$t = \frac{u\sin\theta}{g} = \frac{50\sin 30°}{10} = \frac{50\times\frac{1}{2}}{10}$$

$t = 2.5$ सेकण्ड

(iv) गेंद का हवा में रहने का कुल समय $T = 2t = 2\times2.5 = 5$ सेकण्ड

उदा.16. एक प्रक्षेप्य को 20 मीटर ऊँची मीनार से 400 मी./से. की चाल से क्षैतिज दिशा में छोड़ा जाता है। प्रक्षेप्य पृथ्वी पर मीनार से कितनी दूरी पर गिरेगा? ($g = 10$ मी./से.^{2})

हल– गति के द्वितीय समीकरण से

$$y = u_y t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$\because$ $u_y = 0, a_y = g$

$\therefore$ $y = \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow$ $20 = \frac{1}{2}\times10\times t^2$

$t^2 = 4$

$\Rightarrow$ $t = 2$ सेकण्ड

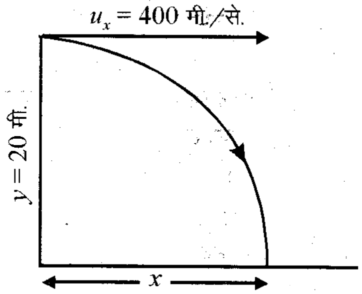
2 सेकण्ड में प्रक्षेप्य द्वारा क्षैतिज दिशा में तय की गई दूरी

$$x = u_x t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$\because$ $u_x = 400$ मी./से., $a_x = 0$

$x = 400\times2 = 800$ मीटर

अतः प्रक्षेप्य पृथ्वी पर मीनार से 800 मीटर दूरी पर गिरेगा।



चित्र 3.28

उदा.17. एक बमवर्षक विमान 500 मीटर की ऊँचाई से बम गिराता है व बम गिराते समय उसका वेग क्षैतिज दिशा में 300 मीटर/सेकण्ड होता है। यदि विमान ने किसी सैनिक ठिकाने के ऊपर से गुजरते हुए बम गिराये हो तो (i) क्या वह बम ठिकाने पर गिरेगा। (ii) वह ठिकाने से कितना आगे गिरेगा। (iii) ठिकाने पर बम गिराने के लिये उसे लक्ष्य से कितना पहले बम गिराना चाहिये।

($g = 10$ मी/से^{2}) (पुस्तक उदाहरण 3.8)

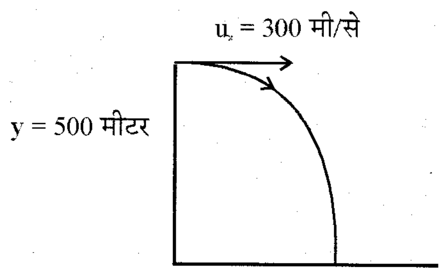
हल–(i) बमवर्षक विमान से बम गिराते समय बम का वेग वही होगा जो कि विमान का वेग है। अत: बम परवलयाकार पथ पर गतिशील होकर ठीक ठिकाने पर गिराने पर ठिकाने पर वार नहीं करेगा।

(ii) गति के द्वितीय समीकरण से–

$$y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$\because$ $u_y = 0, a_y = g$

$\therefore$ $y = \frac{1}{2} g t^2$



चित्र 3.29

$\Rightarrow$ $500 = \frac{1}{2} \times 10 t^2$

$t^2 = 100$ $\Rightarrow t = 10$ सेकण्ड

10 सेकण्ड में बम द्वारा तय की गई क्षैतिज दूरी

$$x = u_x t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$x = (300)10 + \frac{1}{2} \times 0 \times (10)^2$$

$x = 3000$ मीटर $\because a_x = 0$

अत: बम ठिकाने से 3000 मीटर आगे गिरेगा।

(iii) ठिकाने पर बम गिराने के लिये उसे लक्ष्य से 3000 मीटर पहले ही गिरा देना चाहिए।

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

1. निम्न घटनाओं में आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल कहाँ से मिलता है?
   (i) सूर्य के चारों ओर पृथ्वी के घूमने में।
   (ii) कार को मोड़ने में।
   (iii) गेंद को डोरी से बाँधकर वृत्ताकार पथ पर घुमाने में।
   (iv) इलेक्ट्रॉन के नाभिक के चारों ओर घूमने में।
2. U-235 को U-238 से अलग कैसे किया जा सकता है ?
3. एक कण R के त्रिज्या के वृत्ताकार पथ में घूम रहा है। आधे घूर्णन काल में उसके द्वारा चली गई दूरी कितनी होगी तथा विस्थापन कितना होगा ?
4. त्रिज्या R के पथ में घूमते कण की एक चौथाई काल में चली गई दूरी व विस्थापन कितना होगा ?
5. कोई कण r त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर v चाल से घूम रहा है तो एक चौथाई परिधि चलने में कितना वेग परिवर्तन, चाल परिवर्तन तथा त्वरण परिवर्तन होगा ?
6. एकसमान वृत्तीय गति में आधी परिधि चलने में कितना वेग परिवर्तन ,चाल परिवर्तन त्वरण परिवर्तन होगा ?
7. क्या यह संभव है कि किसी पिण्ड की चाल अचर हो परन्तु फिर भी उसकी गति में त्वरण हो ?
8. किसी पिण्ड का वेग निरन्तर बदल रहा है। क्या इसकी चाल नियत रह सकती है ? यदि चाल बदल रही है तो क्या वेग अचर रह सकता है ?
9. एक क्षैतिज वृत्त में स्थिर चाल से गतिमान पिण्ड के लिये वेग, त्वरण एवं गतिज ऊर्जा में से कौन–सी राशि अचर रहती है ?
10. यदि किसी पिण्ड की चाल अचर है तो क्या इसके लिये ऋजु रेखा तथा वृत्तीय पथ के अतिरिक्त कोई और भी पथ संभव है ?
11. क्या कोई कण बिना त्वरण के वक्र पथ पर चल सकता है ?
12. एक पिण्ड अचर चाल से वक्र पथ पर गतिमान है। पिण्ड के त्वरण की प्रवृत्ति बताइये।

उत्तरमाला

1. (i) पृथ्वी पर सूर्य के कारण आकर्षण बल
   (ii) पहिये व पृथ्वी के बीच घर्षण बल
   (iii) डोरी के तनाव में
   (iv) नाभिक के द्वारा इलेक्ट्रॉन पर लगने वाले आकर्षण बल से
2. अपकेन्द्रित्र (centrifuge) के सिद्धान्त द्वारा।
3. $\pi R, 2R$
4. $\frac{\pi R}{2}, R\sqrt{2}$
5. $v\sqrt{2}, 0, a\sqrt{2}$
6. $-2\vec{v}, 0, -2\vec{a}$
7. संभव है, एकसमान वृत्ताकार गति में चाल अचर लेकिन दिशा बदलती रहती है।
8. हाँ, नहीं
9. गतिज ऊर्जा
10. सभी वक्र पथ संभव है–

(a) यदि $a = 0$ तथा v अचर तो कण का पथ ऋजुरेखीय,

(b) यदि $\vec{a} \perp \vec{v}$ तथा v अचर तो वृत्ताकार पथ

(c) यदि a = अचर न हो परन्तु इसकी दिशा सदैव $\vec{v}$ के लम्बवत् रहे, तो कण वक्र पथ पर चलेगा।

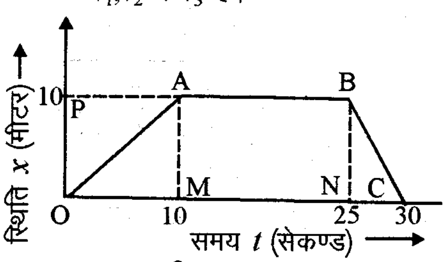
11. नहीं

12. त्वरण पिण्ड की गति के लम्बवत् है।

विविध उदाहरण

उदा.18. किसी वस्तु की स्थिति-समय ग्राफ चित्र में प्रदर्शित है। 5वें, 20वें व 27वें सेकण्ड पर वस्तु की चाल ज्ञात कीजिए। सम्पूर्ण यात्रा के दौरान औसत वेग व औसत चाल ज्ञात कीजिए।

हल– स्थिति समय ग्राफ पर एक सरल रेखा पर वेग–समान रहता है। ग्राफ में तीन सरल रेखायें OA, AB व BC हैं। माना इन रेखाओं के संगत वेग v_1, v_2 व v_3 है।



चित्र 3.30

5 वें सेकण्ड पर वेग = 0 व 10 सेकण्ड के बीच वेग

$$v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_A - x_0}{OM} = \frac{OP}{OM} = \frac{10}{10} = 1 \text{ मी/से}$$

तथा चाल $v_1 = 1$ मी./से.

20वें सेकण्ड पर वेग = 10 से 25 सेकण्ड के बीच वेग

$$v_2 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{MN} = \frac{0}{15} = 0 \text{ मी/से.}$$

तथा चाल $v_2 = 0$ मी./से.

27वें सेकण्ड पर वेग = 25 व 30 सेकण्ड के बीच वेग

$$v_3 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_C - x_B}{NC} = \frac{(-10)}{5} = -2 \text{ मी/से.}$$

तथा चाल $v_3 = 2$ मी./से.

इस भाग में वेग ऋणात्मक है क्योंकि वस्तु प्रारम्भिक बिन्दु पर लौट रही है।

$$\text{औसत वेग} = \frac{\text{कुल विस्थापन}}{\text{कुल समय}} = \frac{x_C - x_0}{30}$$

$$= \frac{0}{30} = 0 \text{मी/से.}$$

$$\text{औसत चाल } v_{av} = \frac{\text{कुल तय दूरी}}{\text{कुल लगा समय}}$$

$$= \frac{10+0+10}{30} = \frac{20}{30}$$

$$= \frac{2}{3} = 0.66 \text{ मी./से.}$$

उदा.19. एक नदी का बहाव उत्तर दिशा में 3 किमी./घण्टा है। एक आदमी इसे पूर्व की दिशा में 4 किमी./घण्टा के वेग से तैर कर पार करता है। निम्न ज्ञात कीजिए-

(i) आदमी का नदी के किनारे के सापेक्ष वेग

(ii) यदि नदी 1 किमी. चौड़ी हो तो वह नदी को कितने समय में पार करेगा?

(iii) विपरीत किनारे पर पहुंचने के बाद, प्रारंभिक बिन्दु से वह कितनी दूरी पर होगा?

हल– दिया गया है–

$v_R = 3$ किमी./घण्टा,

$v_m = 4$ किमी./घण्टा

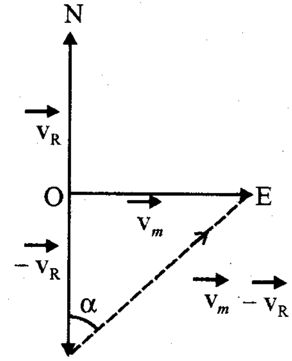
(i) आपेक्षिक वेग का परिमाण

$$= \sqrt{v_m^2 + v_R^2}$$

$$= \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$$

$$= \sqrt{16+9}$$

$$= \sqrt{25} = 5 \text{ किमी./घण्टा}$$



चित्र 3.31

तैराक की दिशा $\tan\alpha = \frac{v_m}{v_R} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow$ $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53°8'$

अतः आदमी को ऊर्ध्वाधर से 53°8' पर तैरना होगा।

(ii) नदी को पार करने में लगा समय $= \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$

$$= \frac{1}{4} \text{ घण्टा}$$

$$= \frac{1}{4} \times 60 = 15 \text{ मिनट}$$

(iii) आदमी द्वारा तय की गई दूरी = प्रवाह चाल × समय

$$= 3 \times \frac{1}{4} = 0.75 \text{ किमी.} = 750 \text{ मीटर}$$

उदा.20. दो समांतर रेल पटरियाँ उत्तर-दक्षिण दिशा में हैं। एक रेलगाड़ी A उत्तर दिशा में 54 km/h की चाल से गतिमान है तथा दूसरी रेलगाड़ी B दक्षिण दिशा में 90 km/h की चाल से चल रही है।

(a) A के सापेक्ष B का आपेक्षिक वेग निकालिए,

(b) B के सापेक्ष पृथ्वी का आपेक्षिक वेग निकालिए,

(c) रेलगाड़ी A की छत पर गति की विपरीत दिशा में (रेलगाड़ी A के सापेक्ष 18 kmh^{-1} के वेग से) दौड़ते हुए उस बंदर के वेग की गणना कीजिए जो पृथ्वी पर खड़े व्यक्ति द्वारा देखा जा रहा है।

हल– (a) यदि +X–अक्ष को दक्षिण से उत्तर की ओर लिया जाए तब

$$v_A = +54 \text{ km/}h$$
$$= \frac{54 \times 1000}{3600} \text{ m/s} = 15 \text{ m/s}$$

तथा
$$v_B = -90 \text{ km/}h$$
$$= \frac{-90 \times 1000}{3600} \text{ m/s} = -25 \text{ m/s}$$

∴ A के सापेक्ष B का आपेक्षिक वेग

$$v_{BA} = v_B - v_A = -25 - (15)$$
$$= -40 \text{ m/s}$$

अर्थात् रेलगाड़ी B, रेलगाड़ी A के सापेक्ष उत्तर से दक्षिण दिशा में 40 m/s की चाल से चलती है।

(b) B के सापेक्ष पृथ्वी का आपेक्षिक वेग
$= 0 - v_B = 0 - (-25) = 25$ m/s

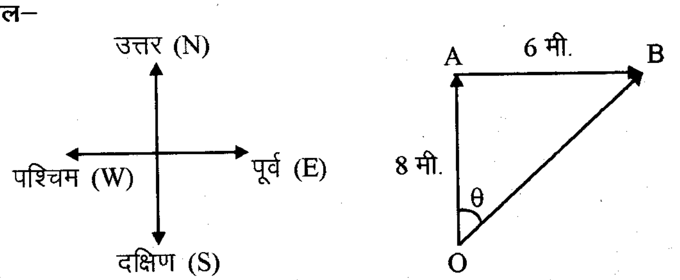
(c) माना कि पृथ्वी के सापेक्ष बंदर का वेग v_M है। अतः A के सापेक्ष बंदर का वेग

$$v_{MA} = v_M - v_A = -18 \text{ km/}h$$
$$= \frac{-18 \times 1000}{3600} \text{ m/s.} = -5 \text{ m/s.}$$

∴
$$v_M = 15 - 5 = 10 \text{ m/s}$$

उदा.21.एक व्यक्ति 8 मी. उत्तर की ओर, फिर 6 मी. पूर्व की ओर चलता है। उसका प्रांरम्भिक स्थिति से विस्थापन ज्ञात कीजिए।

हल–



चित्र 3.32

प्रारंभिक स्थिति से विस्थापन

$$OB = \sqrt{OA^2 + AB^2}$$
$$= \sqrt{(8)^2 + (6)^2}$$
$$= \sqrt{64 + 36}$$
$$= \sqrt{100} = 10 \text{ मीटर}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{OA} = \frac{6}{8} = 0.75$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}(0.75)$$

$$= 37° \text{ (लगभग)}$$

अतः व्यक्ति का विस्थापन 37° (लगभग) उत्तर–पूर्व दिशा में 10 मीटर होगा।

उदा.22. एक व्यक्ति पहले पूर्व की ओर 4 मीटर, फिर उत्तर की ओर 3 मीटर चलता है तथा अन्त में वह 5 मीटर क्षैतिज जल के ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर जाता है। व्यक्ति के परिणामी विस्थापन का परिमाण ज्ञात कीजिए।

हल– माना कि प्रारंभ में क्षैतिज तल में परिणामी सदिश का परिमाण d है।

$$\text{तब } d = \sqrt{(4)^2 + (3)^2 + 2 \times 4 \times 3 \cos 90°}$$
$$= \sqrt{16 + 9}$$
$$= \sqrt{25}$$
$$= 5 \text{ मीटर}$$

यदि क्षैतिज तल व ऊर्ध्वाधर विस्थापन का परिणामी विस्थापन का परिमाण R है तब

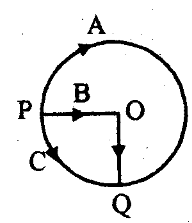
$$R = \sqrt{(5)^2 + (d)^2}$$
$$= \sqrt{(5)^2 + (5)^2}$$
$$= \sqrt{25 + 25}$$
$$= \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ मीटर}$$

उदा.23. तीन साइकिल सवार (A,B,C) निम्न चित्रानुसार चलकर P से Q पर एक साथ 10 सेकण्ड में पहुंचते हैं। यदि वृत्त की त्रिज्या 10 मीटर हो तो ज्ञात करो-

(i) तीनों का विस्थापन

(ii) तीनों का औसत वेग तथा

(iii) तीनों की औसत चाल ज्ञात करो।



चित्र 3.33

हल– (i) तीनों का विस्थापन

$$PQ = \sqrt{(10)^2 + (10)^2} = \sqrt{200}$$
$$= 10\sqrt{2}$$

(ii) औसत चाल–

A की औसत चाल $|\vec{v_A}|$ = चाप $\frac{PAQ}{t}$

$\because$ चाप PAQ. $= \frac{3}{4}.2\pi r = \frac{3}{4} \times 2 \times \pi \times 10$

$= 15\pi$

$\therefore$ $|\vec{v_A}| = \frac{15\pi}{10} = \frac{3\pi}{2}$ मी./से.

$|\vec{v_B}| = \frac{10+10}{10} = 2$ मी./से.

$|\vec{v_C}| = \frac{1}{4} \times \frac{2\pi \times 10}{10} = \frac{\pi}{2}$ मी./से.

(iii) तीनों का औसत वेग $v = \frac{PQ}{10} = \frac{10\sqrt{2}}{10}$

$= \sqrt{2}$ मी./से. PQ की दिशा में।

उदा.24. एक कार अपनी यात्रा की आधी दूरी 40 किमी./घंटा की चाल से तथा शेष दूरी 60 किमी./घंटा की चाल से तय करती है। कार की औसत चाल की गणना करो।

हल– माना कि कार द्वारा तय की गई कुल दूरी s है तथा प्रथम आधी दूरी $\frac{s}{2}$ तय करने में लगा समय t_1 हो तो

$$v_1 = \frac{s/2}{t_1}$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \frac{s}{2v_1}$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \frac{s}{2 \times 40} = \frac{s}{80} \quad ....(1)$$

शेष आधी दूरी $\frac{s}{2}$ तय करने में लगा समय t_2 हो तो

$$v_2 = \frac{s/2}{t_2}$$

$$\Rightarrow \quad t_2 = \frac{s}{2v_2}$$

$$\Rightarrow \quad t_2 = \frac{s}{2 \times 60} = \frac{s}{120} \quad ...(2)$$

$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल समय}}$$

$$= \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\frac{s}{80} + \frac{s}{120}}$$

$$= \frac{80 \times 120}{80 + 120}$$

$= 48$ किमी./घंटा

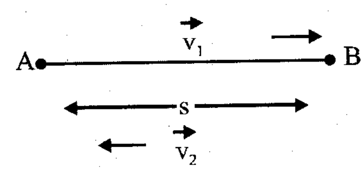
उदा 25. एक वाहन चालक किसी स्थान से दूसरे स्थान तक 20 मी./से. गति करते हुए पहुंचकर तुरन्त ही प्रथम स्थान की ओर 30 मी./से. चाल से लौटता है तो इसकी औसत चाल व औसत वेग ज्ञात करो।

हल– $v_1 = 20$ मी./से.

$v_2 = 30$ मी./से.

तय की गई कुल दूरी

$s = s_1 + s_2$



चित्र 3.34

यदि A से B तक जाने व B से A तक वापस आने में लगे समय क्रमशः t_1 व t_2 है तो

$$t_1 = \frac{s_1}{20}$$

$$t_2 = \frac{s_2}{30} = \frac{s_1}{30}$$

$$\therefore \quad \text{औसत चाल} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}$$

$$= \frac{2s_1}{\frac{s_1}{20} + \frac{s_1}{30}} = \frac{2s_1}{\frac{5s_1}{60}}$$

$= 24$ मी./से.

क्योंकि कण का कुल विस्थापन शून्य है अतः

$$\text{औसत वेग} = \frac{\text{विस्थापन}}{\text{समय}} = 0$$

उदा.26. दो बसें 150 किमी. की यात्रा पर एक साथ चलती है। उनकी चाल क्रमशः 45 किमी./घण्टा तथा 60 किमी./घण्टा है। बताओ तेज बस कितने समय पहले पहुँच जाएगी?

हल– $\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$

$\therefore$ पहली बस का समय $t_1 = \frac{150}{45} = \frac{10}{3}$ घण्टा

$\therefore$ दूसरी बस का समय $t_2 = \frac{150}{60} = \frac{5}{2}$ घण्टा

$\therefore$ दूसरी बस द्वारा कम समय $= \frac{10}{3} - \frac{5}{2}$

$= \frac{20-15}{6} = \frac{5}{6}$ घण्टा

$= 50$ मिनट

अतः तेज बस 50 मिनट पहले पहुँचेगी।

उदा 27. यदि किसी कण का प्रारंम्भिक वेग u है तथा इसी दिशा मे त्वरण समय के साथ bt अनुसार बदलता है तो कण का किसी क्षण t पर वेग क्या होगा?

हल– यहाँ त्वरण परिवर्तित हो रहा है इस प्रकार न्यूटन के गति के समीकरण का प्रयोग नहीं किया जा सकता है।

$\therefore$ त्वरण $a = \dfrac{dv}{dt} = bt$

समाकलन करने पर

$$v = \frac{bt^2}{2} + C \qquad ...(1)$$

C समाकलन नियंताक है।

$t = 0$ पर $v = u$ रखने पर

$$u = 0 + C \quad \therefore C = u$$

$\therefore$ समीकरण (1) से $\quad v = u + \dfrac{1}{2}bt^2 \qquad ...(2)$

उदा.28. एक पिण्ड एक सीधे पथ पर 5 मी./से.^{2} के नियत त्वरण से गतिशील है। यदि $t = 0$ पर $x = -5$ मीटर तथा वेग $v = 2$ मी./से. हो तो $t = 4$ सेकण्ड पर पिण्ड की स्थिति व वेग ज्ञात करो।

हल– दिया हुआ है–

$x(0) = -5$ मीटर, $\qquad v(0) = 2$मी./से.

$a = 5$ मी./से.^{2},

$t = 4$ सेकण्ड

पिण्ड की स्थिति

$$\therefore \quad x(t) = x(0) + v(0)\,t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x(4) = -5 + 2 \times 4 + \frac{1}{2} \times 5 \times (4)^2$$

$$x(4) = -5 + 8 + 40$$

$$x(4) = 43 \text{ मीटर}$$

पिण्ड का वेग

$$v(t) = v(0) + at$$

$$v(4) = 2 + 5 \times 4$$

$$v(4) = 22 \text{ मी./से.}$$

उदा.29. एक कण पूर्व की ओर 5 मी./से. के वेग से गतिशील है। 10 सेकण्ड में उसका वेग 5 मी./ से. उत्तर की ओर हो जाता है। कण का माध्य त्वरण ज्ञात करो।

हल– माना कि v_1 प्रांरम्भिक वेग x अक्ष के अनुदिश है तथा v_2 अन्तिम वेग y अक्ष के अनुदिश है। कण का माध्य त्वरण

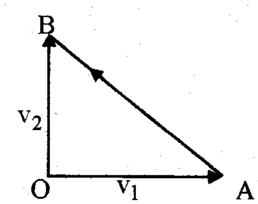
$$\vec{a} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t}$$

$$\vec{a} = \frac{5\hat{j} - 5\hat{i}}{10}$$

$$a = \frac{\sqrt{(5)^2 + (5)^2}}{10}$$

$$= \frac{\sqrt{50}}{10} = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ मी./से}^2$$

इसकी दिशा AB की दिशा में होगी अर्थात् उत्तर पश्चिम दिशा की ओर होगी।



चित्र 3.35

उदा.30. एक कार विरामावस्था से चलकर 12 सेकण्ड में 30 मी./से. का वेग प्राप्त करती है तो (i) उस कार का त्वरण, (ii) तय की गई कुल दूरी तथा (iii) 7 सेकण्ड के पश्चात् वेग ज्ञात करो।

हल– (i) त्वरण $a = \dfrac{v - u}{t} = \dfrac{30 - 0}{12} = \dfrac{5}{2} = 2.5$ मी./से.^{2}

(ii) तय की गई कुल दूरी

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$s = 0 \times 12 + \frac{1}{2} \times 2.5 \times (12)^2$$

$$s = 180 \text{ मीटर}$$

(iii) कार का वेग

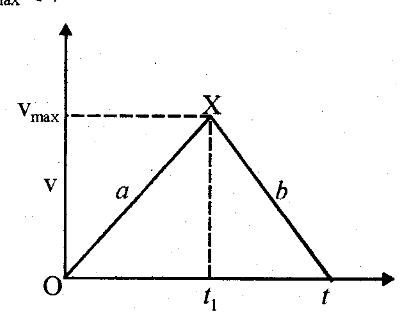
$$v = u + at$$

$$v = 0 + 2.5 \times 7$$

$$v = 17.5 \text{ मी./से.}$$

उदा.31. रुकी हुई कार कुछ देर के लिए नियत दर a से त्वरित होती है तथा फिर नियत दर b से मंदित होकर रुक जाती हैं यदि यात्रा में लगा कुल समय t सेकण्ड हो तो कार द्वारा प्राप्त अधिकतम वेग क्या होगा?

हल– माना कि कार t_1 समय तक त्वरित होती है तब इसका अधिकतम वेग v_{max} है।



चित्र 3.36

$\therefore$ त्वरण $a = \dfrac{v_{max}}{t_1}$

$\Rightarrow \qquad t_1 = \dfrac{v_{max}}{a} \qquad ...(1)$

मंदन $b = \dfrac{v_{max}}{(t - t_1)}$

$\Rightarrow \qquad t - t_1 = \dfrac{v_{max}}{b} \qquad ...(2)$

समीकरण (1) व (2) जोड़ने पर

$$t = v_{max}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$\therefore \qquad v_{max} = \frac{abt}{(a+b)}$$

उदा.32. एक रेलगाड़ी स्थिर अवस्था से 25 सेकण्ड में 90 किमी./घण्टा की चाल तक समान त्वरण से त्वरित होती है। इतने समय में रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

हल– प्रश्नानुसार स्थिर अवस्था अर्थात्

$u = 0$

समय = 25 सेकण्ड,

$v = 90$ किमी./घण्टा

$= \dfrac{90 \times 1000}{3600}$ मी./से.

$= 25$ मी./से.

त्वरण $a = \dfrac{v - u}{t} = \dfrac{25 - 0}{25}$

$= 1$ मी./से.^{2}

तय की गई दूरी $s = ut + \dfrac{1}{2}at^2$

$= 0 + \dfrac{1}{2} \times 1 \times (25)^2$

$= \dfrac{1}{2} \times 625 = 312.5$ मीटर

अतः रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दूरी = 312.5 मीटर है।

उदा.33. एक रेलगाड़ी विरामावस्था से चलना प्रारम्भ करती है और 10 सेकण्ड तक इसकी चाल समान त्वरण से बढ़ती है। 5 सेकण्ड के अन्त में इसकी चाल 42 किमी./घण्टा हो जाती है।

(क) रेलगाड़ी का त्वरण ज्ञात करो।

(ख) 10 सेकण्ड बाद इसकी चाल क्या होगी?

(ग) 10 सेकण्ड में रेलगाड़ी कितनी दूरी चलेगी?

(घ) सातवें व दसवें सेकण्डों में रेलगाड़ी ने क्रमशः कितनी-कितनी दूरी तय की?

हल– (क) 5 सेकण्ड बाद चाल = 42 किमी./घण्टा $= \dfrac{42}{3600}$ किमी./से.

$\therefore u = 0, v = \dfrac{42}{3600} \dfrac{\text{किमी.}}{\text{से.}}, t = 5, a = ?$

सूत्र– $v = u + at$ से

$\dfrac{42}{3600} = 0 + a \times 5$

$a = \dfrac{42}{3600 \times 5}$

$= \dfrac{7}{3000} = \dfrac{70}{3 \times 10000}$

$= 23 \times 10^{-4}$ किमी./से.^{2} (लगभग)

(ख) 10 सेकण्ड बाद वेग

$v = u + at$

$= 0 + \dfrac{7}{3000} \times 10$

$= \dfrac{70}{3 \times 1000}$

$= 23.2 \times 10^{-3}$ किमी./से.

(ग) दूरी $\qquad s = ut + \dfrac{1}{2}at^2$

$= 0 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{7}{3000} \times 10 \times 10$

$= \dfrac{7}{60}$ किमी.

$= 0.116$ किमी.

(घ) t वें सेकण्ड में तय की गई दूरी

$= u + \dfrac{1}{2}a(2t - 1)$

$\therefore \qquad$ 7 वें सेकण्ड में दूरी $= 0 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{7}{3000}(2 \times 7 - 1)$

$= \dfrac{91}{6000} = 0.015$ किमी.

10 वें सेकण्ड में दूरी $= 0 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{7}{3000}(2 \times 10 - 1)$

$= \dfrac{133}{6000} = 0.022$ किमी.

उदा.34. एक व्यक्ति किसी गेंद को ऊपर फेंककर 8 सेकण्ड के पश्चात् पुनः लपक लेता है तो बतलाइए–

(क) किस वेग से गेंद को ऊपर फेंका गया था?

(ख) कितनी ऊँचाई पर गेंद का वेग शून्य होगा?

हल– (क) किसी गेंद को ऊपर जाने व नीचे आने में समान समय लगता है।

$\therefore$ केवल ऊपर जाने का समय $= \dfrac{8}{2} = 4$ से.

ऊर्ध्वाधर ऊपर गति के लिए

सूत्र– $v = u - gt$ से $\qquad t = 4$ से,

$0 = u - 9.8 \times 4 \qquad u = ?, v = 0$ मी./से.

$u = 39.2$ मी./से. $\qquad g = 9.8$ मी./से.^{2}

(ख) माना कि h ऊँचाई पर वेग शून्य होगा–

$v^2 = u^2 - 2gh$

$$0 = 39.2 \times 39.2 - 2 \times 9.8 \times h$$

$$h = \frac{39.2 \times 39.2}{2 \times 9.8} = 78.4 \text{ मीटर}$$

उदा 35. ऊपर से स्वतन्त्रापूर्वक गिरती हुई वस्तु उसके अन्तिम सेकण्ड में उसकी कुल ऊँचाई $\frac{16}{25}$ का भाग पार करती है तो ज्ञात करो–

(i) कुल ऊँचाई, (ii) गिरने का समय।

हल– माना कि कुल ऊँचाई $= h$
तथा तय करने में लगा समय $= t$

अन्तिम सेकण्ड में दूरी $= \frac{16h}{25}$

$(t-1)$ सेकण्ड में दूरी $= h - \frac{16h}{25} = \frac{9h}{25}$

$$h = ut + \frac{1}{2} gt^2 \text{ से } u = 0$$

$$h = 0 + \frac{1}{2} \times 10t^2$$

$$h = 5t^2 \quad ...(1)$$

इसी प्रकार
$$\frac{9h}{25} = 5(t-1)^2 \quad ...(2)$$

भाग देने पर–
$$\frac{9}{25} = \frac{(t-1)^2}{(t)^2}$$

या
$$\frac{3}{5} = \frac{(t-1)}{(t)}$$

$$5t - 5 = 3t$$
$$2t = 5$$
$$t = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ से}$$

t का मान समीकरण (1) में रखने पर–

$$h = 5 \times 2.5 \times 2.5$$
$$= 31.25 \text{ मीटर}$$

उदा.36. 3 मीटर ऊँचाई से गिरकर एक गेंद एक पूर्ण प्रत्यास्थ प्लेट से टकराती है। क्षण $t = 0$ पर गेंद का वेग शून्य है। इसका वेग-समय वक्र कैसा होगा?

हल– सूत्र $h = \left(\frac{1}{2}\right) gt^2$ के अुसार 3 मी. ऊँचाई से गिरने में लगा समय यदि T है तो

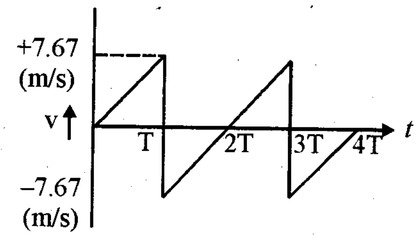
$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2 \times \frac{3.0}{9.8}}$$

$= 0.78$ सेकण्ड होगा।

प्लेट से टकराते समय गेंद का वेग

$$v = \sqrt{2gh}$$
$$= \sqrt{2 \times 9.8 \times 3.0}$$
$$= 7.67 \text{ मी./से.}$$

टकराने के बाद पूर्ण प्रत्यास्थ टक्कर होने से गेंद इसी चाल से अब ऊपर की ओर जाएगी (अर्थात् यदि पहले वेग धनात्मक था तो अब ऋणात्मक हो जाएगा) व 0.78 सेकण्ड बाद (कुल समय 2×0.78) में इसका वेग शून्य हो जाएगा। अब यह पुनः नीचे आएगी व फिर ऊपर जायेगी।



चित्र 3.37

उदा.37. किसी कण की स्थिति $\vec{r} = 3.0\,t\hat{i} + 2.0\,t^2\hat{j} + 5.0\hat{k}$ है जहां t सेकण्ड में व्यक्त किया गया है। अन्य गुणाकों के मात्रक इस प्रकार हैं कि $\vec{r}$ मीटर में व्यक्त हो जाएँ। (a) कण का $\vec{v}(t)$ व $\vec{a}(t)$ ज्ञात कीजिए; (b) $t = 1.0$ s पर $\vec{v}(t)$ का परिमाण व दिशा ज्ञात कीजिए।

हल–
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$
$$= \frac{d}{dt}(3.0t\hat{i} + 2.0t^2\hat{j} + 5.0\hat{k})$$
$$= (3.0\hat{i} + 2.0 \times 2t\hat{j} + 0)$$
$$\vec{v}(t) = (3.0\hat{i} + 4.0t\hat{j}) \quad ...(1)$$
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(3.0\hat{i} + 4.0t\hat{j})$$
$$= 0 + 4.0\hat{j}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{a}(t) = 4.0\hat{j} \quad ...(2)$$

समी. (1) से

$t = 1.0$ सेकण्ड पर
$$\vec{v} = (3.0\hat{i} + 4.0\hat{j})$$
$$\therefore \quad v = |\vec{v}| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$$
$$= 5 \text{ मी./से.}$$

$\vec{v}$ की दिशा का निर्धारण

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53°$$

उदा 38. $t = 0$ क्षण पर कोई कण मूल बिन्दु से $5.0\,\hat{i}$ m/s के वेग से चलना शुरू करता है। X-Y समतल में उस पर एक ऐसा बल लगता है जो उसमें एकसमान त्वरण $(3.0\hat{i} + 2.0\hat{j})$ m/s^2 उत्पन्न करता है। (a) जिस क्षण पर कण का x निर्देशांक 84 m हो उस क्षण उसका y निर्देशांक कितना होगा? (b) इस क्षण कण की चाल क्या होगी?

हल– ∵ कण $t = 0$ क्षण पर मूल बिन्दु से चलना प्रारंभ करता है। अतः

$$\vec{r} = 0 + \vec{u}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{u}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$= (5.0\hat{i})t + \frac{1}{2}(3.0\hat{i} + 2.0\hat{j})t^2$$

$$= (5.0t + 1.5t^2)\hat{i} + 1.0t^2\hat{j}$$

$\therefore$ $x = 5.0t + 1.5t^2$

$y = 1.0t^2$

जब $x = 84$ मी.

तब $84 = 5.0t + 1.5t^2$

$\Rightarrow \quad 1.5t^2 + 5.0t - 84 = 0$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4\times1.5\times(-84)}}{2\times1.5}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 504}}{3}$$

$$= \frac{-5 \pm 23}{3}$$

धनात्मक चिन्ह लेने पर $t = \frac{-5 + 23}{3} = 6$ सेकण्ड

$t = 6$ सेकण्ड पर $y = 1.0 \times (6)^2 = 36.0$ मी.

$$\because \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}[(5.0t + 1.5t^2)\hat{i} + 1.0t^2\hat{j}]$$

$$= (5.0 + 1.5 \times 2t)\hat{i} + 1.0 \times 2t\hat{j}$$

$$= (5 + 3t)\hat{i} + 2t\hat{j}$$

$t = 6$ सेकण्ड पर $\vec{v} = (5 + 3\times6)\hat{i} + 2\times6\hat{j}$

$$\vec{v} = 23\hat{i} + 12\hat{j}$$

$\Rightarrow$ कण की चाल $v = |\vec{v}| = \sqrt{(23)^2 + (12)^2}$

$= 25.9$ मी./से.

उदा.39. एक पैदल यात्री किसी खड़ी चट्टान के कोने पर खड़ा है। चट्टान जमीन से 490 m ऊंची है। वह एक पत्थर को क्षैतिज दिशा में $15 ms^{-1}$ की आरंभिक चाल से फेंकता है। वायु के प्रतिरोध को नगण्य मानते हुए यह ज्ञात कीजिए कि पत्थर को जमीन तक पहुँचने में कितना समय लगा तथा जमीन से टकराते समय उसकी चाल कितनी थी? ($g = 9.8 m s^{-2}$);

हल– प्रश्नानुसार $u_x = 15$ मी./से.

$u_y = 0$ मी./से.

$a_x = 0$ मी./से.^{2}

$a_y = g$ मी./से.^{2}

गति के द्वितीय समीकरण से

$$y = u_y t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$490 = 0 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2.$$

$$\Rightarrow \quad t^2 = \frac{490 \times 2}{9.8} = 100$$

$t = 10$ सेकण्ड

गति के प्रथम समीकरण से

$v_y = u_y + a_y t$

$\Rightarrow \quad v_y = 0 + 9.8 \times 10 = 98$ मी./से.

तथा $v_x = u_x = 15$ मी./से.

अतः पत्थर की चाल $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$= \sqrt{(15)^2 + (98)^2}$

$= \sqrt{225 + 9604}$

$= \sqrt{9829}$

$= 99.1$ मी./से.

उदा.40. एक 0.1 किग्रा. द्रव्यमान की बंदूक की गोली मुक्ताकाश में 40 मी./से. क्षैतिज वेग से दागी जाती है। 2 सेकण्ड समय पश्चात् गोली की स्थिति ज्ञात करो। (g = 10 मी./से.^{2})

हल– गति के द्वितीय समीकरण से क्षैतिज दूरी

$$x = u_x t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$\because$ $u_x = 40$ मी./से.

$a_x = 0$, $t = 2$ से.

$\therefore$ $x = 40 \times 2 = 80$ मी.

ऊर्ध्वाधर दूरी $y = u_y t + \frac{1}{2}a_y t^2$

$\because$ $u_y = 0$, $a_y = g = 10$मी./से.^{2}

$\therefore$ $y = \frac{1}{2} \times 10 \times (2)^2 = 20$ मी.

किसी समय t पर गोली की स्थिति के निर्देशांक

$$x = u_x t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$x = 40t \qquad ...(1)$$

$$y = u_y t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$y = \frac{1}{2} \times 10 \times t^2 = 5t^2 \qquad ...(2)$$

समी.(1) से t का मान समी. (2) में रखने पर

$$y = 5\left(\frac{x}{40}\right)^2 = \frac{5x^2}{1600}$$

$$y = \frac{x^2}{320} \qquad ...(3)$$

समी. (3) एक परवलय के समी. को व्यक्त करता है इस प्रकार इस स्थिति में गोली का पथ परवलयाकार होगा।

उदा.41. XY तल में स्थित कण के समय t_1 व t_2 पर स्थिति निर्देशांक क्रमशः (2, 2) तथा (3, 4) है। इस समयान्तराल में कण के

विस्थापन सदिश का मान ज्ञात करो।

हल– दिया गया है–$x_1 = 2, x_2 = 3, y_1 = 2, y_2 = 4$

अतः कण का विस्थापन सदिश

$$\Delta \vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$$

$$\Delta \vec{r} = (3-2)\hat{i} + (4-2)\hat{j} = \hat{i} + 2\hat{j}$$

उदा.42. XY तल में गति कर रहे कण के निर्देशांक समय t पर निम्न प्रकार निर्भर करते हैं-$x = (8t-1)$ मीटर तथा $y = 8t^3$ है। समय $t = 3$ सेकण्ड पर कण के वेग का मान ज्ञात करो।

हल– दिया गया है–$x = (8t-1)$ तथा $y = 8t^3$

$\therefore$ कण का स्थिति सदिश

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{i} = (8t-1)\hat{i} + 8t^3\hat{j}$$

$\therefore$ कण का वेग $\quad \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

$$= \frac{d}{dt}[(8t-1)\hat{i} + 8t^3\hat{j}]$$

$$= \frac{d}{dt}(8t-1)\hat{i} + \frac{d}{dt}(8t^3)\hat{j}$$

$$= 8\hat{i} + 8 \times 3t^2\hat{j} = 8\hat{i} + 24t^2\hat{j}$$

$\therefore t = 3$ सेकण्ड पर कण का वेग

$$\vec{v} = 8\hat{i} + 24(3)^2\hat{j} = 8\hat{i} + 216\hat{j}$$

$\therefore$ कण का वेग $\quad v = \sqrt{(8)^2 + (216)^2}$

$$= \sqrt{46720}$$

$$= 216.15 \text{ मी./से.}$$

उदा.43. एक पिण्ड को एक मीनार से जिसकी ऊँचाई 50 मीटर है क्षैतिज दिशा में 5 मी./से. के वेग से फेंका जाता है। पिण्ड धरातल पर कितने समय पश्चात् पहुँचेगा? ($g = 10$ मी./से.^{2})

हल– दिया गया है–$h = 50$ मीटर, $u_x = 5$ मी./से. $g = 10$ मी./से.^{2}

गति के द्वितीय समीकरण से

$$h = u_y t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (\because u_y = 0 \text{ तथा } a_y = g)$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$50 = \frac{1}{2} \times 10 \times t^2$$

$$\Rightarrow \quad t^2 = 10$$

$$\Rightarrow \quad t = \sqrt{10} \text{ सेकण्ड}$$

उदा.44. एक पिण्ड को एक मीनार जिसकी ऊँचाई 50 मीटर है 10 मी./से. के वेग से क्षैतिज दिशा में फेंका जाता है ज्ञात कीजिए कि-
(i) कितने समय पश्चात् पिण्ड जमीन पर पहुँचेगा?
(ii) पृथ्वी से टकराते समय पिण्ड का वेग क्या होगा?

हल– दिया गया है–

$$h = 50 \text{ मीटर}$$

$$v_x = 10 \text{ मी./से.}$$

(i) गति के द्वितीय समीकरण से

$$h = u_y t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (\because u_y = 0 \text{ तथा } a_y = g)$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 50}{9.8}} = 3.2 \text{ सेकण्ड}$$

(ii) गति के प्रथम समीकरण से

$$v_y = u_y + a_y t$$
$$= 0 + gt$$
$$= 9.8 \times 3.2$$
$$= 31.36 \text{ मी./से.}$$

पृथ्वी से टकराते समय पिण्ड का परिणामी वेग

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \therefore (v_x = u_x)$$

$$= \sqrt{(10)^2 + (31.36)^2}$$

$$= \sqrt{100 + 983.45}$$

$$= 32.9 \text{ मी./से.}$$

उदा.45. गैलीलियो ने अपनी पुस्तक ''टू न्यू साइंसेज'' में कहा है कि ''उन उन्नयनों के लिए जिनके मान 45° से बराबर मात्रा द्वारा अधिक या कम हैं, क्षैतिज परास बराबर होते हैं''। इस कथन को सिद्ध कीजिए।

हल– $\because$ प्रक्षेप्य की क्षैतिज परास $R = \dfrac{u^2 \sin 2\theta}{g}$

$\therefore$ कोण $\theta = (45° + \alpha)$ तथा $\theta' = (45° - \alpha)$ के संगत

$$R = \frac{u^2 \sin 2(45° + \alpha)}{g} = \frac{u^2 \sin(90° + 2\alpha)}{g}$$

$$= \frac{u^2 \cos 2\alpha}{g} \quad ...(i)$$

तथा $R' = \dfrac{u^2 \sin 2(45° - \alpha)}{g} = \dfrac{u^2 \sin(90° - 2\alpha)}{g}$

$$= \frac{u^2 \cos 2\alpha}{g} \quad ...(ii)$$

अतः समी. (i) व (ii) से

$$R = R'$$

अतः प्रक्षेप्य कोण के लिए जिनके मान 45° से बराबर मात्रा द्वारा कम या अधिक है क्षैतिज परास बराबर होते हैं।

उदा.46. एक प्रक्षेप्य की क्षैतिज परास उसकी अधिकतम ऊँचाई की $4\sqrt{3}$ गुनी है। इसके प्रक्षेपण कोण का मान ज्ञात कीजिए।

हल– प्रश्नानुसार $\quad R = 4\sqrt{3}h_{max} \quad ...(1)$

$$\because \quad R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$$

तथा $$h_{max} = \frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

∴ समी. (1) से

$$\frac{u^2 \sin 2\theta}{g} = 4\sqrt{3}.\frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

$$\Rightarrow \quad \sin 2\theta = 2\sqrt{3} \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow \quad 2 \sin\theta \cos\theta = 2\sqrt{3} \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow \quad \cos \theta = \sqrt{3} \sin \theta$$

$$\Rightarrow \quad \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 30°$$

उदा.47. एक प्रक्षेप्य का उड्यन काल 10 सेकण्ड है तथा उसकी परास 500 मीटर है। इसके द्वारा प्राप्त अधिकतम् ऊँचाई होगी। ($g = 10$ मी./से.^{2})

हल– दिया गया है–

उड्डयन काल $T = 10$ सेकण्ड

परास $= 500$ मीटर

$g = 10$ मी./से.^{2}

$$\because \quad T = \frac{2u \sin \theta}{g} \quad ...(1)$$

तथा अधिकतम ऊँचाई

$$h_{max} = \frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

समी. (1) से $$h_{max} = \frac{T^2 g^2}{4 \sin^2 \theta} . \frac{\sin^2 \theta}{2g}$$

$$h_{max} = \frac{T^2 g^2}{8g} = \frac{T^2 g}{8}$$

$$h_{max} = \frac{(10)^2 \times 10}{8}$$

$$h_{max} = 125 \text{ मीटर}$$

उदा.48. उस प्रक्षेपण कोण का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए प्रक्षेप्य की परास व अधिकतम ऊँचाई समान होगी?

हल– प्रश्नानुसार– $R = h_{max}$

$$\therefore \quad \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2u^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

$$\Rightarrow \quad 4 \cos \theta = \sin \theta$$

$$\Rightarrow \quad \tan \theta = 4 = \tan 76°$$

$$\therefore \quad \theta = 76°$$

उदा.49. एक प्रक्षेप्य को क्षैतिज से 15° कोण पर फेंकने पर उसकी परास 1.5 किमी. है तब 45° कोण पर फेंकने पर परास कितनी होगी?

हल– दिया गया है–

$\theta_1 = 15°$

$R_1 = 1.5$ किमी.

$\theta_2 = 45°$

$$\because \text{ प्रक्षेप्य की परास} \quad R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$\therefore \quad R_1 = \frac{u^2 \sin 2\theta_1}{g} = 1.5 \text{ किमी.}$$

$$\frac{u^2 \sin 30°}{g} = 1.5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u^2}{g} = \frac{1.5}{0.5}$$

∴ 45° कोण पर फेंकने पर प्रक्षेप्य की परास अधिकतम होगी–

$$R_{max} = \frac{u^2}{g} = \frac{1.5}{0.5} = 3 \text{ किमी.}$$

उदा.50. क्रिकेट की एक गेंद 15 मीटर/से. के वेग से क्षैतिज से 30° कोण बनाते हुए फेंकी जाती है। गेंद का उड्डयन काल ज्ञात कीजिए। ($g = 10$ मी./से.^{2})

हल– दिया गया है–

$u = 15$ मी./से.

$\theta = 30°$

$g = 10$ मी./से.^{2}

उड्डयन काल $$T = \frac{2u \sin \theta}{g}$$

$$= \frac{2 \times 15 \times \sin 30°}{10}$$

$$= \frac{2 \times 15 \times 0.5}{10} = 1.5 \text{ सेकण्ड}$$

उदा.51. एक कार 25 मी./से. के एक समान वेग से सरल रेखा के अनुदिश गति कर रही है। इस कार से एक प्रक्षेप्य को इस प्रकार से दागा जाता है कि यह 100 मीटर दूरी तय करने के पश्चात् पुनः कार पर लौट आए। तब प्रक्षेप्य की चाल की गणना कीजिए।

हल– उड्डयन काल $$T = \frac{100}{25} = 4 \text{ सेकण्ड}$$

अतः अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचने में लगा समय

$t = 2$ सेकण्ड

अधिकतम ऊँचाई पर अन्तिम वेग $v = 0$

$$\therefore \quad v = u - gt$$

$$0 = u - 9.8 \times 2$$

$\Rightarrow \quad u = 19.6$ मी./से.

उदा.52. **एक बंदूक से गोली 160 मी./से. वेग से छोड़ी जाती है। निम्न की गणना कीजिए-**

(i) वह अधिकतम दूरी जहाँ तक इसे प्रक्षेपित किया जा सके।

(ii) वस्तु द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई। ($g = 10$ मी./से.^{2})

हल– दिया गया है–

$u = 160$ मी./से.

(i) $$R_{max} = \frac{u^2}{g} = \frac{(160)^2}{10} = 2560 \text{ मीटर}$$

(ii) $$h_{max} = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$$

(अधिकतम क्षैतिज परास की स्थिति में $\theta = 45°$.)

$$h_{max} = \frac{u^2(\sin 45°)^2}{2g}$$

$$= \frac{(160)^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{2\times 10}$$

$$= \frac{160\times 160}{2\times 2\times 10}$$

$= 640$ मीटर

उदा. 53. **एक कण को क्षैतिज से α कोण पर u वेग से फेंका जाता है। एक दूसरे कण को ऊर्ध्वाधर से α कोण पर उसी वेग से फेंका जाता है। दोनों कणों के उड्डयन कालों का अनुपात क्या होगा? कणों की क्षैतिज परासों का अनुपात क्या होगा? कणों की ऊर्ध्व परासों का अनुपात क्या होगा?**

हल– उड्डयन काल $T = \frac{\sin\theta}{g}$

$\Rightarrow \quad T \propto \sin\theta$

$$\therefore \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$= \tan\alpha$

क्षैतिज परास $$R = \frac{u^2\sin 2\theta}{g}$$

$\Rightarrow \quad R \propto \sin 2\theta$

$$\therefore \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{\sin(\pi - 2\alpha)}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{1}$$

ऊर्ध्वपरास $$h = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$$

$\Rightarrow \quad h \propto \sin^2\theta$

$$\Rightarrow \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{\tan^2\alpha}{1}$$

उदा.54. **किसी प्रक्षेप्य का उड्डयन काल उसके क्षैतिज परास से निम्न समीकरण द्वारा सम्बन्धित है-**

$$\mathbf{gT^2 = 2R}$$

इसके प्रक्षेपण कोण का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $gT^2 = 2R$

$$\Rightarrow \quad g\left(\frac{2u\sin\theta}{g}\right)^2 = 2\left(\frac{u^2\sin 2\theta}{g}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4u^2\sin^2\theta}{g} = \frac{2\times 2u^2\sin\theta\cos\theta}{g}$$

$\Rightarrow \quad \sin\theta = \cos\theta$

$\Rightarrow \quad \tan\theta = 1 = \tan 45°$

$\therefore \quad \theta = 45°$

उदा.55. **एक पत्थर को क्षैतिज से θ कोण पर फेंके जाने पर वह अधिकतम ऊँचाई h तक पहुँचता है। पत्थर के उड्डयन काल की गणना कीजिए।**

हल– अधिकतम ऊँचाई

$$h = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$$

$\Rightarrow \quad u^2\sin^2\theta = 2hg$

$\Rightarrow \quad u\sin\theta = \sqrt{2hg}$ ...(1)

उड्डयन काल $$T = \frac{2u\sin\theta}{g}$$

$\therefore$ समी. (1) से

$$T = \frac{2\sqrt{2hg}}{g} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$$ ...(2)

पाठ्यपुस्तक के प्रश्न

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. **कणों के गतिकीय व्यवहार से सबंधित अध्ययन की भौतिकी की शाखा क्या कहलाती है?**

उत्तर– गतिकी

प्र.2. **एकविमीय, द्विविमीय एवं त्रिविमीय गति में कितने-कितने निर्देशांक होते हैं?**

उत्तर- एकविमीय गति में एक निर्देशांक, द्विविमीय गति में दो निर्देशांक तथा त्रिविमीय गति में तीन निर्देशांक होते है।

प्र.3. जब कोई कण या कणों का निकाय किसी निश्चित अक्ष के परित: घूर्णन करे तो यह कौनसी गति कहलाती है?

उत्तर- घूर्णन गति

प्र.4. वृत्ताकार गति में एक चक्र में विस्थापन कितना होता है?

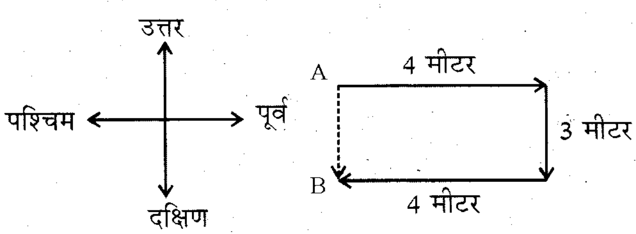
उत्तर- शून्य, क्योंकि एक चक्र में प्रारंभिक व अंतिम स्थितियाँ एक ही स्थान पर होती हैं।

प्र.5. चाल का सूत्र लिखिए।

उत्तर- चाल= $\frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$

प्र.6. यदि एक व्यक्ति 4 मीटर पूर्व फिर 3 मीटर दक्षिण तथा पुन: वहाँ से 4 मीटर पश्चिम चले तो उसका विस्थापन कितना होगा?

उत्तर-



चित्र 3.38

चित्र की ज्यामिती से प्रारंभिक स्थिति A तथा अंतिम स्थिति B हो तो व्यक्ति का विस्थापन 3 मीटर दक्षिण की ओर होगा।

प्र.7. ऋणात्मक त्वरण को क्या कहते है?

उत्तर- ऋणात्मक त्वरण को मंदन कहते है।

प्र.8. एकांक समय में तय विस्थापन को क्या कहते हैं?

उत्तर- किसी वस्तु द्वारा एकांक समय में तय विस्थापन वस्तु का वेग कहलाता है।

प्र.9. विस्थापन-समय वक्र का ढ़ाल क्या बताता है?

उत्तर- विस्थापन-समय वक्र का ढ़ाल वेग प्रदर्शित करता है।

प्र.10. वेग-समय वक्र का ढ़ाल क्या बताता है?

उत्तर- वेग-समय वक्र का ढ़ाल त्वरण प्रदर्शित करता है।

प्र.11. वेग-समय वक्र का क्षेत्रफल क्या दर्शाता है?

उत्तर- वेग-समय वक्र का क्षेत्रफल विस्थापन प्रदर्शित करता है।

प्र.12. यदि कोई कण एक नियत वेग से गतिशील है तो उसका त्वरण कितना होगा?

उत्तर- शून्य

प्र.13. किसी वस्तु को अधिकतम दूरी तक प्रक्षेपित करने हेतु उसे कितने डिग्री कोण से प्रक्षेपित किया जाना चाहिए?

उत्तर- किसी वस्तु को अधिकतम क्षैतिज दूरी तक प्रक्षेपित करने के लिए उसे क्षैतिज से 45° कोण से प्रक्षेपित किया जाना चाहिए।

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. गति की अवधारणा समझाइये।

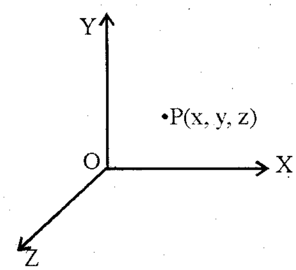
उत्तर- यदि किसी निर्देश तंत्र के सापेक्ष किसी वस्तु के एक या अधिक निर्देशांक (x,y,z) समय के साथ परिवर्तित होते हैं तब वस्तु गति की अवस्था में होती हैं। गति सापेक्ष पद है जो कि निर्देश तंत्र पर निर्भर करती है।

प्र.2. निर्देश तंत्र को परिभाषित करते हुए उसकी आवश्यकता एवं महत्व पर संक्षिप्त विवरण दीजिये।

उत्तर- अनुच्छेद 3.2 पर देखें।

प्र.3. कार्तीय निर्देश तंत्र का चित्र बनाकर विवरण दीजिये।

उत्तर- कार्तीय निर्देश तंत्र में तीन परस्पर लम्बवत् अक्ष होते हैं जिन्हें x, y तथा z अक्ष कहते हैं। इस अक्षों के कटान बिन्दु को मूल बिन्दु (o) कहते हैं तथा यह संदर्भ बिन्दु होता है।



चित्र 3.39

किसी वस्तु के निर्देशांक (x,y,z) निकाय के सापेक्ष वस्तु की स्थिति को निरूपित करते हैं। कार्तीय निर्देश पद्धति में दो प्रकार की निर्देशांक पद्धति प्रयुक्त की जाती है (i) वामावर्ती निर्देशांक पद्धति (ii) दक्षिणावर्ती निर्देशांक पद्धति।

प्र.4. निर्देश तंत्र के आधार पर गति को कितने प्रकार से वर्गीकृत किया गया है, नाम लिखिए।

उत्तर- निर्देश तंत्र के आधार पर गति को तीन प्रकार से वर्गीकृत किया गया है:

(1) एकविमीय गति (2) द्विविमीय गति (3) त्रिविमीय गति

प्र.5. दूरी एवं विस्थापन में क्या अन्तर है? लिखिए।

उत्तर- (i) गतिशील कण के लिए दूरी कभी ऋणात्मक अथवा शून्य नहीं हो सकती जबकि विस्थापन हो सकता है। शून्य विस्थापन का तात्पर्य है कि गतिशील वस्तु अपनी प्रारंभिक स्थिति पर पुन: आ चुकी है अर्थात > 0 परन्तु विस्थापन = अथवा < 0

(ii) गतिशील कण के लिए दूरी समय के साथ कभी घट नहीं सकती है, जबकि विस्थापन समय के साथ घट सकता है। समय के साथ विस्थापन घटने का तात्पर्य है कि कण प्रारंभिक स्थिति की ओर गतिशील है।

(iii) दो बिन्दुओं के मध्य गति के लिए विस्थापन अद्वितीय (Unique) फलन होता है जबकि दूरी वास्तविक पथ पर निर्भर करती है तथा इसके अनन्त मान हो सकते हैं।

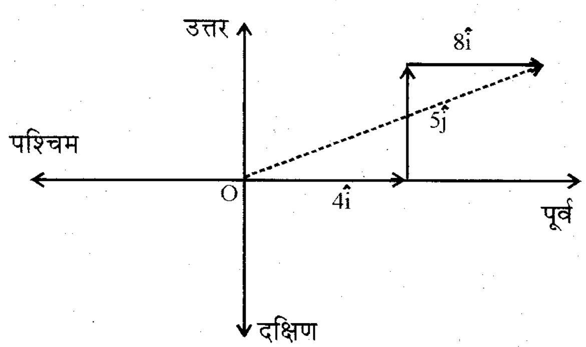
प्र.6. स्थानान्तरीय गति का विवरण देते हुए इसे उदाहरण सहित समझाइये।

उत्तर- जब गति करता हुआ कण किसी निर्देश तंत्र के सापेक्ष एक स्थिति से दूसरी स्थिति पर स्थानान्तरित होता है तब कण की गति स्थानान्तरीय गति कहलाती है।

इस गति में किसी वस्तु पर किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा वस्तु की सम्पूर्ण गति के दौरान स्वयं के समान्तर रहती है। जैसे-सीधी सड़क पर वाहन की गति, निश्चित ऊँचाई से गिर रही वस्तु की ऊर्ध्व गति आदि।

प्र.7. एक व्यक्ति 4 मीटर पूर्व में चलकर 5 मीटर उत्तर की ओर जाता है तथा वहाँ से पुनः दांयी ओर मुड़कर 8 मीटर सीधा जाता है। व्यक्ति द्वारा चली गई दूरी तथा उसका विस्थापन ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



चित्र 3.40

प्रश्नानुसार चित्र की ज्यामिती से व्यक्ति द्वारा चली गई दूरी = 4 + 5 + 8 = 17 मीटर

कुल विस्थापन = $4\hat{i} + 5\hat{j} + 8\hat{i} = 12\hat{i} + 5\hat{j}$

विस्थापन का परिमाण = $\sqrt{(12^2 + (5)^2}$

$= \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$ मीटर

प्र.8. औसत व तात्क्षणिक वेग में अन्तर उदाहरण सहित समझाइये।

उत्तर- **औसत वेगः** किसी वस्तु के कुल विस्थापन तथा उस विस्थापन में लगे कुल समय के अनुपात को औसत वेग कहते हैं।

तात्क्षणिक वेगः किसी निश्चित समय या क्षण पर वस्तु के वेग को तात्क्षणिक वेग कहते हैं।

जब किसी वस्तु द्वारा निश्चित दिशा में समान समयान्तरालों में समान दूरी तय की जाती है तब वस्तु का वेग एक समान होता है। इस स्थिति में औसत वेग व तात्क्षणिक वेग का मान बराबर होता है। जबकि एक ही दिशा में चलती हुई वस्तु समान समयान्तरालों में भिन्न-भिन्न दूरियाँ तय करती है तब उसका वेग परिवर्ती होता है। इस स्थिति में वस्तु का औसत वेग ज्ञात करते हैं।

प्र.9. एक धावक 1000 मीटर त्रिज्या के एक वृत्ताकार पथ का चक्कर 2 मिनट 5 सेकण्ड में लगाता है। उसकी माध्य चाल क्या है? धावक का माध्य वेग क्या है?

उत्तर- वृत्ताकार पथ पर माध्य चाल =

$$\frac{\text{कुल दूरी}}{\text{दूरी तय करने में लगा कुल समय}} = \frac{\text{परिधि}}{\text{समय}}$$

$$\text{माध्य चाल} = \frac{2\pi r}{t} \qquad \because r = 1000 \text{ मीटर}$$

$$\text{माध्य चाल} = \frac{2\times3.14\times1000}{125} \qquad t = 2 \text{ मिनट } 5 \text{ सेकण्ड}$$

$$= 50.24 \frac{\text{मीटर}}{\text{सेकण्ड}} \qquad = 125 \text{ सेकण्ड}$$

$$\text{माध्य वेग} = \frac{\text{कुल विस्थापन}}{\text{विस्थापन में लगा कुल समय}}$$

$= 0 \qquad \because$ कुल विस्थापन = शून्य

प्र.10. 1 किमी लम्बाई की ट्रेन 2 किमी प्रति मिनट के वेग से जा रही है। इसे 1 किमी लम्बाई की सुरंग से पूर्णतः निकलने में कितना समय लगेगा?

उत्तर- सुरंग को पार करने में तय की जाने वाली दूरी = ट्रेन की लम्बाई + सुरंग की लम्बाई = कुल लम्बाई

$$\text{समय} = \frac{\text{कुल लम्बाई}}{\text{वेग}}$$

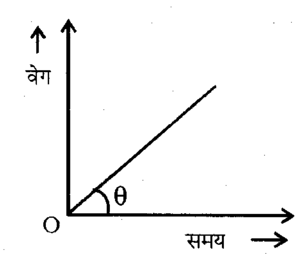
$\because$ कुल लम्बाई = 1 + 1 = 2 किमी

$$\text{वेग} = 2\ \frac{\text{किमी}}{\text{मिनट}}$$

$$\therefore \text{ समय} = \frac{2}{2} = 1 \text{ मिनट}$$

प्र.11. एक समान त्वरित गति हेतु वेग-समय आरेख खींचिए। इस आरेख का ढाल क्या निरूपित करेगा?

उत्तर-



चित्र 3.41

इस आरेख का ढाल त्वरण को व्यक्त करता है।

प्र.12. एक गेंद को u वेग से ऊर्ध्वाधर ऊपर फेंकनें पर यह h ऊँचाई तक जाती है। यदि वेग को दुगुना (2u) कर दें तो ऊँचाई पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

उत्तर- यदि किसी वस्तु को u वेग से ऊर्ध्वाधर फेंकने पर वस्तु h ऊँचाई तक जाती है तो गति के तृतीय समीकरण से

$v^2 = u^2 - 2gh$ ∵ अधिकतम ऊँचाई के लिए $v = 0$

$0 = u^2 - 2gh$

$\Rightarrow \quad h = \dfrac{u^2}{2g}$

∴ ऊंचाई $h \propto u^2$

अब वेग को दुगुना करने पर ऊँचाई चार गुनी हो जायेगी।

प्र.13. प्रक्षेप्य गति किसे कहते हैं?

उत्तर- जब कोई पिण्ड आकाश में निश्चित वेग से फेंके जाने के पश्चात् पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र में स्वतन्त्रतापूर्वक गति करता है तब उसे प्रक्षेप्य कहते हैं तथा पिण्ड की गति प्रक्षेप्य गति कहलाती है।

निबन्धात्मक प्रश्न

प्र.1. एक समान त्वरित गति हेतु गणितीय विधि से गति के तीनों समीकरण व्युत्पन्न कीजिए।

उत्तर- गणितीय विधि (Mathematical Method)

माना एक कण समान त्वरण a से एक विमीय गति कर रहा है। समय t पर कण का वेग v_1 और स्थिति x_1 तथा समय t_2 पर कण का वेग v_2 और स्थिति x_2 है। त्वरण की परिभाषा से

$$\because \quad a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$\Rightarrow \quad v_2 - v_1 = a(t_2 - t_1)$$

$$\Rightarrow \quad v_2 = v_1 + a(t_2 - t_1) \quad ...(1)$$

यदि $t_1 = 0$ पर $v_1 = u$ तथा $t_2 = t$ पर $v_2 = v$ हो तो

$$v = u + at \quad ...(2)$$

यह समान त्वरित गति की प्रथम समीकरण है।

औसत वेग का परिमाण

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

∵ समीकरण (1) से

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_1 + a(t_2 - t_1)}{2}$$

$$v_{av} = \frac{2v_1 + a(t_2 - t_1)}{2}$$

$$v_{av} = v_1 + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1) \quad ...(3)$$

परन्तु $$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$\therefore \quad \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = v_1 + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)$$

$$\Rightarrow \quad x_2 - x_1 = v_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)^2$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = x_1 + v_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)^2 \quad ...(4)$$

यदि $t_1 = 0$ पर $v_1 = u, x_1 = x_0$ तथा $t_2 = t$ पर $x_2 = x$ हो तो

$$x = x_0 + ut + \frac{1}{2}at^2 \quad ...(5)$$

यदि $x - x_0 = s$ हो तो

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \quad ...(6)$$

यह समान त्वरित गति की दूसरी समीकरण है। गति के प्रथम समीकरण से

$v = u + at$ (वर्ग करने पर)

$v^2 = (u + at)^2$

$\Rightarrow \quad v^2 = u^2 + a^2t^2 + 2uat$

$v^2 = u^2 + 2a\left(ut + \frac{1}{2}at^2\right)$

परन्तु $s = ut + \frac{1}{2}at^2$

जिससे $v^2 = u^2 + 2as$

यह समान त्वरित गति का तृतीय समीकरण है।

प्र.2. निम्न की परिभाषा दीजिए - (i) विस्थापन (ii) वेग (iii) त्वरण (iv) चाल (v) औसत वेग (vi) तात्क्षणिक वेग (vii) औसत त्वरण (viii) तात्क्षणिक त्वरण

उत्तर- अनुच्छेद 3.5.2,3.6.2.3.7, 3.6.1,3.6.2 (i) व (ii), 3.7 (i) व (ii) पर देखें।

प्र.3. आलेखीय विधि द्वारा गति के समीकरणों की व्युत्पत्ति कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 3.9.(i) पर देखें

प्र.4. सिद्ध कीजिए कि प्रक्षेप्य की गति का पथ परवलय होता है।

उत्तर- अनुच्छेद 3.12.1 पर देखें।

प्र.5. प्रक्षेप्य की गति हेतु उड्डयन काल (T), प्रक्षेप्य की अधिकतम ऊँचाई (H) व प्रक्षेप्य की क्षैतिज परास (R) हेतु व्यंजक प्राप्त कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 3.12.3, 3.12.2 तथा 3.12.4 पर देखें।

प्र.6. द्विविमीय गति हेतु कण के विस्थापन, वेग एवं त्वरण हेतु व्यंजक प्राप्त कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 3.11.1 पर देखें।

आंकिक प्रश्न

प्र.1. जयपुर से कार द्वारा अजमेर आने में 1.5 h लगता है। यदि कार का माध्य वेग 80 km/h हो तो जयपुर से अजमेर की दूरी कितनी

है?

हल– जयपुर से अजमेर की दूरी
= कार का माध्य वेग × समय
= 80 × 1.5 = 120 किमी

प्र.2. एक बस की चाल 25 km/h हो जाती है। बस का माध्य त्वरण ज्ञात कीजिए।

हल– $\text{माध्य त्वरण} = \dfrac{\text{वेग में परिवर्तन}}{\text{परिवर्तन में लगा समय}}$

$$= \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$$

$v_1 =$ किमी/घण्टा

$$= \frac{25}{3600} \text{ किमी./से.}$$

$$v_2 = \frac{70}{3600} \text{ किमी./से.}$$

$$\text{माध्य त्वरण} = \frac{\frac{27}{3600} - \frac{25}{3600}}{5} \text{ किमी./से.}^2$$

$$= \frac{45}{3600 \times 5} \text{ किमी./से}^2$$

$= 25 \times 10^{-4}$ किमी./से.^{2}

प्र.3. कार A व B, 100 km की यात्रा पर एक साथ चलती है। कार A एक समान चाल 40 km/h से चलती है। कार B, 60 km/h की चाल से चलती है किन्तु प्रथम आधा घण्टा के पश्चात् खराबी के कारण 15 min रूक जाती है तथा पुनः चलने पर उसकी चाल 50 km/h रह जाती है। उक्त यात्रा हेतु: (i) उक्त यात्रा का चाल समय वक्र बनाइए। (ii) बताइये कौनसी कार कितने समय पहले यात्रा समाप्त करेगी?

हल– पहली कार द्वारा लगा समय $= \dfrac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \dfrac{100}{40} = 2\dfrac{1}{2}$ घण्टा
= 2 घण्टा 30 मिनट

दूसरी कार द्वारा प्रथम आधे घण्टे में तय की गई दूरी
= 30 किमी.

रूकने का समय = 15 मिनट

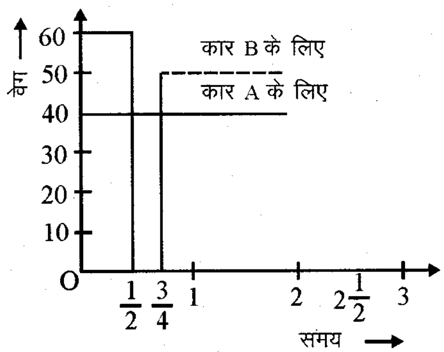
शेष दूरी = 100 – 30 = 70 किमी.

शेष दूरी में लगा समय $= \dfrac{70}{50} =$ 1 घण्टा 24 मिनट

दूसरी कार का कुल समय
= 30 + 15 + 1.24 = 2 घण्टा 9 मिनट

∴ कार B का कम समय
= 2 घण्टा 30 मिनट–2 घण्टा 9 मिनट
= 21 मिनट

∴ कार B, 21 मिनट पहले पहुँचेगी।



चित्र 3.42

प्र.4. एक स्थिर बल के प्रभाव में एक दिशा में गतिमान कण का विस्थापन निम्नानुसार दिया जाता है:

$t = \sqrt{x} + 3$ जहाँ x विस्थापन (मीटर में) व t समय (सेकण्ड में) है। जब इसका वेग शून्य हो तो कण का विस्थापन ज्ञात कीजिए।

हल– यहाँ $t = \sqrt{x} + 3$

$\sqrt{x} = t - 3 \quad \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (t-3)^2$

$\Rightarrow x = t^2 - 6t + 9$ ...(1)

वेग $v = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}(t^2 - 6t + 9)$

$v = 2t - 6$

प्रश्नानुसार $v = 0$

∵ $0 = 2t - 6 \Rightarrow \quad t = 3$ सेकण्ड

∵ सभी. (1) से

$x = (3)^2 - 6\ (3) + 9$

$x = 9 - 18 + 9 = 0$

अतः कण का विस्थापन शून्य होगा।

प्र.5. एक 200 m ऊँची मीनार से एक पिण्ड नीचे गिराया जाता है। उसी समय एक दूसरा पिण्ड ऊपर की ओर 50 m/s के वेग के से फेंका जाता है। ज्ञात कीजिए कि वे दोनों कब और कहाँ मिलेंगें?

हल– माना कि वे जमीन से h ऊँचाई पर मिलेंगे तथा समय t होगा। नीचे से फेंके गए पिण्ड के लिए–

$$h = 50t - \frac{1}{2} \times 9.8t^2$$

$$h = 50t - 4.9t^2 \quad ...(1)$$

ऊपर से गिरने वाले पिण्ड के लिए–

$$200 - h = 0 + 4.9t^2 \quad ...(2)$$

जोड़ने पर– $200 = 50t$

$$t = \frac{200}{50} = 4 \text{ सेकण्ड}$$

t का मान समीकरण (1) में रखने पर–

$h = 50 \times 4 - 4.9 \times 4 \times 4$

$= 200 - 78.4 = 121.6$ मीटर

प्र.6. 100 g द्रव्यमान का एक पिण्ड विराम अवस्था से 490 cm नीचे गिरता है तथा रेत में 70 cm धंसकर स्थिर अवस्था प्राप्त कर लेता है। रेत द्वारा पिण्ड पर लगाया गया त्वरण ज्ञात करो। (g = 9.8 मीटर/सेकण्ड^2)

हल- $v^2 = u^2 + 2gh$ $u = 0$.

$v^2 = 0 + 2 \times 9.8 \times 4.9$	$h = 4.90$ मी.
$v^2 = 9.7 \times 9.8$	$g = 9.8$ मी./से.^{2}
$v = 9.8$ मी./से.	$v = ?$

यह पिण्ड का पृथ्वी पर टकराते समय वेग है।

अतः जमीन में धँसते समय यह प्रारम्भिक वेग का कार्य करेगा।

सूत्र–

$v'^2 = u'^2 - 2as$ से अर्थात्	$u' = 9.8$ मी./से.
$0 = 9.8 \times 9.8 - 2a \times 0.7$	$v' = 0, a = ?$
$-1.4a = 9.8 \times 9.8$	$s = 0.7$ मी.

$$a = -\frac{9.8 \times 9.8}{1.4}$$

$$a = -68.60 \text{ मी./से.}^2$$

ऋणात्मक त्वरण मंदन को व्यक्त करता है।

$\because$ रेत द्वारा पिण्ड पर लगाया गया त्वरण = 68.60 मी/से^{2}

प्र.7. ऊर्ध्वाधर दिशा में गतिशील (ऊपर की ओर उठ रहे) एक हेलीकॉप्टर से 500 m की ऊँचाई से एक पत्थर गिराया जाता है तो वह 6 s पश्चात् पृथ्वी पर पहुँचता है। पत्थर को गिराते समय हेलीकॉप्टर का वेग क्या था? (g=10m/s^2)

हल- माना कि हेलीकॉप्टर का वेग u था।

डाले गए पत्थर का भी वेग $= u$ मी./से.

$h = 500, g = 10$ मी./से.^{2}

$t = 6$ से.

सूत्र– $h = ut + \frac{1}{2}gt^2$ से

$$500 = u \times 6 + \frac{1}{2} \times 10 \times 6 \times 6$$

$$500 - 180 = 6u$$

$$\frac{320}{6} = u \text{ या } u = 53.33 \text{ मी./से.}$$

प्र.8. एक व्यक्ति अपने घर से सीधी सड़क पर 5 km/h की चाल से चलकर 2.5 km दूर अपने कार्यालय जाता है तथा कार्यालय बन्द होने के कारण तत्काल 7.5 km/h की चाल से पुनः घर लौट आता है तो निम्न समयान्तरालों हेतु उसका औसत वेग तथा औसत चाल ज्ञात करो।

(i) 0 से 30 min, (ii) 0 से 50 min, (iii) 0 से 40 min

हल- $\because$ व्यक्ति का कार्यालय पहुँचने में लगा समय

$$t_1 = \frac{\text{दूरी}}{\ldots} = \frac{s}{\ldots} = \frac{2.5}{\ldots}$$

$= 0.5$ घंटे $= 30$ मिनट

तथा घर वापस आने में लगा समय

$$t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{2.5}{7.5}$$

$= 0.333$ घंटे

$= 20$ मिनट

(i) समय अन्तराल (0 – 30 मिनट) में औसत वेग

$$= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2.5}{30/60}$$

$= 5$ किमी./घंटा

तथा औसत चाल $= 5$ किमी./घंटा

(ii) समय अन्तराल (0 – 50 मिनट) में औसत वेग

$$= \frac{0}{0.5 + 0.333} = 0 \text{ किमी./घण्टा}$$

[$\because$ यात्रा में लिया गया कुल समय $= 20 + 30 = 50$ मिनट है अतः व्यक्ति घर पर वापस आ जाता है जिससे कुल विस्थापन शून्य होगा।]

$$\text{औसत चाल} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2.5 + 2.5}{0.5 + 0.333}$$

$$= \frac{5}{0.8333} = 6 \text{ किमी./घंटा}$$

(iii) समय अन्तराल (0 – 40 मिनट) में वापस लौटते समय व्यतीत समय = 10 मिनट

$\therefore$ 10 मिनट में तय दूरी = वापस लौटते समय वेग × समय

$$= 7.5 \times \frac{10}{60} = 1.25 \text{ किमी.}$$

अतः समय अन्तराल (0 – 40 मिनट) में

व्यक्ति का कुल विस्थापन $= 2.5 - 1.25$

$= 1.25$ किमी.

$$\text{अतः औसत वेग} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1.25}{40/60}$$

$= 1.875$ किमी./घण्टा

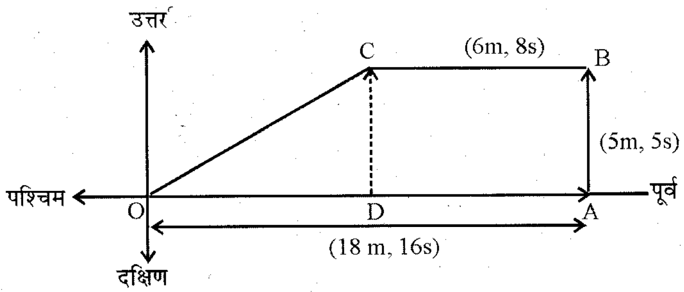
$$\text{तथा औसत} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2.5 + 1.25}{40/60}$$

$= 5.625$ किमी./घंटा

उपरोक्त स्थितियों से यह स्पष्ट है कि माध्य वेग शून्य है परन्तु माध्य चाल शून्य नहीं है अतः माध्य चाल को कुल दूरी तथा कुल समय के अनुपात के रूप में व्यक्त करना माध्य वेग के परिमाण के रूप में परिभाषित करने से अच्छा है।

प्र.9. एक व्यक्ति पूर्व दिशा में 16 s में 18 m चलकर उत्तर की ओर मुड़ जाता है तथा अब उत्तर की ओर 5 s में 5 m चुलकर पुनः बांयी ओर मुड़कर 8s में 6m सीधा चलकर रूक जाता है। इस यात्रा के दौरान व्यक्ति की औसत चाल तथा औसत वेग ज्ञात करो।

हल- चित्रानुसार व्यक्ति का गमन पथ आरेखित किया गया है।



चित्र 3.23

व्यक्ति द्वारा कुल चलित दूरी = s = OA + AB + BC

= 18m + 5m + 6m = 29m

व्यक्ति को O से C तक पहुँचने में कुल लगा समय

t = 16s + 5s + 8s = 29s

व्यक्ति का विस्थापन $= OC = \sqrt{(OD)^2 + (CD)^2}$

$= \sqrt{(OA - DA)^2 + (CD)^2}$

या $OC = \sqrt{(18-6)^2 + (5)^2}$

या $OC = \sqrt{(12)^2 + (5)^2}$ $\left\{\begin{array}{l}\because \ DA = CB = 6m \\ \text{तथा } CD = AB = 5m\end{array}\right.$

या $OC = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169}$

$OC = 13m$

$\therefore$ औसत चाल $= \frac{s}{t} = \frac{29}{29} = 1$ m/s

तथा औसत वेग $= \frac{\text{विस्थापन}}{\text{समय}} = \frac{OC}{t} = \frac{13}{29}$

$\therefore$ औसत वेग = 0.448 m/s

प्र.10. एक समान त्वरण से गतिशील वस्तु गति के दौरान 5 वें सेकण्ड में 65 m व 9 वें सेकण्ड में 105 m दूरी तय करती है तो यह 20 वें सेकण्ड में कितनी दूरी तय करेगी? गति के 20 s में चली गई कुल दूरी भी ज्ञात करो।

हल- n वें सेकण्ड में वस्तु द्वारा तय की गई दूरी

$$s_n = u + \frac{a}{2}(2n-1)$$

प्रश्नानुसार $65 = u + \frac{a}{2}(2\times5-1) = u + \frac{9a}{2}$

$\Rightarrow \quad u + \frac{9a}{2} = 65 \qquad ...1$

$105 = u + \frac{a}{2}(2\times9-1)$

$105 = u + \frac{17}{2}a$

$\Rightarrow \quad u + \frac{17a}{2} = 105 \qquad ...2$

समी. (2) में से समी. (1) को घटाने पर

$\frac{17a}{2} - \frac{9a}{2} = 40 \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{2}a = 40$

$\Rightarrow \quad a = 10 \text{ m/s}^2$

समी. (1) से $u + \frac{9\times10}{2} = 65$

$\Rightarrow u = 20$ m/s

अब 20 वें सेकण्ड में तय की गई दूरी

$S_{20} = u + \frac{a}{2}(2\times20-1)$

$S_{20} = 20 + \frac{10}{2}\times39 = 20 + 195 = 215$ मीटर

गति के 20 सेकण्ड में चली गयी कुल दूरी गति के द्वितीय समीकरण से

$s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$s = 20\times20 + \frac{1}{2}\times10\times(20)^2$

$s = 400 + 2000 = 2400$ मीटर

प्र.11 क्षैतिज से 30° का कोण बनाते हुए बन्दूक से एक गोली दागी जाती है जो 3 km दूर जाकर जमीन पर गिरती है। बन्दूक के नालमुखी वेग को अपरिवर्तित मानते हुए एवं हवा के घर्षण की उपेक्षा करते हुए क्या इससे 5 km दूर स्थित लक्ष्य को भेदा जा सकता है?

हल- दिया गया है- $\theta = 30^\circ$, R = 3 किमी. = 3000 मी.

R' = 5.0 किमी.

= 5000 मी.

$\because$ परास $R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$

$3000 = \frac{u^2 \sin 60^\circ}{9.8} = \frac{u^2 \times \sqrt{3}/2}{9.8}$

$\Rightarrow \quad u^2 = \frac{3000\times9.8\times2}{\sqrt{3}}$

परास $R' = \frac{u^2 \sin 2\theta'}{g}$

$5000 = \frac{3000\times9.8\times2}{\sqrt{3}\times9.8}\sin 2\theta'$

$\Rightarrow \quad \sin 2\theta' = \frac{5\times\sqrt{3}}{3\times2} = 1.44$

यह असंभव है, क्योंकि किसी भी कोण के लिए sine का मान एक से अधिक नहीं हो सकता। अत: इस स्थिति में लक्ष्य को नहीं भेदा जा सकता है।

प्र.12. किसी प्रक्षेप्य की परास 50 m एवं अधिकतम ऊँचाई 10 m है तो प्रक्षेपण कोण की गणना करो।

हल- प्रश्नानुसार प्रक्षेप्य की परास R = 50 मीटर

अधिकतम ऊँचाई $h_{max} = 10$ मीटर

$$\because \; R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} = 50 \qquad ...(1)$$

$$h_{max} = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g} = 10 \qquad ...(2)$$

$\because$ समी° (2) में समी° का भाग देने पर

$$\frac{u^2 \sin^2\theta}{2g} \times \frac{g}{u^2 \sin 2\theta} = \frac{10}{50}$$

$$\frac{\sin^2\theta}{2.2\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{5} \quad \because \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{4}{5} = 1.8$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}(0.8)$$

प्र.13. सिद्ध करो कि प्रक्षेप्य की अधिकतम क्षैतिज परास ऊँचाई की चार गुना होती है।

हल- $\because$ प्रक्षेप्य की क्षैतिज परास $R = \dfrac{u^2 \sin 2\theta}{g}$

प्रक्षेप्य की अधिकतम क्षैतिज परास

$$R_{max} = \frac{u^2}{g}$$

अधिकतम ऊँचाई $h_{max} = \dfrac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$

अधिकतम क्षैतिज परास के लिए

$$\theta = 45^\circ$$

$$\because \; h_{max} = \frac{u^2}{g} \cdot \frac{(\sin 45^\circ)^2}{2} = \frac{R_{max}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} = \frac{R_{max}}{4}$$

$$\because \; R_{max} = 4\, h_{max}$$