कार्य, ऊर्जा एवं शक्ति
(WORK, ENERGY AND POWER)

CHAPTER 5

5.1 प्रस्तावना (introduction)

दैनिक जीवन में हम अनेक प्रकार के कार्य करते है जैसे बोझा उठाना, साइकिल चलाना, चक्की पीसना, पत्थर तोड़ना इत्यादि; इन सभी कार्यों में वस्तु पर एक बल लगाया जाता है जो कि वस्तु को उसके स्थान से विस्थापित कर देता है। **वैज्ञानिक दृष्टि से कार्य तब ही किया हुआ माना जाता है जब वस्तु पर बल लगाने से वस्तु में विस्थापन उत्पन्न हो गया हो।**

यदि किसी वस्तु पर बल लगा देने पर वस्तु में विस्थापन नहीं हो तो वैज्ञानिक दृष्टि से हम कह सकते हैं कि कोई कार्य नहीं किया गया। उदाहरणार्थ अपने सिर पर भार रखकर एक ही स्थान पर खड़े रहने पर हम कोई कार्य नहीं करते, क्योंकि वस्तु में कोई विस्थापन उत्पन्न नहीं हुआ। हाँ, हमने भार पृथ्वी से उठाकर सिर पर रखने में गुरुत्व बल के विरुद्ध अवश्य कार्य किया है।

स्पष्ट है कि कार्य का अर्थ लाभ है प्रयास नहीं। ऐसे कार्य (परिश्रम) जो लाभदायक नहीं होते, उनको आन्तरिक कार्य (Internal Work) कहते हैं, उदाहरणतः दीवार को धकेलना, हथेली से मेज को दबाना आदि। परन्तु इन उदाहरणों में हम थकान अनुभव करते हैं। जब हम बोझा सिर पर रखकर खड़े रहते हैं तब हमारी मांस पेशियों पर तनाव पड़ता है तथा वे बार–बार सिकुड़ती व फैलती हैं; इस प्रक्रिया में मांस–पेशियाँ आन्तरिक कार्य करती है तथा शरीर की रासायनिक ऊर्जा का क्षय होता है।

वस्तु पर बल लगाकर जब इसे विस्थापित किया जाता है तो एक विरोधी बल भी उपस्थित होता है। यदि कोई विरोधी बल उपस्थित न हो तो वस्तु को विस्थापित करने में किसी बल की आवश्यकता न हो। बाह्य बल, वास्तव में इन्हीं विरोधी बलों के विरुद्ध कार्य करता है। भार उठाते समय गुरुत्व बल के विरुद्ध, हल चलाने में मिट्टी के कणों के बीच ससंजक बल के विरुद्ध तथा मशीन चलाने में घर्षण बल के विरुद्ध कार्य किया जाता है।

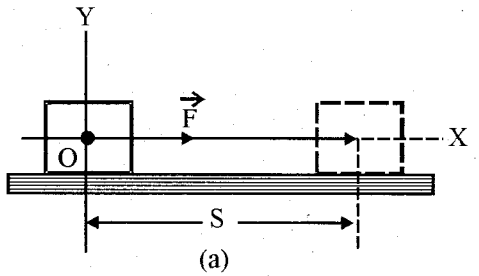
5.2 कार्य (Work)

किसी वस्तु को विस्थापित करने में जितना अधिक बल लगाना पड़ता है, कार्य उतना ही अधिक होता है। पुनः कोई बल आरोपित करने पर, वस्तु को जितनी अधिक दूरी तक विस्थापित किया जाता है, कार्य उतना ही अधिक करना पड़ता है। अतः किसी वस्तु पर आरोपित बल द्वारा किये गये कार्य का मापन आरोपित बल के परिमाण तथा बल की दिशा में उत्पन्न विस्थापन के गुणनफल से किया जाता है।

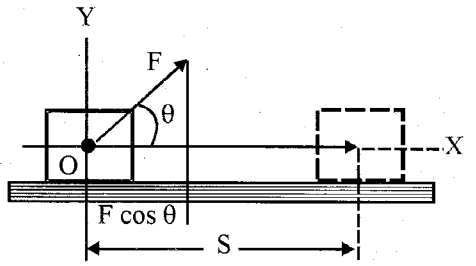
यदि कोई बल F किसी वस्तु पर कार्य करके उसे बल की दिशा में S दूरी विस्थापित कर दे, तो किया गया कार्य [चित्र–(a)]

$$W = F \times S \quad ....(1)$$

(कार्य = बल × बल की दिशा में विस्थापन)



(a)



(b)

चित्र 5.1

जब वस्तु में उत्पन्न विस्थापन बल की दिशा के अनुदिश नहीं हो अर्थात् वे एक–दूसरे के साथ कोई कोण बनाते हैं। [चित्र–(b)] तो किसी बल द्वारा किया गया कार्य विस्थापन की दिशा में बल के घटक और विस्थापन के परिमाण के गुणनफल के बराबर होता है। यदि किसी वस्तु पर F बल लगाने से उसमें बल की दिशा के साथ θ झुकाव पर S विस्थापन होता है, तो किया गया कार्य

$$W = (F \cos\theta)\, S \quad ...(2)$$

अब क्योंकि $(F \cos\theta)\, S$ बल वेक्टर $\vec{F}$ व विस्थापन वेक्टर $\vec{S}$ का अदिश गुणनफल है, वेक्टर निरूपण में

$$W = \vec{F}.\vec{S}$$

अतः किसी वस्तु पर आरोपित बल द्वारा किया गया कार्य उस पर आरोपित बल और विस्थापन के अदिश गुणनफल के बराबर होता है। कार्य एक अदिश राशि है।

विशिष्ट स्थितियाँ (Special Cases)–

(i) जब वस्तु पर कार्यरत बल ($\vec{F}$) व विस्थापन ($\vec{S}$) एक ही दिशा में हों तब $\theta = 0°$

$\therefore \quad W = FS$

$[\because \theta = 0°$ हो तब $\cos 0° = 1]$

इसे धनात्मक कार्य भी कहते हैं। यह अधिकतम होगा।

उदाहरण के लिये (a) जब कोई व्यक्ति धरातल पर स्थित किसी वस्तु को खींचता है तब आरोपित बल व विस्थापन समान दिशा में होते हैं। अतः व्यक्ति द्वारा किया गया कार्य धनात्मक होता है। (b) m द्रव्यमान की एक वस्तु पृथ्वी की सतह से h ऊँचाई से स्वतंत्रतापूर्वक गिरती है। जिस पर गुरुत्वीय बल $F = mg$ है। अतः गुरुत्वीय बल व विस्थापन एक ही दिशा में होंगे अतः गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य

$$W = mgh$$

धनात्मक व अधिकतम होगा।

(ii) जब वस्तु पर कार्यरत बल ($\vec{F}$) व विस्थापन ($\vec{S}$) विपरीत दिशा में एक ही रेखा के अनुदिश होते हैं तब $\theta = 180°$

$\therefore \quad W = -FS$

$[\because \theta = 180°$ हो तब $\cos 180° = -1]$

इसे ऋणात्मक कार्य भी कहते हैं।

उदाहरण के लिये

(a) जब किसी वस्तु को खुरदरे धरातल पर खींचा जाता है तब घर्षण बल तथा विस्थापन परस्पर विपरीत दिशा में होते हैं। अतः घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होता है।

(b) जब किसी गतिशील गाड़ी पर ब्रेक लगाए जाते हैं तो अवरोधक बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होता है। इसका कारण यह है कि अवरोधक बल तथा गाड़ी का विस्थापन एक–दूसरे के विपरीत दिशा में होता है।

(c) यदि m द्रव्यमान के पिण्ड को पृथ्वी की सतह से h ऊँचाई पर फेंका जाता है तो गुरूत्वीय बल के विरुद्ध किया गया कार्य

$$W = mgh \cos 180°$$
$$= -mgh$$

(iii) यदि $\vec{F}$ व $\vec{S}$ एक दूसरे के लम्बवत् है तो

$$W = \vec{F}.\vec{S} = FS\cos 90° = 0$$

$[\because \theta = 90°$ तथा $\cos 90° = 0]$

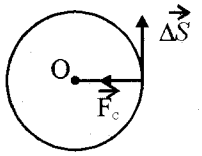
अर्थात् किसी वस्तु को बल की दिशा के अभिलम्बवत् विस्थापित करने में बल के विरुद्ध कार्य नहीं करना पड़ता।

उदाहरणार्थ-

(a) यदि कोई कुली अपने सिरे पर बोझा रखकर प्लेटफार्म पर चलता है तो वह गुरूत्व के विरुद्ध कार्य नहीं करता है क्योंकि वस्तु का विस्थापन गुरूत्व बल (जो ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर कार्य करता है) के लम्बवत् है।

(b) इसी प्रकार, जब कोई कृत्रिम उपग्रह पृथ्वी के चारों ओर परिक्रमण करता है तो उस पर कार्यकारी अभिकेन्द्रीय बल की दिशा, उसकी गति की दिशा के लम्बवत् होती है। फलतः पृथ्वी के आकर्षण बल के विरुद्ध, उपग्रह को अपनी कक्षा में रहने के लिए कोई कार्य नहीं करना पड़ता है। यदि उपग्रह पर कार्यकारी वायु प्रतिरोध बल नगण्य हो तो उपग्रह की चाल एवं ऊर्जा नियत रहेगी।

(c) यदि कोई वस्तु किसी वृत्ताकार पथ पर नियत चाल से गतिमान है तो प्रत्येक बिन्दु पर अभिकेन्द्रीय बल (केन्द्र की ओर) तथा वस्तु का विस्थापन एक–दूसरे के लम्बवत् होंगे। अतः अभिकेन्द्रीय बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होगा।



चित्र 5.2

(iv) यदि वस्तु का विस्थापन शून्य है जैसे कोई कुली भार को अपने सिर पर रख कर खड़ा है तो वह कोई कार्य नहीं कर रहा है बल का परिमाण कितना भी अधिक क्यों न हो।

(v) यदि बल शून्य है जैसे किसी चिकनी क्षैतिज मेज पर गतिमान पिंड पर कोई बल कार्य नहीं करता है (घर्षण नहीं है) परंन्तु विस्थापन काफी अधिक हो सकता है।

उदा.1. कोई साइकिल सवार ब्रेक लगाने पर फिसलता हुआ 10m दूरी जाकर रुकता है। इस प्रक्रिया की अवधि में, सड़क द्वारा साइकिल पर लगाया गया बल 200 N है जो उसकी गति के विपरीत है।

(a) सड़क द्वारा साइकिल पर कितना कार्य किया गया?

(b) साइकिल द्वारा सड़क पर कितना कार्य किया गया?

हल– प्रश्नानुसार सड़क द्वारा साइकिल पर आरोपित बल घर्षण बल है जो साइकिल की गति के विपरीत है जिससे

$\theta = 180°$

$F = 200$ न्यूटन

$S = 10$ मीटर

(a) सड़क द्वारा साइकिल पर किया गया कार्य

$$W = FS\cos\theta$$
$$= 200 \times 10 \times \cos 180°$$
$$[\because \cos 180° = -1].$$
$$= -2000 \text{ जूल}$$

इस ऋणात्मक कार्य के कारण साइकिल रूक जाती है।

(b) गति के तृतीय नियमानुसार सड़क द्वारा साइकिल पर आरोपित बल का परिमाण = साइकिल द्वारा सड़क पर आरोपित बल का परिमाण = 200 न्यूटन

∵ सड़क का विस्थापन S = 0 मीटर

अतः साइकिल द्वारा सड़क पर किया गया कार्य

= 0 जूल

उदा.2. 8 kg की एक वस्तु को 2.5 m की उँचाई तक ले जाने में किया गया कार्य ज्ञात कीजिये।

(पुस्तक का उदाहरण 5.1)

हल- दिया गया है:

m=8 kg , S =2.5 m ,W = ?

$W = FS = mgS = 8 \times 9.8 \times 2.5$

W = 196 जूल

उदा.3. यदि एक 20 kg के पिण्ड को पृथ्वी की सतह पर 20 m विस्थापित किया जाये तथा यदि तल घर्षण रहित हो, तो गुरूत्वाकर्षण बल द्वारा किये गये कार्य की गणना कीजिये। (पुस्तक का उदाहरण 5.2)

हल- दिया गया है: m = 20 kg , S =20m,

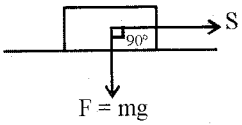
W=?

किया गया कार्य $W = FS\cos\theta$

$\because \theta = 90^\circ$

$\because S = mgS\cos 90^\circ$

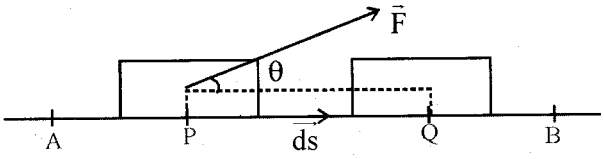
$W = 20 \times 9.8 \times 20 \times 0 = 0$



चित्र 5.2 (a)

5.3 परिवर्ती बल द्वारा किया गया कार्य (Work done by variable force)

अभी तक हमने नियत बल के अन्तर्गत किये गये कार्य की गणना की है। परिवर्ती बल के अन्तर्गत माना कि किसी वस्तु को चित्रानुसार स्थिति A से स्थिति B पर विस्थापित करना है। माना कि S_A तथा S_B निर्देश बिन्दु के सापेक्ष A व B की स्थितियाँ है।



चित्र 5.3

अब यदि किसी स्थिति P पर बल $\vec{F}$ है तथा इस बल के अर्न्तगत वस्तु को स्थिति Q तक $\vec{ds}$ अल्प विस्थापित किया जाता है तब इस अल्प विस्थापन के अन्तर्गत बल $\vec{F}$ को नियत लेने पर वस्तु को P से Q तक विस्थापित करने में किया गया गया अल्प कार्य

$$dw = \vec{F}.\vec{ds} \quad \ldots(1)$$

यदि $\vec{ds} \to 0$ हो तो वस्तु को स्थिति A से B तक विस्थापित करने में किया गया कुल कार्य $W = \int_{S_A}^{S_B} \vec{F}.\vec{ds}$ ...(2)

उदा.- जब किसी कमानी को खींचा जाता है तब प्रत्यानयन बल F उसके विस्थापन x के समानुपाती होता है अर्थात्

$F \propto -x \Rightarrow F = -Kx$ जहाँ K कमानी का बल नियतांक है। इस प्रकार F एक परिवर्ती बल है जिसका मान x के साथ परिवर्तित होता है।

उदा.4. 5 kg द्रव्यमान का एक पिण्ड $F = 2x$ न्यूटन बल के प्रभाव से $x = 0$ से $x = 4$ m दूरी तक विस्थापित होता है तो उस पर किये गये कार्य की गणना कीजिये। (पुस्तक का उदाहरण 5.3)

हल- दिया गया है: m=5 kg , F = 2x न्यूटन,

विस्थापन x = 0 से x = 4 m तक

W=?

∵ बल परिवर्ती बल है। अत: किया गया कार्य

$$w = \int_0^x F dx = \int_0^4 2x dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$$= \left[x^2\right]_0^4 = (4)^2 - (0)^2 = 16 \text{ जूल}$$

उदा.5. 4 kg द्रव्यमान के पिण्ड पर एक नियत बल $\vec{F} = (4\hat{i} - 6\hat{j} + 8\hat{k})$N कार्यरत है तो उसे $x = 0$ से $x = 10$ m तक विस्थापित करने में बल द्वारा किये कार्य की गणना कीजिये। (पुस्तक का उदाहरण 5.4)

हल- दिया गया है: m = 4 Kg , $\vec{F} = (4\hat{i} - 6\hat{j} + 8\hat{k})$ न्यूटन

विस्थापन x = 0 से x=10 मी तक

W = ?

∵ बल का मान नियत है। अत: किया गया कार्य $W = \vec{F}.\vec{S}$

$\because \vec{S} = 10\ \hat{i}$ मीटर

$\because W = (4\hat{i} - 6\hat{j} + 8\hat{k}).10\hat{i}$

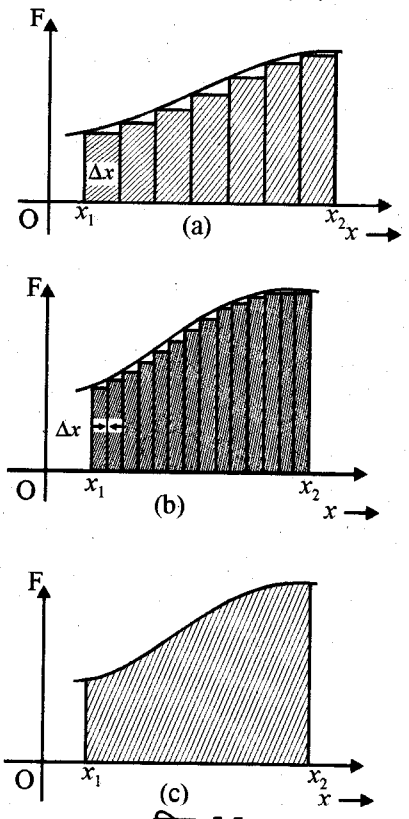
W = 40 जूल

5.3.1 (अ) बल-विस्थापन ग्राफ से कार्य का परिकलन (Calculation of work from force - displacement graph)

एक वस्तु पर आरोपित बल व उससे उत्पन्न विस्थापन में ग्राफ को चित्र (a) में दर्शाया गया है। बल F तथा उससे उत्पन्न विस्थापन x एक ही दिशा में हैं। वस्तु पर परिवर्ती बल F लगाने से उसकी स्थिति x_1 से x_2 विस्थापित हो जाती है। कार्य की गणना के लिए x_1 से x_2 तक की दूरी को विस्थापन के अल्प अन्तरालों Δx में विभक्त करते हैं। इन बिन्दुओं को लेकर उन पर कोटियाँ (Ordinates)

खींचते हैं। इस प्रकार वक्र के नीचे का क्षेत्रफल Δx चौड़ाई की आयताकार पट्टियों में बंट जाता है। किसी विस्थापन x पर खींची गई कोटि वस्तु पर कार्यकारी बल F के बराबर है। यदि हम यह मान लें कि विस्थापन x तथा $x + \Delta x$ के बीच बल F का मान नियत रहता है, तो x व $x + \Delta x$ के बीच आयत का क्षेत्रफल $F(\Delta x)$ होगा क्योंकि इसकी ऊँचाई F है तथा चौड़ाई Δx है। अतः किया गया कार्य

$$\Delta W = F(\Delta x)$$



चित्र 5.5

इसी प्रकार अन्य आयताकार पट्टियों के बीच भी बल F का मान नियत माना जा सकता है। स्पष्ट है कि इस प्रकार के सभी आयतों का क्षेत्रफल, उसके विस्थापन अन्तराल में किये गये कार्य के बराबर होता है। अतः विस्थापन x_1 व x_2 के बीच किया हुआ कुल कार्य इन सभी आयतों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होगा। यदि कुल कार्य को W से प्रदर्शित करे तो

$$W = \sum_{x_1}^{x_2} F(\Delta x)$$

यहाँ ग्रीक अक्षर (सिग्मा) Σ, x_1 व x_2 के बीच सभी विस्थापन अन्तरालों का योग बताता है। उपरोक्त सूत्र का दायाँ पद x_1 व x_2 के बीच सभी आयतों का क्षेत्रफल प्रदर्शित करता है। विस्थापन अन्तराल Δx जितना छोटा होगा, आयतों के क्षेत्रफलों का योग वक्र के नीचे x_1 व x_2 के बीच वाले क्षेत्रफल के उतना ही अधिक बराबर होगा। यदि हम x_1 से x_2 तक के विस्थापन को और छोटे अन्तरालों में विभक्त करे (चित्र b) जिससे Δx का मान और भी छोटा हो जाये, तो वक्र के नीचे का क्षेत्रफल आयतों के क्षेत्रफल के और अधिक सन्निकट होगा Δx के अनन्त सूक्ष्म होने पर $(\Delta x \to 0)$ बल F द्वारा किया गया कार्य $F - x$ वक्र के नीचे x_1 व x_2 के बीच घिरे क्षेत्रफल के बराबर हो जायेगा। (चित्र c) इस प्रकार

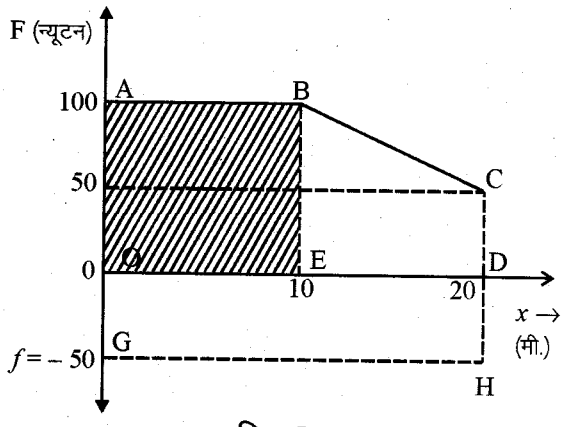
$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_1}^{x_2} F(\Delta x) = \int_{x_1}^{x_2} F(dx)$$

यहाँ समाकल्य $\int_{x_1}^{x_2} F(dx)$ का मान वक्र के नीचे x_1 व x_2 के बीच वाले क्षेत्रफल के ठीक बराबर है। स्पष्ट है कि किसी वस्तु को परिवर्ती बल F द्वारा x_1 से x_2 तक विस्थापित करने में किया गया कार्य W, बल विस्थापन वक्र के नीचे x_1 व x_2 के बीच क्षेत्रफल के बराबर होता है। यदि बल के परिमाण के साथ-साथ इसकी दिशा भी परिवर्तित होती हो तो किया गया कार्य

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}.\overrightarrow{dx}$$

उदा.6. कोई स्त्री खुरदरी सतह वाले रेलवे प्लेटफार्म पर संदूक को खिसकाती है। वह 10 m की दूरी तक 100 N का बल आरोपित करती है। उसके पश्चात्, उत्तरोत्तर वह थक जाती है और उसके द्वारा आरोपित बल रेखीय रूप से घटकर 50 N हो जाता है। संदूक को कुल 20 m की दूरी तक खिसकाया जाता है। स्त्री द्वारा संदूक पर आरोपित बल और घर्षण बल जो कि 50 N है, तथा विस्थापन के बीच ग्राफ खींचिए। दोनों बलों द्वारा 20 m तक किए गए कार्य का परिकलन कीजिए।

हल– प्रश्नानुसार आरोपित बल का आलेख निम्न प्रकार बनाया जा सकता है–



चित्र 5.4

∵ घर्षण बल, आरोपित बल के विपरीत दिशा में होता है। इसलिए घर्षण बल को चित्र में ऋणात्मक बल अक्ष पर दर्शाया गया है।

(i) स्त्री द्वारा किया गया कार्य

= आयत OABE का क्षेत्रफल + समलम्ब चतुर्भुज BCDE का

क्षेत्रफल

$$= 100 \times 10 + \frac{1}{2}(100 + 50) \times 10$$

$$= 1000 + \frac{1}{2} \times 150 \times 10$$

$$= 1000 + 750$$

$$= 1750 \text{ जूल}$$

[∵ समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ समान्तर भुजाओं का योग × उनके बीच की दूरी]

(ii) घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य

= आयत OGHD का क्षेत्रफल

$= (-50) \times 20$

$= -1000$ जूल

यहाँ ऋणात्मक चिन्ह क्षेत्रफल के बल अक्ष के ऋणात्मक दिशा में होने से है।

5.4 ऊर्जा एवं ऊर्जा के रूप (Energy and types of energy)

किसी वस्तु द्वारा कार्य करने की कुल क्षमता (Capacity of doing work) **ऊर्जा कहलाती** है। किसी वस्तु में निहित ऊर्जा का मापन उस कुल कार्य से किया जाता है जिसे वस्तु अपनी वर्तमान अवस्था से उस अवस्था में आने तक कर सकती है जबकि वह कार्य करने के योग्य न रहे अर्थात् शून्य ऊर्जा वाली स्थिति में आने तक करती है। इस प्रकार, किसी वस्तु द्वारा किया गया कार्य ही ऊर्जा का माप है। ऊर्जा को कार्य से मापने के कारण ऊर्जा तथा कार्य के मात्रक एक ही होते हैं। प्रकृति में ऊर्जा अनेक रूपों में पायी जाती है। ऊर्जा के कुछ सामान्य रूप निम्न हैं–

(i) **यांत्रिक ऊर्जा**–किसी वस्तु में ऊर्जा, वस्तु की गति के कारण अथवा किसी बल क्षेत्र में उसकी विशेष स्थिति के अभिविन्यास (configuration) के कारण हो सकती है। इस परिस्थिति में उत्पन्न ऊर्जा को यांत्रिक ऊर्जा कहते हैं। उदाहरण के लिये गतिशील कार की ऊर्जा, छत पर रखी पानी की टंकी में पानी की ऊर्जा इत्यादि यांत्रिक ऊर्जा के उदाहरण हैं।

यांत्रिक ऊर्जा में गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा निहित होती है।

(ii) **आन्तरिक ऊर्जा**–किसी वस्तु में उसके ताप या अन्तर आणविक बलों के कारण संचित की गई ऊर्जा आंतरिक ऊर्जा कहलाती है। अतः प्रत्येक वस्तु में अणु होते हैं, जो एक दूसरे के सापेक्ष कंपन करते रहते हैं। वस्तु में अणुओं की गति के कारण गतिज ऊर्जा तथा आणविक बलों के कारण स्थितिज ऊर्जा उपस्थित होती है। वास्तव में वस्तु की आन्तरिक ऊर्जा अणुओं की गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा का योग होती है। वस्तु का ताप बढ़ने के साथ–साथ, उसकी आंतरिक ऊर्जा में भी वृद्धि होती है।

(iii) **ऊष्मीय या तापीय ऊर्जा**–ऊष्मा, ऊर्जा का एक रूप है और यह तापीय ऊर्जा भी कहलाती है। किसी वस्तु में ऊष्मीय ऊर्जा अणुओं के अव्यवस्थित विचरण के कारण उत्पन्न होती है।

भाप में ऊष्मीय ऊर्जा होती है। भाप ईंजन में ऊष्मा उपयोगी यांत्रिक कार्य करने में प्रयुक्त होती है। 1 किग्रा. जल 10°C ठण्डा होने पर 4.2×10^4 जूल ऊर्जा मुक्त करता है।

(iv) **रासायनिक ऊर्जा**–किसी रासायनिक यौगिक की ऊर्जा तथा उस रासायनिक यौगिक की रचना करने वाले तत्वों की ऊर्जा में अन्तर, रासायनिक ऊर्जा कहलाता है अर्थात् रासायनिक ऊर्जा, रासायनिक यौगिक के परमाणुओं में उपस्थित बंधों के कारण होती है। रासायनिक अभिक्रिया में रासायनिक ऊर्जा का समावेश होता है।

वास्तव में रासायनिक ऊर्जा के उत्पन्न होने का कारण रासायनिक क्रिया में भाग लेने वाले विभिन्न अणुओं की बंधन ऊर्जाएँ भिन्न–भिन्न होना है। किसी रासायनिक क्रिया में ऊर्जा या तो उत्पन्न होती है या अवशोषित होती है। यदि क्रिया करने वाले अणुओं की कुल बंधन ऊर्जा, क्रिया में उत्पन्न होने वाले अणुओं की कुल बंधन ऊर्जा से अधिक है, तो क्रिया में ऊष्मीय ऊर्जा मुक्त होती है तथा क्रिया ऊष्माक्षेपी (exothermic) कहलाती है। जबकि क्रिया करने वाले अणुओं की कुल बंधन ऊर्जा, क्रिया में उत्पन्न होने वाले अणुओं की कुल बंधन ऊर्जा से कम है, तो क्रिया में ऊष्मीय ऊर्जा अवशोषित होती है तथा क्रिया ऊष्माक्षेपी (endothermic) कहलाती है।

1 किग्रा कोयले के दहन से 3×10^7 जूल ऊर्जा मुक्त होती है।

(v) **विद्युत ऊर्जा**–विद्युत आवेश या धाराऐं एक–दूसरे को आकर्षित अथवा प्रतिकर्षित करती है अर्थात् एक दूसरे पर बल आरोपित करती हैं। अतः विद्युत आवेशों को विद्युत क्षेत्र में एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में कुछ कार्य करना पड़ता है। यह कार्य विद्युत ऊर्जा के रूप में संचित होता है।

भारत वर्ष में एक शहरी परिवार द्वारा उपभोग की गई औसतन विद्युत ऊर्जा 200 जूल/सेकण्ड होती है।

(vi) **नाभिकीय ऊर्जा**–किसी परमाणु के नाभिक में दो प्रकार के मौलिक कण क्रमशः न्यूट्रॉन तथा प्रोटॉन उपस्थित होते हैं। इन कणों को नाभिक में संग्रहित रखने के लिए आवश्यक ऊर्जा को नाभिकीय ऊर्जा कहते हैं। नाभिकीय ऊर्जा, नाभिकीय संलयन तथा नाभिकीय विखण्डन में मुक्त होती है।

नाभिकीय संलयन में छोटे नाभिकों के संलयन से बड़ा नाभिक बनता है, इस प्रक्रिया में द्रव्यमान की क्षति होती है तो आइन्स्टीन की द्रव्यमान ऊर्जा समीकरण $E = \Delta mc^2$ के अनुसार नाभिकीय ऊर्जा के रूप में रूपान्तरित होकर उत्सर्जित होती है।

(vii) **प्रकाश ऊर्जा**–विकिरण ऊर्जा के दृश्य भाग को प्रकाश ऊर्जा कहते हैं।

(viii) **सौर ऊर्जा**–सूर्य तथा गैलेक्सियों से मिलने वाली ऊर्जा सौर ऊर्जा कहलाती है। सौर ऊर्जा, नाभिकीय संलयन से प्राप्त होती है।

(ix) **ध्वनि ऊर्जा**–ध्वनि ऊर्जा, ध्वनि संचरण के लिए प्रयुक्त माध्यम के कणों की कम्पन ऊर्जा है। यह ऊर्जा का ऐसा रूप है जिससे हमारे कानों में संवेदना उत्पन्न होती है।

कार्य का मात्रक व विमा (Units and Dimensions of Work)

(i) S.I. पद्धति में कार्य का मात्रक जूल (Joule) J होता है।

$$W = F.S$$
$$= \text{न्यूटन} \times \text{मीटर}$$
$$1 \text{ जूल} = 1\text{न्यूटन} \times 1\text{मीटर}$$

अतः यदि 1न्यूटन का बल किसी वस्तु को 1 मीटर से विस्थापित कर देता है तो किया गया कार्य 1 जूल होगा।

(ii) C.G.S. पद्धति में कार्य का मात्रक अर्ग (erg) है,

$$\text{अर्ग} = \text{डाईन} \times \text{सेमी.}$$

यदि 1 डाइन का बल किसी वस्तु को 1 सेमी. दूरी से विस्थापित करता है तो किया गया कार्य 1 अर्ग कहलाता है।

उपरोक्त दोनों मात्रक निरपेक्ष मात्रक कहलाते हैं।

जूल तथा अर्ग में सम्बन्ध

$$1 \text{ जूल} = 1 \text{ न्यूटन} \times 1 \text{ मीटर}$$
$$= 10^5 \text{ डाइन} \times 10^2 \text{ सेमी.}$$
$$= 10^7 \text{ डाइन} \times \text{सेमी.}$$
$$= 10^7 \text{ अर्ग}$$

(iii) **गुरुत्वीय मात्रक**–जब एकांक गुरुत्वीय मात्रक का कोई बल किसी वस्तु को एकांक दूरी से बल की दिशा में विस्थापित कर देता है तो किया गया कार्य एकांक गुरुत्वीय मात्रक का कार्य कहलाता है। चूँकि बल का गुरुत्वीय मात्रक किलोग्राम–बल (kg f) होता है। अतः कार्य का गुरुत्वीय मात्रक किग्रा बल × मीटर होता है।

$$1 \text{ किग्रा बल} \times \text{मीटर} = 9.81 \text{ न्यूटन} \times \text{मीटर}$$
$$= 9.81 \text{ जूल}$$

इसी प्रकार

$$1 \text{ ग्राम बल} \times \text{सेमी.} = 981 \text{ डाइन} \times \text{सेमी.}$$
$$= 981 \text{ अर्ग}$$

(iv) **लघु व्यवहारिक मात्रक**–कार्य का लघु व्यवहारिक मात्रक इलेक्ट्रॉन वोल्ट (eV) होता है।

$$1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ जूल}$$

(v) **कार्य का बड़ा मात्रक**–कार्य का बड़ा मात्रक किलोवॉट घण्टा (Kilowatt hour : kWh) होता है।

$$1\,\text{kWh} = 3.6 \times 10^6\,\text{J}$$

एक किलोवॉट घण्टा को 1 यूनिट कहते हैं। हमारे घरों में विद्युत विभाग द्वारा लगाये गये 'विद्युत मीटर' व्यय ऊर्जा को किलोवॉट घण्टा में ही दर्शाते हैं।

कार्य की विमा : $[M^1L^2T^{-2}]$

(vi) **कार्य तथा ऊष्मा की तुल्यता**–किसी निकाय पर किया गया कार्य (W) तथा उत्पन्न ऊष्मा (H) परस्पर समानुपाती होते हैं

अर्थात् $W \propto H$

$$W = JH$$

यहाँ J ऊष्मा का यांत्रिक तुल्यांक कहलाता है।

$$J = 4.2 \times 10^3 \ \frac{\text{जूल}}{\text{किलोकैलोरी}}$$

$$= 4.2 \ \frac{\text{जूल}}{\text{कैलोरी}}$$

महत्वपूर्ण तथ्य

(i) कार्य एक अदिश राशि है।

(ii) किसी निकाय द्वारा कार्य तभी सम्पन्न होता है, जब बल उसमें विस्थापन उत्पन्न करता है।

(iii) जब बल तथा विस्थापन एक ही दिशा में होते हैं तो किया गया कार्य अधिकतम होता है।

(iv) जब बल तथा विस्थापन एक–दूसरे के लम्बवत् होते हैं तो किये गये कार्य का मान शून्य होता है। जबकि बल तथा विस्थापन दोनों ही शून्य नहीं है।

(v) जब F व S के मध्य का कोण $0 \le \theta \le \pi/2$ होता है तो किया गया कार्य धनात्मक होता है।

(vi) धनात्मक कार्य से तात्पर्य वस्तु की गति में त्वरण उत्पन्न करना है।

(vii) जब F व S के मध्य का कोण $\pi/2 \le \theta \le \pi$ होता है तो किया गया कार्य ऋणात्मक होता है।

(viii) ऋणात्मक कार्य वस्तु की गति में मंदन उत्पन्न करता है।

(ix) कार्य समय पर निर्भर नहीं करता है।

(x) संरक्षी बलों द्वारा किया गया कार्य पथ पर निर्भर नहीं करता है।

(xi) यद्यपि किसी पिण्ड B द्वारा A पर आरोपित बल, पिण्ड A द्वारा पिण्ड B पर आरोपित बल के बराबर तथा विपरीत दिशा में होता है (गति का तृतीय नियम) परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि पिण्ड B द्वारा पिण्ड A पर किया गया कार्य, पिण्ड A द्वारा पिण्ड B पर किए गए कार्य के बराबर तथा विपरीत हो।

5.5 गतिज ऊर्जा एवं स्थितिज ऊर्जा (Kinetic energy and potential energy)

गतिज ऊर्जा (Kinetic Energy)

किसी वस्तु की वह ऊर्जा जो उसकी गति के कारण से होती है गतिज ऊर्जा कहलाती है। बन्दूक से निकली हुई गोली में, चलती हुई रेलगाड़ी में तथा घूमते हुये लट्टू में गतिज ऊर्जा ही होती है। गतिज ऊर्जा सदैव धनात्मक एवं अदिश राशि होती है।

किसी वस्तु की गतिज ऊर्जा का मापन कार्य के उस परिमाण से किया जाता है जो गतिशील वस्तु को अवरोधक बलों के विरुद्ध विरामावस्था तक लाने में अथवा किसी स्थिर वस्तु को गतिशील अवस्था में लाने में किया गया हो। इसे प्रायः K से प्रदर्शित करते हैं। माना कि किसी पिण्ड का द्रव्यमान m किग्रा. तथा चाल v मी./से. हैं, तब उस पिंड की गतिज ऊर्जा

$$K = W = FS$$

यहाँ S पिण्ड द्वारा विरामावस्था में आने तक तय की गई दूरी है।

$$\because \qquad F = ma$$

तथा गति के तृतीय समीकरण से

$$a = \frac{v^2}{2S}$$

$$\therefore \qquad K = m\left(\frac{v^2}{2S}\right).S$$

$$= \frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore \quad K = \frac{1}{2}mv^2$$

यदि कोई पिण्ड किसी स्थिर अक्ष के परितः घूम रहा है तो उसमें घूर्णन गतिज ऊर्जा होती है। यदि पिण्ड का घूर्णन अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण I हो, तथा कोणीय वेग ω हो तो पिंड की घूर्णन गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}I\omega^2$ होगी।

समाकलन विधि–माना m द्रव्यमान की एक वस्तु घर्षण रहित क्षैतिज तल पर स्थित है। माना वस्तु पर $\vec{F}$ बल कार्यरत है जो उसे स्वयं की दिशा में dx दूरी से विस्थापित कर देता है। अतः वस्तु पर बल द्वारा किया गया कार्य

$$dW = F.dx$$

यदि वस्तु में उत्पन्न त्वरण a हो, तो न्यूटन के गति के द्वितीय नियम से,

$$F = ma$$

$$dW = ma.\,dx$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \times \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}.v$$

$$dW = m.\frac{dv}{dx}.vdx$$

$$= mvdv \qquad ...(1)$$

यदि वस्तु का अंतिम वेग v है तो बल F द्वारा, वस्तु का वेग 0 से v तक परिवर्तित करने में किया गया कार्य, समीकरण (1) का समाकलन करने पर प्राप्त किया जाता है।

अर्थात् $$\int dW = \int_0^v mvdv$$

$$W = m\int_0^v vdv = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^v$$

$$= m\left[\frac{v^2}{2} - 0\right]$$

$$= \frac{1}{2}mv^2$$

यह कार्य वस्तु की गतिज ऊर्जा के रूप में प्रकट होता है।

$$\therefore \quad \text{गतिज ऊर्जा} = \frac{1}{2}mv^2$$

महत्वपूर्ण तथ्य

(i) गतिज ऊर्जा निर्देश तंत्र की स्थिति पर निर्भर करती है यदि v वेग से गतिशील गाड़ी में m द्रव्यमान का व्यक्ति बैठा हुआ है तो गाड़ी के सापेक्ष व्यक्ति की गतिज ऊर्जा शून्य होती है। जबकि पृथ्वी पर स्थित निर्देश तंत्र के सापेक्ष व्यक्ति की गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}mv^2$ होगी।

(ii) वृत्ताकार पथ में गतिमान कण पर अभिकेन्द्रीय बल द्वारा कार्य शून्य होता है क्योंकि यह बल केवल कण की दिशा में परिवर्तन करता है एवं चाल का मान समान होता है तथा गतिज ऊर्जा नियत रहती है।

स्थितिज ऊर्जा (Potential Energy)

किसी वस्तु की वह ऊर्जा जो उसकी स्थिति अथवा विरूपण (deformation) के कारण होती है "स्थितिज ऊर्जा" कहलाती है। स्थितिज ऊर्जा, गुरुत्वीय ऊर्जा, प्रत्यास्थ (elastic), वैद्युत, रासायनिक आदि किसी भी प्रकार की हो सकती है।

पृथ्वी से ऊँचाई पर स्थित वस्तुओं में जो स्थितिज ऊर्जा (गुरुत्वीय बल के विरुद्ध कार्य करने से) होती है उसे गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा कहते हैं। उदाहरणतः ऊँचाई पर स्थित नहर या बांधों से एकत्रित जल को नीचे गिराकर कार्य किया जा सकता है।

वस्तुओं में जो स्थितिज ऊर्जा प्रत्यास्थता के कारण होती है उसे प्रत्यास्थ–स्थितिज ऊर्जा कहते हैं। इसका उदाहरण है घड़ी की कमानी को ऐंठने पर उसमें संचित ऊर्जा। कमानी को ऐंठने पर जो कार्य किया जाता है, वह उसके सामान्य अवस्था में आने पर वापस मिल जाता है।

दो विद्युत आवेशों के बीच दूरी बढ़ाने एवं घटाने के लिए आकर्षण अथवा प्रतिकर्षण बल के विरुद्ध कार्य करना पड़ता है। यह कार्य निकाय में स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है, जिसे 'स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा' कहते हैं।

विभिन्न प्रकार के ईंधन जैसे कोयला, मिट्टी का तेल, कुकिंग गैस, अल्कोहल, हाइड्रोजन में ऊर्जा, रासायनिक स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित रहती है।

यूरेनियम, रेडियम, थोरियम आदि तत्वों के परमाणुओं के नाभिक में अपार ऊर्जा संचित रहती है जो विस्फोट करने पर प्राप्त होती है। इस ऊर्जा को नाभिकीय स्थितिज ऊर्जा कहते हैं।

स्थितिज ऊर्जा का मापन कार्य के उस परिमाण से किया जाता है जो वस्तु अपनी वर्तमान स्थिति से शून्यांकी स्थिति में आने तक कर सकती है। शून्यांकी स्थिति उसको कहते हैं जिसमें वस्तु की स्थितिज ऊर्जा को शून्य मानते हैं। प्रायः पृथ्वी तल को शून्यांकी स्थिति माना जाता है। इसे प्रायः U से प्रदर्शित करते हैं।

5.6 कार्य-ऊर्जा प्रमेय (Work - energy theorem)

(1) नियत बल के अन्तर्गत–

माना एक वस्तु पर जिसका द्रव्यमान m है एक नियत बल F कार्य करता है। बल के कारण वस्तु में उत्पन्न त्वरण a है।

तब बल $$F = ma \qquad ...(1)$$

अब माना वस्तु का समय t = 0 पर वेग u तथा समय t पर वेग v हो तो t समय में तय की गई दूरी s के लिए गति के तृतीय समीकरण से

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$\Rightarrow \quad s = \frac{v^2 - u^2}{2a} \qquad ...(2)$$

अतः बल F द्वारा किया गया कार्य

$$W = Fs = ma\left(\frac{v^2 - u^2}{2a}\right)$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$$

$$= K_f - K_i = \Delta K \qquad ...(3)$$

(2) परिवर्ती बल के अन्तर्गत–

$$\because \quad \text{गतिज ऊर्जा } K = \frac{1}{2}mv^2$$

उपरोक्त समीकरण के दोनों पक्षों का t के सापेक्ष अवकलन करने

पर
$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}m \times 2v\frac{dv}{dt}$$
$$= mv\frac{dv}{dt}$$
$$= mva \qquad [\because \frac{dv}{dt} = a]$$
$$= Fv \qquad [\because F = ma]$$
$$= F\frac{dx}{dt} \qquad [\because v = \frac{dx}{dt}]$$
$$\Rightarrow \quad dK = Fdx \qquad ...(4)$$

प्रारंभिक स्थिति x_i पर गतिज ऊर्जा K_i तथा अंतिम स्थिति x_f पर गतिज ऊर्जा K_f की सीमाओं के मध्य समी. (4) का समाकलन करने पर

$$\int_{K_i}^{K_f} dK = \int_{x_i}^{x_f} Fdx$$

$$\Rightarrow \quad [K]_{K_i}^{K_f} = W \qquad [\because W = \int_{x_i}^{x_f} Fdx]$$

$$\Rightarrow \quad W = K_f - K_i = \Delta K \qquad ...(5)$$

समीकरण (3) तथा (5) से स्पष्ट है कि किसी वस्तु पर परिणामी बल लगाने पर, बल द्वारा किया गया कार्य उसकी गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है यही कार्य–ऊर्जा प्रमेय (Work-Energy Theorem) है। यदि किसी वस्तु पर परिणामी बल लगाने पर उसका वेग नियत रहता है तब वस्तु की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन $\Delta K = 0$, अतः वस्तु पर किया गया कार्य W भी शून्य होता है। यह प्रमेय अत्यन्त महत्वपूर्ण है क्योंकि इससे ही "ऊर्जा संरक्षण सिद्धांत" प्राप्त होता है।

यदि वस्तु पर बहुत से बल $F_1, F_2, F_3, F_4, ..., F_n$ लग रहे हों तब उन सबसे परिणामी बल F द्वारा किया कार्य W इन पृथक–पृथक बलों द्वारा किये गये कार्य के बीजगणितीय योग (Algebric Sum) के बराबर होता है।

या $W = W_1 + W_2 + W_3 + ... + W_n = \Delta K$

यहाँ $W_1, W_2, W_3, ... , W_n$ बलों द्वारा किये गये पृथक–पृथक कार्य है।

कार्य-ऊर्जा प्रमेय पर महत्वपूर्ण बिन्दु–

(i) यदि वस्तु की चाल में कोई परिवर्तन नहीं हो तो बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है क्योंकि इस स्थिति में गतिज ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

(ii) यदि वस्तु की गतिज ऊर्जा में कमी होती है तो बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होता है। इस स्थिति में बल तथा विस्थापन एक दूसरे के विपरीत दिशा में कार्यरत होते हैं। जैसे–किसी वस्तु को ऊपर की ओर प्रक्षेपित किया जाता है तो गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होता है। इस स्थिति में, ज्यों–ज्यों वस्तु ऊपर की ओर गति करती है। उसकी चाल घटती जाती है और परिणामस्वरूप गतिज ऊर्जा में कमी होती जाती है। अतः $K_f < K_i$

(iii) यदि वस्तु के वेग एवं गतिज ऊर्जा में वृद्धि होती है, तो बल द्वारा किया गया कार्य धनात्मक होता है। इस स्थिति में बल तथा विस्थापन एक ही दिशा में होते हैं। जैसे–यदि किसी वस्तु को मकान की छत से नीचे गिराया जाता हो, तो गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य धनात्मक होता है जैसे–जैसे वस्तु नीचे की ओर गिरती है, उसकी चाल बढ़ती जाती है तथा परिणामस्वरूप उसकी गतिज ऊर्जा भी बढ़ती है। अतः गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य धनात्मक है। अतः $K_f > K_i$

5.7 स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा (Potential energy of spring)

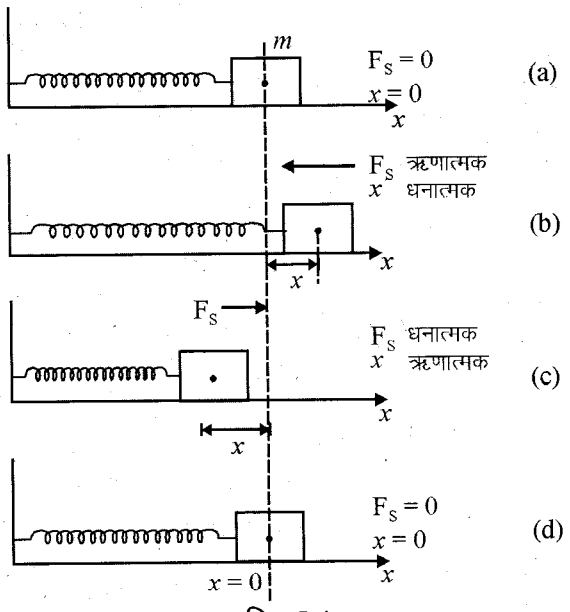
माना कि m द्रव्यमान का एक पिण्ड एक घर्षण रहित चिकने क्षैतिज पृष्ठ पर साम्यावस्था में है यह पिण्ड द्रव्यमान रहित स्प्रिंग (आदर्श स्प्रिंग) के एक सिरे से जुड़ा है स्प्रिंग का दूसरा सिरा किसी दृढ़ दीवार से जुड़ा है। (चित्र (a)

किसी आदर्श स्प्रिंग में प्रत्यानयन बल (स्प्रिंग बल) F_S पिण्ड का अपनी साम्यावस्था स्थिति से विस्थापन x के समानुपाती होता है।

अतः प्रत्यानयन बल $F_S = -kx$ ...(1)

जहां k स्प्रिंग नियतांक है जिसका मात्रक Nm^{-1} है। जब पिण्ड को साम्यावस्था से बाहर की ओर खींचते हैं और स्प्रिंग में विस्थापन (खिंचाव) x हो (चित्र (b) तो प्रत्यानयन बल द्वारा किया गया कुल कार्य

$$W_S = \int_0^x F_S dx \qquad ...(2)$$
$$W_S = -\int_0^x kx\,dx = -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x$$
$$= -k\left[\frac{x^2}{2} - 0\right]$$
$$W_S = -\frac{1}{2}kx^2$$



चित्र 5.6

अतः स्प्रिंग के प्रत्यानयन बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होता है। स्प्रिंग को खींचने में इस बल के विरुद्ध बाह्य खिंचाव बल द्वारा किया गया कार्य धनात्मक होगा।

अतः $W = +\frac{1}{2}kx^2$

यह किया गया कार्य स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो

जाता है। अतः स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

महत्वपूर्ण तथ्य

(i) स्प्रिंग बल $F_s = -kx$
जहाँ x स्प्रिंग की लम्बाई में वृद्धि या संकुचन है। यदि $x = 0$ तब $F_s = 0$ (चित्र *a*)
यदि k का मान बहुत अधिक है तब स्प्रिंग को दृढ़ कहा जाता है। यदि k का मान कम है तो इसे नर्म (मृदु) कहा जाता है। k एक स्प्रिंग नियतांक है जिसका मात्रक न्यूटन/मीटर है।

(ii) चित्र b में x धनात्मक है तब स्प्रिंग बल बांयी ओर अर्थात् खिंचाव बल (F_{app}) के विपरीत दिशा में अर्थात् विस्थापन के विपरीत है। x का मान परिवर्तित होने के कारण F_s का मान भी परिवर्तित होता है।

आरोपित बल (F_{app}) द्वारा वस्तु पर किया गया कार्य $= \frac{1}{2}kx^2$
स्प्रिंग बल (F_s) द्वारा वस्तु पर किया गया कार्य

$$W_S = -\frac{1}{2}kx^2$$

(iii) चित्र *a* में $x = 0, F_s = 0$ जिससे $W_s = 0$

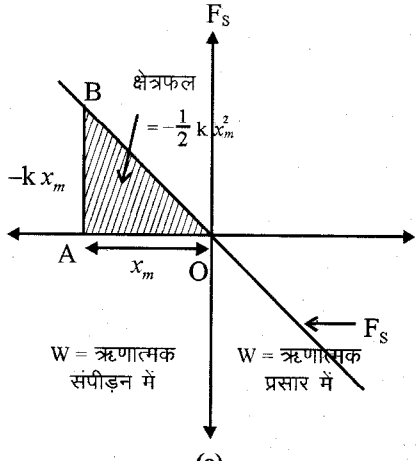
(iv) चित्र c में x ऋणात्मक है तथा F_s धनात्मक है इस स्थिति में भी बल F_s तथा विस्थापन x विपरीत दिशा में है। अतः स्प्रिंग बल द्वारा वस्तु पर किया गया कार्य

$$W_S = -\frac{1}{2}kx^2$$

तथा आरोपित बल द्वारा स्प्रिंग पर किया गया कार्य

$$W = \frac{1}{2}kx^2$$

(v) निम्न चित्र (e) में स्प्रिंग बल तथा x में ग्राफ प्रदर्शित है–

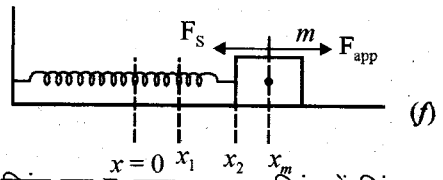


(e)

यदि स्प्रिंग के लिए अधिकतम संपीड़न x_m से $x = 0$ तक आने में स्प्रिंग बल तथा विस्थापन की दिशा विपरीत है तब स्प्रिंग बल द्वारा वस्तु पर किया गया कार्य

$$W_S = -\frac{1}{2}kx_m^2$$
$$= \text{त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल}$$

(vi) संलग्न चित्र (*f*) में खिंचाव बल, स्प्रिंग बल के विपरीत दिशा में है।



(f)

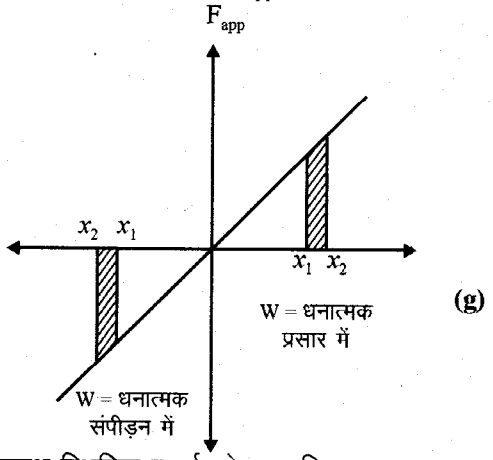
अतः स्प्रिंग बल F_s द्वारा वस्तु पर स्प्रिंग में खिंचाव x_1 से x_2 तक किया गया कार्य

$$W_S = \int_{x_1}^{x_2} F_s dx = \int_{x_1}^{x_2} (-kx)dx$$
$$= -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

चित्र (g) में बाह्य बल F_{app} द्वारा स्प्रिंग पर किया गया कार्य

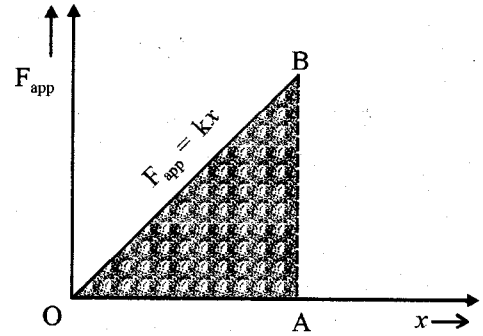
$$W_{app} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_{app}.d\vec{x}$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} kxdx\cos 0°$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} kxdx$$
$$= +\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

$\Rightarrow$ $W_{app} = -W$



(g)

(vii) प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा को बल–विस्थापन वक्र तथा x-अक्ष के बीच के क्षेत्रफल से भी प्राप्त किया जा सकता है।



(h)

त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$$= \frac{1}{2} \times x \times kx$$

$$= \frac{1}{2}kx^2$$

$\therefore$ स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा $U = \frac{1}{2}kx^2$ = बल – विस्थापन रेखा तथा 0 से x तक विस्थापन अक्ष के बीच का क्षेत्रफल

5.8 यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम (Law of conservation of mechanical energy)

संरक्षी बलों (Conservative Forces) के लिये किसी कण अथवा यांत्रिक निकाय का ऊर्जा फलन अथवा गतिज और स्थितिज ऊर्जाओं का योग, नियत रहता है। इस सिद्धांत को हम ऊर्जा संरक्षण का नियम कहते हैं।

कार्य–ऊर्जा प्रमेय से किसी बल द्वारा किया गया कार्य गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है।

$$\Delta W = \Delta K \quad ...(1)$$

बल के विरूद्ध किया गया कार्य स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि के बराबर होता है अर्थात्

$$-\Delta W = \Delta U \quad ...(2)$$

समी. (1) व (2) से $\Delta K = -\Delta U$

$$\Rightarrow \quad \Delta K + \Delta U = 0$$

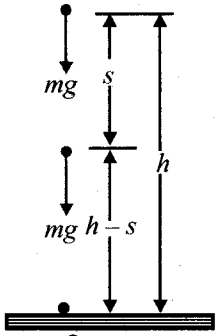
$$K + U = \text{नियतांक} \quad ...(3)$$

ऊर्जा संरक्षण सिद्धान्त की सत्यता को प्रकट करने वाले कुछ उदाहरण–

(i) मुक्त रूप से गिरता हुआ पिण्ड–माना m द्रव्यमान का एक पिण्ड पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर विरामावस्था में है। इस अवस्था में पिण्ड की कुल ऊर्जा

$$= \text{गतिज ऊर्जा} + \text{स्थितिज ऊर्जा}$$
$$= 0 + mgh = mgh$$

अब मान लो पिंड को उसकी स्थिति से s दूरी से नीचे गिराया जाता है। गति के तीसरे समीकरण से पिण्ड में उत्पन्न वेग



चित्र 5.7

$$v = \sqrt{2gs}$$

अब चूँकि पिण्ड पृथ्वी तल से $(h-s)$ ऊँचाई पर स्थित है, अतः इसकी स्थितिज ऊर्जा

$$= mg(h-s)$$

इस स्थिति में गतिज ऊर्जा

$$= \frac{1}{2}m\left(\sqrt{2gs}\right)^2$$
$$= mgs$$

$\therefore$ पिंड की कुल ऊर्जा $= mg(h-s) + mgs - mgh$

अब मान लो पिंड पृथ्वी तल तक गिरता है। इस स्थिति मे स्थितिज ऊर्जा शून्य के बराबर होगी।

पृथ्वी तल पर पहुँचने पर पिंड का वेग

$$= \sqrt{2hg}$$

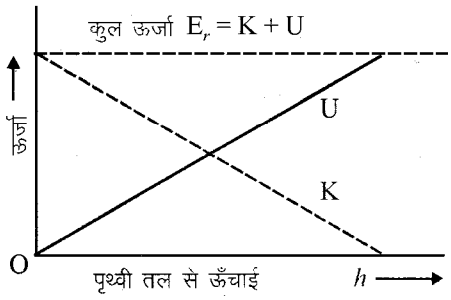
अतः पृथ्वी तल पर गतिज ऊर्जा

$$= \frac{1}{2}m(\sqrt{2hg})^2 = mgh$$

अतः पृथ्वी तल पर कुल ऊर्जा $= mgh$

स्पष्ट है कि तीनों स्थितियों में मुक्त रूप से गिरने वाले पिण्ड के मार्ग में प्रत्येक बिन्दु पर पिण्ड की सम्पूर्ण ऊर्जा का योग नियत रहता है। उपरोक्त विवेचन में यह मान लिया गया है कि पिंड पर क्रियाशील रोधक बल जैसे घर्षण इत्यादि नगण्य है।

चित्र में गिरते हुये पिण्ड की गतिज ऊर्जा K तथा स्थितिज ऊर्जा U का पृथ्वी तल से ऊँचाई h के साथ परिवर्तन दिखाया गया है। स्पष्ट है कि पृथ्वी तल पर पिंड की कुल ऊर्जा E उसकी गतिज ऊर्जा के बराबर होती है।



चित्र 5.8

विशेष–जब वस्तु पृथ्वी से टकराकर यकायक रूक जाती है तो उसकी गतिज ऊर्जा, ऊष्मा, ध्वनि तथा प्रकाश में बदल जाती है। इस प्रकार पृथ्वी से टकराने पर पिंड की सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा का क्षय हो जाता है परन्तु यह नवीन रूप में प्रकट होती है।

(ii) सरल आवर्ती दोलक (Simple harmonic oscillator)

जब हम सरल लोलक को एक ओर ले जाकर छोड़ते हैं तो अन्तिम स्थिति में उसका गुरुत्व केन्द्र माध्य स्थिति से θ कोण बनाता है। यदि इस स्थिति में सरल लोलक का माध्य स्थिति से विस्थापन x हो तो प्रत्यावस्थान बल

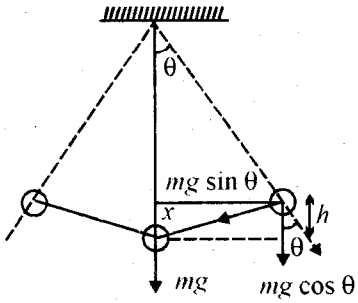
$$F = -mg\theta = -\frac{mg}{l}x \qquad \left(\because \theta = \frac{x}{l}\right)$$
$$= -kx$$

$$U = -W = -\int F dx = -\int -(kx)dx$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

चूँकि $x = a\sin\theta$

$\therefore$ $U = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 \sin^2\theta$



चित्र 5.9

यदि $\theta = \omega t$

तो $x = a \sin \omega t$

तथा $U = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \sin^2 \omega t$ ...(1)

$U_{max} = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2$ जब $\omega t = \pi/2$

$U_{max} = 0$ जब $\omega t = 0, \pi$

इसी प्रकार गतिज ऊर्जा

$$K = \frac{1}{2} mv^2$$

$$K = \frac{1}{2} m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} m(a\omega \cos \omega t)^2$$

$$K = \frac{1}{2} ma^2\omega^2 \cos^2 \omega t \quad ...(2)$$

$K_{max} = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2$ (जब $\omega t = 0, \pi$)

$K_{min} = 0$ (जब $\omega t = \pi/2$)

कुल ऊर्जा $E = K + U$

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \sin^2 \omega t$$

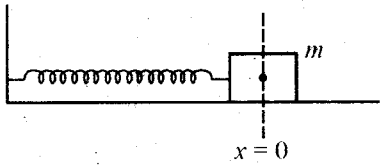
$$= \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)$$

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 = \text{स्थिरांक} \quad ...(3)$$

अतः सरल आवर्ती दोलन करते हुए कण की सम्पूर्ण ऊर्जा नियत रहती है।

(iii) प्रत्यास्थ स्प्रिंग में ऊर्जा संरक्षण–

माना कि m द्रव्यमान का एक पिण्ड एक घर्षण रहित चिकने धरातल पर स्थित है यह पिण्ड द्रव्यमान रहित स्प्रिंग (आदर्श स्प्रिंग) के एक सिरे से जुड़ा है। (चित्र)



चित्र 5.10

जब पिण्ड को x_m दूरी तक विस्थापित किया जाता है तब इसकी स्थितिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} kx_m^2$

जब पिण्ड को x_m स्थिति से मुक्त किया जाता है तब पिण्ड साम्यावस्था की स्थिति $x = 0$ पर पहुँचता है जहाँ इसका वेग अधिकतम होता है। इस स्थिति में संपूर्ण स्थितिज ऊर्जा, गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है गतिशीलता के जड़त्व के कारण पिण्ड $x = 0$ स्थिति को पार कर जाता है तथा स्थिति $x = x_m$ तक गतिशील होकर स्थिर हो जाता है। जहाँ संपूर्ण गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है। इस स्थिति में स्प्रिंग बल पिण्ड को पुनः $x = 0$ स्थिति को विस्थापित करता है। इस प्रकार पिण्ड $+x_m$ तथा $-x_m$ स्थितियों के मध्य दोलन करता है तथा कुल यांत्रिक ऊर्जा नियत रहती है।

चरम स्थितियों पर–यहाँ $x = \pm x_m$ तथा वेग $v = 0$

जिससे गतिज ऊर्जा K.E. $= \frac{1}{2} mv^2 = 0$

तथा स्थितिज ऊर्जा $U = \frac{1}{2} kx_m^2 =$ अधिकतम मान

मध्यवर्ती स्थिति x पर–स्थितियों $-x_m$ तथा $+x_m$ के मध्यवर्ती किसी स्थिति x के लिए कुल ऊर्जा आंशिक रूप से गतिज तथा स्थितिज ऊर्जा के रूप में निहित होती है।

कुल ऊर्जा $E = K.E. + U$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} kx_m^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

$$\therefore \quad K.E. = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} k(x_m^2 - x^2)$$

$\therefore$ वेग $v = \sqrt{\frac{k}{m}(x_m^2 - x^2)}$

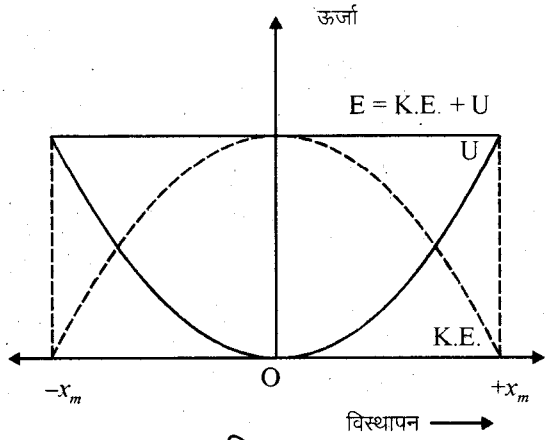
साम्यावस्था की स्थिति पर–यहाँ $x = 0$

$$\therefore \quad U = \frac{1}{2} k(0)^2 = 0$$

$$K.E. = \frac{1}{2} mv_m^2 = \frac{1}{2} kx_m^2$$

अधिकतम वेग $v_m = x_m \sqrt{\frac{k}{m}}$

गतिज, ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा तथा कुल ऊर्जा का विस्थापन के साथ आलेख–



चित्र 5.11

चूँकि गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा, x^2 के फलन है अतः इनके संगत आलेख परवलयाकार होता है। कुल ऊर्जा E के

नियत होने से कुल ऊर्जा के संगत आलेख विस्थापन अक्ष के समान्तर एक सरल रेखा प्राप्त होता है।

5.9 रेखीय संवेग तथा गतिज ऊर्जा में सम्बन्ध (Relation between linear momentum and kinetic energy)

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m} = \frac{p^2}{2m}$$

$\therefore \quad p = mv$

$\therefore \quad K = \frac{p^2}{2m}$

या $\quad p = \sqrt{2mK}$

(a) यदि K नियत हो तो $p \propto \sqrt{m}$

अर्थात् भिन्न भिन्न द्रव्यमान वाली वस्तुओं की गतिज ऊर्जा नियत हो तो अधिक द्रव्यमान वाली वस्तु का संवेग अधिक होगा।

या $\quad \frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$

(b) यदि m नियत हो तो $p \propto \sqrt{K}$

अर्थात् समान द्रव्यमान वाली वस्तुओं के लिए अधिकतम गतिज ऊर्जा वाली वस्तु का संवेग अधिकतम होगा।

या $\quad \frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}$

(c) यदि p नियत हो तो

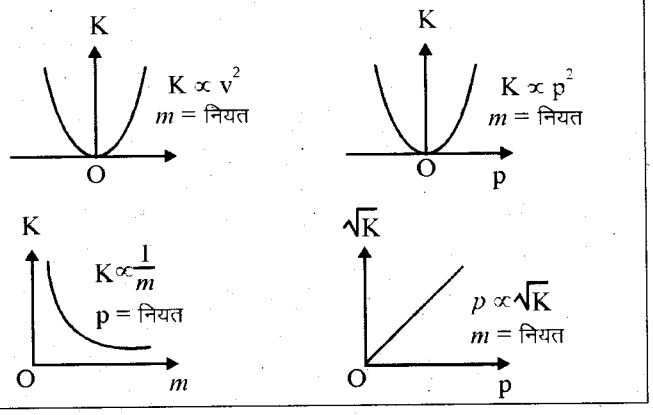
$\sqrt{mK}$ = नियत या $K \propto \frac{1}{m}$

अर्थात् अलग–अलग द्रव्यमान वाली वस्तुओं के रेखीय संवेग नियत हो तो कम द्रव्यमान वाली वस्तु की गतिज ऊर्जा अधिकतम होगी।

महत्वपूर्ण तथ्य

1. किसी कण में बिना गतिज ऊर्जा के रेखीय संवेग नहीं हो सकता है।
2. किसी कण में रेखीय संवेग के बिना गतिज ऊर्जा संभव नहीं है।
3. बिना संवेग के ऊर्जा संभव है। गतिज ऊर्जा तो शून्य होगी परन्तु स्थितिज ऊर्जा शून्य नहीं होगी।
4. परन्तु बिना ऊर्जा के संवेग संभव नहीं है।
5. किसी कण तंत्र या निकाय की कुल गतिज ऊर्जा शून्य हो तो उसका कुल रेखीय संवेग भी शून्य होगा।
6. किसी कण तंत्र या निकाय में बिना संवेग के भी गतिज ऊर्जा संभव हो सकती है। जैसे यदि दो कण जिनका रेखीय संवेग बराबर या विपरीत हो तो उनका कुल रेखीय संवेग शून्य होगा परन्तु कुल गतिज ऊर्जा शून्य नहीं होगी।

गतिज ऊर्जा से सम्बन्धित विभिन्न ग्राफ



5.10 संरक्षी तथा असंरक्षी बल (Conservative and Non-Conservative Forces)

संरक्षी तथा अंसरक्षी बलों की परिभाषा तीन प्रकार से दी जा सकती है–

प्रथम परिभाषा (First Definition)–जब किसी कण पर एक या एक से अधिक बल इस प्रकार कार्य करते हैं कि कण की अपनी प्रारम्भिक अवस्था में लौटने पर वही गतिज ऊर्जा होती है जो कि प्रारंभ में थी, तब बलों को संरक्षी बल कहते हैं।

यदि प्रारंभिक अवस्था में लौटकर आने पर उसकी गतिज ऊर्जा प्रारम्भ के सापेक्ष परिवर्तित हो जाती है, तब इन बलों को "असंरक्षी बल" कहते हैं।

द्वितीय परिभाषा (Second Definition)–यदि किसी बल को किसी कण पर लगाने पर एक पूर्ण चक्र में (Complete cycle) बल द्वारा किया गया कार्य शून्य हो तो बल को "संरक्षी बल" कहते हैं। यदि कुल कार्य का परिमाण शून्य नहीं है तो बल "असंरक्षी बल" कहलाता है। अब कार्य ऊर्जा प्रमेय से

$$W = \Delta K$$

अतः यदि पूर्ण चक्र के लिये

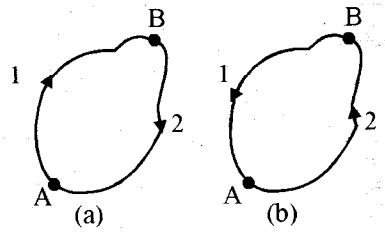
$$\Delta K = 0 \text{ तो } W = 0$$

स्पष्ट है कि द्वितीय परिभाषा से पूर्ण चक्र में किया गया कार्य यदि शून्य है तो प्रारम्भिक स्थिति की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन भी शून्य होगा जो कि संरक्षी बल की प्रथम परिभाषा है। इस प्रकार संरक्षी बल की दोनों परिभाषायें तुल्य है। इस प्रकार असंरक्षी बल के लिये

$$W = \Delta K$$

पूर्ण चक्र के लिए $\Delta K \neq 0$, उदाहरणतः घर्षण बल (Frictional Force) वायु प्रतिरोध अथवा श्यानता बल (Viscous Force) इत्यादि।

तृतीय परिभाषा (Third Definition)–संरक्षी बल वह बल है जिसके द्वारा एक कण को किसी एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक विस्थापन में किया गया कार्य कण के पथ पर निर्भर नहीं करता है।



चित्र 5.12

उदाहरण–चित्रानुसार एक कण बिन्दु A से B तक पथ (1) के अनुदिश [AB (1)] चलकर B से फिर A पर पथ (2) के अनुदिश [BA (2)] लौट आता है। माना कण पर कार्यकारी बल संरक्षी–बल है। तब बल द्वारा पूर्ण चक्र में किया गया कुल कार्य शून्य होना चाहिये। अतः

$$W_{AB(1)} + W_{BA(2)} = 0$$

या $$W_{AB(1)} = - W_{BA(2)} \quad ...(1)$$

यदि कण को हम पथ (2) पर A से B तक चलायें (चित्रानुसार) तो इसमें किया गया कार्य $W_{AB(2)}$ का मान पथ (2) पर B से A तक के कार्य का ऋणात्मक मान होगा क्योंकि कण के विस्थापन की केवल दिशा विपरीत करने पर कार्य ऋणात्मक हो जाता है, परिमाण वही रहता है। अतः

$$W_{AB(2)} = - W_{BA(2)} \quad ...(2)$$

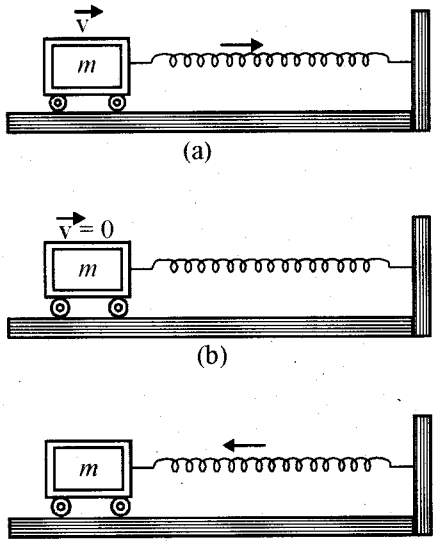
समी. (1) व (2) की तुलना करने पर

$$W_{AB(1)} = W_{AB(2)}$$

अतः संरक्षी बल द्वारा कण को A से B तक ले जाने में पथ (1) पर किया गया कार्य पथ (2) पर किये गये कार्य के बराबर है। इसी प्रकार किसी अन्य तीसरे पथ पर कण को ले जाने में इतना ही कार्य किया जायेगा। स्पष्ट है कि संरक्षी बल द्वारा एक कण को किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच विस्थापन में किया गया कार्य, कण के पथ पर निर्भर नहीं करता है।

इसी प्रकार जिन बलों के द्वारा किया गया कार्य कण के पथ पर निर्भर करता है, उन्हें असंरक्षी बल (Non-Conservative Force) कहते हैं।

उदाहरण–माना m द्रव्यमान का एक गुटका एक द्रव्यमान रहित स्प्रिंग के सिरे से जुड़ा है। स्प्रिंग का दूसरा सिरा एक दीवार से जुड़ा है। स्प्रिंग तथा गुटके का यह निकाय एक घर्षण–रहित चिकने क्षैतिज धरातल पर रखा है माना गुटके को दीवार की ओर v वेग दिया जाता है जिससे स्प्रिंग में संपीडन उत्पन्न होता है। परन्तु स्प्रिंग अपनी प्रत्यास्थाता के कारण गुटके के विस्थापन के विपरीत दिशा में एक प्रत्यानयन बल आरोपित



चित्र 5.13

करती है जिससे गुटका स्थिर हो जायेगा। इस स्थिति में गुटके की गतिज ऊर्जा शून्य होती है (चित्रानुसार)। अब संपीडित स्प्रिंग विपरीत और प्रसारित होती है जिससे गुटका पूर्व गति के विपरीत गतिमान होता है और गतिज ऊर्जा प्राप्त करता है। जब गुटका अपनी प्रारम्भिक स्थिति में पहुँचता है तो इसका वेग तथा गतिज ऊर्जा प्रारम्भ के मान के बराबर होता है। अन्तर केवल वेग की दिशा में होता है। परिमाण में नहीं। स्पष्ट है कि स्प्रिंग के संपीडन से गुटके की जितनी गतिज ऊर्जा कम होती है, स्प्रिंग के प्रसरण में गुटका अपनी गतिज ऊर्जा में उतनी ही वृद्धि कर लेता है। अतः परिवर्तन के पूर्ण चक्र (round trip) में गुटके की गतिज ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं होता। अतः स्प्रिंग के प्रत्यास्थ बल के प्रभाव में गुटके की गतिज ऊर्जा स्थिर रहती है। इस प्रकार स्प्रिंग का प्रत्यास्थ बल संरक्षी बल है।

यदि हम एक गेंद को ऊर्ध्वाधर ऊपर फेंके तो वह हमारे साथ में फिर उतनी ही गतिज ऊर्जा सहित वापस लौट आती है जितनी गतिज ऊर्जा उसके फेंकने के समय थी। यहाँ यह मान लिया गया है कि हवा कोई प्रतिरोधी बल नहीं लगाती है। अतः गुरुत्व बल संरक्षी बल है यदि उपरोक्त उदाहरण में क्षैतिज तल चिकना न हो अर्थात् घर्षण युक्त हो या गेंद पर वायु प्रतिरोधक अर्थात् श्यान बल आरोपित करे तो गुटका या गेंद की गतिज ऊर्जा अपनी प्रारम्भिक अवस्था में लौट कर आने पर परिवर्तित हो जायेगी।

इस प्रकार गुरुत्वीय बल, स्थिर वैद्युत बल, प्रत्यास्थ बल आदि संरक्षी बल है, जबकि घर्षण बल, श्यान बल आदि असंरक्षी है।

5.11 शक्ति (Power)

किसी मशीन के कार्य करने की दर को शक्ति कहते हैं। शक्ति में बल द्वारा कार्य करने का समय भी सम्मिलित होता है। यदि दो निकाय समान मात्रा का कार्य भिन्न–भिन्न समय में सम्पन्न करते हैं तो दोनों निकायों की शक्ति भिन्न–भिन्न होगी। शक्ति एक अदिश राशि है।

सामान्यतः शक्ति निम्न प्रकार की होती है–

(a) **औसत शक्ति** (Average Power)–यदि किसी निकाय द्वारा ΔW कार्य Δt समय में सम्पन्न किया जाता है तो निकाय की औसत शक्ति

$$P_{av} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

(b) **तात्क्षणिक अथवा तात्कालिक शक्ति** (Instantaneous Power)–यदि सूक्ष्म समयान्तराल Δt में किया गया कार्य ΔW हो तो तात्क्षणिक शक्ति

$$P_{\text{तात्क्ष.}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

$$dW = \vec{F} . \vec{ds}$$

$$P = \frac{\vec{F}.\vec{ds}}{dt} = \vec{F}.\frac{\vec{ds}}{dt}$$

$$= \vec{F}.\vec{v}$$

$$P = F\,v\cos\theta$$

यहाँ v उस पिण्ड का वेग है जिस पर F बल कार्य कर रहा है। θ बल $\vec{F}$ व वेग $\vec{v}$ की दिशाओं में कोण है। अतः तात्क्षणिक शक्ति, तात्क्षणिक वेग व उस क्षण पर कार्यरत बल के अदिश गुणनफल के तुल्य होती है।

यदि $\theta = 0°$

$$P = F.\,v\cos 0° = F.v$$

$$= P_{\text{अधिकतम}}$$

शक्ति का मात्रक व विमा (Units and Dimensions of Power)

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\text{कार्य}}{\text{समय}} = \frac{\text{जूल}}{\text{सेकण्ड}}$$

S.I. पद्धति में शक्ति का मात्रक जूल प्रति सेकण्ड अथवा वॉट (Watt) होता है।

$$1 \text{ वॉट} = \frac{1 \text{ जूल}}{1 \text{ सेकण्ड}}$$

यदि किसी निकाय द्वारा एक जूल कार्य एक सेकण्ड में किया जाये तो उस निकाय की शक्ति एक वॉट कहलाती है। यह छोटा मात्रक है। शक्ति का बड़ा मात्रक किलोवॉट होता है।

1 किलोवॉट (KW) = 1000 वॉट (watt)

C.G.S. पद्धति में शक्ति का मात्रक अर्ग प्रति सेकण्ड होता है। F.P.S. पद्धति में शक्ति का मात्रक फुट पाउण्डल प्रति सेकण्ड होता है। F.P.S पद्धति में व्यवहारिक मात्रक अश्व शक्ति (Horse Power) होता है।

1 अश्व शक्ति (H.P.) = 746 वॉट

शक्ति की विमा–

$$P = \frac{W}{t} = \frac{ML^2T^{-2}}{T}$$

$$= [ML^2T^{-3}]$$

उदा.7. किसी प्राक्षेपिक प्रदर्शन में एक पुलिस अधिकारी 50 g द्रव्यमान की गोली को 2 cm मोटी नरम परतदार लकड़ी (प्लाइवुड) पर 200 m s^{-1} की चाल से फायर करता है। नरम लकड़ी को भेदने के पश्चात् गोली की गतिज ऊर्जा प्रारंभिक ऊर्जा की 10% रह जाती है। लकड़ी से निकलते समय गोली की चाल क्या होगी?

हल– दिया गया है

$m = 50$ ग्राम

$= 50 \times 10^{-3}$ किग्रा.

$v = 200$ मी./से.

गोली की प्रारंभिक गतिज ऊर्जा

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 50 \times 10^{-3} \times (200)^2$$

$= 1000$ जूल

प्रश्नानुसार गोली की अंतिम गतिज ऊर्जा

$$K_f = K_i \times \frac{10}{100}$$

$$= 1000 \times \frac{10}{100}$$

$= 100$ जूल

यदि गोली के नरम लकड़ी को भेदन के पश्चात् चाल v_f हो तो

$$K_f = \frac{1}{2}mv_f^2 = 100$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \times 50 \times 10^{-3} v_f^2 = 100$$

$$\Rightarrow \quad v_f^2 = 4000$$

$$\Rightarrow \quad v_f = 63.2 \text{ मी./से.}$$

इस प्रकार गोली की अंतिम चाल लगभग 32% रह गयी अर्थात् लगभग 68% कम हो गयी।

उदा.8. 0.2 kg भारी एक गोली जब किसी लक्ष्य को भेदती है तो उसका वेग 600 m / s से घटकर 100 m / s रह जाता है। लक्ष्य को भेदने में गोली की कितनी ऊर्जा व्यय हुई? लक्ष्य की मोटाई 0.2 m है।

(पुस्तक का उदाहरण 5.5)

हल: दिया गया है: m = 0.2 Kg , u = 600 m/s , v = 100 m/s

गोली की प्रारंभिक गतिज ऊर्जा

$$K_i = \frac{1}{2}mu^2$$

गोली की अंतिम गतिज ऊर्जा

$$K_f = \frac{1}{2}mv^2$$

∵ लक्ष्य को भेदने में ऊर्जा व्यय

$$K_i - K_f$$

$$= \frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}m(u^2 - v^2)$$

$$= \frac{1}{2} \times 0.2\left[(600)^2 - 100)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times 0.2 \times (360000 - 10000)$$

$$= 0.1 \times 350000 = 35000 \text{ जूल}$$

उदा.9. हम अच्छी तरह जानते हैं कि वर्षा की बूँद नीचे की ओर लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल और बूँद के गिरने की दिशा के विपरीत लगने वाले प्रतिरोधी बल के प्रभाव के अधीन गिरती है। प्रतिरोधी बल बूँद की चाल के अनुक्रमानुपाती, परन्तु अनिर्धारित होता है। माना कि 1.00g द्रव्यमान की वर्षा की बूँद 1.00 km ऊँचाई से गिर रही है। यह धरातल पर 50.00 ms^{-1} की चाल से संघट्ट करती है। (a) गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य क्या है? (b) अज्ञात प्रतिरोधी बल द्वारा किया गया कार्य क्या है?

हल– दिया गया है–

$m = 1$ ग्राम
$= 1 \times 10^{-3}$ किग्रा.
$h = 1$ किमी. $= 1 \times 10^3$ मी.
$v = 50$ मी./से.

(a) माना कि बूँद प्रारंभ में विरामावस्था से गिरना आरंभ करती है।
∴ बूँद की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 10^{-3} \times (50)^2 - 0 \qquad [\because u = 0]$$

$$= 1.25 \text{ जूल}$$

गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य

$$W_g = mgh$$
$$= 1 \times 10^{-3} \times 10 \times 1 \times 10^3$$
$$= 10 \text{ जूल}$$

(b) माना कि प्रतिरोधी बल द्वारा किया गया कार्य W_r है
तब कार्य–ऊर्जा प्रमेय से

$$\Delta K = W_g + W_r$$
$$\Rightarrow \quad W_r = \Delta K - W_g$$
$$= 1.25 - 10$$
$$= -8.75 \text{ जूल}$$

उदा.10. धीमी गति से चलता हुआ एक ऐल्फा कण एक विद्युत क्षेत्र में प्रवेश करता है। इस विद्युत क्षेत्र में उस कण पर 4×10^{-16} N का बल कार्य करता है। विद्युत क्षेत्र में 0.05 m दूरी तय करने पर ऐल्फा कण की गतिज ऊर्जा कितनी होगी? ऐल्फा कण की दिशा, विद्युत क्षेत्र के समान्तर है। (पुस्तक का उदाहरण 5.6)

हल: दिया गया है: $F = 4 \times 10^{-16}$ न्यूटन ,
$S = 0.05$ मीटर

α – कण की गतिज ऊर्जा = विद्युत क्षेत्र में α – कण पर किया गया कार्य

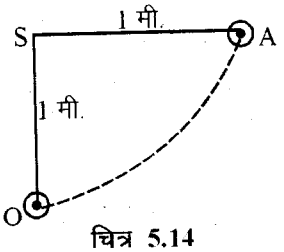
$$= FS\cos\theta$$

$\because$ α – कण के गति की दिशा विद्युत क्षेत्र के समान्तर है
अत: $\theta = 0°$

$$\therefore \quad W = FS\cos 0 = FS$$
$$W = 4 \times 10^{-16} \times 0.05 = 2 \times 10^{-17} \text{ जूल}$$

उदा.11. सरल लोलक के दोलक को चित्रानुसार क्षैतिज स्थिति में रखा गया है। दोलक को मुक्त करने पर निम्नतम बिन्दु O पर उसकी चाल ज्ञात कीजिए। लोलक की डोरी की लम्बाई 1 मीटर है तथा ऊर्जा की हानि नगण्य है।

हल– बिन्दु A से O तक दोलक के गति करने पर दोलक की स्थितिज ऊर्जा पूर्णतया गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जायेगी। अत: O पर गतिज ऊर्जा = स्थितिज ऊर्जा



चित्र 5.14

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 1}$$
$$= \sqrt{19.6} \text{ मी./से.}$$

उदा.12. एक ट्रक तथा एक कार दोनों की गतिज ऊर्जा समान है, को समान मंदन बल लगाकर रोका जाता है। रूकने में ट्रक तथा कार द्वारा तय की गई दूरी में क्या सम्बंध है? (पुस्तक का उदाहरण 5.7)

हल: माना कि ट्रक तथा कार का द्रव्यमान क्रमश: m_1 तथा m_2 हैं। जबकि प्रारंभ में इनके वेग क्रमश: u_1 तथा u_2 हैं। तब प्रश्नानुसार

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 = \frac{1}{2}m_2u_2^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{u_2^2}{u_1^2} \qquad \ldots(1)$$

माना कि मंदन बल के अन्तर्गत ट्रक तथा कार द्वारा रूकने से पूर्व तय की गई दूरियाँ क्रमश: S_1 तथा S_2 है तब गति के तृतीय समीकरण से

$$0 = u_1^2 - 2a_1s_1$$

$$0 = u_1^2 - \frac{2F}{m_1}s_1$$

$$\Rightarrow \quad S_1 = \frac{m_1 u_1^2}{2F} \qquad ...(2)$$

इसी प्रकार

$$S_2 = \frac{m_2 u_2^2}{2F} \qquad ...(3)$$

∵ समीकरण (2) में समी. (3) का भाग देने पर

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{u^2}{u_2^2}$$ समी. (1) की सहायता से

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{u_2^2}{u_1^2} \cdot \frac{u_1^2}{u_2^2} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow S_1 = S_2$$

इस प्रकार रूकने में ट्रक तथा कार द्वारा तय की गई दूरियाँ समान होगी।

उदा.13. **5.7 किग्रा. का एक ब्लॉक 1.2 मी./से. की चाल से एक घर्षणहीन मेज के क्षैतिज तल पर फिलसता है। यह ब्लॉक एक स्प्रिंग को संकुचित कर एक क्षण के लिए विरामावस्था में आ जाता है। स्प्रिंग में उत्पन्न अधिकतम संकुचन ज्ञात कीजिए। (स्प्रिंग नियतांक K = 1500 न्यूटन/मी.)**

हल– माना कि स्प्रिंग में संकुचन x होता है। x दूरी से संकुचित होने पर स्प्रिंग द्वारा ब्लॉक पर किया गया कार्य,

$$W = \frac{1}{2} k x^2 \qquad ...(1)$$

कार्य ऊर्जा प्रमेय के अनुसार

$$W = \Delta K \text{ (गतिज ऊर्जा में परिवर्तन)}$$

अर्थात् $$\frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

∴ अन्तिम गतिज ऊर्जा शून्य है।

$$x = v\sqrt{\frac{m}{k}} = 1.2 \times \sqrt{\frac{5.7}{1500}}$$

$$= 7.4 \text{ सेमी.}$$

उदा.14. **m (= 1 kg) द्रव्यमान का एक गुटका क्षैतिज सतह पर $v_i = 2m\ s^{-1}$ की चाल से चलते हुए $x = 0.10$ से $x = 2.01\ m$ के खुरदरे हिस्से में प्रवेश करता है। गुटके पर लगने वाला मंदक बल (F_r) इस क्षेत्र में x के व्युत्क्रमानुपाती है,**

$$F_r = \frac{-k}{x} \quad 0.1 < x < 2.01\ m$$

$$= 0 \quad x < 0.1m \text{ और } x > 2.01m \text{ के लिए}$$

जहाँ k = 0.5J। गुटका जैसे ही खुरदरे हिस्से को पार करता है, इसकी अंतिम गतिज ऊर्जा और चाल v_f की गणना कीजिए।

हल– कार्य–ऊर्जा प्रमेय से

$$\Delta K = K_f - K_i$$

$$= W = \int_{x_i}^{x_f} F dx$$

$$\Rightarrow \quad K_f = K_i + \int_{x_i}^{x_f} F dx$$

$$= K_i + \int_{0.1}^{2.01} \frac{(-k)}{x} dx$$

$$= K_i - k \int_{0.1}^{2.01} \frac{1}{x} dx$$

$$= K_i - k \left[\log_e x\right]_{0.1}^{2.01}$$

$$= K_i - k \left[\log_e 2.01 - \log_e 0.1\right]$$

$$= K_i - k \log_e \left(\frac{2.01}{0.1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} m v_i^2 - k \log_e (20.1)$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times (2)^2 - 0.5 \times 2.303 \log_{10} (20.1)$$

$$= 2 - 1.5 = 0.5 \text{ जूल}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} m v_f^2 = 0.5$$

$$\Rightarrow \quad v_f^2 = \frac{2 \times 0.5}{1} = 1$$

$$\Rightarrow \quad v_f = 1 \text{मी./से.}$$

उदा.15. पृथ्वी की सतह से 10 m की उँचाई पर स्थित 0.05 kg की वस्तु स्वतन्त्रतापूर्वक गिराई जाती है। पृथ्वी तल से टकराते समय वस्तु का वेग ज्ञात कीजिये।

(पुस्तक का उदाहरण 5.8)

हल– दिया गया है: h = 10 मीटर , m = 0.05 Kg , v = ?

कार्य–ऊर्जा प्रमेय के अनुसार

$$W = \Delta K$$

$$\Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2} m v^2 - 0$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 10}$$

$$= 14 \text{ मी/से}$$

उदा.16. 2 kg द्रव्यमान का एक पिण्ड 5 m की उँचाई से एक स्प्रिंग पर गिरता है। स्प्रिंग नियतांक = 2000 N/m हो तो स्प्रिंग का अधिकतम संकुचन ज्ञात कीजिये।

(पुस्तक का उदाहरण 5.9)

हल: दिया गया है: m = 2kg , h = 5 m.

K = 2000 N/m , x_{max} = ?

माना कि स्प्रिंग में अधिकतम संकुचन x_{max} है।

∵ पिण्ड द्वारा किया गया कार्य स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित होगा।

$$\Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2} K x_{max}^2$$

$$\Rightarrow \quad x_{max} = \sqrt{\frac{2mgh}{K}}$$

$$\Rightarrow \quad x_{max} = \sqrt{\frac{2\times 2\times 9.8\times 5}{2000}} = \sqrt{0.098}$$

$$= 0.31 \text{ मीटर}$$

उदा.17. एक कार का वेग 5 m / s से 20 m / s किया जाता है। यदि कार का द्रव्यमान 450 kg है तब उस पर किया गया कार्य ज्ञात कीजिये। (पुस्तक उदाहरण 5.10)

हल: दिया गया है: u = 5 m/s , v = 20 m/s ,

m = 450 Kg , W = ?

∵ कार्य - ऊर्जा प्रमेय के अनुसार

$$W = \Delta K$$

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{1}{2}m(v^2 - u^2) = \frac{1}{2}\times 450\left[(20)^2 - (5)^2\right]$$

$$= 225 \times 375 = 8.44 \times 10^4 \text{ जूल}$$

उदा.18. किस वेग पर एक 10^4 किग्रा. के ट्रक का (i) संवेग (ii) गतिज ऊर्जा एक कार के समान होंगे जिसका द्रव्यमान 4×10^3 किग्रा. व चाल 3 मी./से. है।

हल– (i) माना कि v वेग पर संवेग समान होंगे

ट्रक का संवेग $p_1 = MV = 10^4 \times V$

कार का संवेग $p_2 = mv = 4\times 10^3 \times 3$

प्रश्नानुसार $p_1 = p_2$

$$10^4 V = 4 \times 10^3 \times 3$$

$$V = \frac{12\times 10^3}{10^4}$$

$$= 1.2 \text{ मी./से.}$$

(ii) माना कि ट्रक व कार की गतिज ऊर्जा v' वेग पर समान होगी अर्थात्

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{1}{2}Mv'^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v' = \sqrt{\frac{mv^2}{M}}$$

$$= \sqrt{\frac{4\times 10^3 \times (3)^2}{10^4}} \text{ मी./से.}$$

$$= \sqrt{3.6} \text{ मी./से.}$$

$$= 1.86 \text{ मी./से.}$$

उदा.19. किसी पिण्ड का संवेग 200 प्रतिशत बढ़ा दिया जाये तो इसकी गतिज ऊर्जा में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात कीजिये। (पुस्तक का उदाहरण 5.11)

हल– माना कि प्रारंभिक संवेग p_1 है तब संवेग में 200 % की वृद्धि करने पर संवेग

$$p_2 = p_1 + \frac{200}{100}p_1 = 3p_1$$

∵ गतिज ऊर्जा $K = \frac{p^2}{2m}$

∵ गतिज ऊर्जा में प्रतिशत वृद्धि

$$= \left(\frac{K_2 - K_1}{K_1}\right)\times 100\% = \left(\frac{p_2^2 - p_1^2}{p_1^2}\right)\times 100\%$$

$$= \left(\frac{9p_1^2 - p_1^2}{p_1^2}\right)\times 100\%$$

$$= 8\times 100\% = 800\%$$

उदा.20. एक घोड़ा क्षैतिज से 60° के कोण पर 40 न्यूटन का बल लगाता हुए पीछे बंधी गाड़ी को 7.2 किमी/घंटे की चाल से खींचता है। इस घोड़े ने 10 मिनिट में कुल कितना कार्य किया तथा घोड़े की शक्ति क्या है?

हल– कार्य के अनुसार

$$W = Fs\cos\theta$$

शक्ति $$P = \frac{W}{t}$$

$$= 40 \times 2 \times \cos 60°$$

$$= 40 \text{ जूल/से.}$$

$$= 40 \text{ वॉट}$$

उदा.21. एक इंजन 20 kW ऊर्जा उत्पन्न करता है। उसके द्वारा 400 kg द्रव्यमान को 40 m ऊँचाई पर ले जाने में कितना समय लगेगा? [$g = 10\ ms^{-2}$]

(पुस्तक का उदाहरण 5.12)

हल– दिया गया है: P = 20 किलोवॉट = 20×10^3 वॉट,

m = 400 Kg, h = 40 m , t = ?

∵ शक्ति = $\frac{\text{कार्य}}{\text{समय}}$

कार्य = mgh

$$\Rightarrow P = \frac{mgh}{t}$$

$$\Rightarrow t = \frac{mgh}{t} = \frac{400\times 10\times 40}{20\times 10^3}$$

$$\Rightarrow t = 8 \text{ सेकण्ड}$$

उदा.22. एक ट्रेन के इंजन को 60 किमी. प्रति घण्टे की स्थिर चाल से गति करने के लिए, घर्षण के विरूद्ध 4000 न्यूटन का बल प्रयुक्त करना पड़ता है। इंजन द्वारा उत्पन्न की गई शक्ति की गणना कीजिए।

हल– शक्ति $P = Fv$

यहाँ $F = 4000$ न्यूटन

$v = 60$ किमी./घण्टा

$= \frac{360 \times 10^3}{60 \times 60}$ मी./से.

$= 16.67$ मी./से.

$P = 4000 \times 16.67$

$= 66680$ वॉट

उदा.23. एक क्रेन 2000 kg द्रव्यमान को 30 m की उंचाई तक 1 min में उठाती है। दूसरी क्रेन समान द्रव्यमान वाली इसी कार्य को 2 min में करती है। दोनों क्रेनों की शक्ति ज्ञात कीजिये।

(पुस्तक का उदाहरण 5.13)

हल– दिया गया है: $m = 2000$ Kg . $h = 30$ m,

$t_1 = 1$ मिनट $= 60$ सेकण्ड

$t_2 = 2$ मिनट $= 120$ सेकण्ड

∵ किया गया कार्य $W = mgh$

$W = 2000 \times 9.8 \times 30 = 5.88 \times 10^5$ जूल

∵ प्रथम क्रेन की शक्ति $P_1 = \frac{W}{t_1}$

$P_1 = \frac{5.88 \times 10^5}{60} = 9.8 \times 10^3$ वॉट

द्वितीय क्रेन की शक्ति $P_2 = \frac{W}{t_2}$

$P_2 = \frac{5.88 \times 10^5}{120} = 4.9 \times 10^3$ वॉट

उदा.24. कोई लिफ्ट जिसका कुल द्रव्यमान (लिफ्ट + यात्रियों का) 1800 kg है, ऊपर की ओर 2 m s^{-1} की अचर चाल से गतिमान है। 4000 N का घर्षण बल इसकी गति का विरोध करता है। लिफ्ट को मोटर द्वारा प्रदत्त न्यूनतम शक्ति का आंकलन वॉट और अश्व शक्ति में कीजिए।

हल– दिया गया है– $M = 1800$ किग्रा.

$v = 2$ मी./से.

$f = 4000$ न्यूटन

∴ लिफ्ट पर लगने वाला ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर बल

$F = Mg + f$

$= 1800 \times 10 + 4000$

$= 22000$ न्यूटन

इस बल को संतुलित करने के लिए मोटर द्वारा पर्याप्त शक्ति प्रदान की जानी चाहिए।

∴ $P = Fv = 22000 \times 2$

$= 44000$ वॉट

$= \frac{44000}{746}$ हॉर्स पावर

$= 58.98$ हॉर्स पावर

5.12 पिण्डों की टक्कर अथवा संघट्ट (Collision of Bodies)

जब दो कण (या पिण्ड) एक दूसरे की ओर गति करते हैं, तो निकट आने पर पारस्परिक अन्योन्य क्रिया (mutual interaction) के कारण, उनकी गति या संवेग या ऊर्जा परिवर्तित हो जाती है। यह प्रक्रिया टक्कर कहलाती है। टक्कर में दो कणों या पिण्डों का सम्पर्क में आना आवश्यक नहीं होता है। साधारणतः दो स्थूल पिण्ड (macroscopic body) टक्कर में एक दूसरे को स्पर्श करते हैं। लेकिन आवेशित सूक्ष्म कणों (microscopic particles) (जैसे एल्फ़ा कणों) की टक्कर में कण एक दूसरे को बिना स्पर्श किये प्रकीर्णित हो जाते हैं।

दो पिण्डों की टक्कर में रेखीय संवेग संरक्षण का नियम सदैव लागू होता है। लेकिन प्रयोगों से यह ज्ञात होता है कि कुछ टक्करों में गतिज ऊर्जा संरक्षित रहती है तथा कुछ में नहीं। टक्कर के दौरान टक्कर और विकृति, ऊष्मा व ध्वनि उत्पन्न करते हैं। आरंभिक गतिज ऊर्जा का कुछ भाग ऊर्जा के इन रूपों में रूपान्तरित हो जाता है।

यदि एक टक्कर में टकराने वाले कण टक्कर से पूर्व तथा टक्कर के पश्चात् एक ही सरल रेखा के अनुदिश गतिमान हो तो इसे सम्मुख टक्कर (Head - on collision) या सीधी टक्कर या एकविमीय टक्कर कहते है।

जब टक्कर करने वाले पिण्डों के वेग एक रेखा के अनुदिश नहीं होते हैं तो टक्कर के पश्चात् कण विभिन्न कोणों पर गतिमान होते हैं। इस प्रकार की टक्कर को तिर्यक टक्कर कहते हैं। तिर्यक टक्कर एक तल में होती है।

इस प्रकार की टक्कर को द्विविमीय टक्कर भी कहते है।

5.13 प्रत्यावस्थान गुणांक (Coefficient of restitution)

न्यूटन के टक्कर के नियमानुसार, यदि वस्तुओं में सीधी टक्कर होती है तो टक्कर के पश्चात् तथा टक्कर से पूर्व उनके आपेक्षिक वेगों का अनुपात नियत रहता है तथा टक्कर के प्रत्यावस्थान गुणांक (e) के ऋणात्मक मान के बराबर होता है, अर्थात्

$$\frac{\text{टक्कर के पश्चात् आपेक्षिक वेग}}{\text{टक्कर से पूर्व आपेक्षिक वेग}} = -e$$

माना दो कणों के टक्कर से पूर्व वेग क्रमशः u_1 तथा u_2 तथा टक्कर के बाद वेग क्रमशः v_1 तथा v_2 है तो न्यूटन के टक्कर के नियमानुसार,

$$\frac{v_1 - v_2}{u_1 - u_2} = -e$$

या $\frac{v_1 - v_2}{}$

पूर्णतः प्रत्यास्थ टक्कर के लिये $e = 1$.
पूर्णतः अप्रत्यास्थ टक्कर के लिये $e = 0$.
तथा अंशतः अप्रत्यास्थ टक्कर के लिये $0 < e < 1$

5.14 संघट्ट के प्रकार (Types of collision)

गतिज ऊर्जा संरक्षण के आधार पर टक्कर के निम्न प्रकार है:

(i) **पूर्णतः प्रत्यास्थ टक्कर (Perfectly Elastic Collision)**–यदि किसी टक्कर में कुल गतिज ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं होता है अर्थात् पिण्डों की आरंभिक गतिज ऊर्जा उनकी अंतिम गतिज ऊर्जा के बराबर होती है तो ऐसी टक्कर को पूर्णतः प्रत्यास्थ टक्कर कहते हैं। इस प्रकार के टक्कर में संवेग तथा गतिज ऊर्जा दोनों संरक्षित रहते हैं। परमाण्वीय तथा नाभिकीय मूल कणों के बीच टक्कर पूर्णतः प्रत्यास्थ टक्कर होती है।

माना कि दो कण जिनके द्रव्यमान क्रमशः m_1 तथा m_2 हैं, वे क्रमशः वेग u_1 तथा u_2 से चलकर आपस में सीधी प्रत्यास्थ टक्कर करते हैं। टक्कर के पश्चात् उनके वेग क्रमशः v_1 तथा v_2 हो जाते हैं तो इस प्रकार के टक्कर में संवेग संरक्षण के नियमानुसार,

$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$

तथा ऊर्जा संरक्षण नियम से–

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

(ii) **पूर्णतः अप्रत्यास्थ टक्कर (Perfectly inelastic collision)**–जब दो पिण्ड टक्कर के पश्चात् एक–दूसरे से चिपक जाते हैं या आपस में सटे रहते हैं और विकृति दूर नहीं होती है तो इस प्रकार टक्कर को पूर्णतः अप्रत्यास्थ टक्कर कहते हैं। इस प्रकार के टक्कर में गतिज ऊर्जा संरक्षित नहीं रहती है तथा गतिज ऊर्जा के अधिकांश भाग का अन्य प्रकार की ऊर्जाओं जैसे ऊष्मा इत्यादि में क्षय हो जाता है लेकिन इस प्रकार की टक्कर में संवेग संरक्षित रहता है। पूर्णतः अप्रत्यास्थ टक्कर के उदाहरण है, बंदूक की गोली का लक्ष्य से टकराकर उसी में रूक जाना, प्रक्षेप लोलक (ballistic pendulum) इत्यादि।

माना कि दो कणों के द्रव्यमान क्रमशः m_1 तथा m_2 है तथा वे क्रमशः u_1 और u_2 वेग से गतिमान है। इन कणों के बीच टक्कर पूर्णतः अप्रत्यास्थ होती है। टक्कर के पश्चात् दोनों कण आपस में जुड़ जाते हैं तथा एक ही वेग v से गति करते हैं।

संवेग संरक्षण नियम से–

$$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)v$$

या $$v = \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{(m_1 + m_2)}$$

टक्कर से पहले कणों की गतिज ऊर्जा

$$K_i = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$$

टक्कर क पश्चात संयुक्त कण की गतिज ऊर्जा

$$K_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

ऊर्जा संरक्षण के नियमानुसार–

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + Q$$

जहाँ Q कणों के टक्कर में गतिज ऊर्जा की हानि है। यह ऊर्जा ऊष्मा, ध्वनि या अन्य रूप में होती है। Q को **उत्तेजन ऊर्जा** (Excitation energy) भी कहते हैं।

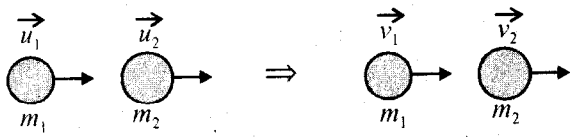
(iii) **अप्रत्यास्थ टक्कर (Inelastic collision)**–ऐसी टक्कर जिसमें संवेग तो संरक्षित रहता है परन्तु गतिज ऊर्जा संरक्षित नहीं रहती है। इस प्रकार की टक्करों में ऊर्जा की हानि होती है। टक्कर के पश्चात् कण अलग–अलग वेग से गति करते हैं अर्थात् टक्कर के पश्चात् कण आपस में चिपकते नहीं हैं। इसमें विकृति आंशिक रूप से कम हो जाती है और प्रारंभिक गतिज ऊर्जा की आंशिक रूप से क्षति हो जाती है।

5.15 एक विमीय प्रत्यास्थ टक्कर (One dimensional elastic collision)

माना कि दो कणों के द्रव्यमान क्रमशः m_1 तथा m_2 है, जिनके वेग टक्कर से पूर्व क्रमशः $\vec{u_1}$ तथा $\vec{u_2}$ और टक्कर के पश्चात् वेग क्रमशः $\vec{v_1}$ तथा $\vec{v_2}$ है, दोनों कणों में सम्मुख प्रत्यास्थ टक्कर होती है।

इस टक्कर में संवेग संरक्षण के नियम से–

$$m_1\vec{u_1} + m_2\vec{u_2} = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} \quad ...(1)$$



टक्कर से पूर्व टक्कर के पश्चात्

चित्र 5.15

तथा प्रत्यास्थ टक्कर के लिए गतिज ऊर्जा संरक्षण के लिए

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad ...(2)$$

सभी वेग सदिश एक ही दिशा में होने से सदिश चिन्ह प्रयुक्त करना आवश्यक नहीं है। उपयुक्त समीकरण (1) व (2) को निम्न रूप में लिखने पर

$$m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2) \quad ...(3)$$

तथा $$m_1(u_1^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - u_2^2) \quad ...(4)$$

समीकरण (4) को समीकरण (3). से भाग देने पर

$$u_1 + v_1 = v_2 + u_2 \quad ...(5)$$

या $$u_1 - u_2 = -(v_1 - v_2) \quad ...(6)$$

$(u_1 - u_2)$ टक्कर से पहले, दूसरे कण का पहले के सापेक्ष आपेक्षिक वेग हैं तथा $(v_1 - v_2)$ टक्कर के पश्चात् आपेक्षिक वेग है। समीकरण (6) से यह ज्ञात होता है कि पूर्णतः प्रत्यास्थ टक्कर में टक्कर से पूर्व आपेक्षिक वेग टक्कर के पश्चात् आपेक्षिक वेग से परिमाण में अपरिवर्तित रहता है। लेकिन दिशा में उत्क्रमित (reversed)

हो जाता है। उपरोक्त समीकरणों की सहायता से कणों के अन्तिम वेग v_1 तथा v_2 का मान ज्ञात कर सकते हैं।

समीकरण (6) को m_1 से गुणा करके समी. (3) में जोड़ने पर

$$2m_1u_1 + (m_2 - m_1)u_2 = (m_1 - m_2)v_2 \quad ...(7)$$

$$\Rightarrow \quad v_2 = \frac{2m_1u_1 + (m_2 - m_1)u_2}{m_1 + m_2} \quad ...(8)$$

समीकरण (6) को m_2 से गुणा करके समीकरण (3) में से घटाने पर

$$(m_1 - m_2)u_1 + 2m_2u_2 = v_1(m_1 + m_2)$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \frac{(m_1 - m_2)u_1 + 2m_2u_2}{m_1 + m_2} \quad ...(9)$$

विशेष स्थितियाँ

स्थिति I–जब दोनों कण समान द्रव्यमान के हों अर्थात् $m_1 = m_2$ हो तो समीकरण (8) तथा (9) से

$$v_2 = u_1 \text{ तथा } v_1 = u_2$$

अतः **यदि दोनों कणों के द्रव्यमान समान हों तो सीधी प्रत्यास्थ टक्कर के बाद उनके वेग आपस में परस्पर बदल (exchange) जाते हैं अर्थात् दो कणों की सीधी प्रत्यास्थ टक्कर में संवेग विनिमय (exchange of momentum) अधिकतम तब होता है जब कि कणों के द्रव्यमान समान हों।**

उपरोक्त निष्कर्ष का नाभिकीय भौतिकी में महत्वपूर्ण उपयोग है। नाभिकीय भट्टी में गतिशील न्यूट्रॉनों को मन्दित करने के लिये उनकी टक्कर किसी मंदक (moderator) के नाभिकों से की जाती है। उपरोक्त सिद्धान्त से न्यूट्रॉन तब ही अधिकतम मन्दित होंगे जबकि मंदक के नाभिक का द्रव्यमान न्यूट्रॉन के बराबर हो। हाइड्रोजन नाभिक इसी श्रेणी में आते हैं। अतः मन्दक के रूप में हाइड्रोजनीय पदार्थ जैसे–भारी जल, पैराफिन इत्यादि का प्रयोग किया जाता है।

स्थिति II–यदि टक्कर से पूर्व दूसरा कण स्थिरावस्था में हो अर्थात् $u_2 = 0$ हो तो समीकरण (8) तथा (9) से–

$$v_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)u_1 \quad ...(10)$$

तथा

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)u_1 \quad ...(11)$$

यदि द्रव्यमान समान हो तों $v_2 = u_1, v_1 = 0$

अर्थात् **पहला कण टक्कर के पश्चात् स्थिर हो जायेगा व दूसरा पहले के प्रारंभिक वेग से गति करेगा। इस प्रकार इस टक्कर में ऊर्जा का पूर्ण स्थानांतरण होता है।**

जब $m_1 \neq m_2$ हो तो गतिज ऊर्जा का अंश जो दूसरे कण को स्थानान्तरित होता है, उसका मान होगा–

$$= \frac{\frac{1}{2}m_2v_2^2}{\frac{1}{2}m_1u_1^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}m_2\left(\frac{2m_1u_1}{m_1 + m_2}\right)^2}{\frac{1}{2}m_1u_1^2}$$

$$= \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$= \frac{4\frac{m_2}{m_1}}{(1 + \frac{m_2}{m_1})^2} \quad ...(12)$$

जब कणों के द्रव्यमानों का अनुपात इकाई होता है तो दूसरे कण की टक्कर के पश्चात् सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा स्थानान्तरित हो जाती है। परन्तु यदि $m_1 > m_2$ या $m_1 < m_2$ हो तो स्थानान्तरित गतिज ऊर्जा का अंश एक से कम होता है।

स्थिति III–यदि $m_2 >>> m_1$ तथा $u_2 = 0$ हो तो समीकरण (10) तथा (11) से,

तथा $\left.\begin{matrix} v_1 \approx -u_1 \\ v_2 = 0 \quad \text{होगा} \end{matrix}\right\}$ ...(13)

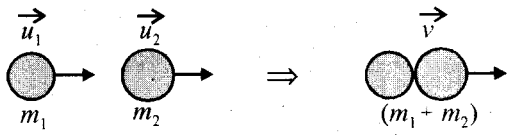
उदाहरण के लिये यदि किसी गेंद को ऊँचाई से पृथ्वी की चिकनी सतह पर गिराया जाये तो गेंद तथा पृथ्वी के बीच की टक्कर इस स्थिति के तुल्य होती है तथा टक्कर के पश्चात् गेंद अपने प्रारंभिक वेग के परिमाण के तुल्य वेग से वापिस लौट जाती है।

स्थिति IV–यदि $m_2 <<< m_1$ तथा $u_2 = 0$ हो तो समीकरण (10) तथा (11) से,

तथा $\left.\begin{matrix} v_1 \approx u_1 \\ v_2 = 2u_1 \quad \text{होगा} \end{matrix}\right\}$ ...(14)

अर्थात् जब कोई भारी कण किसी हल्के कण को टक्कर मारता है तो भारी कण के वेग में नगण्य अन्तर होता है लेकिन हल्का कण भारी कण के वेग के दुगुने वेग से गतिमान होता है।

5.16 पूर्णतः अप्रत्यास्थ टक्कर (Perfectly inelastic collision)



चित्र 5.16

माना दो कण जिनके द्रव्यमान क्रमशः m_1 तथा m_2 है और टक्कर से पूर्व उनके वेग क्रमशः $\vec{u_1}$ तथा $\vec{u_2}$ है। टक्कर के पश्चात् एक दूसरे से चिपक जाते हैं तथा संयुक्त कण $\vec{v}$ वेग से गति करता है। संवेग संरक्षण के नियम से–

$$m_1\vec{u_1} + m_2\vec{u_2} = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

$$\therefore \quad \vec{v} = \frac{m_1\vec{u_1} + m_2\vec{u_2}}{(m_1 + m_2)} \quad ...(1)$$

विशेष अवस्था के रूप में माना कि दूसरा कण स्थिर है।

अर्थात् $\vec{u_2} = 0$ तो

$$m_1\vec{u_1} = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

$$\therefore \quad \vec{v} = \frac{m_1\vec{u}_1}{(m_1+m_2)} \qquad ...(2)$$

अतः $\vec{v} < \vec{u}_1$

टक्कर से पूर्व गतिज ऊर्जा

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1u_1^2$$

टक्कर के पश्चात् गतिज ऊर्जा

$$K_2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1u_1}{m_1+m_2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(m_1+m_2)(m_1^2u_1^2)}{(m_1+m_2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1^2u_1^2}{(m_1+m_2)} \qquad ....(3)$$

अतः $\frac{K_2}{K_1} = \frac{\text{टक्कर के बाद गतिज ऊर्जा}}{\text{टक्कर से पूर्व गतिज ऊर्जा}}$

$$= \frac{\frac{1}{2}\frac{m_1^2u_1^2}{(m_1+m_2)}}{\frac{1}{2}m_1u_1^2}$$

$$= \frac{m_1^2u_1^2}{(m_1+m_2)(m_1u_1^2)}$$

$$= \left(\frac{m_1}{(m_1+m_2)}\right) < 1 \qquad ...(4)$$

$\because m_1+m_2 > m_1$

अतः समीकरण (4) से यह ज्ञात होता है। कि $K_2 < K_1$ अर्थात् कणों के टक्कर में ऊर्जा का ह्रास होगा। ऊर्जा की यह हानि अन्य रूप में प्रकट होगी।

इस प्रकार की टक्कर में टक्कर के पश्चात् गतिज ऊर्जा टक्कर के पूर्व की गतिज ऊर्जा से कम होती है अर्थात् गतिज ऊर्जा में कमी आ जाती है।

अतः संघट्ट में गतिज ऊर्जा में हानि

$$\Delta K = K_1 - K_2$$

$$= \frac{1}{2}m_1u_1^2 - \frac{1}{2}\frac{m_1^2u_1^2}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{1}{2}(m_1u_1^2)\left[1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}m_1u_1^2\left[\frac{m_1+m_2-m_1}{m_1+m_2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)u_1^2$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)u_1^2$$

जो कि एक धनात्मक राशि है।

5.17 द्विविमीय टक्कर (Two dimensional collision)

यदि टक्कर X – Y तल में होती है तो संवेग संरक्षण के सिद्धान्त से X–दिशा में कुल रेखीय संवेग अर्थात् X–दिशा में संवेगों के वियोजित भागों का योग नियत रहेगा व इसी प्रकार Y–दिशा में कुल रेखीय संवेग नियत रहेगा। इसके अतिरिक्त प्रत्यास्थ टक्कर में गतिज ऊर्जा भी संरक्षित रहेगी।

माना कि m_1 तथा m_2 द्रव्यमान के दो कण एक तल (XY-तल) में $\vec{u}_1$ तथा $\vec{u}_2$ वेग से गति करते हैं तथा टक्कर के पश्चात् भी ये कण उसी तल में क्रमशः $\vec{v}_1$ तथा $\vec{v}_2$ वेग से गति करते हैं यदि टक्कर से पूर्व दोनों कण X- अक्ष से क्रमशः α_1 व α_2 कोण बनाते हैं तथा टक्कर के पश्चात् उसी अक्ष से क्रमशः β_1 व β_2 कोण बनाते हैं तो X-अक्ष का दिशा में संवेग संरक्षण सिद्धान्त से

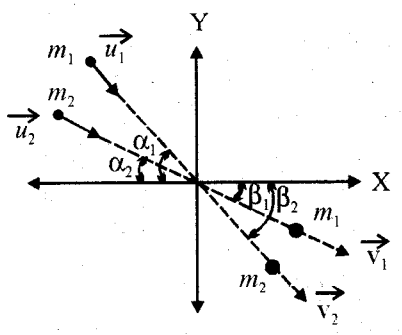
$$m_1u_1\cos\alpha_1 + m_2u_2\cos\alpha_2 = m_1v_1\cos\beta_1 + m_2v_2\cos\beta_2 \qquad ...(1)$$

इसी प्रकार Y-अक्ष की दिशा में संवेग संरक्षण सिद्धांत से

$$m_1u_1\sin\alpha_1 + m_2u_2\sin\alpha_2 = m_1v_1\sin\beta_1 + m_2v_2\sin\beta_2 \qquad ...(2)$$

प्रत्यास्थ टक्कर में गतिज ऊर्जा भी संरक्षित होगी, अतः

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad ...(3)$$



चित्र 5.17

समीकरण (1), (2) व (3) को हल कर टक्कर की व्याख्या की जा सकती है।

उदा.25.3 किग्रा. द्रव्यमान की एक वस्तु स्थिरावस्था में रखी दूसरी वस्तु से टकराती है तथा अपने वास्तविक वेग के एक तिहाई वेग से मूल दिशा में गति करती है। दूसरी वस्तु का द्रव्यमान ज्ञात करो।

हल– रेखीय संवेग संरक्षण नियम से ...

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \quad ...(1)$$

यहाँ $m_1 = 3$ किग्रा.

$u_1 = u$ मी./से.

$m_2 = m$ किग्रा.

$u_2 = 0$ मी./से.

$v_1 = \frac{u}{3}$ मी./से.

$$3u + 0 = 3.\frac{u}{3} + mv_2$$

या $$mv_2 = 2u \quad ...(2)$$

गतिज ऊर्जा संरक्षण नियम से

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$\frac{1}{2} \times 3 \times u^2 + 0 = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{u^2}{9} + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$mv_2^2 = \frac{8u^2}{3} \quad ...(3)$$

समीकरण (3) को (2) से भाग देने पर

$$v_2 = \frac{4u}{3}$$

समीकरण (2) में v_2 का मान रखने पर

$$m \times \frac{4}{3}u = 2u$$

$$m = 1.5 \text{ किग्रा.}$$

अतः दूसरी वस्तु का द्रव्यमान 1.5 किग्रा. है।

उदा.26. 5 kg की एक गेंद 20 m/s के वेग से चलती हुई एक अन्य 10 kg की गेंद से टकराती है जो उसी दिशा में उसी रेखा पर 10 m/s के वेग से जा रही है। टक्कर के पश्चात् पहली गेंद का वेग उसी दिशा में 8 m/s रह जाता है, दूसरी गेंद का वेग ज्ञात कीजिये। क्या यह टक्कर प्रत्यास्थ है? (पुस्तक का उदाहरण 5.14)

हल- दिया गया है: m_1=5 Kg , u_1 = 20 m/s,
m_2=10 Kg , u_2= 10 m/s. v_1 = 8 m/s , v_2 = ?
रेखीय संवेग संरक्षण नियम से

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

$$\Rightarrow \quad 5 \times 20 + 10 \times 10 = 5 \times 8 + 10\, v_2$$

$$\Rightarrow \quad 100 + 100 = 40 + 10\, v_2$$

$$\Rightarrow \quad 10\, v_2 = 160$$

$$\Rightarrow \quad v_2 = 16 \text{ m/s}$$

प्रत्यास्थ टक्कर के लिए टक्कर से पूर्व कुल गतिज ऊर्जा का मान टक्कर के पश्चात् कुल गतिज ऊर्जा के बराबर होना चाहिए

$\because$ टक्कर से पूर्व कुल गतिज ऊर्जा

$$K_i = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times (20)^2 + \frac{1}{2} \times 10 \times (10)^2$$

$$= 1000 + 500$$

$$= 1500 \text{ जूल} \quad ...(1)$$

टक्कर के पश्चात् कुल गतिज ऊर्जा

$$K_f = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times (8)^2 + \frac{1}{2} \times 10 \times (16)^2$$

$$= 160 + 1280 = 1440 \text{ जूल} \quad ...(2)$$

इस प्रकार समीकरण (1) व (2) से स्पष्ट है कि टक्कर से पूर्व कुल गतिज ऊर्जा तथा टक्कर पश्चात कुल गतिज ऊर्जा बराबर नहीं है। अतः यह टक्कर प्रत्यास्थ टक्कर नहीं है।

उदा.27. 0.012 किग्रा. द्रव्यमान की एक गोली 70 मी./से. के वेग से 0.4 किग्रा. द्रव्यमान के स्वतंत्र रूप से लटकते लकड़ी के ब्लॉक में धँस जाती है। ब्लॉक द्वारा ग्रहण किया गया वेग ज्ञात कीजिए।

हल- गोली का प्रारम्भिक संवेग = mv

$$= 0.012 \times 70 = 0.84 \text{ किग्रा. मी/से.}$$

लकड़ी के ब्लॉक का प्रारम्भिक संवेग = 0

माना कि टक्कर के पश्चात् ब्लॉक तथा गोली का संयुक्त वेग v है।

टक्कर के पश्चात् संवेग = $(M + m)v$

$$= (0.4 + 0.012)v$$

$$= 0.412\, v$$

संवेग संरक्षण नियम से

$$0.412v = 0.84 + 0$$

$$v = 2.038 \text{ मी./से.}$$

उदा.28. 2 kg द्रव्यमान का एक पिण्ड किसी अन्य स्थिर पिण्ड से पूर्णतः अप्रत्यास्थ टक्कर करता है। यदि टक्कर के बाद दोनों पिण्ड उसी दिशा में पहले पिण्ड के 1/4 वेग से गतिमान हो तो दूसरे पिण्ड का द्रव्यमान ज्ञात कीजिये। (पुस्तक का उदाहरण 5.15)

हल- माना कि टक्कर से पूर्व पहले पिण्ड का वेग u है तब संवेग संरक्षण नियमानुसार

$$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)\, v$$

यहाँ टक्कर पूर्णतः अप्रत्यास्थ होने से टक्कर के पश्चात् पिण्डों का उभयनिष्ठ वेग v है।

$$\because \quad 2u + m_2 \times 0 = (2 + m_2)\, \frac{u}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 2u = \frac{u}{2} + \frac{m_2u}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m_2u}{4} = \frac{3u}{2}$$

$$\Rightarrow \quad m_2 = 6 \text{ Kg}$$

उदा.29. गतिशील न्यूट्रॉनों का मंदन-किसी नाभिकीय रिऐक्टर में तीव्रगामी न्यूट्रॉन (विशिष्ट रूप से वेग 10^7 ms^{-1}) को 10^3 m s^{-1} के वेग तक मंदित कर दिया जाना चाहिए ताकि नाभिकीय विखंडन अभिक्रिया

में न्यूट्रॉन की यूरेनियम के समस्थानिक $^{235}_{92}U$ से अन्योन्य क्रिया करने की प्रायिकता उच्च हो जाए। सिद्ध कीजिए कि न्यूट्रॉन एक हल्के नाभिक, जैसे ड्यूटीरियम या कार्बन जिसका द्रव्यमान न्यूट्रॉन के द्रव्यमान का मात्र कुछ गुना है, से प्रत्यास्थ संघट्ट करने में अपनी अधिकांश गतिज ऊर्जा की क्षति कर देता है। ऐसे पदार्थ प्रायः भारी जल (D_2O) अथवा ग्रेफाइट, जो न्यूट्रॉनों की गति को मंद कर देते हैं, 'मंदक' कहलाते हैं।

हल– न्यूट्रॉन की प्रारंभिक गतिज ऊर्जा

$$K_{1i} = \frac{1}{2}m_1u_1^2$$

तथा अंतिम गतिज ऊर्जा $K_{1f} = \frac{1}{2}m_1v_1^2$

$$= \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2 u_1^2$$

[∵ प्रत्यास्थ टक्कर के लिए $u_2 = 0$ होने की स्थिति में

$$v_1 = \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)u_1$$]

अतः गतिज ऊर्जा का अंश जो विमंदित नाभिक को स्थानान्तरित होता है।

$$f_1 = \frac{K_{1f}}{K_{1i}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{1}{2}m_1u_1^2}$$

$$= \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2 \quad ...(1)$$

विमंदित नाभिक K_{2f}/K_{1i} द्वारा भिन्नात्मक गतिज ऊर्जा में वृद्धि

$$f_2 = \frac{\frac{1}{2}m_2v_2^2}{\frac{1}{2}m_1u_1^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}m_2\left(\frac{2m_1u_1}{m_1+m_2}\right)^2}{\frac{1}{2}m_1u_1^2}$$

$$= \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2} \quad ....(2)$$

ड्यूटीरियम ($_1H^2$) के लिए

$$m_2 = 2m_1$$

[या $f_2 = 1 - f_1$ द्वारा भी समी.(2) प्राप्त किया जा सकता है।]

∴ समी (1) व (2) से $f_1 = \left(\frac{m_1-2m_1}{m_1+2m_1}\right)^2 = \frac{1}{9}$

तथा $f_2 = \frac{8}{9}$

अतः न्यूट्रॉन की लगभग 90% गतिज ऊर्जा (अधिकांश) ड्यूटीरियम को स्थानान्तरित हो जाती है।

उदा.30. एक गेंद विराम अवस्था से 5 m गिरने के बाद एक लिफ्ट की छत से टकराती है। यदि टकराते समय लिफ्ट उपर की ओर 1 m / s की गति से आ रही हो तो गेंद किस गति से प्रतिक्षिप्त होगी?

(पुस्तक का उदाहरण 5.16)

हल– दिया गया है: h = 5 मीटर , u_2=1 मी/से .

माना कि गेंद तथा लिफ्ट का प्रारंभ में वेग क्रमशः u_1 तथा u_2 तथा अंत में वेग क्रमशः v_1 व v_2 है।

∴ $u_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times10\times5} = 10$ m/s

v_1 = -10 m/s (गेंद के प्रारंभिक वेग के विपरीत)

u_2 = -1 m/s (गेंद के प्रारंभिक वेग के विपरीत)

v_2 = -1 m/s (गेंद के प्रारंभिक वेग के विपरीत)

∴ टक्कर के लिए न्यूटन के नियमानुसार

$$\frac{v_1-v_2}{u_1-u_2} = -e \qquad \because e = 1 \text{ (प्रश्नानुसार)}$$

$\Rightarrow v_1-v_2 = -1(u_1-u_2)$

$\Rightarrow v_1 = v_2 - u_1 + u_2$

$\Rightarrow v_1 = -1 - 10 - 1 = -12$ m/s

∴ गेंद का प्रतिक्षिप्त वेग = 12 m/s (गेंद के प्रारंभिक वेग के विपरीत)

उदा.31. एक सीधी प्रत्यास्थ टक्कर में एक कण दूसरे स्थिर कण से टकराता है तो उसका वेग (दूसरे कण का) क्या होगा?

हल– माना एक कण जिसका द्रव्यमान m_1 तथा प्रारम्भिक वेग u_1 है एक अन्य स्थिर कण जिसका द्रव्यमान m_2 है सीधी प्रत्यास्थ टक्कर करता है माना टक्कर के पश्चात् उनके वेग क्रमशः v_1 व v_2 हो जाते हैं।

अतः संवेग संरक्षण नियम से

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

या $m_1u_1 = m_1v_1 + m_2v_2$ ($\because u_2 = 0$)

$m_1(u_1 - v_1) = m_2v_2$ ....(1)

ऊर्जा संरक्षण नियम से

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

या $\frac{1}{2}m_1u_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$

$m_1(u_1^2 - v_1^2) = m_2v_2^2$ ....(2)

समीकरण (2) में समीकरण (1) का भाग देने पर

$u_1 + v_1 = v_2$

या $u_1 = v_2 - v_1$ ....(3)

समीकरण (3) में m_1 का गुणा कर समीकरण (1) के साथ जोड़ने पर

$m_1u_1 = m_1v_1 + m_2v_2$

$m_1u_1 = -m_1v_1 + m_1v_2$

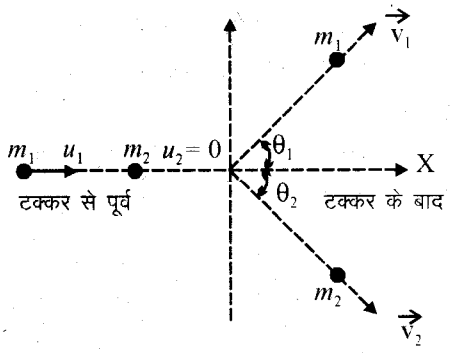
$2m_1u_1 = v_2(m_1 + m_2)$

या $v_2 = \frac{2m_1u_1}{m_1+m_2}$

उदा.32. एक गतिशील कण समान द्रव्यमान के दूसरे स्थिर कण से टक्कर करता है। टक्कर सम्मुख नहीं है परन्तु पूर्णतः प्रत्यास्थ है। सिद्ध करें कि टक्कर के पश्चात् ये कण परस्पर लम्बवत् गति करेंगे।

(पुस्तक का उदाहरण 5.17)

हल–



चित्र 5.18

माना कि एक m द्रव्यमान का गतिशील कण, m_2 द्रव्यमान के स्थिर कण से प्रत्यास्थ टक्कर करता है। गतिशील कण का टक्कर से पूर्व वेग $\vec{u_1}$ है तथा टक्कर के पश्चात् अपनी प्रारम्भिक दिशा से कोण θ_1 पर विचलित होकर वेग $\vec{v}$ से गति करता है और कण m_2 टक्कर के बाद प्रथम कण की प्रारम्भिक दिशा से कोण – θ_2 पर वेग $\vec{v_2}$ से गति करता है।

यदि वेग $\vec{u_1}$ की दिशा X-अक्ष के अनुदिश हो तथा और $\vec{v_1}$ तल X–Y में स्थित हो। जैसा कि चित्र में प्रदर्शित किया गया है तो–
संवेग घटकों के संरक्षण नियम से,
X-दिशा के घटकों के लिये–

$$m_1u_1 = m_1v_1\cos\theta_1 + m_2v_2\cos\theta_2 \quad ...(1)$$

Y-दिशा के घटकों के लिये–

$$0 = m_1v_1\sin\theta_1 + m_2v_2\sin(-\theta_2)$$

या

$$0 = m_1v_1\sin\theta_1 - m_2v_2\sin\theta_2 \quad ...(2)$$

ऊर्जा संरक्षण के नियम से–

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad ...(3)$$

उपरोक्त स्थिति का विश्लेषण करने से यह ज्ञात होता है कि हमें चार अज्ञात राशियों v_1, v_2, θ_1 तथा θ_2 का मान उपर्युक्त तीन समीकरणों की सहायता से ज्ञात करना है। जो कि असम्भव है क्योंकि चार अज्ञात राशियों का मान ज्ञात करने के लिए कम से कम चार समीकरण होने चाहिये अर्थात् इन तीन समीकरणों के अतिरिक्त एक और समीकरण इन राशियों के बीच में ज्ञात होना चाहिए।
उपरोक्त समीकरणों से– यदि $m_1 = m_2$

$$u_1 = v_1\cos\theta_1 + v_2\cos\theta_2 \quad ...(4)$$

$$0 = v_1\sin\theta_1 - v_2\sin\theta_2 \quad ...(5)$$

तथा

$$u_1^2 = v_1^2 + v_2^2 \quad ...(6)$$

समी. (4) व (5) का वर्ग करके जोड़ने पर

$$u_1^2 = v_1^2\cos^2\theta_1 + v_2^2\cos^2\theta_2 + 2v_1v_2\cos\theta_1\cos\theta_2 + v_1^2\sin^2\theta_1 + v_2^2\sin^2\theta_2 - 2v_1v_2\sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$= v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)$$

समी. (6) के उपयोग से–

$$2v_1v_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) = 0$$

यदि टक्कर के पश्चात् कोई कण स्थिर नहीं हो जाता (v_1 व $v_2 \neq 0$) तो

$$(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) = 0$$

या

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = 0$$

जिससे

$$\theta_1 + \theta_2 = 90° \quad ...(7)$$

अर्थात् टक्कर के पश्चात् कण परस्पर लम्बवत् दिशाओं में गति करेंगे।

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. ऋणात्मक कार्य का उदाहरण दीजिये।
प्र.2. परिवर्ती बल द्वारा किए गए कार्य का सूत्र लिखिए।
प्र.3. इलेक्ट्रॉन वोल्ट (eV) तथा जूल में सम्बन्ध लिखिए।
प्र.4. कार्य तथा ऊष्मा के मध्य सम्बन्ध लिखिए।
प्र.5. ऊष्मा के यांत्रिक तुल्यांक का मान लिखिए।
प्र.6. ऊर्जा से क्या तात्पर्य है?
प्र.7. 1 किग्रा कोयले के दहन से लगभग कितनी ऊर्जा मुक्त होती है?
प्र.8. गतिज ऊर्जा का सूत्र लिखिए।
प्र.9. स्प्रिंग की प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा का सूत्र लिखिए।
प्र.10. कार्य-ऊर्जा प्रमेय लिखिए।
प्र.11. संरक्षी तथा असंरक्षी बलों का उदाहरण दीजिये।
प्र.12. 1 अश्वशक्ति का वॉट में मान लिखिए।
प्र.13. पूर्णतः प्रत्यास्थ टक्कर का उदाहरण दीजिये।
प्र.14. पूर्णतः अप्रत्यास्थ टक्कर का उदाहरण लिखिए।
प्र.15. टक्कर के लिए न्यूटन का नियम लिखिए।
प्र.16. पूर्णतः अप्रत्यास्थ टक्कर के लिए e का मान लिखिए।
प्र.17. निम्नलिखित का मान क्या है ?
(a) किसी वेट–लिफ्टर द्वारा 100 किग्रा के भार को 40 सेकण्ड तक अपने कंधों पर उठाए रखने में किया कार्य ।
(b) किसी ठोस दीवार को 200 न्यूटन के बल द्वारा दबाए जाने में किया गया कार्य।
(c) चन्द्रमा को अपनी कक्षा में (कक्षा वृत्तीय मानी गई है) बनाए रखने में पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य, यदि दीर्घवृत्तीय कक्षा हो तब।
(d) गुरुत्व के खिलाफ किसी इंजन द्वारा किया गया कार्य यदि यह किसी समतल में यात्रा कर रहो हो।
(e) सभी द्रव्यों से दूर व विद्युत–चुम्बकीय क्षेत्र से मुक्त रिक्त दिक् स्थान में प्रकाश की चाल के आधे के बराबर चाल से चल रहे किसी इलेक्ट्रॉन द्वारा किया गया कार्य ?
प्र.18. यदि दो प्रोटॉन एक–दूसरे के समीप लाये जायें तो इस निकाय की स्थितिज ऊर्जा घटेगी या बढ़ेगी ? यदि एक प्रोटॉन व एक इलेक्ट्रॉन समीप लाये जायें तब ?
प्र.19. घड़ी में चाबी भरने पर स्प्रिंग में कौन–सी ऊर्जा संचित होती है? घड़ी के चलते रहने पर यह ऊर्जा कौन–सी ऊर्जा में रूपान्तरित होती है ?
प्र.20. कोई एक ऐसा उदाहरण दीजिये जिसमें किसी वस्तु पर लगने

वाले बल द्वारा किया गया कार्य शून्य हो, यद्यपि लगाये गये बल के कारण वस्तु अपनी प्रारम्भिक स्थिति से विस्थापित हो जाती हो।

प्र.21. कारण सहित उत्तर दीजिये कि निम्न दशाओं में स्थितिज ऊर्जा बढ़ती है अथवा घटती है, यदि–
(a) स्प्रिंग को दबाया जाये।
(b) स्प्रिंग को खींचा जाये।
(c) विजातीय आवेशों को एक–दूसरें के निकट लाया जाये।
(d) गुरुत्वाकर्षण बल के विपरीत वस्तुओं को दूर ले जाया जाये।
(e) जल में वायु के बुलबुले के ऊपर उठने पर।

प्र.22. एक ट्रक तथा एक कार समान गतिज ऊर्जा से सीधी सड़क पर चल रहे हैं। दोनों के इंजन एक साथ बन्द कर देने पर कौन–सा कम दूरी पर रुकेगा ?

प्र.23. किस प्रक्रिया में संवेग संरक्षित रहता है परन्तु गतिज ऊर्जा नहीं? किस गति में संवेग बदलता है परन्तु गतिज ऊर्जा नहीं ?

प्र.24. तोप से दागा गया गोला ऊपर जाकर वायु में फट जाता है; संवेग तथा गतिज ऊर्जा में क्या परिवर्तन होगा ?

प्र.25. क्या किसी पूर्णतः अप्रत्यास्थ टक्कर में सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा क्षय हो जाती है ?

प्र.26. एक कुली 10 किग्रा के बक्से को 1 मिनट में ऊपर छत पर चढ़ा देता है। दूसरा कुली उसी बक्से को 2 मिनट में उसी छत पर चढ़ा देता है। कौन से कुली ने अधिक कार्य किया? किसकी शक्ति अधिक है?

उत्तरमाला

उ.1. घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होता है।

उ.2. $W = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} . d\vec{x}$

उ.3. $1\,eV = 1.6 \times 10^{-19}$ जूल

उ.4. $W = JH$

उ.5. $J = 4.2 \times 10^3$ जूल/किलो कैलोरी

उ.6. किसी वस्तु द्वारा कार्य करने की कुल क्षमता ऊर्जा कहलाती है।

उ.7. 3×10^7 जूल

उ.8. $\frac{1}{2}mv^2$

उ.9. $\frac{1}{2}kx^2$

उ.10. किसी वस्तु पर परिणामी बल लगाने पर, बल द्वारा किया गया कार्य उसकी गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है।

उ.11. संरक्षी बल–गुरुत्वीय बल, स्थिर वैद्युत बल, प्रत्यास्थ बल आदि।
असंरक्षी बल–घर्षण बल, श्यान बल आदि।

उ.12. 1 अश्व शक्ति = 746 वॉट

उ.13. परमाण्वीय तथा नाभिकीय मूल कणों के बीच टक्कर पूर्णतः प्रत्यास्थ टक्कर होती है।

उ.14. प्रक्षेप लोलक।

उ.15. यदि वस्तुओं में सीधी टक्कर होती है तो टक्कर के पश्चात् तथा टक्कर से पूर्व उनके आपेक्षिक वेगों का अनुपात नियत रहता है तथा टक्कर के प्रत्यावस्थान गुणांक के ऋणात्मक मान के बराबर होता है।

उ.16. $e = 0$

उ.17. (a) $W = 0$ क्योंकि लगाये गये बल द्वारा कोई विस्थापन नहीं किया गया है ।
(b) $W = 0$ क्योंकि लगाये गये बल द्वारा कोई विस्थापन नहीं किया गया है।
(c) व (d) में $W = 0$ क्योंकि विस्थापन हमेशा लगाये गये बल के लम्बवत् है। दीर्घ वृत्तीय कक्षा में पूर्ण कक्षा के लिए $W = 0$ होगा।
(e) $W = 0$ क्योंकि इलेक्ट्रॉन पर कोई बल नहीं लग रहा है।

उ.18. प्रोटॉन को एक–दूसरे के पास लाने में प्रतिकर्षण के विरुद्ध बाह्य बल द्वारा कार्य करना होगा अतः स्थितिज ऊर्जा बढ़ेगी। प्रोटॉन व इलेक्ट्रॉन के पास आने में उनके बीच लगने वाले आकर्षण बल द्वारा कार्य करने के कारण, उनकी स्थितिज ऊर्जा घटेगी, गतिज ऊर्जा बढ़ेगी।

उ.19. प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा, गतिज ऊर्जा में

उ.20. पृथ्वी द्वारा चन्द्रमा पर लगे गुरुत्वाकर्षण बल के कारण चन्द्रमा पृथ्वी के चारों ओर लगभग वृत्ताकार पथ में घूमता है अतः बल व चलने की दिशा एक–दूसरे के लम्बवत् है इसलिए $W = 0$ होता है। यद्यपि चन्द्रमा अपनी स्थिति से विस्थापित होता है।

उ.21. (a) बढ़ेगी, (b) बढ़ेगी, (c) घटेगी, (d) बढ़ेगी, (e) घटेगी।

उ.22. $\frac{1}{2}m_1u_1^2 = F_1s_1 = \mu M_1 g s_1$. $\frac{1}{2}m_2u_2^2 = F_2s_2 = \mu M_2 g s_2$

$\therefore K_1 = K_2$ अतः $\therefore \frac{s_1}{s_2} = \frac{u_1^2}{u_2^2} = \frac{m_2}{m_1}$ तथा

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 = \frac{1}{2}m_2u_2^2 \Rightarrow \frac{u_1^2}{u_2^2} = \frac{m_2}{m_1}$$

चूँकि ट्रक का द्रव्यमान $m_1 > m_2$ (कार का द्रव्यमान) अतः $s_1 < s_2$ अर्थात् जिसका द्रव्यमान अधिक है उसके द्वारा चली गई दूरी कम है। अतः ट्रक कम दूरी पर रुकेगा।

उ.23. अप्रत्यास्थ टक्कर में, एकसमान वृत्तीय गति में

उ.24. संवेग संरक्षित रहेगा, गतिज ऊर्जा बढ़ जायेगी क्योंकि गोले के भीतर बारुद की रासायनिक स्थितिज ऊर्जा, गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जायेगी।

उ.25. नहीं, केवल उतनी गतिज ऊर्जा का क्षय होता है, जितना कि संवेग के संरक्षित होने के लिये आवश्यक है।

उ.26. दोनों ने बराबर कार्य किया, पहले कुली की शक्ति अधिक है।

विविध उदाहरण

उदा. 33. (i) डी.एन.ए. के एक आबन्ध को तोड़ने के लिए आवश्यक ऊर्जा 10^{-20} जूल, (ii) वायु के एक अणु की गतिज ऊर्जा 10^{-21} जूल तथा (iii) वयस्क मानव की औसत दैनिक भोजन की खपत 10^7 जूल है। (i) तथा (ii) में दी गयी ऊर्जाएँ eV तथा (iii) में दी गयी ऊर्जा किलो

कैलोरी (KCal) में ज्ञात कीजिए।

हल– (i) $\because$ 1.6×10^{-19} जूल = 1eV

$$\therefore \text{ 1 जूल} = \frac{1}{1.6 \times 10^{-19}} eV$$

अत: 10^{-20} जूल $= \frac{1}{1.6 \times 10^{-19}} \times 10^{-20} eV$

$= 0.0625$ eV

(ii) 10^{-21} जूल $= \frac{1}{1.6 \times 10^{-19}} \times 10^{-21} eV$

$= 0.0062$ eV

(iii) $\because$ W = JH

अत: 10^7 जूल के तुल्य किलो कैलोरी (KCal)

$$= \frac{10^7}{4.2 \times 10^3} = 0.2380 \times 10^4$$

= 2380 किलो कैलोरी (KCal)

उदा.34.एक स्प्रिंग जिसका बल नियतांक *k* है, हुक के नियम का पालन करती है। इसको मूल लम्बाई से 10 सेमी. खींचने हेतु 4 जूल कार्य की आवश्यकता होती है। गणना करो-

(i) k का मान

(ii) इसे अतिरिक्त 10 सेमी. लम्बाई तक खींचने हेतु अतिरिक्त कार्य की आवश्यकता।

हल– (i) कार्य $W = \frac{1}{2}kx^2$

$$k = \frac{2W}{x^2} = \frac{2 \times 4}{(0.1)^2}$$

= 800 न्यूटन/मी.

(ii) कुल 20 सेमी. खींचने के लिए कार्य

$$W = \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 800 \times (0.2)^2$$

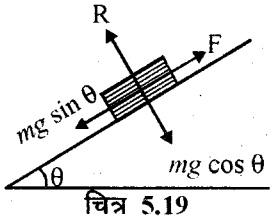
= 16 जूल

अतिरिक्त कार्य = 16 – 4 जूल

= 12 जूल

उदा.35.एक पिण्ड का द्रव्यमान 15 किग्रा. है उसे नियत बल लगाकर क्षैतिज से 5° कोण पर झुके तल पर ऊपर की ओर खींचा जाता है। यदि द्रव्यमान नियत वेग 6 मी./से. से ऊपर ओर चलता है तो घर्षण बल के प्रभाव को नगण्य मानते हुए बल द्वारा एक मिनट में किये गये कार्य की गणना कीजिये।

हल– पिण्ड पर लगने वाला परिणामी बल = $F - mg \sin\theta = ma$



चित्र 5.19

चूँकि पिण्ड नियत वेग से ऊपर गतिमान है। इसलिये $a = 0$ होगा।

$\therefore$ $F = mg \sin\theta$

$= 15 \times 9.8 \times \sin 5°$

= 12.8 न्यूटन

1 मिनट में पिण्ड द्वारा तय की गई दूरी

$s = v.t = 6 \times 60 = 360$ मी.

$\therefore$ बल द्वारा एक मिनट में किया गया कार्य

$W = (F)(s)$

$= (12.8)(630)$

$= 4.61 \times 10^3$ जूल

उदा.36.एक कण 0.5 मीटर त्रिज्या के वृत्त की आधी परिधि पर गति करता है। यदि पथ के प्रत्येक बिन्दु पर 2 न्यूटन परिमाण का बल उस बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा से 60° का कोण बनाते हुए दिशा में कार्य करता है तो किये गये कार्य की गणना कीजिये।

हल– कार्य $W = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{F} . \vec{dr}$

$= -\int_{r_1}^{r_2} F\cos\theta dr$

यहाँ F = 2 न्यूटन, $\theta = 60°$

$W = -\int_{r_1}^{r_2} 2 \times \cos 60° \times dr$

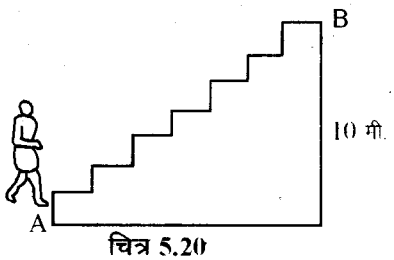
$= -\int_{r_1}^{r_2} 2 \times \frac{1}{2} \times dr$

$= \int_{r_1}^{r_2} dr$ = वृत्त की आधी परिधि

$= \frac{1}{2}\pi R = \frac{1}{2} \times 3.14 \times (0.5)$

= 0.785 जूल

उदा.37.दिये हुए चित्र में 60 किग्रा. भार का मनुष्य A बिन्दु पर खड़ा है। वह 10 मी. ऊँची छत पर 1 मिनट में पहुंच जाता है। मनुष्य द्वारा किया गया कार्य तथा उसकी शक्ति ज्ञात कीजिए।



चित्र 5.20

हल– मनुष्य द्वारा किया गया कार्य = स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि

$= mgh$

यहाँ m = 60 किग्रा.

h = 10 मी.

g = 9.8 मी./से.^{2}

$W = 60 \times 9.8 \times 10$

= 5880 जूल

शक्ति $P = \frac{W}{t} = \frac{5880}{60} = 98$ जूल

उदा.38. 2000 किग्रा. का एक ट्रक उत्तर दिशा में 40 किमी./घंटा की चाल से चलता हुआ पूर्व दिशा में मुड़कर 50 किमी./घंटा की चाल तक त्वरित होता है।

(i) ट्रक की गतिज ऊर्जा में कितना परिवर्तन होगा?

(ii) ट्रक के संवेग के मान में कितना परिवर्तन होगा?

हल– ट्रक की प्रारम्भिक चाल u = 40 किमी./घंटा

$= \frac{4 \times 10^3}{60 \times 60}$ मी./से.

$$= \frac{100}{9} \text{ मी./से.}$$

ट्रक की अन्तिम चाल $v = \frac{50\times10^3}{60\times60}$

$$= \frac{125}{9} \text{ मी./से.}$$

गतिज ऊर्जा में परिवर्तन $\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$

$$\Delta K = \frac{1}{2}\times2000\left[\left(\frac{125}{9}\right)^2 - \left(\frac{100}{9}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1000}{81}[15625 - 10000]$$

$$= \frac{10^3\times5625}{81}$$

$$= 69.44\times10^3 \text{ जूल}$$

ट्रक के संवेग में परिवर्तन $\Delta p = p_2 - p_1$

$$\Delta p = mv - mu$$

$$= 2000\times\frac{25}{9}$$

$$= 5.55\times10^3 \text{ किग्रा. मी/से.}$$

उदा.39. 2 किग्रा. की एक वस्तु प्रारम्भ में विरामावस्था में हैं। 5 न्यूटन का नियत बल 10 सेकण्ड के लिए वस्तु पर आरोपित किया जाता है। बल की माध्य शक्ति की गणना कीजिए।

हल– वस्तु में उत्पन्न त्वरण $a = \frac{F}{m}$

यहाँ $m = 2$ किग्रा.

$F = 5$ न्यूटन

$$a = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ मी./से.}^2$$

10 सेकण्ड पश्चात् वस्तु द्वारा ग्रहण किया गया वेग–

$$v = u + at = 0 + 2.5\times10$$

$$= 25 \text{ मी./से.}$$

किया गया कार्य W = गतिज ऊर्जा में परिवर्तन

$$= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$$

$v = 25$ मी./से.

यहाँ $u = 0$

$$W = \frac{1}{2}\times2\times(25)^2 - 0$$

$$= 625 \text{ जूल}$$

$\therefore$ शक्ति $P = \frac{W}{t} = \frac{625}{10}$ वॉट

$$= 62.5 \text{ वॉट}$$

उदा.40.किसी गाड़ी में 20 हॉर्सपॉवर का इंजन है। यदि इंजन को पूरी शक्ति से चलाया जाय तो क्षैतिज तल पर गाड़ी 72 किमी./घण्टा की समान चाल से चलती है। उस समय गाड़ी पर घर्षण आदि प्रतिरोधी बल क्या था ? इंजन द्वारा ऊर्जा का क्या रूपान्तरण हो रहा था?

हल– प्रश्नानुसार

शक्ति = 20 H.P.

$$= 20\times746 \text{ वॉट}$$

1 अश्व शक्ति (H.P.) = 746 वॉट

$\therefore$ प्रति सेकण्ड कार्य = 20×746 जूल

गाड़ी की चाल $= \frac{72\times1000}{60\times60}$ मी./से.

$$= 20 \text{ मी./से.}$$

$\therefore$ प्रति सेकण्ड चली गई दूरी = 20 मीटर

यदि बल F हो तो प्रति सेकण्ड कार्य

$$= F\times20 = 20\times746$$

$F = 746$ न्यूटन

इंजन प्रति सेकण्ड 20×746 जूल ऊर्जा दे रहा था घर्षण आदि से यह यान्त्रिक ऊर्जा में हो रूपान्तरित रही थी।

उदा.41.10 अश्व शक्ति वाली मोटर द्वारा चालित पम्प प्रति सेकण्ड कितना पानी 3.8 मीटर ऊँचाई पर उठा सकेगा?

हल– प्रश्नानुसार

शक्ति = 10 अश्व शक्ति

$$= 10\times746 \text{ वाट}$$

अतः प्रति सेकण्ड किया गया कार्य

$$= 7460 \text{ जूल}$$

यदि प्रति सेकण्ड M किग्रा. पानी उठाया जाए तो

कार्य = Mgh

$$= M\times9.8\times3.8 \text{ जूल}$$

$M\times9.8\times3.8 = 7460$

$$M = \frac{7460}{9.8\times3.8}$$

$$= 20 \text{ किग्रा.}$$

उदा.42.एक मोटर 20 मी. ऊँची तथा 50 मी.^{3} आयतन की टंकी को 25 मिनट में पानी से भर सकती है। इस मोटर की दक्षता 40% है तो उसके द्वारा व्यय की गई शक्ति का मान ज्ञात कीजिए।

हल– टंकी को भरने के लिए प्रयुक्त जल का द्रव्यमान

m = आयतन × पानी का घनत्व

$$= 50\times1000$$

$$= 5\times10^4 \text{ किग्रा.}$$

टंकी की ऊँचाई $h = 20$ मीटर

$\therefore$ मोटर द्वारा टंकी को भरने में किया गया कार्य

$$= mgh$$

$$= 5\times10^4\times9.8\times20$$

$$= 9.8\times10^6 \text{ जूल}$$

दक्षता $= 40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

$\therefore$ उपयोगी कार्य $W = \frac{2}{5}\times9.8\times10^6$

$$= 3.92\times10^6 \text{ जूल}$$

समय t = 15 मिनट $= 15\times60 = 900$ सेकण्ड

$\therefore$ शक्ति $P = \frac{W}{t}$

$$= \frac{3.92\times10^{6}}{900}$$
$$= 6.53\times10^{3} \text{ वॉट}$$
$$= 6.53 \text{ किलोवॉट}$$

उदा.43. एक प्रोटॉन तथा इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जाएँ क्रमशः 10^5 eV तथा 10^4 eV है। ज्ञात कीजिए किसका वेग अधिक है? इनके वेगों का अनुपात भी ज्ञात कीजिए। यदि इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान 9.11×10^{-3} किग्रा. तथा प्रोटॉन का द्रव्यमान 1.07×10^{-27} किग्रा. है तथा ($1eV = 1.6\times10^{-19}$ जूल)।

हल– इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा $= 10^4$ eV
$= 10^4\times1.6\times10^{-19}$ जूल
$= 1.6\times10^{-15}$ जूल

या $\frac{1}{2}m_e v_e^2 = 1.6\times10^{-15}$ जूल

$$v_e^2 = \frac{2\times1.6\times10^{-15}}{9.11\times10^{-31}}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{3.2\times10^{16}}{9.11}}$$
$$= 5.93\times10^{7} \text{ मी./से.}$$

प्रोटॉन की गतिज ऊर्जा $= 10^5$ eV
$= 10^5\times1.6\times10^{-19}$ जूल
$= 1.6\times10^{-14}$ जूल

या $\frac{1}{2}m_p v_p^2 = 1.6\times10^{-14}$

$$v_p = \sqrt{\frac{2\times1.6\times10^{-14}}{1.67\times10^{-27}}}$$

$v_e > v_P$ अतः इलेक्ट्रॉन प्रोटॉन से तेज गति करेगा।

$$\frac{v_e}{v_p} = \frac{5.93\times10^{7}}{4.38\times10^{6}}$$
$$= 13.5$$

उदा.44. 2 मीटर ऊँचाई से 50 ग्राम द्रव्यमान की गेंद गिराने से यह उछलकर फिर 1.6 मी. ऊँचाई तक पहुँचती है। पृथ्वी पर टकराने पर गतिज ऊर्जा में कितनी कमी हुई? ऊर्जा संरक्षण कैसे होगा?

हल– 2 मी. ऊँचाई पर गेंद में केवल स्थितिज ऊर्जा थी
प्रारम्भिक स्थितिज ऊर्जा $= mgh$

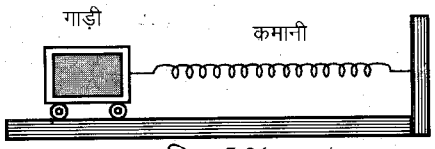
$$= \frac{50}{1000}\times9.8\times2$$
$$= 0.98 \text{ जूल}$$

पृथ्वी पर टकराने से पहले यह गतिज ऊर्जा में बदल जाती है।
टकराने के पश्चात् ऊर्जा = अन्तिम स्थितिज ऊर्जा
$= mgh$

$$= \frac{50}{1000}\times9.8\times1.6$$
$$= 0.784 \text{ जूल}$$

अतः टकराने से गतिज ऊर्जा में कमी $= 0.98 - 0.784 = 0.196$ जूल
गतिज ऊर्जा का यह भाग ऊष्मीय ऊर्जा में परिवर्तित हो जाता है अर्थात् ऊष्मीय ऊर्जा 0.196 जूल उत्पन्न होती है। कुल ऊर्जा स्थिर रहती है। यह ऊर्जा संरक्षण सिद्धान्त की पुष्टि करता है।

उदा.45. 150 ग्राम द्रव्यमान वाली एक छोटी गाड़ी द्वारा एक कमानी को दबाकर रखा गया था। गाड़ी को छोड़ने से कमानी के धक्के से गाड़ी 20 सेमी./से. वेग से चलने लगती है। दबी हुई कमानी की स्थितिज ऊर्जा का परिकलन कीजिए।



चित्र 5.21

हल– ऊर्जा संरक्षण नियम से–
कमानी की स्थितिज ऊर्जा = गाड़ी की अन्तिम गतिज ऊर्जा

$$= \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{150}{1000}\times\left(\frac{20}{100}\right)^2$$
$$= 3\times10^{-3} \text{ जूल}$$

उदा.46. एक गतिमान न्यूट्रॉन 9.0 मी. दूर दो बिन्दुओं को 1.8×10^{-4} सेकण्ड के समयान्तराल में पार करता है। इसकी चाल को समरूप मानते हुए गतिज ऊर्जा की गणना करो। न्यूट्रॉन का द्रव्यमान 1.7×10^{-27} किग्रा. है।

हल– न्यूट्रॉन की चाल $v = \frac{s}{t} = \frac{9}{1.8\times10^{-4}} = 5\times10^{4}$ मी./से.

यहाँ $s = 9.0$ मी. $m_n = 1.7\times10^{-27}$ किग्रा.
$t = 1.8\times10^{-4}$ से. $E = ?$
$v = ?$

न्यूट्रॉन की गतिज ऊर्जा $E = \frac{1}{2}m_n v_n^2$

$$= \frac{1}{2}\times1.7\times10^{-27}\times(5\times10^{4})^2$$

$$= \frac{1}{2}\times1.7\times25\times10^{-19}$$
$$= 21.25\times10^{-19} \text{ जूल}$$
$1eV = 1.6\times10^{-19}$ जूल

$$E = \frac{21.25\times10^{-19}}{1.6\times10^{-19}}$$
$$E = 13.27 \text{ eV}$$

प्र.47. 0.2 किग्रा. की एक गोली जब लक्ष्य को भेदती है तो उसका वेग 600 मी./से. से घटकर केवल 100 मी./से. रह जाता है। लक्ष्य को भेदने में गोली की कितनी ऊर्जा खर्च हुई। यदि लक्ष्य की मोटाई 0.1 मी. है तो लक्ष्य द्वारा लगाया हुआ औसत प्रतिरोध भी ज्ञात कीजिए।

हल– $m = 0.2$ किग्रा. ऊर्जा का क्षय = ?
$u = 600$ मी./से. लक्ष्य की मोटाई $= 0.1$ मी.
$v = 100$ मी./से. औसत प्रतिरोध $F = ?$
गोली की प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा

$$K_1 = \frac{1}{2}mu^2$$

$$= \frac{1}{2}\times0.2\times(600)^2$$
$$= 36{,}000 \text{ जूल}$$

गोली की अन्तिम गतिज ऊर्जा

$$K_2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 0.2 \times (100)^2$$

$$= 1000 \text{ जूल}$$

लक्ष्य भेदने में ऊर्जा का क्षय

$$K_1 - K_2 = 36000 - 1000$$

$$= 35000 \text{ जूल}$$

लक्ष्य द्वारा यदि समरूप प्रतिरोध बल लगता है तो

$$W = F.s = K_1 - K_2$$

$$\therefore \quad F = \frac{K_1 - K_2}{s}$$

$$= \frac{35000}{0.1} \text{ न्यूटन}$$

$$= 3.5 \times 10^5 \text{ न्यूटन}$$

उदा.48. सूर्य में लगभग 4×10^{10} किग्रा. द्रव्यमान का प्रति सेकण्ड ऊर्जा में रूपान्तरण होता है। सूर्य की शक्ति कितनी होगी?

हल– सूर्य में द्रव्यमान क्षय प्रति सेकण्ड

$$= 4 \times 10^4 \text{ किग्रा.}$$

प्रकाश की चाल $= 3 \times 10^8$ मी./से.

$\therefore$ ऊर्जा प्रति सेकण्ड $E = 4 \times 10^{10} \times (3 \times 10^8)^2$

$$= 3.6 \times 10^{27} \text{ जूल/सेकण्ड या वॉट}$$

सूर्य की शक्ति = ऊर्जा प्रति सेकण्ड

$$= 3.6 \times 10^{27} \text{ वॉट}$$

$$= 3.6 \times 10^{24} \text{ किलोवॉट}$$

उदा.49. एक गोला समान द्रव्यमान वाले एक अन्य स्थिर गोले से टकराता है। प्रत्यावस्थान गुणांक e हो तो टक्कर के पश्चात् गोलों के वेगों का अनुपात क्या होगा?

हल– माना दोनों गोलों का द्रव्यमान m है तथा प्रथम गोले का प्रारम्भिक वेग u है। टक्कर के पश्चात् प्रथम तथा द्वितीय गोले का वेग क्रमशः v_1 तथा v_2 है। दूसरा गोला स्थिर है।

संवेग संरक्षण नियम के अनुसार

$$mu = mv_1 + mv_2$$

$$v_1 + v_2 = u \qquad ...(1)$$

प्रत्यावस्थान गुणांक $\quad e = -\left(\frac{v_1 - v_2}{u}\right)$

$$(v_1 - v_2) = -eu \qquad ..(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर

$$v_1 = \frac{1-e}{2}u$$

$$v_2 = \frac{1+e}{2}u$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1-e}{1+e}$$

उदा.50. 5 किग्रा. भारी चिकनी मिट्टी का पिण्ड 10 मी./से. वेग से बांयी ओर गतिशील है। यह पिण्ड एक 6 किग्रा. भारी अन्य मिट्टी के पिण्ड से जो 12 मी./से. वेग से दायीं ओर गतिशील है, जाकर टकराता है। टक्कर के उपरान्त दोनों पिण्ड चिपक कर एक बड़े पिण्ड का निर्माण करते हैं। इस प्रकार निर्मित पिण्ड का वेग क्या होगा?

हल– m_1 और m_2 द्रव्यमान के पिण्डों से बने पिण्ड का द्रव्यमान माना कि M है तथा उसका वेग v है।

संवेग संरक्षण नियम से

$$Mv = m_1u_1 + m_2u_2$$

$$11 \times v = 5(-10) + 6 \times 12$$

(पिण्ड एक दूसरे के विपरीत गतिशील हैं अतः यदि दायीं ओर के वेग को (+) माना जाये तो बायीं ओर का वेग (–) होगा)

$$v = \frac{22}{11}$$

$$v = 2 \text{ मी./से.}$$

उदा.51. एक गेंद गुरुत्वाकर्षण के प्रभाव में 10 मी. की ऊँचाई से नीचे की ओर प्रारम्भिक वेग u से गिरती है। यह धरातल से टकराती है तथा 50% ऊर्जा के ह्रास के साथ पुनः उसी ऊँचाई तक उठ जाती है। उसके प्रारम्भिक वेग u का मान ज्ञात कीजिए।

हल– h ऊँचाई पर गेंद की कुल प्रारम्भिक ऊर्जा

$$= \frac{1}{2}mu^2 + mgh$$

जहाँ m गेंद का द्रव्यमान है।

टक्कर के बाद ऊर्जा $= \left(\frac{1}{2}mu^2 + mgh\right)$ का 50%

$$= \frac{50}{100}\left(\frac{1}{2}mu^2 + mgh\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mu^2 + mgh\right)$$

इस ऊर्जा के कारण गेंद h ऊँचाई तक उठती है।

$$\therefore \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mu^2 + mgh\right) = mgh$$

$$\frac{1}{4}mu^2 = \frac{1}{2}mgh$$

$$u = \sqrt{2gh}$$

$$= \sqrt{2 \times 9.8 \times 10} = 14 \text{ मी./से.}$$

उदा.52. एक गेंद 1 मी. की ऊँचाई से धरातल पर गिराई जाती है। यदि टक्कर का प्रत्यावस्थान गुणांक 0.6 है। तो गेंद पुनः किस ऊँचाई तक उठेगी।

हल– जब गेंद h_1 ऊँचाई से गिराई जाती है तो धरातल पर पहुंचने पर उसकी स्थितिज ऊर्जा (mgh_1) गतिज ऊर्जा $\left(\frac{1}{2}mv_1^2\right)$ में परिवर्तित हो जाती है

अर्थात् $\qquad mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad ...(1)$

माना पुनः ऊपर उठाने पर गेंद ऊँचाई h_2 प्राप्त करती है।

$$mgh_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \qquad ...(2)$$

$$\therefore \quad \frac{h_2}{h_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$$

$$h_1 = 1 \text{ मी.}$$

$$e = \frac{v_2}{v_1}$$

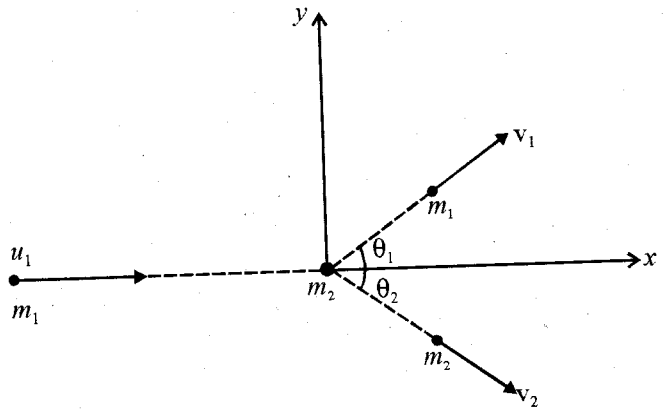
$$v_2 = ev_1 = 0.6v_1$$

$$\frac{h_2}{1} = 0.36 \text{ मी.}$$

$$h_2 = 0.36 \text{ मी.}$$

उदा 53. मान लीजिए कि चित्र में चित्रित संघट्ट बिलियर्ड की समान द्रव्यमान ($m_1 = m_2$) वाली दो गेंदों के मध्य हुआ है। जिसमें प्रथम गेंद क्यू (डण्डा) कहलाती है और द्वितीय गेंद 'लक्ष्य' कहलाती है। खिलाड़ी लक्ष्य गेंद को $\theta_2 = 37°$ के कोण पर कोने में लगी थैली में गिराना चाहता है। यहाँ मान लीजिए कि संघट्ट प्रत्यास्थ है तथा घर्षण और घूर्णन गति महत्त्वपूर्ण नहीं हैं। कोण θ_1 ज्ञात कीजिए।

हल–



चित्र 5.22

दिया गया है– $m_1 = m_2 = m$, $u_2 = 0$, $\theta_2 = 37°$

$\therefore$ संवेग संरक्षण नियमानुसार

$$\vec{u_1} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$$

$$\therefore \quad \vec{u_1}.\vec{u_1} = (\vec{v_1} + \vec{v_2}).(\vec{v_1} + \vec{v_2})$$

$$\Rightarrow \quad u_1^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2\vec{v_1}.\vec{v_2}$$

$$\Rightarrow \quad u_1^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos(\theta_1 + \theta_2) \qquad ...(1)$$

$\because$ टक्कर प्रत्यास्थ है अतः गतिज ऊर्जा संरक्षित रहेगी।

$$\frac{1}{2}mu_1^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\Rightarrow \quad u_1^2 = v_1^2 + v_2^2 \qquad ...(2)$$

समी. (1) व (2) से

$$2v_1v_1\cos(\theta_1 + \theta_2) = 0$$

$\because$ $v_1 \neq 0$ तथा $v_2 \neq 0$

$$\therefore \quad \cos(\theta_1 + \theta_2) = 0 = \cos 90°$$

$$\Rightarrow \quad \theta_1 + \theta_2 = 90°$$

$$\Rightarrow \quad \theta_1 + 37° = 90°$$

$$\Rightarrow \quad \theta_1 = 53°$$

उदा.54. सिद्ध करो दो समान द्रव्यमान के कणों की सीधी प्रत्यास्थ टक्कर में वेग परस्पर बदल जाते हैं।

उत्तर– माना दो कण जिनके द्रव्यमान समान हैं तथा प्रारम्भिक वेग u_1 व u_2 हैं टक्कर के पश्चात् वेग v_1 व v_2 हो जाते हैं और टक्कर पूर्णतः प्रत्यास्थ है। संवेग संरक्षण नियम से–

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \qquad ...(1)$$

चूंकि $m_1 = m_2 = m$

या $\quad u_1 - v_1 = v_2 - u_2$

ऊर्जा संरक्षण नियम से–

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

या $\quad u_1^2 - v_1^2 = v_2^2 - u_2^2 \qquad ...(3)$

समी. (3) में समी. (2) का भाग देने पर–

$$u_1 + v_1 = v_2 + u_2 \qquad ...(4)$$

समी. (2) व समी. (4) को जोड़ने पर

$$u_1 - v_1 = v_2 - u_2$$
$$u_1 + v_1 = v_2 + u_2$$
$$2u_1 = 2v_2$$
$$u_1 = v_2 \qquad ...(5)$$

समी. (5) से u_1 का मान समी. (2) में रखने पर

$$v_2 - v_1 = v_2 - u_2$$
$$v_1 = u_2$$

अतः समान द्रव्यमान के दो कणों की सीधी प्रत्यास्थ टक्कर में टक्कर के पश्चात् उनके वेग परस्पर बदल जाते हैं। इस प्रकार की टक्कर में संवेग का विनिमय अधिकतम होता है।

उदा.55. यदि एक कण समान द्रव्यमान के स्थिर कण को सीधी प्रत्यास्थ टक्कर करता है तो टक्कर के पश्चात् उनके वेग ज्ञात करो।

हल– माना एक कण जिसका द्रव्यमान m है तथा उसका प्रारम्भिक वेग u_1 है समान द्रव्यमान के स्थिर कण से सीधी प्रत्यास्थ टक्कर करता है। टक्कर के पश्चात् उनके वेग v_1 व v_2 हो जाते हैं।

अतः संवेग संरक्षण नियम से

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$
$$[\because m_1 = m_2 = m \text{ व } u_2 = 0]$$

$$u_1 = v_1 + v_2 \qquad ...(1)$$

या $\quad u_1 - v_1 = v_2 \qquad ...(2)$

ऊर्जा संरक्षण नियम से

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$u_1^2 - v_1^2 = v_2^2 \qquad ...(3)$$

समीकरण (3) में समीकरण (2) का भाग देने पर

$$u_1 + v_1 = v_2 \qquad ...(4)$$

समीकरण (2) व समीकरण (4) को जोड़ने पर

$$u_1 - v_1 = v_2$$
$$u_1 + v_1 = v_2$$
$$2u_1 = 2v_2$$

या $\quad u_1 = v_2$

तथा $\quad v_1 = 0$

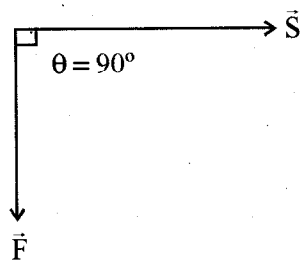
अतः इस प्रकार की टक्कर में प्रथम कण तो स्थिर हो जाता है, परन्तु दूसरा कण प्रथम कण के प्रारम्भिक वेग से गति करता है। इस प्रकार में ऊर्जा का पूर्णतः विनियम होता है।

पाठ्यपुस्तक के प्रश्न

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. गुरूत्व के विरूद्ध किसी मनुष्य द्वारा किया गया कार्य कितना होगा, यदि वह समतल में चल रहा हो?

उत्तर– इस स्थिति में बल तथा विस्थापन परस्पर लम्बवत् होंगे–



$\therefore$ $W = FS \cos 90° = 0$

अर्थात् कार्य शून्य होगा।

प्र.2. एक मनुष्य 10 Kg के भार को 1 min तक अपने कन्धों पर उठाये रखता है। मनुष्य द्वारा किया गया कार्य कितना होगा?

उत्तर–मनुष्य द्वारा किया गया कार्य शून्य होगा क्योंकि लगाये गये बल द्वारा कोई विस्थापन नहीं किया गया है।

प्र.3. एक व्यक्ति ने बॉक्स को बस की छत पर 5 min में चढ़ा दिया। दूसरे व्यक्ति ने उसी बॉक्स को 25 min में चढ़ा दिया। कौनसे व्यक्ति ने अधिक कार्य किया?

उत्तर–दोनों ही स्थितियों में किया गया कार्य समान होगा क्योंकि कार्य का मान सम्पादित समय पर निर्भर नहीं करता है।

प्र.4. एक ट्रक तथा एक कार समान गतिज ऊर्जा से सीधी सड़क पर चल रहे हैं। दोनों के इंजन एक साथ बंद कर देने पर कौनसा कम दूरी पर रूकेगा?

उत्तर– $\because$ गतिज ऊर्जा $E = \frac{1}{2}mv^2$

$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{2E}{m}$

$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ $\quad \because$ E नियत है।

$v \propto \frac{1}{\sqrt{m}}$

$\therefore \quad m_T > m_c$

$\therefore \quad v_T < v_C$

अत: ट्रक कम दूरी पर रूकेगा।

प्र.5. एक व्यक्ति बॉक्स को पृथ्वी से h ऊँचाई पर एक बस की छत पर रख देता है। बॉक्स पर व्यक्ति तथा गुरूत्वीय क्षेत्र द्वारा किया गया कुल कार्य क्या होगा?

उत्तर–माना कि बॉक्स का द्रव्यमान m है।

बॉक्स पर व्यक्ति द्वारा किया गया कार्य = mgh

बॉक्स पर गुरुत्वीय क्षेत्र द्वारा किया गया कार्य = – mgh

अत: बॉक्स पर व्यक्ति तथा गुरुत्वीय क्षेत्र द्वारा कुल किया गया कार्य

$W = mgh + (-mgh) = 0$

या $\quad W =$ शून्य

प्र.6. क्या यांत्रिक ऊर्जा हमेशा संरक्षित रहती है?

उत्तर–नहीं, यांत्रिक ऊर्जा हमेशा संरक्षित नहीं रहती। किसी विलगित निकाय के लिये यह केवल तभी संरक्षित रहती है, जब उस पर किसी प्रकार का असंरक्षी बल कार्यकारी न हो।

प्र.7. घड़ी की चाबी भरने पर स्प्रिंग में कौनसी ऊर्जा संचित होती है? घड़ी के चलते रहने पर यह ऊर्जा कौनसी ऊर्जा में परिवर्तित होती है?

उत्तर–घड़ी में चाबी भरने पर स्प्रिंग में प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा संचित होती है। घड़ी के चालू रहने पर यह ऊर्जा गतिज ऊर्जा में परिवर्तित होती है।

प्र.8. क्या किसी निकाय के संवेग में परिवर्तन किये बिना, गतिज ऊर्जा में परिवर्तन किया जा सकता है?

उत्तर–हाँ, किसी निकाय के संवेग में परिवर्तन किये बिना, गतिज ऊर्जा में परिवर्तन किया जा सकता है।

उदा.–अप्रत्यास्थ टक्कर में संवेग संरक्षित रहता है परन्तु गतिज ऊर्जा परिवर्तित हो जाती है।

प्र.9. क्या किसी कण की गतिज ऊर्जा परिवर्तित किये बिना, इसका संवेग परिवर्तित किया जा सकता है?

उत्तर–हाँ, किसी कण की गतिज ऊर्जा परिवर्तित किये बिना इसका संवेग परिवर्तित किया जा सकता है।

उदा.–एक समान वृतीय गति में चाल नियत रहती है जबकि वेग परिवर्तन से संवेग परिवर्तित हो जाता है।

प्र.10.क्या किसी पूर्णत: अप्रत्यास्थ टक्कर में सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा क्षय हो सकती है?

उत्तर–हाँ, किसी पूर्णत: अप्रत्यास्थ टक्कर में सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा क्षय हो सकती है। अप्रत्यास्थ टक्कर के लिये $v_1 = v_2 = v$

जब सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा क्षयित होगी तो टक्कर के बाद कुल गतिज ऊर्जा शून्य होगी, तब

$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = 0$

$\therefore \quad v = 0$

$\therefore \quad v_1 = v_2 = 0$

किन्तु सभी प्रकार की टक्करों में संवेग संरक्षण नियम से,

$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 = m_1(0) + m_2(0)$

या $\quad m_1u_1 + m_2u_2 = 0$

अत: टक्कर से पूर्व कणों का कुल संवेग शून्य हो तो पूर्णत: अप्रत्यास्थ टक्कर में सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा क्षय हो सकती है।

प्र.11.सरल रेखीय प्रत्यास्थ टक्कर में यदि कोई कण समान द्रव्यमान के कण से टकराता है तो टक्कर के पश्चात् कणों के वेगों में क्या सम्बन्ध होता है?

उत्तर–इस स्थिति में टक्कर के पश्चात् कणों के वेग परस्पर बदल जाते है।

<u>लघूत्तरात्मक प्रश्न</u>

प्र.1. कार्य किसे कहते है?

उत्तर–अनुच्छेद 5.2 पर देखें।

प्र.2. शून्य कार्य, धनात्मक कार्य एवं ऋणात्मक कार्य के उदाहरण दीजिए।

उत्तर–शून्य कार्य : जब कोई कुली अपने सिर पर बोझा रखकर प्लेटफॉर्म पर चलता है तो गुरूत्वीय बल के विरूद्ध कार्य शून्य होता है क्योंकि वस्तु का विस्थापन गुरूत्वबल (ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर कार्य करता हैं) के लम्बवत् है।

धनात्मक कार्य: जब कोई व्यक्ति धरातल पर स्थित किसी वस्तु को खींचता है तब आरोपित बल व विस्थापन समान दिशा में होते हैं अत: व्यक्ति द्वारा किया गया कार्य धनात्मक होता है।

ऋणात्मक कार्य: जब किसी वस्तु को खुरदरे धरातल पर खींचा जाता है तब घर्षण बल तथा विस्थापन परस्पर विपरीत दिशा में होते हैं। अत: घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होता है।

प्र.3. किसी बंदूक से गोली दागी जाती है। बंदूक एवं गोली में से किसकी गतिज ऊर्जा अधिक होगी?

उत्तर– $\because$ गतिज ऊर्जा $E = \frac{p^2}{2m}$

$\Rightarrow \quad E \propto \frac{1}{m}$

$\therefore$ गोली का द्रव्यमान अपेक्षाकृत कम होने से गोली की गतिज ऊर्जा अधिक होगी।

प्र.4. गतिज ऊर्जा किसे कहते है?

उत्तर–किसी वस्तु की गति के कारण सम्बद्ध ऊर्जा वस्तु की गतिज ऊर्जा कहलाती है।

प्र.5. स्थितिज ऊर्जा की प्रमुख विशेषताएँ लिखिए।

उत्तर–स्थितिज ऊर्जा किसी वस्तु की स्थिति अथवा विरूपण के कारण होती है। स्थितिज ऊर्जा का मापन कार्य के उस परिमाण से किया जाता है जो वस्तु अपनी वर्तमान स्थिति से शून्य स्थितिज ऊर्जा की स्थिति में आने तक कर सकती है। किसी वस्तु को एक स्थिति से दूसरी स्थिति तक विस्थापित करने में आन्तरिक संरक्षी बलों द्वारा किया गया कार्य का ऋणात्मक मान, इसकी स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है अर्थात्

$-\Delta W = \Delta U$

प्र.6. संरक्षी बलों को परिभाषित कीजिए।

उत्तर–संरक्षी बल वह बल है जिसके द्वारा एक कण को किसी एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक विस्थापन में किया गया कार्य कण के पथ पर निर्भर नहीं करता है।

प्र.7. टक्कर के लिए न्यूटन का नियम लिखिए।

उत्तर–न्यूटन के टक्कर के नियमानुसार यदि वस्तुओं में सीधी टक्कर होती है तो टक्कर के पश्चात् तथा टक्कर से पूर्व उनके आपेक्षिक वेगों का अनुपात नियत रहता है तथा टक्कर के प्रत्यावस्थान गुणांक (e) के ऋणात्मक मान के बराबर होता है अर्थात्

$$\frac{\text{टक्कर के पश्चात आपेक्षिक वेग}}{\text{टक्कर से पूर्व आपेक्षिक वेग}} = -e$$

प्र.8. किसी वस्तु के संवेग में 50% वृद्धि करें तो उसकी गतिज ऊर्जा में कितनी वृद्धि हो जायेगी?

उत्तर–मान प्रारंभिक संवेग = p_1

50% की वृद्धि करने पर संवेग

$$p_2 = p_1 + \frac{50}{100}\ p_1 = \frac{3}{2} p_1$$

चूंकि $K = \frac{p^2}{2m}$

गतिज ऊर्जा में वृद्धि

$$\left(\frac{K_2 - K_1}{K_1}\right) \times 100\% = \left(\frac{p_2^2 - p_1^2}{p_1^2}\right) \times 100\%$$

$$= \left(\frac{\frac{9}{4} p_1^2 - p_1^2}{p_1^2}\right) \times 100\%$$

$$= \left(\frac{9}{4} - 1\right) \times 100\%$$

$$= \left(\frac{9-4}{4}\right) \times 100\%$$

$$= \frac{5}{4} \times 100\% = 125\%.$$

प्र.9. तिर्यक टक्कर किसे कहते है?

उत्तर–जब टक्कर करने वाले पिण्डों के वेग एक रेखा के अनुदिश नहीं होते हैं तो टक्कर के पश्चात् कण विभिन्न कोणों पर गतिमान होते हैं। इस प्रकार की टक्कर को तिर्यक टक्कर कहते है।

निबन्धात्क प्रश्न

प्र.1. कार्य किसे कहते हैं? परिवर्ती बल द्वारा किया गया कार्य किस प्रकार ज्ञात करते हैं? समझाइये।

उत्तर–अनुच्छेद 5.2 तथा 5.3 देखें।

प्र.2. गतिज ऊर्जा किसे कहते हैं? सिद्ध करें कि किसी पिण्ड की गतिज ऊर्जा $1/2mv^2$ होती है? कार्य–ऊर्जा प्रमेय को समझाते हुए व्युत्पन्न कीजिये।

उत्तर–अनुच्छेद 5.5 तथा 5.6 पर देखें

प्र.3. ऊर्जा को परिभाषित कर उसके विभिन्न स्वरूपों का वर्णन कीजिये।

उत्तर–अनुच्छेद 5.4 पर देखें।

प्र.4. यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण का क्या नियम है? सिद्ध करें कि स्वतंत्रतापूर्वक नीचे गिरती हुई वस्तु में यांत्रिक ऊर्जा का संरक्षण होता है।

उत्तर–अनुच्छेद 5.8 पर देखें।

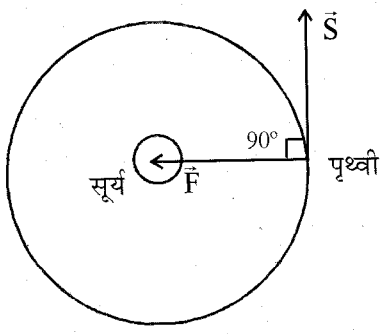
प्र.5. प्रत्यास्थ, अप्रत्यास्थ एवं पूर्णतया अप्रत्यास्थ टक्कर में अन्तर स्पष्ट कीजिये। दो कणों की सम्मुख टक्कर (प्रत्यास्थ) के लिये टक्कर के पश्चात् टकराने वाले कणों के वेगों का व्यंजक प्राप्त कीजिये।

उत्तर–अनुच्छेद 5.14 तथा 5.15 पर देखें।

आंकिक प्रश्न

प्र.1. पृथ्वी सूर्य के चारों ओर परिक्रमण करती है। इसके पथ को वृत्ताकार मानते हुये एक परिक्रमण में गुरूत्वाकर्षण बल द्वारा किये गये कार्य की गणना कीजिये।

उत्तर– इस स्थिति में बल तथा विस्थापन परस्पर लम्बवत् होंगे अतः पृथ्वी के एक परिक्रमण में गुरूत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य



चित्र 5.21

$W = FS\cos 90^\circ = 0$

प्र.2. किसी 50 kg की वस्तु को सड़क पर 100 m घसीटने में घर्षण बल द्वारा किये गये कार्य की गणना कीजिये। सड़क के लिये सीमान्त घर्षण गुणांक $\mu = 0.2$ है।

हल–किया गया है: m = 50 Kg , s = 100 m, $\mu = 0.2$

$W = \mu mgs \quad \because f = \mu R = \mu mg$

$W = 0.2 \times 50 \times 9.8 \times 100$

$W = 9800$ जूल $= 9.8 \times 10^3$ जूल

प्र.3. 60 kg भार का एक व्यक्ति 20 kg भार के एक पत्थर को 30 m ऊँचाई तक ले जाता है। व्यक्ति द्वारा किये गये कार्य के मान ज्ञात कीजिये।

हल– दिया गया है: व्यक्ति का द्रव्यमान M = 60 Kg ,

पत्थर का द्रव्यमान m = 20 kg, h = 30 m

$\because$ पत्थर को h ऊँचाई तक ले जाने में व्यक्ति द्वारा किया गया कार्य

$W = (M+m)\, gh$

$W = (60+20) \times 9.8 \times 30$

$W = (80 \times 9.8 \times 30) = 23520$ जूल

प्र.4. एक मनुष्य 2 kg के बॉक्स को अपने हाथ में लेकर एक समतल पर गति कर रहा है। यदि वह 0.5 m / s² के त्वरण से 40 m चलता है तो गति के दौरान मनुष्य द्वारा बॉक्स पर किया गया कार्य कितना होगा?

हल– बॉक्स का द्रव्यमान $m = 2kg$

त्वरण $a = 0.5\ m/s^2$

विस्थापन $s = 40\ m$

गति के दौरान मनुष्य द्वारा बॉक्स पर किया गया कार्य,

$W = F.S$

या $W = ma.S$

या $W = 2 \times 0.5 \times 40$

या $W = 40J$

प्र.5. एक स्टील के तार से 2.5 kg भार लटकाने से उसकी लम्बाई में 0.25 cm की वृद्धि हो जाती है। तार को खींचने मे किया गया कार्य ज्ञात कीजिये। ($g = 10\ m/s^2$)

हल– दिया गया है: $m = 2.5$ Kg , $x = 0.25$ cm $= 0.25 \times 10^{-2}$m

$g = 10\ m/s^2$

तार को खींचने में किया गया कार्य $w = \frac{1}{2}Kx^2$

जबकि $mg = Kx$

$\therefore K = \frac{mg}{x}$

$\therefore w = \frac{1}{2}.\frac{mg}{x}.x^2 = \frac{mgx}{2}$

$W = \frac{2.5 \times 10 \times 0.25 \times 10^{-2}}{2} = 0.03125$ जूल

प्र.6. यदि किसी वाहन की चाल 2 m/s बढ़ाने पर उसकी गतिज ऊर्जा दुगुनी हो जाती है, वाहन की प्रारंभिक चाल क्या होगी?

हल– माना वाहन की प्रारंभिक चाल u है।

$\therefore$ वाहन की प्रारंभिक गतिज ऊर्जा $K_i = \frac{1}{2}mu^2$

प्रश्नानुसार वाहन की चाल 2 m/s बढ़ाने पर चाल $V = (u + 2)$

नवीन स्थिति में गतिज ऊर्जा $K_f = \frac{1}{2}mv^2$

या $K_f = \frac{1}{2}m(u+2)^2$

प्रश्नानुसार गतिज ऊर्जा दुगुनी हो जाती है।

$K_f = 2K_i$

$\frac{1}{2}m(u+2)^2 = 2 \times \frac{1}{2}mu^2$

या $(u+2)^2 = 2u^2$

या $u + 2 = \sqrt{2}\, u$

या $2 = (\sqrt{2} - 1)\, u$

या $u = \frac{2\times(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)\times(\sqrt{2}+1)}$

या $u = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{(2-1)}$

$\therefore \quad u = 2(\sqrt{2}+1)\ m/s$

प्र.7. एक 2 kg द्रव्यमान का पिण्ड 10 m की ऊँचाई से रेती में गिरता है। पिण्ड विरामावस्था मे आने से पहले रेती में 2cm तक गति करता है तो औसत प्रतिरोधक बल क्या होगा?

हल- दिया गया है: m = 2 Kg , h = 10 m , v=0

$s=2cm = 2\times10^{-2}m$

ऊर्जा संरक्षण नियम से

$mgh = \frac{1}{2}mu^2$ यहाँ u रेती के सम्पर्क में आने पर पिण्ड का प्रारंभिक वेग है।

$u^2 = 2gh$ ...(i)

माना कि रेती में पिण्ड का त्वरण a है।

∵ गति के तृतीय समीकरण से

$v^2 = u^2 - 2as$

$\Rightarrow \quad (0)^2 = 2gh - 2as$

$\Rightarrow 2as = 2gh \Rightarrow a = \frac{gh}{s}$

$\therefore$ औसत प्रतिरोधक बल = $ma = \frac{mgh}{s}$

$= \frac{2\times9.8\times10}{2\times10^{-2}}$

$= 9.8\times10^3 = 9800$ न्यूटन

प्र.8. एक दौड़ते हुए व्यक्ति की गतिज ऊर्जा अपने से आध ो द्रव्यमान के लड़के की गतिज ऊर्जा से आधी है। व्यक्ति अपनी गति 1 m / s बढ़ा देता है जिससे उसकी गतिज ऊर्जा, लड़के की गतिज ऊर्जा के बराबर हो जाती है। लड़के व व्यक्ति की प्रारम्भिक गतियों के मान ज्ञात कीजिये।

हल- माना कि व्यक्ति की चाल v_1 तथा लड़के की चाल v_2 है। अत: प्रश्नानुसार

$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{m}{2}v_2^2$

$\Rightarrow \quad v_1^2 = \frac{v_2^2}{4}$

$\Rightarrow \quad v_1 = \frac{v_2}{2}$ ..(1)

प्रश्नानुसार

$\frac{1}{2}m(v_1+1)^2 = \frac{1}{2}\times\frac{m}{2}v_2^2$

$(v_1+1)^2 = \frac{v_2^2}{2} = \frac{(2v_1)^2}{2} = 2v_1^2$

$v_1^2 + 2v_1 + 1 = 2v_2^2$

$\Rightarrow \quad v_1^2 - 2v_1 - 1 = 0$

हल करने पर $v_1 = 2.41$ मी/से

$v_2 = 2v_1 = 4.82$ मी/से.

इस प्रकार व्यक्ति की चाल = 2.41 मी/से तथा लड़के की चाल = 4.82 मी/से

प्र.9. एक गाड़ी का वेग 40 km / h से 60 km/h हो जाता है। गाड़ी का द्रव्यमान 1000 kg है। गतिज ऊर्जा में परिवर्तन ज्ञात कीजिये।

हल- दिया गया है: $u = 40\frac{km}{h} = 40\times\frac{5}{18}\frac{m}{s} = \frac{100}{9}\frac{m}{s}$

$v = 60\frac{km}{h} = 60\times\frac{5}{18}\frac{m}{s} = \frac{50}{3}\frac{m}{s}$

m = 1000 Kg

$\therefore$ गतिज ऊर्जा में परिवर्तन $= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$

$= \frac{1}{2}m(v^2-u^2)$

$= \frac{1}{2}\times1000\left[\left(\frac{50}{3}\right)^2 - \left(\frac{100}{9}\right)^2\right]$

$= 500\left[\frac{2500}{9} - \frac{10000}{81}\right] = 500\left[\frac{22500-10000}{81}\right]$

$= 500\times\frac{12500}{81} = 7.7\times10^4$ जूल

प्र.10. 400 m/s चाल से क्षैतिज दिशा में चलती हुई बन्दूक की एक गोली, डोरी से लटकी बालू की थैली में ध ंसकर उसी से सम्बद्ध हो जाती है। गोली एवं थैली के द्रव्यमान क्रमशः 0.025 kg तथा 1.975 kg है। (गोली +थैली) की चाल ज्ञात कीजिये। इस प्रक्रिया में कितनी गतिज ऊर्जा विलुप्त हुई?

हल- दिया गया है: गोली की चाल u = 400 m/s ,

गोली का द्रव्यमान m = 0.025 Kg ,

थैली का द्रव्यमान M = 1.975 Kg

प्रश्नानुसार गोली, थैली के भीतर धंस जाती है तब गोली व थैली का वेग समान होगा माना कि यह उभयनिष्ठ वेग v है तब संवेग संरक्षण नियम से mu + 0 = (M + m) v

$\Rightarrow v = \frac{mu}{M+m}$

$\Rightarrow v = \frac{0.025\times400}{1.975+0.025} = \frac{10}{2} = 5$ मी/से

इस प्रक्रिया में गतिज ऊर्जा में परिवर्तन

$= \frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}(M+m)v^2$

$$= \frac{1}{2}\left[0.025\times(400)^2 - (1.975+0.025)\times(5)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}[4000-50] = 1975 \text{ जूल}$$

प्र.11. एक मोटर 100 लीटर पानी को 20 m ऊँची टंकी तक एक मिनट में ले जाती है। मोटर की शक्ति की गणना वॉट में कीजिये। (मान लो $g = 10\ m/s^2$)

हल- दिया गया है: पानी का आयतन = 100 लीटर

$h = 20$ मी , $t = 1$ मिनट $= 60$ सेकण्ड

$g = 10\ m/s^2$

दिया गए पानी का द्रव्यमान = 100 Kg

$\therefore$ मोटर की शक्ति $P = \frac{mgh}{t}$

$$P = \frac{100\times10\times20}{60} = 333.33 \text{ वॉट}$$

प्र.12. 4 m द्रव्यमान का एक स्थिर पिण्ड अचानक तीन टुकड़ों में विस्फोटित हो जाता है। यदि *m* द्रव्यमान के दो टुकड़े एक दूसरे के लम्बवत् *v* वेग से चलते हो तो 2 m द्रव्यमान के तीसरे कण का वेग क्या होगा? विस्फोट के पश्चात् गतिज ऊर्जा में वृद्धि भी परिकलित कीजिये।

हल- दिया गया है: $m_1 = m,\ m_2 = m,\ m_3 = 2m$

$v_1 = v,\ v_2 = v,\ v_3 = ?$

संवेग संरक्षण नियम से $0 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3$

$\vec{P}_3 = -(\vec{P}_1 + \vec{P}_2)$

$\because$ $\vec{P}_1$ व $\vec{P}_2$ परस्पर लम्बवत् है।

$\therefore$ $P_3 = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$

$$\Rightarrow 2mv_3 = \sqrt{(mv)^2 + (mv)^2} = mv\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{v}{\sqrt{2}}$$

अत: तीसरे टुकड़े का वेग $\frac{v}{\sqrt{2}}$ होगा।

विस्फोट से पूर्व गतिज ऊर्जा = 0

विस्फोट के पश्चात् गतिज ऊर्जा

$$= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}2m.\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{3}{2}mv^2$$

$\because$ विस्फोट के पश्चात् गतिज ऊर्जा में वृद्धि $= \frac{3}{2}mv^2$

प्र.13. 2m द्रव्यमान का एक गुटका *v* वेग से गति करते हुये 4m द्रव्यमान के गुटके से, जो कि स्थिरावस्था में है, से टक्कर करता है। टक्कर के पश्चात् प्रथम गुटका स्थिर अवस्था में आ जाता है। प्रत्यावस्थान गुणांक का मान ज्ञात कीजिये।

हल- दिया गया है: $m_1 = 2m,\ u_1 = v,\ m_2 = 4m,\ u_2 = 0$

$v_1 = 0,\ e = ?$

संवेग संरक्षण के नियम से

$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$

$(2m)\ v + 4m \times 0 = 2m \times 0 + 4mv_2$

$2mv = 4mv_2$

$$v_2 = \frac{v}{2}$$

$\because$ टक्कर का प्रत्यावस्थान गुणांक $e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2}$

$$e = \frac{\frac{v}{2} - 0}{v - 0} = \frac{1}{2} = 0.5$$

प्र.14. यूरेनियम–238 के स्थिर नाभिक से एक एल्फा कण उत्सर्जित होता है। यदि एल्फा कण का वेग 1.5×10^7 m/s है तो अवशिष्ट नाभिक की गतिज ऊर्जा ज्ञात कीजिये।

हल- यूरेनियम-238 के नाभिक का द्रव्यमान = 238 a.m.u.

या $M = 238 \times 1.67 \times 10^{-27}$ kg

उत्सर्जित α कण का द्रव्यमान $m_1 = 4$ amu

या $m_1 = 4 \times 1.67 \times 10^{-27}$ kg

शेष नाभिक का द्रव्यमान $m_2 = (238 - 4) = 234$ amu

या $m_2 = 234 \times 1.67 \times 10^{-27}$ kg

यूरेनियम-238 के नाभिक का प्रा. वेग $v = 0$

α कण का वेग $v_1 = 1.5 \times 10^7$ m/s

शेष नाभिक का वेग $v_1 = ?$

संवेग संरक्षण नियम से,

$$M, v = m_1v_1 + m_2, v_2$$

$$238 \times 1.67 \times 10^{-27}(0) = 4 \times 1.67 \times 10^{-27} \times 1.5 \times 10^7 + 234 \times 1.67 \times 10^{-27}v_2$$

या $0 = 6\times1.67 \times 10^{-20} + 234 \times 1.67 \times 10^{-27}v_2$

या $$v_2 = \frac{6\times10^{-20}}{234\times10^{-27}} = \frac{6}{234}\times10^7 \text{ m/s}$$

$\therefore$ अवशिष्ट नाभिक की गतिज ऊर्जा

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$= \frac{1}{2}\times234\times1.67\times10^{-27}\times\frac{6}{234} \times10^7 \times \frac{6}{34}\times10^7$$

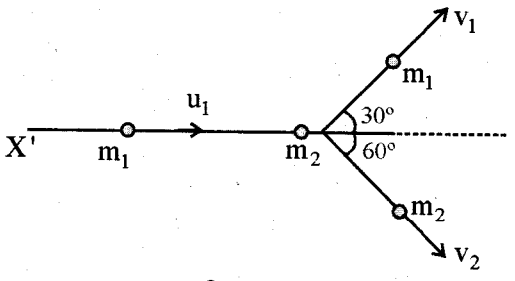
$$= \frac{1}{2}\times\frac{1.67\times6\times6}{234}\times10^{-13} \text{ J}$$

$$= 0.12846\times10^{-13} \text{ J}$$

$$= 1.2846\times10^{-14} \text{ J}$$

प्र.15 एक 4 kg का पिण्ड 10 m/s वेग से चलता हुआ विरामावस्था में स्थित 5 kg के पिण्ड से प्रत्यास्थ टक्कर करता है। यदि टक्कर के पश्चात् पिण्ड क्रमशः 30° तथा 60° के कोण पर प्रतिक्षेपित होते हैं तो दोनों पिण्डों का टक्कर के पश्चात् वेग ज्ञात कीजिये।

हल-



चित्र 5.22

दिया गया है: $m_1 = 4Kg$, $u_1 = 10$ m/s , $m_2 = 5Kg$, $u_2 = 0$

$v_1 = ?$, $v_2 = ?$

गति की वास्तविक दिशा (x-अक्ष) में टक्कर के पश्चात् पिण्डों के संवेग $= m_1v_1\cos30° + m_2v_2\cos60°$ ...(1)

y अक्ष के अनुदिश टक्कर के पश्चात् पिण्डों के संवेग

$= m_1v_1 \sin30° - m_2v_2\sin60°$ ...(2)

संवेग संरक्षण के नियम से

X– अक्ष के अनुदिश

$m_1u_1 + m_2 \times 0 = m_1v_1\cos30° + m_2v_2\cos60°$

$$4 \times 10 = 4v_1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 5v_2 \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{3}v_1 + 5v_2 = 80 \quad ...(3)$$

y - अक्ष के अनुदिश $0 = m_1v_1\sin30° - m_2v_2\sin60°$

$$\Rightarrow 0 = 4v_1 \times \frac{1}{2} - 5v_2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 4v_1 - 5\sqrt{3}v_2 = 0 \quad ....(4)$$

समी. (3) व (4) को हल करने पर

$v_1 = 5\sqrt{3}$ m/s , $v_2 = 4$ m/s