दोलन गति
(OSCILLATORY MOTION)

8
CHAPTER

8.1 प्रस्तावना (Introduction)

हम मेले में लगे चक्कर–झूले में बैठे बालक की चक्कर गति से भली भाँति परिचित हैं। पानी में तैरते हुए पत्ते को थोड़ा दबा कर छोड़ देने पर ऊपर–नीचे होने वाली गति तथा सितार के तार को थोड़ा दबा कर छोड़ने पर झनझनाते हुए तार की गति को प्रायः सभी ने देखा होगा। ये सभी गतियाँ निश्चित समयान्तराल से दोहरायी जाती हैं। इसी प्रकार हमारी घड़ी की सुईयों, पंखें की पंखुड़ियों, परमाणु कक्ष में इलेक्ट्रॉन, सूर्य के चारों ओर पृथ्वी एवं पृथ्वी के चारों ओर चन्द्रमा तथा स्थिर भू–उपग्रह की गति में भी, एक निश्चित समयान्तराल में एक चक्कर पूरा हो जाता है।

इस अध्याय में हम ऐसी ही निश्चित समयान्तराल में दोहरायी जाने वाली गति का अध्ययन करेंगे।

8.2 परिभाषाएँ (Definitions)

(i) आवर्त गति (Periodic motion) – जब कोई पिण्ड एक निश्चित समयान्तराल में एक ही निश्चित पथ पर बार–बार अपनी गति को दोहराता है तब उसकी गति '**आवर्त गति**' कहलाती है। जिस निश्चित समयान्तराल में पिण्ड अपनी गति को दोहराता है। वह समयान्तराल आवर्त काल (Time period) T कहलाता है।

उदाहरण–पृथ्वी, सूर्य के चारों ओर एक वर्ष में एक चक्कर लगाती है। पृथ्वी की यह गति आवर्त गति है। जिसका आवर्त काल एक वर्ष है।

(ii) अनावर्त गति (Non-periodic motion)– जब कोई पिण्ड निश्चित समयान्तराल में अपनी गति को नहीं दोहराता है। तब उसकी गति '**अनावर्त गति**' कहलाती है।

उदाहरण–गेंद का फेंकना, धनुष से बाण छोड़ना आदि।

(iii) दोलन गति या कम्पन गति (Oscillatory or Vibratory Motion)– जब कोई पिण्ड एक ही पथ पर एक निश्चित बिन्दु (साम्य स्थिति) के इर्द–गिर्द (To and fro) निश्चित समयान्तराल में बार–बार अपनी गति को दोहराता है तब उसकी गति दोलन गति या कम्पन गति कहलाती है। दोलन गति में वस्तु का अपनी साम्य स्थिति से एक ओर जाना, फिर उस स्थिति में वापस आना, फिर दूसरी ओर जाना तथा पुनः उसी साम्य स्थिति में वापस लौट कर आना एक दोलन कहलाता है।

उदाहरण– दीवार घड़ी के पेण्डुलम की गति, किसी स्प्रिंग से जुड़े हुए या लटके हुए द्रव्यमान की गति, झूले की गति आदि।

दोलन गति, आवर्त गति होती है। लेकिन सभी आवर्त गति, दोलन गति नहीं कही जा सकती है। उदाहरण के लिए, पृथ्वी का सूर्य के चारों ओर परिक्रमण आवर्त गति है परन्तु दोलन गति नहीं है क्योंकि इसमें माध्य स्थिति के दोनों ओर गति करने की शर्त पूरी नहीं होती है।

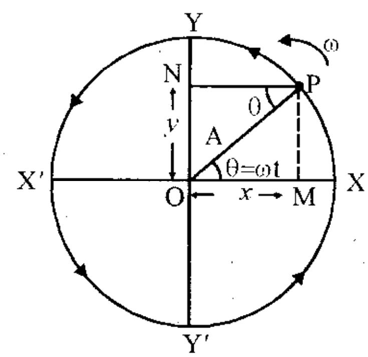
8.3 सरल आवर्त गति (Simple Harmonic Motion –S.H.M.)

सरल आवर्त गति दोलन गति का एक सरल रुप है। जब कोई कण अपनी साम्य स्थिति के इर्द–गिर्द इस प्रकार गति करे कि इस पर कार्यकारी बल (अथवा इसका त्वरण) प्रत्येक स्थिति में इसके साम्य स्थिति से विस्थापन के समानुपाती हो तथा सदैव साम्य स्थिति की ओर दिष्ट रहे तब कण की गति **सरल आवर्त गति (S.H.M.)** कहलाती है।

उदाहरण– स्प्रिंग से लटके किसी पिण्ड के दोलन, स्वरित्र द्विभुज की भुजाओं के कम्पन, सरल लोलक के दोलन आदि।

सरल आवर्त गति : एक समान वृत्तीय गति के प्रक्षेप के रूप में (Simple Harmonic motion :Motion of projection of uniform circular motion)

माना कि कोई कण एक वृत्त की परिधि पर, जिसका केन्द्र O तथा त्रिज्या A है, एक समान चाल से चक्कर लगा रहा है। जब कण किसी बिन्दु P पर होता है। तब कण से वृत्त के व्यास YY' पर डाले गये लम्ब का पाद (foot) बिन्दु N पर है। जब कण बिन्दु X पर होता है तो लम्ब का पाद बिन्दु O पर होता है। जब कण परिधि पर चलते हुए बिन्दु Y पर पहुँचता है तो लम्ब का पाद N भी व्यास पर चलकर Y पर पहुँच जाता है। जब कण परिधि पर चलकर X' पर पहुँचता है तो पाद भी व्यास पर चलकर Y से O पर आ जाता है। जब कण X' से Y' पर आ जाता है तो पाद O से Y' तक चलता है और जब कण Y' से चलकर X पर पहुँच जाता है तो पाद भी Y' से पुनः O पर पहुँच जाता है।



चित्र 8.1

इस प्रकार पाद N बिन्दु O के इर्द–गिर्द सरल रेखा में गति करता है। N की यह रैखिक गति सरल आवर्त गति है। N के O से Y तक, Y से Y' तक तथा Y' से O तक जाने को एक कम्पन कहते हैं। इस प्रकार यदि कोई कण किसी वृत्ताकार पथ पर एक समान चाल

से गतिशील हो तो कण से वृत्त के व्यास पर खींचे गये लम्ब के पाद की रैखिक गति को **सरल आवर्त गति** कहते हैं।

वृत्तीय गति में किसी कण पर अभिकेन्द्रीय बल सदैव वृत्त के केन्द्र की ओर दिष्ट होता है। अतः किसी कण के बिन्दु P पर स्थित होने पर अभिकेन्द्रीय बल OP दिशा के अनुदिश होगा। इस प्रकार अभिकेन्द्रीय बल $m\omega^2A$ का yy' दिशा में घटक $m\omega^2A\sin\omega t$ होगा। चित्र की ज्यामिती से

$$\sin\omega t = \frac{y}{A}$$

अतः कार्यकारी बल $= m\omega^2A\cdot\frac{y}{A} = m\omega^2y$

विस्थापन y को दिशा OY के अनुदिश धनात्मक लेने पर कार्यकारी बल की दिशा YO के अनुदिश होने से कार्यकारी बल ऋणात्मक लेने पर

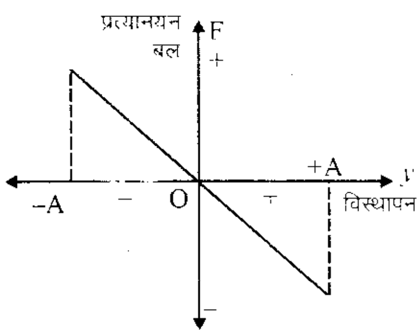
$$F = -m\omega^2y$$

$$\Rightarrow \quad F = -ky \quad ...(1)$$

जहाँ $k = m\omega^2$ प्रत्यानयन बल नियतांक कहलाता है। इस प्रकार समी. (1) से स्पष्ट है कि कण पर कार्यकारी बल कण के द्रव्यमान m के तथा कोणीय वेग ω के नियत होने पर, विस्थापन y के समानुपाती तथा विस्थापन के विपरीत दिशा में होता है। अतः इस बल को प्रत्यानयन बल (Restoring force) कहते हैं।

इस प्रकार सरल आवर्त गति किसी वस्तु की साम्य स्थिति के इर्द–गिर्द वह दोलनी गति होती है जिसमें प्रत्यानयन बल (i) साम्य स्थिति से वस्तु के विस्थापन के समानुपाती तथा (ii) सदैव साम्य स्थिति की ओर दिष्ट होता है। प्रत्यानयन बल नियतांक k का मात्रक न्यूटन/मीटर तथा विमाएँ $[M^1L^0T^{-2}]$ होती हैं।

प्रत्यानयन बल (F) तथा विस्थापन (y) में वक्र निम्न प्रकार रैखिक प्राप्त होता है–



चित्र 8.2

8.4 सरल आवर्त गति के अभिलक्षण (Characteristics of Simple Harmonic Motion)

सरल आवर्त गति बल $F = -ky$ द्वारा नियंत्रित होती है तथा इसके अंतर्गत

(i) गति सदैव सरल रेखा में तथा एक नियत बिन्दु के इर्द–गिर्द होती है।

(ii) गतिमान वस्तु के त्वरण की दिशा सदैव साम्यावस्था की ओर दिष्ट होती है।

(iii) दोलन की प्रत्येक स्थिति में कण का त्वरण उसकी साम्यावस्था से वस्तु के विस्थापन के समानुपाती होता है।

सरल आवर्त गति दो प्रकार की होती है–

(i) रैखिक सरल आवर्त गति।

(ii) कोणीय सरल आवर्त गति।

8.5 रैखिक सरल आवर्त गति का समीकरण (Equation of Linear Simple Harmonic Motion)

माना कि m द्रव्यमान की वस्तु पर F बल आरोपित है जिसके कारण उत्पन्न त्वरण

$$a = \frac{F}{m}$$

परन्तु $\quad F = -ky$

$$\therefore \quad a = -\frac{k}{m}y$$

$$\Rightarrow \quad a = -\omega^2 y$$

जहाँ $\quad \omega^2 = \frac{k}{m}$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

एक नियतांक है जिसे **कोणीय आवृत्ति (Angular frequency)** कहते है।

$$\because \quad \text{त्वरण } a = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad ...(2)$$

समीकरण (2) रैखिक सरल आवर्त गति का अवकलन समीकरण कहलाता है। इस समीकरण का व्यापक हल

$y = A\sin(\omega t + \phi)$ होता है।

अब यह प्रदर्शित करने के लिए कि उपरोक्त व्यापक हल समी. (2) का हल है समय t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

इस प्रकार समीकरण $y = A\sin(\omega t + \phi)$ समी. (2) का व्यापक हल है।

सरल आवर्त गति का विस्थापन समीकरण (Displacement Equation of S.H.M.)

माना किसी बिन्दु P पर स्थित कण $t = 0$ समय पर बिन्दु X

से चलना प्रारम्भ करता है तथा t सेकण्ड में θ रेडियन का कोण घूम जाता है। यदि कण का कोणीय वेग ω हो तो

$$\therefore \quad \omega = \frac{\theta}{t}$$

$$\therefore \quad \theta = \omega t$$

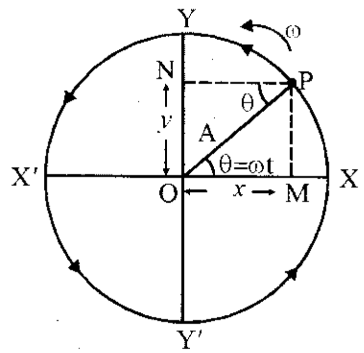
t सेकण्ड मे पाद N का बिन्दु O से विस्थापन ON है यदि ON = y माना जाये तब त्रिभुज OPN से

$$\frac{ON}{OP} = \frac{y}{A} = \sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad y = A\sin\theta$$

परन्तु $\theta = \omega t$

$$\therefore \quad y = A\sin\omega t \qquad \ldots(1)$$



चित्र 8.3

यह सरल आवर्त गति का विस्थापन समीकरण है।

व्यापक रूप में प्रारम्भिक स्थिति को कहीं भी माना जा सकता है। माना कि $t = 0$ समय पर कण की स्थिति बिन्दु P' पर है अर्थात् $t = 0$ समय $\angle P'OX = \phi$ है।

t सेकण्ड मे पाद N का बिन्दु O से विस्थापन ON है। यदि ON = y माना जाये तब

$$y = A\sin(\omega t + \phi) \qquad \ldots(2)$$

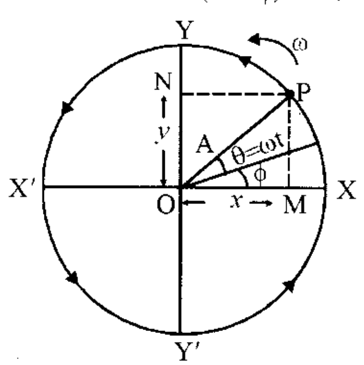
समी. (2) सरल आवर्त गति का व्यापक समीकरण कहलाता है। यदि P से वृत्त के व्यास XX' पर लम्ब का पाद M लें तब OM = x माना जाये तो

सरल आवर्त गति का समीकरण

$$x = A\cos\omega t$$

तथा व्यापक समीकरण

$x = A\cos(\omega t + \phi)$ होगा।



चित्र 8.4

सरल आवर्त गति से सम्बन्धित कुछ महत्वपूर्ण परिभाषाएँ (Some Important definitions related to S.H.M.)

(i) साम्य स्थिति या माध्य स्थिति (Mean position)- वह स्थिति जहाँ पर कण पर लग रहा प्रत्यानयन बल शून्य होता है अर्थात् कण स्थायी सन्तुलन मे होता है। उसे साम्य स्थिति या माध्य स्थिति कहते है। समीकरण (2) में $y = 0$ साम्य स्थिति को व्यक्त करता है।

(ii) तात्क्षणिक विस्थापन (Instantaneous displacement) (y)- किसी समय t पर सरल आवर्त गति कर रहे कण का माध्य स्थिति से विस्थापन तात्क्षणिक विस्थापन कहलाता है। समी. (2) मे यह y द्वारा व्यक्त किया गया है। इसी समीकरण के अनुसार $t = 0$ समय पर तात्क्षणिक विस्थापन $y = A\sin\phi$ है।

(iii) आयाम (Amplitude) (A)- सरल आवर्त गति कर रहे कण का साम्य स्थिति से अधिकतम विस्थापन, आयाम कहलाता है। समी. (2) मे आयाम A है सरल आवर्त गति में कण साम्य स्थिति के इर्द–गिर्द $\pm A$ आयाम से सममित गति करता है।

(iv) आवर्त काल (Time period) (T)- एक दोलन या कम्पन मे लगने वाले समय को आवर्तकाल कहते है। जब कोई कण T समय में वृत्त का एक चक्कर पूरा करता है। तब वह 2π रेडियन कोण से घूम जाता है। अतः आवर्तकाल

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

(v) आवृत्ति (Frequency) (n)- प्रति सेकण्ड होने वाले दोलनों या कम्पनों की संख्या को आवृत्ति कहते है।

$$\text{आवृत्ति } n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ हर्ट्ज}$$

(vi) कोणीय आवृत्ति (Angular frequency (ω))– किसी कण के प्रति सेकण्ड कला कोण में होने वाले परिवर्तन को कोणीय आवृत्ति कहते हैं। सरल आवर्त गति के लिये कोणीय आवृत्ति निम्न प्रकार परिभाषित की जाती है–

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$$

तथा $$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(vii) कला कोण या कला (Phase angle)– वह राशि जिसके द्वारा कम्पित कण की साम्य स्थिति से किसी क्षण की स्थिति या गति की अवस्था व्यक्त करते हैं कला कोण कहलाती है। समीकरण (2) में कला कोण $(\omega t + \phi)$ है।

(viii) प्रारंभिक कला कोण (Epoch) ϕ: समय $t = 0$ पर (प्रारम्भ में) कला कोण को प्रारंभिक कला कोण कहते है। समीकरण (2) में प्रारंभिक कला कोण ϕ है।

(ix) कलान्तर (Phase difference)– साम्य स्थिति से सरल आवर्त गति कर रहें दो कणों के कला कोणों के अन्तर को कलान्तर कहते है। माना कि सरल आवर्त गति कर रहे प्रथम कण का साम्य स्थिति से कुल कला कोण $(\omega t + \phi_1)$ तथा द्वितीय कण का कुल कला कोण $(\omega t + \phi_2)$ है।

∴ दोनों के मध्य कलान्तर = द्वितीय कण का कुल कला कोण – प्रथम कण का कुल कला कोण

$$= (\omega t + \phi_2) - (\omega t + \phi_1)$$

$$= \phi_2 - \phi_1$$

जब कलान्तर $\phi_2 - \phi_1 = \pi$ हो तब कण विपरीत कला में होंगे। इस स्थिति में साम्य स्थिति से एक कण बांयी ओर जाता है तो दूसरा दांयी ओर। जब कलान्तर $\phi_2 - \phi_1 = 2\pi$ हो तब कण समान कला में होंगे। इस स्थिति में साम्य स्थिति से दोनों कण साथ–साथ गति करेंगे।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

कोणीय सरल आवर्त गति (Angular Simple Harmonic Motion)–इस गति में कण साम्य स्थिति के इर्द–गिर्द कोणीय दोलन करता है। कण का पथ किसी वृत्त के चाप के अनुदिश होता है।

कण पर लग रहा प्रत्यानयन बल आघूर्ण (τ). सदैव साम्य स्थिति से कोणीय विस्थापन (θ) के समानुपाती तथा विपरीत दिशा में होता है अर्थात्

$$\tau \propto -\theta$$

$$\Rightarrow \quad \tau = -C\theta \quad \ldots(1)$$

यहाँ C एक नियतांक है जिसे प्रत्यानयन बल आघूर्ण नियतांक कहते हैं।

कोणीय सरल आवर्त गति का अवकलन समीकरण– माना कि किसी वस्तु का घूर्णन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण I तथा कोणीय त्वरण α है तब–

$$\alpha = \frac{\tau}{I}$$

परन्तु $\tau = -C\theta$

$$\therefore \quad \alpha = -\frac{C}{I}\theta$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = -\omega^2\theta$$

यहाँ $\omega^2 = \frac{C}{I}$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{C}{I}} \quad \because \text{ कोणीय त्वरण } \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (2) कोणीय सरल आवर्त गति का अवकलन समीकरण कहलाता है। इस समीकरण का व्यापक हल $\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$ होता है।

आवर्ती फलन (Periodic functions)

वह फलन जिसकी निश्चित समयान्तराल पश्चात् पुनरावृत्ति होती है, आवर्ती फलन कहलाता है।

एक सरलतम आवर्ती फलन निश्चित आवर्तकाल (एक दोलन या कम्पन में लगा समय) या आवृत्ति (प्रति सेकण्ड होने वाले दोलनों या कम्पनों की संख्या) का ज्या (sine) तथा कोज्या (cosine) फलन होता है अर्थात्

$$f(t) = A\sin\omega t = A\sin\frac{2\pi}{T}t \quad \ldots(1)$$

तथा $g(t) = A\cos\omega t = A\cos\frac{2\pi}{T}t \quad \ldots(2)$

[$\because$ कोणीय आवृत्ति $\omega = \frac{2\pi}{T}$, जहां T = आवर्तकाल]

समी. (1) तथा (2) में T समयान्तराल पश्चात् फलनों की पुनरावृत्ति होती है। अतः इसकी सत्यता की जांच करने के लिए यदि समय t को $(t+T)$ से प्रतिस्थापित किया जाए तब

$$f(t+T) = A\sin\frac{2\pi}{T}(t+T)$$

$$= A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + 2\pi\right)$$

$$= A\sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$= A\sin\frac{2\pi}{T}t \quad [\because \sin(2\pi+\theta) = \sin\theta]$$

इस प्रकार फलन $f(t)$ की समयान्तराल T के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है।

इसी प्रकार $g(t+T) = A\cos\frac{2\pi}{T}(t+T)$

$$= A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + 2\pi\right)$$

$$= A\cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$= A\cos\frac{2\pi}{T}t$$

$$= g(t) \quad [\because \cos(2\pi+\theta) = \cos\theta]$$

अतः समी. (1) तथा (2) द्वारा प्रदर्शित फलन, आवर्ती फलन को व्यक्त करते हैं।

अब यदि ज्या तथा कोज्या फलन को रैखिक संयोजन के रूप में, जैसे

$$F(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

व्यक्त किया जाए तब F(t) एक आवर्ती फलन होता है जिसका आवर्तकाल T है।

अब यदि $A = r\cos\phi \quad \ldots(3)$

तथा $B = r\sin\phi$ (माना) $\ldots(4)$

हो तब $F(t) = r\cos\phi\sin\omega t + r\sin\phi\cos\omega t$

$$\Rightarrow \quad F(t) = r\sin(\omega t + \phi) \quad \ldots(5)$$

$[\because \sin A\cos B + \cos A\sin B = \sin(A+B)]$

समी. (5) परिणामी आवर्ती फलन को व्यक्त करता है।

***r* का मान ज्ञात करना–**

समी. (3) तथा (4) का वर्ग करके जोड़ने पर

$$A^2 + B^2 = r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi$$

$$\Rightarrow \quad A^2 + B^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt{A^2+B^2} \quad \ldots(6)$$

ϕ का मान ज्ञात करना–

समी. (4) को (3) से भाग देने पर

$$\tan\phi = \frac{B}{A}$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) \quad \ldots(7)$$

8.6 प्रत्यानयन बल (Resorting Force)

दोलन करती हुई वस्तु जब साम्य स्थिति में होती है तो उस पर परिणामी बल शून्य होता है। अतः इस स्थिति में वस्तु विरामावस्था में रह सकती है। जब वस्तु को उसकी साम्य स्थिति से विस्थापित कर दिया जाता है तो इस पर एक ऐसा आवर्ती बल कार्य करने लगता है जिसकी दिशा सदैव साम्य स्थिति की ओर रहती है

अर्थात् यह बल वस्तु के विस्थापन की दिशा के विपरीत दिशा में कार्यरत रहता है। इस प्रकार के बल को **प्रत्यानयन बल** कहते है।

प्रत्यानयन बल सदैव वस्तु को उसकी साम्य स्थिति की ओर लाने का प्रयास करता है। प्रत्यानयन बल के कारण वस्तु में त्वरण उत्पन्न होता है तथा वस्तु कम्पन करती है। प्रत्यानयन बल वस्तु की साम्य स्थिति से उसके विस्थापन के समानुपाती होने पर, त्वरण भी विस्थापन के समानुपाती होता है तथा वस्तु सरल आवर्त गति में कम्पन करने लगती है।

उदा.1. निम्नलिखित समय के फलनों में कौन (a) आवर्ती तथा (b) अनावर्ती गति को निरूपित करते हैं? प्रत्येक आवर्ती गति का आवर्तकाल, लिखिए [ω कोई धनात्मक नियतांक है]

(a) $\sin \omega t + \cos 2\omega t + \sin 4\omega t$

(b) $e^{-\omega t}$

(c) $\log(\omega t)$

हल– (a) दिया गया फलन $\sin \omega t + \cos 2\omega t + \sin 4\omega t$ एक आवर्ती फलन है तथा आवर्तगति को निरूपित करता है परंतु दिये गए फलन के भिन्न पदों के लिए कोणीय आवृत्ति एवं आवर्तकाल भिन्न–भिन्न है।

(i) प्रथम पद के लिए कोणीय आवृत्ति $= \omega$

आवर्तकाल $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$

(ii) द्वितीय पद के लिए कोणीय आवृत्ति $= 2\omega$

आवर्तकाल $T_2 = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T_1}{2}$

(iii) तृतीय पद के लिए कोणीय आवृत्ति $= 4\omega$

आवर्तकाल $T_3 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{T_1}{4}$

स्पष्टतः T_1, T_2 एवं T_3 का पूर्ण गुणज है अतः समयान्तराल $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$ के पश्चात् तीनों पदों का योग पुनः एक साथ पुनरावृत्ति करेगा। अतः इस फलन का आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega}$

(b) दिया गया फलन $e^{-\omega t}$ एक चरघातांकी ह्रासमान फलन है अतः यह एक अनावर्ती फलन है तथा इसका मान $t \to \infty$ पर शून्य की ओर अग्रसर होगा।

(c) दिया गया फलन $\log(\omega t)$ एक सतत् वृद्धिमान् फलन है जिसका मान $t \to \infty$ पर अनन्त की ओर अग्रसर होगा अतः यह भी अनावर्ती फलन है।

उदा.2. कोई मानव हृदय एक मिनट में औसतन 75 बार धड़कन करता पाया जाता है। इसकी आवृत्ति तथा आवर्तकाल परिकलित कीजिए। **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 8.1)**

हल– हृदय की धड़कन = 1 मिनट में 75 बार

अतः धड़कन आवृत्ति $n = \frac{75}{60} = 1.25$ प्रति से.

तथा आवर्तकाल $T = \frac{1}{n} = \frac{1}{1.25} = 0.8$ से.

उदा.3. सिद्ध कीजिए कि $\sin \omega t + \cos \omega t$ एक आवर्ती फलन है। **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 8.2)**

हल– दिया गया फलन

$\sin \omega t + \cos \omega t$ एक आवर्ती फलन है क्योंकि

$$\sin \omega t + \cos \omega t = \sqrt{2}\sin\omega t\cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\cos\omega t\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} + 2\pi\right)$$

$$= \sqrt{2}\sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \frac{\pi}{4}\right]$$

तथा इस फलन का आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega}$ है।

उदा.4. समय के निम्नलिखत फलनों में से कौन (a) सरल आवर्त गति तथा (b) आवर्त गति को निरूपित करता है परंतु सरल आवर्त गति नहीं? प्रत्येक का आवर्तकाल निकालिए।

(a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

(b) $\sin^2 \omega t$.

हल– (a) $y = \sin \omega t - \cos \omega t$

$$= \sqrt{2}\sin\omega t\cos\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\cos\omega t\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

अतः यह फलन सरल आवर्त गति को निरूपित करता है जिसका आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega}$ तथा प्रारम्भिक कला कोण $\phi = -\frac{\pi}{4}$ है।

(b) $y = \sin^2 \omega t$

$$= \frac{1-\cos 2\omega t}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\omega t$$

यह आवर्ती फलन है, इसका आवर्तकाल $T = \frac{\pi}{\omega}$ है।

स्थिति $y = \frac{1}{2}$ के सापेक्ष यह सरल आवर्तगति को भी व्यक्त करता है।

उदा.5. एक कण का विस्थापन निम्न समीकरण के द्वारा व्यक्त किया जाता है

$$x = 6\cos\omega t + 8\sin\omega t$$

सिद्ध कीजिए कि यह समी. एक सरल आवर्ती फलन को व्यक्त करती है। **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 8.3)**

हल : दिये गये समीकरण से

$$x = 6\cos\omega t + 8\sin\omega t$$

मानाकि $6 = A\sin\theta$ ....(1)

$8 = A\cos\theta$ ....(2)

$$x = A\sin\theta\cos\omega t + A\cos\theta\sin\omega t$$

$$x = A\sin(\omega t + \theta)$$

यह समीकरण सरल आवर्ती फलन को व्यक्त करता है। समी (1) व समी (2) का वर्ग करके जोड़ने पर

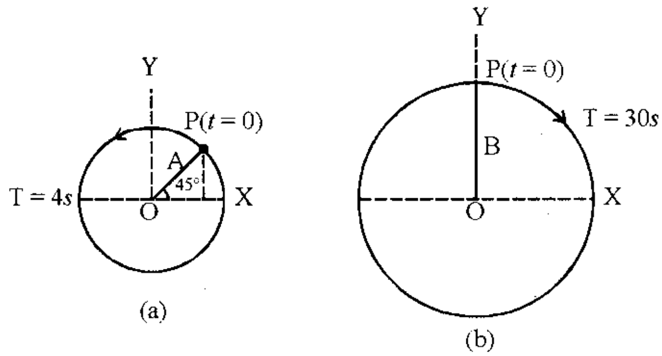
$$6^2 + 8^2 = A^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)$$

$$A^2 = 36 + 64 = 100$$

$$A = 10\,\text{m}$$

इस प्रकार सरल आवर्ती फलन का आयाम 10 मी है।

उदा.6. चित्र में दो वर्तुल गतियाँ दर्शायी गई हैं। इन चित्रों पर वृत्त की त्रिज्या, घूर्णन का आवर्तकाल, आरंभिक स्थिति तथा घूर्णन की दिशा अंकित की गई है। प्रत्येक स्थिति में घूर्णी कण P के त्रिज्य सदिश के x प्रक्षेप की सरल आवर्त गति प्राप्त कीजिए।



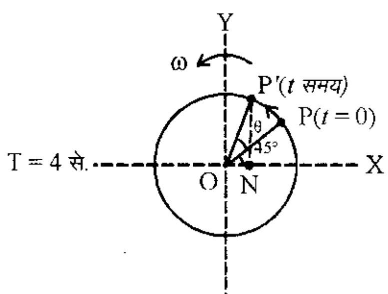
चित्र 8.5

हल– **चित्र (a) के लिए–**

माना वर्तुल गति की कोणीय चाल ω है तब

t समय में कोणीय विस्थापन $\theta = \omega t$

प्रारम्भिक कला कोण $\phi = +\frac{\pi}{4}$ (X-अक्ष की धनात्मक दिशा से बना कोण)



चित्र 8.6

अतः किसी क्षण t पर X अक्ष पर प्रक्षेप

$$ON = OP\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), \quad \text{आयाम } OP = A$$

$$\Rightarrow \quad x = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

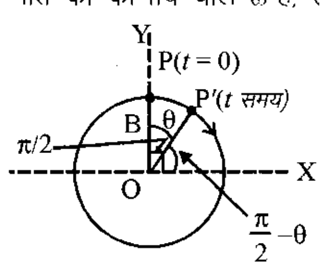
$\because$ आवर्तकाल T = 4 से.

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

अतः $\quad x = A\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) = A\cos\left(\frac{2\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right) \quad$ ...(1)

चित्र (b) के लिए–

माना वर्तुल गति की कोणीय चाल ω है, तब



चित्र 8.7

t समय में दक्षिणावर्त दिशा में कोणीय विस्थापन

$$\theta = \omega t$$

प्रारम्भिक कला कोण $\phi = \frac{\pi}{2}$

अतः t समय पर X अक्ष के साथ बना कोण

$$= \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \omega t$$

अतः X अक्ष पर प्रक्षेप

$$x = B.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = B\sin\omega t$$

$\because$ आवर्तकाल T = 30 से.

अतः $\quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{30} = \frac{\pi}{15}$

अतः $\quad x = B\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}t\right) = B\sin\frac{\pi}{15}t \quad$ ...(2)

उदा.7. एक सरल आवर्त गति का आयाम 0.1 m तथा आवर्तकाल 2s है। इसका विस्थापन समीकरण लिखिए।

(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 8.4)

हल– दिया गया है $A = 0.1$ m

$T = 2$ s

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ रेडियन / सेकण्ड}$$

सरल आवर्त गति का विस्थापन समीकरण

$$y = a\sin\omega t \Rightarrow y = 0.10\sin\pi t \text{ मी.}$$

उदा.8. किसी कण की सरल आवर्त गति का विस्थापन $y = 0.7\sin(50\pi t + 30°)$m है। ज्ञात कीजिए (i) आयाम (ii) कोणीय आवृति (iii) आवृत्ति (iv) आवर्तकाल (v) कला कोण (vi) प्रारम्भिक कला (vii) प्रारम्भिक विस्थापन

(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 8.5)

हल– दिए गए समीकरण

$y = 0.7\sin(50\pi t + 30°)$ m की तुलना

$y = a\sin(\omega t + \phi)$ से करने पर

(i) आयाम $a = 0.7$m

(ii) कोणीय आवृत्ति $\omega = 50\pi$ रेडियन / सेकण्ड

(iii) आवृत्ति $n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{50\pi}{2\pi} = 25\,\text{Hz}$

(iv) आवर्तकाल $T = \frac{1}{n} = \frac{1}{25} = 0.04\,\text{s}$

(v) कला कोण $(50\pi t + 30°)$

(vi) प्रारम्भिक कला $\phi = 30° = \frac{30 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ rad

(vii) प्रारम्भिक विस्थापन की स्थिति में $t = 0$ रखने पर

$$y = 0.7\sin(50\pi \times 0 + 30°)$$

$$= 0.7\sin 30° = 0.7 \times \frac{1}{2} = 0.35\,\text{m}$$

सरल आवर्त गति का ग्राफीय निरुपण (Graphical Representation of S.H.M.)

किसी कण की सरल आवर्त गति को निम्न समीकरणों द्वारा व्यक्त किया जाता है–

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \quad ...(1)$$

या

$$y(t) = A\sin(\omega t + \phi) \quad ...(2)$$

जहां $x(t)$ या $y(t)$ = कण का किसी समय t पर विस्थापन

A = कण का माध्य स्थिति से अधिकतम विस्थापन

ω = कोणीय आवृत्ति

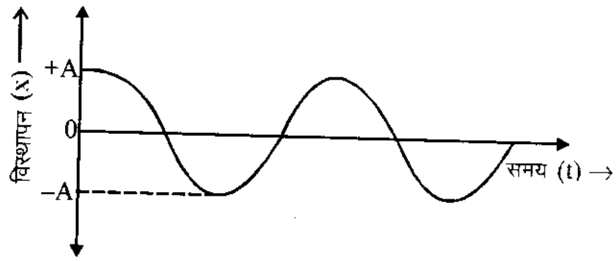
$(\omega t + \phi)$ = कला या कला कोण

ϕ = प्रारंभिक कला कोण

अब यदि कण की सरल आवर्त गति का समीकरण

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ लें तब

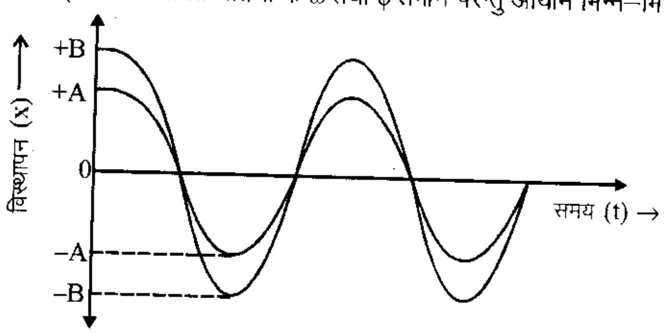
(1) कण के विस्थापन का समय के सतत् फलन के रूप में ग्राफीय निरूपण



चित्र 8.8

(2) प्रारंभिक कला कोण $\phi = 0$ होने पर विस्थापन का समय के फलन के रूप में ग्राफीय निरूपण–

(दो सरल आवर्त गतियों के ω तथा ϕ समान परन्तु आयाम भिन्न–भिन्न)

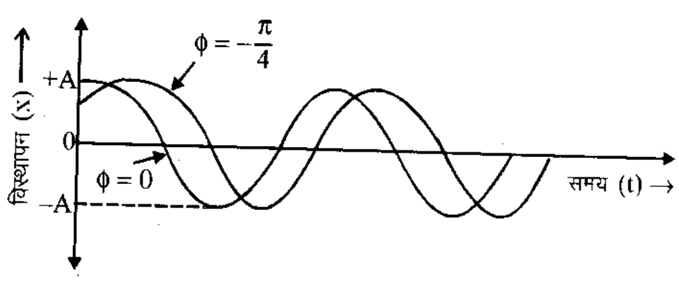


चित्र 8.9

यहां A तथा B दो सरल आवर्त गतियों के भिन्न–भिन्न आयाम हैं।

(3) प्रारंभिक कला कोण ϕ भिन्न–भिन्न होने पर विस्थापन का समय के फलन के रूप में ग्राफीय निरूपण–

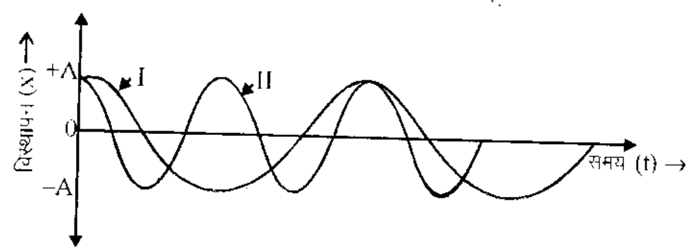
(दो सरल आवर्त गतियों के आयाम A तथा ω समान परन्तु कला कोण ϕ भिन्न–भिन्न)



चित्र 8.10

(4) कोणीय आवृत्ति ω भिन्न होने पर विस्थापन का समय के फलन के रूप में ग्राफीय निरूपण–

(दो सरल आवर्त गतियों के आयाम A तथा ϕ समान परन्तु कोणीय आवृत्ति ω भिन्न–भिन्न)



चित्र 8.11

यहां वक्र II का आवर्तकाल, वक्र I के आवर्तकाल का आधा जबकि इसकी आवृत्ति वक्र I की आवृत्ति की दुगुनी है।

8.7 सरल आवर्त गति में कण का विस्थापन, वेग तथा त्वरण का ग्राफीय निरुपण (Graphical representation of displacement, velocity and acceleration in SHM)

(i) सरल आवर्त गति में कण का विस्थापन (Displacement in SHM)

माना कि किसी समय t पर सरल आवर्त गति करने वाले कण का विस्थापन $y = A\sin\omega t$ है।

यहाँ प्रारम्भिक कला कोण $\phi = 0$ माना गया है।

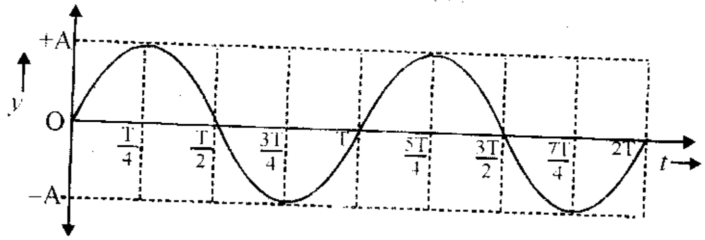
$\therefore$ कोणीय आवृत्ति $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\therefore \quad y = A\sin\frac{2\pi}{T}t \quad ...(1)$$

समय t के विभिन्न मानों के लिए कण का विस्थापन भिन्न – भिन्न होगा–

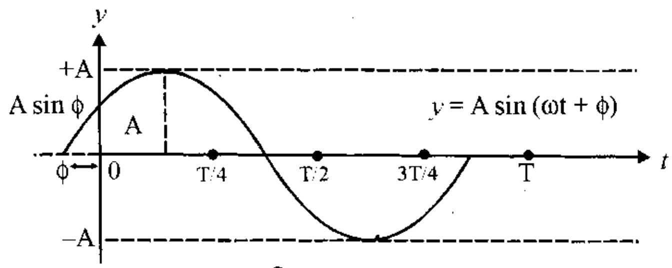
t	$\omega t = \frac{2\pi}{T}t$	$\sin\omega t$	$y = A\sin\omega t$
0	$\frac{2\pi}{T}\cdot 0 = 0$	$\sin 0 = 0$	0
$\frac{T}{4}$	$\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$	$\sin\frac{\pi}{2} = 1$	+A
$\frac{T}{2}$	$\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2} = \pi$	$\sin\pi = 0$	0
$\frac{3T}{4}$	$\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{2}$	$\sin\frac{3\pi}{2} = -1$	–A
T	$\frac{2\pi}{T}\cdot T = 2\pi$	$\sin 2\pi = 0$	0

तात्क्षणिक विस्थापन (y) तथा समय (t) में ग्राफ–

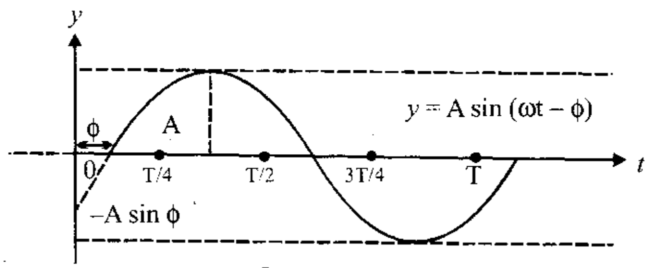


चित्र 8.12 (a)

यदि तात्क्षणिक विस्थापन $y = A\sin(\omega t \pm \phi)$
जहाँ ϕ प्रारंभिक कला है, द्वारा प्रदर्शित है तो विस्थापन समय आलेख निम्न प्रकार होंगे–



चित्र 8.12 (b)



चित्र 8.12 (c)

(ii) सरल आवर्त गति में कण का वेग (Velocity of SHM)

सरल आवर्त गति कर रहे कण के तात्क्षणिक विस्थापन का समीकरण

$$y = A\sin\omega t \qquad \ldots(1)$$

समीकरण (1) के अवकलन से

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(A\sin\omega t)$$

$$\text{वेग } v = \frac{dy}{dt}$$

$$\therefore \quad v = A\omega\cos\omega t \qquad \ldots(2)$$

यह सरल आवर्त गति के लिये वेग का समीकरण है।
समीकरण (2) को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

$$v = A\omega\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left[\because \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\omega t\right]$$

इस प्रकार सरल आवर्त गति कर रहे कण का वेग, विस्थापन से $\frac{\pi}{2}$ कला कोण से आगे रहता है।

$$\because \quad \cos\omega t = \sqrt{1-\sin^2\omega t}$$

$\therefore$ समीकरण (2) से

$$v = A\omega\sqrt{1-\sin^2\omega t}$$

$$= \omega\sqrt{A^2 - A^2\sin^2\omega t}$$

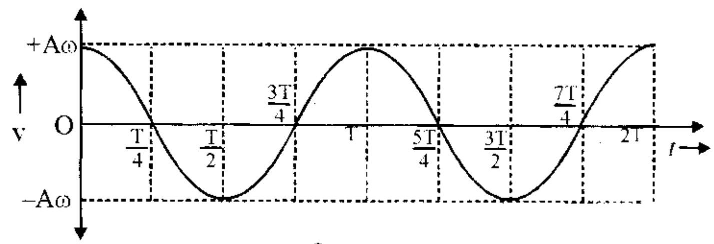
$$\because \quad y = A\sin\omega t$$

$$\therefore \quad v = \omega\sqrt{A^2 - y^2} \qquad \ldots(3)$$

समी. (3) से स्पष्ट है कि सरल आवर्त गति करते किसी कण का वेग उसके विस्थापन पर निर्भर करता है।
(i) जब $y = 0$ तब $v_{max} = A\omega$ (ii) जब $y = \pm A$ तब $v_{min} = 0$
समीकरण (2) से स्पष्ट है कि समय t के विभिन्न मानों के लिए कण का वेग भिन्न भिन्न होगा–

t	$\omega t = \frac{2\pi}{T}t$	$\cos\omega t$	$v = A\omega\cos\omega t$
0	$\frac{2\pi}{T}\cdot 0 = 0$	$\cos 0 = 1$	$+A\omega$
$\frac{T}{4}$	$\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$	$\cos\frac{\pi}{2} = 0$	0
$\frac{T}{2}$	$\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2} = \pi$	$\cos\pi = -1$	$-A\omega$
$\frac{3T}{4}$	$\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{2}$	$\cos\frac{3\pi}{2} = 0$	0
T	$\frac{2\pi}{T}\cdot T = 2\pi$	$\cos 2\pi = 1$	$+A\omega$

वेग (v) तथा समय (t) में ग्राफ–



चित्र 8.13

विस्थापन (y) तथा वेग (v) के समीकरण से

$$\because \quad y = A\sin\omega t \qquad \because v = A\omega\cos\omega t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{A} = \sin\omega t \qquad \Rightarrow \frac{v}{A\omega} = \cos\omega t$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{y}{A}\right)^2 = \sin^2\omega t \qquad \ldots(4)$$

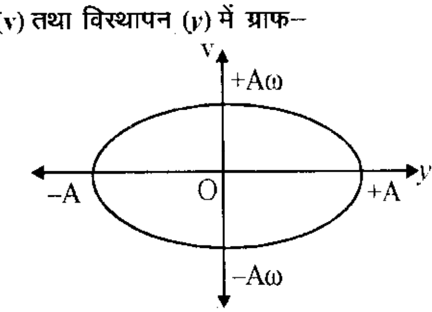
$$\Rightarrow \quad \left(\frac{v}{A\omega}\right)^2 = \cos^2\omega t \qquad \ldots(5)$$

समीकरण (4) व (5) का योगफल करने पर

$$\Rightarrow \quad \frac{y^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega^2} = 1 \quad (\because \sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1) \qquad \ldots(6)$$

समीकरण (6) एक दीर्घवृत्त का समीकरण है। अतः y व v में ग्राफ एक दीर्घवृत्त प्राप्त होता है।

वेग (v) तथा विस्थापन (y) में ग्राफ–



चित्र 8.14

(iii) सरल आवर्त गति में कण का त्वरण (Acceleration in SHM)

सरल आवर्त गति कर रहे कण का वेग

$$v = A\omega\cos\omega t \qquad \ldots(1)$$

समीकरण (1) के अवकलन से

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(A\omega\cos\omega t)$$

$$= -A\omega^2 \sin \omega t \qquad ...(2)$$

$\because \qquad y = A \sin \omega t$

$\because \qquad$ त्वरण $a = \dfrac{dv}{dt}$

$\therefore \qquad$ त्वरण $a = -\omega^2 y \qquad ...(3)$

यह सरल आवर्त गति के लिये त्वरण का समीकरण है।

$\because \omega$ एक नियतांक है अतः $a \propto -y$

अतः इससे निष्कर्ष निकलता है कि सरल आवर्त गति करते हुए कण का त्वरण उसके विस्थापन के समानुपाती होता है तथा इसकी दिशा सदैव विस्थापन के विपरीत होती है।

यदि (i) $y = A$ तो $a_{max} = -\omega^2 A$

(ii) यदि $y = 0$ तो $a_{min} = 0$

समीकरण (2)को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

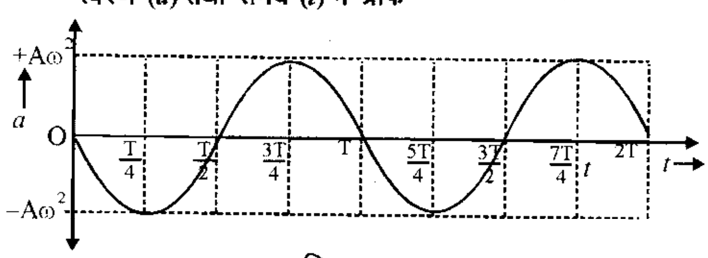
$$a = \frac{dv}{dt} = A\omega^2 \sin(\omega t + \pi)$$

$$[\because \sin(\omega t + \pi) = -\sin \omega t]$$

इस प्रकार सरल आवर्त गति कर रहे कण का त्वरण, विस्थापन से π कला कोण से आगे रहता है तथा त्वरण, वेग से $\pi/2$ कला कोण से आगे रहता है। समीकरण (2) से स्पष्ट है कि समय t के विभिन्न मानों के लिए कण का त्वरण भिन्न भिन्न होगा–

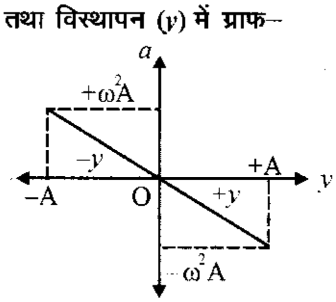
t	$\omega t = \frac{2\pi}{T} t$	$\sin = \omega t$	$a = -A\omega^2 \sin \omega t$
0	$\frac{2\pi}{T} \cdot 0 = 0$	$\sin 0 = 0$	0
$\frac{T}{4}$	$\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$	$\sin \frac{\pi}{2} = 1$	$-A\omega^2$
$\frac{T}{2}$	$\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} = \pi$	$\sin \pi = 0$	0
$\frac{3T}{4}$	$\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{2}$	$\sin \frac{3\pi}{2} = -1$	$+A\omega^2$
T	$\frac{2\pi}{T} \cdot T = 2\pi$	$\sin 2\pi = 0$	0

त्वरण (a) तथा समय (t) में ग्राफ–



चित्र 8.15

त्वरण (a) तथा विस्थापन (y) में ग्राफ–



चित्र 8.16

महत्त्वपूर्ण तथ्य

यदि किसी समय t पर सरल आवर्तगति करने वाले कण का विस्थापन $x = A \cos \omega t$ हो तब कण का वेग

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A \cos \omega t)$$

$$= -\omega A \sin \omega t \qquad ...(1)$$

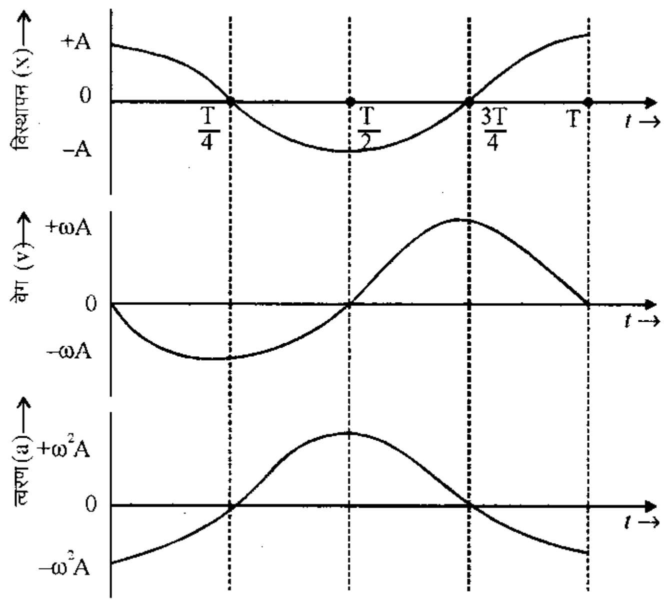
$$v = +\omega A \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

इस समीकरण में धनात्मक राशि ωA वेग आयाम v_m कहलाती है।

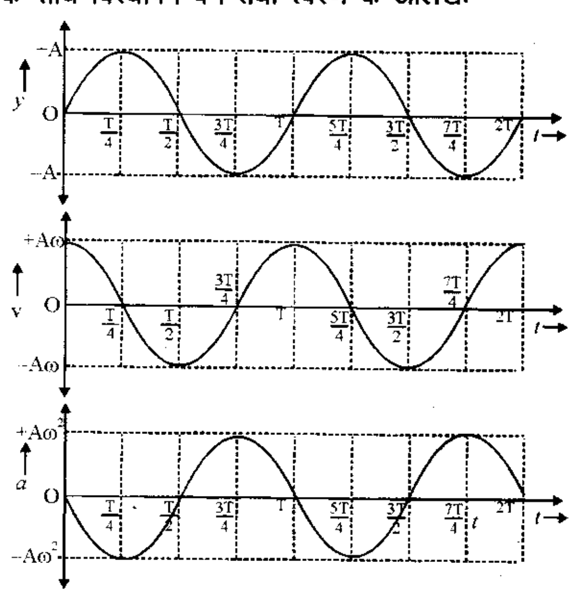
कण का त्वरण $\qquad a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}(-\omega A \sin \omega t)$

$$= -\omega^2 A \cos \omega t = -\omega^2 x \qquad ...(2)$$

$$\Rightarrow \quad a = \omega^2 A \cos(\omega t - \pi)$$



समय के साथ विस्थापन वेग तथा त्वरण के आलेखः



चित्र 8.17

विस्थापन वेग एवं त्वरण के विभिन्न समयों पर मान

समय	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
विस्थापन	0	A	0	$-A$	0
वेग	$A\omega$	0	$-A\omega$	0	$A\omega$
त्वरण	0	$-A\omega^2$	0	$A\omega^2$	0

सरल आवर्त गति के लिए बल का नियम
(Force law for S.H.M.)

माना सरल आवर्त गति करते कण का द्रव्यमान m है तथा किसी समय t पर इसकी गति में त्वरण $a = -\omega^2 A \sin \omega t = -\omega^2 y$ है तब कण पर लगने वाला बल

$$F = ma = -m\omega^2 A \sin \omega t = -m\omega^2 y$$
$$= -ky \quad ...(1)$$

जहां $$k = m\omega^2 \quad ...(2)$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ...(3)$$

समी. (1) में ऋणात्मक चिन्ह यह प्रदर्शित करता है कि बल की दिशा सदैव विस्थापन y के विपरीत अर्थात् माध्य स्थिति की ओर होती हैं अतः इसी बल के कारण कण विस्थापित स्थिति से अपनी माध्य स्थिति में आता है। अतः यह बल प्रत्यानयन बल कहलाता है। अधिकतम विस्थापन ($y = \pm A$) अर्थात् दोलन की अन्तिम स्थिति में प्रत्यानयन बल का परिमाण अधिकतम ($m\omega^2 A$) तथा माध्य स्थिति ($y = 0$) में न्यूनतम (शून्य) होता है।

समी. (1) से स्पष्ट है कि $F \propto -y$

अर्थात् बल, विस्थापन के रैखिकीय समानुपाती है। अतः इस प्रकार के बल के अन्तर्गत दोलन करते किसी कण को रैखिक आवर्ती दोलक कहते हैं।

उदा.9. एक पिण्ड 1 मीटर आयाम की स. आ. ग. कर रहा है। इसका वेग माध्य स्थिति पर 10 मीटर /से. है। इसकी आवृति ज्ञात करो।

हल– यहाँ $A = 1$ मीटर $v_{max} = 10$ मी/से., $n = ?$

जब पिण्ड माध्य स्थिति से गुजरता है तो अधिकतम वेग

$$v_{max} = A\omega = A.2\pi n$$

$$n = \frac{v_{max}}{2\pi A} = \frac{10 \times 7}{2 \times 22 \times 1}$$
$$= 1.592 \text{ हर्ट्ज}$$

उदा.10. एक पिण्ड के सरल आवर्त गति का विस्थापन समीकरण $y = 10\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ मीटर है। समय $t = 2s$ पर पिण्ड का विस्थापन वेग तथा त्वरण ज्ञात करो।

(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 8.6)

हल : $\because$ दिया गया समीकरण

$$y = 10\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ मीटर}$$

$\therefore$ 2 सेकण्ड पर विस्थापन $y = 10\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$$= 10\sin 30^\circ = 5 \text{ मीटर}$$

(ii) पिण्ड का वेग $v = \omega\sqrt{A^2 - y^2}$

$$= 2\pi\sqrt{10^2 - 5^2}$$
$$= 2\pi\sqrt{100 - 25} = 2\pi \times \sqrt{75}$$
$$= 10\pi \times \sqrt{3} \text{ मीटर / सेकण्ड}$$

(iii) कण का त्वरण $a = \omega^2 y$

$\because \quad \omega = 2\pi,\ y = 5\,\text{m}$

$\therefore$ त्वरण $a = (2\pi)^2 \times 5 = 20\pi^2$ मीटर / सेकण्ड^2

उदा.11. स. आ. ग. करते पिण्ड का आवर्तकाल 2 सेकण्ड है। $t = 0$ समय से प्रारम्भ होकर कितने समय पश्चात् इसका विस्थापन, आयाम का आधा होगा।

हल– यहाँ $T = 2$ सेकण्ड, $t = ?, y = \frac{A}{2}$

सरल आवर्त गति के समीकरण से

$$y = A\sin\omega t = A\sin\frac{2\pi}{T}\cdot t$$

$$\frac{A}{2} = A\sin\frac{2\pi}{T}\cdot t = A\sin\pi t$$

$$\sin\pi t = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\pi t = \frac{\pi}{6}$$

या $$t = \frac{1}{6} \text{ सेकण्ड}$$

उदा.12. एक कण सरल आवर्त गति कर रहा है। यदि माध्य स्थिति से x_1 तथा x_2 दूरियों पर कण के वेग क्रमशः v_1 तथा v_2 हों, तो सिद्ध कीजिए कि इसका आवर्तकाल

$$T = 2\pi\sqrt{\left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}\right)} \text{ होगा।}$$

(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 8.7)

हल– सरल आवर्त गति करते कण का माध्य स्थिति से x दूरी पर वेग

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

जिसमें A कण का आयाम तथा ω = कोणीय आवृति

यदि माध्य स्थिति x_1 दूरी पर वेग v_1 तथा x_2 दूरी पर वेग v_2 हो, तो

$$v_1 = \omega\sqrt{A^2 - x_1^2}$$

या $$v_1^2 = \omega^2(A^2 - x_1^2) \quad ...(1)$$

$$v_2 = \omega\sqrt{A^2 - x_2^2}$$

या $$v_2^2 = \omega^2(A^2 - x_2^2) \quad ...(2)$$

समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर

$$v_1^2 - v_2^2 = \omega^2(x_2^2 - x_1^2)$$

या $$\omega^2 = \frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2}$$

या $$\omega = \sqrt{\left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2}\right)}$$

सरल आवर्त गति का आवर्त काल

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{x_2^2 - x_2^2}{v_1^2 - v_2^2}\right)}$$

उदा.13. एक सरल आवर्त गति करते कण का वेग 4 मीटर /सेकण्ड है, जबकि यह माध्य स्थिति से 3 मीटर दूरी पर है। जब यह माध्य स्थिति से 4 मीटर पर है तो वेग 3 मीटर /सेकण्ड है। धनात्मक अधिकतम विस्थापन की स्थिति से 2.5 मीटर की दूरी तक विस्थापित होने में कितना समय लेगा?

हल– यहाँ $v_1 = 4$ मी/से. $v_2 = 3$ मी./से.

$y_1 = 3$ मीटर $\quad y_2 = 4$ मीटर

सूत्र से $$v = \omega\sqrt{A^2 - y^2}$$

$$v_1 = \omega\sqrt{A^2 - y_1^2}$$

$$v_2 = \omega\sqrt{A^2 - y_2^2}$$

या $$4 = \omega\sqrt{A^2 - 3^2} \quad ...(1)$$

$$3 = \omega\sqrt{A^2 - 4^2} \quad ...(2)$$

समी. (1) को (2) से विभाजित करने पर

$$\frac{4}{3} = \frac{\omega\sqrt{A^2 - 9}}{\omega\sqrt{A^2 - 16}} \text{ या } \frac{16}{9} = \frac{A^2 - 9}{A^2 - 16}$$

$$16A^2 - 256 = 9A^2 - 81$$

या $$7A^2 = 256 - 81 = 175$$

या $$A^2 = \frac{175}{7} = 25$$

$$A = \sqrt{25} = 5 \text{ मीटर}$$

समीकरण (1) में A का मान रखने पर

$$4 = \omega\sqrt{5^2 - 3^2} = \omega\sqrt{25 - 9}$$

$$= \omega\sqrt{16} = 4\omega$$

$$\omega = \frac{4}{4} = 1 \text{ रेडियन/से.}$$

जब कण अधिकतम विस्थापन की स्थिति से 2.5 मीटर पर है तो माध्य स्थिति से इसकी दूरी

$$x = 5 - 2.5 = 2.5 \text{ मीटर}$$

सरल आवर्त गति की समीकरण से

$$x = A\cos\omega t$$

या $$2.5 = 5\cos 1 \times t = 5\cos t$$

या $$\cos t = \frac{2.5}{5} = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$t = \frac{\pi}{3} = \frac{22}{7 \times 3} = 1.048 \text{ सेकण्ड}$$

उदा.14. 10 cm आयाम और 3s आवर्तकाल से सरल आवर्त गति करने वाले कण के लिये अधिकतम वेग तथा अधिकतम त्वरण ज्ञात कीजिये। **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 8.8)**

हल : ∵ अधिकतम वेग $v_{max} = A\omega$

$$T = 3 \text{ s}, A = 10 \text{ cm}$$

आवर्तकाल $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$3 = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/s}$$

$$v_{max} = 10 \times \frac{2\pi}{3} = 20.93 \text{ cm/s}$$

अधिकतम त्वरण $$= A\omega^2 = 10\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2$$

$$= \frac{40\pi^2}{9} \text{ cm/s}^2$$

उदा.15. कोई पिंड निम्नलिखित समीकरण के अनुसार सरल आवर्त गति से दोलन करता है-

$x = (5.0 \text{ m}) \cos [(2\pi \text{ rad/s})\, t + \pi/4]$

$t = 1.5$s पर, पिंड का (a) विस्थापन, (b) वेग तथा (c) त्वरण परिकलित कीजिए।

हल– दिया है– समी. $x = 5\cos\left[2\pi t + \frac{\pi}{4}\right]$ मी. ...(1)

अत: पिंड का वेग $v = \frac{dx}{dt} = -10\pi\sin(2\pi t + \frac{\pi}{4})$ मी./से. ...(2)

तथा त्वरण $a = \frac{dv}{dt} = -20\pi^2\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ मी./से.^{2}

समी. (1), (2) व (3) में $t = 1.5$ सेकण्ड रखने पर

विस्थापन $x = 5\cos\left[3\pi + \frac{\pi}{4}\right]$

$= -5\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{5}{\sqrt{2}}$ मी.

$= -5 \times 0.707 = -3.535$ मी.

वेग $v = -10 \times 3.14\ \sin\left[3\pi + \frac{\pi}{4}\right]$

$= +31.4\sin\frac{\pi}{4} = \frac{31.4}{\sqrt{2}}$ मी./से.

$= 31.4 \times 0.707$

$= 22.2$ मी./से.

तथा त्वरण $a = -20\pi^2\cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$= +20 \times (3.14)^2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{197.192}{\sqrt{2}}$ मी./से.^{2}

$= 197.19^2 \times 0.707$

$= 139.41$ मी./से.^{2}

उदा.16. एक सरल आवर्त गति निम्न समीकरण द्वारा प्रदर्शित है–

$$y = 0.40\sin(440t + 0.61)$$

यहाँ y मीटर मे तथा t सेकण्ड में है तो निम्न के मान बताओ (i) आयाम (ii) कोणीय आवृति (iii) कम्पन आवृति (iv) आवर्तकाल (v) प्रारम्भिक कला।

हल– समीकरण $y = 0.40\sin(440t + 0.61)$

की तुलना सरल आवर्त गति समीकरण से करने पर

$y = A\sin(\omega t + \phi)$

(i) आयाम $A = 0.40$ मी.

(ii) कोणीय आवृति $\omega = 440$ रेडियन/से.

(iii) कम्पन आवृति $n = \frac{\omega}{2\pi}$

$= \frac{440}{2 \times 22/7} = 70$ हर्ट्ज

(iv) आवर्तकाल $T = \frac{1}{n} = \frac{1}{70}$

$= 0.0143$ सेकण्ड

(v) प्रारम्भिक कला कोण $\phi = 0.61$ रेडियन

उदा.17. एक सरल आवर्त गति का आवर्तकाल πs है। साम्य स्थिति में कण का वेग 10 cm/s है तो पथ की लम्बाई ज्ञात कीजिये एवं साम्य स्थिति से 3 cm दूरी पर कण का वेग ज्ञात कीजिये। **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 8.9)**

हल: $\because$ आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega}$,

$\because T = \pi$ सेकण्ड

$\pi = \frac{2\pi}{\omega}$

$\omega = 2\,\text{rad/s}$

साम्य स्थिति में कण का वेग

$\therefore$ $A\omega = 10 \Rightarrow$ आयाम $A = \frac{10}{\omega} = \frac{10}{2} = 5\,\text{cm}$

गति पथ की लम्बाई (इधर से उधर तक) = 10 cm

पुन: साम्य स्थिति से 3 cm दूरी पर कण का वेग

$v = \omega\sqrt{A^2 - y^2}$

$v = 2\sqrt{5^2 - 3^2} = 8\,\text{cm/s}$

उदा.18. सरल आवर्त गति करते कण का विस्थापन निम्न फलन द्वारा प्रदर्शित है-

$$x = A\cos(\omega t + \phi),\ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

यदि $t = 0$ समय पर कण की स्थिति 1 सेमी. तथा इसका प्रारम्भिक वेग π सेमी/से. है तो इसके आयाम और प्रारम्भिक कला कोण की गणना करो। कण की कोणीय आवृति π रेडियन/से. है।

हल– यहाँ $t = 0, x = 1$ सेमी.

$v = \pi$ सेमी/से., $\phi = ?, \omega = \pi$ रेडियन/से.

$x = A\cos(\omega t + \phi)$

$\therefore$ $1 = A\cos(\pi \times 0 + \phi)$

$= A\cos\phi$ ...(1)

वेग $v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$

$\therefore$ $\pi = -A\pi\sin(\pi \times 0 + \phi)$

या $= -A\pi\sin\phi$

या $1 = -A\sin\phi$

या $\quad A\sin\phi = -1 \quad ...(2)$

समीकरण (1) व (2) को वर्ग करके जोड़ने पर

$$A^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = 1 + 1 = 2$$

या $\quad A^2 = 2$

$$A = \sqrt{2} \text{ सेमी.}$$

समीकरण (2) को (1) से भाग देने पर

$$\tan\phi = -1 = -\tan\frac{\pi}{4} = -\tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$[\because \tan(\pi-\theta) = -\tan\theta]$$

$$= \tan\frac{3\pi}{4}$$

$$\phi = \frac{3\pi}{4}$$

उदा.19. एक सरल आवर्त गति करते कण का आयाम 25 सेमी. तथा आवर्तकाल 3 सेकण्ड है। माध्य स्थिति के दोनों ओर 12.5 सेमी. पर स्थिर दो बिन्दुओं के मध्य गति करने के लिए आवश्यक न्यूनतम समय ज्ञात करो।

हल– यहाँ $\quad A = 25$ सेमी.

$T = 3$ सेकण्ड

माना कि समय t_1 पर कण -12.5 सेमी. पर है तथा समय t_2 पर कण $+12.5$ सेमी. पर स्थित है।

सूत्र $\quad x = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$ से

$$-12.5 = 25\cos\left(\frac{2\pi t_1}{3} + \phi\right) \quad ...(1)$$

$$+12.5 = 25\cos\left(\frac{2\pi t_2}{3} + \phi\right) \quad ...(2)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi t_1}{3} + \phi\right) = \frac{-12.5}{25}$$

$$= -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \quad \frac{2\pi t_1}{3} + \phi = \frac{2\pi}{3}$$

$$2\pi t_1 + 3\phi = 2\pi$$

समीकरण (2) से

$$\cos\left(\frac{2\pi t_2}{3} + \phi\right) = \frac{12.5}{25}$$

$$= -\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \quad \frac{2\pi t_2}{3} + \phi = \frac{\pi}{3}$$

$$2\pi t_2 + 3\phi = \pi \quad ...(4)$$

समीकरण (4) को (3) में से घटाने पर,

$$2\pi(t_1 - t_2) = \pi$$

$$t_1 - t_2 = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ सेकण्ड}$$

8.8 सरल आवर्त गति में ऊर्जा संरक्षण (Energy Conservation in Simple Harmonic Motion)

वह कण या पिण्ड जो सरल आवर्त गति करता है, उसे सरल आवर्ती दोलक कहते है।

सरल आवर्ती दोलक की ऊर्जा दो प्रकार ही होती है–

(i) गतिज ऊर्जा $\quad$ (ii) स्थितिज ऊर्जा

(i) सरल आवर्ती दोलक की गतिज ऊर्जा (Kinetic energy of a simple harmonic oscillator)

तात्क्षणिक गतिज ऊर्जा (Instantaneous kinetic energy)

सरल आवर्ती दोलक की गतिज ऊर्जा दोलक की गति के कारण विद्यमान होती है। सरल आवर्त गति कर रहे कण के लिए–

तात्क्षणिक विस्थापन $\quad y = A\sin\omega t \quad ...(1)$

तात्क्षणिक वेग $\quad v = A\omega\cos\omega t \quad ...(2)$

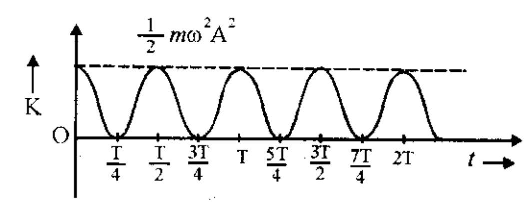
यहाँ A कण की गति का आयाम तथा ω कोणीय आवृत्ति है। कण की तात्क्षणिक गतिज ऊर्जा

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$K = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2\omega t \quad ...(3)$$

समीकरण (3) गतिज ऊर्जा (K) को समय (t) के फलन के रूप में व्यक्त करता है।

गतिज ऊर्जा (K) तथा समय (t) में ग्राफ–



चित्र 8.18

गतिज ऊर्जा $\quad K = \frac{1}{2}mv^2$

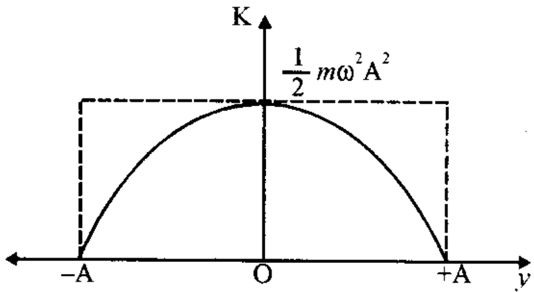
$$\because \quad v = \omega\sqrt{A^2 - y^2}$$

$$\therefore \quad K = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - y^2) \quad ...(4)$$

समीकरण (4) गतिज ऊर्जा (K) को विस्थापन (y) के फलन के रूप में व्यक्त करता है।

समीकरण (4) से स्पष्ट है कि साम्य स्थिति ($y = 0$) पर गतिज ऊर्जा का मान अधिकतम $\left(K_{max} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\right)$ तथा अधिकतम विस्थापन की स्थितियाँ (y = ±A) पर गतिज ऊर्जा शून्य ($K_{min} = 0$) होती है।

गतिज ऊर्जा (K) तथा विस्थापन (y) में ग्राफ–



चित्र 8.19

औसत गतिज ऊर्जा (Average kinetic energy)

सरल आवर्त गति में कण की गतिज ऊर्जा विभिन्न स्थितियों में भिन्न–भिन्न होती है। इसका मान, न्यूनतम मान शून्य से अधिकतम माना $\frac{1}{2}m\omega^2 A^2$ तक परिवर्तित होता है।

एक आवर्तकाल T में औसत गतिज ऊर्जा

$$\overline{K} = \frac{1}{T}\int_0^T K\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{1}{2}m\omega^2 A^2\right)\int_0^T \cos^2 \omega t\,dt$$

यदि $\int_0^T \cos^2 \omega t\,dt$ को हल किया जाये तब इसका मान $\frac{T}{2}$ प्राप्त होता है अर्थात् $\int_0^T \cos^2 \omega t\,dt = \frac{T}{2}$

$$\therefore \quad \overline{K} = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{2}m\omega^2 A^2\right) \cdot \frac{T}{2}$$

$$\overline{K} = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2 \quad ...(5)$$

(ii) सरल आवर्ती दोलक की स्थितिज ऊर्जा
(Potential energy of a simple harmonic oscillator)

तात्क्षणिक स्थितिज ऊर्जा (Instantaneous potential energy)

तात्क्षणिक विस्थापन $\quad y = A \sin \omega t \quad ...(1)$

त्वरण $\quad a = -\omega^2 A \sin \omega t$

$$= -\omega^2 y$$

यदि कण का द्रव्यमान m तथा कण पर कार्यरत प्रत्यानयन बल F है तो

$$F = ma$$

$$= -m\omega^2 y \quad ...(2)$$

यदि कण को साम्य स्थिति से प्रत्यानयन बल के विरूद्ध अल्प दूरी dy से विस्थापित किया जाये तब किया गया कार्य

$$dW = -F dy = -(-m\omega^2 y)\,dy$$

$$= m\omega^2 y\,dy$$

कण को y दूरी से विस्थापित करने में किया गया कुल कार्य

$$W = \int_0^y m\omega^2 y\,dy = m\omega^2\int_0^y y\,dy$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 y^2$$

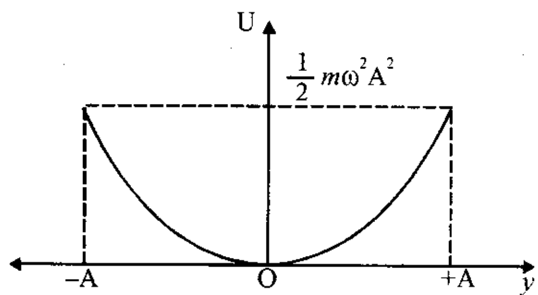
यह कार्य दोलक की स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है।

$$\therefore \text{ स्थितिज ऊर्जा} \quad U = \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 \quad ...(3)$$

समीकरण (3) स्थितिज ऊर्जा (U) को विस्थापन (y) के फलन के रूप में व्यक्त करता है।

समीकरण (3) से स्पष्ट है कि साम्य स्थिति ($y = 0$) में स्थितिज ऊर्जा का मान न्यूनतम ($U_{min} = 0$) तथा अधिकतम विस्थापन की स्थितियों ($y = \pm A$) पर स्थितिज ऊर्जा अधिकतम $\left(U_{max} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\right)$ होती है।

स्थितिज ऊर्जा (U) तथा विस्थापन (y) में ग्राफ–



चित्र 8.20

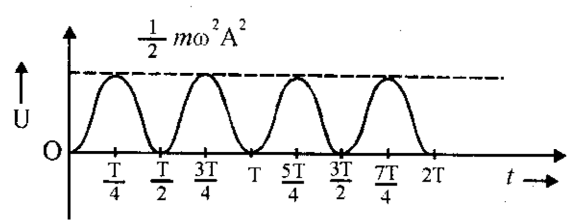
$\because$ तात्क्षणिक विस्थापन $y = A \sin \omega t$

$\therefore$ समीकरण (3) से

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t \quad ...(4)$$

समीकरण (4) स्थितिज ऊर्जा (U) को समय (t) के फलन के रूप में व्यक्त करता है।

स्थितिज ऊर्जा (U) तथा समय (t) में ग्राफ–



चित्र 8.21

औसत स्थितिज ऊर्जा (Average potential energy)

सरल आवर्त गति में कण की स्थितिज ऊर्जा विभिन्न स्थितियों में भिन्न–भिन्न होती है। इसका मान, न्यूनतम मान शून्य से अधिकतम

माना $\frac{1}{2}m\omega^2A^2$ तक परिवर्तित होता है।

एक आवर्तकाल T में औसत स्थितिज ऊर्जा

$$\bar{U} = \frac{1}{T}\int_0^T U\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{1}{2}m\omega^2A^2\right)\int_0^T \sin^2\omega t\,dt$$

यदि $\int_0^T \sin^2\omega t\,dt$ को हल किया जाये तब इसका मान $\frac{T}{2}$ प्राप्त होता है अर्थात् $\int_0^T \sin^2\omega t\,dt = \frac{T}{2}$

$$\therefore \quad \bar{U} = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{2}m\omega^2A^2\right)\cdot\frac{T}{2}$$

$$\bar{U} = \frac{1}{4}m\omega^2A^2 \qquad \ldots(6)$$

(iii) सरल आवर्ती दोलक की कुल ऊर्जा
(Total energy of simple harmonic oscillator)

सरल आवर्त गति कर रहे कण की कुल ऊर्जा

$$E = K + U$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2\omega t + \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \qquad \ldots(1)$$

अथवा

$$E = K + U$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2y^2$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \text{नियतांक}$$

इस प्रकार सरल आवर्त गति कर रहे कण की कुल ऊर्जा नियत रहती है। यह कण के द्रव्यमान m, कोणीय आवृत्ति ω तथा आयाम A पर निर्भर करती है जबकि समय t तथा विस्थापन y पर निर्भर नहीं करती है।

$\because$ कोणीय आवृत्ति $\quad \omega = 2\pi n$

$\therefore$ समीकरण (1) से $\quad E = \frac{1}{2}m(2\pi n)^2A^2$

$$E = \frac{1}{2}m(4\pi^2n^2)A^2$$

$$E = 2\pi^2mn^2A^2 \qquad \ldots(2)$$

अर्थात् सरल आवर्त गति कर रहे कण की कुल ऊर्जा कण के आयाम के वर्ग (A^2) के समानुपाती ($E \propto A^2$) तथा आवृत्ति के वर्ग (n^2) के भी समानुपाती ($E \propto n^2$) होती है।

सरल आवर्त गति कर रहे कण के लिए एक आवर्तकाल T में औसत गतिज ऊर्जा

$$\bar{K} = \frac{1}{4}m\omega^2A^2 \qquad \ldots(3)$$

एक आवर्तकाल T में औसत स्थितिज ऊर्जा

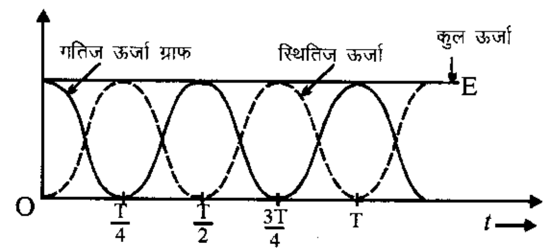
$$\bar{U} = \frac{1}{4}m\omega^2A^2 \qquad \ldots(4)$$

इस प्रकार समीकरण (1), (3) व (4) से स्पष्ट है कि

$$\bar{K} = \bar{U} = \frac{E}{2} \qquad \ldots(5)$$

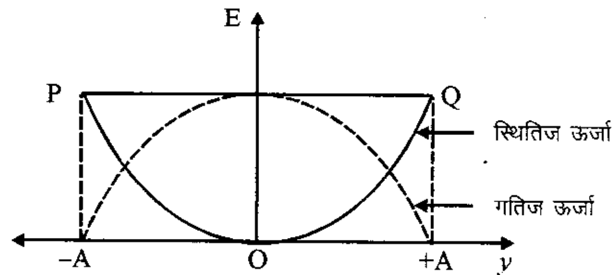
अर्थात सरल आवर्त गति में औसत गतिज ऊर्जा का मान औसत स्थितिज ऊर्जा के मान के बराबर होता है तथा यह मान कुल ऊर्जा का आधा होता है।

गतिज ऊर्जा (K) तथा स्थितिज ऊर्जा (U) का समय (t) के साथ परिवर्तन का ग्राफ–



चित्र 8.22

गतिज ऊर्जा (K) तथा स्थितिज ऊर्जा (U) का विस्थापन (y) के साथ परिवर्तन का ग्राफ–



चित्र 8.23

इन चित्रों से स्पष्ट है कि किसी रैखिक सरल आवर्ती दोलक की सभी ऊर्जाएँ धनात्मक होती हैं तथा प्रत्येक आवर्तकाल में दो बार शिखर पर होती है। $y = 0$ के लिए समस्त ऊर्जा गतिज ऊर्जा होती है तथा $y = \pm A$ के लिए समस्त ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा होती है। इन चरम स्थितियों के बीच गतिज ऊर्जा घटने से स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि होती है। किसी रैखिक सरल आवर्ती दोलक के इस व्यवहार से यह संकेत मिलता है कि ऐसा दोलक लचीलेपन का तत्व तथा जड़त्व का तत्व धारण करता है इसके पहले तत्व में स्थितिज ऊर्जा संचित होती है तथा दूसरे बाद में तत्व में गतिज ऊर्जा संचित होती है।

उदा.20. एक कण A आयाम की स. आ. ग. करता है। माध्य स्थिति से कितनी दूरी पर कण की गतिज ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा के बराबर होगी? **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 8.10)**

हल– गतिज ऊर्जा $\quad K = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - y^2)$

स्थितिज ऊर्जा $\quad U = \frac{1}{2}m\omega^2y^2$

$$K = U$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2(A^2-y^2)=\frac{1}{2}m\omega^2 y^2$$
$$A^2-y^2=y^2$$
$$y^2=A^2/2$$
$$y=\pm\frac{A}{\sqrt{2}}=\pm 0.707\ A$$

उदा.21. एक किलोग्राम द्रव्यमान का पिण्ड स. आ. ग. कर रहा है निम्न समीकरण $x = 6\cos(100t+\pi/4)$ सेमी द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। इसकी गतिज ऊर्जा क्या होगी?

हल– यहाँ $m = 1$ किग्रा

$x = 6\cos(100t+\pi/4)$

स. आ. ग. के समीकरण से इसकी तुलना करने पर

$x = A\cos(\omega t+\phi)$

$A = 6$ सेमी. $= \frac{6}{100}$ मी.

$\omega = 100$ रे./से.

अधिकतम गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}m(v_{max})^2$

$= \frac{1}{2}m(A\omega)^2$

$= \frac{1}{2}\times 1\times\left(\frac{6}{100}\times 100\right)^2$

$= 18$ जूल

उदा.22. वह समय ज्ञात कीजिये जब किसी सरल आवर्ती दोलक की स्थितिज ऊर्जा तथा गतिज ऊर्जा समान होती है।

(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 8.11)

हल : स्थितिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}kA^2\sin^2\omega t$

गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$

$\because$ प्रश्नानुसार, गतिज ऊर्जा = स्थितिज ऊर्जा

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}ky^2$$

$$\frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t=\frac{1}{2}kA^2\sin^2\omega t$$

$$1-\sin^2\omega t=\sin^2\omega t$$

$$1=2\sin^2\omega t$$

$$\sin\omega t=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega t=\frac{\pi}{4} \text{ या } \frac{3\pi}{4}$$

$$t=\frac{\pi}{4\omega}=\frac{\pi}{4\times\frac{2\pi}{T}}=\frac{T}{8}$$

उदा.23. 1 kg संहति के किसी गुटके को एक कमानी से बांधा गया है। कमानी का कमानी स्थिरांक $50 N\,m^{-1}$ है। गुटके को उसकी साम्यावस्था की स्थिति $x = 0$ से $t = 0$ पर किसी घर्षणहीन पृष्ठ पर कुछ दूरी $x = 10\,cm$ तक खींचा जाता है। जब गुटका अपनी माध्य स्थिति से 5 cm. दूर है, तब उसकी गतिज, स्थितिज तथा कुल ऊर्जाएँ परिकलित कीजिए।

हल– दिया है– $m = 1$ किग्रा.

$k = 50$ न्यूटन/मी.

विस्थापन $x = 5$ सेमी. $= 5\times 10^{-2}$ मी.

आयाम $A = 10$ सेमी. $= 10\times 10^{-2}$ मी.

कोणीय आवृत्ति $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{50/1} = \sqrt{50}$ रेडियन/से.

x विस्थापन स्थिति पर

स्थितिज ऊर्जा $U = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

$= \frac{1}{2}\times 1\times 50\times(5\times 10^{-2})^2$

या $U = 625\times 10^{-4}$ जूल

$= 0.0625$ जूल

गतिज ऊर्जा

$K.E. = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2-x^2) = \frac{1}{2}\times 1\times 50(100\times 10^{-4}-25\times 10^{-4})$

$K.E. = 25\times 75\times 10^{-4} = 1875\times 10^{-4}$ जूल

$= 0.1875$ जूल ~ 0.19 जूल

तथा कुल ऊर्जा $E = U + K.E. = 0.0625 + 0.1875 = 0.8200$ जूल

उदा.24. एक स्प्रिंग से लटका हुआ पिण्ड सरल आवर्त गति करता है। स्थायी साम्यावस्था से इसके विस्थापन का मान इसके आयाम का आधा होने पर पिण्ड की स्थितिज एवं गतिज ऊर्जा का अनुपात ज्ञात कीजिये। **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 8.12)**

हल : दिया गया है: $y = \frac{A}{2}$

$$\frac{\text{स्थितिज ऊर्जा}}{\text{गतिज ऊर्जा}}=\frac{1/2ky^2}{1/2k\left(A^2-y^2\right)}$$

$$=\frac{y^2}{\left(A^2-y^2\right)}$$

$$=\frac{(A/2)^2}{A^2-(A/2)^2}=\frac{A^2/4}{3/4A^2}=\frac{1}{3}$$

अतः अभीष्ट ऊर्जा अनुपात 1 : 3 होगा।

उदा.25. एक 8 किग्रा. द्रव्यमान का पिण्ड 30 सेमी. आयाम की सरल आवर्त गति करता है। जब विस्थापन 30 सेमी. है। तो प्रत्यानयन बल 60 न्यूटन है। ज्ञात करो–(i) आवर्तकाल (ii) त्वरण, स्थितिज व गतिज ऊर्जा जबकि विस्थापन 12 सेमी. है।

हल– यहाँ $m = 8$ किग्रा., $A = 30$ सेमी $= 0.30$ मी.

(a) $F = 60$ न्यूटन, $y = 0.30$ मी.

$F = ky$

$k = \frac{F}{y} = \frac{60}{0.30} = 200$ न्यूटन/मी.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{8}} = 5 \text{ रे./से.}$$

आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\times 22}{7\times 5}$

$= \frac{44}{35} = 1.256$ सेकण्ड

(b) $y = 12$ सेमी. $= 0.12$ मी.

त्वरण $a = \omega^2 y = (5)^2 \times 0.12$

$= 3.0$ मी./से^{2}

स्थितिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}\times 200\times(0.12)^2$

$= 1.44$ जूल

गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}k(A^2 - y^2)$

$= \frac{1}{2}\times 200(0.3^2 - 0.12^2)$

$= 7.56$ जूल

उदा.26. किसी कण की स्थितिज ऊर्जा $U_y = (25y^2 + 100)$J तथा कण का द्रव्यमान 0.02 kg है। यदि बल $F = -\frac{dU}{dy}$ संबंध द्वारा दिया जाता है तो कण की गति की प्रकृति निर्धारित कीजिये। **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 8.13)**

हल : दिया गया है–

कण की स्थितिज ऊर्जा $U_y = (25y^2 + 100)$J

$\therefore$ बल $F = \frac{-dU}{dy} = \frac{-d}{dy}(25y^2 + 100)$

$\Rightarrow \quad F = -50y$

इस प्रकार बल, कण के विस्थापन के समानुपाती तथा विस्थापन के विपरीत कार्य कर रहा है अतः कण सरल आवर्त गति करेगा

आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.02}{50}}$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{1}{2500}} = \frac{2\pi}{50} = 0.1256 \text{ s}$$

उदा.27. सिद्ध करो एक सरल आवर्त गति मे एक आवर्तकाल के अन्तर्गत औसत गतिज ऊर्जा व स्थितिज ऊर्जा का मान समान होता है।

हल– माना कि m द्रव्यमान का कण स. आ. ग. कर रहा है। जिसका आवर्तकाल T है। t समय पर कण का माध्य स्थिति से विस्थापन

$$y = A\sin\omega t$$

वेग $v = \frac{dy}{dt} = a\omega\cos\omega t$

गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}mv^2$

$= \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2\omega t$

स्थितिज ऊर्जा $U = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t$

एक आवर्तकाल में औसत गतिज ऊर्जा

$$K_{av} = \frac{1}{2}\int_0^T K\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2\omega t\,dt$$

$$= \frac{1}{2T}mA^2\omega^2\int_0^T \frac{(1+\cos 2\omega t)}{2}dt$$

$$= \frac{1}{4T}mA^2\omega^2\left[t + \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]_0^T$$

$$= \frac{1}{4T}mA^2\omega^2 T = \frac{1}{4}mA^2\omega^2 \quad \ldots(1)$$

औसत स्थितिज ऊर्जा

$$U_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T U\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t\,dt$$

$$= \frac{1}{2T}mA^2\omega^2\int_0^T \frac{(1-\cos 2\omega t)}{2}dt$$

$$= \frac{1}{4T}mA^2\omega^2\left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]_0^T$$

$$= \frac{1}{4T}m\omega^2A^2(T) = \frac{1}{4}m\omega^2A^2 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व (2) से

$$K_{av} = U_{av}$$

उदा.28. 0.1 kg द्रव्यमान का एक कण 0.1 m आयाम की सरल आवर्त गति कर रहा है। यह कण जब पथ के मध्य बिन्दु से गुजरता है तो इसकी गतिज ऊर्जा 8×10^{-3} J है। यदि प्रारम्भिक कला कोण 45° हो तो कण का विस्थापन का समीकरण लिखिये। **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 8.14)**

हल : $\because$ दिया गया है द्रव्यमान $m = 0.1$ kg, आयाम $A = 0.1$ m

प्रारम्भिक कला $\phi = 45°$

$\because$ पथ के मध्य बिन्दु पर अधिकतम गतिज ऊर्जा होती है।

$\therefore \quad K_{max} = 8 \times 10^{-3}$ जूल

$\therefore \quad K_{max} = \frac{1}{2}kA^2 = 8\times 10^{-3}$ जूल

$$\therefore \quad k = \frac{8\times 10^{-3}\times 2}{(0.1)^2} = \frac{16\times 10^{-3}}{(0.1)^2}$$

$$k = 1.6 \text{ N/m}$$

$$\therefore \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{1.6}{0.1}}=4 \text{ रेडियन / सेकण्ड}$$

∴ तात्क्षणिक विस्थापन का समीकरण

$$y=A\sin(\omega t+\phi)$$

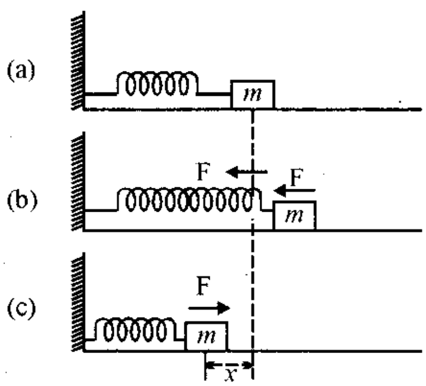
$$y=0.1\sin\left(4t+\frac{\pi}{4}\right)$$

8.9 सरल आवर्त गति के उदाहरण (Examples of Simple Harmonic Motion)

(i) कमानी से जुड़े द्रव्यमान की गति (Oscillations of a mass attached to a spring)

(a) क्षैतिज स्प्रिंग से जुड़े द्रव्यमान के दोलन (Oscillations of a mass attached to an horizontal spring)

माना कि नगण्य द्रव्यमान की एक क्षैतिज स्प्रिंग, जिसका बल नियतांक k है, का एक सिरा एक दृढ़ आधार से बंधा है तथा दूसरे सिरे से m द्रव्यमान का एक पिण्ड बंधा है जो घर्षणहीन क्षैतिज तल पर गति के लिए स्वतंत्र है। चित्र (a) में स्प्रिंग अपनी मूल लम्बाई में तथा पिण्ड साम्य स्थिति में है।



चित्र 8.24

चित्र (b) में पिण्ड को दायीं ओर x दूरी तक विस्थापित करने पर स्प्रिंग की लम्बाई में x लम्बाई की वृद्धि होती है। तब प्रत्यास्थता के कारण स्प्रिंग पर एक प्रत्यानयन बल F बायीं ओर कार्य करता है।

प्रत्यानयन बल $F=-kx$

इस बल के कारण स्प्रिंग सिकुड़ता है तथा स्प्रिंग द्वारा यही बल F, द्रव्यमान m पर बायीं ओर आरोपित होता है। पिण्ड के अपनी साम्य स्थिति में आने पर $x=0$ होने इस बल F का मान शून्य हो जाता है परन्तु पिण्ड अपनी गति के जड़त्व के कारण बायीं ओर x दूरी तक जाकर विराम अवस्था में आता है। (चित्र C) इस स्थिति में पिण्ड पर दायीं ओर बल लगता है। तब इस बल के कारण पिण्ड दायीं ओर चलता है तथा साम्य स्थिति में आने पर यह बल शून्य हो जाता है। परन्तु गति के जड़त्व के कारण पिण्ड दायीं ओर x दूरी जाकर रूकता है तब इस पर एक प्रत्यानयन बल F बायीं ओर लगता है तथा पिण्ड साम्य स्थिति की ओर आने लगता है (यहां यह माना गया है कि पिण्ड की गति के दौरान कोई ऊर्जा ह्रास नहीं होता है।)

इस प्रकार पिण्ड को साम्य स्थिति से विस्थापित कर छोड़ देने पर पिण्ड प्रत्यानयन बल F के प्रभाव में साम्य स्थिति के इर्द–गिर्द दोलन करने लगता है।

यदि पिण्ड में त्वरण a हो तो

$$a=\frac{F}{m}=-\frac{kx}{m}=\frac{-k}{m}x=-\omega^2 x$$

जहां $\omega^2=\frac{k}{m}$ किसी निकाय के लिए नियत है।

$$\therefore \quad a\propto -x$$

इस प्रकार पिण्ड का त्वरण a उसके विस्थापन x के समानुपाती है तथा ऋणात्मक चिन्ह के कारण त्वरण की दिशा साम्य स्थिति की ओर है। अतः पिण्ड की गति सरल आवर्त गति है। इसका आवर्तकाल

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{k/m}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \left(\because \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

तथा आवृत्ति $\quad n=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

तथा कोणीय आवृत्ति

$$\omega=2\pi n=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

इन समीकरणों से स्पष्ट है कि यदि गुटका हल्का (m का मान कम) तथा कमानी दृढ़ (k अधिक) तो कोणीय आवृत्ति अधिक तथा आवर्तकाल कम होता है।

(b) ऊर्ध्वाधर स्प्रिंग से जुड़े द्रव्यमान के दोलन (Oscillations of a mass attached to a vertical spring)

माना कि एक हल्की (नगण्य द्रव्यमान) प्रत्यास्थ स्प्रिंग एक दृढ आधार O से लटकी हुई है। जब इसके निचले सिरे A से एक m द्रव्यमान का पिण्ड लटकाया जाता है। तब पिण्ड के भार के कारण स्प्रिंग की लम्बाई में l वृद्धि हो जाती है। स्प्रिंग के प्रत्यास्थ होने के कारण पिण्ड पर एक प्रत्यानयन बल F लगता है।

हुक के नियम से

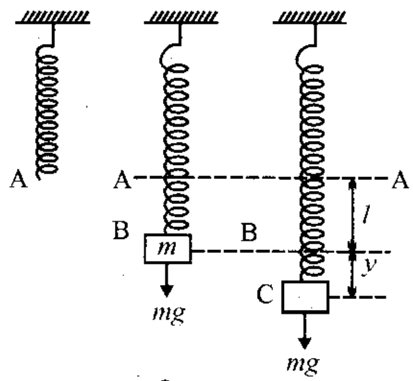
$$F=-kl \qquad \ldots(1)$$

यहाँ k स्प्रिंग का बल नियतांक (force constant) है तथा ऋणात्मक चिन्ह यह व्यक्त करता है कि प्रत्यानयन बल की दिशा पिण्ड के भार की दिशा के विपरीत अर्थात् ऊपर की ओर है।

पिण्ड के सन्तुलन की अवस्था में पिण्ड पर परिणामी बल शून्य होना चाहिए अर्थात्

$$F + mg = 0$$
$$\Rightarrow \quad -kl + mg = 0$$
$$\Rightarrow \quad mg = kl$$

यदि पिण्ड को साम्य स्थिति से हल्का सा नीचे की ओर विस्थापित कर छोड़ दिया जाये तब पिण्ड सरल आवर्त गति करता है। माना कि पिण्ड को किसी क्षण साम्य स्थिति से y दूरी विस्थापित कर छोड़ दिया जाता है। तब स्प्रिंग की लम्बाई मे कुल वृद्धि $(l + y)$ है।



चित्र 8.25

इस स्थिति में स्प्रिंग द्वारा पिण्ड पर कार्यरत प्रत्यानयन बल

$$F_1 = -k(l + y) = -kl - ky \qquad ...(3)$$

परिणामी बल

$$F_2 = F_1 + mg = -kl - ky - mg$$

समी. (2) से $mg = kl$

$$\therefore \quad F_2 = -ky \qquad ...(4)$$

न्यूटन के गति के द्वितीय नियम से

$$F_2 = ma = -ky$$

$$\therefore \quad a = -\frac{k}{m}y$$

$\therefore \quad \left(\frac{k}{m}\right)$ एक नियतांक है।

$$\therefore \quad a \propto -y$$

इस प्रकार पिण्ड की गति में उत्पन्न त्वरण (a), पिण्ड के विस्थापन (y) के समानुपाती तथा विपरीत दिशा में है। अतः पिण्ड की गति सरल आवर्तगति है।

सरल आवर्त गति का आवर्तकाल

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \because \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad ...(5)$$

समी. (2) से $\quad \frac{m}{k} = \frac{l}{g}$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad ...(6)$$

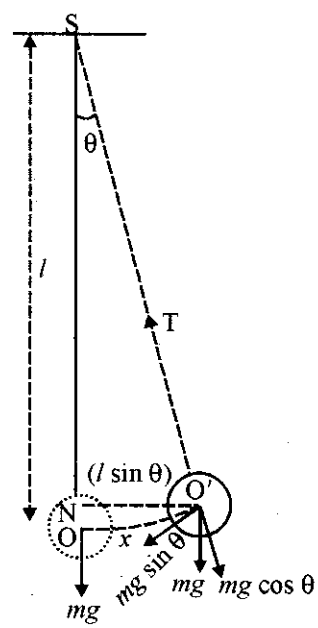
समी. (3) से स्पष्ट है कि एक दृढ़ स्प्रिंग के लिए k अधिक होने से आवर्तकाल कम प्राप्त होता है। जबकि मुलायम स्प्रिंग के लिए k कम होने से आवर्तकाल अधिक प्राप्त होता है।

महत्वपूर्ण तथ्य

1. यदि m द्रव्यमान का पिण्ड k बल नियतांक वाली स्प्रिंग के मुक्त सिरे पर बांधने पर सरल आवर्त गति करे तो इसे स्प्रिंग लोलक कहते हैं।
2. स्प्रिंग लोलक का आवर्तकाल गुरुत्वीय त्वरण g से मुक्त होता है। इसी कारण स्प्रिंग पर आधारित घड़ियाँ पहाड़ी पर, चंद्रमा पर, खदानों के भीतर, पृथ्वी के केन्द्र पर अथवा उपग्रह पर अर्थात् सभी स्थानों पर सही समय दर्शाती है। जबकि सरल लोलक वाली घड़ी द्वारा दिखाया गया समय g के बदलने से प्रत्येक स्थान पर बदलता है।

(ii) सरल लोलक (Simple Pendulum)

ऐसा समायोजन जिसमें एक बिन्दुवत् द्रव्यमान को एक भारहीन तथा लम्बाई में न बढ़ने वाली डोरी के एक सिरे से बांधकर किसी दृढ़ आधार से लटका दिया जाये तब यह व्यवस्था सरल लोलक कहलाता है। चित्र में एक छोटा तथा भारी धातु का गोला (Bob) एक पतली डोरी से लटकाया गया है तथा गोले का द्रव्यमान m है। यहाँ बिन्दु S आलम्बन बिन्दु (Suspension point) तथा गोलक के द्रव्यमान केन्द्र से आलम्बन बिन्दु की दूरी l प्रभावी लम्बाई (Effective length) है। जब गोलक को साम्य स्थिति O से हल्का सा विस्थापित किया जाता है। तब माना कि कोणीय विस्थापन θ है। इस स्थिति में गोलक पर निम्न बल कार्य करते है–



चित्र 8.26

(i) गुरुत्वीय बल mg (ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर)

(ii) तनाव बल T (आलम्बन बिन्दु की ओर)

गुरुत्वीय बल mg को दो घटकों $mg\cos\theta$ तथा $mg\sin\theta$ में विभाजित करने पर घटक $mg\cos\theta$, तनाव बल (T) को सन्तुलित करता है जबकि घटक $mg\sin\theta$ साम्य स्थिति की ओर लगता है।

अतः $mg \sin\theta$ प्रत्यानयन बल है।

$\therefore$ प्रत्यानयन बल $F = -mg\sin\theta$

बिन्दु S के परितः गोलक पर लगने वाला प्रत्यानयन बल आघूर्ण

$$\tau = -l\,(mg\sin\theta)$$
$$= -mgl\sin\theta \qquad ...(1)$$

बल आघूर्ण की दिशा कोणीय विस्थापन θ के विपरीत अर्थात् साम्य स्थिति की ओर होने के कारण ऋणात्मक चिन्ह प्रयोग किया गया है।

अब यदि θ छोटा हो तथा रेडियन में मापा जाये तब

$$\sin\theta \approx \theta$$

तब $\tau = -mgl\,\theta$

$\because$ घूर्णन गति में $\tau = -I\alpha$

जहां I = गोलक का घूर्णन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

α = गोलक का कोणीय त्वरण

$\therefore \quad I\alpha = -mgl\,\theta$

$\Rightarrow \quad \alpha = -\dfrac{mgl}{I}\theta$

$\Rightarrow \quad \alpha = -\omega^2\theta$ जहां $\omega^2 = \dfrac{mgl}{I}$

$\Rightarrow \quad \alpha \propto -\theta \qquad ...(2)$

अर्थात् कोणीय त्वरण ∝-कोणीय विस्थापन

अतः सरल लोलक की गति कोणीय सरल आवर्त गति होती है।

$\therefore$ आवर्तकाल $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{mgl}{I}}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgl}}$

अब चूंकि सरल लोलक की डोरी द्रव्यमान रहित होने से जड़त्व आघूर्ण

$$I = ml^2$$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad ...(3)$$

समीकरण (3) से $T \propto \sqrt{l}$

अतः सरल लोलक का आवर्तकाल, लोलक की लम्बाई के वर्गमूल के समानुपाती होता है।

$$T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$$

अतः सरल लोलक का आवर्तकाल, गुरुत्वीय त्वरण के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

$\because \quad g_{\text{ध्रुव}} > g_{\text{भूमध्य रेखा}}$

$\therefore \quad T_{\text{ध्रुव}} < T_{\text{भूमध्य रेखा}}$

इस प्रकार ध्रुव के सापेक्ष भूमध्य रेखा पर आवर्तकाल अधिक होगा।

सरल लोलक से गुरूत्वीय त्वरण का मान ज्ञात करना

सरल लोलक से गुरुत्वीय त्वरण का मान निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है-

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

यहाँ l प्रभावी लम्बाई (आलम्बन बिन्दु से हुक तक धागे की लम्बाई + हुक की लम्बाई + गोले की त्रिज्या) है। गोले की त्रिज्या वर्नियर कैलीपर्स से ज्ञात की जा सकती है। 100 से 150 सेमी के धागे की लम्बाई के विभिन्न मानों के संगत 15, 20, 25 दोलनों का समय ज्ञात कर आवर्तकाल T ज्ञात किया जाता है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

(1) जब कोणीय विस्थापन का मान बहुत कम (लगभग 4° या 5°) हो तब सरल लोलक का आवर्तकाल आयाम पर निर्भर नहीं करता परन्तु θ का मान अधिक होने पर $\sin\theta = \theta$ नहीं कहा जा सकता अतः कोणीय विस्थापन θ_0 पर आवर्तकाल निर्भर करता है और गति केवल आवर्ती गति होती है, सरल आवर्त गति नहीं। इस स्थिति में आवर्तकाल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{1}{2^2}\sin^2(\theta_0) + \dots\right]$$
$$= T_0\left[1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right]$$

(2) सरल लोलक का आवर्तकाल, गोलक के द्रव्यमान से मुक्त होता है।

(i) यदि ठोस गोलक को समान त्रिज्या वाले अन्य खोखले गोले से बदल दिया जाए, परन्तु द्रव्यमान अपरिवर्तित रहे तब आवर्तकाल पर कोई प्रभाव नहीं होता है।

(ii) यदि कोई लड़की झूला झूल रही है तथा अचानक समान द्रव्यमान की अन्य लड़की आकार इसके बगल में बैठ जाती है तो झूले का आवर्तकाल वही रहता है।

(3) $T \propto \sqrt{l}$

(i) यदि झूला झूलती लड़की अचानक खड़ी हो जाए तो इसका आवर्तकाल घट जाता है क्योंकि इसके खड़े होने से गुरुत्व केन्द्र कुछ ऊपर उठ जाता है। जिससे प्रभावकारी लम्बाई घट जाती है।

(ii) यदि खोखली गेंद (जिसमें पानी भरा हुआ है) में एक छोटा सा छेद कर दिया जाए जिससे पानी बूंद-बूंद करके रिसने लगता है तो इसका आवर्तकाल पहले बढ़ता है क्योंकि गुरुत्व केन्द्र नीचे खिसकता है अर्थात् प्रभावकारी लम्बाई बढ़ती है।

परन्तु पूरा पानी निकल जाने पर खोखली गेंद का द्रव्यमान केन्द्र पुनः गोले के केन्द्र पर आ जाने से इसका आवर्तकाल पहले के ही समान हो जाता है।

(4) यदि सरल लोलक की लम्बाई पृथ्वी की त्रिज्या की तुलना में नगण्य नहीं है तब आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{g\left(\dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{R}\right)}}$

जहाँ R = पृथ्वी की त्रिज्या है।

(i) यदि $l << R$ तब $\dfrac{1}{l} >> \dfrac{1}{R}$

अतः $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (सामान्य सूत्र)

(ii) यदि $l >> R$ ($l \to \infty$, या अनन्त लोलक)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{6.4\times10^6}{10}}$$

= 84.6 मिनिट

यह किसी भी सरल लोलक का अधिकतम आवर्तकाल है।

(5) सरल लोलक की माध्य स्थिति में धागे में तनाव अधिकतम (=mg) होता है।

(6) पृथ्वी के केन्द्र पर $g = 0$, अतः सरल लोलक का आवर्तकाल $T = \infty$ (अनन्त) अर्थात् पृथ्वी के केन्द्र पर सरल लोलक दोलन नहीं करेगा।

सेकण्ड लोलक (Second's Pendulum)

वह सरल लोलक जिसका आवर्तकाल 2 सेकण्ड हो तो उसे सेकण्ड लोलक कहते हैं। क्योंकि यह प्रत्येक 1 सेकण्ड बाद अपनी माध्य स्थिति से गुजरता है।

सेकण्ड लोलक के लिए T = 2 सेकण्ड, $g = 9.8$ मी./से.^{2}

$\therefore$ समीकरण (3) से $2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9.8}}$

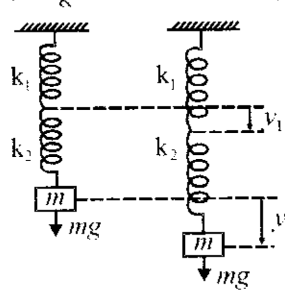
$$\Rightarrow \quad l = \frac{4\times9.8}{4\pi^2} = 0.993 \text{ मी.} = 99.3 \text{ सेमी.}$$

अतः सेकण्ड लोलक की लम्बाई $l = 99.3$ सेमी. प्राप्त होती है।

8.10 स्प्रिंगों का संयोजन (Combination of Springs)

(अ) श्रेणीक्रम संयोजन (Series Combination)

माना कि दोनो स्प्रिंग श्रेणीक्रम में एक दृढ़ आधार से लटकायी गयी है तथा दूसरे सिरे से m द्रव्यमान का पिण्ड चित्रानुसार लटकाया गया है। अब यदि पिण्ड को y दूरी नीचे विस्थापित किया जाये तब दोनो स्प्रिंग भिन्न–भिन्न दूरी से विस्तारित होगी।



चित्र 8.27

माना कि ऊपर की स्प्रिंग मे लम्बाई मे वृद्धि y_1 तथा नीचे की स्प्रिंग में लम्बाई मे वृद्धि y_2 है।

तब $y = y_1 + y_2$

दोनो स्प्रिंग श्रेणीक्रम मे होने से ये पिण्ड पर समान बल आरोपित करेगी। अतः

$F = -k_1 y_1$ तथा $F = -k_2 y_2$

$$\Rightarrow \quad y_1 = -\frac{F}{k_1} \text{ तथा } y_2 = -\frac{F}{k_2}$$

$$\therefore \quad y = y_1 + y_2 = -\frac{F}{k_1} - \frac{F}{k_2}$$

$$= -F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) = -F\left(\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad F = -\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right) y$$

यदि k संयोजन का प्रभावी स्प्रिंग बल नियतांक है तो प्रत्यानयन बल

$$F = -ky$$

$$\therefore \quad k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad ...(1)$$

$\therefore$ सरल आवर्त गति करते पिण्ड का आवर्त काल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}} \quad ...(2)$$

यदि दोनों स्प्रिंगों के बल नियतांक बराबर है तो $k_1 = k_2 = k'$ (माना)

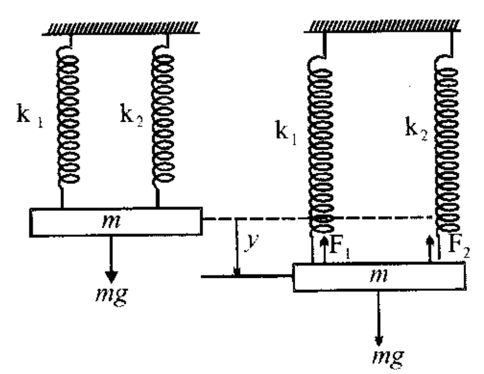
$\therefore$ समीकरण (1) से

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{k' \cdot k'}{k' + k'} = \frac{k'}{2}$$

इस स्थिति में स्प्रिंग की प्रभावी लम्बाई प्रत्येक स्प्रिंग की लम्बाई की दुगुनी हो जायेगी परन्तु प्रभावी बल नियतांक (k) स्प्रिंग के बल नियतांक (k') का आधा होगा। इस प्रकार यदि प्रभावी लम्बाई n गुनी कर दी जाये तब प्रभावी बल नियतांक $\frac{1}{n}$ गुना हो जायेगा तथा आवर्त काल $\sqrt{n}$ गुना बढ़ जायेगा। इस प्रकार, यदि स्प्रिंग की लम्बाई आधी कर जाये तब प्रत्येक भाग का बल नियतांक दुगुना हो जायेगा। यदि स्प्रिंग को काटकर n भाग कर दिये जायें तब प्रत्येक भाग का बल नियतांक n गुना हो जायेगा तथा आवर्त काल $\sqrt{n}$ गुना रह जायेगा।

(ब) समान्तर क्रम संयोजन (Parallel Combination)

माना कि दोनो स्प्रिंग समान्तर क्रम में एक दृढ आधार से लटकायी गयी है तथा दूसरे सिरों से m द्रव्यमान का पिण्ड चित्रानुसार लटकाया गया है–



चित्र 8.28

अब यदि पिण्ड को y दूरी विस्थापित किया जाता है, तब दोनो स्प्रिंगो में समान विस्थापन उत्पन्न होगा तथा दोनो स्प्रिगो द्वारा पिण्ड पर आरोपित प्रत्यानयन बल क्रमशः

$F_1 = -k_1 y$

तथा $F_2 = -k_2 y$ होंगे।

अतः पिण्ड पर आरोपित कुल प्रत्यानयन बल

$$F = F_1 + F_2$$
$$= -(k_1 + k_2)y$$

यदि k इस संयोजन का प्रभावी स्प्रिंग बल नियतांक है तो प्रत्यानयन बल

$\therefore$ $$k = k_1 + k_2 \quad ...(1)$$

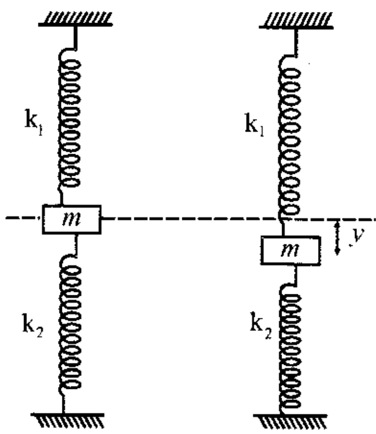
सरल आवर्त गति करते पिण्ड का आवर्तकाल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$\Rightarrow$ $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \quad ...(2)$$

(स) अन्य संयोजन (Other Combination)

माना कि m द्रव्यमान का पिण्ड दो स्प्रिंगो के बीच मे है तथा दोनो स्प्रिंगो के सिरे उस पिण्ड से जुड़े है। जब पिण्ड को साम्य स्थिति से y दूरी नीचे विस्थापित किया जाता है। तब ऊपर की स्प्रिंग y दूरी से विस्तारित होगी जबकि नीचे की स्प्रिंग y दूरी से संपीड़ित होगी।



चित्र 8.29

दोनों स्प्रिंगो के कारण पिण्ड पर प्रत्यानयन बल समान दिशा (ऊपर की ओर) मे कार्यरत होगा।

तब

$F_1 = -k_1 y$ तथा $F_2 = -k_2 y$

कुल प्रत्यानयन बल $F = F_1 + F_2$

$= -(k_1 + k_2)y$

यदि k इस संयोजन का प्रभावी स्प्रिंग बल नियतांक है तो प्रत्यानयन बल

$$F = -ky$$

$\therefore$ $$k = k_1 + k_2 \quad ...(1)$$

$\because$ सरल आवर्त गति करते पिण्ड का आवर्त काल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$\Rightarrow$ $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \quad ...(2)$$

उदा.29. एक स्प्रिंग तुला का स्केल 50 किग्रा. द्रव्यमान तक ज्ञात कर सकता है। स्केल की लम्बाई 20 सेमी. है। एक पिण्ड को इस तुला से लटका कर माध्य स्थिति से विस्थापित करके दोलन कराने पर आवर्त्तकाल 0.60 सेकण्ड प्राप्त होता है। पिण्ड का भार ज्ञात करो।

हल— यहाँ $m = 50$ किग्रा.

अधिकतम विस्थापन $y = 20 - 0 = 20$ सेमी., $T = 0.6$ सेकण्ड

अधिकतम बल $F = mg = 50 \times 9.8$ न्यूटन

$\therefore$ $$k = \frac{F}{y} = \frac{50 \times 9.8}{0.2} = 2450 \text{ न्यूटन/मीटर}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$m = \frac{T^2}{4\pi^2}k = \frac{(0.6)^2 \times 2450}{4 \times (3.14)^2}$$
$$= 22.36 \text{ kg}$$

पिण्ड का भार $W = mg = 22.36 \times 9.8$

$= 219.1$ न्यूटन

या $= 22.36$ किग्राभार

उदा.30. एक पिण्ड को स्प्रिंग से लटकाने पर स्प्रिंग की लम्बाई में 1.5 cm वृद्धि होती है। यदि पिण्ड में कम आयाम के उर्ध्व दोलन उत्पन्न किये जाये तो दोलन का आवर्त काल ज्ञात कीजिये। **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 8.15)**

हल : दिया गया है– स्प्रिंग से m द्रव्यमान का पिण्ड लटकाने पर लम्बाई में वृद्धि $\ell = 1.5\,\text{cm} = 0.015\,\text{m}$

$\because$ दोलन का आवर्तकाल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0.015}{9.8}}$$

$$= 8\pi \times 10^{-2} = 0.25\,\text{s}$$

उदा.31. 500 Nm^{-1} कमानी स्थिरांक की किसी कमानी से 5 kg संहति का कोई कॉलर जुड़ा है जो एक क्षैतिज छड़ पर बिना किसी घर्षण के सरकता है। कॉलर को उसकी साम्यावस्था की स्थिति से 10.0 cm विस्थापित करके छोड़ दिया जाता है। कॉलर के (a) दोलन का आवर्तकाल (b) अधिकतम चाल तथा (c) अधिकतम त्वरण परिकलित कीजिए।

हल— दिया है– $k = 500$ N/m, $m = 5$ किग्रा.,

आयाम $A = 10$ सेमी. $= 10 \times 10^{-2}$ मी.

(a) आवर्तकाल $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \times 3.14\sqrt{\frac{5}{500}}$$

$$= \frac{6.28}{10} = 0.628 \text{ सेकण्ड} \approx 0.63 \text{ से.}$$

(b) अधिकतम चाल $v_{max} = A\omega = A\sqrt{\frac{k}{m}}$

$$= 10\times10^{-2}\times\sqrt{\frac{500}{5}}$$

$$= 10\times10^{-2}\times10 = 1 \text{ मी./से.}$$

(c) अधिकतम त्वरण

$$a_{max} = A\omega^2 = A\frac{k}{m}$$

$$= 10\times10^{-2}\times\frac{500}{5} = 10 \text{ मी./से.}$$

उदा.32. 5 kg द्रव्यमान के एक पिण्ड को 125 N/m बल नियतांक की स्प्रिंग से लटकाकर दोलन कराये जाने पर आवर्त काल क्या होगा? यदि पिण्ड को इसी प्रकार की दो समरूपी स्प्रिंगों के श्रेणी एवं समान्तर संयोजन में लटकाकर दोलन कराये जाये तो प्रत्येक स्थिति में आवर्तकाल क्या होगा ? (पाठ्यपुस्तक उदाहरण 8.16)

हल :दिया गया है: $m = 5$ kg, $k = 125$ N/m

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5}{125}} = 1.256\text{s}$$

(i) श्रेणी संयोजन में

$$K_s = \frac{K_1K_2}{K_1+K_2} = \frac{KK}{2K} = \frac{K}{2} = \frac{125}{2}\text{N/m}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_s}} = 2\times3.14\sqrt{\frac{5\times2}{125}} = 1.776\text{s}$$

(ii) समान्तर संयोजन में

$$K_P = K_1 + K_2 = K + K = 2K$$

$$= 2\times125 = 250$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_P}} = 2\times3.14\sqrt{\frac{5}{250}} = 0.89\text{s}$$

उदा.33. एक विशाल पिस्टन ऊर्ध्वाधर तल में 0.50 हर्ट्ज की आवृति से एक मशीन में स. आ. ग. करता है। एक 10 किग्रा. का ब्लाक पिस्टन पर रख दिया जाता है। पिस्टन की स. आ. ग. का आयाम क्या होगा? जब ब्लॉक और पिस्टन दोनों साथ-साथ स. आ. ग. कर रहे हो।

हल– यहाँ $n = 0.5$ हर्ट्ज

$m = 10$ किग्रा., A = ?

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$k = 4\pi mn^2$$

अधिकतम विस्थापन के लिए $v_{max} = A$

अधिकतम प्रत्यानयंन बल $F = -kA = -mg$

$$A = \frac{mg}{k} = \frac{mg}{4\pi^2mn^2}$$

$$= \frac{g}{4\pi^2n^2} = \frac{9.8}{4\times(3.14)^2\times(0.50)^2}$$

$= 0.99$ मीटर

उदा.34. एक आदर्श स्प्रिंग से लटके द्रव्यमान m का आवर्तकाल 2 s है। यदि इसके साथ 2 kg द्रव्यमान और लटका दे तो आवर्तकाल 3 s हो जाता है। m का मान ज्ञात कीजिये। (पाठ्यपुस्तक उदाहरण 8.19)

हल : दिया गया है: m द्रव्यमान का पिण्ड लटकाने पर आवर्तकाल $T = 2$ s

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{....(1)}$$

अब $(m+2)$ द्रव्यमान लटकाने पर आवर्तकाल T' = 3 s

$$\text{तब } T' = 2\pi\sqrt{\frac{m+2}{k}}, \quad \text{....(2)}$$

समीकरण (2) में समीकरण (1) का भाग देने पर

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{m+2}{m}}$$

$$\frac{3}{2} = \sqrt{\frac{m+2}{m}}$$

$$\frac{9}{4} = \frac{m+2}{m}$$

$$m = \frac{8}{5} = 1.6\text{kg}$$

उदा.35. एक 50 सेमी. लम्बी व 2×10^3 न्यूटन/मीटर बल नियतांक की स्प्रिंग से 12.0 किग्रा का पिण्ड लटका है। स्प्रिंग की लम्बाई में पिण्ड को लटकाने पर कितना विस्तार होगा? यदि पिण्ड 5.9 सेमी. दूरी से और विस्तारित कर दिया जाये तथा मुक्त छोड़ दिया जाये तो दोलन की आवृति ज्ञात करो। स्प्रिंग का द्रव्यमान नगण्य मानते हुए।

हल– यहाँ $m = 12$ किग्रा

प्रारम्भिक लम्बाई $l = 50$ सेमी.

$k = 2\times10^3$ न्यूटन/मी.

$$F = ky; \quad y = \frac{F}{k} = \frac{mg}{k}$$

$$= \frac{1200 \times 9.8}{2 \times 10^3}$$

$= 5.9 \times 10^{-2}$ मी.

$= 5.9$ सेमी.

खींचने पर स्प्रिंग की लम्बाई

$= l + y$

$= 50 + 5.9$

$= 55.9$ सेमी.

दोलन की आवृति $\quad n = \frac{1}{T}$

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= \frac{1}{2 \times 3.14}\sqrt{\frac{2 \times 10^3}{12}}$$

$= 2.06$ कम्पन प्रति सेकण्ड

उदा.36. उस सरल लोलक की लम्बाई क्या है, जो हर सेकंड के बाद टिक करता है? **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 8.17)**

हल– ऐसे लोलक का आवर्तकाल जो हर एक सेकण्ड बाद टिक करता है T = 2 से. होता है। यह सेकण्ड लोलक कहलाता है।
तथा गुरुत्वीय त्वरण $g = 9.8$ मी./से.^{2}

अतः $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ से आवश्यक लम्बाई

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

या $\quad L = \frac{9.8 \times 4}{4 \times 3.14 \times 3.14} = 0.993$ मी. ≈ 1 मी.

उदा.37. एक सरल लोलक का आवर्तकाल 4 सेकण्ड तथा प्रभावी लम्बाई 4 m है। इसकी लम्बाई कितनी कर दी जाये कि वह 30 s में 15 दोलन करने लगे? **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 8.18)**

हल : दिया गया है: $T = 4$ सेकण्ड, $l = 4$ मीटर

$\because$ लोलक को 15 दोलन में समय लगता है 30s

$\therefore$ 1 दोलन में लगा समय $= \frac{30}{15} = 2$ s

$\because$ सरल लोलक का आवर्तकाल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad ....(1)$$

नई परिस्थिति में $T' = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}$ $\qquad$ (2)

$T' = 2$ s, $\quad l' = ?$

समीकरण (1) में समीकरण (2) का भाग देने पर

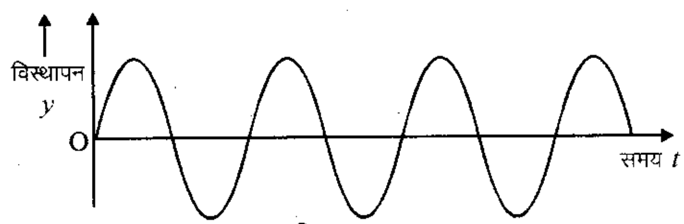
$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{\ell}{\ell'}}$$

$$\ell' = \frac{T'^2 \ell}{T^2}$$

$$\ell' = \frac{4 \times 4}{(4)^2} = 1 \text{ मीटर}$$

मुक्त दोलन (Free Oscillations)

जब कम्पन करने योग्य वस्तु को उसकी साम्य स्थिति से हल्का सा विस्थापित करके छोड़ दिया जाये तब यह एक निश्चित आवृत्ति से दोलन करने लगती है। यह वस्तु की स्वाभाविक आवृत्ति (Natural frequency) कहलाती है। बाह्य बल की अनुपस्थिति में वस्तु के दोलन मुक्त दोलन कहलाते है। इस स्थिति में वस्तु प्रत्यानयन बल के प्रभाव में दोलन करती है जबकि कम्पन के आयाम, आवृत्ति तथा ऊर्जा नियत रहते हैं। वह दोलन जो नियत आयाम से अनन्त समय तक दोलन करता रहता है, मुक्त दोलन कहलाता है।



चित्र 8.30

उदाहरण– **(i)** सरल लोलक के गोलक को साम्य स्थिति से विस्थापित करके छोड़ने पर वह स्वाभाविक आवृत्ति से दोलन करता है। इस स्थिति में यदि वायु के प्रतिरोधकों नगण्य माना जाये तब दोलन, मुक्त दोलन होते है।

(ii) किसी स्वरित्र द्विभुज (tunning fork) को रबर पैड से मारने पर उसकी भुजायें स्वाभाविक आवृत्ति से दोलन करती है। यह आवृत्ति उसकी भुजाओं की मोटाई पर निर्भर करती है।

मुक्त दोलनों में किसी क्षण वस्तु पर लगने वाला प्रत्यानयन बल, साम्य स्थिति से वस्तु के विस्थापन के समानुपाती होता है।

एकांक विस्थापन की स्थिति में वस्तु पर लगने वाले प्रत्यानयन बल को वस्तु की कठोरता S कहते हैं।

यदि वस्तु का द्रव्यमान m हो तो वस्तु के मुक्त दोलन का आवर्तकाल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{S}}$$

स्वाभाविक आवृत्ति $\quad n_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{m}}$

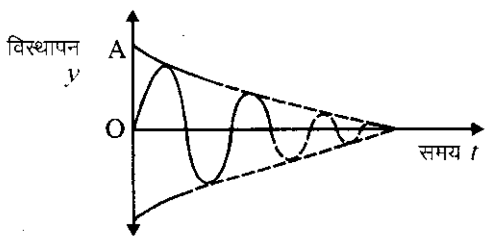
स्वाभाविक कोणीय आवृत्ति

$$\omega_0 = 2\pi n_0 = \sqrt{\frac{S}{m}}$$

इस प्रकार मुक्त दोलन का आवर्तकाल तथा आवृत्ति केवल वस्तु के द्रव्यमान तथा कठोरता के अनुपात पर निर्भर करती है। द्रव्यमान के बढ़ने अथवा कठोरता के घटने पर T का मान बढ़ जाता है तथा आवृत्ति घट जाती है।

8.11 अवमंदित दोलन (Damped Oscillations)

किसी वस्तु के वे दोलन जिनमें आयाम समय के साथ–साथ कम होता हुआ शून्य हो जाता है। अवमंदित दोलन कहलाते हैं। इन दोलनों में अवमंदन बलों (श्यान बल, घर्षण बल आदि) के कारण वस्तु को दोलन कराने में दी गई ऊर्जा का ह्रास होता रहता है जिससे वस्तु के दोलनों का आयाम समय के साथ साथ घटता जाता है तथा कुछ समय पश्चात दोलन बन्द हो जाते है। अवमंदित दोलन करने वाले दोलक को अवमंदित दोलक कहते है।



चित्र 8.31

उदाहरण – (i) सरल लोलक के गोलक का वायु अथवा माध्यम में दोलन अवमंदित दोलन हैं।

(ii) स्प्रिंग से लटके भार का वायु अथवा माध्यम के दोलन अवमंदित दोलन है।

व्यवहार में किसी वस्तु द्वारा किए गए दोलन, वास्तव में वस्तु के अवमंदित दोलन ही होते हैं। दोलन करने वाली वस्तु का वेग कम होने की स्थिति में माध्यम द्वारा वस्तु पर आरोपित अवमंदन बल वस्तु के वेग के समानुपाती तथा वेग की विपरीत दिशा में कार्यरत होता है अर्थात्

अवमंदन बल $F_d \propto -v$

$$\Rightarrow \quad F_d = -bv \quad \text{...(1)}$$

जहां v = वस्तु का वेग

b = धनात्मक नियतांक (अवमंदन नियतांक)

b का मान माध्यम के गुणों (जैसे श्यानता आदि) तथा वस्तु के आकार तथा आकृति पर निर्भर करता है।

जब श्यान माध्यम की उपस्थिति में किसी स्प्रिंग से लटके पिण्ड को साम्य स्थिति से विस्थापित किया जाता है

तब प्रत्यानयन बल $F_R = -ky$ ...(2)

इस स्थिति में पिण्ड पर कार्यरत कुल बल

$$F = F_R + F_d$$

$$\Rightarrow \quad F = -ky - bv$$

$$\Rightarrow \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - b\frac{dy}{dt}$$

$$\left[\because F = ma = m\frac{d^2y}{dt^2} \text{ तथा } v = \frac{dy}{dt}\right]$$

$$\Rightarrow \quad m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = 0 \quad \text{...(3)}$$

पोषित दोलन (Maintained Oscialltions)

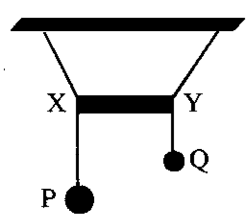
अवमंदित बलों के अन्तर्गत कम्पित वस्तु की ऊर्जा में प्रत्येक दोलन के पश्चात कमी होती है। यह ऊर्जा अवमंदित बलों के विरूद्ध कार्य करने में व्यय होती है। यदि किसी बाह्य तन्त्र द्वारा वस्तु को इतनी ऊर्जा प्रदान कर दी जाये ताकि वस्तु के दोलनों का आयाम नियत रखा जा सके तब दोलन पोषित दोलन कहलाते है।

8.12 प्रणोदित दोलन (Forced Oscillations)

जब किसी कम्पित वस्तु पर कोई बाह्य आवर्त बल (periodic force) आरोपित किया जाता है जिसकी आवृति का मान वस्तु की स्वाभाविक आवृत्ति से भिन्न होती है। तब प्रारम्भ में वस्तु स्वाभाविक आवृत्ति से दोलन करती है परन्तु बाह्य कार्य बल के प्रभाव में वस्तु बाह्य आवर्त बल की आवृति से ही दोलन करने लगती है। इस प्रकार के दोलन प्रणोदित दोलन अथवा परिचालित दोलन कहलाते है।

इस प्रकार जब कोई वस्तु किसी बाह्य आवर्त बल के अन्तर्गत, बाह्य बल की आवृत्ति से दोलन करती है तब वस्तु के दोलन प्रणोदित दोलन कहलाते है।

उदाहरण– चित्र में दो भिन्न–भिन्न लम्बाईयों के लोलक P व Q एक ही छड़ XY द्वारा लटकाये गये हैं इनकी स्वाभाविक आवृत्तियाँ भिन्न – भिन्न है। जब लोलक P को दोलन कराते है तब लोलक Q का सम्बन्ध छड़ XY से होने से उस पर एक आवर्त बल आरोपित होता है जिसकी आवृति लोलक P की आवृत्ति के बराबर होती है। उस आवर्त बल के प्रभाव से लोलक Q लोलक P की आवृत्ति से दोलन करता है। लोलक Q के ये दोलन प्रणोदित दोलन कहलाते है। यहाँ लोलक P को चालक (driver) तथा लोलक Q को चालित (driven) लोलक कहते है।



चित्र 8.32

माना कि किसी अवमंदित दोलक पर आरोपित बाह्य आवर्त बल $F(t) = F_0 \cos \omega_d t$ है।

इस स्थिति में दोलक की गति निम्न बलों को सम्मिलित प्रभाव में होती है–

(i) प्रत्यानयन बल $(-ky)$

(ii) अवमंदन बल $(-bv)$ तथा

(iii) बाह्य आवर्त बल (प्रेरक बल) $F(t)$

अतः दोलक पर परिणामी बल

$$F = -ky - bv + F(t)$$

$$\Rightarrow \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - b\frac{dy}{dt} + F_0 \cos \omega_d t$$

$$\Rightarrow \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} + ky + b\frac{dy}{dt} = F_0 \cos \omega_d t$$

$$\Rightarrow \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = F_0 \cos \omega_d t \qquad ...(1)$$

समी. (1) ω_d कोणीय आवृत्ति के प्रेरक बल की उपस्थिति में दोलक की गति के समीकरण को व्यक्त करता है।

8.13 अनुनाद (Resonance)

प्रणोदित दोलनों के अन्तर्गत जब किसी दोलक पर आरोपित बाह्य आवर्त बल की आवृत्ति दोलक की स्वाभाविक आवृत्ति के बराबर हो तो इस स्थिति में प्रणोदित दोलनों का आयाम बहुत अधिक हो जाता है। प्रणोदित दोलनों की यह विशेष अवस्था अनुनाद कहलाती है। उपरोक्त वर्णित उदाहरण में जब चालक P की आवृत्ति, चालित Q की आवृत्ति के बराबर हो तब अनुनाद की स्थिति प्राप्त होती हे। उस स्थिति में चालक से चालित को अधिकतम ऊर्जा का स्थानान्तरण होता है जिससे चालित के दोलनों का आयाम अत्यधिक बढ़ जाता है।

उदाहरण–

(i) **सेना का पुल पार करना**–जब कोई सेना किसी पुल को पार करती है तब सभी सैनिक एक साथ कदम मिलाकर नहीं चलते है क्योंकि यदि सैनिकों के कदम मिलाने की आवृत्ति पुल की स्वाभाविक आवृत्ति के बराबर होती है, तब पुल के कम्पनों का आयाम बढ़ जायेगा। जिससे उसके टूटने का खतरा हो जायेगा।

(ii) जब कम्पित स्वरित्र को किसी ऐसे खोखले बॉक्स पर रखा जाये जिसमें वायु भरी हो तब वायु की स्वाभाविक आवृत्ति स्वरित्र की आवृत्ति के बराबर होने पर बहुत तीव्र ध्वनि सुनाई देती है। ऐसा अनुनाद के कारण होता है।

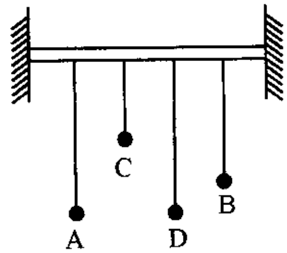
(iii) विशिष्ट आकाशवाणी स्टेशन से प्रसारित कार्यक्रम को रेडियो ट्रांजिस्टर को समस्वरित करके सुना जाता है।

(iv) पुल अथवा सुरंग में से गुजरते समय ड्राइवर ट्रेन की सीटी नहीं बजाते है।

(v) भवनों की प्राकृतिक आवृत्ति, भूकम्प के समय उत्पन्न पृथ्वी के कम्पन की आवृति के बराबर होने पर भवन कम्पन करने लगते है तथा ध राशायी हो जाते है।

प्रणोदित तथा अनुनादित दोलनों का प्रदर्शन
(Demonstration of forced and resonant oscillations)

चित्र में लकड़ी की एक क्षैतिज छड़ PQ से चार दोलक A, B, C तथा D लटकाए गए हैं। दोलक A व B की लम्बाइयाँ बराबर है इसलिए इनकी स्वाभाविक आवृत्तियाँ भी बराबर हैं। C की लम्बाई A से कुछ कम (इसलिए आवृत्ति अधिक) तथा दोलक D की लम्बाई दोलक A से कुछ अधिक (इसलिए आवृत्ति कम) है।



चित्र 8.33

यदि दोलक A को थोड़ा–सा विस्थापित करके दोलन कराया जाये तब यह कम्पन छड़ के द्वारा अन्य दोलकों तक पहुंच जाते हैं तथा अन्य दोलक प्रणोदित दोलन करने लगते हैं।

C व D की आवृत्तियाँ A की आवृत्ति से भिन्न होने से वे बहुत ही कम आयाम से A की आवृत्ति के प्रणोदित दोलन करते हैं तथा दोलक B की आवृत्ति A की आवृत्ति के बराबर होने के कारण, B के दोलन अनुनादी दोलन होते हैं जिससे B के दोलनों का आयाम धीरे–धीरे बढ़ता जाता है तथा A के आयाम के बराबर हो जाता है।

विविध उदाहरण

उदा.38. किसी दोलित्र कण का विस्थापन समीकरण निम्न है:

$$y = 0.7 \sin (50\pi t + 30°)$$

जहाँ दूरियाँ सेमी में तथा समय सेकण्ड में है। कण का आयाम, आवृत्ति, कला कोण तथा आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।

हल– सरल आवर्त गति का प्रमाणिक विस्थापन समीकरण है

$$y = A\sin(\omega t + \phi) \qquad ...(1)$$

जिसमें A आयाम, $n = \frac{\omega}{2\pi}$ आवृत्ति तथा ϕ प्रारम्भिक कला है

दिया गया समीकरण $y = 0.7\sin(50\pi t + 30°)$ ...(2)

समीकरणों (1) व (2) की तुलना करने पर A = 0.7 सेमी, $\omega = 50\pi$ तथा $\phi = 30°$

$\therefore$ आवृत्ति $\quad n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{50\pi}{2\pi} = 25\frac{\text{दोलन}}{\text{सेकण्ड}}$

आवर्त काल $\quad T = \frac{1}{n} = \frac{1}{25}$ सेकण्ड

$\therefore$ आयाम, $\quad A = 0.7$ सेमी,

आवृत्ति $\quad n = 25\frac{\text{दोलन}}{\text{सेकण्ड}}$

कला कोण $\quad \phi = 30°$

आवर्तकाल $\quad T = \frac{1}{25}$ सेकण्ड

उदा.39. एक कण की सरल आवर्त गति का समीकरण है

$$10y = 0.1 \sin 50\pi t$$

जहाँ विस्थापन y मीटर में तथा समय t सेकण्ड में हैं। कण का आयाम, आवृति ज्ञात कीजिए।

हल– दिया गया समीकरण

$$10y = 0.1\sin 50\pi t$$

इसे इस प्रकार से लिखा जा सकता है

$$y = \frac{0.1}{10}\sin 50\pi t$$

या $\quad y = 0.01 \sin 50\pi t \quad \ldots(1)$

सरल आवर्त गति का प्रमाणिक समीकरण है

$$y = A\sin\omega t \quad \ldots(2)$$

जिसमें A = आयाम तथा ω कोणीय आवृति है।

A = 0.01 मीटर तथा $\omega = 50\pi$

$\therefore$ आवृत्ति $\quad n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{50\pi}{2\pi} = 25$ हर्ट्ज

$\therefore$ आयाम $\quad$ A = 0.01 मीटर तथा आवृति $n = 25$ हर्ट्ज

उदा.40. सरल आवर्त गति करते हुए एक कण का विस्थापन समीकरण $y = 0.2 \sin 50\pi (t + 0.01)$ मीटर है जबकि क्षण t पर कण का विस्थापन y है। कण का आयाम, आवर्त काल, अधिकतम वेग तथा गति के प्रारम्भ के समय विस्थापन की गणना कीजिए।

हल– सरल आवर्त गति करते कण का दिया गया समीकरण हैं

$$y = 0.2\sin 50\pi(t+0.01)$$

$$= 0.2\sin\left(50\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \ldots(1)$$

सरल आवर्त गति का प्रमाणिक समीकरण (standard equation) है

$$y = A\sin(\omega t + \phi) \quad \ldots(2)$$

समीकरणों (1) व (2) की तुलना करने पर

$\therefore$ कण का आयाम A = 0.2 मीटर, $\omega = 50\pi$ रेडियन/सेकण्ड

आवर्तकाल $\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{50\pi} = \frac{1}{25} = 0.04$ सेकण्ड

अधिकतम वेग $v_{max} = \omega A = 50\pi \times 0.2 = 10 \times 3.14$

$= 31.4$ मी./से.

$t = 0$ पर कण का विस्थापन $y = 0.2\sin(\pi/2) = 0.2$ मीटर

उदा.41. सरल आवर्त गति करते हुए एक पिण्ड का आवर्त काल 2 सेकण्ड है। समय $t = 0$ पर कण का विस्थापन शून्य हो, तो कितने समय पश्चात उसका विस्थापन उसके आयाम का आधा होगा। ($\sin 30° = 1/2$)

हल– सरल आवर्त गति का प्रमाणिक समीकरण है

$$y = A\sin(\omega t + \phi) \quad \ldots(1)$$

यदि समय $t = 0$ पर विस्थापन शून्य हो, तो

$$0 = A\sin\phi$$

या $\quad \sin\phi = 0$

$\therefore \quad \phi = 0$

समीकरण (1) में $\phi = 0$ रखने पर, सरल आवर्त गति का समीकरण,

$$y = A\sin\omega t$$

यदि आवर्त काल T हो, तो

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\therefore \quad y = A\sin\frac{2\pi t}{T}$$

यहाँ $y = \frac{A}{2}$, $\quad$ T = 2 सेकण्ड

$$\therefore \quad \frac{A}{2} = A\sin\frac{2\pi t}{2}$$

या $\quad \frac{1}{2} = \sin\pi t$

परन्तु $\quad \frac{1}{2} = \sin 30° = \sin\left(30° \times \frac{\pi}{180°}\right)$

$$= \sin\frac{\pi}{6}$$

$\therefore \quad \sin\frac{\pi}{6} = \sin\pi t$

या $\quad \frac{\pi}{6} = \pi t$

$t = \frac{1}{6}$ सेकण्ड

उदा.42. सरल आवर्त गति करता हुआ एक कण प्रति मिनट 1200 दोलन करता है तथा माध्य स्थिति से गुजरते समय उसका वेग 3.14 मी/से रहता है। कण का विस्थापन समीकरण भी प्राप्त कीजिए यदि क्षण $t = 0$ पर विस्थापन शून्य हो।

हल– माध्य स्थिति में कण का वेग अधिकतम होता है। यदि कण का आयाम A व कोणीय वेग ω हो, तो अधिकतम वेग, $v_{max} = \omega A$

$\therefore$ आयाम $\quad A = \frac{v_{max}}{\omega}$

$$= \frac{v_{max}}{2\pi n}$$

[$\therefore \omega = 2\pi n$, जिसमें n आवृति है।]

प्रश्नानुसार $\quad v_{max} = 3.1$ मी/से.

$n = 1200$ प्रति मिनट $= \frac{1200}{60}$ प्रति सेकण्ड = 20 प्रति सेकण्ड

$\therefore \quad A = \frac{3.1}{2 \times 3.14 \times 20} = \frac{1}{40} = 0.025$ मीटर

यदि $t = 0$ पर कण का विस्थापन शून्य है अर्थात कण अपनी साम्यावस्था में है, तो सरल आवर्त गति का समीकरण है।

$$y = A\sin\omega t = A\sin 2\pi nt$$

A व n के मान रखने पर

$$y = 0.025\sin 2\pi \times 20t$$

या $\quad y = 0.025\sin 40\pi t$

उदा.43. सरल आवर्त गति करते हुए कण का साम्य स्थिति से 3 सेमी. की दूरी पर त्वरण 12 सेमी/सेकण्ड^2 है। इसका आवर्त काल ज्ञात कीजिये।

हल– कण का त्वरण $\quad a = \omega^2 y$

जहाँ ω कोणीय आवृति तथा y विस्थापन है।

संख्यात्मक रूप से $\quad a = \omega^2 y$ या $\omega^2 = \frac{a}{y}$

या $\quad \omega = \sqrt{\left(\frac{a}{y}\right)}$

आवर्त काल, $\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{a}{y}\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{y}{a}}$

यहाँ $y = 3$ सेमी तथा $a = 12$ सेमी/से^{2}

$\therefore$ आवर्तकाल, $\quad T = 2 \times 3.14\sqrt{\frac{3}{12}}$

$$= \frac{2 \times 3.14}{2}$$

$\therefore \quad T = 3.14$ सेकण्ड

उदा.44. सरल आवर्त गति करते हुए कण का आयाम 0.01 मी तथा आवृति 60 हर्ट्ज है कण का अधिकतम त्वरण ज्ञात कीजिये।

हल– त्वरण $a = \omega^2 y$

$\therefore \quad$ अधिकतम विस्थापन y_{max} = आयाम A

$\therefore \quad$ अधिकतम त्वरण $a_{max} = \omega^2 A$

यहाँ $\omega = 2\pi n = 2\pi \times 60 = 120\pi$ रेडियन/से.

तथा $A = 0.01$ मी

$\therefore$ $a_{max} = (120\pi)^2 \times 0.01$

$= 144\pi^2 = 1419.8$ मी/से^{2}

उदा.45. $\frac{9.8}{\pi^2}$ मीटर लम्बाई के सरल लोलक का आवर्त काल ज्ञात कीजिए।

हल– सरल लोलक का आवर्त काल,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

प्रश्नानुसार $l = \frac{9.8}{\pi^2}$ मीटर, $g = 9.8$ मी/से^{2}

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{9.8}{\pi^2}\right)}{9.8}}$$

$$= \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ सेकण्ड}$$

उदा.46. चन्द्रमा पर एक सेकण्ड लोलक की लम्बाई ज्ञात कीजिये जहाँ गुरूत्वीय त्वरण का मान पृथ्वी के गुरुत्वीय त्वरण का $\frac{1}{6}$ गुना है। पृथ्वी पर $g = 9.8$ मी/से^{2}

हल– सेकण्ड लोलक का आवर्त काल 2 सेकण्ड होता है।

$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{l_m}{g_m}}$ (यहाँ m चन्द्रमा के लिए संकेत है।)

चन्द्रमा पर सेकण्ड लोलक की लम्बाई

$$l_m = \frac{T_m^2 g_m}{4\pi^2}$$

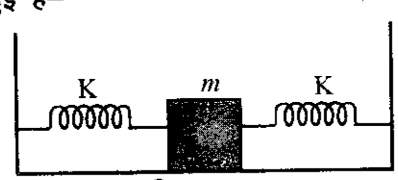
प्रश्नानुसार $T_m = 2$ सेकण्ड, $g_m = \frac{g}{6} = \frac{9.8}{6}$ मी/से^{2}

$$l_m = \frac{2^2\left(\frac{9.8}{6}\right)}{4 \times (3.14)^2}$$

$$= \frac{4 \times 9.8}{6 \times 4 \times 3.14 \times 3.14}$$

$$= 0.165 \text{ मीटर}$$

उदा.47. कमानी स्थिरांक k की दो सर्वसम कमानियाँ m संहति के किसी गुटके तथा स्थिर आधारों से चित्र में दर्शाए गए अनुसार जुड़ी हुई हैं–



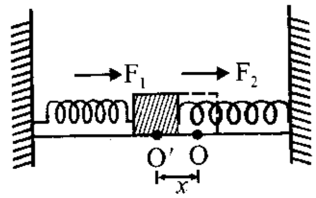
चित्र 8.34

यह दर्शाइए कि जब गुटके को अपनी साम्यावस्था की स्थिति से किसी ओर विस्थापित किया जाता है, तब यह सरल आवर्त गति करता है। दोलन का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।

हल– निम्न चित्रानुसार यदि गुटके को साम्यावस्था O से O′ तक x दूरी से विस्थापित करते हैं तो एक स्प्रिंग संपीडित होती है जबकि दूसरी विस्तारित होती है तथा दोनों का संपीडन एवं विस्तारण समान लम्बाई x का होता है फलतः दोनों स्प्रिंग गुटके पर एक ही दिशा में प्रत्यानयन बल लगाती है। चूंकि दोनों स्प्रिंगों का बल नियतांक भी समान है अतः

$$F_1 = F_2 = -kx$$

तथा गुटके पर कुल प्रत्यानयन बल



चित्र 8.35

$$F = F_1 + F_2 = -2kx$$

या $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2kx$$

$\Rightarrow$ प्रभावी बल नियतांक

$$k' = 2k$$

तथा आवर्तकाल $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

उदा.48. चन्द्रमा की सतह पर गुरुत्वीय त्वरण का मान 1.7 मी./से.^{2} है। एक सरल लोलक का आवर्तकाल चन्द्रमा की सतह पर क्या होगा यदि पृथ्वी की सतह पर आवर्तकाल 3.5 सेकण्ड है? ($g_{\text{पृथ्वी}} = 9.8$ मी./से^{2})

हल– यहाँ $g_m = 1.7$ मी./से.^{2}

$g_e = 9.8$ मी./से.^{2}

$T_m = ?$

$T_e = 3.5$ सेकण्ड

$$T_e = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_e}}$$

$$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_m}}$$

$\therefore$ $$\frac{T_m}{T_e} = \sqrt{\frac{g_e}{g_m}}$$

$$T_m = T_e\sqrt{\frac{g_e}{g_m}} = 3.5\sqrt{\frac{9.8}{1.7}}$$

$$= 8.4 \text{ सेकण्ड}$$

उदा.49. एक सेकण्ड लोलक घड़ी सामान्यतया ठीक समय बताती है। सर्दियों में अधिक ठण्ड वाले दिनों में इसकी लम्बाई 0.2% से कम हो जाती है। एक दिन के समय में कुल कितनी त्रुटि उत्पन्न हो जायेगी?

हल– सेकण्ड लोलक का सही समय 2 सेकण्ड होता।

माना कि इसकी सही लम्बाई L है।

$\therefore$ $$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \ldots(1)$$

लम्बाई में कमी $= 0.2\% = \frac{0.2}{100}L$

लम्बाई में कमी के पश्चात् प्रभावी लम्बाई $= L - \frac{0.2}{100}L$

$$= L\left(1-\frac{0.2}{100}\right)$$
$$= l$$

नया आवर्तकाल

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}\left(1-\frac{0.2}{100}\right)} \quad ...(2)$$

समीकरण (1) को (2) से विभाजित करने पर

$$\frac{T'}{2} = \left(1-\frac{0.2}{100}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$T' = 2\left(1-\frac{0.2}{100}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{0.2}{100}+...\right)$$
$$= \left(2-\frac{0.2}{100}\right) \text{ सेकण्ड}$$

यह 2 सेकण्ड से कम होगा।

अतः घड़ी का आवर्तकाल बढ़ जायेगा 2 सेकण्ड में समय में वृद्धि = $\frac{0.2}{100}$ सेकण्ड

1 दिन में कुल वृद्धि $= 24\times60\times60\times\frac{0.2}{100}$

$= 86.4$ सेकण्ड

उदा.50. निम्न स्थितियों में सरल लोलक के आवर्त काल में प्रतिशत परिवर्तन ज्ञात कीजिए। (i) लोलक की लम्बाई 5% बढ़ाने पर (ii) लोलक का द्रव्यमान 5% बढ़ाने पर (iii) लोलक का आयाम 5% घटाने पर (iv) लोलक को एक ऐसे स्थान पर ले जाने पर जहाँ का g मान 5% कम हो।

हल– माना लोलक की लम्बाई l तथा आवर्त काल T है

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad ...(1)$$

(i) लम्बाई को 5% बढ़ाने पर नई लम्बाई $l' = 1+\frac{5}{100}l$

यदि आवर्तकाल T से बढ़ाकर T' हो जाये, तो

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}$$
$$= 2\pi\sqrt{\frac{l+\frac{5}{100}l}{g}} \quad ...(2)$$

समीकरण (2) को (1) से भाग देने पर

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{1+\frac{5}{100}} = \left(1+\frac{5}{100}\right)^{1/2}$$
$$= 1+\frac{1}{2}\times\frac{5}{100} \quad \text{(द्विपद प्रमेय से)}$$

या $$\frac{T'}{T}-1 = \frac{5}{2\times100}$$

या $$\frac{T'-T}{T} = \frac{5}{2\times100}$$

या $$\frac{\Delta T}{T} = \frac{5}{2\times100}$$

$\therefore$ आवर्त काल में प्रतिशत वृद्धि $\frac{\Delta T}{T}\times100 = \frac{5}{2\times100}\times100\%$

$= 2.5\%$

(ii) आवर्त काल लोलक के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता, अतः द्रव्यमान बढ़ाने पर आवर्त काल वही रहेगा।

$\therefore$ प्रतिशत परिवर्तन = शून्य

(iii) आवर्त काल गति के आयाम पर भी निर्भर नहीं करता, अतः आयाम घटाने पर आवर्त काल वही रहेगा

$\therefore$ प्रतिशत परिवर्तन = शून्य

(iv) गुरूत्वीय त्वरण के 5% कम होने पर

नया गुरूत्वीय त्वरण $g' = g-\frac{5}{100}g$

$$\therefore \text{ नया आवर्त काल} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} \quad ...(3)$$

समीकरण (3) को (1) से भाग देने पर

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{\left(\frac{g}{g'}\right)}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{g}{\left(g-\frac{5g}{100}\right)}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{\left(1-\frac{5}{100}\right)}\right)}$$
$$= 1+\frac{1}{2}\times\frac{5}{100} \quad \text{(द्विपद प्रमेय से)}$$
$$\frac{T'}{T}-1 = \frac{1}{2}\times\frac{5}{100}$$

या $$\frac{T'-T}{T} = \frac{\Delta T}{T}$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{5}{100}$$

आवर्तकाल में प्रतिशत वृद्धि

$$\frac{\Delta T}{T}\times100 = \frac{1}{2}\times\frac{5}{100}\times100\%$$
$$= 2.5\%$$

उदा.51. एक सरल लोलक का आवर्त काल 4 सेकण्ड तथा प्रभावी लम्बाई 4 मीटर है। इसकी लम्बाई कितनी कर दी जाये कि वह 30 सेकण्ड में 15 दोलन करने लगे?

हल– $$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

माना नई लम्बाई l' व आवर्त काल T' है,

अतः $$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}$$

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{l'}{l}}$$

वर्ग करने पर या $\left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \frac{l'}{l}$

$\therefore$ $$l' = \left(\frac{T'^2}{T^2}\right)l \quad ...(1)$$

प्रश्नानुसार T = 4 सेकण्ड, l = 4 मीटर

$$T' = \frac{\text{समय अन्तराल}}{\text{दोलनों की संख्या}}$$

$$= \frac{30}{15} = 2 \text{ सेकण्ड}$$

$$l' = \left(\frac{2}{4}\right)^2 \times 4 = \frac{4}{4} = 1 \text{ मीटर}$$

उदा.52. एक आदर्श स्प्रिंग का बल नियतांक 200 न्यूटन/मीटर है। इस पर $200/\pi^2$ किग्रा. के एक द्रव्यमान के पिण्ड को दोलित कराया जाता है। दोलन का आवर्त काल ज्ञात कीजिए।

हल– स्प्रिंग से लटके द्रव्यमान के दोलनों का आवर्त काल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

यहाँ $m = 200/\pi^2$ किग्रा तथा बल नियतांक k = 200 न्यूटन/मी.

$$T = 2\pi\sqrt{\left[\frac{\frac{200}{\pi^2}}{200}\right]} = 2\pi \times \frac{1}{\pi}$$

$$= 2 \text{ सेकण्ड}$$

उदा.53. एक स्प्रिंग से 0.60 किग्रा का एक पिण्ड लटकाने से उसकी लम्बाई 0.25 मीटर बढ़ जाती है। यदि स्प्रिंग से 0.24 किग्रा का एक पिण्ड लटकाकर कुछ नीचे छोड़ दिया जाये, तो स्प्रिंग का आवर्त काल कितना होगा? (g = 10 मी/से²)

हल– स्प्रिंग का बल नियतांक $k = \frac{\text{बल}}{\text{खिंचाव}} = \frac{F}{y}$

यहाँ बल F = Mg = 0.60 × 10 = 6.0 न्यूटन,
खिंचाव y = 0.25 मीटर

$$k = \frac{6.0}{0.25} = 24 \text{ न्यूटन/मीटर}$$

स्प्रिंग से लटके m = 0.24 किग्रा के पिण्ड के दोलनों का दोलन काल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \times 3.14\sqrt{\frac{0.24}{24}}$$

$$= 0.628 \text{ सेकण्ड}$$

उदा.54. किसी भारहीन स्प्रिंग से 0.5 किग्रा का पिण्ड लटकाने पर स्प्रिंग की लम्बाई में 5.0 सेमी की वृद्धि होती हे। इस पिण्ड को थोड़ा नीचे की ओर खींचकर छोड़ देने पर उसमें सरल आवर्त कम्पन होने लगते है। स्प्रिंग का बल नियतांक एवं कम्पन का दोलन काल ज्ञात कीजिए। (g = 9.8 मी/से²)

हल– स्प्रिंग का बल नियतांक $k = \frac{\text{बल}}{\text{खिंचाव}} = \frac{F}{y} = \frac{Mg}{y}$

यहाँ M = 0.5 किग्रा, y = 5.0 सेमी = 5.0×10^{-2} मीटर

$\therefore$ $$k = \frac{0.5 \times 9.8}{5.0 \times 10^{-2}} = 98 \text{ न्यूटन/मी}$$

आवर्तकाल $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \times 3.14\sqrt{\frac{0.5}{98}}$$

$$= 0.448 \text{ से.}$$

उदा.55. एक भारहीन स्प्रिंग से 1.0 किग्रा का पिण्ड लटकाने पर उसकी की लम्बाई में 2 सेमी की वृद्धि होती है। इस भार को 10 सेमी नीचे खींचकर छोड़ दिया जाता है, स्प्रिंग की दोलन गतिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए। (g = 10 मी/से²)

हल– स्प्रिंग का बल नियतांक $k = \frac{\text{बल}}{\text{खिंचाव}} = \frac{F}{y} = \frac{Mg}{y}$

यहाँ m = 1.0 किग्रा, y = 2 सेमी = 2×10^{-2} मीटर

$\therefore$ $$k = \frac{1.0 \times 10}{2 \times 10^{-2}} = 500 \text{ न्यूटन/मी}$$

$\therefore$ स्प्रिंग की दोलन गतिज ऊर्जा E = कुल ऊर्जा = $\frac{1}{2}kA^2$

यहाँ आयाम A = 10 सेमी = 10×10^{-2} मीटर

$\therefore$ $$E = \frac{1}{2} \times 500 \times (10 \times 10^{2})^2$$

$$= 2.50 \text{ जूल}$$

उदा.56. दो द्रव्यमान m_1 = 1 किग्रा तथा m_2 = 0.50 किग्रा एक नगण्य भार वाले स्प्रिंग से, जिसका बल नियतांक K = 12.5 न्यूटन/मीटर है, लटके हैं। जब दोनों साम्यावस्था में हैं, m_1 को धीरे से हटा दिया जाता है। m_2 के दोलनों की कोणीय आवृति तथा आयाम ज्ञात कीजिए।

हल– माना स्प्रिंग पर m_1 व m_2 द्रव्यमान लटकाने पर उसकी लम्बाई में l_0 की वृद्धि होती है।

अतः साम्यावस्था में

$$(m_1 + m_2)g = k l_0 \quad ...(1)$$

माना m_1 के हटा देने पर यह वृद्धि l'_0 रह जाती है, तब

साम्यावस्था के लिए $m_2 g = kl'_0$ ...(2)

समीकरण (2) को (1) में से घटाने पर

$$(m_1 + m_2)g - m_2 g = k(l_0 - l'_0)$$

m_2 के दोलनों का आयाम,

$$A = l_0 - l'_0 = \frac{m_1 g}{k}$$

$$= \frac{1 \times 10}{12.5} = 0.8 \text{ मीटर}$$

m_2 के दोलनों की कोणीय आवृति,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = \sqrt{\frac{12.5}{0.5}}$$

$$= \sqrt{25} = 5 \text{ रेडियन/सेकण्ड}$$

उदा.57. 0.05 किग्रा के एक पिण्ड को एक स्प्रिंग से लटकाकर, ऊपर

नीचे दोलन कराया जाता है। कम्पन का आयाम 0.05 मीटर तथा आवर्त काल 1.57 सेकण्ड है। ज्ञात कीजिए (i) पिण्ड की अधिकतम चाल (ii) अधिकतम गतिज ऊर्जा (iii) सम्पूर्ण ऊर्जा तथा (iv) स्प्रिंग का बल नियतांक।

हल– यहाँ $m = 0.05$ किग्रा., $A = 0.05$ मीटर, $T = 1.57$ सेकण्ड

(i) पिण्ड की अधिकतम चाल $v_{max} = \omega A = \frac{2\pi}{T} A$

$$= \frac{2 \times 3.14}{1.57} \times 0.50 = 2 \text{ मी/से.}$$

(ii) पिण्ड की अधिकतम गतिज ऊर्जा, $= \frac{1}{2} m v_{max}^2$

$$= \frac{1}{2} \times 0.50 \times (2)^2 = 1 \text{ जूल}$$

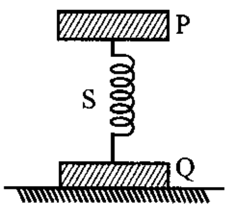
(iii) पिण्ड की सम्पूर्ण ऊर्जा = अधिकतम गतिज ऊर्जा = 1 जूल

(iv) आवर्त काल $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ या $T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$

बल नियतांक $k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$

$$= \frac{4 \times (3.14)^2 \times 0.50}{(1.57)^2} = 8 \text{ न्यूटन/मीटर}$$

उदा.58. दो पिण्ड P (द्रव्यमान 2 किग्रा) तथा Q (द्रव्यमान 1 किग्रा) एक स्प्रिंग S द्वारा एक दूसरे से दृढ़ता पूर्वक जुड़े हैं। स्प्रिंग का बल नियतांक 200 न्यूटन/मीटर है। P को 2 सेमी नीचे की ओर दबाकर छोड़ दिया जाता है। P के दोलन की आवृति एवं उसकी दोलन ऊर्जा ज्ञात कीजिए।



चित्र 8.36

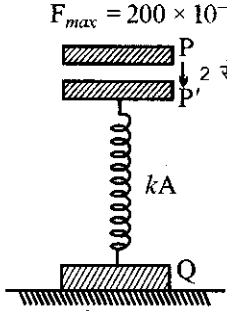
हल– P को A = 2 सेमी नीचे की ओर दबाने पर, Q पर ऊपर की ओर अधिकतम बल

$$F_{max} = kA$$

यहाँ $k = 200$ न्यूटन/मीटर

$A = 2$ सेमी. $= 2 \times 10^{-2}$ मीटर

$\therefore$ $F_{max} = 200 \times 10^{-2} = 4$ न्यूटन



चित्र 8.37

स्पष्टतः Q पर नीचे की ओर बल, ऊपर की ओर के प्रतिक्रिया बल से अधिक ही रहता है। अतः Q अपने स्थान से विस्थापित नहीं होगा। फलस्वरूप P (द्रव्यमान = 2 किग्रा) अकेला ही सरल आवर्त गति करेगा।

P के दोलनों की आवृति

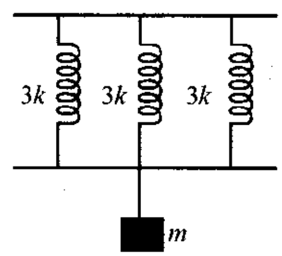
$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M_p}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{200}{2}}$$

$$= \frac{5}{\pi} \text{ हर्ट्ज}$$

दोलन ऊर्जा $E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \times 200 \times (2 \times 10^{-2})^2$

$$= 0.04 \text{ जूल}$$

उदा.59. किसी स्प्रिंग से लटकाये गये पिण्ड के दोलनों का आवर्तकाल T = 1.5 सेकण्ड है। यदि स्प्रिंग को तीन बराबर भागों में बांट दिया जाये, तो निम्न दशाओं में दोलनों का आवर्त काल कितना होगा-(i) स्प्रिंग के तीनों भागों को समान्तर क्रम में रखकर, उनसे उसी पिण्ड को लटका दिया जाये। (ii) स्प्रिंग के एक ही भाग से पिण्ड को लटका दिया जाये।



चित्र 8.38

हल– यदि l लम्बाई के स्प्रिंग का बल नियतांक k हो, तो $\frac{l}{n}$ लम्बाई के स्प्रिंग का बल नियतांक nk होता है

$$\left[\text{चूंकि बल नियतांक} \propto \frac{1}{\text{लम्बाई}}\right]$$

प्रारम्भिक स्थिति में, $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$ ...(1)

(i) जब स्प्रिंग को तीन भागों में बांटा जाता है, तो ($n = 3$), अतः प्रत्येक भाग का बल नियतांक $= 3k$ समान्तर क्रम में कुल नियतांक

$$k' = k_1 + k_2 + k_3 = 3k + 3k + 3k = 9k$$

आवर्त काल $T' = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$ ...(2)

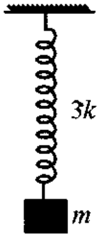
समीकरण (2) को (1) से भाग देने पर

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{k}{k'}} = \sqrt{\frac{k}{9k}} = \frac{1}{3}$$

प्रश्नानुसार T = 1.5 सेकण्ड

$\therefore$ $T = \frac{1.5}{3} = 0.5$ सेकण्ड

(ii)



चित्र 8.39

यदि एक ही भाग से पिण्ड लटकाया जाये, तो आवर्त काल

$$T'' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}} \qquad ...(3)$$

∴ समीकरण (3) को (1) से भाग देने पर

$$\frac{T''}{T} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

या
$$T = \frac{T}{\sqrt{3}} = \frac{1.5}{\sqrt{3}} = \frac{1.5\sqrt{3}}{3}$$

∴ $T'' = 0.866$ सेकण्ड

उदा.60. 100 तथा 1.1025 मीटर लम्बाई के दो लोलक एक साथ कम्पन प्रारम्भ करते हैं। कितने दोलनों के पश्चात् वह पुनः एक साथ दोलन करने लगेंगे।

हल– माना 1.00 मी तथा 1.025 मी लम्बाई के लोलकों के आवर्त काल क्रमशः T_1 व T_2 है। पुनः एक साथ दोलन करने के लिए दोनों के दोलनों में 1 का अन्तर होना चाहिए। यदि इतने समय अन्तराल में बड़ा लोलक n दोलन करता है, तो छोटे लोलक के दोलन $(n+1)$ होंगे अर्थात्

$$nT_2 = (n+1)T_1 \qquad ...(1)$$

प्रश्नानुसार
$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.00}{g}}$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.1025}{g}}$$

यह मान समीकरण (1) में रखने पर

$$n \cdot 2\pi\sqrt{\frac{1.1025}{g}} = (n+1)\cdot 2\pi\sqrt{\frac{1.00}{g}}$$

या
$$\frac{n}{(n+1)} = \sqrt{\frac{1.00}{1.1025}} = \frac{1}{1.05}$$

$$1.05n = n+1$$

$$n = \frac{1}{0.05} = 20$$

अर्थात् बड़े लोलक के 20 तथा छोटे लोलक के 21 दोलनों के पश्चात वे पुनः एक साथ दोलन करेंगे।

पाठ्यपुस्तक के प्रश्न

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. सरल आवर्त गति के लिये त्वरण तथा विस्थापन में क्या सम्बन्ध है?

उत्तर– त्वरण विस्थापन के समानुपाती होता है।
त्वरण = $-\omega^2$ × विस्थापन ⇒ $a = -\omega^2 \cdot y$
जहाँ ω, कोणीय आवृत्ति है।

प्र.2. सीमांत सिरे से सरल आवर्त गति प्रारम्भ करने वाले पिण्ड का प्रारम्भिक कला कोण कितना होता है?

उत्तर– प्रारंभिक कला कोण $\phi = \frac{\pi}{2}$

प्र.3. सरल आवर्त गति में विस्थापन का मान इसके त्वरण मान से कितने कला कोण से आगे होता है?

उत्तर– विस्थापन त्वरण से π कला कोण से आगे होता है।

प्र.4. सरल आवर्त गति में कौनसी भौतिक राशि संरक्षित रहती है?

उत्तर– स.आ.ग. में कुल यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित रहती है।

प्र.5. सरल लोलक की कुल ऊर्जा तथा दोलन आवृत्ति में क्या संबंध है ?

उत्तर– $E_{\text{कुल}} = \frac{1}{2}\, m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\, m(2\pi n)^2\, A^2 = 2\pi^2 \cdot mn^2 A^2$
जहाँ n आवृत्ति तथा A आयाम है।

प्र.6. यदि 0.1 kg के पिण्ड का आयाम 3cm तथा दोलन काल 2 s हो तो कुल यांत्रिक ऊर्जा का मान क्या होगा?

उत्तर–
$$E_{\text{कुल}} = 2\pi^2\, m \cdot n^2 A^2 = 2\pi^2 m \cdot \frac{1}{T^2} \cdot A^2 \quad \begin{cases} m = 0.1\,\text{kg} \\ T = 2\text{s} \\ A = 3\text{ cm} = 0.03\text{ m} \end{cases}$$

$$= 2 \times (3.14)^2 \times 0.1 \times \frac{1}{2\times 2} \times .03 \times .03$$

$$= 4.44 \times 10^{-4}\,\text{J}$$

प्र.7. कठोर स्प्रिंग के स्थान पर उतनी ही लम्बाई की मुलायम स्प्रिंग का उपयोग करने पर दोलन काल पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

उत्तर– दोलन काल के सूत्र $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ के अनुसार कठोर स्प्रिंग की जगह समान लम्बाई की मुलायम स्प्रिंग का उपयोग करने पर दोलन काल बढ़ जायेगा क्योंकि मुलायम स्प्रिंग के स्प्रिंग नियतांक k का मान कठोर स्प्रिंग की तुलना में कम होता है।

प्र.8. एक सरल लोलक के दोलन आयाम को उसके वर्तमान मान का आधा कर दिया जाये तो उसके आवर्तकाल

का मान कितना होगा?

उत्तर- आवर्तकाल आयाम पर निर्भर नहीं करता है, अत: आवर्तकाल का मान अपरिवर्तित रहेगा।

प्र.9. सरल आवर्त गति में विस्थापन एवं त्वरण के मध्य कितना कलान्तर होता है ?

उत्तर- सरल आवर्त्त गति में विस्थापन एवं त्वरण के मध्य कलान्तर $=180°$ या π रेडियन

प्र.10. सरल आवर्त गति कर रहे का त्वरण $a=-\left(\frac{P}{q}\right)x$ दिया गया है तब इस कण का आवर्तकाल क्या होगा?

उत्तर- $\because$ त्वरण $a=-\left(\frac{p}{q}\right)x=-\omega^2\cdot x$

$$\therefore \quad \omega=\sqrt{\frac{p}{q}} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{p}{q}}$$

या $$T=2\pi\sqrt{\frac{q}{p}}$$

प्र.11. सरल लोलक की कुल ऊर्जा E है। जिस क्षण पर लोलक का विस्थापन आयाम का आधा होता है, उस क्षण लोलक की गतिज ऊर्जा और स्थितिज ऊर्जा क्या होगी ?

उत्तर- $$E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

जब $$y=\frac{A}{2}$$

$$E_{गतिज}=\frac{1}{2}m\omega^2(A^2-y^2)=\frac{1}{2}m\omega^2\left[A^2-\left(\frac{A}{2}\right)^2\right]$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}m\omega^2A^2=\frac{3}{4}E$$

$$E_{स्थितिज}=E-\frac{3}{4}E=\frac{1}{4}E$$

प्र.12. सरल लोलक में प्रत्यानयन बल का मान लिखिये जबकि विस्थापन कोण θ कम हो।

उत्तर- प्रत्यानयन बल $F=mg\sin\theta$

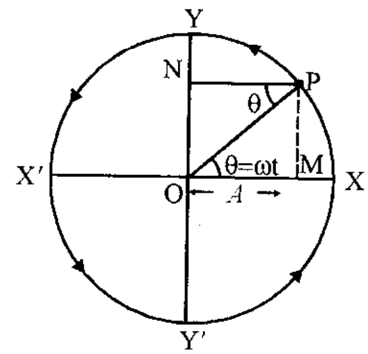
जब θ बहुत कम हो तो $\sin\theta=\theta$

तब $F=mg\theta$

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. सिद्ध करो कि एक समान वृतीय गति का प्रक्षेप सरल आवर्त्त गति होता है।

उत्तर- जब कोई कण O केन्द्र और A त्रिज्या के वृत्तीय मार्ग पर एक समान कोणीय चाल ω से गति करता है तो चित्रानुसार किसी समय t पर कण की स्थिति बिन्दु P पर होती है जो $\angle XOP=\theta=\omega t$ कोण पर है। कण बिन्दु P से वृत्त के व्यास YY' पर लम्ब डालते हैं तो वह YY' के बिन्दु N पर मिलता है। बिन्दु N लम्ब पाद कहलाता है तथा ON वृत्त के इस व्यास पर प्रक्षेप कहलाता है। कण की विभिन्न स्थितियों में पाद N एवं प्रक्षेप ON के मान निम्न तालिकानुसार होते हैं।



चित्र 8.39 (a)

कण बिन्दु P की स्थिति	लम्ब पाद N की स्थिति	प्रक्षेप ON का मान
X पर	O पर	0
Y पर	Y पर	+ A
X' पर	O पर	0
Y' पर	Y' पर	– A
X पर	O पर	0

अत: जब एक समान वृत्तीय गति एक पूर्ण चक्र में जारी रहती है तो वृत्त के व्यास YY' पर प्रक्षेप निम्न प्रकार बदलता है।

वृत्तीय गति के पथ का भाग	घूर्णन कोण $\theta=\omega t$	प्रक्षेप ON का मान
X से Y तक	0 से $\frac{\pi}{2}$ तक	0 से A तक बढ़ता है।
Y से X' तक	$\frac{\pi}{2}$ से π तक	A से 0 तक घटता है।
X' से Y' तक	π से $\frac{3\pi}{2}$ तक	0 से –A तक बढ़ता है।
Y' से X तक	$\frac{3\pi}{2}$ से 2π तक	–A से 0 तक घटता है।

इस प्रकार व्यास YY' पर प्रक्षेप ON समीकरण $y=A\sin\omega t$ के अनुसार सरल आवर्त्त गति में होता है तथा इसी तरह व्यास X'X पर भी प्रक्षेप व सरल आवर्त्त गति में होता है।

प्र.2. स. आ. गति के अभिलक्षण एवं समीकरण लिखिये।

उत्तर- **स.आ. गति के अभिलक्षण एवं समीकरण**

(a) रैखिक स.आ. गति के लिये

(i) यह सरल रेखा में साम्य स्थिति के इर्द-गिर्द होने वाली गति है।

(ii) इस गति में कण पर कार्यकारी प्रत्यानयन बल सदैव माध्य स्थिति की ओर लगता है तथा इसका मान कण के माध्य स्थिति से विस्थापन के समानुपाती होता है। अत: ये बल F विस्थापन y के समानुपाती एवं विपरीत दिशा में होता है।

∴ $F \propto -y$

या $F = -k.y$

यहाँ स्थिरांक k बल नियतांक कहलाता है।

(iii) प्रत्यानयन बल F के कारण m द्रव्यमान के कण में उत्पन्न त्वरण $a = \frac{F}{m}$ भी विस्थापन के समानुपाती तथा माध्य स्थिति की ओर इंगित होता है।

$$a \propto -y \text{ या } a = \frac{-k}{m} \cdot y$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2, \quad \text{जहाँ } \omega \text{ कोणीय आवृत्ति कहलाता है।}$$

$$\therefore \quad a = -\omega^2 \cdot y$$

(b) कोणीय स.आ. गति के लिये

(i) पिण्ड की वृत्तीय चाप में माध्य स्थिति के इर्द-गिर्द कोणीय दोलन गति होती है।

(ii) इस गति में पिण्ड पर कार्यकारी प्रत्यानयन बल आघूर्ण τ सदैव माध्य स्थिति की ओर लगता है तथा इसका मान पिण्ड के माध्य स्थिति से कोणीय विस्थापन के समानुपाती होता है। अत: ये बल आघूर्ण τ, कोणीय विस्थापन θ के समानुपाती एवं विपरीत दिशा में होता है।

∴ $\tau \propto -\theta$

या $\tau = -C \cdot \theta$ जहाँ C बल आघूर्ण नियतांक है।

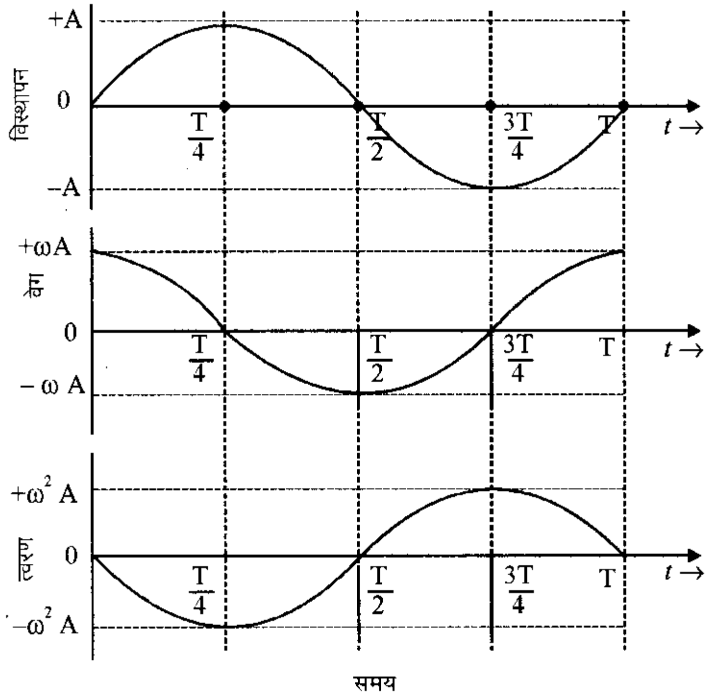
(iii) प्रत्यानयन बल आघूर्ण τ के कारण I जड़त्व आघूर्ण के पिण्ड में उत्पन्न कोणीय त्वरण $\alpha = \frac{\tau}{I}$ भी कोणीय विस्थापन के समानुपाती तथा माध्य स्थिति की ओर इंगित होता है। अर्थात् $\alpha \propto -\theta$

या $$\alpha = -\frac{C}{I} \cdot \theta$$

या $$\alpha = -\omega^2\theta \quad \text{जहाँ } \frac{C}{I} = \omega^2, \omega \text{ कोणीय आवृत्ति है।}$$

प्र.3. स. आ. गति में एक समय चक्र अवधि हेतु विस्थापन, वेग एवं त्वरण को ग्राफीय निरूपण कीजिये।

उत्तर-



चित्र 8.40

प्र.4. सिद्ध करो कि परवलयिक विभव कूप में कण स. आ. गति करता है।

उत्तर- **परवलयिक विभवकूप में कण की स.आ. गति**

यदि कोई कण स.आ. गति करता है तो उसकी अपनी माध्य स्थिति y = 0 से किसी दूरी y तक विस्थापित करने में किया गया कार्य ही स्थितिज ऊर्जा U के तुल्य होता है।

यदि कण को माध्य स्थिति से dy दूरी विस्थापित किया जाये तो किया गया कार्य $dW = F.dy$

अत: कण को y = 0 से y दूरी तक विस्थापित करने में कुल किया गया कार्य

$$W = \int_0^y F \cdot dy = -U$$

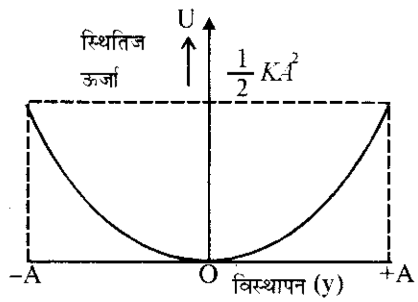
$$\therefore \quad U = -\int_0^y F \cdot dy \qquad \text{किन्तु } F = -ky$$

$$U = -\int_0^y (-k.y)dy = +k\int_0^y y \cdot dy$$

$$U = +k\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^y$$

$$U = \frac{1}{2}ky^2$$

उपरोक्त समी. से स्पष्ट है कि स्थितिज ऊर्जा U का विस्थापन y के साथ खींचा ग्राफ एक परवलयिक वक्र के रूप में प्राप्त होता है। इस ग्राफ के स्वरुप को ही परवलयिक विभव कूप कहते हैं।



चित्र 8.41

अत: विभव कूप की स्थितिज ऊर्जा $U = \frac{1}{2}ky^2$

तथा कण पर बल $F = -\frac{dU}{dy} = -\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}ky^2\right)$

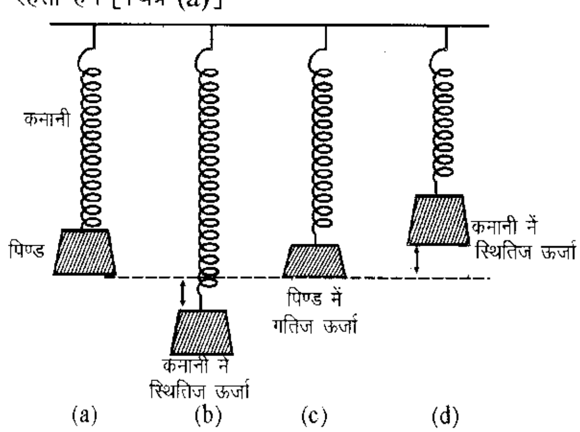
या $F = -\frac{1}{2}k \times 2y$

या $F = -ky$

अत: कण पर कार्यकारी बल विस्थापन के समानुपाती होता है और उसकी दिशा विस्थापन के विपरीत होती है। यही स.आ. गति का एक अभिलक्षण है। अत: परवलयिक विभव कूप में कण स.आ. गति करता है।

प्र.5. कमानी स्प्रिंग से लटके पिण्ड के दोलन में यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण को समझाइये।

उत्तर- यदि चित्रानुसार किसी दृढ़ आधार पर लटकी हुई कमानी के निचले सिरे पर एक पिण्ड बांध दिया जावे तो पिण्ड अपनी साम्य स्थिति में रहता है। [चित्र (a)]



चित्र 8.42

जब पिण्ड को थोड़ा नीचे खींचकर छोड़ देते हैं तो यह कमानी में बारी बारी से विसरण संपीड़न उत्पन्न करता हुआ ऊपर नीचे दोलन करने लगता है।

जब पिण्ड को नीचे खींचा जाता है तो चित्र (b) के अनुसार किया गया कार्य पिण्ड में स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है। अत: पिण्ड की इस निम्नतम स्थिति में कुल यांत्रिक ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा के रूप में कमानी में विद्यमान रहती है।

जब पिण्ड को खिंची हुई कमानी की अवस्था से छोड़ दिया जाता है तो पिण्ड अपनी साम्य स्थिति में लौटने लगता है अत: कमानी की स्थितिज ऊर्जा पिण्ड की गतिज ऊर्जा में बदलने लगती है तथा माध्य स्थिति में पिण्ड के पहुँचने पर संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा पिण्ड की गतिज ऊर्जा के रूप में विद्यमान रहती है। चित्र (c)

पिण्ड माध्य स्थिति में ठहरे बिना ही जड़त्व के कारण ऊपर की ओर जाने लगता है, जिससे कमानी दबती जाती है। पुन: पिण्ड की गतिज ऊर्जा कमानी की स्थितिज ऊर्जा में बदलती जाती है।

जैसे ही पिण्ड की उच्चतम स्थिति पहुँचती है इसकी गतिज ऊर्जा शून्य हो जाती है तथा कुल यांत्रिक ऊर्जा कमानी की स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाती है। [चित्र (d)]

इस प्रकार गतिज ऊर्जा एवं स्थितिज ऊर्जा का आपस में रुपान्तरण होता रहता है, किन्तु कुल यांत्रिक ऊर्जा प्रत्येक स्थिति में नियत बनी रहती है। अत: दोलन में कुल यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित बनी रहती है।

प्र.6. सरल लोलक के आवर्तकाल का सूत्र लिखिये। आवर्तकाल किन–किन कारकों से प्रभावित होता है?

उत्तर- **सरल लोलक के आवर्त्तकाल का सूत्र**

आवर्त्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

जहाँ ℓ सरल लोलक की प्रभावी लम्बाई तथा g गुरुत्वीय त्वरण है। यह आवर्त्तकाल निम्न कारकों पर निर्भर करता है।

(i) सरल लोलक की प्रभावी लम्बाई ℓ के वर्गमूल के समानुपाती होता है।

अर्थात् $T \propto \sqrt{\ell}$

(ii) गुरुत्वीय त्वरण g के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

अर्थात् $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$

किन्तु आवर्त्तकाल लोलक के द्रव्यमान m पर निर्भर नहीं करता है।

प्र.7. छोटी–छोटी एक जैसी कई स्प्रिंगों को (i) श्रेणी क्रम (ii) समान्तर क्रम में संयोजित करने पर स्प्रिंग नियतांक का मान किस प्रकार प्रभावित होता है ?

उत्तर- (i) यदि छोटी छोटी एक जैसी कई (n) स्प्रिंगों को श्रेणीक्रम में संयोजित कर m द्रव्यमान को y दूरी विस्थापित करने के लिये संयोजन के निचले सिरे से लटकाया जाय तो प्रत्येक पर समान प्रत्यानयन बल F उत्पन्न होगा। एक जैसी स्प्रिंग होने के कारण प्रत्येक का बल नियतांक K समान होगा और प्रत्येक का विस्थापन y' भी समान होगा।

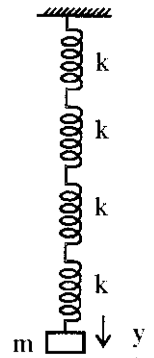
अत: प्रत्येक स्प्रिंग के लिये $F = -Ky'$

$$\therefore \quad y' = -\frac{F}{K} \qquad ...(1)$$

यदि संयोजन का प्रभावी बल नियतांक K_e हो तो कुल विस्थापन y के लिये,

$$F = -K_e \cdot y$$

$$\therefore \quad y = -\frac{F}{K_e} \quad \ldots(2)$$



चित्र 8.43

$\because$ कुल विस्थापन y पृथक्-पृथक् छोटी एक जैसी सभी n स्प्रिंगों के विस्थापनों का योग होगा।

$$\therefore \quad y = y' + y' + y' + \ldots\ldots \quad (\text{n बार})$$

या $\quad y = n \cdot y'$

समी. (1) व (2) से मान रखने पर,

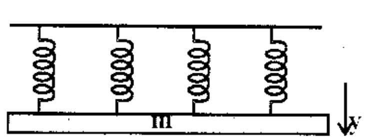
$$-\frac{F}{K_e} = n \cdot \left(-\frac{F}{K}\right)$$

या $\quad K_e = \frac{K}{n} \quad \ldots(3)$

$\therefore$ प्रभावी बल स्थिरांक = $\dfrac{\text{प्रत्येक एक समान छोटी स्प्रिंग का बल नियतांक}}{\text{संयोजन में जोड़ी स्प्रिंगों की संख्या}}$

(ii) यदि छोटी-छोटी एक जैसी कई n स्प्रिंगों को समान्तर क्रम में जोड़कर उनके निचले सिरों पर उभयनिष्ठ द्रव्यमान m लटकाया जावे तथा द्रव्यमान m को विस्थापन y देकर छोड़ा जावे तो यह सभी स्प्रिंगों के सम्मिलित प्रभाव में दोलन करेगा।

जब द्रव्यमान m को y दूरी से ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर विस्थापित करते हैं तो सभी स्प्रिंगों की लम्बाई में समान परिवर्तन y होता है। एक जैसी प्रत्येक स्प्रिंग का बल नियतांक K समान होगा, अत: उनमें समान प्रत्यानयन बल कार्यकारी होगा।



चित्र 8.44

$$F = -Ky \quad \ldots(4)$$

यदि द्रव्यमान m पर परिणामी प्रत्यानयन बल F_e तथा प्रभावी बल स्थिरांक K_e हो तो,

$$F_e = -K_e \cdot y \quad \ldots(5)$$

किन्तु परिणामी प्रत्यानयन बल

$$F_e = F + F + F + \ldots\ldots (\text{n बार})$$

या $\quad F_e = n \cdot F$

समी. (4) व (5) से मान रखने पर,

$$-K_e \cdot y = n(-Ky)$$

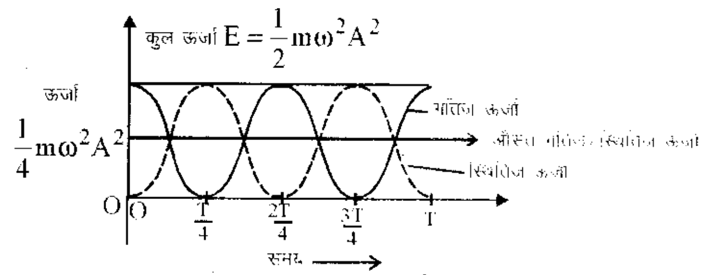
या $\quad K_e = nK \quad \ldots(6)$

अत: स्प्रिंगों के समान्तर क्रम संयोजन में प्रभावी बल नियतांक उन सभी छोटी-छोटी एक जैसी स्प्रिंगों के एक जैसे बल नियतांकों का योग होता है।

$\therefore$ प्रभावी बल स्थिरांक = $\begin{pmatrix}\text{संयोजन में जोड़ी गई} \\ \text{एक जैसी स्प्रिंगों की संख्या}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{प्रत्येक छोटी स्प्रिंग} \\ \text{का बल नियतांक}\end{pmatrix}$

प्र.8. औसत गतिज ऊर्जा या स्थितिज ऊर्जा प्रति दोलन का ग्राफीय निरूपण कीजिये।

उत्तर-



चित्र 8.45

प्र.9. सरल लोलक के लिये गोलक को गोलाकार ही क्यों चुना जाता है ?

उत्तर- (i) लोलक की प्रभावी लम्बाई l का मान शुद्धता से ज्ञात करने के लिये गुरुत्वकेन्द्र की स्थिति यथार्थता से ज्ञात होनी चाहिये। गोलाकार वस्तुओं का गुरुत्व केन्द्र ठीक उस के केन्द्र पर होता है अत: गोलक को गोलाकार लिया जाता है।

(ii) गोलाकार वस्तु के पृष्ठ का क्षेत्रफल न्यूनतम होता है, अत: उस पर वायु का घर्षण भी न्यूनतम लगता है। अत: गोलक के गोल होने के कारण दोलन अधिक समय तक होते रहते हैं।

प्र.10. पुल पार करते समय कदम मिलाकर चलते सैनिकों से कदम तोड़कर चलने को क्यों कहा जाता है ?

उत्तर- यदि सैनिक कदम से कदम मिलाकर पुल से गुजरेंगे तो उनकी कदम ताल के कारण उत्पन्न आवृत्ति पुल की प्रकृत आवृत्ति के बराबर हो सकती है। और यदि ऐसा हुआ तो अनुनाद की घटना के फलस्वरुप पुल उच्च आयाम से दोलन कर सकता है और पुल को भारी क्षति पहुँच सकती है व पुल गिर भी सकता है।

प्र.11. अवमंदित दोलन से आप क्या समझते हैं ?

उत्तर- किसी पिण्ड के वे दोलन जो प्रतिरोधी बल (द्रव श्यानता बल, वायुघर्षण बल आदि) की उपस्थिति में होने से उनका आयाम

लगातार घटता जाता है, अवमंदित दोलन कहलाते हैं।

निबन्धात्मक प्रश्न

प्र.1. आवर्त गति तथा सरल आवर्त गति में अन्तर स्पष्ट कीजिये। सरल आवर्त गति के अभिलक्षण बताइये। उदाहरण सहित अवकल समीकरण भी लिखिये।

उत्तर- अनुच्छेद 8.2, 8.3 तथा 8.5 पर देखें।

प्र.2. सिद्ध करो कि नियत कोणीय चाल ω से A त्रिज्या वाले वृतीय पथ में परिक्रमण करने वाले कण का लम्ब पाद बिन्दु, सरल आवर्त गति करता है। इस गति का समीकरण भी लिखिये।

उत्तर- अनुच्छेद 8.3 पर देखें।

प्र.3. सरल आवर्त गति में कण की स्थितिज ऊर्जा, गतिज ऊर्जा एवं कुल ऊर्जा के व्यंजक प्राप्त कर यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण की पुष्टि कीजिये।

उत्तर- अनुच्छेद 8.8 पर देखें।

प्र.5. किसी सरल आवर्त दोलक के लिये प्रति दोलनकाल औसत गतिज ऊर्जा, प्रति दोलनकाल औसत स्थितिज ऊर्जा के व्यंजक प्राप्त कर प्रति दोलन गतिज ऊर्जा, प्रति दोलन स्थितिज ऊर्जा तथा इनके औसत मानों को आलेखित कीजिये।

उत्तर- अनुच्छेद 8.8 पर देखें।

प्र.6. सरल लोलक क्या है ? अल्प विस्थापन के लिये इसकी गति की विवेचना कीजिये। आवर्त काल के सूत्र का निगमन कीजिये, यह किन-किन राशियों पर निर्भर करता है?

उत्तर- अनुच्छेद 8.9 (ii) पर देखें।

प्र.7. स्प्रिंगों के श्रेणीक्रम तथा समान्तर क्रम संयोजन में क्या अन्तर है ? प्रत्येक संयोजन में प्रभावी स्प्रिंग नियतांक का व्यंजक प्राप्त कीजिये।

उत्तर- अनुच्छेद 8.10 पर देखें।

प्र.8. मुक्त, अवमंदित तथा प्रणोदित दोलनों को उदाहरण सहित समझाते हुये अनुनाद की विवेचना कीजिये।

उत्तर- बिन्दु मुक्त दोलन तथा अनुच्छेद 8.11, 8.12 व 8.13 पर देखें।

आंकिक प्रश्न

प्र.1. कोई पिण्ड निम्नलिखित समीकरण के अनुसार सरल आवर्त गति से दोलन करता है

$$x = 5.0\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\text{m}$$

$t = 1.5\ s$ पर पिण्ड का (i) विस्थापन (ii) वेग (iii) त्वरण ज्ञात कीजिये।

हल- पिण्ड की सरल आवर्त्त गति से दोलन करने का दिया हुआ समीकरण

$$x = 5.0\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\text{m} \quad \ldots(1)$$

(i) $t = 1.5s$ पर पिण्ड का विस्थापन,

$$(x)_{t=1.5s} = 5.0\cos\left(2\pi \times 1.5 + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 5.0\cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 5\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 5\left\{-\cos\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$= 5 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -5 \times 0.7072$$

$$= (x)_{t=1.5s} = 3.5360\ \text{m}$$

(ii) समी. (1) का t के सापेक्ष अवकलन करने पर

वेग $$v = \frac{dx}{dt} = -5.0 \times 2\pi\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \quad v = -10\pi\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \ldots(2)$$

$t = 1.5s$ पर पिण्ड का वेग

$$(v)_{t=1.5s} = -10\pi\sin\left(2\pi \times 1.5 + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -10\pi\sin\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -10\pi\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= +10\pi\sin\frac{\pi}{4} = 10\pi \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 10 \times 3.14 \times 0.7072$$

$$\therefore \quad (v)_{t=1.5s} = 22.20\ \text{m/s}$$

(iii) समी. (2) का t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

त्वरण $$a = \frac{dv}{dt} = -10\pi \times 2\pi\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

या $$a = -20\pi^2\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(a)_{t=1.5s} = -20\pi^2\cos\left(2\pi \times 1.5 + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -20\pi^2\cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -20\pi^2\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= +20\,\pi^2 \times \cos\frac{\pi}{4}$$

$$= 20 \times 9.8596 \times 0.7072$$

$$(a)_{t=1.5s} = 139.45 \text{ m/s}^2$$

प्र.2. सरल आवर्त गति करते हुए पिण्ड का आवर्तकाल 2 s है। $t = 0$ समय से प्रारम्भ होकर कितने समय पश्चात इसका विस्थापन, आयाम के बराबर होगा ?

हल- आवर्त्तकाल $T = 2s$

$t = 0$ समय से प्रारम्भ स.आ. गति करते पिण्ड का विस्थापन समी.

$$y = A\sin\omega t$$

या $$y = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$$

माना कि समय t बाद विस्थापन y = आयाम A

$\therefore$ $$A = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$$

या $$\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) = 1$$

या $$\sin\left(\frac{2\pi}{2}\cdot t\right) = \sin\frac{\pi}{2} \qquad (\because T = 2s)$$

$$\pi t = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore$ $$t = \frac{1}{2}s$$

प्र.3. सरल आवर्त गति कर रहे एक कण का अधिकतम वेग 8 cm/s है और माध्य स्थिति से 4 cm दूरी पर त्वरण 16 cm/s² है। आवर्तकाल एवं आयाम ज्ञात करें।

हल- अधिकतम वेग $v_{max} = \omega\cdot A = 8$ cm/s

माध्य स्थिति से विस्थापन $y = 4$ cm

पर त्वरण $a = \omega^2\cdot y = 16$ cm/s²

कण का आवर्त्तकाल $T = ?$

कण का आयाम $A = ?$

$$v_{max} = \omega\cdot A = \frac{2\pi}{T}\cdot A = 8 \text{ m/s} \qquad \ldots(1)$$

$$a = \omega^2\cdot y = \frac{4\pi^2}{T^2}\times 4 = 16 \text{ cm/s}^2$$

या $$\frac{\pi^2}{T^2} = 1$$

या $$\frac{\pi}{T} = 1$$

$\therefore$ $$T = \pi = 3.14s$$

समी. (1) में T का मान रखने पर,

$$\frac{2\pi a}{T} = \frac{2\times 3.14}{3.14}a = 8$$

$\therefore$ $$a = 4 \text{ cm}$$

प्र.4. एक कण की सरल आवर्त गति में विस्थापन मध्यमान अवस्था से 4 cm एवं 5 cm पर वेग के मान क्रमशः 10 cm/s तथा 8 cm/s होते है। कण का आवर्तकाल ज्ञात कीजिये।

हल- $x = 4$cm पर वेग $v_1 = 10$ cm/s

$x_2 = 5$cm पर वेग $v_2 = 8$ cm/s

कण का आवर्त्तकाल $T = ?$

$\because$ $$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow v^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$$

$\therefore$ $$v_1^2 = \omega^2(A^2 - x_1^2)$$

तथा $$v_2^2 = \omega^2(A^2 - x_2^2)$$

$\therefore$ $$v_1^2 - v_2^2 = \omega^2(x_2^2 - x_1^2)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2}}$$

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2}}$$

$\therefore$ $$T = 2\pi\sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{(5)^2 - (4)^2}{10^2 - 8^2}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{9}{36}} = 2\pi\times\frac{1}{2} = \pi$$

$\therefore$ $$T = 3.14s$$

प्र.5. एक कण सरल आवर्त गति कर रहा है। इसका अधिकतम वेग 3 m/s तथा गति का आयाम 0.2 m है। गति का आवर्त काल ज्ञात कीजिये।

हल- अधिकतम वेग $v_{max} = \omega A = \frac{2\pi}{T}\cdot A = 3$ m/s $\qquad\ldots(1)$

आयाम $A = 0.2$ m

A का मान समी. (1) में रखने पर

$$\frac{2\pi}{T}\times 0.2 = 3$$

$$T = \frac{2\times 0.2\pi}{3} = \frac{0.4\times 3.14}{3} = \frac{1.256}{3}$$

$$T = 0.419s$$

$\therefore$ $T = 0.42s$

प्र.6. 1 kg संहति के किसी गुटके को एक कमानी से बाँधा गया है। कमानी स्थिरांक 50 N/m है। गुटके को उसकी साम्यावस्था की स्थिति $x = 0$ से $t = 0$ पर किसी घर्षणहीन पृष्ठ पर कुछ दूरी $x = 10$ cm तक खींचा जाता है। गुटका अपनी माध्य स्थिति 5 cm. दूर है। तब उसकी गतिज, स्थितिज तथा कुल ऊर्जा के मान की गणना कीजिये।

हल- गुटके का द्रव्यमान $m = 1kg$

कमानी का स्थिरांक $k = 50$ N/m

आयाम $A = 10$ cm $= 0.10$ m

माध्य स्थिति से विस्थापन $y = 5cm = 0.05$ m

गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}k(A^2 - y^2)$

या $K = \frac{1}{2} \times 50[0.10^2 - 0.05^2]$

या $K = 25[0.0100 - 0.0025]$

या $K = 25 \times 0.0075$

या $K = 0.1875J$

$\therefore$ $K = 0.19$ J

स्थितिज ऊर्जा $U = \frac{1}{2}ky^2$

या $U = \frac{1}{2} \times 50 \times (0.05)^2 = 25 \times 0.0025$

$\therefore$ $U = 0.0625$ J

कुल ऊर्जा $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \times 50 \times (0.10)^2$

$E = 25 \times .0100$

$E = 0.2500J$

प्र.7. एक सरल आवर्त दोलक का आवर्तकाल 6 s है। साम्य स्थिति से गति प्रारम्भ करने वाले दोलक के लिये कितने समय पश्चात उसका विस्थापन उसके आयाम का आधा होगा ?

हल- आवर्त्तकाल $T = 6s$

साम्य स्थिति से गति प्रारम्भ करने वाले दोलक के लिये, विस्थापन,

$$y = A \sin \omega t$$

या $y = A \sin \frac{2\pi}{T} \cdot t$

प्रश्नानुसार जब विस्थापन $y = \frac{A}{2}$

तब $\frac{A}{2} = A \sin \frac{2\pi}{T} \cdot t$

$$\frac{1}{2} = \sin \frac{2\pi}{6} \cdot t = \sin \frac{\pi . t}{3} \quad \left(\because \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\right)$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi t}{3}$$

$\therefore$ $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi t}{3}$

$\therefore$ $t = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}s$

$\therefore$ $\frac{1}{2}$s पश्चात् उसका विस्थापन आयाम का आधा होगा।

प्र.8. 9.0 J कुल ऊर्जा वाले सरल दोलक की किसी क्षण स्थितिज ऊर्जा 5 J है। दोलक का आयाम 0.01 m हो तो इस 2 kg द्रव्यमान वाले दोलक का आवर्तकाल ज्ञात कीजिये।

हल- कुल ऊर्जा $E = 9.0$ J

स्थितिज ऊर्जा $U = 5J$

आयाम $A = 0.01$ m

द्रव्यमान $m = 2kg$

आवर्तकाल $T = ?$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot A^2$$

या $E = \frac{2\pi^2 mA^2}{T^2}$

$\therefore$ $T = \pi A\sqrt{\frac{2m}{E}}$

या $T = 3.14 \times 0.01\sqrt{\frac{2 \times 2}{9}}$

या $T = 3.14 \times 0.01 \times \frac{2}{3} = \frac{0.0628}{3}$

या $T = 0.0209s$

$\therefore$ $T = 0.021s$

प्र.9. यदि चन्द्रमा पर गुरूत्वीय त्वरण का मान पृथ्वी पर गुरूत्वीय त्वरण मान का छठा भाग है तो चन्द्रमा पर उसी सरल लोलक का आवर्तकाल कितना गुना होगा?

हल- दिया है,

$$g_{\text{चन्द्रमा}} = \frac{1}{6}\, g_{\text{पृथ्वी}}$$

$$T_{चन्द्रमा} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{चन्द्रमा}}} \text{ तथा } T_{पृथ्वी} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{पृथ्वी}}}$$

या $$T_{चन्द्रमा} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\frac{1}{6}g_{पृथ्वी}}}$$

या $$T_{चन्द्रमा} = 2\pi\sqrt{6\cdot\frac{\ell}{g_{पृथ्वी}}}$$

$$T_{चन्द्रमा} = \sqrt{6}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{पृथ्वी}}}$$

$\therefore$ $$T_{चन्द्रमा} = \sqrt{6}\cdot T_{पृथ्वी}$$

प्र.10. एक सरल लोलक के गोलक का द्रव्यमान 0.025 kg है। इसकी डोरी की प्रभावी लम्बाई 1 m है तथा इसका आवर्तकाल 2.0 s है। गुरूत्वीय त्वरण g का मान ज्ञात करो।

हल- लोलक की प्रभावी लम्बाई $\ell = 1\text{m}$

आवर्त्तकाल $T = 2.0\text{s}$

$\because$ $$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2\frac{\ell}{g}$$

$\therefore$ $$g = 4\pi^2\frac{\ell}{T^2} = \frac{4\times(3.14)^2\times 1}{2\times 2}$$

$$g = 9.8596$$
$$g = 9.86\ \text{m/s}^2$$

प्र.11. एक सेकण्ड लोलक की लम्बाई, (जहाँ $g = 9.8\ \text{m/s}^2$) 1m है। किसी ग्रह पर जहाँ $g = 9.8\text{m/s}^2$ है, सेकण्ड लोलक की लम्बाई क्या होगी ?

हल- $g_1 = 9.8\ \text{m/s}^2$, $\quad g_2 = 4.9\ \text{m/s}^2$

$\ell_1 = 1\text{m} \quad \ell_2 = ?$

सेकण्ड लोलक के लिये T = 2s,

$$g = 4\pi^2\frac{\ell}{T^2} = 4\pi^2\frac{\ell}{2^2}$$

$\therefore$ $$g = \pi^2\ell$$

$\therefore$ $$g \propto \ell$$

$\therefore$ $$\frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{g_2}{g_1}$$

$\therefore$ $$\ell_2 = \frac{g_2}{g_1}\times\ell_1 = \frac{4.9\times 1}{9.8}\text{ m}$$

$$\ell_2 = 0.5\text{m}$$

प्र.12. सरल आवर्त गति करते हुए पिण्ड की किस स्थिति में वेग, अधिकतम वेग का आधा होता है ?

हल- $y = ?$ जब $\quad v = \frac{v_{max}}{2}$

$$\omega\sqrt{A^2 - y^2} = \frac{1}{2}\omega\cdot A \qquad (\because v_{max} = \omega A)$$

$$A^2 - y^2 = \frac{1}{4}A^2$$
$$4A^2 - A^2 = 4y^2$$
$$3A^2 = 4y^2$$

$$y = \sqrt{\frac{3A^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}A$$

प्र.13. निम्न स्थिति से सरल लोलक के आवर्तकाल में प्रतिशत परिवर्तन का मान ज्ञात कीजिये

(i) लोलक की लम्बाई 5% बढ़ने पर

(ii) लोलक की द्रव्यमान 5% बढ़ने पर

(iii) लोलक की आयाम 5% बढ़ने पर

हल- (i) $$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

प्रश्नानुसार लोलक की लम्बाई 5% बढ़ने पर

नवीन लम्बाई $$\ell' = \left(\frac{100+5}{100}\right)\cdot\ell = \frac{105}{100}\ell$$

$$\ell' = 1.05\ell$$

तब आवर्त्तकाल $$T' = 2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}}$$

$$T' = 2\pi\sqrt{1.05\frac{\ell}{g}} = \sqrt{1.05}\times 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$T' = 1.0247\,T$$
$$T' \simeq 1.025T$$

$\therefore$ आवर्त्तकाल में % वृद्धि $= \frac{(T'-T)}{T}\times 100$

$$= \frac{(1.025-1)T}{T}\times 100 = 2.5\%$$

(ii) लोलक का द्रव्यमान 5% बढ़ने पर,

हम जानते है कि लोलक का आवर्त्तकाल द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है, अत: आवर्त्तकाल अपरिवर्तित रहेगा अर्थात् समान पहले जैसा बना रहेगा।

(iii) लोलक की आयाम 5% बढ़ने पर,

हम जानते हैं कि लोलक का आवर्त्तकाल आयाम पर भी निर्भर नहीं करता है, अत: आवर्त्तकाल समान पहले जैसा बना रहेगा।

प्र.14. एक आदर्श स्प्रिंग से 0.5 kg द्रव्यमान के पिण्ड को

लटकाकर उर्ध्व दोलन कराये जाते है। दोलन काल $\pi / 2$ s है तो स्प्रिंग नियतांक का मान ज्ञात कीजिये।

हल- द्रव्यमान $m = 0.5$ kg

दोलन काल $T = \frac{\pi}{2}$ s

स्प्रिंग नियतांक $k = ?$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$$

$$\therefore \quad k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4 \times (3.14)^2 \times 0.5}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

$$k = 16 \times \frac{(3.14)^2 \times 0.5}{(3.14)^2} = 16 \times 0.5$$

$$k = 8 \text{ N/m}$$