तरंग गति (WAVE MOTION)

9 CHAPTER

9.1 प्रस्तावना (Introduction)

हमने अपने वातावरण में बहुत सी घटनाओं को देखा है। जैसे कि तालाब अथवा झील की सतह पर लहरें। इनकी शांत सतह पर पत्थर फेंकने पर विक्षोभ (Disturbancc) उत्पन्न होता है। यदि इसी स्थान पर कागज का टुकड़ा डाले तो यह कागज विक्षोभ के साथ गति करता है अर्थात्

"किसी माध्यम में उत्पन्न एक प्रकार का विक्षोभ (disturbance) जो अपना रूप, नहीं बदलता है तथा एक निश्चित वेग से आगे बढ़ता जाता है, तरंग (wave) कहलाता है।"

ऊर्जा संचरण की वह विधि जिसमें विक्षोभ माध्यम को प्रभावित करता हुआ बिना द्रव्य के स्थानान्तरण के आगे बढ़ता है तरंग गति (wave motion) कहलाता है। तरंग में एक स्थान से दूसरे स्थान तक ऊर्जा स्थानान्तरित होती है न कि द्रव्य।

तरंग गति में माध्यम के कण अपना स्थान नहीं छोड़ते तथा साम्यावस्था के इर्द-गिर्द कंपन करते रहते है माध्यम में उर्जा तथा संवेग में परिवर्तन होता है व माध्यम के कणों की कला सतत् रूप से परिवर्तित होती रहती है।

तरंग गति के विशिष्ट गुण

(i) तरंग माध्यम के कणों के सतत् रूप से आवर्ती गति द्वारा उत्पन्न विक्षोभ है जो माध्यम में संचरित होता है।

(ii) जब तरंग माध्यम में संचरित होती है तब माध्यम के कण अपनी साम्यावस्था के इर्द-गिर्द कम्पन करते रहते हैं।

(iii) तरंग संचरण में माध्यम के कणों के कम्पन्न के कारण ऊर्जा एक कण से दूसरे कण को स्थानान्तरित हो जाती है। एक पूर्ण आवर्तकाल में कण का परिणामी विस्थापन शून्य होता है।

(iv) प्रत्येक कण की कला अपने से पूर्व कण की कला से पीछे रहती है।

(v) तरंग वेग तथा कण का वेग दोनों भिन्न-भिन्न होते हैं।

(vi) तरंग माध्यम की सीमा पर पहुँचकर परावर्तित या अपवर्तित हो सकती है।

(vii) तरंगों में व्यतिकरण तथा विवर्तन का गुणधर्म होता है।

(viii) माध्यम के कणों में गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा दोनों उपस्थित होती है।

तरंग संचरण के लिए माध्यम में आवश्यक गुण

(a) माध्यम में अवस्था परिवर्तन का विरोध करने वाला अर्थात् जड़त्व का गुण होना चाहिए।

(b) माध्यम में बल लगाते ही विस्थापित होने तथा बल को हटाने पर प्रारंभिक अवस्था में आ जाने का अर्थात् प्रत्यास्थता का गुण होना चाहिए।

(c) माध्यम का प्रतिरोध कम से कम होना चाहिए।

तरंगों के प्रकार (Types of Waves)

माध्यम की आवश्यकता के आधार पर

माध्यम की आवश्यकता के आधार पर तरंगें दो प्रकार की होती हैं–

(i) यांत्रिक या प्रत्यास्थ तरंगें (Mechanical or Elastic wave)–वे तरंगें जिन्हें एक स्थान से दूसरे स्थान की ओर संचरण करने के लिए माध्यम की आवश्यकता होती है, यांत्रिक या प्रत्यास्थ तरंगें कहलाती हैं। यांत्रिक तरंगों का संचरण माध्यम के प्रत्यास्थता गुणों पर निर्भर करता है।

उदाहरण–ध्वनि तरंगें, तनी हुई डोरी में उत्पन्न तरंगें, जल तरंगें, भूकंपी तरंगें आदि।

इन सभी यांत्रिक तरंगों के कुछ प्रमुख लक्षण होते हैं–

ये तरंगें न्यूटन के गति के नियमों द्वारा संनियमित होती हैं तथा ये केवल द्रव्यात्मक माध्यमों जैसे-जल, वायु तथा चट्टानों में ही पाई जा सकती है।

यांत्रिक तरंगें दो प्रकार की होती हैं–

(a) अनुदैर्ध्य तरंगें (b) अनुप्रस्थ तरंगें

(ii) विद्युत चुम्बकीय तरंगें (Electromagnetic waves)–इनके संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता नहीं होती है। इन तरंगों का निर्वात् में भी संचरण संभव है। जैसे प्रकाश तरंगें, रेडियो तरंगें आदि।

इनके अतिरिक्त हमारे सम्पर्क में आने वाली द्रव्य तरंगें भी हैं। द्रव्य तरंगें गतिशील इलेक्ट्रॉनों, प्रोटॉनों, न्यूट्रॉनों तथा अन्य मूल कणों, यहाँ तक कि परमाणुओं तथा अणुओं से सम्बद्ध होती है। इलेक्ट्रॉन से सम्बद्ध द्रव्य तरंगों का उपयोग इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी में किया जाता है।

ऊर्जा संचरण के आधार पर

(a) प्रगामी तरंगें (Progressive waves)–वे तरंगें जो माध्यम में निश्चित वेग से आगे बढ़ती है तथा जिनके द्वारा ऊर्जा का स्थानान्तरण होता है, प्रगामी तरंगें कहलाती है। इन तरंगों में सभी कण एक के बाद एक अपनी साम्य स्थिति या अधिकतम विस्थापन की स्थिति में होते हैं।

चाहे वह अनुप्रस्थ हो अथवा अनुदैर्ध्य। दोनों ही अवस्थाओं में तरंग अथवा विक्षोभ ही एक सिरे से दूसरे सिरे तक गमन करता है। वह द्रव्य जिससे तरंग संचरित होती है। गति नहीं करता है।

(b) अप्रगामी तरंगें (Stationary waves)–वे तरंगें जो माध्यम में आगे नहीं बढ़ती बल्कि माध्यम की दो सीमाओं के मध्य स्थिर रहती है, अप्रगामी तरंगें कहलाती हैं। इन तरंगों में ऊर्जा का स्थानान्तरण नहीं होता है तथा सभी कण अपनी साम्य स्थिति या अधिकतम विस्थापन की स्थिति में एक साथ होते हैं।

विमा के आधार पर

(a) एक विमीय तरंगें (One dimensional waves)–इसमें उर्जा का स्थानान्तरण केवल एक ही अक्ष या दिशा के अनुदिश होता है जैसे तनी हुई डोरी में तरंगे।

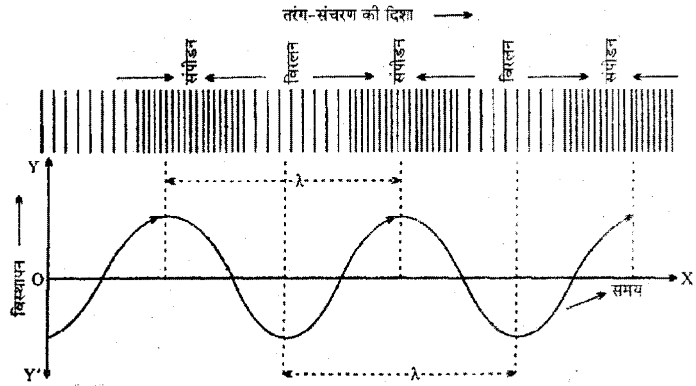
(b) द्विविमीय तरंगें (Two Dimensional waves)–इसमें उर्जा का स्थानान्तरण एक तल में होता है जैसे जल के पृष्ठ पर पत्थर डालने से उत्पन्न तरंगें।

(c) त्रिविमीय तरंगें (Three Dimensional waves)–इसमें ऊर्जा का स्थानान्तरण मुक्त आकाश में होता है जैसे आकाश में संचरित ध्वनि व प्रकाश तरंगे।

इस विभाजन के अतिरिक्त प्रघाती तरंगें (shock wave) जिनका वेग ध्वनि के वेग से अधिक होता है। पराश्रव्य तरंगें (ultrasonic) जिनकी आवृत्ति ध्वनि की आवृत्ति से अधिक होती है।

9.2 अनुदैर्ध्य तरंगें (Longitudinal Waves)

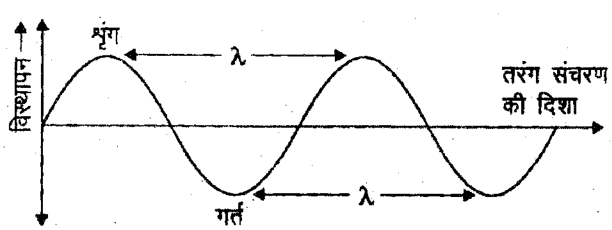
इन तरंगों में माध्यम के कण तरंग संचरण की दिशा में कंपन करते है तथा संचरण संपीडन तथा विरलन के रूप में होता है। माध्यम के संपीडन के स्थान पर माध्यम का घनत्व तथा दाब अधिक व विरलन पर माध्यम का घनत्व तथा दाब कम होता है। उदाहरण–वायु में संचरित ध्वनि तरंगें, जल के भीतर संचरित तरंगें आदि।



चित्र 9.1 : अनुदैर्ध्य तरंग का ग्राफीय निरूपण

9.3 अनुप्रस्थ तरंगें (Transverse Waves)

इन तरंगों में माध्यम के कण तरंग संचरण की दिशा के लम्बवत् कंपन करते है। अनुप्रस्थ तरंग में ऊपर की ओर अधिकतम विस्थापन की स्थिति को श्रृंग (crest) तथा नीचे की ओर अधिकतम विस्थापन को गर्त (Trough) कहते है। उदाहरण–तनी हुई डोरी में संचरित तरंगे, जल के पृष्ठ पर संचरित तरंगें आदि।



चित्र 9.2

(A) अनुप्रस्थ तरंगों का संचरण केवल उन्हीं माध्यमों में हो सकता है जिनमें अपरुपण प्रत्यास्थता गुणांक हो जैसे ठोसों एवं डोरियों में। जबकि तरलों में यह संचरण नहीं हो सकता।

(B) अनुदैर्ध्य तरंगों को आयतन प्रत्यास्थता गुणांक की आवश्यकता होती है अत: अनुदैर्ध्य तरंगों का संचरण सभी प्रत्यास्थ माध्यमों में कराया जा सकता है। अत: ये तरंगे सभी माध्यमों ठोस, द्रव तथा गैस में संभव होती है।

उदाहरण के लिए, स्टील की छड़ जैसे माध्यमों में अनुप्रस्थ एवं अनुदैर्ध्य दोनों प्रकार की तरंगे संचरित हो सकती है जबकि वायु में केवल अनुदैर्ध्य यांत्रिक तरंगों का ही संचरण संभव है।

(C) जल के पृष्ठ पर दो प्रकार की तरंगें होती है– केशिकात्वीय (पृष्ठ तनावी) तरंगें तथा गुरुत्व तरंगें।

इन तरंगों में कणों के दोलन पृष्ठ तक ही सीमित नहीं रहते बल्कि इनका विस्तार घटते आयाम के साथ तली तक होता है। समुद्र में उत्पन्न तरंगें अनुप्रस्थ तरंगों तथा अनुदैर्ध्य तरंगों का एक संयोजन होती है।

(D) एक ही माध्यम में अनुप्रस्थ तरंगों तथा अनुदैर्ध्य तरंगों की चालें भिन्न-भिन्न होती हैं।

उदा.1. नीचे तरंग गति के कुछ उदाहरण दिए गए हैं, प्रत्येक स्थिति में यह बताइए कि क्या तरंग गति अनुप्रस्थ है, अनुदैर्ध्य है अथवा दोनों का संयोजन है।

(a) किसी लंबी कुंडलित कमानी के एक सिरे को एक ओर विस्थापित करने पर उस कमानी की किसी विभंग (ऐंठन) की गति।

(b) द्रव से भरे किसी सिलिंडर में इसके पिस्टन को आगे-पीछे करके सिलिंडर में उत्पन्न तरंगें।

(c) जल के पृष्ठ पर चलती मोटरबोट द्वारा उत्पन्न तरंगें।

(d) किसी कंपायमान क्वार्ट्ज क्रिस्टल द्वारा वायु में उत्पन्न पराश्रव्य तरंगें।

उत्तर–(a) कुण्डलित कमानी में उत्पन्न ऐंठन, इसके संचरित होने की दिशा के लम्बवत् होता है अत: तरंग अनुप्रस्थ है।

(b) पिस्टन के आगे–पीछे करने पर द्रव स्तंभ में संपीडन एवं विरलन उत्पन्न होते हैं। अत: यह अनुदैर्ध्य तरंग है।

(c) जल के पृष्ठ पर चलती मोटर बोट से जल के अणु मोटर बोट की दिशा में तो कम्पन्न करते हैं साथ ही ये जल पृष्ठ के लम्बवत् दिशा में ऊपर–नीचे भी कम्पित होते हैं अत: उत्पन्न तरंगें अनुदैर्ध्य एवं अनुप्रस्थ दोनों प्रकार की होती हैं

(d) वायु में उत्पन्न पराश्रव्य तरंगें अनुदैर्ध्य प्रकृति की होती हैं।

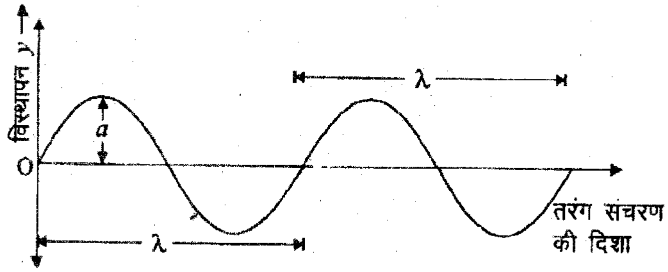
9.4 तरंग गति से संबंधित परिभाषाएँ (Definitions Related to Wave Motion)

(i) आयाम (Amplitude) a–सरल आवर्त गति कर रहे कण का साम्यावस्था से अधिकतम विस्थापन आयाम कहलाता है। इसे चित्र में 'a' द्वारा व्यक्त किया गया है। यदि विस्थापन ऋणात्मक है तो भी आयाम धनात्मक राशि होती है।

(ii) आवर्तकाल (Time period) **T**–माध्यम में उपस्थित किसी कण के द्वारा एक कंपन पूरा करने में लगा समय आवर्तकाल कहलाता है।

(iii) आवृत्ति (Frequency) n–माध्यम में उपस्थित किसी कण के द्वारा प्रति सेकण्ड किए गए कंपनों की संख्या को आवृत्ति कहते हैं। मात्रक : कम्पन/सेकण्ड या हर्ट्ज।

(iv) तरंगदैर्ध्य (Wave length) λ–माध्यम के किसी कण द्वारा एक कम्पन पूरा करने में तरंग जितनी दूरी तय करती है, उसे तरंगदैर्ध्य कहते है। इसे λ (लेम्डा) द्वारा व्यक्त करते हैं।



चित्र 9.3

(v) तरंग संख्या (Wave number)–एकांक लम्बाई में उपस्थित तरंगों की संख्या को तरंग संख्या कहते हैं।

$$\bar{\upsilon} = \frac{1}{\lambda} \text{ प्रति मी.}$$

(vi) तरंगाग्र (wave front)– वह पृष्ठ जिसके प्रत्येक बिन्दु पर माध्यम के कणों के कम्पन की कला, समान होती है तरंगाग्र कहलाता है। यह गोलीय, बेलनाकार या समतल हो सकता है।

(vii) कला या कला कोण (Phase or Phase angle)–वह भौतिक राशि जो साम्यावस्था से कंपित कण की स्थिति या गति को व्यक्त करती है कला या कला कोण कहलाती है। इसे ϕ द्वारा व्यक्त करते हैं।

(viii) कलान्तर (Phase difference)–दो कम्पित कणों के कला कोण में अंतर को कलान्तर कहते हैं।

(ix) कोणीय आवृत्ति (Angular frequency) ω–कण की कला में समय के साथ परिवर्तन की दर को कोणीय आवृत्ति कहते हैं।

इसे ω (ओमेगा) द्वारा व्यक्त करते हैं।

$$\omega = \frac{\theta}{t} \text{ रेडियन/सेकण्ड}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \begin{bmatrix} \because \text{ जब } \theta = 2\pi \\ t = T \end{bmatrix}$$

$$\because \quad \frac{1}{T} = n$$

$$\therefore \quad \omega = 2\pi n$$

(x) पथान्तर (Path difference) **Δ**–दो कम्पित कणों के साम्यावस्था से तय की गई दूरियों के अंतर को पथान्तर कहते हैं।

(xi) संचरण नियतांक (Propagation Constant) **K**–एकांक दूरी पर स्थिति कणों के मध्य कलान्तर को संचरण नियतांक या कोणीय तरंग संख्या कहते हैं।

$\because$ जब दो कण λ तरंगदैर्ध्य के बराबर दूरी पर स्थिति होते हैं तब उनके मध्य कलान्तर 2π होता है।

$\therefore$ जब दो कण एकांक दूरी पर स्थित होते हैं तब उनके मध्य कलान्तर $\frac{2\pi}{\lambda}$ होगा।

अर्थात् संचरण नियतांक $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ प्रति मीटर अथवा $\frac{\text{रेडियन}}{\text{मीटर}}$

9.5 तरंग वेग (Wave Velocity)

एक सेकण्ड में तरंग द्वारा निश्चित दिशा में तय की गई दूरी को तरंग वेग कहते हैं।

एक कंपन में कण के आवर्तकाल T में तय की गई दूरी तरंगदैर्ध्य λ के बराबर होती हैं।

$$\text{अतः तरंग वेग} = \frac{\text{एक कंपन में तय की गई दूरी}}{\text{एक कंपन में लगा समय}}$$

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

$$\because \quad \text{आवृत्ति } n = \frac{1}{T}$$

$$v = n\lambda$$

तरंग का वेग नियत रहता है परन्तु भिन्न-भिन्न माध्यमों में वेग भिन्न-भिन्न होता है। ठोसों में वेग > द्रव में वेग > गैस में वेग

$$\because \quad \text{तरंग वेग } v = n\lambda$$

$$\text{तथा} \quad \lambda = \frac{2\pi}{K}$$

$$\therefore \quad v = \frac{n.2\pi}{K} = \frac{\omega}{K}$$

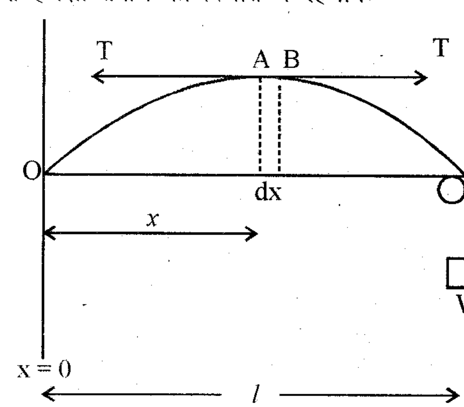
$$\therefore \quad \text{तरंग वेग } v = \frac{\omega}{K} \text{ मी./से.}$$

महत्वपूर्ण–तरंग गति में किसी भी कण का वेग प्रत्येक क्षण बदलता रहता है तथा एक ही क्षण विभिन्न कणों का वेग भिन्न-भिन्न होता है।

9.5.1 तनी हुई डोरी में अनुप्रस्थ तरंगों का वेग (Speed of Transverse Waves in a String)

जब दो दृढ़ आधारों के बीच कसे, तने हुए तार के किसी भाग (बिन्दु) को तार की लम्बाई के लम्बवत् थोड़ा खींचकर छोड़ दिया जाये तब तार के कण तार की लम्बाई के लम्बवत् कम्पन करते हैं तथा तरंग तार की लम्बाई के अनुदिश संचरित होती है। अतः तार में उत्पन्न ये कम्पन्न अनुप्रस्थ कम्पन है तथा इनके फलस्वरूप तार में अनुप्रस्थ प्रगामी तरंग संचरित होती है।

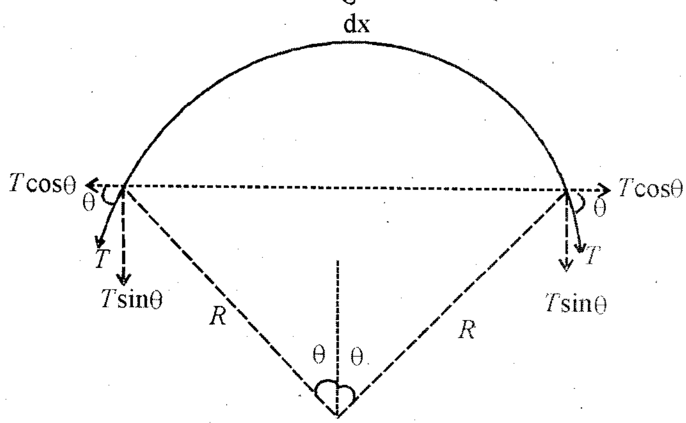
चित्रानुसार l लम्बाई की एक समांगी डोरी के एक सिरे को दृढ़ आधार से बांधकर दूसरे सिरे पर भार W लटकाया गया है। इस स्थिति में डोरी हमेशा तनाव की स्थिति में रहेगी।



चित्र 9.4

अब डोरी को मध्य से थोड़ा खींचकर y के अनुदिश छोड़ते हैं तब डोरी माध्य स्थिति के ऊपर नीचे कम्पन करने लगती है तथा डोरी में अनुप्रस्थ तरंगे

उत्पन्न होती है। इस स्थिति में डोरी के दोनों सिरों पर तनाव बल विपरीत दिशा में लगता है जो डोरी को साम्यावस्था में लाने का प्रयास करता है। डोरी में अनुप्रस्थ तरंगों का वेग ज्ञात करने के लिए स्थिर सिरे x= 0 से x दूरी पर स्थित dx लम्बाई के अल्पांश AB पर विचार करते हैं। चित्रानुसार अल्पांश AB के सिरों पर तनाव T स्पर्श रेखाओं की दिशा में होगा। माना कि अल्पांश AB सिरों पर रेखाओं का क्षैतिज से झुकाव कोण θ है।



चित्र 9.5

अल्पांश dx को R त्रिज्या के वृत्ताकार चाप का एक भाग लेने पर चित्र की ज्यामिति से स्पष्ट है कि अल्पांश के दोनों सिरों पर कार्यरत तनावों के केन्द्र की ओर घटक मिलकर 2Tsinθ आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करेंगे अर्थात्

$$2T\sin\theta = \frac{Mv^2}{R}$$

जहाँ M = mdx डोरी के dx अल्पांश का द्रव्यमान तथा m डोरी के एकांक लम्बाई का द्रव्यमान है।

$\because$ θ कोण अत्यल्प है $\qquad \therefore \sin\theta \approx \theta$

$$\therefore \quad 2T\theta = \frac{Mv^2}{R} \qquad ...(1)$$

$$\because \quad \text{कोण} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$$

$$\Rightarrow \quad 2\theta = \frac{dx}{R}$$

$\therefore$ समी. (1) से

$$\frac{Tdx}{R} = (mdx)\frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{T}{m}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{T}{m}} \qquad ...(2)$$

इस प्रकार तने हुए तार में अनुप्रस्थ तरंग की चाल v निम्न सूत्र द्वारा दी जाती है–

$$v = \sqrt{\frac{T}{m}} \qquad ...(1)$$

जहां T तथा *m* क्रमशः डोरी अथवा तार में उत्पन्न तनाव तथा डोरी (तार) का रेखीय घनत्व है। यदि डोरी के पदार्थ का घनत्व *d* तथा डोरी की त्रिज्या *r* हो तो

$$m = \pi r^2 d$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{T}{\pi r^2 d}} \qquad ...(2)$$

समी. (1) की सत्यता की जांच विमीय विश्लेषण विधि से की जा सकती है–

वेग v का विमीय सूत्र = $[M^0L^1T^{-1}]$

तनाव बल T का विमीय सूत्र = $[M^1L^1T^{-2}]$

रेखीय घनत्व (एकांक लम्बाई का द्रव्यमान)

m का विमीय सूत्र = $[M^1L^{-1}T^0]$

$$\text{समी. (1) से } [M^0L^1T^{-1}] = \left[\frac{M^1L^1T^{-2}}{M^1L^{-1}T^0}\right]^{1/2} = [M^0L^1T^{-1}]$$

$\because$ समीकरण के दोनों ओर के विमीय सूत्र समान हैं अतः सम्बन्ध (1) सही है तथा तनी हुई डोरी में अनुप्रस्थ तरंगों के वेग को व्यक्त करता है।

अतः तनित डोरी में अनुप्रस्थ तरंग की चाल

$$v = \sqrt{\frac{T}{m}}$$

किसी अनुप्रस्थ तरंग की किसी अदिश तनित डोरी के अनुदिश चाल केवल उस डोरी में तनाव तथा डोरी के रैखिक द्रव्यमान घनत्व पर निर्भर करती है तथा यह तरंग की आवृत्ति पर निर्भर नहीं करती है।

उदा.2. 0.80 m लंबे किसी स्टील के तार का द्रव्यमान 7.2×10^{-4} kg है। यदि तार पर तनाव 81N है तो तार का अनुप्रस्थ तरंगों की चाल क्या है? **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 9.1)**

हल– दिया है–तार की लम्बाई $l = 0.80$ मी.

द्रव्यमान $M = 7.2 \times 10^{-4}$ किग्रा., तनाव T = 81 न्यूटन

तार की इकाई लम्बाई का द्रव्यमान

$$m = \frac{M}{l} = \frac{7.2\times10^{-4}}{0.80} = 9\times10^{-4} \text{ किग्रा/मी.}$$

अनुप्रस्थ तरंगों की चाल

$$v = \sqrt{\frac{T}{m}} = \sqrt{\frac{81}{9\times10^{-4}}} = \sqrt{9\times10^4}$$

$$= 3 \times 10^2 \text{ मी./से.}$$

या $\quad v = 300$ मी./से.

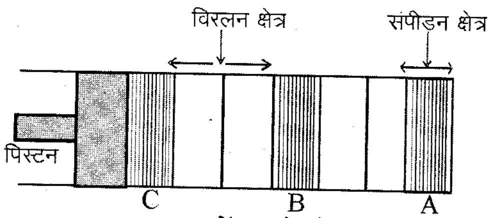
9.5.2 अनुदैर्ध्य तरंगों का संचरण तथा उनका वेग (Propagation of Longitudinal Waves and their Velocity)

तरल (द्रव या गैस) से होकर केवल अनुदैर्ध्य तरंगे ही संचरित हो सकती है। जब तरल स्तम्भ में अनुदैर्ध्य तरंग संचरित होती है तब तरंग संचरण की दिशा में कण साम्य स्थिति के दोनों ओर सरल आवर्त गति करते हैं। जिससे स्तम्भ में संपीड़न तथा विरलन बनते व बिगड़ते रहते हैं। इस स्थिति में स्तम्भ के भीतर एक स्थान से दूसरे स्थान पर दाब बदलता रहता है।

तरल में अनुदैर्ध्य तरंगों की चाल ज्ञात करने के लिए चित्रानुसार एक तरल के बेलनाकार स्तम्भ पर विचार करते हैं। जिसका अनुप्रस्थ काट

क्षेत्रफल A है। स्तम्भ के बांयी ओर लगे पिस्टन पर भीतर की ओर दबाकर संपीड़न उत्पन्न किया जाता है जो दांयी ओर v वेग से गतिशील है। माना कि सम्पीड़न क्षेत्र में तरल दाब व घनत्व एकसमान है।

यदि कोई प्रेक्षक संपीड़न की दिशा में v वेग से गतिशील हो तो प्रेक्षक के सापेक्ष संपीड़न स्थिर प्रतीत होगा जबकि तरल v वेग से संपीड़न की विपरीत दिशा में गति करता हुआ प्रतीत होगा। जब तरल संपीड़न की ओर गतिशील होता है तब संपीड़न से टकराने पर आगे की परत पर दाब P पीछे की परत की तुलना में कुछ अधिक होता है अर्थात् $P + \Delta P$ होता है। संपीड़न क्षेत्र B में तरल का वेग कुछ कम हो जाता है अर्थात् $v - \Delta v$ हो जाता है। जब तरल संपीड़न क्षेत्र से बाहर निकलता है तब इसका आयतन प्रारंभिक आयतन के बराबर हो जाता है परन्तु इसके पीछे की ओर दाब आधिक्य अधिक होने से यह त्वरित होता है जिससे यह अल्पांश स्थिति C पर पहुँच जाएगा तथा इसका वेग प्रारंभिक वेग के समान हो जायेगा।



चित्र 9.6 : तरल स्तम्भ में अनुदैर्ध्य तरंगों का संचरण

संपीड़न क्षेत्र B में तरल पर दांयी ओर परिणामी बल

$$F = (P + \Delta P) A - PA \qquad \because \text{ बल = दाब}\times\text{क्षेत्रफल}$$

$$F = PA + (\Delta P) A - PA$$

$$F = (\Delta P) A$$

माना कि संपीड़न क्षेत्र से बाहर तरल का घनत्व ρ तथा अल्पांश को किसी स्थिति से गुजरने में लगा समय Δt हो तो संपीड़न क्षेत्र के बाहर अल्पांश की लम्बाई $= v\Delta t$

$\because$ अल्पांश का द्रव्यमान = घनत्व × आयतन

= घनत्व × अनुप्रस्थ काट क्षेत्र × लम्बाई

$$m = \rho A v \Delta t$$

संपीड़न क्षेत्र में अल्पांश का त्वरण

$$a = -\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$\because$ संपीड़न क्षेत्र में अल्पांश के वेग में कमी होती है जिससे त्वरण ऋणात्मक होगा।

$\because$ गति के द्वितीय नियम से

अल्पांश पर बल $\quad F = ma$

$$(\Delta P)A = (\rho A v \Delta t)\left(-\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta P = -\rho v \Delta v$$

$$\Rightarrow \quad (\Delta P)v = -\rho v^2 \Delta v$$

$$\Rightarrow \quad \rho v^2 = -\frac{\Delta P}{\frac{\Delta v}{v}} \qquad \ldots(1)$$

$\because$ संपीड़न क्षेत्र के बाहर तरल का आयतन = अनुप्रस्थ काट क्षेत्र×लम्बाई

$$V = A v \Delta t$$

तथा संपीड़न क्षेत्र में आयतन में कमी

$$\Delta V = A(\Delta v)(\Delta t)$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta v}{v}$$

$\therefore$ समी. (1) से

$$\rho v^2 = -\frac{\Delta P}{\Delta V / V}$$

$\because$ तरल का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक

$$E = -\frac{\Delta P}{\Delta V / V}$$

$$\therefore \quad \rho v^2 = E$$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad \ldots(2)$$

स्पष्टतः तरल में अनुदैर्ध्य तरंग का वेग माध्यम की प्रत्यास्थता E तथा घनत्व ρ पर निर्भर करता है।

9.6 प्रगामी तरंग समीकरण (Equation of a Progressive Wave)

यदि किसी माध्यम में तरंग संचरित होने पर माध्यम के कण सरल आवर्त गति में कम्पन करे तो इस तरंग को सरल आवर्त प्रगामी तरंग कहते है।

इस आवर्त गति में कण का माध्य स्थिति से विस्थापन समीकरण

$$y = a \sin \omega t \qquad \ldots(1)$$

यहाँ y विस्थापन, a आयाम, ω कोणीय आवृत्ति तथा t समय है।

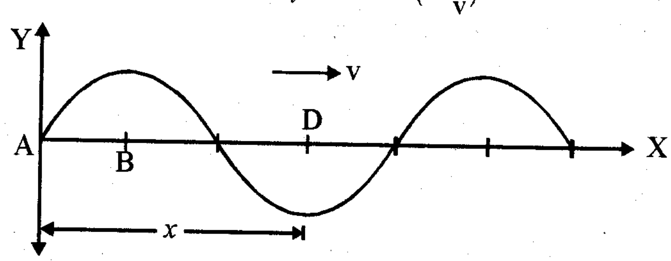
माना यह तरंग बिन्दु A पर उत्पन्न होती है तथा दांयी ओर के कणों में एक के बाद एक संचरित होती है।

बिन्दु A से x दूरी पर एक कण D विचार करते है। v वेग से संचरित हुई तरंग, $t = \frac{\text{दूरी}}{\text{वेग}} = \frac{x}{v}$ समय में D पर पहुंचती है।

अर्थात् t समय पर जो विस्थापन बिन्दु D पर वह $\frac{x}{v}$ समय पूर्व A पर था।

अतः t समय पर बिन्दु D पर कण का विस्थापन का समीकरण समीकरण (1) में t के स्थान पर $\left(t - \frac{x}{v}\right)$ रखने पर

$$y = a \sin \omega \left(t - \frac{x}{v}\right)$$



चित्र 9.7

$\therefore$ कोणीय आवृत्ति $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$y = a\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$y = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right)$$

$$y = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) (\because vT = \lambda) \quad ...(2)$$

यह समीकरण +X दिशा में प्रगामी तरंग को प्रदर्शित करता है।

$$y = a\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$y = a\sin(\omega t - Kx) \quad ...(3)$$

यहाँ कोणीय आवृत्ति $\omega = \frac{2\pi}{T}$

K – संचरण नियतांक (Propagation constant)

इसी प्रकार ऋणात्मक X– दिशा में गतिमान सरल आवर्त प्रगामी तरंग का समीकरण $y = a\sin(\omega t + Kx)$

पुनः समीकरण (2) से $y = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

$$y = a\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda t}{T} - x\right) \quad \left\{\because \frac{\lambda}{T} = v\right\}$$

$$y = a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad ...(5)$$

यह समीकरण भी +X दिशा में संचरित प्रगामी तरंग को व्यक्त करता है।

समी. (3) का समय t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$v = \frac{dy}{dt} = a\omega\cos(\omega t - Kx) \quad ...(6)$$

समी. (6) कण के वेग के समीकरण को व्यक्त करता है। इस प्रकार तरंग वेग तथा कण का वेग दोनों भिन्न-भिन्न होते हैं कण का वेग कण की स्थिति (x) तथा समय (t) पर निर्भर करता है जबकि तरंग वेग नियत रहता है।

समी. (6) से $v_{max} = a\omega$ ...(7)

समी. (6) का समय t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dv}{dt} = -a\omega^2\sin(\omega t - Kx)$$

$\because$ कण का त्वरण $= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$

$\therefore$ कण का त्वरण $\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$ ...(8)

इस प्रकार कण का त्वरण, विस्थापन के समानुपाती तथा विपरीत दिशा में है अतः कण की गति सरल आवर्त गति होगी।

समी. (3) का स्थिति x के सापेक्ष दो बार अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -K^2 a\sin(\omega t - Kx) = -K^2 y \quad ...(9)$$

समी. (8) व समी. (9) से-

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{K^2}{\omega^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$\because$ तरंग वेग $v = \frac{\omega}{K}$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = v^2\frac{d^2y}{dx^2} \quad ...(10)$$

समी. (10) एकविमीय तरंग के अवकल समीकरण को व्यक्त करता है।

उदा.3. किसी डोरी के अनुदिश गमन करती तरंग का विवरण इस प्रकार दिया गया है-

$$y(x, t) = 0.005 \sin(80.0\, x - 3.0\, t)$$

यहां आंकिक स्थिरांक SI मात्रकों में हैं (0.005 *m*, 80.0 rad/m तथा 3.0 rad/s)। तरंग का (a) आयाम, (b) तरंगदैर्ध्य (c) आवर्तकाल एवं आवृत्ति परिकलित कीजिए। दूरी *x* = 30.0 cm तथा समय *t* = 20 *s* पर तरंग का विस्थापन *y* भी परिकलित कीजिए।

हल– दिया है–समी. $y(x, t) = 0.005\sin(80.0x - 3.0t)$ मी. ...(1)

समीकरण की तुलना मानक समीकरण $y(x, t) = a\sin(Kx - \omega t)$ से करने पर

(a) आयाम $a = 0.005$ मी.

(b) तरंग संख्या

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = 80 \text{ रेडियन/मी.}$$

या तरंगदैर्ध्य $\lambda = \frac{2\pi}{80} = 0.0785$ मी.

या $\lambda = 7.85$ सेमी.

(c) कोणीय आवृत्ति $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n = 3$ रेडियन/से.

अतः आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{3} = 2.093$ सेकण्ड

तथा आवृत्ति $n = \frac{1}{T} = \frac{3}{2\pi} = 0.477$ हर्ट्ज

(d) दूरी $x = 30$ सेमी. = 0.3 मी. तथा $t = 20$ सेकण्ड पर विस्थापन समी. (1) में मान रखने पर

$y(0.3, 20) = 0.005\sin(80 \times 0.3 - 3 \times 20)$

$= 0.005\sin(-36)$ मी.

$= 0.005\sin(12\pi - 36)$ मी.

$= 0.005\sin(96.31°)$ मी.

$= 0.005 \times 0.9940$ मी.

$= 0.00497$ मी. = 4.97 मिमी.

$[\because \sin(2n\pi \pm \theta) = \sin\theta]$

$(12\pi - 36)$ रेडियन

$= \frac{180}{\pi}(12\pi - 36)$ डिग्री

$= 2160 - 2063.69 = 96.31°$

$\sin(96.31°)$

$= \cos(6.31)° = \cos 6°, 85'$

$= 0.9940$ (सारणी से)

उदा.4. किसी डोरी के अनुदिश गमन करती हुई तरंग का विस्थापन यदि y = 0.005 sin (80x – 3t) है जहाँ 0.005m, 80 rad/m तथा 3 rad/s में है तो तरंग का (a) आयाम

(b) तरंग दैर्ध्य (c) आवर्तकाल (d) आवृत्ति का परिकलन करो। **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 9.2)**

हल : ∵ प्रगामी तरंग का समीकरण

$y = a\sin(\omega t - Kx) = -a\sin(Kx - \omega t)$

दिए गए समीकरण $y = 0.005\sin(80x - 3t)$ की उपरोक्त समीकरण से तुलना करने पर

$a = -0.005\text{m},\ \omega = 3\text{rad/s},\ K = 80\text{ rad/m}$

(a) ∴ तरंग का आयाम $a = 0.005\text{m}$

(b) तरंगदैर्ध्य $\lambda = \frac{2\pi}{K}$

$\lambda = \frac{2\pi}{80} = 7.85\text{ cm}$

(c) आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$T = \frac{2\pi}{3.0} = 2.09\text{ s}$

(d) आवृत्ति $n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2.09} = 0.48\text{ Hz}$

उदा.5. तरंग का समीकरण $y = 5\sin 5\pi\left(\frac{t}{.02} - \frac{x}{20}\right)$ **मीटर है तो इसकी आवृत्ति, आयाम, आवर्तकाल क्या होगा?**

हल– $y = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ से तुलना करने पर

आयाम $a = 5$ मीटर

आवर्तकाल $T = 0.02$ सेकण्ड

तरंगदैर्ध्य $\lambda = 20$ मीटर

आवृत्ति $n = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.02} = 50$ हर्ट्ज

उदा.6. यदि 1 cm आयाम व 100 Hz आवृत्ति की एक तरंग सरल आवर्ती गति करती हुई धनात्मक *x* दिशा में 15 m/s के वेग से गतिशील हो तो 5 सेकण्ड पश्चात् मूल बिन्दु से स्थिति *x* = 180 cm पर कण का विस्थापन *y*, कण का वेग व त्वरण ज्ञात करो। **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 9.3)**

हल : दिया गया है– आयाम $a = 1$ cm, आवृत्ति $n = 100$ Hz, वेग $v = 15$ m/s $= 1500$ cm/s, $t = 5$ s, $x = 180$ cm

∴ प्रगामी तरंग के विस्थापन समीकरण से

$$y = a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad ....(1)$$

∵ $\lambda = \frac{v}{n} = \frac{1500}{100} = 15$ सेमी

∴ $y = 1\sin\frac{2\pi}{15}(1500\times 5 - 180)$

$y = \sin 2\pi(500 - 12)$

$y = \sin 2\pi(488) = 0$

समी. (1) का समय t के सापेक्ष अवकलन करने पर

कण का वेग $= \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi av}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$

वेग $= \frac{2\pi\times 1\times 1500}{15}\cos\frac{2\pi}{15}(1500\times 5 - 180)$

$= 200\pi\cos 2\pi(500 - 12)$

$= 200\pi\cos 2\pi(488) = 200\pi$ सेमी/सेकण्ड

त्वरण $= -\omega^2 y = 0 \quad [\because y = 0]$

उदा.7. किसी माध्यम में तरंग के प्रसरण में किसी कण का विस्थापन समीकरण *y* = 16 sin π (4.0t – 0.08*x*) द्वारा प्रदर्शित है जहाँ *y*, *t*, *x* क्रमश मिमी, सेकण्ड तथा मीटर में है तो तरंग का आयाम तरंगदैर्ध्य और वेग ज्ञात करो।

हल– $y = 16\sin\pi(4.0t - 0.08x)$

$= 16\sin 2\pi(2.0t - 0.04x)$

$y = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ से तुलना करने पर

$a = 16$ मिमी

$\frac{1}{T} = 2$ सेकण्ड $\Rightarrow T = \frac{1}{2} = 0.5$ सेकण्ड

$\lambda = \frac{1}{0.04} = \frac{100}{4} = 25$ मीटर

आवृत्ति $n = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.5} = 2$ हर्ट्ज

वेग $v = n\lambda = 2\times 25 = 50$ मी/से.

उदा.8. किसी माध्यम में तरंग +X-अक्ष की दिशा में संचरित है, जिसका आयाम 2 सेमी. वेग 45 मी/से तथा आवृत्ति 75 हर्ट्ज है। प्रगामी तरंग के विस्थापन का समीकरण ज्ञात करो।

हल– आयाम $a = 2$ सेमी.

वेग $v = 45$ मी/सेकण्ड

आवृत्ति $n = 75$ हर्ट्ज

आवर्तकाल $T = \frac{1}{n} = \frac{1}{75}$ सेकण्ड

तरंगदैर्ध्य $\lambda = \frac{v}{n} = \frac{45}{75} = .6$ मी. $= 60$ सेमी

प्रगामी तरंग का समीकरण

$y = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

$y = 2\sin 2\pi\left(\frac{t}{1/75} - \frac{x}{60}\right)$

$y = 2\sin 2\pi\left(75t - \frac{x}{60}\right)$ सेमी.

9.7 तरंग के आयाम तथा तीव्रता में सम्बन्ध (Relation between Amplitude and Intensity of A Wave)

जब किसी माध्यम में सरल आवर्ती प्रगामी तरंग संचरित होती है तब माध्यम के कण एक के पश्चात् एक कम्पन करते हैं। अत: तरंग के कारण माध्यम के एक भाग से दूसरे भाग तक ऊर्जा संचरण होता है। यह ऊर्जा तरंग स्त्रोत से प्राप्त होती है।

$\because$ माध्यम में + X अक्ष के अनुदिश संचरित प्रगामी तरंग का समीकरण

$$y = a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad ...(1)$$

$\therefore$ मूल बिन्दु से x दूरी पर स्थित कण का वेग

$$u = \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi av}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

अब तरंग संचरण के लम्बवत् एकांक काट क्षेत्र तथा dx मोटाई की एक पतली परत पर विचार करते हैं जिसकी मूल बिन्दु से दूरी x है। यदि परत का द्रव्यमान dm है तो

$$dm = \rho(1\times dx) = \rho dx$$

जहाँ ρ माध्यम का घनत्व है।

$\because$ परत अत्यन्त पतली है जिससे परत के सभी कणों का वेग एकसमान u माना जा सकता है। तब परत के कणों की गतिज ऊर्जा

$$K = \frac{1}{2}(dm)u^2$$

$$K = \frac{1}{2}(\rho dx)\left(\frac{2\pi av}{\lambda}\right)^2\cos^2\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

$\because$ तरंग वेग $v = n\lambda$ जहाँ n = आवृत्ति

$$\therefore \quad K = \frac{1}{2}(\rho dx)(2\pi an)^2\cos^2\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad ...(2)$$

$\because$ किसी कम्पायमान कण की कुल ऊर्जा उसकी गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा का योगफल होती हैं तथा यह नियत रहती है। यदि स्थितिज ऊर्जा शून्य हो तो गतिज ऊर्जा अधिकतम होगी।

$\therefore$ अधिकतम गतिज ऊर्जा

$$K_{max} = \frac{1}{2}(\rho dx)\,(2\pi an)^2$$

यह अधिकतम गतिज ऊर्जा कुल ऊर्जा के बराबर होती है। अत: परत की कुल ऊर्जा

$$E = \frac{1}{2}(\rho dx)\,(2\pi an)^2 \quad ...(3)$$

$\therefore$ किसी समय परत की स्थितिज ऊर्जा

= कुल ऊर्जा − गतिज ऊर्जा

$$U = \frac{1}{2}(\rho dx)(2\pi an)^2 - \frac{1}{2}(\rho dx)(2\pi an)^2\cos^2\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

$$U = \frac{1}{2}(\rho dx)(2\pi an)^2\left[1 - \cos^2\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)\right]$$

$$U = \frac{1}{2}(\rho dx)(2\pi an)^2\sin^2\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad ...(4)$$

यदि परत को अत्यन्त सूक्ष्म पतली परत मानी जाये तब चूंकि परत का काट क्षेत्रफल एकांक है। अत: माध्यम के एकांक आयतन की सम्पूर्ण ऊर्जा परत की एकांक लम्बाई में निहित ऊर्जा के बराबर होगी जिसे ऊर्जा घनत्व (energy density) कहते हैं। इसे समीकरण (3) को x = 0 से x = 1 तक समाकलित करके प्राप्त किया जा सकता है।

$$E = \int_0^1 \frac{1}{2}(2\pi an)^2\rho dx$$

$$E = \frac{1}{2}\rho(2\pi an)^2\int_0^1 dx$$

$$E = 2\pi^2 a^2 n^2 \rho \quad ...(5)$$

इस प्रकार ऊर्जा घनत्व का मान दूरी x तथा समय t पर निर्भर नहीं करता है।

ऊर्जा फ्लक्स (Energy Flux)– तरंग संचरण की दिशा के लम्बवत् एकांक क्षेत्रफल से प्रति सेकण्ड प्रवाहित ऊर्जा की मात्रा को ऊर्जा फ्लक्स कहते हैं। चूँकि एकांक क्षेत्रफल ऊर्जा एक सेकण्ड में माध्यम की v लम्बाई चलेगी, अत: एक सेकण्ड में यह ऊर्जा $v \times 1$ आयतन में उपस्थित कणों को कम्पन्न हेतु ऊर्जा प्रदान करेगी। अत: v आयतन के कणों की ऊर्जा = ऊर्जा फ्लक्स

$$= 2\pi^2 a^2 n^2 \rho \times v = 2\pi^2 a^2 n^2 \rho v \quad ...(6)$$

तरंग की तीव्रता (Intensity of wave)– किसी तरंग की तीव्रता एकांक समय में माध्यम के एकांक क्षेत्रफल पर आपतित ऊर्जा की मात्रा के बराबर होती है अर्थात् एकांक क्षेत्रफल में होकर ऊर्जा के प्रवाह की दर को तरंग की तीव्रता कहते हैं। अत: यह ऊर्जा प्रवाह के बराबर है, अर्थात् तरंग की तीव्रता

$$I = 2\pi^2 a^2 n^2 \rho v \quad ...(7)$$

तरंग की तीव्रता का मात्रक $\frac{\text{वॉट}}{\text{मीटर}^2}$ होता है।

समी. (7) से स्पष्ट है कि तरंग की तीव्रता–

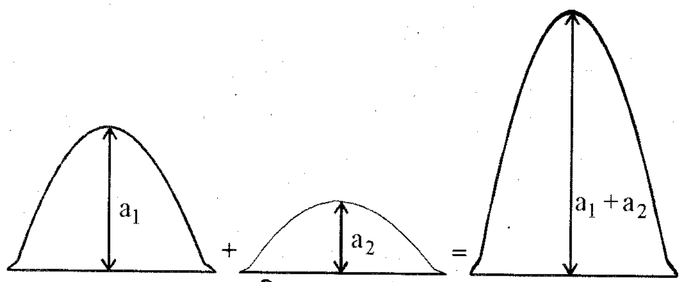
1. तरंग के आयाम के वर्ग के अनुक्रमानुपाती होती है अर्थात् $I \propto a^2$
2. तरंग की आवृत्ति के वर्ग के अनुक्रमानुपाती होती है अर्थात् $I \propto n^2$
3. माध्यम के घनत्व के अनुक्रमानुपाती होती है अर्थात् $I \propto \rho$
4. माध्यम में तरंग की चाल के अनुक्रमानुपाती होती है अर्थात् $I \propto v$

9.8 तरंगों का अध्यारोपण (Superposition of Waves)

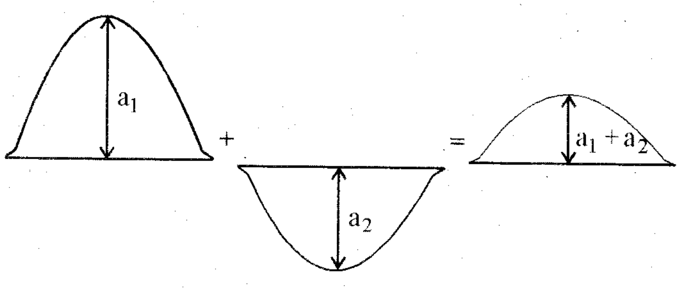
जब कोई प्रगामी तरंग किसी माध्यम में संचरित होती है तो माध्यम के कण अपनी माध्य स्थिति के दोनों ओर कंपन करने लगते हैं। दूसरे शब्दों में तरंग अपने मार्ग में स्थित माध्यम के प्रत्येक कण को साम्य स्थिति से विस्थापित कर देती है। स्पष्ट है कि यदि किसी माध्यम से दो तरंगे एक साथ संचरित हो तो माध्यम का प्रत्येक कण दोनों ही तरंगों द्वारा एक साथ विस्थापित होगा।

किसी कण पर एक ही समय पर एक से अधिक तरंगों के आरोपित होने की प्रक्रिया तरंगों का अध्यारोपण कहलाती है। किसी स्थिति पर तरंगों के कारण उत्पन्न परिणामी विस्थापन की गणना करते समय तरंगों की कला का ध्यान रखा जाता है। जब तरंगें समान कला में अध्यारोपित होती है तब परिणामी विस्थापन प्रत्येक तरंग के विस्थापन का योग होता है। (चित्र-अ)

जब तरंगे विपरीत कला में अध्यारोपित होती है तब परिणामी विस्थापन प्रत्येक तरंग के विस्थापन का अन्तर होता है। (चित्र-ब)

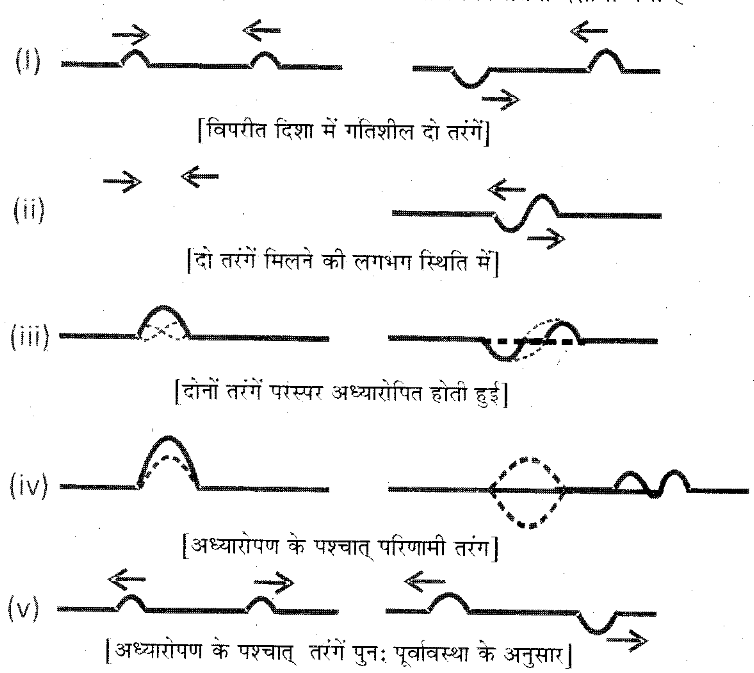


चित्र: 9.8 (अ)



चित्र: 9.8 (ब)

निम्न चित्रों में तरंगों के अध्यारोपण की विभिन्न स्थितियाँ दर्शायी गयी है–



चित्र: 9.8 (स)

9.8.1 अध्यारोपण का सिद्धान्त (Principal of Superposition)

अध्यारोपण के सिद्धान्त के अनुसार– "जब दो या दो से अधिक तरंगें माध्यम में संचरित होती हुई अध्यारोपित होती है तब माध्यम के किसी बिन्दु पर कण का परिणामी विस्थापन भिन्न–भिन्न तरंगों के कारण उत्पन्न विस्थापनों के सदिश योग के बराबर होता है।"

यदि प्रथम, द्वितीय, तृतीय,.........., n वें तरंगों के कारण कण के विस्थापन क्रमशः $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \ldots, \vec{y}_n$ हो तो परिणामी विस्थापन

$$\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \vec{y}_3 + \ldots + \vec{y}_n$$

यदि सभी कणों के विस्थापन एक ही दिशा में हो तो परिणामी विस्थापन

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n$$

परिणामी तरंग के विस्थापन y का मान निम्न कारकों पर निर्भर करता है

(i) तरंगों के आयाम पर

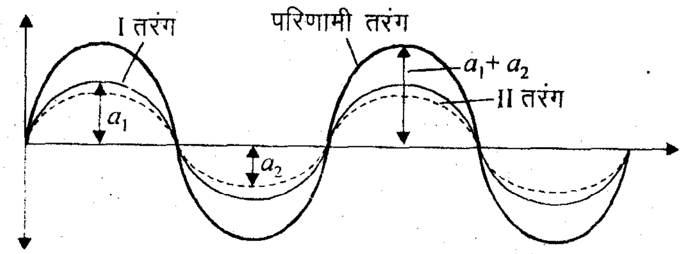
(ii) तरंगों के संचरण की दिशा पर

(iii) तरंगों की आवृत्ति (तरंगदैर्ध्य या आवर्तकाल) पर

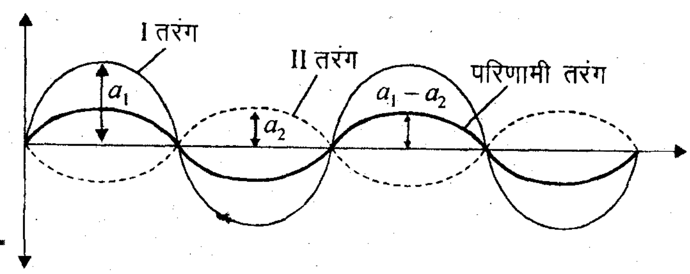
(iv) तरंगों के मध्य कलान्तर पर

यह सिद्धान्त सभी तरह की तरंगों के लिए सत्य है बशर्ते कि तरंगों का आयाम बहुत अधिक न हो अतः समुद्र में उत्पन्न होने वाली विशाल तरंगें, लेसर तरंगों के लिए यह सिद्धान्त लागू नहीं होता है।

किसी बिन्दु पर जब दो स्पंद एक ही कला में पहुंचते हैं तो परिणामी विस्थापन दोनों विस्थापनों के योग के बराबर होता है। इसके विपरीत जब एक ही बिन्दु पर दो स्पंद विपरीत कला में पहुंचते है तो परिणामी विस्थापन दोनों विस्थापन के अंतर के बराबर होता है यदि दो तरंगों के अधिकतम विस्थापन a_1 व a_2 है तो



चित्र 9.9



चित्र 9.10

तरंगों के अध्यारोपण से विभिन्न परिस्थितियों में निम्नलिखित प्रभाव प्राप्त होते है–

व्यतिकरण (Interference)– दो एक समान तरंगें जिनकी आवृत्ति बराबर हो जो माध्यम में एक ही दिशा में चल रही है अध्यारोपण से व्यतिकरण प्रतिरूप देती है।

विस्पंद (Beats)– जब दो असमान (लगभग बराबर) आवृत्ति की तरंगें एक ही दिशा में चल रही है तो इनके अध्यारोपण से विस्पंद उत्पन्न होते हैं।

अप्रगामी तरंग (Stationary wave)– दो समान तरंगें जिनकी आवृत्ति बराबर है, परन्तु माध्यम में एक सीध में विपरीत दिशा में चलती है तो इनके अध्यारोपण से अप्रगामी तरंग का निर्माण होता है।

लिसाजू की आकृतियाँ (Lissajous Figures)– जब किसी कण पर एक ही समय दो परस्पर लम्बवत् सरल आवर्त गतियाँ अध्यारोपित होती है तो कण का परिणामी विस्थापन सदिश एक वक्रीय पथ पर

चलता है जिसकी आकृति गतियों के पृथक्–पृथक् आयाम, आवर्तकाल तथा उनमें कलान्तर पर निर्भर करता है। इन आकृतियों को लिसाजू की आकृतियाँ कहते है।

9.8.2 दो सरल आवर्त गतियों का अध्यारोपण (Superposition of Two Simple Harmonic Motion)

माना कि समान आवृत्ति की दो तरंगें माध्यम में एक ही दिशा में संचरित हो रही है। इन तरंगों को निम्न समीकरणों द्वारा व्यक्त किया जा सकता है–

$$y_1 = a_1 \sin(\omega t + \phi_1) \quad ...(1)$$
$$y_2 = a_2 \sin(\omega t + \phi_2) \quad ...(2)$$

जहाँ a_1 तथा a_2 तरंगों का आयाम तथा ϕ_1 व ϕ_2 तरंगों के प्रारंभिक कला कोण है।

तरंगों का परिणामी विस्थापन

$$y = y_1 + y_2$$
$$y = a_1 \sin(\omega t + \phi_1) + a_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$
$$y = a_1[\sin\omega t \cos\phi_1 + \cos\omega t \sin\phi_1] + a_2[\sin\omega t \cos\phi_2 + \cos\omega t \sin\phi_2]$$
$$y = \sin\omega t[a_1\cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2] + \cos\omega t[a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2]$$

माना कि $a_1 \cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2 = R\cos\theta \quad ...(3)$

तथा $a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2 = R\sin\theta \quad ...(4)$

$\therefore$ $y = R\sin\omega t\cos\theta + R\cos\omega t\sin\theta$

$$y = R\sin(\omega t + \theta) \quad ...(5)$$

समी. (5) से स्पष्ट है कि परिणामी गति भी सरल आवर्त गति होगी जिसका आयाम R तथा प्रारंभिक कला कोण θ होगा।

परिणामी तरंग के आयाम R की गणना

समी. (3) व (4) का वर्ग करके योग करने पर

$$(a_1\cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2)^2 + (a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2)^2 = R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow a_1^2\cos^2\phi_1 + a_2^2\cos^2\phi_2 + 2a_1a_2\cos\phi_1\cos\phi_2 + a_1^2\sin^2\phi_1 + a_2^2\sin^2\phi_2 + 2a_1a_2\sin\phi_1\sin\phi_2 = R$$

$$\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2(\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2) = R^2$$

$$\Rightarrow R^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\phi_2 - \phi_1) \quad ...(6)$$

$$[\because \cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B]$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\phi_2 - \phi_1)} \quad ...(7)$$

तरंग की तीव्रता आयाम के वर्ग के अनुक्रमानुपाती होती है।

तीव्रता $I \propto R^2$

$$I = KR^2$$

प्रथम तरंग की तीव्रता

$$I_1 = Ka_1^2 \Rightarrow \sqrt{I_1} = \sqrt{K}a_1$$

तथा द्वितीय तरंग की तीव्रता

$$I_2 = Ka_2^2 \Rightarrow \sqrt{I_2} = \sqrt{K}a_2$$

पुनः $R^2 = a_1^2 + 2a_1a_2\cos(\phi_2 - \phi_1) + a_2^2$

K का गुणा करने पर

$$KR^2 = Ka_1^2 + 2Ka_1a_2\cos(\phi_2 - \phi_1) + Ka_2^2$$

तीव्रता के पदो में $I = I_1 + 2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\cos(\phi_2 - \phi_1) + I_2$

प्रारंभिक कला कोण θ की गणना–

समी. (4) में समी. (3) का भाग देने पर

$$\tan\theta = \frac{a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2}{a_1\cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2} \quad ...(8)$$

स्थिति I– आयाम R के अधिकतम मान के लिए

$$\cos(\phi_2 - \phi_1) = 1$$

$\therefore$ समी. (7) से– $R_{max} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2}$

तथा $I_{max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 = \sqrt{(a_1 + a_2)^2} = a_1 + a_2$

$\cos(\phi_2 - \phi_1) = 1$ के लिए

$$\phi_2 - \phi_1 = 2n\pi$$

जहाँ $n = 0, 1, 2, ...$

इस स्थिति में दोनों तरंगें समान कला में कहलाती है।

स्थिति II– आयाम R के न्यूनतम मान के लिए

$$\cos(\phi_2 - \phi_1) = -1$$

$\therefore$ समी. (7) से $R_{min} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2}$

$$= \sqrt{(a_1 - a_2)^2} = a_1 - a_2$$

तथा $I_{min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$

$\cos(\phi_2 - \phi_1) = -1$ के लिए

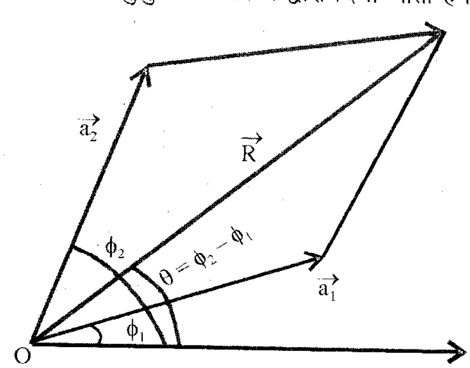
$\phi_2 - \phi_1 = (2n+1)\pi$ जहाँ $n = 0, 1, 2..........$

इस स्थिति में दोनों तरंगें विपरीत कला में कहलाती है।

नोट– यदि $a_1 = a_2 = a$ हो तो आयाम $R_{max} = 2a$ तथा $R_{min} = 0$ होगा जबकि तीव्रता $I_{max} = 4Ka^2$ तथा $I_{min} = 0$ होगा।

सरल आवर्त गति का योग सदिश योग द्वारा:

माना कि दो सदिश $\vec{a_1}$ व $\vec{a_2}$ चित्रानुसार X- अक्ष से क्रमशः ϕ_1 व ϕ_2 कोण पर स्थित है। तब परिणामी सदिश का परिमाण R (परिणामी तरंग का आयाम) समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण द्वारा दिया जाता है।



चित्र: 9.11

सदिश संयोजन के नियम से

$$R = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\phi_2 - \phi_1)}$$

तथा $$\tan\theta = \frac{a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2}{a_1\cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2}$$

इस प्रकार सरल आवर्त गति को सदिश की भाँति जोड़ा जा सकता है। सदिश योग का नियम दो से अधिक सरल आवर्त गतियों के लिए भी प्रयुक्त किया जा सकता है।

उदा.9. I_0 तथा $9I_0$ तीव्रता की दो तरंगे एक दूसरे पर अध्यारोपित होती है। उन बिन्दुओं पर तीव्रता ज्ञात कीजिये जहां तरंगों का कलान्तर (i) शून्य (ii) $\frac{\pi}{2}$ (iii) π (iv) $3\frac{\pi}{2}$ है-

हल: परिणामी तीव्रता का सूत्र

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\cos\phi$$

$$I_1 = I_0$$

$$I_2 = 9I_0$$

$$I = I_0 + 9I_0 + 2\sqrt{I_0}\sqrt{9I_0}\cos\phi$$

$$= 10I_0 + 2\times 3I_0\cos\phi$$

जब $\phi = 0$, $\cos\phi = 1$,

$$I = 10I_0 + 6I_0 = 16I_0$$

जब $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$,

$$I = 10I_0$$

जब $\phi = \pi$, $\cos\pi = -1$,

$$I = 10I_0 - 6I_0 = 4I_0$$

जब $\phi = \frac{3\pi}{2}$, $\cos\phi = 0$,

$$I = 10I_0$$

उदा.10. 256 हर्ट्ज (Hz) आवृत्ति की एक तरंग वायु (घनत्व =1.29 kg/m³) में 332 m/s की चाल से चल रही है। यदि तरंग का आयाम 10^{-5} m हो तो उत्पन्न ध्वनि की तीव्रता ज्ञात कीजिए। (π = 3.14) **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 9.4)**

हल : दिया गया है : आवृत्ति n = 256Hz,

घनत्व $\rho = 1.29$ Kg/m³, v = 332 m/s

आयाम $a = 10^{-5}$ m

∵ ध्वनि की तीव्रता

$$I = 2\pi^2 a^2 n^2 \rho v$$

$$= 2\times(3.14)^2\times(10^{-5})^2\times(256)^2\times(1.29)\times 332$$

$$= 0.055 \text{ W/m}^2$$

उदा.11. एक सरल आवर्ती तरंग का समीकरण निम्नलिखित है–

$$y = 0.30\ \sin(314t - 1.57x)$$

इसमें '***t***', '***x***' तथा '***y***' क्रमशः सेकण्ड, मीटर तथा सेन्टीमीटर में दिये गये हैं। इस तरंग की आवृत्ति तथा तरंग दैर्ध्य ज्ञात कीजिये। इसी प्रकार यदि अन्य तरंग का समीकरण $y' = 0.10\sin(314t - 1.57x + 1.57)$ हो तो उपरोक्त दोनों तरंगों के बीच कलान्तर तथा तीव्रताओं का अनुपात बताइये। **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 9.5)**

हल : ∵ x मीटर में तथा y सेन्टीमीटर में है।

$$y = \frac{0.30}{100}\sin(100\pi t - \frac{\pi}{2}x)$$

$$y = 0.003\ \sin\frac{\pi}{2}(200t - x)$$

उपरोक्त समीकरण की तुलना समीकरण

$y = a\ \sin\ \frac{2\pi}{\lambda}(v\,t - x)$ से करने पर

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lambda = 4\text{m},\ v = 200\text{ m/s}$$

$$n = \frac{v}{\lambda} = \frac{200}{4} = 50\ \text{Hz}$$

इसी प्रकार दूसरा समीकरण

$y' = 0.10\sin(314t - 1.57x + 1.57)$ को भी मीटर मे व्यक्त करने पर

$$y' = \frac{0.10}{100}\sin(100\pi t - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2})$$

$$y' = 0.001\ \sin\left[\frac{\pi}{2}(200t - x) + \frac{\pi}{2}\right]$$

दोनों तरंगों के विस्थापन समीकरण की तुलना से तरंगों के मध्य कलान्तर $= \frac{\pi}{2}$

∵ प्रथम तरंग का आयाम $a_1 = 0.003$ मीटर व द्वितीय तरंग का आयाम $a_2 = 0.001$ मीटर

अतः तीव्रताओं का अनुपात

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{(0.003)^2}{(0.001)^2} = \frac{9}{1}$$

$$I_1 : I_2 = 9 : 1$$

उदा.12. दो तरंगों जिनके आयाम 3 मिमी. तथा 4 मिमी. है एक ही माध्यम से एक ही दिशा मे संचरित है। यदि इनमे $\frac{\pi}{2}$ कलान्तर हो तो अध्यारोपण के पश्चात् परिणामी तरंग का आयाम क्या होगा?

हल:

$a_1 = 3$ मिमी.

$a_2 = 4$ मिमी.

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\phi = 0$$

परिणामी आयाम

$$R^2 = a_1^2 + 2a_1a_2\cos\phi + a_2^2$$

$$= (3)^2 + 2\times 3\times 4\cos\frac{\pi}{2} + (4)^2$$

$$R^2 = 25$$

R = 5 मिमी.

उदा.13. दो समरूप तरंगें जिनके आयाम **a** व **2a** है एक दूसरे पर अध्यारोपित होती है। परिणामी आयाम **A** है। **(i)** कलान्तर के किन किन मानों के लिए **A** का मान अधिकतम **(A_{max})** होगा? **(ii)** कलान्तर के किन–किन मानों के लिए **(A)** का

मान न्यूनतम (A_{min}) होगा? (A_{max}) व (A_{min}) ज्ञात करो। यदि प्रथम तरंग की तीव्रता **I** हो तो परिणामी तरंग की अधिकतम व न्यूनतम तीव्रता ज्ञात करो? **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 9.6)**

हल : A का मान अधिकतम होने के लिए कलान्तर $\phi_2 - \phi_1 = 2\pi n$,
जहाँ $n = 0, 1, 2, ...$
या कलान्तर $(\phi_2 - \phi_1) = 0, 2\pi, 4\pi, ...$ होगा।
इस स्थिति में $A_{max} = a_1 + a_2 = 2a + a = 3a$
A का मान न्यूनतम होने के लिए कलान्तर $(\phi_2 - \phi_1) = (2n + 1)\pi$,
जहाँ $n = 0, 1, 2, ...$
या कलान्तर $(\phi_2 - \phi_1) = \pi, 3\pi, 5\pi ....$ होगा।
इस स्थिति में $A_{min} = a_1 - a_2 = 2a - a = a$
$\because$ प्रथम तरंग की तीव्रता I है $\therefore$ $I = Ka^2$
जहाँ $K = 2\pi^2 n^2 \rho v$
$\therefore$ $I_{max} = K\ A^2_{max} = K(3a)^2 = 9Ka^2 = 9I$
व $I_{min} = K\ A^2_{min} = K(a)^2 = Ka^2 = I$

9.9 तरंगों का परावर्तन (Reflection of Waves)

जब कोई प्रगामी तरंग भिन्न घनत्व के पृथक्कारी पृष्ठ से टकराती है तब तरंग उसी माध्यम में पुन: लौट आती है। यह घटना तरंग का परावर्तन कहलाती है। परावर्तन की घटना में प्रगामी तरंग कुछ नियमों का पालन करती है। ये नियम वही है जो प्रकाश तरंगों के लिए लागू होते हैं। प्रगामी तरंग का परावर्तन पृथक्कारी पृष्ठ की प्रकृति पर निर्भर करता है।

बद्ध माध्यम-किसी ऐसे माध्यम की जिसकी एक निश्चित परिसीमा हो तथा उसकी सीमायें अन्य माध्यमों से स्पष्ट पृष्ठों द्वारा पृथक हो, बद्ध माध्यम कहते हैं। जैसे सितार का तार, बाँसुरी का वायु स्तम्भ आदि। परिसीमा दो प्रकार की होती है दृढ़ तथा मुक्त। सितार के तार के दोनों सिरे दृढ़ होते हैं वायु स्तम्भ की नली का बन्द सिरा दृढ़ होता है तथा खुला सिरा मुक्त होता है।

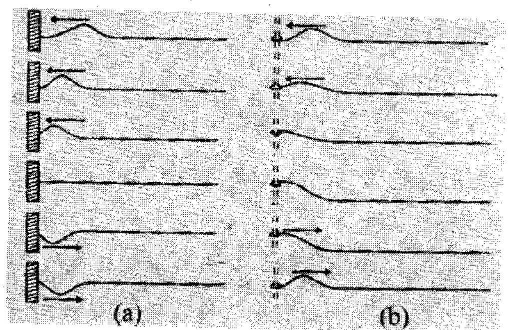
9.9.1 अनुप्रस्थ तरंगों का परावर्तन (Reflection of Transverse Wave)

दृढ़ तथा मुक्त सिरों से परावर्तन-जब कोई स्पंद अथवा प्रगामी तंरग किसी दृढ़ परिसीमा का सामना करती है तो ऐसी स्थिति में स्पंद अथवा तरंग परावर्तित हो जाती है। किसी दृढ़ परिसीमा से ध्वनि तरंगों का टकराना तथा टकराने के पश्चात् परावर्तित ध्वनि सुनाई देना अर्थात् प्रतिध्वनि की परिघटना तरंगों के परावर्तन का ही दैनिक जीवन का उदाहरण है।

यदि परिसीमा पूर्णत: दृढ़ नहीं है अथवा वह किन्हीं दो भिन्न प्रत्यास्थ माध्यमों के बीच अंतरापृष्ठ है तो इस स्थिति में आपतित तरंग का कुछ भाग परावर्तित हो जाता है तथा कुछ भाग दूसरे माध्यम में पारगमित हो जाता है। यदि कोई तरंग दो भिन्न माध्यमों की परिसीमा पर तिरछी आपतित होती है तो पारगमित तरंग को अपवर्तित तरंग कहते हैं।

व्याख्या-परिसीमा पर तरंगों के परावर्तन की व्याख्या करने के लिए दो स्थितियाँ लेते हैं। पहला, जिसमें डोरी का बाँया सिरा चित्र (a) के अनुसार एक दृढ़ दीवार से जुड़ा है जबकि दूसरा, जिसमें डोरी के बाँये सिरे को किसी ऐसे छल्ले से बाँधा गया है जो चित्र (b) के अनुसार किसी छड़ पर बिना घर्षण के ऊपर नीचे सरक सकता है। इन दोनों ही डोरियों में जब

कोई स्पंद संचरित किया जाता है तब यह स्पंद डोरी के बाँये सिरे पर पहुंच कर परावर्तित हो जाता है।



चित्र: 9.12

चित्र (a) में डोरी का बाँया सिरा दीवार से जुड़ा है। जब स्पंद इस सिरे पर पहुंचता है तो यह दीवार पर ऊपर की दिशा में बल आरोपित करता है। न्यूटन के तीसरे नियम से इस बल का प्रतिक्रिया बल परावर्तित तरंग स्पंद बनाता है जिसकी आवृत्ति, आपतित स्पंद जैसे ही होती है किन्तु विस्थापन की दिशा विपरीत हो जाती है। दीवार के कण दृढ़ होने के कारण वहाँ परिणामी विस्थापन शून्य रहता है। इसके लिए आवश्यक है कि परावर्तित तथा आपतित स्पंदों के चिन्ह विपरीत होने चाहिए।

इस प्रकार प्रगामी तरंगों का सुदृढ़ परिसीमा पर परावर्तन कला में उत्क्रमण अर्थात् 180° (π रेडियन) के कलांतर के साथ होता है।

चित्र (b) में डोरी एक छल्ले से बंधी है जो किसी छड़ पर बिना किसी घर्षण के ऊपर नीचे सरक सकती है इस स्थिति में जब स्पंद डोरी के बाँये सिरे पर पहुंचता है तो छल्ला छड़ पर ऊपर की ओर सरक जाता है। ऊपर की ओर जाते समय छल्ला डोरी को अपनी ओर खींचता है और डोरी तन जाती है और उसमें आपतित स्पंद के आयाम के बराबर आयाम एवं चिन्ह का परावर्तित स्पंद उत्पन्न हो जाता है। अत: इस प्रकार के परावर्तन में आपतित व परावर्तित स्पंद एक दूसरे को प्रबलित करते हैं जिसके कारण डोरी के इस सिरे पर विस्थापन अधिकतम होता है जो आपतित स्पंद तथा परावर्तित स्पंद के आयाम का दुगुना होता है। अत: इस परावर्तन में कला में कोई अंतर उत्पंन्न नहीं होता।

इस प्रकार किसी प्रगामी तरंग का किसी दृढ़ परिसीमा अथवा बंद सिरे पर परावर्तन कला- उत्क्रमण के साथ होता है। परंतु किसी खुली परिसीमा पर यह परावर्तन बिना किसी कला परिवर्तन के होता है।

आपतित तरंग का विस्थापन

$$y = a\sin(\omega t - Kx)$$

जब परावर्तन सुदृढ़ सिरे से होता है तो परावर्तित तरंग का विस्थापन

$$y_r = a\sin(\omega t + Kx + \pi)$$
$$= -a\sin(\omega t + Kx)$$

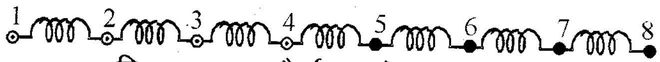
जब परावर्तन खुली परिसीमा से होता है तो

$$y_r = a\sin(\omega t + Kx)$$

9.9.2 अनुदैर्ध्य तरंगों का परावर्तन (Reflection of Longitudinal Waves)

अनुदैर्ध्य तरंगों के परावर्तन को समझने के लिए चार हल्की (कम घनत्व के पदार्थ की) तथा समान द्रव्यमान की एवं चार भारी (अधिक घनत्व के पदार्थ की) तथा समान द्रव्यमान की गेंदों पर विचार करते है। इन गेंदों को घर्षण रहित क्षैतिज सतह पर चित्रानुसार एक कतार में व्यवस्थित किया

गया है। सभी गेंदों को स्प्रिंग के छोटे तथा समान टुकड़ों की सहायता को परस्पर जोड़ा गया है। कतार के बांयी ओर की प्रथम चार गेंदे हल्की है तथा शेष दांयी ओर चार गेंदे भारी है।



चित्र 9.13 अनुदैर्ध्य तरंगों का परावर्तन

अब माना कि गेंद 1 को दांयी ओर थोड़ा विस्थापित किया जाता है। इस कारण इस गेंद 1 तथा गेंद 2 के बीच की स्प्रिंग संकुचित होती है। प्रत्यास्थता के कारण यह स्प्रिंग अपनी पूर्व अवस्था में आने के लिए प्रसारित होती है। इस कारण यह गेंद 2 को दांयी ओर धक्का देती है तथा इस गेंद तथा गेंद 3 के बीच की स्प्रिंग को संकुचित करती है। कुछ समय पश्चात् गेंद 4 तथा 5 के बीच की स्प्रिंग संकुचित होती है। इस बिंदु तक प्रथम चार गेंदें समान द्रव्यमान की होने के कारण दांयी ओर समान दूरी से विस्थापित होती है। अब गेंद 5 अपेक्षाकृत भारी होने के कारण दांयी ओर कम दूरी से विस्थापित होती है तथा गेंद 4 को बांयी ओर कुछ दूरी से विस्थापित भी करती है। इस स्थिति में सम्पीड़न स्पंद का कुछ भाग पुनः बांयी ओर तथा कुछ भाग दांयी ओर गमन करता है। बायीं ओर गतिशील भाग को परावर्तित तरंग स्पंद कहते हैं दायीं ओर गतिशील भाग को अपवर्तित तरंग स्पंद कहते है। गेंदों की यह व्यवस्था भिन्न घनत्व के दो माध्यमों की भांति व्यवहार करती है। हल्की गेंदें विरल माध्यम तथा भारी गेंदे सघन माध्यम है। इस प्रकार "जब सघन माध्यम से अनुदैर्ध्य तरंगें परावर्तित होती है तो सम्पीड़न, सम्पीड़न के रूप में तथा विरलन, विरलन के रूप में परावर्तित होते है, जबकि उनकी कला विपरीत हो जाती है।"

अब माना कि गेंद 8 को कुछ दूरी से बांयी ओर विस्थापित किया जाता है। जिससे एक सम्पीड़न स्पन्द बांयी ओर गतिशील होता है तथा कुछ समय के पश्चात् वह गेंद 5 तथा 4 के बीच की स्प्रिंग तक पहुँचता है। यह स्प्रिंग अपनी प्रारंभिक अवस्था में आने का प्रयास करती है, जिससे प्रसारित होती है तथा गेंद 4 को अधिक दूरी से विस्थापित करती है (क्योंकि यह गेंद 5 की अपेक्षा हल्की है) जिससे गेंद 5 तथा 4 के मध्य विरलन उत्पन्न होता है तथा गेंद 5 पुनः बांयी ओर विस्थापित होती है। गेंद 5 का यह विस्थापन दांयी ओर गतिशील विरलन तरंग स्पंद उत्पन्न करता है तथा उसी समय गेंद 4 के बांयी ओर गतिशील होने के कारण बांयी ओर सम्पीड़न तरंग स्पन्द गति करता है। भारी गेंदें पुनः एक के बाद एक बांयी ओर गति करती है। अतः भारी गेंदों के विस्थापन की दिशा अपरिवर्तित रहती है लेकिन सम्पीड़न की तरंग विरलन की तरंग के रूप में परावर्तित होती है। इस प्रकार "विरल माध्यम से अनुदैर्ध्य तरंगे परावर्तित होती है तो उनकी कला अपरिवर्तित रहती है, लेकिन सम्पीड़न विरलन के रूप में तथा विरलन सम्पीड़न के रूप में परावर्तित होता है।"

यही स्थिति खुले या बन्द पाईप में गतिशील अनुदैर्ध्य तरंगों के लिये प्राप्त होते है अर्थात् जब तरंगें खोखले पाइप में गमन करती हुई बंद सिरे से परावर्तित होती है तो सम्पीड़न, सम्पीड़न के रूप में तथा विरलन, विरलन के रूप में परावर्तित होता है तथा जब तरंग खोखले पाइप के खुले सिरे से परावर्तित होती है तो सम्पीड़न, विरलन के रूप में तथा विरलन, सम्पीड़न के रूप में परावर्तित होता है।

इस प्रकार

1. एक तरंग विक्षोभ (स्पंद) सघन माध्यम की अपेक्षा विरल माध्यम में अधिक वेग से गति करता है।
2. यदि तरंग विरल माध्यम से सघन माध्यम की ओर गतिशील है तो परावर्तित तरंग (अर्थात् सघन माध्यम से परावर्तित तरंग) की कला विपरीत (अर्थात् π से परिवर्तित) हो जाती है तथा यदि परावर्तन विरल माध्यम से होता है तो कला परिवर्तित नहीं होती है।
3. दूसरे माध्यम में अपवर्तित तरंग की कला सदैव अपरिवर्तित रहती है।

9.10 अप्रगामी तरंगों का निर्माण (Formation of Stationary Wave)

अप्रगामी तरंगें (Stationary Waves)

किसी माध्यम से समान आयाम तथा समान आवृत्ति की दो प्रगामी ध्वनि तरंगें किसी माध्यम में एक दूसरे के विपरीत दिशा में समान चाल से एक ही रेखा पर चल रही हैं तो उनके अध्यारोपण से एक नवीन तरंग की रचना होती हैं जिसे अप्रगामी तरंग कहते हैं।

इस परिणामी तरंग का विक्षोभ तथा ऊर्जा किसी भी दिशा में संचरित नहीं होती हैं। परिणामी तरंग के बनने के लिए माध्यम सीमित होना चाहिए। अप्रगामी तरंगें दो प्रकार की होती हैं–

1. अनुदैर्ध्य अप्रगामी तरंग–जब किसी पाइप के वायु स्तंभ में संचरित अनुदैर्ध्य प्रगामी तरंग पाइप के सिरों से परावर्तित होती है तब परावर्तित तथा आपतित तरंगों के अध्यारोपण से वायु स्तंभ में अनुदैर्ध्य अप्रगामी तरंग बनती है। जैसे–बाँसुरी, बिगुल, बीन।

2. अनुप्रस्थ अप्रगामी तरंग–जब तने हुए तार या डोरी में संचरित तरंगें डोरी के दूसरे सिरे पर परावर्तित हो जाती है तब परावर्तित व आपतित तरंगों के अध्यारोपण से अनुप्रस्थ अप्रगामी तरंग का निर्माण होता है। जैसे स्वरमापी, सितार, गिटार, इकतारा वायलिन आदि में तरंगे।

अप्रगामी तरंगों में माध्यम के जिन बिन्दुओं पर कण स्थिर रहते हैं अर्थात् कम्पन आयाम शून्य होता है उन्हें निस्पन्द (Nodes) तथा जिन बिन्दुओं पर कंपन आयाम अधिकतम होता है प्रस्पन्द (Antinodes) कहलाते है।

अप्रगामी तरंगों का निर्माण (Formation of stationary wave)

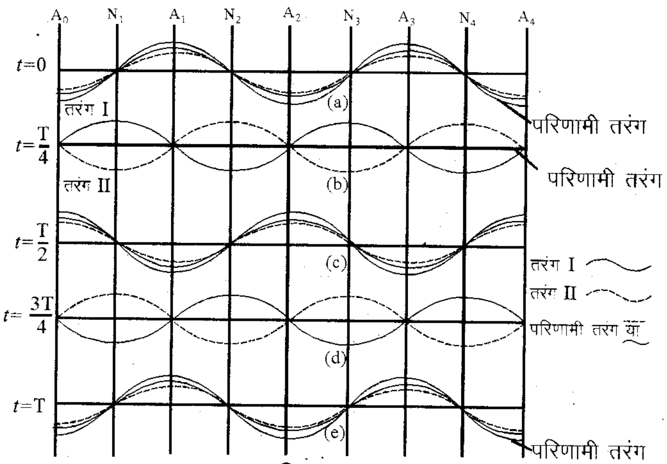
माना किसी बद्ध माध्यम से एक अनुप्रस्थ प्रगामी तरंग बांयी ओर से दांयी ओर संचरित हो रही है तथा दूसरी परावर्तित तरंग दांयी ओर से बांयी ओर संचरित हो रही हैं। बांयी ओर से दांयी ओर संचरित तरंग सतत रेखा द्वारा प्रदर्शित है तथा दांयी ओर से बांयी ओर संचरित तरंग बिन्दुकित रेखा द्वारा प्रदर्शित की जा रही है।

1. $t = 0$ पर दोनों तरंगे प्रत्येक बिन्दु पर समान कला अर्थात दोनों तरंगों के श्रृंग व गर्त समान स्थिति मे है प्रत्येक का आवर्तकाल व λ समान है। परिणामी तरंग का विस्थापन दोनों तरंगों के अलग–अलग विस्थापनों के योग के बराबर होता है। परिणामी तरंग को मोटी रेखा द्वारा व्यक्त किया गया है। बिन्दु N_1, N_2, N_3, N_4 पर विस्थापन शून्य (निस्पन्द) तथा बिन्दु A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 पर विस्थापन अधिकतम (प्रस्पन्द) है।

2. $t = \frac{T}{4}$ एक आवर्तकाल के एक चौथाई समय पश्चात दोनों तरगे $\frac{\lambda}{4}$ दूरी से अपनी–अपनी दिशा मे बढ़ जाती है। किसी क्षण पर तरंगों के प्रत्येक बिन्दु का परिणामी विस्थापन बराबर व विपरीत दिशा मे है। अतः परिणामी विस्थापन एक मोटी रेखा है।

3. $t = \frac{T}{2}$ पर दोनों तरंगे $\frac{\lambda}{2}$ से अपनी अपनी दिशा मे बढ जाती है। पुनः दोनों तरंगों के श्रृंग तथा गर्त समान दिशा है। परन्तु $t = 0$ के विपरीत दिशा मे है।

4. $t = \frac{3T}{4}$ पर दोनों तरंगे $\frac{3\lambda}{4}$ दूरी अपनी–अपनी दिशाओं मे बढ़ती है तथा प्रत्येक बिन्दु पर विस्थापन बराबर व विपरीत होने से परिणामी तरंग मोटी सरल रेखा है। परन्तु यह स्थिति $\frac{T}{4}$ के विपरीत है।



चित्र 9.14

5. $t = T$ प्रत्येक तरंग λ दूरी विस्थापित होती है तथा $t = 0$ के तुल्य है। उपर्युक्त विवेचन मे दोनों तरंगे अनुप्रस्थ ली है यदि अनुदैर्ध्य तरंग ली जाए तो इसमे माध्यम के कण तरंग की दिशा मे ही विस्थापित होते है। किसी क्षण किसी भी निस्पन्द के दोनो ओर स्थित माध्यम के बिन्दु विपरीत दिशा मे विस्थापित होते है। फलतः वे निस्पन्द से दूर हटते हैं तो निस्पन्द पर दाब कम हो जाता है। तथा इसके विपरीत जब वे निस्पन्द की ओर आते है तो निस्पन्द पर दाब बढ़ जाता है। इस प्रकार स्पष्ट है कि निस्पन्द पर दाब व घनत्व मे परिवर्तन महत्तम होता है। परन्तु प्रस्पन्द के दोनो ओर के बिन्दु किसी क्षण एक ही दिशा मे चलते है तथा प्रस्पन्द पर दाब मे कोई परिवर्तन नही होता है।

अप्रगामी तरंगों की विशेषताएँ (Characteristics of stationary waves)

1. ये तरंगे माध्यम मे आगे नही बढ़ती बल्कि अपने ही स्थान पर स्थिर रहती है।

2. इन तरंगों मे ऊर्जा का स्थानान्तरण संभव नही है परन्तु ऊर्जा का पुनर्वितरण संभव है।

3. बद्ध माध्यम के कुछ कण सदैव अपने स्थान पर स्थिर रहते हैं अर्थात् इनका विस्थापन शून्य होता है। ये निस्पन्द कहलाते है। ये समान दूरियों पर स्थिर होते है। अप्रगामी तरंगों के अनुदैर्ध्य होने की दशा मे निस्पंदो पर दाब अथवा घनत्व मे परिवर्तन महत्तम होता है।

4. अप्रगामी तरंगों मे निस्पदों के बीच–बीच मे कुछ ऐसे बिन्दु होते है जिनका विस्थापन महत्तम होता है। ये प्रस्पन्द कहलाते है। अप्रगामी तरंगों के अनुदैर्ध्य होने की दशा मे कोई दाब मे परिवर्तन नही होता।

5. दो क्रमागत प्रस्पन्दों तथा निस्पंदो के मध्य दूरी $\frac{\lambda}{2}$ तथा क्रमागत एक प्रस्पंद तथा एक निस्पंद के मध्य दूरी $\frac{\lambda}{4}$ होती है।

6. निस्पन्दों के अतिरिक्त सभी कण सरल आवर्तगति करते है। इनका आवर्तकाल तो बराबर होता है परन्तु आयाम अलग–अलग होता है। निस्पन्दों पर आयाम शून्य तथा प्रस्पन्दों पर अधिकतम होता है।

7. किसी भी क्षण दो पास–पास स्थित निस्पंदो के बीच कणो की कला समान होती है। वे साथ साथ गति करते हुए अपनी अपनी अधिकतम विस्थापन की स्थिति मे पहुँचते है तथा साथ ही साथ अपनी साम्यावस्था से गुजरते है।

8. किसी भी क्षण किसी निस्पंद के दोनो ओर के कणो का कलान्तर π होता है अर्थात् दोनो ओर के कण विपरीत कला मे कंपन करते है।

9. माध्यम के सभी बिन्दु एक आवर्तकाल मे दो बार एक साथ अपनी–अपनी साम्यावस्था मे से गुजरते है अर्थात् दो बार अप्रगामी तरंग एक सीधी रेखा का रूप ग्रहण कर लेते है।

10. अनुदैर्ध्य अप्रगामी तरंगों मे एक बार जो निस्पंद अधिकतम संपीड़न की दशा मे होता है दूसरी बार वह अधिकतम विरलन की दशा मे पाया जाता है इस प्रकार निस्पन्द एक आवर्तकाल मे दो बार एकान्तर क्रम मे अधिकतम संपीडन तथा अधिकतम विरलन की दशा मे होते है।

9.10.1 अप्रगामी तरंगों का गणितीय विश्लेषण (Mathematical Analysis of stationary waves)

माना एक प्रगामी तरंग X-अक्ष की धनात्मक दिशा मे संचरित हो रही है। a आयाम, T आवर्तकाल λ तरंगदैर्ध्य है इस तरंग के विस्थापन का समीकरण

$$y_1 = a\sin(\omega t - Kx) \qquad ...(1)$$

माना यह तरंग किसी विरल माध्यम के मुक्त सिरे से टकराती है और परावर्तित होती है तो कला में कोई परिवर्तन नहीं होता तथा परावर्तित तरंग का समी.

$$y_2 = a\sin(\omega t + Kx) \qquad ...(2)$$

तथा यदि परावर्तन दृढ़ सिरे से हो तो कला में π का परिवर्तन उत्पन्न हो जाता है तब परावर्तित तरंग का समीकरण

$$y_2 = -a\sin(\omega t + Kx) \qquad ...(2a)$$

प्रगामी तरंग तथा मुक्त सिरे से परावर्तित तरंग के अध्यारोपण से परिणामी तरंग का विस्थापन

$$y = y_1 + y_2$$
$$= a\sin(\omega t - Kx) + a\sin(\omega t + Kx)$$
$$= a\sin\omega t\cos Kx - a\cos\omega t\sin Kx + a\sin\omega t\cos Kx + a\cos\omega t\sin Kx$$
$$y = 2a\cos Kx\sin\omega t$$

यदि $R = 2a\cos Kx$ माना जाये तब ...(3)

$$y = R\sin\omega t \qquad ...(4)$$

समी. (4) अप्रगामी तरंग का समी है जिसका आयाम

$R = 2a\cos Kx$ है।

इस आयाम का मान दूरी पर निर्भर करता है।

स्थिति-1:

जब $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2} .... \frac{n\lambda}{2}$ हो तब

$$Kx = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{n\lambda}{2} = n\pi$$

(जहां $n = 0, 1, 2, 3, ...$)

इस स्थिति मे $\cos Kx$ का मान एकान्तर मे +1, −1 हो जाता है।

$\therefore$ $R = \pm 2a$

इन बिन्दुओं पर आयाम अधिकतम होगा व प्रस्पन्द प्राप्त होंगे। दो क्रमागत प्रस्पन्दों के बीच दूरी $= \frac{3\lambda}{2} - \frac{2\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$ होगी।

स्थिति-2:

जब $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, ..., (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ हो

$$Kx = \frac{2\pi}{\lambda}(2n+1)\frac{\lambda}{4} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

तब $\cos Kx = \cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = 0$ (ज़हां $n = 0, 1, 2, 3, ...$)

अतः R का मान शून्य होगा इन बिन्दुओं को निस्पन्द कहते है। तथा वे एक दूसरे से $\frac{\lambda}{2}$ दूरी पर स्थित है। स्पष्ट है कि दो क्रमागत निस्पन्द अथवा प्रस्पन्द के मध्य दूरी $\frac{\lambda}{2}$ तथा क्रमागत प्रस्पन्द व निस्पन्द के मध्य दूरी $\frac{\lambda}{4}$ होती है।

इस प्रकार अधिकतम आयाम की स्थितियों को प्रस्पन्द तथा शून्य आयाम की स्थितियों को निस्पन्द कहते हैं तथा दो क्रमागत निस्पन्दों के मध्य एक प्रस्पन्द होता है।

$\because$ $$y = 2a\cos Kx \sin\omega t$$
$$= 2a\cos Kx \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

किसी विशिष्ट कण जिसके लिए x नियत हो, का विस्थापन भिन्न–भिन्न समय पर भिन्न–भिन्न होगा। यदि इस समीकरण में $t = 0, \frac{T}{2}, \frac{2T}{2}, \frac{3T}{2}$ हो तो $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ का मान शून्य होगा। स्पष्ट है कि इन क्षणों पर माध्यम के सभी कणों का विस्थापन शून्य होता है x का मान चाहे कुछ भी हो, यह भी स्पष्ट है कि सभी कण प्रत्येक कम्पन में दो बार अपनी अपनी साम्यवस्था से साथ–साथ गुजरते है।

यदि $t = \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}, ...$ हो तो $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ का मान एकान्तर क्रम में +1 तथा –1 होगा अर्थात् इन क्षणों पर माध्यम के सभी कणों का विस्थापन अधिकतम होता है तथा एकान्तर क्रम में धनात्मक व ऋणात्मक होता है। फलतः माध्यम के कण प्रत्येक कम्पन में दो बार अधिकतम विस्थापन की स्थिति में होते है।

$$y = 2a\cos(Kx)\sin(\omega t)$$

माध्यम के कणों का वेग

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[2a\cos(Kx)\sin(\omega t)]$$
$$= 2a\omega\cos(Kx)\cos(\omega t)$$

व विकृति $= \frac{\partial y}{\partial x} = -2aK\sin(Kx)\sin(\omega t)$

अप्रगामी तरंगों के दाब में परिवर्तन

$$\Delta P = E\frac{\partial y}{\partial x}$$

यहाँ E आयतन प्रत्यास्थता गुणांक है।

$\therefore$ $$\Delta P = E[-2aK\sin(Kx)\sin(\omega t)]$$
$$\Delta P = -2aKE\sin(Kx)\sin(\omega t)$$

यदि तरंग छड़ सिरे (सघन माध्यम) से परावर्तित होती है तो

$$y_1 = a\sin(\omega t - Kx)$$
$$y_2 = -a\sin(\omega t + Kx)$$

परिणामी विस्थापन

$$y = -2a\sin Kx\cos(\omega t) \quad ...(8)$$

माध्यम के कणों का वेग

$$v = \frac{\partial y}{\partial t}$$
$$v = \frac{\partial y}{\partial t}[-2a\sin(Kx)\cos(\omega t)]$$
$$v = +2a\sin(Kx)\sin(\omega t) \quad ...(9)$$

माध्यम की विकृति $= \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[-2a\sin(Kx)\cos(\omega t)]$

$$= -2a\cos(Kx)\cos(\omega t) \quad ...(10)$$

अप्रगामी तरंगों के दाब में परिवर्तन

$$\Delta P = E\frac{\partial y}{\partial x}$$

यहाँ E आयतन प्रत्यास्थता गुणांक है।

$$\Delta P = E[-2a\cos(Kx)\cos(\omega t)]$$
$$\Delta P = -2aE\cos(Kx)\cos(\omega t) \quad ...(11)$$

तब $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, ...$ पर निस्पन्द तथा

$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4} ...$ पर निस्पन्द प्राप्त होगे।

समय के साथ परिवर्तन

1. यदि $\omega t = 0, \pi, 2\pi, ...n\pi$ हो तो

$$t = \frac{n\pi}{\omega} = \frac{nT}{2}$$

जिससे $\sin\omega t = 0$ एवं $\cos\omega t = \pm 1$ अतः कण का परिणामी विस्थापन y, विकृति तथा दाब में परिवर्तन ΔP अधिकतम तथा कण का वेग v शून्य होता है।

इस कारण से इस समय कण की गतिज ऊर्जा शून्य तथा स्थितिज ऊर्जा महत्तम होती है।

2. यदि $\omega t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, ...(2n+1)\frac{\pi}{2}$ हो तो

$$t = \frac{(2n+1)\pi}{2\omega} = (2n+1)\frac{T}{4}$$

जिससे $\sin\omega t = \pm 1$
$\cos\omega t = 0$

अतः परिणामी विस्थापन y विकृति एवं दाब में परिवर्तन ΔP शून्य होता है जबकि वेग महत्तम होता है।

अतः इस स्थिति में सभी कण स्वयं की माध्य स्थिति से गुजरेंगे उनका वेग महत्तम होगा गतिज ऊर्जा अधिकतम स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम होगी।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

अप्रगामी-तरंग का समीकरण जब परावर्तन सघन माध्यम से होता है–यदि एक प्रगामी तरंग X अक्ष के अनुदिश धनात्मक दिशा में v वेग से संचरित हो रही है तो तरंग का विस्थापन

$$y_1 = a\sin(\omega t - Kx) \quad ...(1)$$

यदि इस तरंग का परावर्तन सघन माध्यम से होता है तो परावर्तित तरंग का समीकरण

$$y_2 = -a\sin(\omega t + Kx) \quad ...(2)$$

अध्यारोपण से परिणामी तरंग का विस्थापन

$$y = -2a\sin Kx\cos\omega t \quad ....(3)$$

$y = R\cos\omega t$

जहाँ $R = -2a\sin Kx$ परिणामी तरंग का आयाम है।

(i) जब $x = 0, \lambda/2, \frac{2\lambda}{2}, ..., \frac{n\lambda}{2}$ हो तब

$$Kx = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{n\lambda}{2} = n\pi$$

जहाँ $n = 0, 1, 2, 3, ...,$ एक पूर्णांक है।

तब $\cos Kx = \pm 1$ तथा $\sin Kx = 0$ और $R = 0$

अत: इन बिन्दुओं पर कण का विस्थापन, आयाम और वेग शून्य होता है। परन्तु विकृति तथा दाब में परिवर्तन अधिकतम होता है ये बिंदु निस्पन्द कहलाते हैं।

(ii) जब $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, ..., (2n+1)\frac{\lambda}{4}$

तब $Kx = \frac{2\pi}{\lambda} \times (2n+1)\frac{\lambda}{4} = (n+\frac{1}{2})\pi = \frac{(2n+1)\pi}{2}$

जहाँ $n = 0, 1, 2, 3, ...,$ पूर्णांक है।

तब $\cos Kx = 0$ तथा $|\sin Kx| = 1$ और $R = \pm 2a$

अत: इन बिन्दुओं पर कण का विस्थापन, आयाम और वेग अधिकतम होता है। परन्तु विकृति एवं दाब में परिवर्तन शून्य होता है ये बिंदु प्रस्पन्द कहलाते हैं।

उदा.14. $y = 5\sin\pi(4.0t - .02x)$ से व्यक्त तरंग के विपरीत दिशा में चलने वाली परन्तु अन्य सभी रूप से समान तरंग का समीकरण लिखिए उक्त दोनों तरंगों के संयोजन से उत्पन्न अप्रगामी तरंग का समीकरण लिखिए। दो निकटवर्ती निस्पन्दों के बीच की दूरी ज्ञात करो।

हल–

$$y_1 = 5\sin\pi(4.0t - .02x)$$

$$y_2 = 5\sin\pi(4.0t + .02x)$$

अप्रगामी तरंग का समीकरण

$$y = 5\sin\pi(4.0t - .02x) + 5\sin\pi(4.0t + .02x)$$

$$y = 10\cos\pi(.01x)\sin\pi(4.0t)$$

$$y = 10\cos(0.01\pi x)\sin(4.0\pi t)$$

$$y = 2a\cos\frac{(2\pi x)}{\lambda}\sin\frac{(2\pi t)}{T}$$

से तुलना करने पर

$$\Rightarrow \quad 0.01\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{0.1} = 200 \text{ मीटर}$$

$$\lambda = 200 \text{ मीटर}$$

दो निकटवर्ती निस्पन्दों के मध्य दूरी $= \frac{\lambda}{2} = 100$ मीटर

उदा.15. दोनों सिरो पर बद्ध 3 मी. लम्बी डोरी के अनुप्रस्थ कंपन का समीकरण $y = 0.3\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)\cos(120\pi t)$ है तार पर बनने वाले कुल प्रस्पन्दों तथा निस्पन्दों की संख्या ज्ञात करो।

हल–

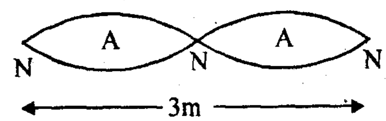
$$y = 2a\sin(Kx)\cos(\omega t)$$

से तुलना करने पर $K = \frac{2\pi}{3}$

संचरण नियतांक $K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3}$

$\lambda = 3$ मीटर तार की लम्बाई पर 3 मीटर अर्थात् सम्पूर्ण तरंग लम्बाई में एक कंपन बनेगा।

तीन निस्पन्द तथा दो प्रस्पन्द बनेंगे।



चित्र 9.15

9.10.2 प्रगामी तथा अप्रगामी तरंगों की तुलना (Comparison of Progressive and Stationary Waves)

क्र.	प्रगामी तरंग (Progressive wave)	अप्रगामी तरंग (Stationary wave)
1.	इसमे माध्यम का प्रत्येक कण अपने पास वाले दूसरे कण को ऊर्जा प्रदान करता है। इन तरंगों द्वारा माध्यम मे ऊर्जा संचरित होती है।	इन तरंगों द्वारा माध्यम में ऊर्जा संचरित नहीं होती है।
2.	इन तरंगों में माध्यम का प्रत्येक कण अपनी साम्य स्थिति के दोनों ओर कंपन करता है तथा प्रत्येक कण का कंपन आयाम बराबर होता है।	इन तरंगों में माध्यम के सभी कण कंपन नहीं करते हैं तथा प्रत्येक कण का कंपन आयाम भी बराबर नहीं होता है। निस्पन्द पर आयाम शून्य तथा प्रस्पंद पर अधिकतम होता है अर्थात् निस्पन्द से प्रस्पन्द की और जाने से आयाम मे वृद्धि होती है।
3.	इन तरंगों के किसी भी क्षण माध्यम के सभी कण एक साथ अपनी साम्य स्थिति से नहीं गुजरते है अर्थात् सभी कण क्रमशः एक के बाद एक अपनी साम्यावस्था या अधिकतम विस्थापन की स्थिति मे होते है।	इन तरंगों मे एक आवर्तकाल में दो बार माध्यम के सभी कण एक साथ अपनी साम्य स्थितियों से गुजरते है।
4.	किसी भी क्षण एक कण से दूसरे कण की कला लगातार बदलती जाती है।	किसी भी क्षण दो पास–पास के निस्पंदो के बीच के सभी कणों की कला समान होती है। परन्तु किसी निस्पन्द के दोनों ओर के कणों की कला विपरीत होती है।

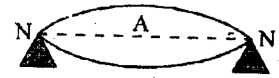
क्र.	प्रगामी तरंग (Progressive wave)	अप्रगामी तरंग (Stationary wave)
5.	ये तरंगें माध्यम मे एक निश्चित वेग से आगे बढ़ती है।	ये तरंगें माध्यम मे निश्चित सीमाओं के बीच स्थिर रहती है।
6.	अनुदैर्घ्य प्रगामी तरंगों मे माध्यम के सभी कण क्रमानुसार दाब एवं घनत्व परिवर्तन की समान दशाओं मे गुजरते हैं अर्थात् सभी बिन्दुओं पर दाब मे तथा घनत्व मे परिवर्तन होता है।	अनुदैर्घ्य अप्रगामी तरंगों मे निस्पन्द पर दाब व घनत्व परिवर्तन सबसे अधिक तथा प्रस्पन्दों पर सबसे कम होता है।
7.	अनुप्रस्थ प्रगामी तरंगों के श्रृंग एवं गर्त तथा अनुदैर्घ्य प्रगामी तरंगों के सपीड़न एवं विरलन केन्द्र एक निश्चित वेग से आगे बढ़ते है।	अनुप्रस्थ अप्रगामी तरंगों मे श्रृंग एवं गर्त तथा अनुदैर्घ्य अप्रगामी तरंगों मे सपीड़न एवं विरलन नियत स्थानों पर एकान्तर क्रम में उत्पत्र होते रहते है तथा आगे नहीं बढ़ते है।
8.	इन तरंगों में जब कण का वेग अधिकतम होता है। तो विकृति भी अधिकतम होती है। जब वेग शून्य होता है। तो विकृति भी शून्य होती है।	इन तरंगों मे निस्पन्दों पर वेग शून्य होता है। परन्तु विकृति अधिकतम होती है। जबकि प्रस्पन्दों पर वेग व विकृति शून्य होती है।
9.	ये तरंगें किसी ध्वनि उत्पादक स्त्रोत द्वारा उत्पन्न की जा सकती है।	ये तरंगें विपरीत दिशा में संचरित समान आयाम तथा समान आवृत्ति की प्रगामी तरंगों के अध्यारोपण से उत्पन्न होती है।

9.11 तनी हुई डोरी में अप्रगामी तरंगें तथा कम्पन की विधाएँ एवं कम्पन के नियम (Stationary waves in a Stretched String and modes of vibration and laws of Vibrations)

माना एक डोरी दो स्थिर बिन्दुओं के मध्य तनी हुई है डोरी मे तनाव T है। इसके एकांक लम्बाई का द्रव्यमान (रेखीय घनत्व) m है डोरी मे चलने वाली अनुप्रस्थ तरंगों का वेग

$$v = \sqrt{\frac{T}{m}}$$

अब इस डोरी को लम्बवत् दिशा मे कुछ खींचकर छोड़ा जाता है तो इसके सिरे की ओर अनुप्रस्थ प्रगामी तरंगे चलने लगती है। ये तरंगे डोरी के दृढ सिरे से टकराकर परावर्तित हो जाती है। आपतित तथा परावर्तित तरंगों में अध्यारोपण से डोरी मे अनुप्रस्थ अप्रगामी तरंग का निर्माण होता है। डोरी के दोनों सिरे कसे हुए है। कसे सिरे पर सदैव निस्पन्द बनता है तथा मध्य मे प्रस्पन्द बनता है।



चित्र: 9.16

जब डोरी के मध्य बिन्दु से थोड़ा लम्बवत् खीचकर छोडा दिया जाता है। तो डोरी एक खण्ड मे कंपन करती है। डोरी के दोनो सिरो पर निस्पन्द तथा मध्य में प्रस्पन्द बनता है। इस अवस्था में डोरी में न्यूनतम आवृत्ति का स्वर उत्पन्न होता है। जिसे मूल स्वर कहते है। इस स्थिति में डोरी की लम्बाई

$$l = \frac{\lambda_1}{2}$$

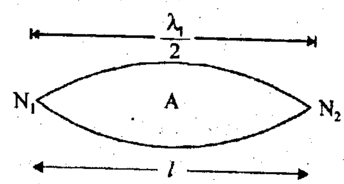
$$\lambda_1 = 2l$$

मूल स्वर की आवृत्ति

$$n_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2l}$$

$$n_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}} \qquad ...(1)$$

इस निम्नतम आवृत्ति की दोलन विधा को मूल विधा अथवा प्रथम संनादी कहते हैं।



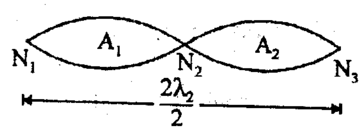
चित्र: 9.17

यदि डोरी के मध्य बिन्दु को छूते हुए उसे एक सिरे से $\frac{l}{4}$ दूरी पर स्थित बिन्दु से थोड़ा खीच कर छोड़ दिया जाता है तो डोरी दो खण्डों में कंपन करती है।

$$l = \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2}{2} = \frac{2\lambda_2}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{2l}{2}$$

इस अवस्था मे डोरी की आवृत्ति

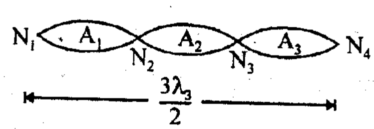


चित्र: 9.18

$$n_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{2}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}} = 2n_1 \qquad ...(2)$$

इस अवस्था में डोरी के कंपनों की आवृत्ति मूल आवृत्ति की दुगुनी होती है इस स्वरक को प्रथम अधिस्वरक या द्वितीय सनादी कहते है।

जब डोरी चित्रानुसार तीन खण्डो में कम्पन करती है। तब इस स्थिति में–



चित्र: 9.19

$$l = \frac{\lambda_3}{2} + \frac{\lambda_3}{2} + \frac{\lambda_3}{2}$$
$$= \frac{3\lambda_3}{2}$$
$$l_3 = \frac{2l}{3}$$

इस अवस्था में डोरी की आवृत्ति

$$n_3 = \frac{v}{\lambda_3}$$
$$= \frac{3}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}} = 3n_1 \qquad ...(3)$$

इस अवस्था मे डोरी के कम्पनों की आवृत्ति मूल आवृत्ति की तीन गुनी होती है। इस स्वरक को द्वितीय अधिस्वरक तथा तृतीय संनादी कहते है। इसी प्रकार यदि डोरी को चार, पाँच खण्डों मे कम्पित कराया जाये तो उच्च अधिस्वरक प्राप्त किये जाते हैं।

$$n_1 : n_2 : n_3 : .... : n_p = 1 : 2 : 3 : ...... : P$$

इस प्रकार तनी हुई डोरी मे सम व विषम प्रकार के संनादी उत्पन्न होते है।

यदि डोरी P खण्डों मे कम्पन करे तो डोरी की आवृत्ति

$$n_p = \frac{P}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}} \qquad ...(4)$$

यदि डोरी के पदार्थ का घनत्व d तथा त्रिज्या r है तो

$$n_p = \frac{P}{2l}\sqrt{\frac{T}{\pi r^2 d}} = \frac{P}{2lr}\sqrt{\frac{T}{\pi d}} \qquad ...(5)$$

महत्वपूर्ण–माना किसी स्वर में 256, 300, 440, 512, 600, 768, 800, 912 तथा 1024 हर्ट्ज की आवृत्तियां उपस्थित हैं तो इसमें 256 हर्ट्ज आवृत्ति के स्वर को मूल स्वर कहते हैं तथा शेष आवृत्तियों के स्वर अधिस्वरक कहलाते हैं (अर्थात् 300 हर्ट्ज आवृत्ति का स्वर प्रथम अधिस्वरक, 440 हर्ट्ज आवृत्ति का स्वर द्वितीय अधिस्वरक......) लेकिन 512 ($= 2 \times 256$) हर्ट्ज आवृत्ति के स्वर को द्वितीय संनादी, 768 ($= 3 \times 256$) हर्ट्ज आवृत्ति के स्वर को तृतीय संनादी कहते हैं।

डोरी के अनुप्रस्थ कंपन के नियम
(Laws of Transverse Vibrations in Strctched string)

1. **लम्बाई का नियम**– यदि डोरी मे तनाव बल T तथा एकांक लम्बाई का द्रव्यमान m नियत हो तो डोरी की आवृत्ति लम्बाई के व्युत्क्रमानुपाती होती है–

अर्थात् $\quad n \propto \frac{1}{l}$

$$nl = \text{नियतांक}$$
$$n_1 l_1 = n_2 l_2 = n_3 l_3 = \text{नियतांक}$$

2. **तनाव का नियम**– यदि डोरी की लम्बाई l व उसके एकांक लम्बाई का द्रव्यमान m नियत हो तो डोरी की आवृत्ति उसके तनाव के वर्गमूल के अनुक्रमानुपाती होती है–

$$n \propto \sqrt{T}$$

या $\quad \frac{n}{\sqrt{T}} = \text{नियतांक}$

या $\quad \frac{n_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{n_2}{\sqrt{T_2}} = ... = \text{नियतांक}$

3. **द्रव्यमान का नियम**– यदि डोरी की लम्बाई l तथा तनाव T नियत हो तो डोरी की आवृत्ति उसकी एंकाक लम्बाई के द्रव्यमान के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती है–

$$n \propto \frac{1}{\sqrt{m}}$$
$$n\sqrt{m} = \text{नियतांक}$$
$$n_1\sqrt{m_1} = n_2\sqrt{m_2} = n_3\sqrt{m_3} = \text{नियतांक}$$

$\therefore$ एकांक लम्बाई का द्रव्यमान $= \frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{लम्बाई}}$

$$= \frac{\text{घनत्व} \times \text{आयतन}}{\text{लम्बाई}}$$

यदि तार के पदार्थ का घनत्व d है तथा त्रिज्या r व लम्बाई l है तो आयतन $= \pi r^2 l$

$$m = \frac{d\pi r^2 l}{l} = \pi r^2 d$$
$$n = \frac{l}{2l}\sqrt{\frac{T}{\pi r^2 d}}$$
$$n \propto \frac{l}{\sqrt{\pi r^2 d}} \Rightarrow n \propto \frac{1}{r}$$
$$\Rightarrow \qquad n \propto \frac{1}{\sqrt{d}}$$

(i) **त्रिज्या का नियम**– यदि लम्बाई, घनत्व व तनाव नियत रहे तो आवृत्ति त्रिज्या के व्यत्क्रमानुपाती होती है–

$$n \propto \frac{1}{r} \Rightarrow n_1 r_1 = n_2 r_2 = \text{नियतांक}$$

(ii) **घनत्व का नियम**– यदि लम्बाई, तनाव व त्रिज्या नियत रहे तो आवृत्ति घनत्व के वर्गमूल के व्यत्क्रमानुपाती होती है–

$$n \propto \frac{1}{\sqrt{d}}$$

या $\quad n\sqrt{d} = \text{नियतांक}$

या $\quad n_1\sqrt{d_1} = n_2\sqrt{d_2}$ नियतांक

(4) **मेल्डी का नियम**– यदि डोरी की लम्बाई नियत रखी जाये तो डोरी के कम्पन लूपों की संख्या तथा डोरी के तनाव के वर्गमूल का गुणनफल नियत रहता है–

अर्थात् $\quad P\sqrt{T} = \text{नियतांक}$

9.12 वायु स्तम्भ में अप्रगामी तरंगें तथा कम्पन की विधाएँ (Stationary Waves in Air Column and Modes of Vibration)

महत्वपूर्ण परिभाषाएँ (Important Definitions)

1. **मूल स्वर (Fundamental Note)**– कंपन की विधा में न्यूनतम स्वर को मूल स्वर कहते है।
2. **मूल विधा (Fundamental Mode)**– किसी वस्तु के कंपन की न्यूनतम संभव विधा अथवा कंपन की सरलतम अवस्था को मूल विधा कहते है।

3. **मूल आवृत्ति व प्रथम (गुणावृत्ति) संनादी (Fundamental frequency or first harmonic)**– किसी वस्तु के कंपन की न्यूनतम आवृत्ति को मूल आवृत्ति कहते है।
4. **अधिस्वरक (Overtones)**– ये स्वरक जिनकी आवृत्तियाँ मूल स्वर से अधिक होती है अधिस्वरक कहलाते है जैसे मूल आवृत्ति के बाद वाले प्रथम उच्च आवृत्ति के स्वरक को प्रथम अधिकस्वरक कहते है।
5. **संनादी (Harmonic)**– जब अधिस्वरक की आवृत्तियाँ मूल स्वर की पूर्ण गुणांक होती है तो उन्हें संनादी कहते है।
6. **ऑर्गन पाइप (Organ pipe)**– यह पाइप जिसमें हवा भरी हुई हो जिसे कंपित करवा कर ध्वनि तरंगें पैदा की जा सके ऑर्गन पाइप कहलाता है। आर्गन पाइप का व्यास तरंगदैर्ध्य की तुलना में बहुत कम होता है। परन्तु इतना अवश्य होता है कि तरंग आसानी से आ जा सके तथा वायु की श्यानता का प्रभाव नगण्य हो, दीवारें दृढ़ हों।
7. **बन्द आर्गन पाइप**– वह पाइप जिसका एक सिरा बन्द हो बन्द आर्गन पाइप कहलाता है।
8. **खुला आर्गन पाइप**– वह पाइप जिसके दोनों सिरे खुले हों खुला आर्गन पाइप कहलाता है।

9.12.1 बन्द ऑर्गन पाइप में अप्रगामी तरंग का बनना (Stationary Waves in Closed Air Column)

जब किसी बन्द आर्गन पाइप के खुले सिरे पर फूंक मारते है तो पाइप की वायु में अनुदैर्ध्य तरंग बन्द सिरे की ओर चलती है पाइप का बन्द सिरा एक दृढ़ परिसीमा की भांति व्यवहार करता है, अर्थात् पाइप के बन्द सिरे पर वायु के कणों के कंपन नही हो सकते। अतः इस बन्द सिरे पर निस्पन्द होना चाहिए।

बन्द सिरा सपीड़न को संपीड़न के रूप में तथा विरलन को विरलन के रूप में परावर्तित करता है।

खुला सिरा संपीडन को विरलन के रूप में तथा विरलन को संपीड़न के रूप में परावर्तित करता है। इस प्रकार वायु के स्तंभ में दो अनुदैर्ध्य तरंगें विपरीत दिशाओं में चलती है जिनके अध्यारोपण से अनुदैर्ध्य अप्रगामी तरंग का निर्माण होता है। पाइप के खुले सिरे पर कणों की कंपन की अधिक स्वतंत्रता होती हैं अतः वहाँ प्रस्पन्द बनता है। बन्द ऑर्गन पाइप की सरलतम विधा में खुले सिरे पर प्रस्पन्द व बन्द सिरे पर निस्पन्द बनते है। इनके मध्य दूरी $\frac{\lambda}{4}$ है क्योंकि दो क्रमागत प्रस्पन्द व निस्पन्द के मध्य दूरी $\frac{\lambda}{4}$ होती हैं।

यदि पाइप की लम्बाई l हो तो

$$l = \frac{\lambda_1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 4l$$

उत्पन्न स्वरक की आवृत्ति n_1 तथा वायु में ध्वनि की चाल v है तो

$$n_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{4l}$$

इस आवृत्ति को मूल आवृत्ति (Fundamental frequency) कहते है। इसे प्रथम संनादी (frist harmonic) भी कहते है। यदि कंपन द्वितीय स्थिति के अनुसार होते है तो पाइप के खुले व बन्द सिरों के मध्य एक निस्पन्द तथा एक प्रस्पन्द बनता है इस दशा में तरंगदैर्ध्य का मान पहले से भिन्न है।

माना यह λ_2 है

$$l = \frac{3\lambda_2}{4}$$

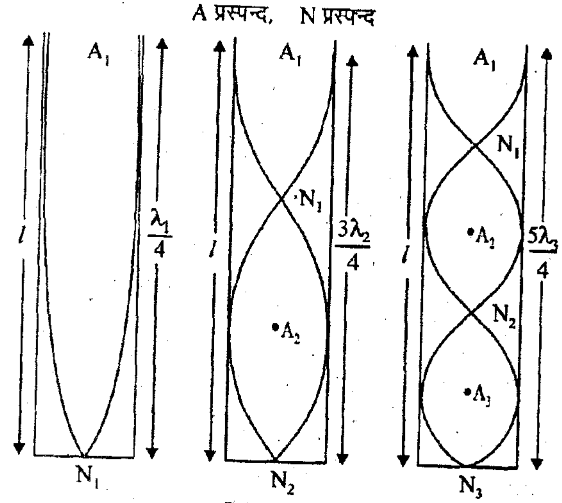
$$\Rightarrow \quad \lambda_2 = \frac{4l}{3}$$

यदि पाइप में उत्पन्न स्वरक की आवृत्ति n_2 है

$$n_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{3v}{4l} = 3n_1$$

अर्थात् इस दशा में पाइप में उत्पन्न स्वरक की आवृत्ति मूल स्वरक की आवृत्ति की तीन गुनी है यह बन्द पाइप का पहला अधिस्वरक है इसे तृतीय सनांदी भी कहते है मूल स्वर की आवृत्ति से अधिक होने के कारण अधिस्वरक तथा अधिस्वर की आवृत्ति मूल स्वर की आवृत्ति की पूर्ण गुणज होती है तो वे संनादी कहलाते है।

A प्रस्पन्द, N प्रस्पन्द



बन्द पाइप

चित्र 9.20

तृतीय स्थिति में चित्रानुसार कंपन की स्थिति में दो निस्पन्द तथा दो प्रस्पन्द बनते है इस दशा में तरंगदैर्ध्य λ_3 है तो

$$l = \frac{5\lambda_3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_3 = \frac{4l}{5}$$

$$n_1 = \frac{v}{\lambda_3} = \frac{v}{4l/5} = \frac{5v}{4l} = 5n_1$$

अर्थात् इस दिशा में उत्पन्न स्वरक की आवृत्ति मूल स्वरक की आवृत्ति की 5 गुनी होती है यह दूसरा अधिकस्वरक अथवा पंचम संनादी है।

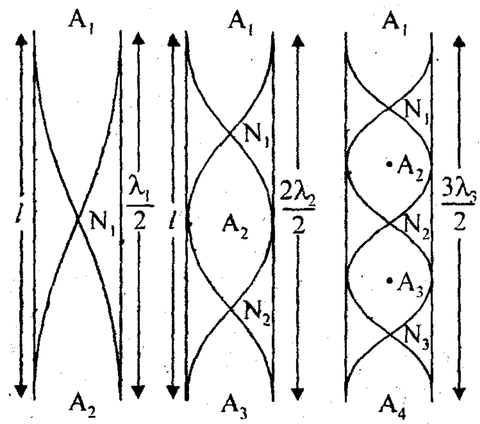
इसी प्रकार अन्य अधिस्वरक की आवृत्तियाँ ज्ञात की जा सकती है अतः बन्द पाइप में उत्पन्न कंपन आवृत्तियाँ का अनुपात

$$n_1 : n_2 : n_3 : \ldots = \frac{v}{4l} : \frac{3v}{4l} : \frac{5v}{4l} : \ldots$$
$$= 1 : 3 : 5 : \ldots$$

बन्द पाइप में केवल विषम संनादी ही उत्पन्न हो सकते है।

9.12.2 खुले ऑर्गन पाइप में अप्रगामी तरंग का बनना (Stationary Waves in Open Air Column)

जब किसी दोनों सिरें पर खुले पाइप के एक सिरे पर फूंक मारते है तो पाइप में अनुदैर्ध्य तरंग एक सिरे से दूसरे सिरे की और चलती है पाइप का दूसरा सिरा मुक्त परिसीमा की भांति इस तरंग को परावर्तित कर वापिस पहले सिरे की ओर भेज देता है, पहला सिरा एक मुक्त परिसीमा की भांति इसे परावर्तित कर पुनः दूसरे सिरे की ओर लौटाता है इस प्रकार पाइप के वायु स्तंभ में दो अनुदैर्ध्य तरंगें विपरीत दिशाओं में संचरित होती है इनके अध्यारोपण से अनुदैर्ध्य अप्रगामी तरंग का निर्माण होता है।



खुला पाइप
चित्र 9.21

खुले ऑर्गन पाइप के दोनों सिरे खुले है अतः दोनों सिरों पर सदैव प्रस्पन्द बनते हैं पाइप के मुख पर धीरे से फूँक मारने पर प्रथम वायु स्तंभ की तरह कंपन होंगे। दोनों सिरों पर प्रस्पन्द तथा मध्य में निस्पन्द बनता है। दो क्रमागत प्रस्पन्दों के मध्य दूरी $\lambda/2$ होती है अतः $l = \lambda_1/2 \Rightarrow \lambda_1 = 2l$

माना पाइप से उत्पन्न स्वरक की आवृत्ति n_1 है

$$n_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2l}$$

इसे खुले पाइप का मूल स्वरक अथवा प्रथम संनादी कहते है। यदि हम पाइप के सिरे पर जोर से फूंद मारें तो पाइप में मूल स्वरक से ऊँची आवृत्ति के स्वरक उत्पन्न होते है जिन्हें अधिस्वरक कहते है।

द्वितीय स्थिति में दो निस्पन्द व तीन प्रस्पन्द बनते है।

तरंगदैर्ध्य माना λ_2 है

$$l = \frac{2\lambda_2}{2} \Rightarrow \lambda_2 = 2l/2$$

पाइप में उत्पन्न स्वरक की आवृत्ति n_2 है तो

$$n_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{(2l/2)} = \frac{2v}{2l} = 2n_1$$

इस दशा में पाइप में उत्पन्न स्वरक की आवृत्ति मूल स्वरक की आवृत्ति की दुगुनी है। इसलिए इसे खुले पाइप का द्वितीय संनादी कहते है। इसे खुले पाइप का प्रथम अधिस्वरक भी कहते हैं।

तृतीय स्थिति में जब तीन निस्पन्द तथा चार प्रस्पन्द बनते हैं इस दशा में तरंग की तरंगदैर्ध्य λ_3 है

$$l = \frac{3\lambda_3}{2} \Rightarrow \lambda_3 = \frac{2l}{3}$$

यदि स्वरक की आवृत्ति n_3 है तो

$$n_3 = \frac{v}{\lambda_3} = \frac{v}{\frac{2l}{3}} = \frac{3v}{2l} = 3n_1$$

इस स्थिति में पाइप में उत्पन्न स्वरक की आवृत्ति मूल स्वरक की आवृत्ति की तीन गुनी है इसलिए इसे तीसरा संनादी अथवा द्वितीय अधिस्वरक कहते है।

उपर्युक्त विधि से आगे के अधिस्वरकों की आवृत्तियां ज्ञात की जा सकती है तथा खुले आर्गन पाइप के मूल स्वरक व अधिस्वरकों में सबंध–

$$n_1 : n_2 : n_3 : ...... = 1 : 2 : 3 : ....$$

खुले पाइप में सभी संनादी संभव होने के कारण उससे निकलने वाली ध्वनि मधुर होती है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

बन्द अथवा खुली नलिका द्वारा उत्पन्न स्वर की आवृत्ति उसकी लम्बाई के व्युत्क्रमानुपाती होती है अर्थात् $n \propto \frac{1}{\ell}$

यही कारण है कि नल के नीचे रखी सुराही या बाल्टी ज्यों–ज्यो भरती जाती है, वायु स्तम्भ की लम्बाई कम होने से उसमें उत्पन्न होने वाली ध्वनि की आवृत्ति बढ़ती जाती है अर्थात् आवाज पतली होती जाती है।

9.13 अनुनाद (Resonance)

जब कम्पन करने योग्य वस्तु को उसकी साम्य स्थिति से हल्का सा विस्थापित करके छोड़ दिया जाये तब यह एक निश्चित आवृत्ति से दोलन करने लगती है। यह वस्तु की स्वाभाविक आवृत्ति (Natural frequency) कहलाती है। बाह्य बल की अनुपस्थिति में वस्तु के दोलन मुक्त दोलन कहलाते है। इस स्थिति में वस्तु प्रत्यानयन बल के प्रभाव में दोलन करती है जबकि कम्पन के आयाम, आवृत्ति तथा ऊर्जा नियत रहते हैं। वह दोलन जो नियत आयाम से अनन्त समय तक दोलन करता रहता है, मुक्त दोलन कहलाता है।

किसी वस्तु के वे दोलन जिनमें आयाम समय के साथ–साथ कम होता हुआ शून्य हो जाता है। अवमंदित दोलन कहलाते हैं। इन दोलनों में अवमंदन बलों (श्यान बल, घर्षण बल आदि) के कारण वस्तु को दोलन कराने में दी गई ऊर्जा का ह्रास होता रहता है जिससे वस्तु के दोलनों का आयाम समय के साथ साथ घटता जाता है तथा कुछ समय पश्चात दोलन बन्द हो जाते है। अवमंदित दोलन करने वाले दोलक को अवमंदित दोलक कहते है।

पोषित दोलन (Maintained Oscialltions)

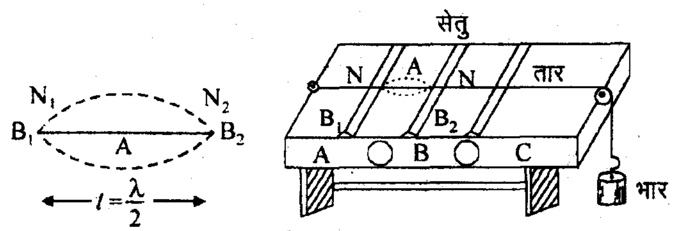
अवमंदित बलों के अन्तर्गत कम्पित वस्तु की ऊर्जा में प्रत्येक दोलन के पश्चात कमी होती है। यह ऊर्जा अवमंदित बलों के विरूद्ध कार्य करने में व्यय होती है। यदि किसी बाह्य तन्त्र द्वारा वस्तु को इतनी ऊर्जा प्रदान कर दी जाये ताकि वस्तु के दोलनों का आयाम नियत रखा जा सके तब दोलन पोषित दोलन कहलाते है।

प्रणोदित दोलन (Forced Oscillations)

जब किसी कम्पित वस्तु पर कोई बाह्य आवर्त बल (periodic force) आरोपित किया जाता है जिसकी आवृति का मान वस्तु की स्वाभाविक आवृत्ति से भिन्न होती है। तब प्रारम्भ में वस्तु स्वाभाविक आवृत्ति से दोलन करती है परन्तु बाह्य कार्य बल के प्रभाव में वस्तु बाह्य आवर्त बल की आवृति से ही दोलन करने लगती है। इस प्रकार के दोलन प्रणोदित दोलन अथवा परिचालित दोलन कहलाते है। प्रणोदित दोलनों के अन्तर्गत जब किसी दोलक पर आरोपित बाह्य आवर्त बल की आवृत्ति दोलक की स्वाभाविक आवृत्ति के बराबर हो तो इस स्थिति में प्रणोदित दोलनों का आयाम बहुत अधिक हो जाता है। प्रणोदित दोलनों की यह विशेष अवस्था **अनुनाद** कहलाती है।

9.13.1 स्वरमापी (Sonometer)

स्वरमापी एक लकड़ी का खोखला बक्सा है जिसके एक किनारे पर खूंटी तथा दूसरे किनारे पर घर्षण रहित घिरनी P लगी रहती है। स्टील के पतले तार को एक ओर खूंटी से कस देते है तथा दूसरी ओर घिरनी पर होकर लटका देते है। इस दूसरे सिरे पर हैंगर लटकाकर तथा उस पर बाँट रखकर तार मे तनाव उत्पन्न किया जाता है। B_1 तथा B_2 दो सेतू होते है। जिनकी ऊपरी धार पर तार टिक जाता है। बॉक्स की दीवार मे कुछ छेद बने होते है जिनके द्वारा अंदर की वायु का संबंध बाहर से रहता है। तार को कंपित करवाने पर B_1 तथा B_2 पर हमेशा निस्पन्द बनते है तथा इनके बीच अनुप्रस्थ अप्रगामी तरंग का निर्माण होता है। सेतुओ को खिसकाकर कम्पित तार की लम्बाई बदली जा सकती है। सेतुओं के बीच की प्रभावी लम्बाई को बॉक्स के सहारे लगे मीटर पैमाने की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है।



चित्र: 9.22

(i) स्वरमापी की सहायता से किसी स्वरित्र की आवृत्ति ज्ञात करना– पहले हैंगर पर कुछ बॉट रख कर कंपित स्वरित्र स्वरमापी के पास लाते है जिससे तार मे प्रणोदित कंपन उत्पन्न होते है। अब सेतुओं की बीच की दूरी बदलते है जिससे कंपित तार की लम्बाई बदलती है व कंपित तार की प्राकृतिक आवृत्ति स्वरित्र की आवृत्ति के बराबर हो जाती है तो तार मे अधिकतम आयाम के कंपन उत्पत्र होते है। इस स्थिति मे स्वरमापी मे तीव्रतम आवाज उत्पत्र होती है तथा सेतुओं के बीच तार पर रखा राइडर (कागज का टूकडा) गिर जाता है यहीं अनुनाद की अवस्था है।

अनुनाद की अवस्था मे तार पर लटके बॉटो का द्रव्यमान M, सेतु B_1 तथा B_2 के मध्य दूरी l, तार की त्रिज्या r स्क्रूगेज से ज्ञात कर लेते है। यदि तार के पदार्थ का घनत्व d है तो

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{Mg}{\pi r^2 d}}$$

द्वारा अज्ञात स्वरित्र की आवृत्ति ज्ञात की जा सकती है।

(ii) स्वरमापी द्वारा अनुप्रस्थ कंपन के नियमों का सत्यापन

1. लम्बाई का नियम– हैगर पर बॉट रख कर कुछ तनाव उत्पन्न करते है विभिन्न आवृत्ति वाले स्वरित्र लेते है। अब उनमे से किसी एक को कंपित करवा कर तार के पास लाते है। तार की अनुनादी लम्बाई ज्ञात करते है। सभी स्वरित्रों के लिए अनुनादी लम्बाई ज्ञात करते है यदि इनके मान $l_1, l_2, l_3, ...$ है तो $n_1, n_2, n_3.....$ स्वरित्र के लिए प्रथम नियम से

$$n_1 l_1 . = n_2 l_2 = n_3 l_3 = \text{नियतांक}$$

इस स्थिति मे तार पर तनाव स्थिर है एक ही तार का प्रयोग करने से m भी स्थिर है n तथा $\frac{1}{l}$ मे ग्राफ खीचने पर सरल रेखा प्राप्त होती है। इससे लम्बाई के नियम का सत्यापन होता है।

2. तनाव का नियम– इस नियम के सत्यापन के लिए दो अलग–अलग तारों का स्वरमापी लेते है। इनमे से एक प्रामाणिक तार तथा दूसरा प्रायोगिक तार होता है। प्रायोगिक तार के सिरे पर तनाव T_1 लगाते है तथा उसकी एक निश्चित लम्बाई l को कम्पित कराते है। सेतु को खिसकाकर प्रामाणिक तार की सेतुओं के मध्य लम्बाई को इस प्रकार समायोजित करते है कि वह प्रायोगिक तार की निश्चित लम्बाई l के साथ स्वरमेल हो जाये। प्रामाणिक तार की यह लम्बाई l_1 नोट कर लेतें है। इसी प्रकार प्रायोगिक तार की लम्बाई को स्थिर रखते हुए उस पर तनाव T_2, T_3, T_4, लगाते है। तथा प्रत्येक तनाव के लिए स्वरमेल की अवस्था मे प्रामाणिक तार की लम्बाईयाँ l_2, l_3, l_4, नोट कर लेते है। प्रयोग द्वारा ज्ञात होता है कि

$$\sqrt{T_1} : \sqrt{T_2} : \sqrt{T_3} = \frac{1}{l_1} : \frac{1}{l_2} : \frac{1}{l_3}$$

प्रामाणिक तार पर तनाव स्थिर रहने से l_1, l_2, l_3, लम्बाईयो के लिए आवृत्तियाँ क्रमशः n_1, n_2, n_3, हो तो लम्बाई के नियम से

$$n_1 : n_2 : n_3 = \frac{1}{l_1} : \frac{1}{l_2} : \frac{1}{l_3}$$

जिससे दोनों समीकरणो से

$$n_1 : n_2 : n_3 = \sqrt{T_1} : \sqrt{T_2} : \sqrt{T_3}$$

या $$n \propto \sqrt{T}$$

यदि $\sqrt{T}$ व $1/l$ के मध्य ग्राफ खींचे तो एक सरल रेखा प्राप्त होती है। इस प्रकार तनाव के नियम का सत्यापन होता है।

3. द्रव्यमान का नियम– इस नियम के सत्यापन के लिए दो अलग–अलग तारों का स्वरमापी लेते है। इनमे से एक प्रामाणिक तार होता है। जिससे पर एक निश्चित तनाव T लगाया जाता है। इसके बाद भिन्न–भिन्न मोटाइयों के प्रायोगिक तार लेकर अलग–अलग तौल लेते है तथा प्रत्येक तार की एंकाक लम्बाई का द्रव्यमान ज्ञात कर लेते है। प्रत्येक तार की समान लम्बाई l तथा समान तनाव T_1 के लिंए प्रामाणिक तार की लम्बाईयॉ ज्ञात कर लेते है। जिनकें लिंए दोनों तारों मे स्वरमेल हो।

माना कि प्रायोगिक तारों की एकांक लम्बाई के द्रव्यमान क्रमशः m_1, m_2, m_3, है तथा इनके संगत अनुनादित प्रामाणिक तार की लम्बाईयाँ क्रमशः l_1, l_2, l_3, है प्रत्येक द्वारा ज्ञात होता है। कि–

$$l_1 : l_2 : l_3 = \sqrt{m_1} : \sqrt{m_2} : \sqrt{m_3}$$

या $$\frac{1}{l_1} : \frac{1}{l_2} : \frac{1}{l_3} = \frac{1}{\sqrt{m_1}} : \frac{1}{\sqrt{m_2}} : \frac{1}{\sqrt{m_3}}$$

परन्तु प्रामाणिक तार पर तनाव T नियत रहता है। अतः यदि प्रामाणिक तार की $l_1 : l_2 : l_3$ लम्बाईयों के लिए आवृत्तियाँ क्रमशः n_1, n_2, n_3, हो तो लम्बाई के नियम से

या $$n_1 : n_2 : n_3 = \frac{1}{\sqrt{m_1}} : \frac{1}{\sqrt{m_2}} : \frac{1}{\sqrt{m_3}}$$

जिससे $$n \propto \frac{1}{\sqrt{m}}$$

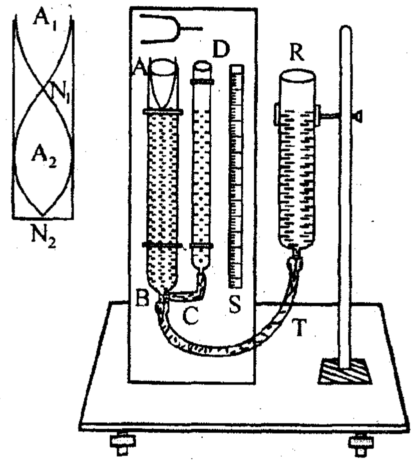
यदि $\frac{1}{l}$ तथा $\frac{1}{\sqrt{m}}$ अथवा l तथा $\sqrt{m}$ के मध्य ग्राफ खीचे तो एक सरल रेखा प्राप्त होती है। इस प्रकार द्रव्यमान के नियम का सत्यापन हो जाता है।

9.13.2 अनुनाद नली की सहायता से वायु में ध्वनि का वेग ज्ञात करना (Determination of velocity of Sound in air with the help of resonance tube)

अनुनाद नली धातु की एक मीटर लम्बी नली होती है। जिसका व्यास लगभग 5 सेमी होता है। यह नली ऊर्ध्वाधर स्टैण्ड पर कसी होती है। अनुनाद नली के निचले सिरे B को एक रबर की नली द्वारा पानी के पात्र R से चित्रानुसार जोड़ दिया जाता है। पात्र R को ऊर्ध्व स्टेण्ड पर ऊपर नीचे खिसकाकर किसी भी स्थिति मे स्थिर कर सकते है। अनुनाद नली AB को एक अन्य काँच की नली CD से रबर की नली द्वारा जोड़ देते है। पात्र R को ऊर्ध्व स्टेण्ड पर ऊपर नीचे खिसका कर किसी भी स्थिति मे स्थिर कर सकते है। अनुनाद नली के समानान्तर स्केल लगा रहता है नली CD में पानी का तल स्केल की सहायता से ज्ञात कर सकते है।

ध्वनि का वेग ज्ञात करना

एक उच्च आवृत्ति का स्वरित्र लेते है। जिसे रबर के पैड पर मार कर कंपन उत्पन्न करते है तथा नली AB के मुख के समीप इस प्रकार लाते है कि उसकी भुजाये ऊर्ध्वाधर तल मे कम्पन करें। अब पात्र R को धीरे–धीरे ऊपर नीचे करते है तथा अनुनाद नली के वायु स्तम्भ की लम्बाई को इस प्रकार समायोजित करते हैं कि तीव्रतम ध्वनि सुनाई दे इस स्थिति में अनुनाद नली के वायु स्तम्भ मे उत्पन्न अनुदैर्ध्य अप्रगामी तरंगों की आवृत्ति स्वरित्र की आवृत्ति के बराबर हो जाती है तो तीव्र ध्वनि सुनाई देती है। इस स्थिति मे काँच की नली CD में पानी के तल की स्थिति पैमानें से ज्ञात कर वायु स्तम्भ की लम्बाई l_1 ज्ञात कर लेते है। इसे प्रथम अनुनादित लम्बाई कहते है।



चित्रः 9.23

अब पात्र R को इतना नीचे करते है कि अनुनाद नली मे वायु स्तम्भ की लम्बाई प्रथम अनुनादी लम्बाई की तीन गुनी हो जाए पुनः उसी स्वरित्र को कपित अवस्था मे अनुनाद नली के मुहँ के समीप लाकर वायु स्तम्भ की लम्बाई को समायोजित कर तीव्र ध्वनि सुनाई देने की स्थिति मे लाते है। इस स्थिति मे वायु स्तंभ की लम्बाई l_2 ज्ञात कर ली जाती है। इसे द्वितीय अनुनादित लम्बाई कहते है।

नली मे अप्रगामी तरंगों का प्रस्पन्द ठीक नली के सिरे पर न बन कर कुछ बाहर x दूरी पर बनाता है। x को सिरा संशोधन या अंत्य संशोधन (end correction) कहते हैं। इसका मान नली के आकार पर निर्भर करता है। प्रयोगो द्वारा x का मान 0.3 D प्राप्त होता है। यहाँ D अनुनाद नली का व्यास है।

अनुनाद की प्रथम अवस्था में

$$l_1 + x = \frac{\lambda}{4} \quad \ldots(1)$$

द्वितीय अवस्था मे

$$l_2 + x = \frac{3\lambda}{4} \quad \ldots(2)$$

समी. (1) को 3 से गुणा कर समी. (2) मे से घटाने पर

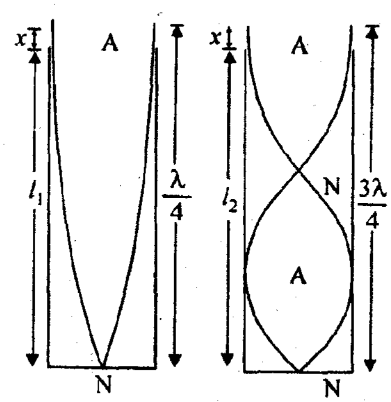
$$l_2 + x - 3l_1 - 3x = \frac{3\lambda}{4} - \frac{3\lambda}{4}$$

$$l_2 - 3l_1 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{(l_2 - 3l_1)}{2} \quad \ldots(3)$$

समी. (2) मे से (1) को घटाने पर

$$\Rightarrow \quad l_1 + x - l_1 - x = \frac{3\lambda}{4} - \frac{3\lambda}{4}$$



चित्रः 9.24

$$\Rightarrow \quad l_2 - l_1 = \frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 2(l_2 - l_1)$$

वायु मे ध्वनि का वेग

$$v = n\lambda = n \times 2(l_2 - l_1)$$

$$v = 2n(l_2 - l_1) \quad \ldots(4)$$

यदि कमरे का ताप t°C है तो

$$v_1 = v_0 + 0.61t \quad \ldots(5)$$

महत्त्वपूर्ण तथ्य

1. दोनों सिरों पर परिबद्ध l लम्बाई की तनित डोरी के दोनों सिरों पर निस्पन्द होते हैं। यदि एक सिरे को $x = 0$ लें तब दूसरे सिरे की स्थिति $x = l$ होती है। यदि एक सिरा निस्पन्द है तो

$$l = \frac{r\lambda}{2}$$

जहाँ $r = 1, 2, 3, ...$ एक पूर्णांक है।

इस डोरी पर सीमित तंरगदैर्ध्य की अप्रगामी तरंगें बन सकती हैं जिसका मान

$$\lambda = \frac{2l}{r} \qquad (\because v = n\lambda)$$

जहाँ n = तरंगदैर्ध्य के अनुरूप आवृत्ति है।

अत: r वीं गुणावृत्ति या $r-1$ वें अधिस्वरक की आवृत्ति

$$n_r = \frac{rv}{2l}$$

जहाँ v डोरी पर प्रगामी तरंगों की चाल है।

अत: आवृत्तियों का अनुपात

$n_1 : n_2 : n_3 : ...... : n_r :: 1 : 2 : 3 : ...... : r$

अधिस्वरकों का अनुपात

$n_2 : n_3 : n_4 : ..... : n_r :: 2 : 3 : 4 : ...... : r$

2. बन्द वायु स्तंभ जिसका एक सिरा खुला है यदि वायुस्तम्भ की लम्बाई l है तो खुला सिरा $x = l$ एक प्रस्पन्द होता है।

अत: $l = \frac{(2r-1)\lambda}{4}$

जहाँ $r = 1, 2, 3, ...$ एक पूर्णांक है।

या $\lambda = \frac{4l}{2r-1}$

इस प्रकार के वायु स्तंभ में कम्पन की विभिन्न विधाओं के अनुरूप $(2r-1)$ वीं गुणावृत्ति या r वें अधिस्वरक की आवृत्ति

$$n_r = \frac{(2r-1)}{4l}v$$

अत: आवृत्तियों का अनुपात

$n_1 : n_2 : n_3 : .... : n_r :: 1 : 3 : 5 : .... : (2r-1)$

अधिस्वरकों का अनुपात

$n_2 : n_3 : .... : n_r :: 3 : 5 : .... : (2r-1)$

3. जब वायु स्तम्भ के दोनों सिरे खुले हों तब r वीं गुणावृत्ति या $r-1$ वें अधिस्वरक की आवृत्ति

$$n_r = \frac{rv}{2l}$$

जहाँ $r = 1, 2, 3, ...$ एक पूर्णांक है।

अत: आवृत्तियों का अनुपात

$n_1 : n_2 : n_3 : ..... : n_r :: 1 : 2 : 3 : .... : r$

अधिस्वरकों का अनुपात

$n_2 : n_3 : .... : n_r :: 2 : 3 : .... : r$

उदा.16. एक स्वरमापी का 70 सेमी. लम्बा तार एक स्वरित्र के साथ स्वरमेल मे है। यदि तार की लम्बाई 1.0 सेमी. कर दी जाये तो तार उसी स्वरित्र के साथ 4 विस्पन्द प्रति सेकण्ड उत्पन्न करता है। स्वरित्र की आवृत्ति ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि स्वरित्र की आवृत्ति n है। तब स्वरमेल की स्थिति मे

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$= \frac{1}{2\times 70}\sqrt{\frac{T}{m}} \qquad ...(1)$$

तार की लम्बाई 1 सेमी. कम करने पर तार की लम्बाई $(70-1) =$ 69 सेमी. रह जायेगीं। तार की लम्बाई कम करने पर तार की आवृत्ति बढ़कर $(n+4)$ हो जायेगी। अत:

$$n + 4 = \frac{1}{2\times 69}\sqrt{\frac{T}{m}} \qquad ...(2)$$

समी. (2) मे (1) का भाग देने पर

$$\frac{n+4}{n} = \frac{70}{69}$$

या $$1 + \frac{4}{n} = \frac{70}{69}$$

या $$\frac{4}{n} = \frac{70}{69} - 1 = \frac{1}{69}$$

$$n = 4 \times 69 = 276 \text{ हर्ट्ज}$$

उदा.17. एक 50 सेमी. लम्बे 10 g द्रव्यमान वाले तार की आवृत्ति ज्ञात करो जब वह 288×10^5 डाइन बल से तनित है। चौथे हार्मोनिक की आवृत्ति ज्ञात करो। **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 9.7)**

हल : $\because$ दिया गया है–

$$\ell = 50\,\text{cm}, T = 288\times10^5\,\text{dyne},\ m = \frac{10}{50}\,\text{g/cm}$$

$$\because \text{ आवृत्ति } n = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{1}{2\times 50}\sqrt{\frac{288\times10^5}{10/50}} = 120\,\text{Hz}$$

चौथे हार्मोनिक की आवृत्ति $= 4 \times 120 = 480\,\text{Hz}$

उदा.18. दोनों सिरों पर खुले एक ऑर्गन पाइप की लम्बाई 0.5 मी है यदि वायु में ध्वनि का वेग 350 मी/से है तो इस ऑर्गन पाइप के मूल स्वर की आवृत्ति ज्ञात करो यदि एक सिरे को बन्द कर दे तो मूल आवृत्ति क्या होगा ?

हल– $v = 350$ मी/से.

$l = 0.5$ मी.

खुले पाइप के मूल स्वर की आवृत्ति

$$n_1 = \frac{v}{2l} = \frac{350}{2\times .5} = 350 \text{ हर्ट्ज}$$

एक सिरे पर खुले पाइप की आवृत्ति

$$n_2 = \frac{v}{4l} = \frac{350}{4\times 5} = 175 \text{ हर्ट्ज}$$

उदा.19. खींचे हुए तार पर अनुप्रस्थ तरंगों का वेग 160 मीटर/सेकण्ड है। यदि इस तार के 40 cm लम्बे सीमित

तार को बीच में से कर्षित किया जाये तो कौन सा स्वर प्राप्त होगा? **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 9.8)**

हल : ∵ दिया गया है–

$$v = 160\ m/s = 160 \times 100\ cm/s$$
$$\lambda = 2\ell = 2 \times 40\ cm$$

∵ आवृत्ति $n = \frac{v}{\lambda}$

∴ $n = \frac{160 \times 100}{2 \times 40} = 200$

इस तार को बीच में कर्षित करने पर मूल स्वर प्राप्त होगा जिसकी आवृत्ति 200 Hz होगी।

उदा.20. एक गैस में 1.00 मी. तथा 1.01 मी. तरंगदैर्ध्य की दो तरंगें 3 सेकण्ड में 10 विस्पन्द उत्पन्न करती है गैस में ध्वनि की चाल ज्ञात करो।

हल–प्रति सेकण्ड विस्पन्दों की संख्या $= n_1 - n_2 = \frac{10}{3}$

$$n_1 = \frac{v}{\lambda_1}$$

$$n_2 = \frac{v}{\lambda_2}$$

$$\Rightarrow \quad n_1 - n_2 = \frac{v}{\lambda_1} - \frac{v}{\lambda_2}$$

$$n_1 - n_2 = v\left[\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right]$$

$$= v\left[\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2}\right] = \frac{10}{3}$$

$$= v\left[\frac{1.01 - 1}{1 \times 1.01}\right] = \frac{10}{3}$$

$$\frac{10}{3} = v\left[\frac{.01}{1.01}\right]$$

$$v = \frac{1010}{3} = 336.7\ \text{मी/से.}$$

उदा.21. एक मीटर लम्बी नली का एक सिरा बन्द है। एक तना हुआ तार उसके खुले सिरे के पास स्थिर है। यह तार **0.30 m** लम्बा और **0.01 kg** द्रव्यमान का है। यह दोनों सिरों से बन्द है और अपनी मूल आवृत्ति पर अनुनाद द्वारा कम्पित करता है। ज्ञात कीजिए।

(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 9.9)

(i) वायु स्तम्भ के कम्पनों की आवृत्ति

(ii) तार का तनाव

[वायु में ध्वनि का वेग **340 m/s** लें तथा नली के सिरा संशोधन की उपेक्षा कीजिये।]

हल : (i) बन्द पाइप की मूल आवृत्ति के लिये उसकी लम्बाई $\ell = \frac{\lambda}{4}$

$\Rightarrow \lambda = 4\ell = 4 \times 1 = 4\ m$ [∵ $\ell = 1$ मीटर]

∴ आवृत्ति $n = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{4} = 85\ Hz$

(ii) 0.3 मीटर लम्बा तथा 0.01 kg द्रव्यमान का तना हुआ तार इसी आवृत्ति, 85 कम्पन/सेकण्ड से कम्पन करता है तने हुये तार की आवृत्ति

$$n = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$T = 4\ell^2 n^2 m$$

$$T = 4 \times (0.3)^2 \times (85)^2 \times \left(\frac{0.01}{0.3}\right) \quad \left[\because m = \frac{0.01}{0.3}\right]$$

$$= 86.7\ N$$

उदा.22. दो बन्द ऑर्गन नलियाँ एक साथ बजाने पर उनके मूल स्वरों के कारण 10 विस्पन्द प्रति सेकण्ड उत्पन्न होते है यदि छोटी नली की लम्बाई 0.75 मी है तो दूसरी नली की लम्बाई ज्ञात करो। [v = 330 m/s]

हल– माना नली की लम्बाई l_1 व l_2 है

$$n_1 = \frac{v}{4l_1}$$

$$n_2 = \frac{v}{4l_2}$$

$$n_1 - n_2 = \frac{v}{4l_1} - \frac{v}{4l_2} = 10$$

$$\Rightarrow \quad \frac{330}{4 \times .75} - \frac{330}{4l_2} = 10$$

$$\Rightarrow \quad 11 - \frac{33}{4l_2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 10 = \frac{33}{4l_2}$$

$$\Rightarrow \quad l_2 = \frac{33}{40} = 0.825\ \text{मीटर}$$

उदा.23. यदि **20°C** पर बन्द नली की निम्नतम आवृत्ति 256 है तो उसकी लम्बाई कितनी होगी?
(ध्वनि का वेग **0°C** पर 332 मीटर/सेकण्ड है।)

(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 9.10)

हल : दिया गया है– $t = 20°C$, $v_0 = 332\ m/s$

∵ $t°C$ पर ध्वनि का वेग

$$v_t = v_0 + 0.61\,t$$

अतः $v_{20} = 332 + 0.61 \times 20$

$= 344\ m/s$ (लगभग)

पुनः बन्द नली के लिए

$\ell = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = 4\ell$ जहाँ $\ell =$ नली की लम्बाई है

∵ तरंगदैर्ध्य $\lambda = \frac{v}{n}$

∴ $4\ell = \frac{v}{n} = \frac{34400}{256}$

दिया गया है– $v = 344\ m/s = 34400\ cm/s$

$n = 256$

$\ell = \frac{34400}{4 \times 256}$

$\ell = 33.6\,cm$

उदा.24. दोनों सिरों से खुले किसी पाईप की लंबाई 30.0 cm है। 1.1 kHz आवृत्ति के स्रोत द्वारा इस पाइप की कौनसी गुणावृत्ति विधा को अनुनाद द्वारा उत्तेजित किया जाता है? यदि इस पाइप के एक सिरे को बंद कर दिया जाए तो क्या हम फिर भी इसी स्रोत द्वारा अनुननाद सुन सकते हैं? वायु में ध्वनि की चाल 330 m s^{-1} है।

हल– दिया है–खुले पाईप की लम्बाई $l = 30$ सेमी. $= 0.3$ मी., वायु में ध्वनि की चाल $v = 330$ मी./से.

स्रोत की आवृत्ति $n = 1.1$ किलो हर्ट्ज् $= 1.1 \times 10^3$ हर्ट्ज

$\because$ खुले पाइप में सम एवं विषम दोनों प्रकार के सनांदी उत्पन्न होते हैं अतः खुले पाईप के लिए

r वीं गुणावृत्ति की आवृत्ति $n = \frac{rv}{2l}$

जहां $r = 1, 2, 3 \ldots$ एक पूर्णांक संख्या

$$\Rightarrow \quad r = \frac{2ln}{v} = \frac{2 \times 0.3 \times 1.1 \times 10^3}{330}$$

$$= 2 \times \frac{330}{330} = 2$$

अतः द्वितीय गुणावृत्ति विधा, अनुनाद उत्पन्न करेगी।

पाईप के एक सिरे को बंद करने पर–

केवल विषम संनादी उत्पन्न होंगे तथा

$(2r-1)$ वीं गुणावृत्ति की आवृत्ति $n = \frac{(2r-1)v}{4l}$

$r = 1, 2, 3, \ldots.$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{1}{2}\left(\frac{4nl}{v} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4 \times 1.1 \times 10^3 \times 0.3}{330} + 1\right)$$

$$= = \frac{1}{2}(4+1) = 2.5$$

$\because r$ का मान पूर्णांक प्राप्त नहीं होता अतः बन्द पाईप की कोई भी गुणावृत्ति विधा स्रोत के साथ अनुनाद उत्पन्न नहीं कर सकेगी।

उदा.25. अनुनाद नली मे वायु स्तंभ के साथ एक स्वरित्र 16.2 सेमी. व 50.4 सेमी. लम्बाई पर अनुनाद उत्पन्न करता है यदि स्वरित्र की आवृत्ति 512 कम्पन/से. है तो ध्वनि का वेग ज्ञात कीजिए। वायु स्तंभ मे उत्पन्न तरंग की λ भी ज्ञात कीजिए।

हल:

$n = 512$ कम्पन/से.

$l_1 = 16.2$ सेमी.

$= 0.162$ मी.

$l_2 = 50.4$ सेमी.

$= 0.504$ मी.

$v = 2n(l_2 - l_1)$

$= 2 \times 512[0.504 - 0.162]$

$= 350.2$ मी/से.

तरंगदैर्ध्य $\quad \lambda = \frac{v}{n} = \frac{305.2}{512}$

$= 0.681$ मी.

उदा.26. एक अनुनाद नली के प्रयोग मे 512 हर्ट्ज आवृत्ति के स्वरित्र से अनुनादित वायु स्तम्भ की दो क्रमागत लम्बाईयाँ 16 सेमी. तथा 50 सेमी. प्राप्त होती है। ध्वनि की चाल तथा सिरा संशोधन ज्ञात करो।

हल: दिया गया है–

$l_1 = 16$ सेमी

$l_2 = 50$ सेमी.

$n = 512$ हर्ट्ज

ध्वनि की चाल $\quad v = 2n(l_2 - l_1)$

$= 2 \times 512[50 - 16]$

$= 34816$ सेमी/से.

$v = 348.16$ मी./से.

सिरा संशोधन $\quad x = \frac{l_2 - 3l_1}{2}$

$= \frac{50 - 3 \times 16}{2}$

$= 1$ सेमी.

9.14 ध्वनि तरंगें तथा विभिन्न माध्यमों में ध्वनि का वेग (Sound Waves and Velocity of Sound in Various media)

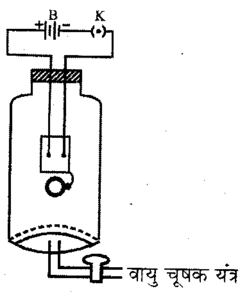
जिन तरंगों के कंपनों के द्वारा हमारा कर्ण पटल (ear-drum) कम्पित होता है तथा कंपन संकेत मस्तिष्क में संचरित होकर हमें ध्वनि का आभास कराते हैं, ध्वनि तरंगें कहलाती है।

मनुष्य के कान एक निश्चित आवृत्ति परास के लिए ही संवेदनशील होते हैं। इस आवृत्ति परास में प्राप्त तरंगों को हम सुन सकते हैं। इस आवृत्ति परास को श्रव्य आवृत्ति परास कहते हैं तथा तरंगें श्रव्य तरंगें कहलाती है। इनका मान 20 Hz से 20 KHz होता है। तनी हुई डोरी, तबले की झिल्ली तथा मानव स्वर से उत्पन्न तरंगें श्रव्य तरंगों का उदाहरण है। श्रव्य आवृत्ति से अधिक आवृत्ति की तरंगों को पराश्रव्य तरंगें (ultrasonic waves) कहते हैं। मच्छर, कुत्ता तथा चमगादड़ इन तरंगों को पहचान सकते हैं। पराश्रव्य तरंगों की तरंगदैर्ध्य $\lambda < 1.66$ cm होती है। श्रव्य तरंगों से कम आवृत्ति की तरंगों को अवश्रव्य तरंगें (Infrasonic waves) कहते हैं। भूकंप से उत्पन्न होने वाली अथवा समुद्र में उत्पन्न होने वाली तरंगें अवश्रव्य तरंगों का उदाहरण है। इनकी तरंगदैर्ध्य $\lambda > 16.6$ m होती है।

ध्वनि तरंगों के गुण

1. इनके संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता होती है।
2. इन तरंगों को एक स्थान से दूसरे स्थान तक गमन करने में समय लगता है तथा सामान्य ताप व दाब पर इनका वेग 332 मी./से. होता है।
3. इनकी प्रकृति अनुदैर्ध्य होती हैं।
4. ध्वनि तरंगों का परावर्तन, अपवर्तन, व्यतिकरण एवं विवर्तन होता है।
5. ध्वनि तरंगों का ध्रुवण नहीं होता है क्योंकि ये अनुदैर्ध्य प्रकृति की होती है।

ध्वनि तरंगों के संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता–चित्रानुसार कांच का एक जार लेते हैं जिसके अन्दर विद्युत घंटी रखी जाती है। विद्युत घंटी का संबंध एक बैटरी B व कुंजी से पात्र के बाहर कर दिया जाता है। पात्र के पैंदे से एक नली जुड़ी होती है जिसका सम्बन्ध एक वायु चूषक पम्प से होता है। जब पात्र में हवा होती है तो घंटी बजाने पर इसकी ध्वनि सुनायी देती है, परन्तु जार में से वायु को पम्प द्वारा कम करते जाएँ तो ध्वनि मंद होती जाती है, जबकि घंटी में समान धारा प्रवाहित हो रही है। कुछ समय पश्चात् जब घंटी में वायुदाब अल्यल्प हो जाता है अर्थात् पात्र में निर्वात हो जाता है तो ध्वनि बिल्कुल नहीं सुनायी देती है। इस प्रकार यह स्पष्ट होता है कि ध्वनि के संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता होती है।



चित्र: 9.25

विभिन्न माध्यमों में ध्वनि का वेग
(Velocity of Sound in Different Medium)

यांत्रिक तरंगों की चाल माध्यम के दो गुणों पर निर्भर करती हैं–
(i) प्रत्यास्थता तथा (ii) जड़त्व पर

माध्यम की प्रत्यास्थता अधिक होने पर भी ध्वनि की चाल अधिक हो जाती है, जबकि जड़त्व अधिक होने पर ध्वनि की चाल कम हो जाती है।

न्यूटन का सूत्र–सर्वप्रथम न्यूटन ने गणना द्वारा यह सिद्ध किया कि यदि किसी माध्यम का प्रत्यास्थता गुणांक E तथा घनत्व d हो तो माध्यम में अनुदैर्ध्य तरंगों की चाल v का मान निम्न सूत्र द्वारा दिया जाता है–

$$v = \sqrt{\frac{E}{d}} \qquad ...(1)$$

इस सूत्र द्वारा किसी भी माध्यम में अनुदैर्ध्य ध्वनि तरंगों की चाल ज्ञात की जा सकती है। ठोस माध्यम के लिए यंग प्रत्यास्थतागुणांक Y हो तो ठोस (छड़) में अनुदैर्ध्य तरंगों की चाल

$$v = \sqrt{\frac{Y}{d}} \qquad ...(2)$$

उदाहरण–लोहे में अनुदैर्ध्य तरंग की चाल v = 5096 मी./से.

द्रव माध्यम के लिए आयतन प्रत्यास्थता गुणांक B हो तो द्रव में अनुदैर्ध्य तरंगों की चाल

$$v = \sqrt{\frac{B}{d}} \qquad ...(3)$$

जबकि माध्यम के लिए आयतन प्रत्यास्थता गुणांक

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} \qquad ...(4)$$

जहां ΔP = दाब में परिवर्तन

$\frac{\Delta V}{V}$ = आयतन विकृति

उदाहरण–जल (20°C) में अनुदैर्ध्य तरंग की चाल v = 1480 मी./से.

किसी गैस में ध्वनि की चाल का परिकलन आदर्श गैस के संदर्भ में किया जा सकता है।

आदर्श गैस अवस्था समीकरण से

$$PV = nRT \qquad ...(5)$$

जहां P = गैस का दाब, V = गैस का आयतन तथा T = गैस का ताप

∵ जब ध्वनि किसी गैस में संचरित होती है तो सभी प्रक्रम समतापीय होते हैं अर्थात् गैस के दाब तथा आयतन में परिवर्तन होता है परन्तु तापमान नियत रहता है।

समी. (5) से

$$P\Delta V + V\Delta P = 0 \qquad \because \Delta T = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = P$$

∴ समी. (4) से समतापी प्रत्यास्थता $B_{समतापी} = P$

समी. (3) में मान रखने पर गैस माध्यम के लिए ध्वनि की चाल

$$v = \sqrt{\frac{P}{d}}$$

जहाँ P गैस का दाब है। इसे न्यूटन का सूत्र कहते हैं।

N.T.P. पर वायु के लिए

$$P = 1.01 \times 10^5 \text{ न्यूटन/मी.}^2$$

तथा $d = 1.3$ किग्रा./मी.^{3}

जिससे $$v = \sqrt{\frac{1.01 \times 10^5}{1.3}} = 279 \text{ मी./से.}$$

इस प्रकार न्यूटन के इस सूत्र के अनुसार वायु में N.T.P. पर ध्वनि की चाल 279 मी./से. होनी चाहिए। परन्तु प्रयोगों द्वारा इसका मान 332 मी./से. प्राप्त होता है। इस अन्तर को समझाने में न्यूटन असफल रहा। इस अन्तर का संशोधन सर्वप्रथम लॉप्लास ने किया जिसे लॉप्लास का संशोधन कहते हैं।

लॉप्लास का संशोधन–लॉप्लास के अनुसार गैसों में परिवर्तन इतने तेजी से होते हैं कि संपीड़न के समय माध्यम के कणों का ताप बढ़ जाता है जबकि विरलन के समय ताप घट जाता है। इस प्रकार ध्वनि तरंगों का माध्यम में संचरण रूद्धोष्म प्रक्रम होता है। समतापी प्रक्रम नहीं होता है।

अतः रूद्धोष्म प्रक्रम के अवस्था समीकरण से

$$PV^{\gamma} = \text{नियतांक}$$

जिससे $$\Delta(PV^{\gamma}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad P\gamma V^{\gamma-1}\Delta V + V^{\gamma}\Delta P = 0$$

$$-\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = \gamma P$$

∴ समी. (4) से रुद्धोष्म प्रत्यास्थता $B_{रुद्धोष्म} = \gamma P$

अतः समी. (3) से

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{d}}$$

यहाँ $$\gamma = \frac{C_P}{C_v}$$

$$= \frac{\text{स्थिर दाब पर गैस की मोलर विशिष्ट ऊष्मा}}{\text{स्थिर आयतन पर गैस की मोलर विशिष्ट ऊष्मा}}$$

अतः लॉप्लास के अनुसार गैसों में ध्वनि की चाल

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{d}}$$

वायु के लिए $\gamma = \frac{C_P}{C_v} = 1.41$

जिससे $v = \sqrt{\frac{1.41 \times 1.01 \times 10^5}{1.3}}$

$= \sqrt{1.41} \times 279 = 331.3$ मी./से.

इस प्रकार इस समीकरण द्वारा वायु में N.T.P. पर ध्वनि की चाल लगभग 332 मी./से. प्राप्त होती है। यह प्रयोग द्वारा प्राप्त मान के बराबर है। अतः लाप्लास का संशोधन ठीक है।

ध्वनि का वेग विभिन्न माध्यमों में भिन्न–भिन्न होता है। ठोसों में ध्वनि का वेग अधिकतम तथा गैसों में ध्वनि का वेग न्यूनतम होता है, जबकि निर्वात् में ध्वनि का संचरण नहीं होता है।

ठोसों तथा द्रवों के घनत्व गैसों के घनत्व की तुलना में कहीं अधिक होते हैं परन्तु ठोसों तथा द्रवों में ध्वनि की चाल गैसों की तुलना में अधिक होती है क्योंकि ठोसों तथा द्रवों में गैसों की तुलना में कम संपीड़न होता है अर्थात् ठोसों व द्रवों का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक गैसों की तुलना में बहुत अधिक होता है।

9.15 ध्वनि के वेग की ताप पर निर्भरता (Dependency of Velocity of Sound on Temperature)

$\because$ गैस समीकरण के अनुसार

$$PV = RT$$

$\because$ आयतन $V = \frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{घनत्व}} = \frac{M}{d}$

$\therefore$ $\frac{PM}{d} = RT$

$\Rightarrow$ $\frac{P}{d} = \frac{RT}{M}$

$\because$ वायु में ध्वनि की चाल $v = \sqrt{\frac{\gamma P}{d}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$

$\therefore$ $v \propto \sqrt{T}$

अर्थात् वायु में ध्वनि की चाल परम ताप के वर्गमूल के समानुपाती होती है।

यदि ताप में परिवर्तन बहुत कम है तो ध्वनि की चाल की गणना निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात की जा सकती है–

$$v_t = v_0 + \frac{v_0}{546} t$$

यहाँ $v_t = t°C$ ताप पर ध्वनि की चाल मी./से. में

$v_0 = 0°C$ ताप पर ध्वनि की चाल मी./से. में

वायु के लिए N.T.P. पर ध्वनि की चाल

$v_0 = 332$ मी./से. मानों तो

$$v_t = v_0 + \frac{332}{546} t$$

$v_t = v_0 + 0.61\,t$ मी./से.

अतः स्पष्ट है कि प्रति °C ताप बढ़ने पर वायु में ध्वनि की चाल 0.61 मी./से. बढ़ जाती है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

1. मैक नम्बर–वस्तु की चाल का ध्वनि की चाल से अनुपात मैक नम्बर कहलाता है।

$$\text{मैक नम्बर} = \frac{\text{वस्तु की चाल}}{\text{ध्वनि की चाल}}$$

यदि मैक नम्बर 1 है तब वस्तु की चाल = ध्वनि की चाल = 332 मी./से.

2. ध्वनि तथा प्रकाश तरंगों में अन्तर–

(i) ध्वनि तरंगें यांत्रिक तरंगे है जबकि प्रकाश विद्युत चुम्बकीय तरंग है। इसी कारण ध्वनि के गमन हेतु माध्यम की आवश्यकता होती है जबकि प्रकाश निर्वात् में भी गमन कर सकता है।

(ii) ध्वनि की चाल सघन माध्यम में अधिक तथा विरल माध्यम में कम होती है जबकि प्रकाश तरंगों की चाल सघन माध्यम में कम तथा विरल माध्यम में अधिक होती है।

3. गैस में ध्वनि के वेग को प्रभावित करने वाले कारक

(i). दाब का प्रभाव (Effect of pressure) :

$\because$ $\frac{P}{d} = \frac{RT}{M}$

जब परम ताप T तथा द्रव्यमान M नियत हो तो

$\frac{P}{d}$ = नियतांक

इस स्थिति में दाब P का मान बदलने पर घनत्व d का मान भी इस प्रकार बदलता है कि P/d का मान नियत रहे। अतः गैस का ताप नियत रहने पर ध्वनि की चाल पर दाब का कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

(ii) आर्द्रता का प्रभाव (Effect of humidity) :

आर्द्र वायु से तात्पर्य जल वाष्प मिली वायु से है। आर्द्र वायु का घनत्व शुष्क वायु से कम होता है। सूत्र $v = \sqrt{\frac{\gamma P}{d}}$ से स्पष्ट है कि आर्द्र वायु में ध्वनि की चाल शुष्क वायु में ध्वनि की चाल से अधिक होगी अर्थात् आर्द्रता बढ़ने पर ध्वनि की चाल बढ़ जाती है। इसी कारण से वर्षा में वाहनों के होर्न की ध्वनि अधिक दूरी तक सुनाई देती है।

(iii) अणुभार (अथवा घनत्व) का प्रभाव (Effect of molecular weight):

$\because$ गैस में ध्वनि की चाल $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$

यदि ताप का मान नियत हो तो $v \propto \frac{1}{\sqrt{M}}$

अर्थात् गैस में ध्वनि की चाल गैस के अणुभार के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती होती है। जबकि गैस का घनत्व अणुभार के समानुपाती होती है। अतः नियत ताप पर गैस का घनत्व बढ़ाने पर ध्वनि की चाल कम हो जाती है।

(iv) माध्यम की चाल का प्रभाव (Effect of speed of medium) :

ध्वनि का संचरण माध्यम के कणों द्वारा होता है। यदि ध्वनि की चाल तथा माध्यम की चाल समान दिशा में हो तो ध्वनि की आभासी चाल बढ़ जाती है जबकि विपरीत होने पर कम हो जाती है। अन्य कारकों जैसे कला, प्रबलता, तारत्व, गुणता आदि का ध्वनि के वेग से कोई सम्बन्ध नहीं है।

उदा.27. यदि कमरे के ताप पर वायु में ध्वनि का वेग 340 मी./से. है वायु का घनत्व 1.2 किग्रा/मी.^{3} है तो वायुमण्डलीय दाब की गणना करो।

$$\gamma = 1.4$$

हल–लाप्लास के सूत्र से

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{d}}$$

v = 340 मी./से., $\gamma = 1.4, d = 1.2$ किग्रा./से.^{3}

$$v^2 = \frac{\gamma P}{d}$$

$$P = \frac{v^2 d}{\gamma}$$

$$h\rho g = \frac{v^2 d}{\gamma}$$

$$h = \frac{v^2 d}{\gamma \rho g}$$

$\because$ ρ(पारे का घनत्व) = 13.6×10^3 किग्रा./मी.^{3}

$$g = 9.8 \text{ मी./से.}^2$$

$$h = \frac{340 \times 340 \times 13.6 \times 10^3}{1.4 \times 13.6 \times 10^3 \times 9.8}$$

= 0.743 मी. पारे की ऊँचाई

उदा.28. उस ताप का मान ज्ञात कीजिए जिस पर ध्वनि का वेग उसके 0°C ताप पर वेग का 1.25 गुना होगा ?

हल–$\because$ प्रश्नानुसार $\frac{v}{v_0} = 1.25$

$$\frac{v}{v_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}}$$

$$1.25 = \sqrt{\frac{T}{273}}$$

$\therefore$ $T_0 = 0 + 273 = 273\text{K}$

$\therefore$ $T = 273 \times (1.25)^2 = 426.6\text{K}$

$= 426.6 - 273 = 153.6°\text{C}$

उदा.29. स्टील की छड़ मे ध्वनि का वेग ज्ञात कीजिये- स्टील का यंग प्रत्यास्थता गुणांक Y = 21.4 × 10^{10} न्यूटन/मी.^{2} घनत्व 7.6 × 10^3 किग्रा./मी.^{3}

हल: $E = Y = 21.4 \times 10^{10}$ न्यूटन/मी.^{2}

$d = 7.6 \times 10^3$ kg/मी.^{3}

$$v = \sqrt{\frac{E}{d}} = \sqrt{\frac{21.4 \times 10^{10}}{7.6 \times 10^3}}$$

= 5306 मी./से.

उदा.30. न्यूटन के सूत्र का उपयोग करके मानक ताप एवं दाब (STP) पर वायु में ध्वनि की चाल का आंकलन कीजिए। वायु के 1 मोल का द्रव्यमान 29.0 × 10^{-3} kg है।

हल– दिया है–1 मोल वायु का द्रव्यमान $M = 29 \times 10^{-3}$ किग्रा.

तथा STP पर 1 मोल वायु का आयतन

V = 22.4 लीटर

= 22.4×10^{-3} मी.^{3} होता है।

अतः STP पर वायु का घनत्व

$$d = \frac{M}{V} = \frac{29 \times 10^{-3}}{22.4 \times 10^{-3}} = 1.294 \text{ किग्रा/मी.}^3$$

STP पर दाब P = 1 वायुमण्डलीय = 1.013×10^5 न्यूटन/मी.^{2}

अतः ध्वनि की चाल (न्यूटन सूत्र से)

$$v = \sqrt{\frac{P}{d}} = \sqrt{\frac{1.013 \times 10^5}{1.294}}$$

$= 279.79 \times 10^2$ मी./से.

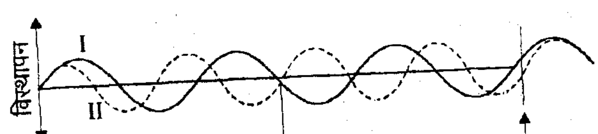
या v = 280 मी./से.

9.16 विस्पन्द तथा इसके अनुप्रयोग (Beats and its Application)

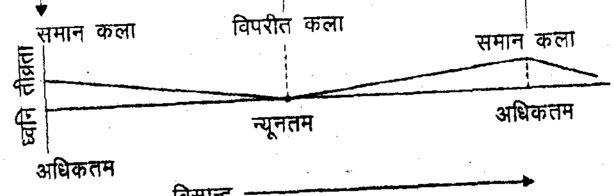
जब दो लगभग समान आवृत्ति की ध्वनि तरंगे एक ही दिशा मे गति करती हुई किसी बिन्दु पर अध्यारोपित होती है तो अध्यारोपण के कारण परिणामी तरंग का आयाम व तीव्रता समय के साथ बदलते है अर्थात् ध्वनि की तीव्रता में आवर्ती रूप से उतार चढ़ाव होता है। अतः एक ही स्थान पर ध्वनि की तीव्रता में नियत समयान्तराल में होने वाले नियमित उतार-चढ़ाव को **विस्पन्द (Beats)** कहते हैं। यह इसलिए होता है कि आवृत्तियों मे अन्तर के कारण तरंगों के बीच कलान्तर का मान समय के साथ परिवर्तित होता रहता है।

प्रारम्भ मे जब तरंगे समान कला मे चलना प्रारम्भ करती है तब उनका परिणामी आयाम उनके पृथक आयामों का योग होता है क्योंकि तरंगों की आवृत्ति मे थोड़ा अन्तर है तथा उनके तरंगदैर्ध्य मे भी अन्तर होता है। अतः समय के साथ कम तरंगदैर्ध्य वाली तरंग दूसरी तरंग से पिछड़ जाती है। जब एक तरंग दूसरी तरंग से $\frac{\lambda}{2}$ पीछे रह जाती है तो दोनों तरंगों के विपरीत कला मे होने से इसके अध्यारोपण से विनाशी व्यतिकरण उत्पन्न होता है। स्पष्ट है कि इस दिशा मे ध्वनि तीव्रता अल्पतम होगी।

तरंगो मे जब यह कलान्तर $\frac{\lambda}{2}$ से बढ़ता जाएगा। कुछ समय बाद इसका मान λ होगा अर्थात् एक तरंग दूसरे से λ से पीछे होगी इस स्थिति मे तरंगे समान कला मे होगी। अतः संपोषी व्यतिकरण होगा। स्पष्ट है कि इस स्थिति में ध्वनि की तीव्रता अधिकतम होगी। इस प्रकार ध्वनि की तीव्रता बारी-बारी से घटती और बढ़ती है। प्रथम तीव्र ध्वनि से द्वितीय तीव्र ध्वनि के अंतर को एक विस्पन्द कहते है अर्थात् ध्वनि की तीव्रता मे एक चढ़ाव व एक उतार मिलकर एक विस्पंद बनाते है।



चित्र: 9.26



चित्र: 9.27

संगीतज्ञ विस्पंद परिघटना का उपयोग अपने वाद्यों के समस्वरण में करते हैं। यदि कोई वाद्य यंत्र किसी मानक आवृत्ति के यंत्र के साथ बजाया जाता है तब वे अपने यंत्र को विस्पंद समाप्त होने तक समस्वर करते रहते हैं तथा विस्पंद समाप्त होने पर उनका वाद्य यंत्र मानक के साथ समस्वरित हो जाता है।

9.16.1 विस्पन्द का गणितीय विश्लेषण (Mathematical Analysis of Beats)

माना दो ध्वनि तरंगे जिनके आयाम a_1 तथा a_2, आवृत्तियाँ n_1 व n_2 है एक ही दिशा में चलकर अध्यारोपण के पश्चात किसी बिन्दु पर विस्पन्द उत्पन्न करती है।

तरंगों को निम्न समीकरण से प्रदर्शित करते हैं–

$$y_1 = a_1 \sin(2\pi n_1 t)$$

$$y_2 = a_2 \sin(2\pi n_2 t)$$

यहाँ कलाएँ $\phi_1 = \phi_2 = 0$ है।

अध्यारोपण के सिद्धान्त से परिणामी विस्थापन

$$y = y_1 + y_2$$

$$= a_1 \sin(2\pi n_1 t) + a_2 \sin(2\pi n_2 t)$$

$n_1 > n_2$ माना

$$n_1 - n_2 = \Delta n$$

$$\Rightarrow \quad n_1 = n_2 + \Delta n$$

यहाँ Δn अल्प आवृत्ति अन्तराल है।

n_1 का मान रखने पर

$$y = a_1 \sin 2\pi(n_2 + \Delta n)t + a_2 \sin(2\pi n_2 t)$$

$$y = a_1 \sin(2\pi n_2 t + 2\pi \Delta n t) + a_2 \sin(2\pi n_2 t)$$

$$\{\because \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B\}$$

$$\{\sin(2\pi n_2 t + 2\pi\Delta n t) = \sin(2\pi n_2 t)\cos(2\pi\Delta n t) + \cos(2\pi n_2 t)\sin(2\pi\Delta n t)\}$$

मान रखने पर

$$y = a_1 \sin(2\pi n_2 t)\cos(2\pi\Delta n t)$$

$$+ a_1 \cos(2\pi n_2 t)\sin(2\pi\Delta n t) + a_2 \sin(2\pi\Delta n_2 t)$$

$$y = \sin(2\pi n_2 t)[a_1 \cos(2\pi\Delta n t) + a_2] + [a_1 \cos(2\pi n_2 t)\sin(2\pi\Delta n t)]$$

माना

$$a_1 \cos(2\pi\Delta n t) + a_2 = R\cos\alpha \quad \ldots(1)$$

$$a_1 \sin(2\pi\Delta n t) = R\sin\alpha \quad \ldots(2)$$

$$y = \sin(2\pi n_2 t)[R\cos\alpha] + \cos(2\pi n_2 t)(R\sin\alpha)$$

$$y = R[\sin(2\pi n_2 t)\cos\alpha + \cos(2\pi n_2 t)\sin\alpha]$$

$$y = R\sin(2\pi n_2 t + \alpha) \quad \ldots(3)$$

यह परिणामी तरंग का समीकरण है जिसका आयाम R है।

समी. (1) व (2) का वर्ग करके जोड़ने पर

$$[a_1 \cos(2\pi\Delta n t) + a_2]^2 = R^2 \cos^2\alpha$$

$$[a_1 \sin(2\pi\Delta n t)]^2 = R^2 \sin^2\alpha$$

$$a_1^2 \cos^2(2\pi\Delta n t) + 2a_1 a_2 \cos(2\pi\Delta n t) + a_2^2$$

$$+ a_1^2 \sin^2(2\pi\Delta n t) = R^2\cos^2\alpha + R^2\sin^2\alpha$$

$$a_1^2 + 2a_1 a_2 \cos(2\pi\Delta n t) + a_2^2 = R^2$$

$$R^2 = a_1^2 + 2a_1 a_2 \cos(2\pi\Delta n t) + a_2^2 \quad \ldots(4)$$

यह समी. परिणामी तरंग के आयाम को व्यक्त करता है।

अधिकतम आयाम की शर्त–

$\cos(2\pi\Delta n t) = 1$ अर्थात्

$$2\pi\Delta n t = 0, 2\pi, 4\pi \ldots, 2K\pi \text{ (जहाँ } K = 0, 1, 2, ..)$$

$$t = 0, \frac{1}{\Delta n}, \frac{2}{\Delta n}, \frac{3}{\Delta n}, \ldots\ldots, \frac{K}{\Delta n}$$

$$R^2 = a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2$$

$$= (a_1 + a_2)^2$$

$$R_{max} = a_1 + a_2$$

दो लगातार अधिकतम मानों के बीच समयान्तराल

$$T = \frac{3}{\Delta n} - \frac{2}{\Delta n} = \frac{1}{\Delta n} = \frac{1}{n_1 - n_2}$$

1 सेकण्ड मे Δn बार अधिकतम तीव्रता सुनाई देगी।

न्यूनतम आयाम की शर्त

$$\cos 2\pi\Delta n t = -1$$

$$2\pi\Delta n t = \pi, 3\pi, 5\pi, ..,(2K+1)\pi \text{ (जहाँ } K = 0, 1, 2, ..)$$

$$t = \frac{1}{2\Delta n}, \frac{3}{2\Delta n}, \frac{5}{2\Delta n}, \ldots\ldots \frac{(2K+1)}{2\Delta n}$$

आयाम

$$R^2 = a_1^2 + 2a_1 a_2(-1) + a_2^2$$

$$R^2 = (a_1 - a_2)^2 \Rightarrow R_{min} = a_1 - a_2$$

दो लगातार दो क्रमागत अधिकतम या दो क्रमागत न्यूनतम ध्वनि की तीव्रता के मध्य लगा समय अर्थात् एक विस्पन्द सुनाई देने मे लगा समय विस्पन्द का आवर्त काल T कहलाता है।

अतः

$$T = \frac{1}{\Delta n} = \frac{1}{n_1 - n_2}$$

एक सेकण्ड मे सुने गये विस्पन्दों की संख्या को विस्पन्द की आवृत्ति कहते है। विस्पन्द की आवृत्ति

$$n = \frac{1}{T} = n_1 - n_2$$

अतः विस्पंद आवृत्ति दोनों आवृत्तियों के अन्तर के समान होती है।

विस्पन्द आवृत्ति ज्ञात करने की वैकल्पिक विधि

माना दो स्वरित्र जिनकी आवृत्तियाँ n_1 व n_2 है एक साथ कम्पित कराए जाते है एवं इनमे आवृत्ति n_1 का मान n_2 से कुछ अधिक है। (10 हर्ट्ज लगभग) कान पर ध्वनि करीब $\frac{1}{12}$ सेकण्ड तक रहती है। अतः विस्पन्द तभी श्रव्य होगे जब दो क्रमागत विस्पन्दों के बीच समयान्तराल इससे अधिक होगा। जब n_1 आवृत्ति वाला स्वरित्र n_2 आवृत्ति वाले स्वरित्र से एक कंपन अधिक कर देगा तो एक विस्पंद सुनाई देगा। यदि विस्पंद का आवर्तकाल T है तो इतने समय मे n_1 आवृत्ति वाला स्वरित्र x कपंन करता है तो n_2 आवृत्ति वाला $x-1$ कम्पन करेगा।

अतः आवर्तकाल

$$T = \frac{x}{n_1} = \frac{x-1}{n_2} \quad ...(1)$$

$$x n_2 = n_1 x - n_1$$
$$n_1 = x(n_1 - n_2)$$

$$x = \frac{n_1}{n_1 - n_2} \quad ...(2)$$

समी. (2) से x का मान समी. (1) मे रखने पर

$$T = \frac{x}{n_1} = \frac{1}{n_1 - n_2}$$

अतः विस्पन्द की आवृत्ति $n_1 - n_2$ अर्थात् विस्पन्द की आवृत्ति दोनों स्वरित्रों की आवृत्ति के अन्तर के बराबर होती है।

9.16.2 विस्पन्द के अनुप्रयोग (Application of beats)

यदि हमें किसी स्वरित्र की आवृत्ति n_1 ज्ञात हो तो किसी दूसरे स्वरित्र की आवृत्ति जो लगभग n_1 के बराबर है, विस्पंदो की सहायता से ज्ञात कर सकते है। इसके लिए दोनों स्वरित्रों को साथ बजाया जाता है। यदि एक सेकण्ड मे Δn विस्पंद सुनाई देते है तो दूसरे स्वरित्र की आवृत्ति

$n_1 + \Delta n$ अथवा $n_1 - \Delta n$ होगी

स्वरित्र पर मोम लगाने से आवृत्ति कम हो जाती है। अतः दूसरे स्वरित्र की भुजा पर मोम लगा दे तो इसकी आवृत्ति कम हो जाएगी फिर दोनो स्वरित्रों को साथ–साथ बजाकर विस्पन्द सुनते है। यदि विस्पन्दों की संख्या घट जाती है तो दूसरे स्वरित्र की आवृत्ति कम किए जाने पर पहले स्वरित्र की आवृत्ति के आसपास आ गई हैं। यह तभी संभव है जबकि दूसरे स्वरित्र की आवृत्ति पहले की अपेक्षा अधिक हो।

अतः दूसरे स्वरित्र की आवृत्ति $n_1 + \Delta n$ हैं इसके विपरीत यदि मोम लगाने से विस्पन्दों की संख्या बढ़ जाती है तो दूसरे स्वरित्र की आवृत्ति $n_1 - \Delta n$ होगी।

***x* के साथ प्रयुक्त होने वाले चिन्ह का निर्णय निम्न दो विधियों से संभव है:**

मोम लगाकर

स्वरित्र की भुजाओं को घिस देने पर

स्वरित्र B (अज्ञात आवृत्ति) पर मोम लगाने से इसकी आवृत्ति घट जाती है।
स्वरित्र B (अज्ञात आवृत्ति) की भुजाओं को घिसने से आवृत्ति बढ़ जाती है।

विस्पंद संख्या घटती है तब $n_2 = n_1 + x$
विस्पंद संख्या घटती है $n_2 = n_1 - x$
विस्पंद संख्या बढ़ती है तब $n_2 = n_1 - x$
विस्पंद संख्या बढ़ती है $n_2 = n_1 + x$
विस्पंद संख्या अपरिवर्तित रहती है तब $n_2 = n_1 + x$
विस्पंद संख्या अपरिवर्तित रहती है $n_2 = n_1 - x$
विस्पंद संख्या शून्य हो जाती है तब $n_2 = n_1 + x$
विस्पंद संख्या शून्य होती है $n_2 = n_1 - x$

स्वरित्र A (ज्ञात आवृत्ति) पर मोम लगाने से इसकी आवृत्ति घट जाती है।
स्वरित्र A (अज्ञात आवृत्ति) की भुजाओं को घिसने पर इसकी आवृत्ति बढ़ जाती है।

विस्पंद संख्या घटती है $n_2 = n_1 - x$
विस्पंद संख्या घटती है $n_2 = n_1 + x$
विस्पंद संख्या बढ़ती है $n_2 = n_1 + x$
विस्पंद संख्या बढ़ती है $n_2 = n_1 - x$
विस्पंद संख्या अपरिवर्तित रहती है $n_2 = n_1 - x$
विस्पंद संख्या अपरिवर्तित रहती है $n_2 = n_1 + x$
विस्पंद संख्या शून्य हो जाती है $n_2 = n_1 - x$
विस्पंद संख्या शून्य होती है $n_2 = n_1 + x$

उदा.31. स्वरित्र द्विभुज A की आवृत्ति 256 कम्पन/से. है इसे दूसरे स्वरित्र B के साथ बजाने पर 4 विस्पंद प्रति सेकण्ड सुने जाते है जब B को मोम लगा दिया जाता है तो 6 विस्पंद प्रति सेकण्ड सुनाई देते है मोम की मात्रा कम कर देने पर फिर 4 विस्पन्द प्रति सेकण्ड सुनाई देते है। B की आवृत्ति ज्ञात करो।

हल–B की आवृत्ति n_B है तो

$$n_B = 256 \pm \Delta n$$
$$= 256 + 4 = 260 \text{ हर्ट्ज}$$
$$= 256 - 4 = 252 \text{ हर्ट्ज}$$

मोम लगाने से आवृत्ति कम हो जाती है

$$n'_B = 256 + 6 = 262 \text{ हर्ट्ज}$$
$$= 256 - 6 = 250 \text{ हर्ट्ज}$$

मोम कम कर दिया जाता है है तो विस्पन्दों की संख्या 4 हो जाती है

$$n''_B = 256 + 4 = 260 \text{ हर्ट्ज}$$
$$= 256 - 4 = 252 \text{ हर्ट्ज}$$

सामान्य > कम मोम > अधिक मोम

260 > 252 > 250 संभावित क्रम होगा।

अतः अज्ञात स्वरित्र की आवृत्ति 260 हर्ट्ज होगी।

उदा.32. एक अज्ञात आवृत्ति का स्वरित्र जब 288 कम्पन/सेकण्ड आवृत्ति वाले स्वरित्र के साथ कम्पित किया जाता है तो 5 विस्पन्द सुनाई देते हैं। अज्ञात स्वरित्र पर मोम लगाने के पश्चात् भी यदि 5 विस्पन्द प्रति सेकण्ड सुनाई दे तो अज्ञात स्वरित्र की आवृत्ति बताओ? (पाठ्यपुस्तक उदाहरण 9.11)

हल : 288 हर्ट्ज आवृत्ति वाले स्वरित्र को अज्ञात स्वरित्र के साथ बजाने पर 5 विस्पन्द प्रति सेकण्ड सुनाई देतें है। अतः दोनों स्वरित्रों की आवृत्तियों मे 5 का अन्तर है अर्थात् दूसरे स्वरित्र की आवृत्ति = 288 ± 5 = 283 हर्ट्ज या 293 हर्ट्ज होगी।

अज्ञात स्वरित्र की भुजा पर मोम लगा देने पर उसकी आवृत्ति घट जाती है। अब दोनों स्वरित्रों को एक साथ बजाने पर पुनः 5 विस्पन्द प्रति सेकण्ड सुनाई देते है। यह तभी संभव है जब अज्ञात स्वरित्र की आवृत्ति मोम लगाने से पूर्व, पहले स्वरित्र की आवृत्ति से अधिक हो। अतः अज्ञात स्वरित्र की आवृत्ति 293 कम्पन/सेकण्ड है।

उदा.33. दो ध्वनि स्त्रोतों की आवृत्तियाँ 512 हर्ट्ज तथा 516 हर्ट्ज है इनकी सम्मिलित ध्वनि में दो क्रमागत विस्पन्दों के बीच समयान्तराल कितना होगा?

हल–

$$n_1 = 516 \text{ हर्ट्ज}$$
$$n_2 = 512 \text{ हर्ट्ज}$$

$$T=\frac{1}{n_1-n_2}=\frac{1}{516-512}=\frac{1}{4}=0.25 \text{ से.}$$

उदा.34. 56 स्वरित्र एक श्रेणी क्रम में इस प्रकार रखे हैं कि प्रत्येक स्वरित्र अपने से पहले के साथ 4 विस्पन्द प्रति सेकण्ड उत्पन्न करता है अन्तिम स्वरित्र की आवृत्ति पहले की तिगुनी है। प्रथम स्वरित्र की आवृत्ति ज्ञात करो।

हल–यदि प्रथम स्वरित्र की आवृत्ति n है तो अन्तिम स्वरित्र की आवृत्ति 3n होगी।

अब किन्हीं दो स्वरित्र की आवृत्ति का अंतर 4 है अतः 56 स्वरित्र के जोड़े बनाने पर 55 जोड़े बनेंगे।

अतः प्रथम व अन्तिम स्वरित्र की आवृत्ति का अन्तर

$$3n-n=55\times 4$$
$$2n=220$$
$$n=110 \text{ कम्पन/से.}$$

उदा.35. दो सितारों की डोरियाँ A तथा B एक साथ 'धा' स्वर बजा रही हैं तथा स्वरों में थोड़ा अंतर होने के कारण 5Hz आवृत्ति के विस्पंद उत्पन्न कर रही हैं। डोरी B के तनाव में कुछ वृद्धि करने पर विस्पंद की आवृत्ति घटकर 3Hz रह जाती है। यदि A की आवृत्ति 427 Hz है, तो B की मूल आवृत्ति ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है–विस्पंद आवृत्ति $\Delta n = 5$ हर्ट्ज, $n_A = 427$ हर्ट्ज,
तथा डोरी B पर तनाव बढ़ाने पर विस्पंद आवृत्ति घटकर 3 हर्ट्ज रह जाती है।

$\because \quad n_B = n_A \pm \Delta n \quad$ ...(1)

डोरी पर तनाव बढ़ाने पर उसकी आवृत्ति भी बढ़ती है क्योंकि $n \propto \sqrt{T}$, अतः डोरी B पर तनाव बढ़ाने पर डोरी B की आवृत्ति बढ़ेगी तथा चूंकि इस स्थिति में विस्पंद आवृत्ति घट रही है। यह तभी संभव है जबकि n_A एवं n_B का अंतर घटेगा

अर्थात् प्रारम्भ में $\quad n_A > n_B$

अतः $\quad n_B = n_A - \Delta n$

$\Rightarrow \quad n_B = 427 - 5 = 422$ हर्ट्ज

9.17 ध्वनि तरंगों में डॉप्लर प्रभाव (Doppler Effect in Sound Waves)

जब कोई स्थिर ध्वनि स्त्रोत ध्वनि उत्पन्न करता है तो उससे कुछ दूर स्थित स्थिर श्रोता को उसी आवृत्ति की ध्वनि सुनाई देती है जिस आवृत्ति की ध्वनि स्त्रोत उत्पन्न करता है परन्तु यदि ध्वनि स्त्रोत या श्रोता के मध्य आपेक्षिक गति हो अर्थात जब दोनो पास आ रहे हो अथवा परस्पर दूर जा रहे हो तो श्रोता को ध्वनि की आवृत्ति बदलती हुई प्रतीत होती है।

जैसे कोई व्यक्ति प्लेटफॉर्म पर खड़ा होकर निकट आते हुए इंजन की सीटी को सुनता है तो सीटी की ध्वनि की तीव्रता बढ़ने के साथ–साथ उसे ध्वनि अपेक्षाकृत तीक्ष्ण अथवा अधिक आवृत्ति की सुनाई देती है परन्तु जब प्लेटफार्म को पार कर इंजन उस व्यक्ति से दूर जाने लगता है तो सीटी की ध्वनि की तीव्रता घटने के साथ–साथ कम आवृत्ति की ध्वनि सुनाई देती है परन्तु ट्रेन मे बैठे व्यक्ति को सीटी की ध्वनि की आवृत्ति मे कोई परिवर्तन प्रतीत नही होता है क्योंकि ट्रेन मे बैठे व्यक्ति की इंजिन के सापेक्ष गति नहीं होती है।

इस प्रकार ध्वनि स्त्रोत तथा श्रोता की आपेक्षिक गति के कारण स्त्रोत की आवृत्ति मे श्रोता द्वारा प्रेक्षिंत आभासी परिवर्तन को "डॉप्लर प्रभाव" कहते है। इस घटना का अध्ययन सर्वप्रथम सन् 1842 मे ऑस्ट्रियन वैज्ञानिक जोहॅान डॉप्लर ने किया था इस कारण इस प्रभाव को डॉप्लर प्रभाव कहते है।

विभिन्न परिस्थितियों मे ध्वनि तरंगों मे डॉप्लर का प्रभाव–

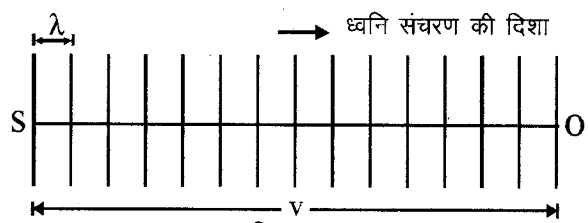
(1) जब ध्वनि स्त्रोत गतिमान हो तथा श्रोता स्थिर हो
(2) जब श्रोता गतिमान हो तथा ध्वनि स्त्रोत स्थिर हो
(3) जब ध्वनि स्त्रोत तथा श्रोता दोनों गतिमान हो
(4) जब माध्यम (हवा) गतिमान हो

(1) डॉप्लर प्रभाव जब ध्वनि स्त्रोत गतिमान हो तथा श्रोता स्थिर हो

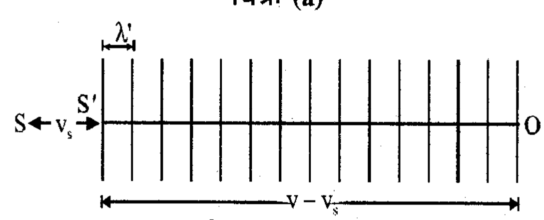
(a) जब ध्वनि स्त्रोत स्थिर श्रोता की ओर गति करता है– चित्रानुसार S व O क्रमशः ध्वनि स्त्रोत तथा श्रोता की स्थितियों को प्रदर्शित करते है। माना ध्वनि स्त्रोत S से उत्सर्जित तरंगों की आवृत्ति n, तरंगदैर्ध्य λ तथा ध्वनि का वेग v है।

$\lambda=\frac{v}{n}$ जब ध्वनि स्त्रोत तथा श्रोता दोनो स्थिर होते तो ध्वनि स्त्रोत से एक सेकण्ड मे उत्सर्जित तरंगे v मीटर की दूरी मे प्रसारित हो जाती है तथा श्रोता प्रति सेकण्ड n तरंगे प्राप्त करता है।

यदि स्त्रोत v_s वेग से गति करता है तो एक सेंकण्ड मे v_s दूरी तय करेगा। अतः अब एक सेकण्ड मे उत्सर्जित तरंगे $S'O=(v-v_s)$ दूरी में प्रसारित हो पायेगी।



चित्रः (a)



चित्रः 9.28 (b)

परिणामस्वरूप ध्वनि की तरंगदैर्ध्य λ से घटकर

$$\lambda'=\frac{v-v_s}{n}$$

हो जाती है इस आभासी तरंगदैर्ध्य के संगत वायु मे आभासी आवृत्ति n' हो तो

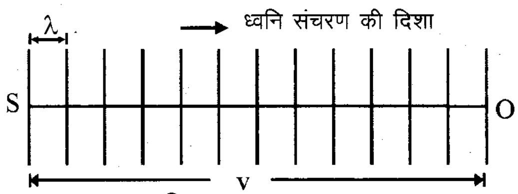
$$n'=\frac{v}{\lambda'}=\frac{v}{\frac{v-v_s}{n}}$$

$$n' = n\left(\frac{v}{v - v_s}\right) \quad ...(1)$$

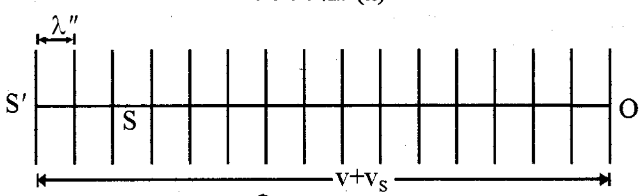
$$n' > n$$

अतः जब ध्वनि स्थिर श्रोता की ओर गति करता है। तब उसकी आभासी आवृत्ति मे वृद्धि होती है।

(b) जब ध्वनि स्त्रोत स्थिर श्रोता से दूर जा रहा है– जब ध्वनि स्त्रोत v_s मी./से. श्रोता से दूर जाता है तो प्रति सेकण्ड तरंगे $v + v_s$ दूरी में प्रसारित होती है। जिससे ध्वनि तरंगों की तरंगदैर्घ्य बढ़कर λ" हो जाती है।



चित्र 9.29(a)



चित्र 9.29(b)

$$\lambda'' = \frac{v + v_s}{n}$$

इस स्थिति मे आवृत्ति घटाकर n'' हो जाती है।

$$n'' = \frac{v}{\lambda''} = n\left(\frac{v}{v + v_s}\right)$$

$$n'' = n\left(\frac{v}{v + v_s}\right) \quad ...(2)$$

$$n'' < n$$

अतः जब ध्वनि स्त्रोत स्थिर श्रोता से दूर जाता है तो उसकी आभासी आवृत्ति मे कमी होती है।

(c) जब ध्वनि स्त्रोत स्थिर श्रोता के पास से गुजरता है– इस स्थिति मे पहले स्त्रोत, श्रोता की ओर गति करता है। तथा श्रोता को पार करने के पश्चात् वह उससे दूर हो जाता है।

श्रोता की ओर आते समय आभासी आवृत्ति

$$n' = \frac{nv}{v - v_s} \quad (n' > n)$$

श्रोता से दूर जाते समय आभासी आवृत्ति

$$n'' = \frac{nv}{v + v_s} \quad (n'' < n)$$

अतः आवृत्ति मे कुल आभासी परिवर्तन

$$\Delta n = n' - n'' = \frac{nv}{v - v_s} - \frac{nv}{v + v_s}$$

$$= nv\left[\frac{1}{v - v_s} - \frac{1}{v + v_s}\right]$$

$$= nv\left[\frac{v + v_s - v + v_s}{v^2 - v_s^2}\right]$$

$$= \frac{2nvv_s}{v^2 - v_s^2}$$

यदि $v_s << v$ हो तो v_s^2 को v^2 की तुलना मे नगण्य मान सकते है। इस अवस्था मे

$$\Delta n = \frac{2nvv_s}{v^2}$$

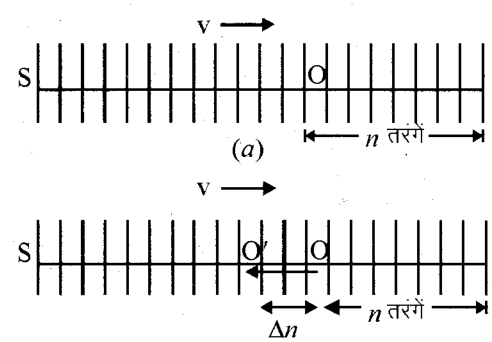
$$\Delta n = \frac{2nv_s}{v} \quad ...(3)$$

(2) डॉप्लर प्रभाव जब श्रोता गतिमान तथा ध्वनि स्त्रोत स्थिर हो

(a) जब श्रोता, स्थिर स्त्रोत की ओर गति करता है– माना ध्वनि की वास्तविक आवृत्ति n, तरंगदैर्घ्य λ तथा ध्वनि का वेग v है तो

$$n = \frac{v}{\lambda}$$

यदि श्रोता O तथा स्त्रोत S दोनो स्थिर है तो श्रोता, स्त्रोत द्वारा उत्पादित n तरंगे प्रति सेकण्ड ग्रहण करता है किन्तु वह स्वयं स्त्रोत की ओर एक सेकण्ड मे v_0 मीटर की दूरी तय कर लेता है।



चित्रः 9.30 (b)

अतः स्त्रोत से उत्पन्न $\Delta n = \frac{v_0}{\lambda}$ तरंगों को भी पार करता है। अब यह $\frac{v}{\lambda}$ तरंगों के अतिरिक्त $\frac{v_0}{\lambda}$ तरंगे प्रति सेकण्ड ग्रहण करता है। परिणामस्वरूप ध्वनि की आभासी आवृत्ति

$$n' = n + \Delta n$$

$$= \frac{v}{\lambda} + \frac{v_0}{\lambda}$$

$$= \frac{v + v_0}{\lambda}$$

λ का मान रखने पर

$$\lambda = \frac{v}{n}$$

$$n' = \frac{v + v_0}{\frac{v}{n}} = \frac{v + v_0}{v} \times n$$

$$n' = n\left(\frac{v + v_0}{v}\right) \quad ...(1)$$

$$n' > n$$

अतः जब श्रोता स्थिर स्त्रोत की ओर गति करता है। तो आभासी आवृत्ति मे वृद्धि होती है।

(b) जब श्रोता, स्थिर ध्वनि स्त्रोत से दूर जा रहा है– इस स्थिति मे श्रोता स्त्रोत से दूर v_0 वेग से जा रहा है। तो प्रति सेकण्ड $\frac{v_0}{\lambda}$ तरंगे कम ग्रहण करता है। परिणामस्वरूप ध्वनि की आवृत्ति

$$n'' = \frac{v}{\lambda} - \frac{v_0}{\lambda}$$

$$= \left(\frac{v - v_0}{\lambda}\right)$$

$$\lambda = \frac{v}{n}$$

$$n'' = \left(\frac{v - v_0}{\frac{v}{n}}\right) = \left(\frac{v - v_0}{v}\right) \times n$$

$$n'' = n\left(\frac{v - v_0}{v}\right) \qquad \ldots(2)$$

$$n'' < n$$

अतः जब श्रोता स्थिर स्त्रोत से दूर जाता है तो आभासी आवृत्ति मे कमी आती है।

(c) जब श्रोता स्थिर स्त्रोत के पास आकर उससे दूर गुजर जाता है– जब श्रोता, स्थिर स्त्रोत की ओर आता है। तब आभासी आवृत्ति

$$n' = n\left(\frac{v + v_0}{v}\right)$$

परन्तु स्त्रोत को पार करने के पश्चात् वह स्त्रोत से दूर जायेगा इस स्थिति मे आभासी आवृत्ति

$$n'' = n\left(\frac{v - v_0}{v}\right)$$

स्त्रोत को पार करने मे आवृत्ति मे कुल परिवर्तन

$$\Delta n = n' - n''$$

$$= n\left(\frac{v + v_0}{v}\right) - n\left(\frac{v - v_0}{v}\right)$$

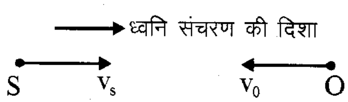
$$= \frac{n}{v}(v + v_0 - v + v_0)$$

$$\Delta n = \frac{2nv_0}{v} \qquad \ldots(3)$$

(3) जब स्त्रोत एवं श्रोता दोनो गतिमान है

(a) जब ध्वनि स्त्रोत व श्रोता एक दूसरे की ओर क्रमशः v_s तथा v_0 वेग से गति करते है।

माना ध्वनि की वास्तविक आवृत्ति n, तरंगदैर्घ्य λ तथा ध्वनि का वेग v है जब ध्वनि स्त्रोत एवं श्रोता स्थिर होते है तो श्रोता प्रति सेकण्ड $n = \frac{v}{\lambda}$ तरंगे ग्रहण करता है पर यहाँ ध्वनि स्त्रोत तथा श्रोता दोनों एक दूसरे की ओर क्रमशः v_s तथा v_0 वेग से गति करते है। यदि स्त्रोता स्थिर होता तब स्त्रोत के उसकी ओर आने से उसे n' आवृत्ति की ध्वनि आती हुई प्रतीत होती।



चित्रः 9.31

जहाँ $$n' = n\left(\frac{v}{v - v_s}\right)$$

परन्तु श्रोता स्वंय स्त्रोत की ओर गतिशील है अतः श्रोता द्वारा सुनी गई आवृत्ति

$$n_1 = n'\left(\frac{v + v_0}{v}\right)$$

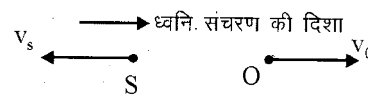
$$n_1 = n\left(\frac{v}{v - v_s}\right)\left(\frac{v + v_0}{v}\right)$$

$$n_1 = n\left(\frac{v + v_0}{v - v_s}\right) \qquad \ldots(4)$$

(b) जब ध्वनि स्त्रोत एवं श्रोता एक दूसरे से क्रमशः v_s व v_0 वेग से दूर जा रहे हैं–

माना ध्वनि स्त्रोत से उत्पन्न तरंगों की वास्तविक आवृत्ति n, तरंगदैर्घ्य λ तथा ध्वनि का वेग v मी./से. है। जब स्त्रोत व श्रोता दोनों स्थिर रहतें है। तो श्रोता प्रति सेकण्ड $n = \frac{v}{\lambda}$ तरंगे ग्रहण करता है। किन्तु यहाँ दोनों एक दूसरे से दूर क्रमशः v_s व v_0 वेग से जा रहे है। यदि श्रोता स्थिर होता तो ध्वनि स्त्रोत की गति के कारण ध्वनि की आभासी आवृत्ति

$$n' = n\left(\frac{v}{v + v_s}\right)$$



चित्र 9.32

किन्तु श्रोता स्त्रोत से दूर जा रहा है। अतः स्त्रोता द्वारा सुनी जाने वाली आभासी आवृत्ति

$$n_2 = n'\left(\frac{v - v_0}{v}\right)$$

n' का मान रखने पर

$$n_2 = n\left(\frac{v}{v + v_s}\right)\left(\frac{v - v_0}{v}\right)$$

$$n_2 = n\left(\frac{v - v_0}{v + v_s}\right) \qquad \ldots(5)$$

(c) जब ध्वनि स्त्रोत तथा श्रोता दोनों ध्वनि की दिशा में गति कर रहे है। तथा ध्वनि स्त्रोत श्रोता के पीछे हो–

माना ध्वनि की वास्तविक आवृत्ति n तरंगदैर्घ्य λ तथा वेग v है। जब स्त्रोत एवं श्रोता दोनों स्थिर होतें है। तो श्रोता प्रति सेंकण्ड $n = \frac{v}{\lambda}$ तरंगे ग्रहण करता है परन्तु स्त्रोंत तथा श्रोता दोनों ध्वनि संचरण की दिशा में क्रमशः v_s तथा v_0 वेग से गति कर रहे है यदि श्रोता स्थिर होता तो ध्वनि स्त्रोत की श्रोता की ओंर गति के कारण श्रोता को सुनाई देने वाली ध्वनि की आभासी आवृत्ति

→ ध्वनि संचरण की दिशा

S v_s → O v_0 →

चित्र 9.33

$$n' = n\left(\frac{v}{v-v_s}\right)$$

परन्तु श्रोता, स्त्रोत से दूर दिशा मे गतिमान है अतः अब उसे सुनाई देने वाली आभासी आवृत्ति

$$n_3 = n'\left(\frac{v-v_0}{v}\right)$$

n' का मान रखने पर

$$n_3 = n\left(\frac{v}{v-v_s}\right)\left(\frac{v-v_0}{v}\right)$$

$$n_3 = n\left(\frac{v-v_0}{v-v_s}\right) \quad ...(6)$$

(d) जब ध्वनि स्त्रोत एवं श्रोता ध्वनि की दिशा के विपरीत गति कर रहे है तथा श्रोता ध्वनि स्त्रोत के पीछे हों–

माना ध्वनि की वास्तविक आवृत्ति n, तरंगदैर्घ्य λ तथा वेग v है। जब स्त्रोत तथा श्रोता दोनों स्थिर होते है, तो श्रोता प्रति सेंकण्ड $n = v/\lambda$ तरंगे ग्रहण करता है परन्तु स्त्रोत तथा श्रोता दोनों ध्वनि संचरण के विपरीत दिशा में क्रमशः v_s तथा v_0 वेग से गति कर रहे हैं।

→ ध्वनि संचरण की दिशा

← v_s S ← v_0 O

चित्र 9.34

यदि श्रोता स्थिर होता है ध्वनि स्त्रोत की श्रोता से दूर गति के कारण श्रोता को सुनाई देने वाली ध्वनि की आभासी आवृत्ति

$$n' = n\left(\frac{v}{v+v_s}\right)$$

अतः श्रोता की स्रोत की ओर गति के कारण परिणामी आभासी आवृत्ति

$$n_4 = n'\left(\frac{v+v_0}{v}\right)$$

n' का मान रखने पर

$$n_4 = n\left(\frac{v}{v+v_s}\right)\left(\frac{v+v_0}{v}\right)$$

$$n_4 = n\left(\frac{v+v_0}{v+v_s}\right) \quad .... (5)$$

(4) जब माध्यम (हवा) गतिमान हो

उपर्युक्त सभी परिस्थितियों में माध्यम को स्थिर माना गया है परन्तु यदि माध्यम (हवा) v_w वेग से गतिशील हो तो–

(i) ध्वनि का वेग v तथा माध्यम का वेग v_w समान दिशा में है तब ध्वनि का प्रभावी वेग $= v + v_w$ होगा।

इस स्थिति में आभासी आवृत्ति

$$n' = n\left(\frac{v+v_w \pm v_0}{v+v_w \pm v_s}\right) \quad ..... (6)$$

(ii) जब ध्वनि का वेग v तथा माध्यम का वेग v_w विपरीत दिशा में है तब ध्वनि का प्रभावी वेग $= v - v_w$ होगा

इस स्थिति में आभासी आवृत्ति

$$n' = n\left(\frac{v-v_w \pm v_0}{v-v_w \pm v_s}\right) \quad ..... (7)$$

व्यापक रूप में आभासी आवृत्ति का सामान्य व्यंजक

$$n' = n\left(\frac{v \pm v_w \pm v_0}{v \pm v_w \pm v_s}\right) \quad ...... (8)$$

महत्त्वपूर्ण तथ्य

1. डॉप्लर प्रभाव ध्वनि की आवृत्ति में होने वाले परिवर्तन की सूचना देता है। इसका ध्वनि की तीव्रता से कोई सम्बन्ध नहीं है।
2. यदि स्त्रोत अथवा श्रोता में से कोई एक वृत्त के केन्द्र पर स्थित है तथा अन्य परिधि पर घूम रहा है तो दोनों के बीच दूरी अपरिवर्तित रहने से डॉप्लर प्रभाव कार्य नहीं करता है।
3. यदि स्त्रोत तथा श्रोता के बीच कोई आपेक्षिक गति न हो केवल माध्यम गतिशील हो तब भी डॉप्लर प्रभाव कार्य नहीं करता है।
4. ध्वनि संचरण की दिशा सदैव स्त्रोत से श्रोता की ओर ली जाती है अर्थात् स्त्रोत से श्रोता की ओर वेग धनात्मक है।
5. यदि स्त्रोत या श्रोता अथवा दोनों ही ध्वनि संचरण की दिशा के विपरीत गमन करते हैं तो उनके वेगों को ऋण चिन्हों के साथ प्रयोग करते हैं।

(a) v → ध्वनि संचरण की दिशा

S → v_s ● स्थिर O

$$n' = \left(\frac{v}{v-v_s}\right)n$$

v →

← v_s S ● स्थिर O

$$n'' = \left(\frac{v}{v-(-v_s)}\right)$$

$$n'' = \left(\frac{v}{v+v_s}\right)n$$

(b) v → ध्वनि संचरण की दिशा

S ● स्थिर O → v_0

$$n' = \left(\frac{v-v_0}{v}\right)n$$

v →

S ● स्थिर v_0 ← O

$$n'' = \frac{v-(-v_0)}{v}n$$

$$n'' = \left(\frac{v+v_0}{v}\right)n$$

(c) v → ध्वनि संचरण की दिशा

S → v_s O → v_0

$$n' = \left(\frac{v-v_0}{v-v_s}\right)n$$

v →

S → v_s v_0 ← O

$$n' = \left[\frac{v-(-v_0)}{v-v_s}\right]n$$

$$n' = \left[\frac{v+v_0}{v-v_s}\right]n$$

v →

v_S ← S v_0 ← O

$$n' = \left[\frac{v-(-v_0)}{v-(-v_S)}\right]n$$

$$n' = \left[\frac{v+v_0}{v+v_s}\right]n$$

v →

v_S ← S O → v_0

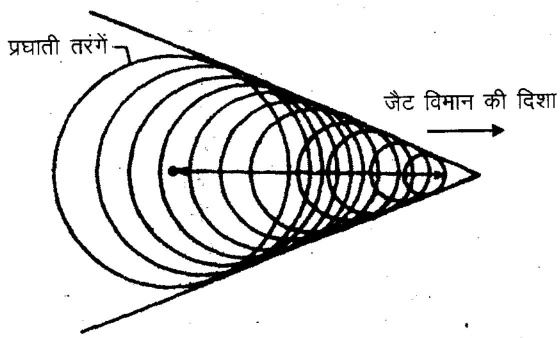
$$n' = \left[\frac{v-v_0}{v-(-v_s)}\right]n$$

$$n' = \left(\frac{v-v_0}{v+v_s}\right)n$$

9.17.1 डॉप्लर प्रभाव के सीमा बन्धन (Limitations of Doppler Effect)

डॉप्लर प्रभाव के प्रेक्षित होने के लिए निम्न शर्तो का लागू होना आवश्यक है–

(i) ध्वनि स्त्रोत, श्रोता तथा माध्यम का वेग, ध्वनि के वेग से कम होना चाहिए अन्यथा तरंगाग्र विकृत होकर शंकु की भांति बन जाता है तथा प्रघाती तरंगे (Shock waves) उत्पन्न होती है इस स्थिति मे डॉप्लर प्रभाव प्रेक्षित नहीं होता है। जैसे–जैट विमान।



चित्र 9.35 : प्रघाती तरंगें

(ii) प्रेक्षक की गति तरंग संचरण की दिशा के लम्बवत् नहीं होनी चाहिए।

(iii) ध्वनि स्त्रोत व श्रोता दोनों समान वेग से एक ही दिशा में गति करने पर डॉप्लर प्रभाव प्रेक्षित नहीं होता है।

9.17.2 ध्वनि में डॉप्लर प्रभाव के उपयोग (Application of Doppler's Effect in Sound Waves)

समुद्र में पनडुब्बी का वेग ज्ञात करना–ध्वनि के डॉप्लर प्रभाव का उपयोग समुद्र के भीतर पनडुब्बी का वेग ज्ञात करने में किया जाता है। समुद्र तट पर स्थिर सोनार (SONAR : Sound Navigation and Ranging) स्टेशन से ध्वनि तरंगों को समुद्र में भेजा जाता है। ये तरंगें समुद्र में गतिशील पनडुब्बी से टकराकर परावर्तित होकर पुनः समुद्र तट पर स्थित स्टेशन पर पहुँचती है। जिनकी तरंगदैर्ध्य ज्ञात करके पनडुब्बी का वेग ज्ञात किया जाता है। इसके अन्तर्गत स्टेशन से पनडुब्बी तक पहुँचने वाली तरंगों की तरंगदैर्ध्य में परिवर्तन नहीं होता है जबकि परावर्तित तरंगों की तरंगदैर्ध्य में परिवर्तन प्रतीत होता है।

माना कि पनडुब्बी v_s वेग से सोनार स्टेशन की ओर गतिशील है तब परावर्तित तरंगों के स्त्रोत का वेग $2v_s$ होगा।

अतः आभासी तरंगदैर्ध्य $\lambda' = \frac{v - 2v_s}{n}$

यहाँ v ध्वनि का वेग तथा n वास्तविक आवृत्ति है।

$\because$ $$n = \frac{v}{\lambda}$$

$\therefore$ $$\lambda' = \left(\frac{v - 2v_s}{v}\right)\lambda$$

$\Rightarrow$ $$\lambda' = \left(1 - \frac{2v_s}{v}\right)\lambda$$

या $$\lambda' - \lambda = -\left(\frac{2v_s}{v}\right)\lambda \quad \text{....... (1)}$$

यहाँ ऋणात्मक चिन्ह से तात्पर्य है कि तरंगदैर्ध्य में कमी हो रही है अर्थात् पनडुब्बी पास आ रही है अर्थात् $\lambda' < \lambda$

यदि पनडुब्बी सोनार स्टेशन से दूर जा रही हो तो $\lambda' > \lambda$

$$\lambda' - \lambda = +\left(\frac{2v_s}{v}\right)\lambda \quad \text{..... (2)}$$

अतः $$\Delta\lambda = \pm\left[\frac{v_s}{v}\right]\lambda$$

उदा.36. एक इंजन की सीटी जैसे ही वह एक स्थिर स्त्रोता को पार करता है (5/6) गिरती प्रतीत होती है इंजिन की चाल का परिकलन करो हवा में ध्वनि का वेग 330 मी./से. है।

हल–जब इंजन श्रोता की ओर गति करता है तो इंजन की आभासी

आवृत्ति $$n' = n\left(\frac{v}{v - v_s}\right)$$

जब इंजन श्रोता को पार कर उससे दूर जाता है तो आभासी आवृत्ति

$$n'' = n\left(\frac{v}{v + v_s}\right)$$

$$\frac{n''}{n'} = \frac{v - v_s}{v + v_s} = \frac{5}{6}$$

$$6V - 6v_s = 5v + 5v_s$$

$$11v_s = v$$

$\Rightarrow$ $$v_s = \frac{v}{11} = \frac{330}{11} = 30 \text{ मी./से.}$$

उदा.37. एक मोटर गाड़ी 124 कम्पन/सेकण्ड की आवृत्ति का होर्न बजाते हुए 72 किमी/घंटा के वेग से ऊँची दीवार की ओर गति करती है ड्राईवर द्वारा सुनी हुई परावर्तित ध्वनि की आवृत्ति क्या होगी? ध्वनि का वेग 330 मी./से. (पाठ्यपुस्तक उदाहरण 9.12)

हल–मोटर गाड़ी अर्थात् स्त्रोत, दीवार अर्थात् प्रेक्षक की ओर गतिशील है अतः दीवार पर पहुँचने वाली ध्वनि की आवृत्ति

$$n' = \left(\frac{v}{v - v_s}\right)n$$

दीवार से परावर्तित ध्वनि के लिए दीवार स्त्रोत की भाँति व्यवहार करेगी जिसकी आवृत्ति n' है ड्राईवर श्रोता होगा, अतः ड्राईवर द्वारा सुनी गई आवृत्ति

$$n'' = \left(\frac{v + v_0}{v}\right)n'$$

n' का मान रखने पर

$$n'' = \left(\frac{v + v_0}{v}\right)\left(\frac{v}{v - v_s}\right)n$$

$$n'' = \left(\frac{v + v_0}{v - v_s}\right)n$$

$\therefore$ $$v_0 = v_s = 72 \text{ किमी./घंटा}$$

$$= \frac{72 \times 1000}{3600} \text{ मी./से.}$$

$$= 20 \text{ मी./से.}$$

$$n'' = \left(\frac{330+20}{330-20}\right)\times 124$$

$= 140$ कम्पन/सेकण्ड

उदा.38. कोई रॉकेट 200 m s^{-1} की चाल से किसी लक्ष्य की ओर गतिमान है। गति करते समय वह 1000 Hz आवृत्ति की तरंग उत्सर्जित करता है। इस ध्वनि का कुछ भाग लक्ष्य पर पहुँच कर प्रतिध्वनि के रूप में वापस रॉकेट की ओर परावर्तित हो जाता है। (a) लक्ष्य द्वारा संसूचित ध्वनि की आवृत्ति, तथा (b) रॉकेट द्वारा संसूचित प्रतिध्वनि की आवृत्ति परिकलित कीजिए।

हल– रॉकेट (स्रोत) की चाल

$v_S = 200$ मी./से.

स्रोत की मूल आवृत्ति $n = 1000$ हर्ट्ज

ध्वनि की चाल $v = 330$ मी./से

(a) लक्ष्य द्वारा संसूचित आवृत्ति (रॉकेट लक्ष्य की ओर गतिशील है)

$$n' = \left(\frac{v}{v - v_s}\right)\times n$$

$$= \left(\frac{330}{330-200}\right)\times 1000$$

$= 2538.46$ हर्ट्ज

(b) लक्ष्य से परावर्तित तरंगों के लिए लक्ष्य स्थिर स्रोत की भांति कार्य करेगा तथा गतिशील रॉकेट प्रेक्षक की भांति तथा n' मूल आवृत्ति होगी अतः

रॉकेट द्वारा संसूचित प्रतिध्वनि की आवृत्ति

$$n'' = \left(\frac{v + v_o}{v}\right)\times n'$$

$$= \left(\frac{330+200}{330}\right)\times\left(\frac{330}{130}\times 1000\right)$$

यहां $v_0 = v_s =$ रॉकेट की चाल

$n'' = 4076.92$ हर्ट्ज

विविध उदाहरण

उदा.39. एक प्रगामी तरंग का समीकरण $y = 0.02 \sin [0.02\,t - 0.01\,x]$ है जबकि दूरियाँ मीटर मे तथा समय सेकण्ड में है। कारण सहित बताइये कि तरंग किस दिशा में जा रही है? इस तरंग का आयाम, तरंगदैर्ध्य तथा आवृत्ति की गणना कीजिए।

हल: दिया गया समीकरण है–

$$y = 0.02\sin(0.02t - 0.01x) \quad ...(1)$$

धनात्मक X-अक्ष की दिशा मे संचरित प्रगामी तरंग का समीकरण

$$y = a\sin(\omega t - Kx) \quad ...(2)$$

समी. (1) व (2) की तुलना से स्पष्ट है कि तरंग धनात्मक X अक्ष की दिशा मे संचरित है क्योंकि मूल बिन्दु से दूरी X बढ़ने पर तरंग की कला घट रही है।

समी. (1) व (2) की तुलना से

आयाम $a = 0.02$ मीटर

$\omega = 2\pi n = 0.02$

∴ आवृत्ति $n = \dfrac{0.02}{2\pi} = \dfrac{1}{100\pi}$ हर्ट्ज

$K = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 0.01$ मीटर

∴ तरंगदैर्घ्य $\lambda = \dfrac{2\pi}{0.01} = 200\,\pi$ मीटर

उदा.40. 300 तथा 303 हर्ट्ज आवृत्ति के दो ध्वनि स्त्रोंतो को एक साथ बजाने पर प्रति सेकण्ड कितने विस्पन्द सुनाई देंगें? दो क्रमागत अधिकतम तीव्रता की ध्वनियों के बीच कितना समयान्तराल होगा?

हल: दिया गया है–

$n_1 = 300$ हर्ट्ज

$n_2 = 303$ हर्ट्ज

विस्पन्दों की संख्या $n = n_2 - n_1 = 303 - 300$

$= 3$ प्रति सेकण्ड

1 विस्पन्द का समय $T = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{3}$ सेकण्ड

अतः दो अधिकतम तीव्रता की ध्वनियों के बीच समयान्तराल

$T = \dfrac{1}{3}$ सेकण्ड

उदा.41. एक प्रगामी तरंग का समीकरण $y = 0.09\sin 8\pi\left[t - \frac{x}{20}\right]$ है। किसी दृढ़ दीवार से इस तरंग के टकराने पर परावर्तित तरंग का आयाम पहले का $\frac{2}{3}$ रह जाता है। ज्ञात कीजिये-

(i) परावर्तित तरंग का समीकरण

(ii) परावर्तित तरंग मे उस बिन्दु पर स्थित कण का विस्थापन समीकरण जिसके लिए $x = 0$ है तथा

(iii) यदि तरंग किसी मुक्त तल से परावर्तित हो तो परावर्तित तरंग का समीकरण

हल: आपतित तरंग का समीकरण है–

$$y = 0.09\sin 8\pi\left[t - \frac{x}{20}\right]$$

यह तरंग धनात्मक X अक्ष की दिशा मे संचरित है।

(i) परावर्तित तरंग का आयाम $= 0.09\times\frac{2}{3} = 0.06$ परावर्तित तरंग ऋणात्मक X अक्ष की दिशा मे जायेगी।

प्रगामी तरंग दृढ़ दीवार से परावर्तित हो रही है। अतः इसकी कला मे π का परिवर्तन हो जायेगा।

अतः परावर्तित तरंग का समीकरण

$$y = 0.06\sin\left[8\pi\left\{t + \left(\frac{x}{20}\right)\right\} + \pi\right]$$

या $$y = -0.06\sin 8\pi\left[t + \frac{x}{20}\right]$$

(ii) उपरोक्त समीकरण में $x = 0$ रखने पर, $x = 0$ पर स्थित कण का

विस्थापन समीकरण

$$y = -0.06 \sin 8\pi t$$

(iii) यदि तरंग मुक्त तल से परावर्तित होगी तो उसकी कला समान रहेगी। अतः मुक्त तल से परावर्तित तरंग का समीकरण

$$y = 0.06 \sin 8\pi\left[t + \frac{x}{20}\right]$$

उदा.42. एक अप्रगामी तरंग उत्पन्न करने वाली अवयवी तरंगों के आयाम, आवृत्ति तथा वेग क्रमशः 8 सेमी. 30 हर्ट्ज तथा 180 सेमी./सेकण्ड है। अप्रगामी तरंग का समीकरण लिखिए।

हल: अप्रगामी तरंग का समीकरण

$$y = 2a \cos Kx \sin \omega t$$

$$y = 2a \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \frac{2\pi}{T} t$$

दिया गया है–

आयाम $a = 8$ सेमी.

आवृत्ति $n = 30$ हर्ट्ज

वेग $v = 180$ सेमी./से.

$\therefore$ $T = \frac{1}{n} = \frac{1}{30}$ सेकण्ड

$$\lambda = \frac{v}{n} = \frac{180}{30} = 6 \text{ सेमी.}$$

$\therefore$ $y = 2 \times 8 \cos \frac{2\pi x}{6} \sin \frac{2\pi t}{\left(\frac{1}{30}\right)}$

$$y = 16 \cos \frac{\pi x}{3} \sin 60\pi t$$

उदा.43. एक 30 सेमी. लम्बी नली के दोनों सिरे खुले है। इसे 1.1 किलो हर्ट्ज आवृत्ति के स्त्रोत से कम्पित किया जाता है। इस आवृत्ति से कौन सा संनादी अनुनादित होगा? (वायु मे ध्वनि का वेग 330 मी./से.)

हल: दिया गया है–

$v = 330$ मी./से.

$n = 1.1 \text{ kHz} = 1.1 \times 10^3 \text{ Hz}$

$\therefore$ $v = n\lambda$

$\therefore$ $\lambda = \frac{v}{n} = \frac{330}{1.1 \times 10^3}$

$$= \frac{330}{1100} = 0.30 \text{ मी.}$$

या $\lambda = 30$ सेमी.

अतः $\lambda = l$ होने से यह द्वितीय संनादी है।

उदा.44. 166 हर्ट्ज आवृत्ति के स्वरित्र से वायु मे 0°C पर अनुनादित होने के लिए बंद पाइप तथा खुले पाइप की न्यूनतम लम्बाईयाँ ज्ञात कीजिए। (वायु में ध्वनि का वेग 330 मी./से.)

हल: बन्द पाइप की मूल आवृत्ति

$$n_c = \frac{v}{4l} = 166 \text{ हर्ट्ज}$$

या $l = \frac{v}{4 \times 166} = \frac{330}{4 \times 166}$

$l = 0.497$ मी.

या $l = 49.7$ सेमी.

खुले पाइप की मूल आवृत्ति

$$n_0 = \frac{v}{2l'} = 166 \text{ हर्ट्ज}$$

$$l' = \frac{v}{2 \times 166} = \frac{330}{2 \times 166}$$

$= 0.994$ मी.

या $l' = 99.4$ सेमी.

उदा.45. एक 510 हर्ट्ज आवृत्ति के स्वरित्र को पानी से भरी एक मीटर ऊँची ऊर्ध्वाधर अनुनाद नली के ऊपरी सिरे के ठीक ऊपर कम्पित किया जाता है। इस नली के निचले सिरे से पानी धीरे-धीरे बाहर निकल रहा है। नली के ऊपरी सिरे से किन-किन दूरियों पर अनुनाद होगा? वायु में ध्वनि का वेग 340 मी./से. है। (यहाँ सिरा संशोधन को नगण्य माना जाये)

हल: स्वरित्र की आवृत्ति $n = 510$ हर्ट्ज

बन्द वायु स्पम्भ की न्यूनतम लम्बाई

$$l = \frac{v}{4n} = \frac{340}{4 \times 510} = \frac{1}{6} \text{ मी.}$$

या $l = 16.7$ सेमी.

बन्द वायु स्तम्भ के लिए अन्य स्थितियाँ $3l, 5l, 7l,$ पर प्राप्त होगी।

अतः अनुनाद के लिए वायु स्तम्भ की अन्य लम्बाईयाँ होगी–

$$3 \times \frac{1}{6} = 0.5 \text{ मी.,}$$

$$5 \times \frac{1}{6} = 0.833 \text{ मी.,}$$

$$7 \times \frac{1}{6} = 1.16 \text{ मी.}$$

परन्तु 1.16 मी. लम्बाई उपयुक्त नहीं है क्योकि नली की लम्बाई 1 मी. है।

इस प्रकार नली के ऊपरी सिरे से अनुनाद की दूरियाँ 0.167 मी., 0.5 मी., तथा 0.833 मी. है।

उदा.46. एक तनी हुई डोरी मे 256 कम्पन/सेकण्ड की आवृत्ति के कम्पन उत्पन्न होते है। यदि डोरी में तनाव एक चौथाई, लम्बाई आधी व व्यास दुगुना कर दिया जाए तो डोरी की आवृत्ति क्या होगी?

हल: दिया गया है–

आवृत्ति $n = 256$ हर्ट्ज

किसी डोरी मे कम्पनों की आवृत्ति

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\pi r^2 d}}$$

$$n = \frac{1}{2lr}\sqrt{\frac{T}{\pi d}} = 256 \qquad \ldots(1)$$

प्रश्नानुसार,

$$T' = \frac{T}{4}, l' = \frac{l}{2}$$

डोरी का व्यास $D' = 2D$

या $r' = 2r$

∴ परिवर्तित आवृत्ति

$$n' = \frac{1}{2l'r'}\sqrt{\frac{T'}{\pi d}}$$

$$n' = \frac{1}{2l/2.2r}\sqrt{\frac{T}{4\pi d}}$$

$$n' = \frac{1}{4lr}\sqrt{\frac{T}{\pi d}} \quad \ldots(2)$$

$$\therefore \quad \frac{n'}{n} = \frac{\frac{1}{4lr}\sqrt{\frac{T}{\pi d}}}{\frac{1}{2lr}\sqrt{\frac{T}{\pi d}}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad n' = \frac{n}{2} = \frac{256}{2} = 128 \text{ हर्ट्ज}$$

उदा.47. समान लम्बाई की दो डोरियाँ समान तनाव बल से तनी है। डोरियाँ एक ही पदार्थ की बनी है। यदि उनके व्यासों का अनुपात 3 : 2 हो तो उनकी मूल आवृत्तियों का अनुपात क्या होगा?

हल: किसी डोरी मे कम्पनों की आवृत्ति

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\pi r^2 d}}$$

$$\Rightarrow \quad n \propto \frac{1}{r} \text{ या } n \propto \frac{1}{D}$$

यहाँ D डोरी का व्यास है।

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad n_1 : n_2 = 2 : 3$$

उदा.48. सामान्य ताप तथा दाब पर वायु में ध्वनि की चाल 332 मी./से. है। हाइड्रोजन में ध्वनि की चाल (i) सामान्य ताप व दाब पर (ii) 546°C ताप तथा 4 वायुमण्डलीय दाब पर कितनी होगी? (वायु, हाइड्रोजन से 16 गुना भारी है।)

हल: यदि गैस का दाब P, घनत्व d हो तो गैस मे ध्वनि की चाल

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{d}}$$

यहाँ

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

(i) यदि सामान्य ताप व दाब पर वायु में ध्वनि की चाल v_a तथा हाइड्रोजन में v_h हो तो

$$v_a = \sqrt{\frac{\gamma P}{d_a}}$$

तथा

$$v_h = \sqrt{\frac{\gamma P}{d_h}}$$

$$\therefore \quad \frac{v_h}{v_a} = \sqrt{\frac{d_a}{d_h}} \quad \ldots(1)$$

दिया गया है–

$$\frac{d_a}{d_h} = \frac{16}{1}$$

$$\therefore \quad \frac{v_h}{v_a} = \sqrt{\frac{16}{1}} = \frac{4}{1}$$

$$v_h = 4V_a = 4 \times 332$$

$$= 1328 \text{ मी./से.}$$

(iii) गैस के दाब का ध्वनि की चाल पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। ध्वनि की चाल परम ताप के वर्गमूल के समानुपाती होती है।

अर्थात्

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

$v_1 = 0°C$ ताप पर हाइड्रोजन मे ध्वनि की चाल = 1328 मी./से.

$$T_1 = 0°C = 273\,K$$

$$T_2 = 546°C = 546 + 273\,K$$

$v_2 = 819°C$ पर हाइड्रोजन मे ध्वनि की चाल = ?

$$\therefore \quad \frac{v_2}{1328} = \sqrt{\frac{546+273}{273}} = \sqrt{\frac{819}{273}}$$

$$= \sqrt{3} = 1.732$$

$$v_2 = 1328 \times 1.732$$

$$v_2 = 2300 \text{ मी./से.}$$

उदा.49. 100 हर्ट्ज तथा 100.5 हर्ट्ज आवृत्तियों की दो सरल आवर्त गतियों के अध्यारोपण से लिसाजू की आकृतियाँ प्राप्त की जाती हैं। प्रारंभ में दोनों गतियाँ समान कला में भी तब लिसाजू की आवृत्ति का क्या रूप था? इस आकृति की पुनरावृत्ति कितने समय पश्चात् होगी?

हल– प्रश्नानुसार आवृत्ति अनुपात लगभग 1 : 1 है। अतः समान कला की स्थिति में लिसाजू की आकृति सरल रेखा के रूप में प्राप्त होगी।

$n_2 > n_1$ होने पर

$$n_2 = n_1 + \frac{1}{t}$$

$$\frac{1}{t} = n_2 - n_1 = 100.5 - 100$$

$$\frac{1}{t} = 0.5$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{1}{0.5} = 2 \text{ सेकण्ड}$$

अतः आकृतियों की पुनरावृत्ति में लगा समय = 2 सेकण्ड

उदा.50. किसी ध्वनि स्त्रोत को स्थिर श्रोता की ओर किस वेग से आना चाहिए कि आभासी आवृत्ति वास्तविक आवृत्ति की दो गुनी सुनाई दे। वायु में ध्वनि का वेग = 340 मी./से.

हल: ध्वनि स्त्रोंत के स्थित श्रोता की ओंर गतिमान होने पर आभासी आवृत्ति

$$n' = n\left(\frac{v}{v - v_s}\right)$$

दिया गया है–

$$n' = 2n, v = 340 \text{ मी./से.}$$

$$2n = n\left(\frac{v}{v - v_s}\right)$$

$\Rightarrow \quad 2v - 2v_s = v$

$\Rightarrow \quad 2v_s = v$

या $\quad v_s = \frac{v}{2} = \frac{340}{2}$

$= 170$ मी./से.

उदा.51. एक रेलगाड़ी B में बैठे प्रेक्षक को रेलगाड़ी A के इंजिन द्वारा बजायी गयी सीटी की आभासी आवृत्ति वास्तविक आवृत्ति की 3/4 प्रतीत होती है। यदि ध्वनि का वेग 332 मी./से. है तो

(i) रेलगाड़ी A को स्थिर मानकर रेलगाड़ी B का वेग ज्ञात कीजिये।

(ii) रेलागाड़ी B को स्थिर मानकर रेलगाड़ी A का वेग ज्ञात कीजिये।

हल: यहाँ रेलगाड़ी A ध्वनि स्त्रोत तथा रेलगाड़ी B श्रोता है।

(i) जब ध्वनि स्त्रोत स्थिर हो तथा श्रोता के गतिशील होने पर आवृत्ति मे कमी हो तो आभासी आवृत्ति

$$n' = \left(\frac{v - v_0}{v}\right)n$$

$$\frac{3}{4}n = \left(\frac{v - v_0}{v}\right)n$$

$\Rightarrow \quad \frac{3}{4} = \frac{v - v_0}{v}$

$\Rightarrow \quad 3v = 4v - 4v_0$

$\Rightarrow \quad 4v_0 = v$

या $\quad v_0 = \frac{v}{4} = \frac{332}{4}$

$= 83$ मी./से.

(ii) जब श्रोता स्थिर हो तथा स्त्रोत के गतिशील होन पर आवृत्ति में कमी हो तो आभासी आवृत्ति

$$n' = \left(\frac{v}{v + v_s}\right)$$

$$\frac{3}{4}n = n\left(\frac{v}{v + v_s}\right)$$

$\Rightarrow \quad \frac{3}{4} = \frac{v}{v + v_s}$

$\Rightarrow \quad 3v + 3v_s = 4v$

$\Rightarrow \quad 4v_s = v$

या $\quad v_s = \frac{v}{3} = \frac{332}{3}$

$= 110.67$ मी./से.

उदा.52. 5896Å तरंगदैर्घ्य का प्रकाश उत्सर्जित करने वाला एक तारा प्रेक्षक की ओर 3600 किमी./से. के वेग से गति कर रहा है। डॉप्लर प्रभाव के कारण तरंगदैर्घ्य विस्थापन तथा आभासी तरंगदैर्घ्य का मान ज्ञात कीजिए। (प्रकाश की चाल = 3×10^8 मी./से.)

हल: यदि प्रकाश की चाल c तथा प्रकाश स्त्रोत की चाल u हो तो डॉप्लर प्रभाव के कारण तरंगदैर्घ्य विस्थापन

$$\Delta\lambda = \frac{u\lambda}{c}$$

दिया गया है–

$u = 3600$ किमी./से. $= 36 \times 10^5$ मी./से.

$c = 3 \times 10^8$ मी./से.

$\lambda = 5896$ Å

$\therefore \quad \Delta\lambda = \frac{36 \times 10^5 \times 5896}{3 \times 10^8} = 70.75$Å

∴ तारा (प्रकाश स्त्रोत) प्रेक्षक की ओर गति कर रहा है। अतः प्रेक्षक को प्रकाश की तरंगदैर्घ्य में कमी प्रतीत होगी। यदि वास्तविक तरंगदैर्घ्य λ तथा आभासी तरंगदैर्घ्य λ' हो तो

$\Delta\lambda = \lambda - \lambda'$

$\Rightarrow \quad \lambda' = \lambda - \Delta\lambda$

$= 5896 - 70.75$

$= 5825.25$ Å

पाठ्य पुस्तक के प्रश्न

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. तरंग गति में किसका स्थानान्तरण होता है?

उत्तर- तरंग गति में ऊर्जा का स्थानान्तरण होता है।

प्र.2. एक तनी हुई डोरी की लम्बाई दुगुनी तथा तनाव चार गुना कर दें तो नई आवृत्ति व पूर्व आवृत्ति में क्या सम्बंध होगा?

उत्तर- ∵ $\quad n_1 = \frac{1}{2\ell_1} \cdot \sqrt{\frac{T_1}{m}}$

$\ell_2 = 2\ell_1$ तथा $T_2 = 4T_1$

तब $n_2 = \frac{1}{2\ell_2}\sqrt{\frac{T_2}{m}} = \frac{1}{2 \times 2\ell_1}\sqrt{\frac{4T_1}{m}} = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T_1}{m}} = n_1$

∴ नई आवृत्ति = पूर्व आवृत्ति

प्र.3. कोणीय आवृत्ति, कोणीय तरंग संख्या तथा तरंग वेग में संबंध लिखिए।

उत्तर- $v = \frac{\omega}{k}$

v = तरंग वेग, ω = कोणीय आवृत्ति, k = तरंग संचरण नियतांक (कोणीय तरंग संख्या)

प्र.4. माध्यम के किसी कण द्वारा एक सेकण्ड में किए गए कम्पनों की संख्या को क्या कहते हैं?

उत्तर- आवृत्ति

प्र.5. एक कम्पन करने में लिया गया समय क्या कहलाता है?

उत्तर- आवर्तकाल

प्र.6. तरंग वेग समीकरण लिखो।

उत्तर- तरंग वेग समीकरण $v = n \cdot \lambda$

n = तरंग आवृत्ति तथा λ = तरंगदैर्ध्य

प्र.7. वायु में मानक ताप व दाब पर ध्वनि का वेग कितना होता है?

उत्तर- मानक ताप दाब (N.T.P.) पर वायु में ध्वनि का वेग =**332 ms^{-1}**

प्र.8. किसी तरंग का आयाम यदि आधा कर दिया जाये तो उसकी तीव्रता में क्या परिवर्तन आएगा।

उत्तर- ∵ तरंग तीव्रता ∝ (आयाम)^2

यदि आयाम आधा कर दिया जाये तो उस तरंग की तीव्रता पूर्व की $\frac{1}{4}$ रह जायेगी।

प्र.9. किस माध्यम से परावर्तित होने पर परावर्तित तरंग की कला परिवर्तित हो जाती है?

उत्तर- सघन माध्यम से परावर्तित होने पर परावर्तित तरंग की कला परिवर्तित हो जाती है।

प्र.10. 400 व 402 आवृत्ति के स्वरित्र एक साथ कम्पित कराने पर विस्पन्द की आवृत्ति क्या होगी?

उत्तर- विस्पन्द की आवृत्ति $= (n_2 - n_1) = (402 - 400)$
$= 2$ विस्पंद/सेकण्ड

प्र.11. समान लम्बाई के खुले व बन्द आर्गन पाइप की मूल आवृत्तियों का अनुपात क्या होगा?

उत्तर- खुले आर्गन पाइप की मूल आवृत्ति $n_{open} = \frac{v}{2\ell} = \frac{2v}{4\ell}$

समान लम्बाई के बंद ऑर्गन पाइप की मूल आवृत्ति $n_{close} = \frac{v}{4\ell}$

$\therefore \quad n_{open} : n_{close} = 2 : 1$

प्र.12. खुले या बंद आर्गन पाइप में से किसमें केवल विषम सनादी ही उत्पन्न हो सकती है?

उत्तर- बंद ऑर्गन पाइप में केवल विषम संनादी ही उत्पन्न हो सकती है।

प्र.13. माध्य स्थिति से अधिकतम विस्थापन को क्या कहते हैं?

उत्तर- माध्य स्थिति से अधिकतम विस्थापन आयाम कहलाता है।

प्र.14. क्या अप्रगामी तरंगों के माध्यम से ऊर्जा का स्थानान्तरण होता है?

उत्तर- नहीं

प्र.15. अनुनादित वायु स्तम्भ में कौनसी तरंगे उत्पन्न होती है?

उत्तर- अनुदैर्ध्य अप्रगामी तरंगें

प्र.16. एक प्रस्पन्द व उसके क्रमिक निस्पन्द के मध्य कितनी दूरी होती है?

उत्तर- $\frac{\lambda}{4}$

प्र.17. ध्वनि के वेग पर ताप का क्या प्रभाव पड़ता है?

उत्तर- ताप बढ़ाने पर ध्वनि का वेग बढ़ जाता है।

प्र.18. तीक्ष्ण व मोटी ध्वनि में से किसका तारत्व अधिक होता है?

उत्तर- तीक्ष्ण ध्वनि का तारत्व अधिक होता है।

प्र.19. क्या पराश्रव्यी वेग से चलने वाले हवाई जहाज की सीटी की ध्वनि में डाप्लर प्रभाव प्रेक्षित होगा?

उत्तर- नहीं।

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. प्रत्यास्थ तरंगें किन्हें कहते हैं?

उत्तर- **प्रत्यास्थ तरंगें**-जिन तरंगों को संचरण के लिये माध्यम की आवश्यकता होती है, प्रत्यास्थ तरंगें कहलाती हैं। इन तरंगों का संचरण माध्यम के प्रत्यास्थता गुणों पर आधारित होता है।

प्र.2. तरंग के दक्षतापूर्ण संचरण हेतु माध्यम में कौन-कौन से गुण होने चाहिये?

उत्तर- तरंग के दक्षतापूर्ण संचरण के लिये माध्यम में निम्न गुण होने चाहिये।

(i) माध्यम में अवस्था परिवर्तन का विरोध करने वाला अर्थात् जड़त्व का गुण होना चाहिये।

(ii) माध्यम में प्रत्यास्थता का गुण होना चाहिये।

(iii) माध्यम में सतत् संचरण के लिये माध्यम स्वयं का प्रतिरोध न्यूनतम होना चाहिये।

प्र.3. तरंग संचरण नियतांक को परिभाषित कीजिये।

उत्तर- **तरंग संचरण नियतांक**

किसी तरंग में एकांक दूरी पर स्थित कम्पनशील कणों के मध्य कलान्तर तरंग संचरण नियतांक कहलाता है। इसे K से प्रदर्शित करते हैं। इसे कोणीय तरंग संख्या भी कहते हैं।

तरंग संचरण नियतांक $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ प्रति मीटर

प्र.4. अनुप्रस्थ एवं अनुदैर्ध्य तरंगों में क्या अन्तर है? लिखिये।

उत्तर-

अनुप्रस्थ तरंग	अनुदैर्ध्य तरंग
1. इन तरंगों में माध्यम के विक्षुब्ध कण तरंग संचरण की दिशा के लम्बवत् कंपन करते हैं।	1. इन तरंगों में माध्यम के विक्षुब्ध कण तरंग संचरण की दिशा में ही कंपन करते हैं।
2. इन तरंगों का संचरण श्रृंग एवं गर्त के रूप में होता है।	2. इन तरंगों का संचरण संपीड़न एवं विरलन के रूप में होता है।
3. ये तरंगें केवल उन्हीं माध्यमों में संचरित होती हैं, जिनमें दृढ़ता का गुण है। अतः इनका संचरण केवल ठोस व द्रवों में ही संभव होता है।	3. इन तरंगों का संचरण सभी प्रत्यास्थ माध्यमों में संभव है। अतः ये तरंगें ठोस, द्रव तथा गैस सभी माध्यम में संचरित हो सकती हैं।

प्र.5. तरंगों के परावर्तन की विवेचना कीजिये।

उत्तर- **तरंगों का परावर्तन**

प्रकाश तरंगों का परावर्तन विभिन्न सतहों से परावर्तन के नियमों के अनुसार होता है जबकि रेडियो तरंगें तथा अन्य विद्युत चुम्बकीय तरंगें भी विभिन्न सतहों व अवरोधों द्वारा परावर्तित होती हैं।

विद्युत चुम्बकीय तरंगों की भाँति ही यांत्रिक तरंगें परावर्तित होती है। ध्वनि तरंगों का बड़ी-बड़ी इमारतों, पहाड़ियों, व्याख्यान भवनों से परावर्तन प्रतिध्वनि के रूप में प्रेक्षित होता है। चमगादड़ पराश्रव्य तरंगों के परावर्तन से अवरोधों की प्रकृति, आकार दूरी एवं दिशा का अनुमान लगा लेती है। सोनार स्टेशन से सोनार तरंगें प्रेषित कर पानी के अन्दर की चट्टानों, पनडुब्बियों आदि की उपस्थिति का ज्ञान भी इन तरंगों के परावर्तन से होता है। परावर्तन के नियम सभी प्रकार की तरंगों के परावर्तन में लागू होते हैं। इन नियमों के अनुसार

(i) आपतन कोण = परावर्तन कोण अर्थात् $\angle i = \angle r$

(ii) आपतित किरण, परावर्तित किरण तथा अभिलम्ब एक ही तल में होते हैं।

ध्वनि तरंगें भी परावर्तन के नियमों का पालन करती हैं।

अनुदैर्ध्य (ध्वनि) तरंगों का सघन माध्यम से परावर्तन-अनुदैर्ध्य

तरंगें सघन माध्यम से बिना किसी प्रारुप में परिवर्तन के (अर्थात् संपीड़न के संपीड़न रूप में व विरलन, विरलन के रूप में) परावर्तित होता हैं किन्तु उनकी कला उलट जाती है।

अनुदैर्ध्य तरंगों का विरल माध्यम से परावर्तन–अनुदैर्ध्य तरंगें विरल माध्यम से प्रारुप में परिवर्तन के साथ (अर्थात् संपीड़न विरलन के रूप में व विरलन संपीड़न के रूप में) परावर्तित होती हैं, किन्तु कला में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

अनुप्रस्थ तरंगों का सघन माध्यम/दृढ़ माध्यम (दीवार) से परावर्तन–जब कोई अनुप्रस्थ तरंग का स्पन्द दृढ़ सिरे से परावर्तित होता है तो परावर्तित तरंग स्पन्द की आकृति आपाती स्पन्द जैसी ही होती है, किन्तु विस्थापन की दिशा विपरीत हो जाती है (अर्थात् श्रृंग गर्त के रूप में व गर्त श्रृंग के रूप में परावर्तित होता है) अत: आपतित व परावर्तित तरंग विपरीत कला में होती हैं।

अनुप्रस्थ तरंगों का विरल माध्यम/मुक्त सिरे से परावर्तन–जब कोई अनुप्रस्थ तरंग का स्पन्द मुक्त सिरे से परावर्तित होता है तो परावर्तित तरंग स्पंद की आकृति आपाती स्पन्द जैसी ही होती है, साथ ही विस्थापन की दिशा भी वैसी ही बनी रहती है (अर्थात् श्रृंग श्रृंग के रूप में व गर्त गर्त के रूप में परावर्तित होता है) अत: आपतित व परावर्तित तरंग समान कला में होती हैं।

प्र.6. प्रगामी एवं अप्रगामी तरंगों की परिभाषा बताइये एवं उनमें अन्तर लिखो।

उत्तर- **प्रगामी तरंग**–यदि किसी माध्यम में तरंग संचरित होती हुई आगे बढ़ती जाती है और उसके प्रभाव में माध्यम के कण सरल आवर्त्त गति करते हैं तो ऐसी तरंग प्रगामी तरंग कहलाती है।

अप्रगामी तरंग–जब किसी माध्यम में एक समान आवृत्ति एवं एक समान आयाम की दो तरंगें परस्पर विपरीत दिशा में समान चाल से एक ही उभयनिष्ठ मार्ग पर संचरित होकर अध्यारोपित होती हैं तो परिणामस्वरुप एक ऐसी तरंग का निर्माण होता है जिसमें विक्षोभ व ऊर्जा का किसी भी दिशा में संचरण नहीं होता। ये नवनिर्मित तरंग अप्रगामी तरंग कहलाती है।

प्रगामी व अप्रगामी तरंग में अंतर

प्रगामी तरंग	अप्रगामी तरंग
1. इन तरंगों में सभी बिन्दुओं पर बारी-बारी से आयाम समान होता रहता है।	1. इन तरंगों में कुछ बिन्दुओं (निस्पन्दों) पर आयाम शून्य तथा कुछ बिन्दुओं (प्रस्पन्दों) पर आयाम अधिकतम होता है।
2. इन तरंगों में संचरण की दिशा में कला दूरी के साथ समान रूप से बदलती है। इकाई दूरी में कला परिवर्तन $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ होता है।	2. इन तरंगों में दो क्रमागत निस्पन्दों के मध्य सभी कण समान कला में होते हैं, लेकिन एक निस्पन्द के दोनों ओर के कण विपरीत कला में होते हैं।
3. इन तरंगों में कण एक के बाद एक माध्य स्थिति अथवा अधिकतम विस्थापन की स्थिति में होते हैं।	3. इन तरंगों में सभी कण माध्य स्थिति या अधिकतम विस्थापन की स्थिति में एक साथ होते हैं।
4. इन तरंगों में श्रृंग अथवा गर्त या संपीड़न अथवा विरलन एक नियत वेग से संचरित होते हैं, जिसे कला वेग कहते हैं।	4. इन तरंगों में तरंग प्रतिरूप किसी भी दिशा में संचरित नहीं होता है तथा यह एक ही स्थान पर बनता तथा लुप्त होता है।
5. इन तरंगों में कण का वेग अधिकतम होने पर विकृति भी अधिकतम होती है तथा वेग शून्य होने पर विकृति भी शून्य होती है।	5. इन तरंगों में निस्पन्दों पर वेग शून्य किन्तु विकृति अधिकतम होती है तथा प्रस्पन्दों पर वेग अधिकतम एवं विकृति शून्य होती है।
6. इन तरंगों में ऊर्जा का संचरण एक कण से दूसरे कण को एक निश्चित वेग से होता है।	6. इन तरंगों में किसी बिन्दु पर औसत ऊर्जा का संचरण शून्य होता है।
7. इन तरंगों में सभी कण क्रमश: समान अधिकतम वेग प्राप्त करते हैं।	7. इन तरंगों में अधिकतम वेग का मान भिन्न भिन्न बिन्दुओं पर भिन्न-भिन्न होता है। इसका मान निस्पन्दों पर शून्य एवे प्रस्पन्दों पर अधिकतम होता है। इन तरंगों में कण वेग के अधिकतम मान एक साथ प्राप्त होते हैं।
8. इन तरंगों में एक तरंग लम्बाई के लिये औसत ऊर्जा आधी गतिज व आधी स्थितिज होती है।	8. इन तरंगों में ऊर्जा एकान्तर क्रम में सम्पूर्ण स्थितिज अथवा सम्पूर्ण गतिज होती है।
9. इन तरंगों में प्रत्येक क्षेत्र की विकृति समान होती है।	9. इन तरंगों में निस्पन्दों पर विकृति अधिकतम तथा प्रस्पन्दों पर शून्य होती है। इस कारण अनुदैर्ध्य तरंगों के लिये निस्पन्दों पर दाब में परिवर्तन अधिकतम तथा प्रस्पन्दों पर शून्य होता है।

प्र.7. तरंगों के अध्यारोपण से आप क्या समझते हैं? स्पष्ट कीजिये।

उत्तर- तरंगों का अध्यारोपण

जब दो या दो से अधिक तरंगें एक साथ किसी माध्यम के उभयनिष्ठ क्षेत्र में संचरण करती हैं तो उनका मिला जुला प्रभाव अध्यारोपण कहलाता है। इस प्रभाव के कारण किसी क्षण माध्यम के प्रत्येक कण का विस्थापन सभी तरंगों के कारण उस कण के पृथक-पृथक विस्थापनों के सदिश योग के बराबर होता है, इसे अध्यारोपण का सिद्धान्त कहते हैं।

यदि किसी क्षण तरंगों द्वारा उत्पन्न कण के विस्थापन $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3,......$ हो तो तरंगों के अध्यारोपण से परिणामी विस्थापन,

$$\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \vec{y}_3 + ...$$

प्र.8. गैस में तरंग वेग व्यंजक हेतु लाप्लास संशोधन की विवेचना कीजिये।

उत्तर- न्यूटन ने गैसीय माध्यम में तरंग वेग व्यंजक को निम्न रूप में प्रस्तुत किया,

$$v = \sqrt{\frac{K}{d}} \qquad ...(1)$$

जहाँ K गैस माध्यम के लिए आयतन प्रत्यास्थता गुणांक तथा d गैस का घनत्व है। न्यूटन ने माना कि अनुदैर्ध्य तरंग (ध्वनि) के संचरण में माध्यम (वायु) का ताप नियत रहता है अर्थात् यह एक समतापी प्रक्रिया है। इस स्थिति में समतापी आयतन प्रत्यास्थता गुणांक K गैस के प्रारंभिक दाब P के बराबर होता है। अत: समी. (1) निम्न रूप में लिया जाना चाहिये,

$$v = \sqrt{\frac{P}{d}} \qquad ...(2)$$

परन्तु लाप्लास ने इसे रुद्धोष्म प्रक्रिया माना तथा K या P के स्थान पर संशोधित रुद्धोष्म आयतन प्रत्यास्थता गुणांक $\gamma.P$ को प्रतिस्थापित किया जहाँ $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ और तब गैसीय माध्यम में तरंग वेग v का व्यंजक निम्न रूप में लिया गया

$$v = \sqrt{\frac{\gamma \cdot P}{d}}$$

जो कि सही सूत्र है।

प्र.9. तनी हुई डोरी में अनुप्रस्थ कम्पन के नियम लिखिए।

उत्तर- तनी हुई डोरी में अनुप्रस्थ कम्पन के नियम

तनी हुई डोरी के अनुप्रस्थ कम्पनों की मूल आवृत्ति

$$n = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{m}}$$ सूत्र से दी जाती है।

जहाँ ℓ = डोरी की कम्पित लम्बाई, T = डोरीपर लगाया गया तनाव और m = डोरी की एकांक लम्बाई का द्रव्यमान है।

उपरोक्त सूत्र के आधार पर तनी हुई डोरी में अनुप्रस्थ कम्पन के निम्न नियम प्राप्त हुये।

(1) लम्बाई का नियम-यदि डोरी पर आरोपित तनाव बल T तथा डोरी की एकांक लम्बाई का द्रव्यमान m नियत रहें तो डोरी में उत्पन्न कम्पनों की आवृत्ति उसकी लम्बाई के व्युत्क्रमानुतपाती होती है।

$\therefore \qquad n \propto \frac{1}{\ell}$

या $\qquad n \times \ell =$ नियतांक

या $\qquad n_1 \times \ell_1 = n_2 \times \ell_2 = n_3 \times \ell_3 = ... =$ नियतांक

(2) तनाव का नियम-यदि डोरी की लम्बाई ℓ व उसकी एकांक लम्बाई का द्रव्यमान m नियत हो तो डोरी में उत्पन्न कम्पनों की आवृत्ति उस पर आरोपित तनाव बल के वर्गमूल के अनुक्रमानुपाती होती है।

$\therefore \qquad n \propto \sqrt{T}$

या $\qquad \frac{n}{\sqrt{T}} =$ नियतांक

या $\qquad \frac{n_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{n_2}{\sqrt{T_2}} = \frac{n_3}{\sqrt{T_3}} .... =$ नियतांक

(3) द्रव्यमान का नियम-यदि डोरी की लम्बाई ℓ तथा उसमें तनाव T नियत रहें तो डोरी में उत्पन्न कम्पनों की आवृत्ति उसके एकांक लम्बाई के द्रव्यमान के वर्गमूलके व्युत्क्रमानुपाती होती है।

$\therefore \qquad n \propto \frac{1}{\sqrt{m}}$

या $\qquad n\sqrt{m} =$ नियतांक

या $\qquad n_1\sqrt{m_1} = n_2\sqrt{m_2} = n_3\sqrt{m_3} = ... =$ नियतांक

डोरी की प्रति एकांक लम्बाई का द्रव्यमान $m = \pi r^2 d$ होता है। अत: m का यह मान प्रतिस्थापित करने पर तृतीय नियम से दो उपनियम और प्राप्त होते हैं।

(a) त्रिज्या का नियम-यदि ℓ, T तथा डोरी के पदार्थ का घनत्व नियत रहें तब डोरी में उत्पन्न कम्पन की आवृत्ति उसकी त्रिज्या r के व्युत्क्रमानुपाती होती है।

$\therefore \qquad n \propto \frac{1}{r}$

या $\qquad nr =$ नियतांक

(b) घनत्व का नियम-यदि ℓ, T तथा डोरी की त्रिज्या नियत रहे तब डोरी में उत्पन्न कम्पन की आवृत्ति उसके पदार्थ के घनत्व के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती होती है।

$\therefore \qquad n \propto \frac{1}{\sqrt{d}}$

या $\qquad n\sqrt{d} =$ नियतांक

प्र.10. सोनोमीटर में अप्रगामी तरंगों का निर्माण किस प्रकार होता है? स्पष्ट कीजिये।

उत्तर- सोनोमीटर में अप्रगामी तरंगों का निर्माण

(1) पहले सोनोमीटर के तार से जुड़े हैंगर पर कुछ बाट रखकर तार में तनाव उत्पन्न करते हैं।

(2) एक कम्पित स्वरित्र को सोनोमीटर के समीप लाकर सोनोमीटर तार में प्रणोदित कम्पन उत्पन्न करते हैं।

(3) अब सोनोमीटर बॉक्स पर तार के नीचे लगे दोनों सेतुओं B_1 व B_2 के बीच की दूरी बदलते जाते हैं जिससे स्वरित्र द्वारा कम्पित तार की लम्बाई बदलती है एवं तार की प्राकृतिक आवृत्ति भी बदलती है।

(4) जब तार की प्राकृतिक आवृत्ति स्वरित्र की आवृत्ति के बराबर हो जाती है तो तार में अधिकतम आयाम के कम्पन उत्पन्न होते हैं। इस अवस्था में सोनोमीटर में तेज आवाज उत्पन्न होती है तथा सेतुओं के बीच तार पर रखा राइडर (कागज का टुकड़ा) गिर जाता है। यह अनुनाद की स्थिति होती है तथा सेतुओं के बीच अनुप्रस्थ अप्रगामी तरंग का निर्माण तनी हुई डोरी में बनने वाली अप्रगामी तरंगों की भाँति ही होता है।

(5)अनुनाद की स्थिति में दोनों सेतुओं की स्थितियों में तार पर निस्पन्द एवं ठीक मध्य में प्रस्पन्द बनता है तथा मूल विधा की अप्रगामी तरंग एक लूप के स्वरूप में प्राप्त होती है। इस स्थिति में तार की अनुनादित लम्बाई ℓ तरंगदैर्ध्य की आधी होती है।

अर्थात् $$\ell = \frac{\lambda}{2}$$

प्र.11. अवमंदित कम्पन एवं पोषित कम्पन की विवेचना कीजिये।

उत्तर- अवमंदित कम्पन-जब किसी कम्पन करती हुई वस्तु पर ऊर्जा क्षयकारी बल जैसे घर्षण बल, या श्यान बल आदि कार्य करते हैं तो इन बलों द्वारा उसकी गति में बाधा उत्पन्न होती है। फलस्वरुप वस्तु के कम्पन की ऊर्जा धीरे-धीरे घटती जाती है। अत: वस्तु का कम्पन आयाम भी धीरे-धीरे घटता जाता है और अंत में वह वस्तु कंपन करना बंद कर देती है। इस प्रकार के कम्पन अवमंदित कम्पन कहलाते हैं।

अवमंदित कम्पनों की अवस्था में हम मानते है कि ऊर्जा क्षयकारी बल अनावर्त्ती होता है और वेग के साथ रैखिक परिवर्ती होता है। तब इस प्रकार के कम्पन के लिये स.आ. गति का अवकल समीकरण निम्न रूप में होता है।

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -k.y - \gamma \cdot \frac{dy}{dt} \qquad \text{जहाँ वेग } v = \frac{dy}{dt},$$

$$\text{त्वरण } f = \frac{d^2y}{dt^2}$$

यहाँ γ अवमंदन नियतांक है। उपरोक्त समीकरण का

हल $$y = Ae^{-bt} \sin(\omega_D \cdot t + \phi)$$

जहाँ $$\omega_D = \sqrt{(\omega_0^2 - b^2)}$$

ω_D व ω_0 क्रमश: अवमंदित व मुक्त कम्पनों की कोणीय आवृत्ति है।

तथा नियतांक $$b = \frac{\gamma}{2m} \text{ (अल्प अवमंदन के लिये)}$$

ω_D का मान प्राकृतिक कोणीय आवृत्ति ω_0 से थोड़ा कम होता है। अवमंदित कम्पन आयाम $A_D = Ae^{-bt}$ चरघातांकी रूप में घटता जाता है।

अवमंदित कम्पन की ऊर्जा $E_D = E_0e^{-2bt}$ भी चरघातांकी रूप में तेजी से घटती जाती है।

जहाँ $$E_0 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2$$

पोषित कम्पन-जब किसी कम्पनशील वस्तु पर ऊर्जा क्षयकारी बल लगने के कारण कम्पन आयाम लगातार घटने की स्थिति होती है तो क्षयित ऊर्जा की पूर्ति किसी बाह्य अनावर्त्ती ऊर्जा स्रोत से ऊर्जा प्रदान करके की जाती है तो वह वस्तु बिना आयाम व ऊर्जा में गिरावट के मुक्त कम्पन की तरह एक ही नियत आयाम से तब तक कम्पन करती रहती है, जब तक ऊर्जा का पोषण बाह्य स्रोत करता रहता है। ऐसे कम्पन पोषित कम्पन कहलाते हैं।

यद्यपि इस स्थिति में ऊर्जा स्रोत अनावर्त्ती होता है, किन्तु इसके द्वारा ऊर्जा की पूर्ति आवर्त्ती ढंग से की जाती है। इस प्रकार के कम्पन का उदाहरण विद्युत पोषित स्वरित्र हैं।

प्र.12. यदि किसी तरंग की तरंग दैर्ध्य **2500 Å** हो तो तरंग संख्या क्या होगी?

उत्तर- तरंग दैर्ध्य $$\lambda = 2500 \text{ Å} = 2.5 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$\therefore \text{ तरंग संख्या } \quad \bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2.5 \times 10^{-7}} = 4 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$$

$$\text{कोणीय तरंग संख्या} = k = 2\pi\bar{\nu} = 2\pi \times 4 \times 10^6$$

$$= 8\pi \times 10^6 \text{ rad m}^{-1}$$

प्र.13. प्रस्पन्द एवं निस्पन्दों की विवेचना कीजिये।

उत्तर- प्रस्पन्द-अप्रगामी तरंग प्रतिरूप पर स्थित वे बिन्दु जिन पर माध्यम के कणों का विस्थापन अधिकतम होता है अर्थात् उनका स्पंदन अधिकतम होता है, प्रस्पन्द कहलाते हैं। ऐसे दो क्रमागत बिन्दुओं के बीच दूरी $\frac{\lambda}{2}$ होती है और प्रत्येक प्रस्पन्द से उसके सर्वाधिक निकट के दोनों ओर के निस्पन्द $\frac{\lambda}{4}$ दूरी पर होते हैं। अर्थात् प्रस्पन्द दो क्रमागत निस्पन्दों को ठीक मध्य में होता है। प्रस्पन्दों पर घनत्व एवं दाब परिवर्तन शून्य होते हैं।

निस्पन्द-अप्रगामी तरंग प्रतिरूप पर स्थित वे बिन्दु जिन पर माध्यम के कणों का विस्थापन सदैव शून्य होता है अर्थात् कण सदैव माध्य स्थिति में रहते हैं, निस्पन्द कहलाते हैं। ऐसे दो क्रमागत निस्पन्दों के

बीच दूरी भी $\frac{\lambda}{2}$ होती है तथा एक प्रस्पन्द इन दोनों के ठीक मध्य होता है।

निस्पन्दों पर माध्यम के घनत्व एवं दाब परिवर्तन अधिकतम होते हैं।

प्र.14. तरंग की तीव्रता का मान किन–किन पर निर्भर करता है?

उत्तर- (i) किसी तरंग की तीव्रता उसके आयाम के वर्ग के अनुक्रमानुपाती होती है, अर्थात्

$$\text{तीव्रता} \propto (\text{आयाम})^2$$

या $I \propto a^2$

या $I = ka^2$

जहाँ k समानुपातिक स्थिरांक है।

(ii) किसी तरंग की तीव्रता संचरण माध्यम की प्रकृति पर भी निर्भर करती है।

(iii) तरंग की तीव्रता तरंग जनित्र स्रोत पर भी निर्भर करती है।

प्र.15. विस्पन्द विधि द्वारा किसी स्वरित्र की आवृत्ति किस प्रकार ज्ञात करते हैं?

उत्तर- **विस्पन्द विधि द्वारा किसी स्वरित्र की आवृत्ति ज्ञात करना**

(1) जिस स्वरित्र की आवृत्ति N ज्ञात करनी होती है, उसके साथ एक ज्ञात आवृत्ति N_0 का स्वरित्र लेते हैं तथा $N_0 \simeq N$ होना चाहिये।

(2) अब दोनों स्वरित्रों को एक साथ कम्पित कराते हैं।

(3) प्रति सेकण्ड सुनाई देने वाले विस्पन्दों की संख्या ΔN सुनकर नोट करते हैं।

(4) अतः स्वरित्र की अज्ञात आवृत्ति $N = (N_0 - \Delta N)$ या $N = (N_0 + \Delta N)$ में से कोई एक है।

(5) अब अज्ञात आवृत्ति के स्वरित्र पर थोड़ा मोम लगाते हैं। भारित हो जाने से इस स्वरित्र की आवृत्ति थोड़ी घट जाती है।

(6) अब दोनों स्वरित्रों को पुनः साथ-साथ बजाते हैं।

(7) इस नवीन स्थिति में पुनः प्रति सेकण्ड बनने वाले विस्पन्दों की संख्या सुन लेते हैं। यदि अब विस्पन्द आवृत्ति $\Delta N'$ हो तब,

(i) यदि $\Delta N' > \Delta N$ हो तो $N = N_0 - \Delta N$

(ii) यदि $\Delta N' < \Delta N$ हो तो $N = N_0 + \Delta N$

(iii) यदि $\Delta N' = \Delta N$ हो तो $N = N_0 + \Delta N$

अतः उपरोक्त तीनों परिस्थितियों में से जो भी प्राप्त होती है, उसके अनुसार अज्ञात स्वरित्र की आवृत्ति N ज्ञात कर लेते हैं।

प्र.16. डाप्लर प्रभाव की सीमाएँ क्या है? लिखिए।

उत्तर- **डॉप्लर प्रभाव की सीमाएँ**

(1) स्रोत एवं श्रोता (प्रेक्षक) के बीच आपेक्षिक गति का होना आवश्यक है।

(2) ध्वनि तरंगों के लिये डॉप्लर प्रभाव को प्रेक्षित करने के लिये यह आवश्यक है कि स्रोत, श्रोता एवं माध्यम प्रत्येक का वेग ध्वनि के वेग से अधिक न हो, अर्थात् कम होना चाहिए क्योंकि यदि उनके वेग ध्वनि के वेग से अधिक होंगे तो तरंगाग्र विकृत हो जायेंगे तथा प्रघाती तरंग उत्पन्न होंगी।

(3) यदि प्रेक्षक तरंग संचरण की दिशा के लम्बवत गति करता है, तब भी डॉप्लर प्रभाव प्रेक्षित नहीं होता है।

प्र.17. ध्वनि तरंगों में डॉप्लर प्रभाव किन–किन पर निर्भर करता है?

उत्तर- **ध्वनि तरंगों में डॉप्लर प्रभाव की निर्भरता**

(i) स्रोत स्थिर होने पर श्रोता की गति एवं गति की दिशा पर।

(ii) श्रोता स्थिर होने पर स्रोत की गति एवं गति की दिशा पर।

(iii) स्रोत एवं श्रोता दोनों गतिमान हों तो उनके बीच आवश्यक रूप से आपेक्षिक गति पर एवं उनकी गति की दिशाओं पर।

(iv) ध्वनि के संचरण माध्यम की गति एवं गति की दिशा पर।

प्र.18. स्रोत किस वेग से श्रोता की ओर चले कि आभासी आवृत्ति दुगुनी हो जाये?

उत्तर- प्रश्नानुसार यदि स्रोत v_s वेग से श्रोता की ओर चलता है तो आभासी आवृत्ति दुगुनी हो जाती है। तब सूत्र

आभासी आवृत्ति $n = \frac{(v \pm v_0)}{(v - v_s)} \cdot n$ से

प्रश्नानुसार $n' = 2n$

$$\therefore \quad 2n = \frac{(v \pm v_0)}{(v - v_s)} \cdot n$$

या $(v \pm v_0) = 2(v - v_s)$

या $v \pm v_0 = 2v - 2v_s$

$$2v_s = 2v - v \mp v_0$$

$$2v_s = v \mp v_0$$

$$v_s = \left(\frac{v \mp v_0}{2}\right)$$

यदि श्रोता स्रोत की ओर आ रहा है तब $v_s = \frac{v - v_0}{2}$ यदि श्रोता स्रोत से दूर जा रहा है तब $v_s = \frac{(v + v_0)}{2}$ यदि श्रोता स्थिर है तब $v_s = \frac{v}{2}$

प्र.19. डॉप्लर प्रभाव के उपयोग से पनडुब्बी का वेग किस प्रकार ज्ञात करते हैं?

उत्तर- **डॉप्लर प्रभाव के उपयोग से पनडुब्बी का वेग ज्ञात करना**

समुद्र के अन्दर पनडुब्बी का वेग ज्ञात करने के लिये डॉप्लर प्रभाव उपयोग में लेते हैं।

(i) समुद्र के तट पर स्थित सोनार (SONAR = Sound Navigation and Ranging) स्टेशन से ध्वनि तरंगें समुद्र में भेजी जाती है।

(ii) ये तरंगें समुद्र के पानी के माध्यम से संचरित होती हुई शत्रु की पनडुब्बी से टकराती हैं तथा परावर्तित होकर पुनः समुद्र तट पर स्थित उसी सोनार स्टेशन पर पहुँचती हैं।

(iii) सोनार स्टेशन द्वारा लौटने पर ग्रहण की गई ध्वनि तरंगों का

तरंगदैर्ध्य ज्ञात कर लिया जाता है, जिससे पनडुब्बी के वेग की गणना करली जाती है।

सोनार स्टेशन से पनडुब्बी की ओर जाने वाली ध्वनि तरंगों का तरंग दैर्ध्य अपरिवर्तित रहता है क्योंकि उनके लिये स्रोत (सोनार स्टेशन) स्थिर होता है, जबकि पनडुब्बी से परावर्तित होकर आने वाली ध्वनि तरंगों के तरंगदैर्ध्य में परिवर्तन प्रतीत होता है, क्योंकि उनके लिये गतिशील पनडुब्बी स्रोत का कार्य करती है।

यदि पनडुब्बी v_s वेग से सोनार स्टेशन की ओर आ रही हो तो परावर्तित तरंगों के स्रोत का वेग $2v_s$ होगा। अत: आभासी तरंगदैर्ध्य का मान,

$$\lambda' = \frac{(v - 2v_s)}{n}$$

जहाँ v ध्वनि का समुद्र के पानी में वेग तथा n भेजी गई ध्वनि तरंगों की वास्तविक आवृत्ति है।

परन्तु $\lambda = \frac{v}{n}$ $\therefore n = \frac{v}{\lambda}$

जहाँ λ, ध्वनि तरंगों का वास्तविक तरंगदैर्ध्य हैं।

$$\therefore \quad \lambda' = \left(\frac{v - 2v_s}{v}\right)\lambda$$

या $$\lambda' = \left(1 - \frac{2v_s}{v}\right)\lambda$$

या $$\lambda' = \lambda - \frac{2v_s}{v} \cdot \lambda$$

या $$(\lambda' - \lambda) = -\frac{2v_s}{v}\lambda \quad \ldots(1)$$

ऋणात्मक चिह्न का तात्पर्य है कि जब पनडुब्बी पास आ रही है, तब उससे परावर्तित ध्वनि के तरंगदैर्ध्य में कमी आती है। यदि पनडुब्बी सोनार स्टेशन से दूर जा रही है तो समी. (1) के दाँये पक्ष में (–) के स्थान पर (+) चिह्न प्रयुक्त होगा और तब परावर्तित ध्वनि तरंगों का तरंगदैर्ध्य में वृद्धि होती है।

$$\therefore \text{ तब } \quad (\lambda' - \lambda) = +\frac{2v_s}{v} \cdot \lambda$$

इन सूत्रों के उपयोग से

$$v_s = \pm \frac{(\lambda' - \lambda)v}{2\lambda}$$

पनडुब्बी के वेग v_s के मान का परिकलन कर लेते हैं तथा सोनार स्टेशन के सापेक्ष पनडुब्बी की स्थिति का पता लगा लेते हैं।

निबन्धात्मक प्रश्न

प्र.1. तरंग गति से आप क्या समझते हैं? स्पष्ट कीजिए। प्रगामी तरंग समीकरण हेतु व्यंजक एवं तरंग का एक विमीय अवकल समीकरण प्राप्त कीजिए।

उत्तर– अनुच्छेद 9.1 तथा 9.6 पर देखें।

प्र.2. तरल में तरंग के वेग हेतु व्यंजक प्राप्त कीजिए।

उत्तर– अनुच्छेद 9.5.2 पर देखें।

प्र.3. एक समान तनी हुई डोरी में अनुप्रस्थ तरंगों के वेग हेतु सूत्र व्युत्पन्न कीजिए।

उत्तर– अनुच्छेद 9.5.1 पर देखें।

प्र.4. सिद्ध करो कि तार में अनुदैर्ध्य तरंगों व अनुप्रस्थ तरंगों के वेग का अनुपात $\frac{1}{\sqrt{\text{विकृति}}}$ होता है।

उत्तर– $\because$ अनुदैर्ध्य तरंगों का वेग $= \sqrt{\frac{Y}{d}}$

जहाँ Y = यंग प्रत्यास्थता गुणांक

अनुप्रस्थ तरंगों का वेग $= \sqrt{\frac{T}{m}} = \sqrt{\frac{T}{Ad}}$

$$\therefore \frac{\text{अनुदैर्ध्य तरंगों का वेग}}{\text{अनुप्रस्थ तरंगों का वेग}} = \sqrt{\frac{Y}{d}} \times \sqrt{\frac{Ad}{T}}$$

$$= \sqrt{\frac{Y}{T/A}} = \sqrt{\frac{\text{प्रतिबल/विकृति}}{\text{प्रतिबल}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\text{विकृति}}} = \frac{1}{\sqrt{\text{विकृति}}}$$

प्र.5. तरंग के आयाम एवं तीव्रता में संबंध हेतु व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए।

उत्तर– अनुच्छेद 9.7 पर देखें।

प्र.6. अप्रगामी तरंग किसे कहते हैं? अप्रगामी तरंग हेतु परिणामी तरंग समीकरण प्राप्त कीजिए।

उत्तर– अनुच्छेद 9.10 तथा 9.10.1 पर देखें।

प्र.7. अनुनाद किसे कहते है? अनुनाद नली का चित्र बनाकर वर्णन करते हुए वायु में ध्वनि का वेग ज्ञात करने हेतु व्यंजक प्राप्त कीजिए।

उत्तर– अनुच्छेद 9.13 तथा 9.13.2 पर देखें।

प्र.8. विस्पन्द क्या है? गणितीय विश्लेषण द्वारा सिद्ध कीजिए कि प्रति सेकण्ड विस्पन्दों की संख्या स्रोतों की आवृत्ति में अन्तर के बराबर होती है।

उत्तर– अनुच्छेद 9.16 तथा 9.16.1 पर देखें।

प्र.9. ध्वनि तरंगों में डाप्लर के प्रभाव की व्याख्या करो तथा आभासी आवृत्ति हेतु सूत्र ज्ञात करो जब :–

(i) स्रोत, स्थिर श्रोता की ओर गतिशील है।

(ii) श्रोता, स्थिर स्रोत की ओर गतिशील है।

उत्तर– अनुच्छेद 9.17 पर देखें।

आंकिक प्रश्न

प्र.1. एक विमीय तरंग का अवकल समीकरण लिखिए तथा बताओ कि निम्न में से कौन–कौन से समीकरण एक विमीय तरंग के सम्भव हल है?

(i) $y = 2\sin x\ \cos vt$

(ii) $y = 5\sin 2x\ \cos vt$

हल- एक विमीय तरंग का अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

इस समी. के संभव हल

$y = a\sin(\omega t \pm kx)$ स्वरुप में होते हैं।

(i) $y = 2\sin x\cos v{\cdot}t$

$\because$ $v{\cdot}t = x$

$\therefore$ $y = 2\sin x\cos x$

$y = \sin 2x$ जो $y = a\sin kx$ स्वरुप में हैं।

अतः एक विमीय तरंग का संभव उत्तर है।

(ii) $y = 5\sin 2x\cos v{\cdot}t$

या $y = 5\sin 2x\cos x$

जो एक विमीय तरंग के संभव हल के स्वरुप में नहीं लाया जा सकता है।

प्र.2. **500 हट्‌र्ज की आवृत्ति का एक ध्वनि स्रोत वायु में अनुदैर्ध्य तरंगें उत्पन्न कर रहा है। तरंग में दो क्रमागत विरलनों के बीच की दूरी 0.64 मीटर है तथा वायु–कण के कम्पन का आयाम 0.002 मीटर है। इस तरंग का दूरी–विस्थापन समीकरण ज्ञात कीजिए। क्षण t=2 सेकण्ड पर तरंग की दिशा में मूल बिन्दु से 10 मीटर दूरी पर स्थित कण का विस्थापन ज्ञात कीजिए।**

हल- ध्वनि स्रोत की आवृत्ति $n = 500$ Hz

दो क्रमागत विरलनें के बीच की दूरी = तरंगदैर्ध्य $\lambda = 0.64$ m

वायु कण के कम्पन का आयाम $a = 0.002$ m

इस ध्वनि तरंग का दूरी विस्थापन समीकरण

$$y = a\sin\left(2\pi nt - \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x\right)$$

या $$y = a\sin 2\pi\left(nt - \frac{x}{\lambda}\right)$$

या $$y = 0.002\sin 2\pi\left(500t - \frac{x}{0.64}\right)$$

क्षण $t = 2s$ पर तरंग की दिशा में मूल बिन्दु से $x = 10m$ की दूरी पर कण का विस्थापन

$$y = 0.002\sin 2\pi\left(500\times 2 - \frac{10}{0.64}\right)$$

$$y = 2\times 10^{-3}\sin 2\pi\left(\frac{64000-1000}{64}\right)$$

$$y = 2\times 10^{-3}\sin\frac{2\pi\times 63000}{64}$$

$$y = 2\times 10^{-3}\sin\left(1968 + \frac{3}{4}\right)\pi$$

$$y = 2\times 10^{-3}\sin\frac{3\pi}{4} = 2\times 10^{-3}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = \sqrt{2}\times 10^{-3}\ m = \sqrt{2}\ mm$$

प्र.3. एक डोरी पर चलती हुई तरंग का समीकरण निम्न है:– $y = 10\sin\pi(0.01x - 2.00t)$ जहाँ y तथा x **cm** में तथा t सेकण्ड में है। तरंग का आयाम, आवृत्ति तथा वेग ज्ञात कीजिए। किसी क्षण **40.0 cm** की दूरी पर स्थित दो कणों के बीच कलान्तर ज्ञात कीजिए।

हल- तरंग का प्रश्नानुसार दिया गया समीकरण

$$y = 10\sin\pi(0.01x - 2.00t)$$

(जहाँ y तथा x cm में तथा t सेकण्ड में)

उपरोक्त समीकरण की मानक समीकरण

$$y = a\sin(\omega t - kx)$$

या $$y = a\sin\left(2\pi nt - \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x\right)$$

या $$y = a\sin\pi\left(2nt - \frac{2x}{\lambda}\right) \qquad \left(\because \lambda = \frac{v}{n}\right)$$

या $$y = a\sin\pi\left(2nt - \frac{2nx}{v}\right)$$ तुलना करने पर

तरंग का आयाम $a = 10$ cm

$2nt = 2.00\,t$

$n = 1$ प्रति सेकण्ड

$\therefore$ आवृत्ति $n = 1s^{-1}$

तथ $$\frac{2nx}{v} = 0.01x$$

$$\frac{2\times 1x}{v} = 0.01x$$

$$v = \frac{2\times 1}{0.01} = 200\ cm/s = 2m/s$$

किसी क्षण 40 cm की दूरी पर स्थित दो कणों के बीच कलान्तर

$$\Delta\phi = k(x_2 - x_1) = \frac{2\pi n}{v}(x_2 - x_1)$$

$$= \frac{2\pi\times 1}{200}\times 40 \quad \{\because (x_2 - x_1) = 40\ cm$$

$$= \frac{2\pi}{5}\text{ रेडियन } = \frac{2\times 180°}{5} = 72°$$

प्र.4. **1.0 मीटर लम्बे खिंचे हुए स्टील के तार की मूल आवृत्ति 250 हट्‌र्ज है। स्टील का घनत्व 8000 kg/m³ है। (i) तार में**

अनुप्रस्थ तरंग की चाल ज्ञात कीजिए **(ii)** तार के अनुदैर्ध्य प्रतिबल की गणना कीजिए **(iii)** यदि तार का तनाव **2%** बढ़ा दिया जाए तो आवृत्ति में प्रतिशत परिवर्तन की गणना कीजिए।

हल- तार की लम्बाई $\ell = 1.0$ m

मूल आवृत्ति $n = 250$ Hz

स्टील का घनत्व $d = 8000$ kg/m^3

(i) तार में अनुप्रस्थ तरंग की चाल $v = \sqrt{\frac{T}{m}} \Rightarrow v = 2n \times \ell$

$\therefore \quad v = 2 \times 250 \times 1.0$

$v = 500$ m/s

(ii) तार का अनुदैर्ध्य प्रतिबल $= \frac{F}{A} = \frac{T}{\pi r^2}$

किन्तु सूत्र $n = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{m}}$ से $T = 4\ell^2 n^2 m$

$m = \pi r^2 d$

(एकांक लम्बाई का द्रव्यमान)

$\therefore \quad T = 4\ell^2 n^2 \pi r^2 d$

$\therefore$ अनुदैर्ध्य प्रतिबल $= \frac{4\ell^2 n^2 \pi r^2 d}{\pi r^2}$

या अनुदैर्ध्य प्रतिबल $= 4\ell^2 n^2 d$

$= 4 \times 1 \times 1 \times 250 \times 250 \times 8000$

$= 2 \times 10^9$ N/m^2

(iii) तार का तनाव 2% बढ़ा देने पर आवृत्ति में प्रतिशत परिवर्तन=?

$$n = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{m}} \quad ...(1)$$

$$n' = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T'}{m}} \Rightarrow n' = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{\frac{102}{100}T}{m}}$$

या $$n' = \sqrt{\frac{102}{100}}n = 1.01n$$

$\therefore$ आवृत्ति में % वृद्धि $= \frac{(n' - n)}{n} \times 100$

$= \frac{(1.01n - n)}{n} \times 100$

$= 0.01 \times 100 = 1\%$

प्र.5. 5.5×10^3 **kg/m^3** घनत्व की एक धातु में 400 कम्पन/सेकण्ड आवृत्ति की अनुदैर्ध्य तरंगों की तरंग दैर्ध्य ज्ञात करो। धातु का यंग प्रत्यास्थता गुणांक $y = 8.8 \times 10^{10}$ न्यूटन/मीटर^2 है।

हल- घनत्व $d = 5.5 \times 10^3$ kg/m^3

आवृत्ति $n = 400$ कम्पन/सेकण्ड

धातु का यंग प्रत्यास्थता गुणांक $Y = 8.8 \times 10^{10}$ N/m^2

$\therefore$ अनुदैर्ध्य तरंग की चाल $v = \sqrt{\frac{Y}{d}} = \sqrt{\frac{8.8 \times 10^{10}}{5.5 \times 10^3}}$

$\therefore \quad v = 4 \times 10^3$ m/s

$\therefore$ तरंग दैर्ध्य $\lambda = \frac{v}{n}$

या $\lambda = \frac{4 \times 10^3}{400} = 10$

$\therefore \quad \lambda = 10$ m

प्र.6. यदि एक तरंग का संचरण नियतांक 2.8×10^4 प्रति मीटर है और इसका वेग 400 मीटर प्रति सेकण्ड है तो तरंग के लिए तरंग दैर्ध्य, तरंग संख्या तथा तरंग आवृत्ति ज्ञात करो।

उत्तर- तरंग का संचरण नियतांक $k = 2.8 \times 10^4$ m^{-1}

तरंग का वेग $v = 400$ ms^{-1}

(i) तरंग दैर्ध्य $\lambda = ? \quad \because k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\therefore \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \times 3.14}{2.8 \times 10^4}$

$\lambda = 2.24 \times 10^{-4}$m

(ii) तरंग संख्या $\bar{\nu} = ?$

$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{2\pi} = \frac{2.8 \times 10^4}{2 \times 3.14}$

$\bar{\nu} = 0.4458 \times 10^4$

$\bar{\nu} = 4.46 \times 10^3$ m^{-1}

(iii) तरंग आवृत्ति $n = \frac{v}{\lambda} = \frac{400}{2.24 \times 10^{-4}} = 178 \times 10^4$

$n = 1.78 \times 10^6$ Hz

प्र.7- 5000 Å तरंगदैर्ध्य की प्रकाश तरंग की आवृत्ति, तरंग संख्या तथा संचरण नियतांक ज्ञात करो।

हल- तरंग दैर्ध्य $\lambda = 5000$ Å $= 5 \times 10^{-7}$ m

प्रकाश तरंग का वेग $c = 3 \times 10^8$ m

$\therefore$ आवृत्ति $n = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{5 \times 10^{-7}}$

$\therefore \quad n = 6 \times 10^{14}$ Hz

तरंग संख्या $\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5 \times 10^{-7}}$

$\bar{\nu} = 2 \times 10^6$ m^{-1}

संचरण नियतांक $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \times 3.14}{5 \times 10^{-7}}$

$\therefore \quad k = 1.256 \times 10^{-7}$ m^{-1}

प्र.8. एक सरल आवर्ती तरंग 100 मीटर प्रति सेकण्ड के वेग से धनात्मक x दिशा में जा रही है। तरंग का आयाम **22 cm** तथा आवृत्ति 100 कम्पन सेकण्ड$^{-1}$ **(Hz)** है। $t = 5$ सेकण्ड पर मूल बिन्दु से $x = 2$ मीटर पर किसी कण का विस्थापन, वेग तथा त्वरण ज्ञात करो।

हल- वेग $v = 100\ ms^{-1}$

आयाम $a = 22\ cm = 0.22\ m$

आवृत्ति $n = 100\ Hz$

तरंग के विस्थापन का समीकरण $y = a \sin (\omega t - k\cdot x)$

या $$y = a \sin 2\pi n\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad ...(1)$$

$\therefore$ $t = 5s$ तथा $x = 2m$ पर कण का विस्थापन

$$y = 0.22 \sin 2\pi \times 100\left(5 - \frac{2}{100}\right)$$
$$y = 0.22 \sin 200\pi \times 4.98$$
$$y = 0.22 \sin 996\pi$$
$$= 0.22 \sin 498 \times 2\pi = 0.22 \times 0$$
$$y = 0$$

समय t के सापेक्ष समी. (1) के अवकलन से

वेग $$v_p = \frac{dy}{dt} = 2\pi na \cos 2\pi n\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad ...(2)$$

$t = 5s$ तथा $x = 2m$ पर वेग

$$v_p = 2 \times 3.14 \times 100 \times 0.22 \cos 2\pi \times 100\left(5 - \frac{2}{100}\right)$$
$$= 138.16 \cos 200\pi \times 4.98$$
$$= 138.16 \cos 498 \times 2\pi$$
$$= 138.16 \times 1$$
$$= 138.16\ m/s$$

समी. (2) का पुनः t के सापेक्ष अवकलन करने पर

त्वरण $$f_p = \frac{dv_p}{dt} = 2\pi na \times \left\{-2\pi n \sin 2\pi n\left(t - \frac{x}{v}\right)\right\}$$

$\therefore$ $$f_p = -4\pi^2 n^2 a \sin 2\pi n\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$\therefore$ $t = 5s$ तथा $x = 2m$ पर कण का त्वरण

$$f_p = -4 \times (3.14)^2 \times (100)^2 \times 0.22 \sin 2 \times 3.14 \times 100\left(5 - \frac{2}{100}\right)$$
$$f_p = -86764.48 \sin 498 \times 2\pi$$
$$= -86764.48\ (0)$$

$\therefore$ $$f_p = 0$$

प्र.9. 50 मीटर लम्बे **10 kg** भार से खींचे गए तार के मूल स्वर की आवृत्ति ज्ञात करो जबकि 1 मीटर लम्बे तार का भार 2.45 ग्राम है। **($g = 980\ cm/s^2$** से.मी./सेकण्ड^2)

हल- तार की लम्बाई $\ell = 50\ cm = 0.50\ m$

तार पर तनाव $T = 10\ kg$ भार $= 10 \times 9.8N = 98N$

तार की एकांक लम्बाई का द्रव्यमान

$m = 2.45$ ग्राम $= 2.45 \times 10^{-3}\ kg$

$\therefore$ मूल स्वर की आवृत्ति $n = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{m}}$

$$n = \frac{1}{2 \times .50}\sqrt{\frac{98}{2.45 \times 10^{-3}}}$$
$$n = \frac{1}{1.00}\sqrt{4 \times 10^4}$$
$$n = \frac{1}{1.00} \times 2 \times 10^2$$

$\therefore$ $$n = 200\ Hz$$

प्र.10. **100 cm** लम्बा और **1.8 mm** व्यास वाला तांबे का तार (घनत्व 8.4) **20 kg** भार से खींचा गया है। मूल स्वर से कम्पन होने पर इसकी आवृत्ति ज्ञात करो।

हल- तार की लम्बाई $\ell = 100\ cm = 1\ m$

तार का व्यास $= 1.8\ mm$

$\therefore$ तार की त्रिज्या $r = \frac{1.8}{2}\ mm = 0.9\ mm = 9 \times 10^{-4}\ m$

तार के पदार्थ का घनत्व $d = 8.4\ gm/cm^3$

या $d = 8.4 \times 10^3\ kg/m^3$

तनाव $T = 20\ kg$ भार $= 20 \times 9.8N = 196N$

$\therefore$ आवृत्ति $$n = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{m}} \Rightarrow n = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{\pi r^2 d}}$$

$$n = \frac{1}{2 \times 1} \times \sqrt{\frac{196}{3.14 \times 9 \times 10^{-4} \times 9 \times 10^{-4} \times 8.4 \times 10^3}}$$
$$n = \frac{1}{2} \times \frac{14}{9 \times 10^{-4}} \times \sqrt{\frac{1}{2.6376 \times 10^4}}$$
$$n = \frac{7 \times 10^4}{9} \times \frac{1}{10^2} \times \frac{1}{1.624}$$
$$n = \frac{700}{14.616} = 47.89$$

या $n = 48\ Hz$ (लगभग)

प्र.11. एक स्वरित्र द्विभुज के स्वर में और **25 cm** खींचे हुए तार के स्वर में स्वरैक्य है। यदि तार की लम्बाई बदल कर **25.5 cm** कर दी जाये तथा तनाव वही रहने पर 3 विस्पन्द प्रति सेकण्ड उत्पन्न होते हैं। स्वरित्र की आवृत्ति ज्ञात करो।

हल- माना कि स्वरित्र की आवृत्ति n है। स्वरित्र के स्वर में और $\ell_1 = 25$ cm खींचे हुए तार के स्वर में स्वरैक्य है।

$\therefore \quad n = n_1 = \frac{1}{2\ell_1}\sqrt{\frac{T}{m}}$

या $\quad n = \frac{1}{2 \times 25}\sqrt{\frac{T}{m}}$

$\therefore \quad \sqrt{\frac{T}{m}} = 50\,n \qquad ...(1)$

यदि तार की लम्बाई $\ell_2 = 25.5$ cm कर दी जाये तथा तनाव वही रहे तब आवृत्ति

$$n_2 = \frac{1}{2\ell_2}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

या $\quad n_2 = \frac{1}{2 \times 25.5} \times 50n$

(समी. (1) से मान रखने पर)

$$n_2 = \frac{50n}{51} \qquad ...(2)$$

प्रश्नानुसार विस्पन्द आवृत्ति $n_1 - n_2 = 3$ विस्पन्द/सेकण्ड

$$n - \frac{50n}{51} = 3$$

या $\quad \frac{1}{51} \times n = 3$

$\therefore \quad n = 153$ Hz

प्र.12. एक सोनोमीटर तार 150 आवृत्ति वाला स्वर देता है। यदि तार का तनाव 9:16 के अनुपात में व लम्बाई 1:2 के अनुपात में बदली जाये तो तार की नई आवृत्ति ज्ञात करो?

हल- कोई सोनोमीटर तार की लम्बाई ℓ तथा तनाव T के लिये 150 Hz आवृत्ति का स्वर देता है।

$\therefore \quad n = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{m}} = 150 \text{ Hz} \qquad ...(1)$

यदि प्रश्नानुसार तार का तनाव T' व लम्बाई ℓ' बदलकर इस प्रकार किये जाते हैं कि ये क्रमशः 9:16 तथा 1:2 के अनुपात में बदलते हों

अर्थात् $\quad \frac{T'}{T} = \frac{16}{9}$ या $T' = \frac{16}{9}T$

व $\quad \frac{\ell'}{\ell} = \frac{2}{1}$ या $\ell' = 2\ell$

तब नई आवृत्ति $\quad n' = \frac{1}{2\ell'}\sqrt{\frac{T'}{m}}$

या $\quad n' = \frac{1}{2 \times 2\ell}\sqrt{\frac{\frac{16}{9}T}{m}} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{m}}$

$\therefore \quad n' = \frac{2}{3}n \qquad$ {समी. (1) से}

$\therefore \quad n' = \frac{2}{3} \times 150$ Hz

$\therefore \quad n' = 100$ Hz

प्र.13. दोनों सिरों पर बद्ध डोरी के अनुप्रस्थ कम्पन का समीकरण $y = (x,t) = 0.3\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right)\cos(120\pi\ t)$ है। जहाँ y तथा x मीटर में तथा t सेकण्ड में है। डोरी की लम्बाई 1.5 मीटर तथा द्रव्यमान **0.002 kg** है तो

(i) $x = 0.5$ मीटर पर अधिकतम विस्थापन ज्ञात करो।

(ii) तार पर निस्पन्दों के स्थान का निर्धारण करो।

(iii) तरंग वेग ज्ञात करो।

(iv) $x = 0.75$ मीटर तथा $t = 0.25$ सेकण्ड पर स्थित कण का वेग ज्ञात करो।

हल- प्रश्नानुसार, दोनों सिरे पर बद्ध डोरी के अनुप्रस्थ कम्पन का समीकरण,

$$y = (x,t) = 0.3\sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right)\cos(120\,\pi t) \qquad ...(1)$$

डोरी की कुल लम्बाई $\ell = 1.5$ m

डोरी का कुल द्रव्यमान M = 0.002 kg

मानक समीकरण

$y = a \sin kx \cos \omega t$ से समी. (1) की तुलना करने पर

$$k = \frac{2\pi}{3} \text{ या } \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3}$$

$\therefore \quad \lambda = 3$m

तथा $\quad \omega = 120\pi$ या $2\pi n = 120\pi$

$\therefore \quad n = 60$ Hz

(i) x = 0.5 m पर अधिकतम विस्थापन

$$(y)_{x=0.5m} = \left(0.3\sin\frac{2\pi}{3}x\right)_{x=0.5m}$$

या $\quad (y)_{x=0.5m} = 0.3\sin\frac{2\pi}{3} \times 0.5 = 0.3\sin\frac{\pi}{3}$

या $\quad (y)_{x=0.5m} = 0.3 \times 0.8667 \left(\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8667\right)$

या $\quad (y)_{x=0.5m} = 0.26001$ m

$\therefore \quad (y)_{x=0.5m} = 0.26$ m

(ii) तार पर निस्पन्दों के स्थान पर विस्थापन = 0

$$0.3\sin\frac{2\pi}{3}x = 0$$

$\therefore \quad \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right) = \sin 0 = \sin p \cdot \pi$

$$\frac{2\pi x}{3} = p \cdot \pi$$

$\therefore \quad x = \frac{3p}{2}$

$p = 0, 1$ से $x = 0$ तथा $x = 1.5$ m

(∵ डोरी की कुल लम्बाई 1.5 m है। अत: p के 1 से अधिक मान नहीं लिये जावेंगे)

(iii) तरंग वेग $v = n \cdot \lambda$

यहाँ $n = 60$ Hz तथा $\lambda = 3$m

∴ $v = 60 \times 3 = 180$ m/s

(iv) $x = 0.75$ m तथा $t = 0.25$s पर स्थित कण के वेग के लिये समी. (1) का t के सापेक्ष अवकलन करके वेग v_p का व्यंजक प्राप्त करेंगे।

$$\therefore \quad v_p = \frac{dy}{dt} = 0.3 \sin\frac{2\pi}{3} \times \frac{d}{dt}\{\cos(120\pi t)\}$$

या $$v_p = 0.3 \sin\frac{2\pi}{3} x \{-120\pi \sin 120\pi t\}$$

या $$v_p = -36\pi \sin\frac{2\pi x}{3} \sin 120\pi t$$

$$\therefore (v_p)_{x=0.75m,\ t=0.25s} = -36\pi \sin\frac{2\pi}{3} \times 0.75 \sin 120\pi \times 0.25$$

$$\therefore (v_p)_{x=0.75m,\ t=0.25s} = -36\pi \sin\frac{\pi}{2} \sin 30\pi$$

$$= -36\pi(1) \times (0)$$

$$= 0$$

प्र.14. 41 स्वरित्रों को इस प्रकार व्यवस्थित किया जाता है कि प्रत्येक स्वरित्र अपने समीप के स्वरित्र से 5 विस्पन्द/सेकण्ड उत्पन्न करता है। अन्तिम स्वरित्र की आवृत्ति प्रथम स्वरित्र की आवृत्ति से दुगुनी है। प्रथम एवं अन्तिम स्वरित्रों की आवृत्ति ज्ञात करो?

हल- कुल स्वरित्रों की संख्या = 41

प्रश्नानुसार प्रत्येक स्वरित्र अपने समीप के स्वरित्र से 5 विस्पन्द/सेकण्ड उत्पन्न करता है, अत: क्रमागत स्वरित्रों की आवृत्ति 5Hz के सार्वअन्तर से समान्तर श्रेढ़ी में बढ़ते क्रम में हैं।

माना प्रथम स्वरित्र की आवृत्ति n है।

अत: अंतिम 41वें स्वरित्र की आवृत्ति $= n + (41 - 1) \times 5$

$= (n + 200)$

प्रश्नानुसार $(n + 200) = 2 \times n$

∴ $2n - n = 200$

$n = 200$ Hz

∴ प्रथम स्वरित्र की आवृत्ति = 200 Hz

अंतिम स्वरित्र की आवृत्ति = n + 200 = 200 + 200 = 400 Hz

प्र.15. ध्वनि के वेग को उस गैस में ज्ञात करो जिसमें 1 व 1.01 मीटर तरंग दैर्ध्य वाली दो तरंगे 3 सेकण्ड में 10 विस्पन्द पैदा करती है।

हल- माना कि गैस में ध्वनि का वेग v है

∴ $\lambda_1 = 1$m तरंग दैर्ध्य वाली तरंग की आवृत्ति $n_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{1}$

तथा $\lambda_2 = 1.01$m तरंग दैर्ध्य वाली तरंग की आवृत्ति $n_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{1.01}$

$$\therefore \quad n_2 = \frac{100}{101} v$$

विस्पन्द आवृत्ति $\Delta n = \frac{10 \text{ विस्पन्द}}{3 \text{ सेकण्ड}} = \frac{10}{3}$ वि./से.

$$\because \quad n_1 - n_2 = \Delta n$$

$$v - \frac{100}{101} v = \frac{10}{3}$$

$$\frac{1}{101} v = \frac{10}{3}$$

या $$v = \frac{10 \times 101}{3} = \frac{1010}{3}$$

∴ $v = 336.67$ m/s

प्र.16. उस स्वरित्र की आवृत्ति ज्ञात करो जिसे 256 की आवृत्ति वाले स्वरित्र द्विभुज के साथ बजाने पर 6 विस्पन्द प्रति सेकण्ड तथा 253 आवृत्ति वाले स्वरित्र के साथ बजाने पर 3 विस्पन्द प्रति सेकण्ड उत्पन्न होते हैं।

हल- माना कि अज्ञात आवृत्ति वाले स्वरित्र द्विभुज की आवृत्ति n है, 256 Hz की आवृत्ति वाले स्वरित्र द्विभुज के साथ बजाने पर 6 विस्पन्द प्रति सेकण्ड सुनाई देते है।

∴ $256 - n = 6$ ...(1)

तथा 253 Hz की आवृत्ति वाले स्वरित्र द्विभुज के साथ बजाने पर 3 विस्पन्द प्रति सेकण्ड सुनाई देते हैं।

∴ $253 - n = 3$ ...(2)

समी. (1) व (2) को जोड़ने पर

$509 - 2n = 9$

$2n = 509 - 9 = 500$

$$\therefore \quad n = \frac{500}{2} = 250 \text{ Hz}$$

प्र.17. एक स्वरित्र स्वरमापी के खिंचे हुए तार की 0.49 मीटर एवं 0.50 मीटर लम्बाइयों में प्रत्येक से 4 विस्पन्द प्रति सेकण्ड उत्पन्न करता है। स्वरित्र की आवृत्तियाँ ज्ञात कीजिए।

हल- माना स्वरित्र की आवृत्ति n है।

यह स्वरित्र $\ell_1 = 0.49$ m लम्बाई के स्वरमापी के खिंचे हुये तार से 4 विस्पन्द प्रति सेकण्ड उत्पन्न करता है।

$$\therefore \quad \frac{v}{2\ell_1} - n = 4$$

या $$\frac{v}{2 \times 0.49} - n = 4$$

या $$\frac{v}{0.98} - n = 4 \quad ...(1)$$

वही स्वरित्र $\ell_2 = 0.50$ m लम्बाई के स्वरमापी तार से भी 4 विस्पन्द प्रति सेकण्ड उत्पन्न करता है।

$$\therefore \quad n - \frac{v}{2\ell_2} = 4$$

या $$n - \frac{v}{2 \times 0.50} = 4$$

या $$n - v = 4$$

$$\therefore \quad v = n - 4 \quad ...(2)$$

v का यह मान समी. (1) में रखने पर,

$$\frac{n-4}{0.98} - n = 4$$

$$100(n-4) - 98n = 4 \times 98$$

$$100n - 400 - 98n = 392$$

$$2n = 392 + 400 = 792$$

$$\therefore \quad n = \frac{792}{2} = 396 \text{ Hz}$$

प्र.18. दो इंजन एक दूसरे के पास से विरूद्ध दिशा में गुजरते हैं। एक इंजन 540 आवृत्ति वाली सीटी बजाता है। दूसरे इंजन में बैठे लोग एक दूसरे से गुजरने के पहले और बाद में कौन सी आवृत्ति की सीटी सुनेंगे? दोनों इंजनों का वेग 40 मीटर प्रति सेकण्ड है। ध्वनि का वेग 340 मीटर/सेकण्ड है।

हल- पहले इंजन की सीटी की आवृत्ति n = 540 Hz

सीटी बजाने वाले पहले इंजन की चाल $v_s = 40 \text{ ms}^{-1}$

सीटी सुनने वाले लोगों वाले दूसरे इंजन की चाल $v_0 = 40 \text{ ms}^{-1}$

ध्वनि का वेग $v = 340 \text{ ms}^{-1}$

(i) दूसरे इंजन में बैठे लोगों द्वारा इंजनों के एक दूसरे के पास से गुजरने से पहले सुनाई देने वाली आभासी आवृत्ति

$$n' = \frac{(v+v_0)n}{(v-v_s)} = \frac{(340+40)}{(340-40)} \times 540$$

या $$n' = \frac{380 \times 540}{300}$$

$$\therefore \quad n' = 684 \text{ Hz}$$

(ii) दूसरे इंजन में बैठे लोगों द्वारा इंजनों के एक दूसरे के पास से गुजरने के बाद सुनाई देने वाली आभासी आवृत्ति

$$n'' = \frac{(v-v_0)n}{(v+v_s)} = \frac{(340-40)}{(340+40)} 540$$

या $$n'' = \frac{300 \times 540}{380} = \frac{8100}{19}$$

$$\therefore \quad n'' = 426.3 \text{ Hz}$$

प्र.19. एक ट्रेन **60 km/h** के वेग से एक साइरन की ओर जा रही है जिसकी ध्वनि की आवृत्ति 400 कम्पन प्रति सेकण्ड है। ट्रेन में बैठे यात्री किस आवृत्ति की ध्वनि सुनेंगे? (हवा में ध्वनि का वेग 340 मीटर/सैकण्ड)

हल- साइरन की ओर जाती हुई ट्रेन की चाल $v_0 = 60$ km/h

$$= 60 \times \frac{5}{18} \text{ m/s}$$

$$\therefore \quad v_0 = \frac{50}{3} \text{ m/s}$$

साइरन द्वारा उत्पन्न ध्वनि की आवृत्ति n = 400 कम्पन/सेकण्ड

हवा में ध्वनि का वेग $v = 340 \text{ ms}^{-1}$

ट्रेन में बैठे हुये यात्रियों द्वारा सुनाई देने वाली साइरन की ध्वनि की आभासी आवृत्ति

$$n' = \frac{(v+v_0)}{v} \cdot n$$

$$n' = \frac{(340+50/3)}{340} \times 400$$

या $$n' = \frac{1070}{3} \times \frac{400}{340} = \frac{21400}{51}$$

$$n' = 419.6 \text{ Hz}$$

प्र.20. किसी इंजन की सीटी के स्वर की आवृत्ति उस समय 5/6 वां हिस्सा प्रतीत होती है जबकि वह स्थिर श्रोता को पार करता है। यदि ध्वनि का वायु में वेग 330 मीटर/सेकण्ड हो तो इंजन की गति ज्ञात कीजिये।

हल- ध्वनि का वायु में वेग $v = 330 \text{ ms}^{-1}$

स्थिर श्रोता को पार करने से पहले इंजन की सीटी की आभासी आवृत्ति

$$n' = \frac{v}{v-v_s} \cdot n$$

स्थिर श्रोता को पार करने के बाद इंजन का सीटी की आभासी आवृत्ति

$$n'' = \frac{v}{v+v_s} \cdot n$$

प्रश्नानुसार $$n'' = \frac{5}{6} n'$$

$$\therefore \quad \frac{v}{(v+v_s)} \cdot n = \frac{5}{6} \frac{v}{(v-v_s)} \cdot n$$

$$5(v+v_s) = 6(v-v_s)$$

$$5v + 5v_s = 6v - 6v_s$$

$$(5+6)v_s = (6-5)v$$

$$11v_s = 1v$$

$$v_s = \frac{v}{11} = \frac{330}{11} = 30 \text{ m/s}$$