**1** ضمیمہ 1

# لامتناہی سلسلئ
# (INFINITE SERIES)

## A.1.1 تعارف (Introduction)

جیسا کہ ہم باب نمبر 9 تواترات اور سلسلئ میں بحث ومباحثہ کر چکے ہیں، کہ ایک تواتر $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ جس میں ارکان کی تعداد لامتناہی ہو، لامحدود تواتر کہلاتی ہے اور اس کا مجموعہ، یعنی $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ لامحدود تواتر کے ساتھ جڑا ہے۔ اس سلسلئ مختصر شکل میں سگما (Sigma) علامت کا استعمال کرکے دکھایا جاسکتا ہے۔ یعنی

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

اس سبق میں ہم کچھ خاص قسم کی سلسلی کے بارے میں پڑھیں گے جن کی ضرورت مختلف مسئلوں کے حالات میں ہوتی ہے۔

## A.1.2 کسی بھی قوت نما کے لئے دورکنی مسئلہ Bionomial Theorem for any Index

باب 8 میں ہم نے دورکنی مسئلہ پر بحث ومباحثہ کیا ہے جس میں قوت نما ایک مثبت صحیح عدد تھا۔ اس سیکشن میں ہم مسئلہ کی کمی اور زیادہ عام شکل بیان کریں گے جس میں یہ ضروری نہیں ہے کہ قوت نما ایک مکمل عدد (Whole number) ہو۔ یہ ہمیں ایک خاص قسم کی لامتناہی سلسلئ دیتا ہے، جو دورکنی سلسلئ کہلاتی ہے۔

ہم فارمولہ جانتے ہیں

$$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1\, x + \ldots + {}^nC_n\, x^n$$

یہاں $n$ غیر منفی صحیح عدد ہے۔ دیکھئے کہ اگر ہم قوت نما $n$ کو کسی منفی صحیح عدد یا کسر (fraction) سے تبدیل کر دیں، تب اجتماع ${}^nC_r$ کا کوئی مطلب نہیں نکلتا۔

اب ہم بیان کرتے ہیں، دورکنی مسئلہ جو ایک لامحدود سلسلئ دیتا ہے اور جس میں قوت نما منفی ہے یا ایک کسر ہے اور ایک

© NCERT not to be republished

مکمل عدد نہیں ہے۔

**مسئلہ فارمولہ**

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

holds whenever $|x| < 1$.

**ریمارک 1** اس شرط کو احتیاط سے نوٹ کر لیجیے کہ $|x| < 1, \text{i.e.}, -1 < x < 1$ ضروری ہے جب کہ $m$ منفی ہے یا کسر ہے۔ مثال کے طور پر اگر ہم $x = -2$ اور $m = -2$ لیں، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(1-2)^{-2} = 1 + (-2)(-2) + \frac{(-2)(-3)}{1.2}(-2)^2 + \ldots$$

یا

$$1 = 1 + 4 + 12 + \ldots$$

یہ ممکن نہیں ہے۔

2. یہ نوٹ کر لیجیے کہ $(1+x)^m$ کے پھیلاؤ میں ارکان کی تعداد لامحدود ہے، جہاں m ایک منفی صیح عدد ہے یا ایک کسر ہے۔

غور کیجیے

$$(a+b)^m = \left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$$

$$= a^m\left[1 + m\frac{b}{a} + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \ldots\right]$$

$$= a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 + \ldots$$

یہ پھیلاؤ جائز ہے جب کہ $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$ اور اس کے برابر جب کہ $|b| < |a|$

$(a+b)^m$ کے پھیلاؤ میں عام رکن ہے

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)a^{m-r}b^r}{1.2.3\ldots r}$$

ہم ذیل میں دورکنی مسئلہ کے کچھ خاص Case دے رہے ہیں، جب ہم لیتے ہیں $|x| < 1$، یہ طلبا کے لیے مشق کے طور پر چھوڑے گئے ہیں۔

.1 $(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\ldots$

.2 $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\ldots$

.3 $(1-x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+\ldots$

.4 $(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$

**مثال 1** پھیلائیے $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$، جب کہ $|x|<1$

**حل** ہمارے پاس

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1}\left(\frac{-x}{2}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1.2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2+\ldots$$

$$=1+\frac{x}{4}+\frac{3x^2}{32}+\ldots$$

## A.1.3 لامحدود جیومیٹریہ سلسلئی Infinite Geometric Series

باب 9 سے سیکشن 9.3، ایک تواتر $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ **G.P** کہلاتی ہے، اگر $\frac{a_{k+1}}{a_k}=r$ $k=1,2,3,\ldots,n-1$ کے لیے۔ خاص طور پر اگر ہم $a_1=a$ لیں، تب نتیجتاً تواتر $a, ar, ar^2, \ldots ar^{n-1}$ **G.P** کو معیاری شکل کے طور دیکھا جاتا ہے۔ جہاں $a$ پہلا رکن اور $r$ **G.P** کی مشترک نسبت ہو۔

پہلے ہم محدود سلسلئی $a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}$ کا مجموعہ نکالنے کے فارمولے پر بحث و مباحثہ کر چکے ہیں۔ جو کہ اس طرح دیا گیا ہے

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

اس سیکشن (حصہ) میں ہم لامحدود جیومیٹریہ سلسلی $a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}+\ldots$ کا مجموعہ نکالنے کا فارمولہ بیان کریں گے۔

ہم **G.P**، $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$ پر غور کرتے ہیں۔

یہاں $a=1$ ، $r=\frac{2}{3}$ ہے، ہمارے پاس ہے

© NCERT not to be republished

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

ہم $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ کے کردار کے بارے میں مطالعہ کرتے ہیں جیسے $n$ بڑا اور بڑا ہوتا جا تا ہے۔

| $n$ | 1 | 5 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ | 0.6667 | 0.1316872428 | 0.01734152992 | 0.00030072866 |

ہم نے دیکھا کہ جیسے $n$ بڑا اور بڑا ہوتا جا تا ہے، $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ صفر کے قریب اور قریب ہوتا جا تا ہے۔ ریاضی کے طریقہ سے ہم کہتے ہیں کہ جیسے ہی $n$ بہت بڑا ہو جا تا ہے، $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ بہت زیادہ چھوٹا ہو جا تا ہے۔ دوسرے الفاظ میں $\left[\frac{2}{3}\right]^\infty \to 0$ ، $n \to \infty$ اس وجہ ہم نے نکالا کہ بہت سے لامحدود ارکان کا مجموعہ S=3 ہے۔

اس طرح، لامحدود جیومیٹریہ سلسلئی $a, ar, ar^2, \ldots$ کے لیے، اگر $r$ کی عددی قدر مشترک نسبت '1' سے کم ہے تب

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

اس کیس میں $r^n \to 0$ as $n \to \infty$ since $|r| < 1$ and then $\frac{ar^n}{1-r} \to 0$

اس لیے $S_n \to \frac{a}{1-r}$ as $n \to \infty$

علامتی طور پر، لامحدود جیومیٹریہ سلسلئی کا لا انتہائی کا جوڑ 'S' سے ظاہر کیا جا تا ہے۔ اس طرح ہمارے پاس $S = \frac{a}{1-r}$

مثال کے طور پر

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{(i)}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{1\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad \text{(ii)}$$

**مثال 2** G.P کا مجموعہ لاانتہائی تک معلوم کیجیے:

$$\frac{-5}{4}, \frac{5}{16}, \frac{-5}{64}, \ldots$$

**حل** یہاں $a = \frac{-5}{4}$ اور $r = -\frac{1}{4}$ ہے۔ساتھ ہی $|r| < 1$

اس لیے لاانتہائی تک مجموعہ $\dfrac{\frac{-5}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{-5}{4}}{\frac{5}{4}} = -1$

## A.1.4 قوت نما سلسلئی Exponential Series

لیون ہارڈ یولر (1707-1783) (Leonhard Euler) بہت بڑے سوئز ریاضی داں نے عدد '$e$' کا تعارف اپنی کیل کولس کی کتاب میں 1748 میں کرایا۔عدد '$e$' Calculus میں اسی طرح کارآمد ہے جس طرح π دائرہ کے مطالعہ میں۔

ذیل اعداد کی لامحدود سلسلئی پر غور کیجیے

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots \qquad \text{(i)....}$$

(1) میں دی گئی سلسلئی کا مجموعہ '$e$' سے دکھایا گیا ہے۔

ہمیں عدد $e$ کی قیمت دریافت کرنی چاہیے۔

چونکہ (1) سلسلئی کا ہر رکن مثبت ہے، یہ صاف ہے کہ اس کا مجموعہ بھی مثبت ہے۔

دو مجموعوں پر غور کیجیے

$$\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots\frac{1}{n!}+\ldots \qquad \text{(2)....}$$

اور

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots \qquad \text{(3)....}$$

اس کو دیکھیے

$\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$ اور $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$، جو دیتا ہے $\frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}$

$\frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$ اور $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$، جو دیتا ہے $\frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3}$

© NCERT not to be republished

$\frac{1}{5!}<\frac{1}{2^4}$ ، جو دیتا ہے $\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$ اور $\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}$

اس لیے مماثلث (analogy) سے ہم کہہ سکتے ہیں

$$\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}, \text{ when } n>2$$

ہم (2) میں دیکھتے ہیں کہ پہلے رکن کے علاوہ ہر رکن اپنے ساتھ ساتھ (3) کے رکن سے چھوٹا ہے۔

اس لیے

$$(4)\ldots\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)<\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\right)$$

(4) کے دونوں طرف $\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)$ کو جوڑنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots\right)$$

$$(5)\ldots\quad <\left\{\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\right)\right\}$$

$$=\left\{1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\right)\right\}$$

$$=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1+2\quad=3$$

(5) کی بائیں طرف سلسلی (1) کا اظہار کرتی ہے، اس لیے $e<3$ اور ساتھ ہی $e>2$ اور اس طرح $2<e<3$

**ریمارک** قوت نما سلسلئی کی شمولیت میں اس طرح لکھا (دکھایا) جا سکتا ہے۔

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

**مثال 3** $e^{2x+3}$ کے پھیلاؤ میں $x^2$ کا ضریب معلوم کیجیے جیسے کہ سلسلئی $x$ کی قوت میں ہے۔

**حل** قوت نما سلسلئی

© NCERT not to be republished

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

$x$ کی جگہ $(2x+3)$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$e^{2x+3} = 1 + \frac{(2x+3)}{1!} + \frac{(2x+3)^2}{2!} + ...$$

اس طرح، عام رکن ہے $\dfrac{(2x+3)^n}{n!} = \dfrac{(3+2x)^n}{n!}$

یہ دو رکنی مسئلہ سے اس طرح پھیلایا جاسکتا ہے۔

$$\frac{1}{n!}\left[3^n + {}^nC_1 3^{n-1}(2x) + {}^nC_2 3^{n-2}(2x)^2 + ... + (2x)^n\right]$$

یہاں $x^2$ کا ضریب $\dfrac{{}^nC_2 3^{n-2} 2^2}{n!}$ ہے۔اس لیے، مکمل سلسلئی میں $x^2$ کا ضریب ہے

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{{}^nC_2 3^{n-2} 2^2}{n!}$$

$$2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)3^{n-2}}{n!}$$

$$2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-2}}{(n-2)!}$$ [$n! = n(n-1)(n-2)!$ کا استعمال کرنے پر]

$$= 2\left[1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + ...\right]$$

$$= 2e^3$$

اس طرح $e^{3x+3}$ کے پھیلاؤ میں $x^2$ کا ضریب $2e^3$ ہے۔

متبادل $\quad e^{2x+3} = e^3 \,.\, e^{2x}$

$$= e^3\left[1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + ...\right]$$

اس طرح $e^{3x+3}$ کے پھیلاؤ میں $x^2$ کا ضریب ہے $e^3 . \dfrac{2^2}{2!} = 2e^3$

© NCERT not to be republished

**مثال 4** $e^2$ کی قدر ایک اعشاریہ تک معلوم کیجیے۔

**حل** قوت نما سلسلئ کا فارمولا استعمال کر کے جس میں $x$ شامل ہے۔ ہمارے پاس ہے۔

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$x = 2$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \ldots$$

$$= 1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{4}{45} + \ldots$$

$\geq$ پہلے سات ارکان کا مجموعہ $\geq 7.355$

دوسری طرف ہمارے پاس ہے

$$e^2 < \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!}\right) + \frac{2^5}{5!}\left(1 + \frac{2}{6} + \frac{2^2}{6^2} + \frac{2^3}{6^3} + \ldots\right)$$

$$= 7 + \frac{4}{15} + \left(1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots\right)$$

$$= 7 + \frac{4}{15} + \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}}\right)$$

$$= 7 + \frac{2}{5} = 7.4$$

اس طرح $e^2$ 7.355 اور 7.4 کے درمین آ تا ہے۔ اس لیے $e^2$ کی قدر ایک اعشاریہ تک 7.4 ہے۔

## A.1.5 لوگارتمی سلسلئ Logarithmic Series

ایک دوسری بہت خاص سلسلئ لوگارتمی سلسلئ ہے جو کہ ساتھ ہی لامحدود سلسلئ کی شکل میں ہے۔ ہم بغیر ثابت کیے ہوئے ذیل نتائج کو بیان کر رہے ہیں اور اس کے اطلاق کو ایک مثال کے ذریعہ دکھا رہے ہیں۔

© NCERT not to be republished

**مسئلہ** اگر $|x| < 1$، تب

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ....$$

مندرجہ بالا میں سیدھے ہاتھ کی طرف سلسلئی کو لوگارتمی سلسلئی کہا جاتا ہے۔

> **نوٹ** $\log_2(1+x)$ کا پھیلاؤ $x = 1$ کے لیے جائز ہے۔ $\log_2(1+x)$ کے پھیلاؤ میں $x = 1$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log_e 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$$

**مثال 5** اگر $\alpha$، $\beta$ مساوات $x^2 - px + q = 0$ کے جزر ہے، تو ثابت کیجیے کہ

$$\log_e(1+px+qx^2) = (\alpha+\beta)x - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2 + \frac{\alpha^3+\beta^3}{2}x^3 - ...$$

**حل** داہنے ہاتھ کی طرف

$$= \left[\alpha x - \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{\alpha^3 x^3}{2} - ...\right] + \left[\beta x - \frac{\beta^2 x^2}{2} + \frac{\beta^3 x^3}{3} - ...\right]$$

$$= \log_e(1+\alpha x) + \log(1+\beta x)$$

$$= \log_e(1+(\alpha+\beta)x + \alpha\beta x^2)$$

بائیں ہاتھ کی طرف $= \log_e(1+px+qx^2)$

یہاں ہم نے $\alpha + \beta = p$ اور $\alpha\beta = q$ حقیقتوں کا استعمال کیا ہے۔ ہم یہ دی ہوئی دورکنی مساوات کے جذروں سے جانتے ہیں۔ ساتھ ہی ہم نے یہ بھی مانا ہے کہ $|\alpha x| < 1$ اور $|\beta x| < 1$ ۔

© NCERT not to be republished