

# बहुपद

## बहुपद क्या है ?

चर, अचर गुणांक और घात वाले बीजगणितीय व्यंजक (algebraic expression) बहुपद कहलाते हैं |

जैसे -  $x^2$ ,  $2x^3$ ,  $3y$ ,  $2x + 5$ ,  $ax^2 + bx$ ,  $2x^2 - 7x + 3$  और  $3x^3 + 4x - 5x + 9$  इत्यादि |

समान्यतः बहुपद (Polynomials) को  $p(x)$  से सूचित करते हैं |

जैसे -  $p(x) = 2x^2 + 3x + 5$  अथवा  $p(x) = 3x$  आदि |

ये बहुपद नहीं होते हैं :-

(i) वह बीजीय व्यंजक जिसका घात ऋणात्मक संख्या हो - जैसे -  $1$ ,  $-2$ ,  $-4$  या  $-5$  इत्यादि |  $3x^{-2} + 5x$ ,  $y^{-3} - y$ ,  $6x^{-4}$  इत्यादि अन्य उदाहरण हैं |

(ii) वह पद जो किसी चर से विभाजित हो जैसे -

$$\frac{1}{x}, \frac{2}{x+1} \text{ इत्यादि |}$$

(iii) वह बीजीय व्यंजक जिसका घात कोई भिन्नात्मक संख्या (fractional number) हो तो वह बहुपद नहीं होता है | जैसे -

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$$

अर्थात् जिस व्यंजक में चर ऐसे घात वाले हो तो वह बहुपद नहीं कहलाता है।

**पद के अनुसार बहुपद (Polynomials) के प्रकार :**

(i) एकपदी बहुपद (Monomials) : जब किसी व्यंजक में केवल एक ही पद हो तो उसे एकपदी बहुपद कहते हैं।

जैसे -  $3x$ ,  $3x^2$ ,  $5xyz$ ,  $10ab$ ,  $2bc$ ,  $4x^4y^3$ ,  $10$  और  $3y$  इत्यादि।

(ii) द्विपदी बहुपद (Binomials) : जब किसी बीजीय व्यंजक में दो पद (+) या (-) के चिन्हों से जुड़े हो तो वे द्विपदी बहुपद कहलाते हैं।

जैसे -  $3x + 5$ ,  $4x - 7y$ ,  $3x^2 + 5$ ,  $7y^5 + 6x$ ,  $9x + y$  इत्यादि।

(iii) त्रिपदी बहुपद (Trinomials) : जब किसी बीजीय व्यंजक में तीन पद (+) या (-) से जुड़े हो तो वह त्रिपदी बहुपद कहलाता है।

जैसे -  $2x + 3y + 4$ ,  $4y^2 + 3y - 7$ ,  $3x^3 + 2x^2 + 7x$  और  $2x^2 + 3x - 5$  इत्यादि।

**बहुपद की घात (The power of polynomials) :**

किसी बहुपद  $p(x)$  के अधिकतम घात को बहुपद की घात कहते हैं। जैसे –

(i)  $p(x) = 3x + 3$  में बहुपद की घात 1 है।

(ii)  $p(x) = 4x^2 + 3x + 5$  में बहुपद की घात 2 है।

(iii)  $p(x) = 3x^3 + 2x - 7$  में बहुपद की घात 3 है।

(iv)  $p(x) = 7x^4 + 5x^3 + x - 8$  में बहुपद की घात 4 है।

(v)  $p(x) = 10$  में बहुपद की घात 0 है क्योंकि चर पद नहीं है।

**मुख्य-बिंदु और सूत्र :**

1. यदि  $x$  एक चर है,  $n$  एक प्राकृत संख्या है और  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  वास्तविक संख्याएँ हैं, तो  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , ( $a_n \neq 0$ ) चर  $x$  में एक बहुपद कहलाता है।
2. 1, 2 तथा 3 घातांक वाले बहुपद क्रमशः रैखिक, द्विघात एवं त्रिघात बहुपद कहलाते हैं।
3. एक द्विघात बहुपद  $ax^2 + bx + c$  के रूप का बीजीय व्यंजक होता है जबकि  $a, b$  तथा  $c$  वास्तविक संख्याएँ हैं तथा  $a \neq 0$ .
4. बहुपद के शून्यक उन बिंदुओं के  $x$ -निर्देशांक हैं जिन पर  $y = p(x)$  का आलेख (GRAPH)  $x$ -अक्ष को प्रतिच्छेद करता है। अर्थात्  $x = a$ , बहुपद  $p(x)$  का शून्यक होगा यदि  $p(a) = 0$
5. बहुपद के अधिकतम शून्यक उतने हो सकते हैं जितनी बहुपद की घात है।
6. (i) यदि बहुपद  $p(x)$  का एक शून्यक दूसरे का योज्य प्रतिलोम हो तो  $x$  का गुणांक = 0  
(ii) यदि बहुपद  $p(x)$  के शून्यक एक-दूसरे के गुणन प्रतिलोम हो तो,  $x^2$  का गुणांक = अचर पद
7. बहुपद के शून्यकों ओर गुणांकों में संबंध—  
यदि  $\alpha, \beta$  द्विघात बहुपद  $ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) के शून्यक हो, तो  

$$\alpha + \beta = \text{शून्यकों का योग} = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \text{शून्यकों का गुणनफल} = \frac{c}{a}$$
8. यदि  $\alpha, \beta$  किसी द्विघात बहुपद के शून्यक हो, तो बहुपद  

$$p(x) = k [x^2 - (\text{शून्यकों का योग})x + \text{शून्यकों का गुणनफल}]$$
  
जहाँ  $k$  कोई वास्तविक संख्या है तथा  $k \neq 0$
9. रैखिक बहुपद  $p(x) = ax + b$  का आलेख एक सरल रेखा होती है।
10. विभाजन एल्गोरिथ्म—किंही दो बहुपदों  $p(x)$  तथा  $g(x)$  के लिए अन्य दो बहुपदों  $q(x)$  तथा  $r(x)$  का अस्तित्व इस प्रकार है:

$$p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x) ;$$

जबकि  $g(x) \neq 0$  तथा  $r(x) = 0$  या घातांक  $r(x) < \text{घातांक } g(x)$