5013CH01

1 حقیقی اعداد (REAL NUMBERS)

1.1 تعارف

نویں جماعت میں آپ نے حقیقی اعداد کی دنیا کی تلاش کی اور غیر ناطق سے آپ کا سابقہ ہوا۔ اس باب میں ہم حقیقی اعداد کا مطالعہ جاری رکھیں گے۔ سیکشن 1.2 اور 1.3 کو ہم مثبت صحیح اعداد کی دو اہم خصوصیات سے شروع کریں گے جسے اقلیدس کا تقسیم الگورتھم اور حساب کا بنیادی مسئلہ کہتے ہیں۔

اقلیدس کا تقسیم الگورتھم جیسا کہ نام سے ہی ظاہر ہے، صحیح اعداد کی تقسیم سے متعلق ہے۔ جس کے مطابق کسی مثبت صحیح اعداد a کو دوسرے مثبت صحیح عدد b سے اس طرح تقسیم کیا جا سکتا ہے کہ r باقی بچے اور یہ b سے چھوٹا ہو۔ آپ میں سے بہت سے طلبا اس کو لمبی تقسیم کی حیثیت سے پہچانتے ہیں۔ حالانکہ یہ نتیجہ سمجھنے اور بیان کرنے میں کافی آسان ہے: صحیح اعداد کی تقسیمی خصوصیات سے متعلق اس کے بہت سے استعمال ہیں۔ اس میں سے چند ہی کے بارے میں ہم اس باب میں مطالعہ کریں گے اور خاص طور سے اس کا استعمال ہم دو مثبت صحیح اعداد کا [ذو اضعاف اقل مشترک (HCF)] معلوم کرنے میں کریں گے۔

دوسری طرف حساب کے بنیادی مسئلے کا تعلق مثبت صحیح اعداد کی ضرب سے ہے۔ آپ پہلے سے ہی واقف ہیں کہ ہر ایک مرکب عدد کو ایک مخصوص طریقے سے مفرد اعداد کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ یہ اہم حقیقت ہی حساب کا بنیادی مسئلہ ہے۔ یہ نتیجہ بھی سمجھنے اور بیان کرنے میں کافی آسان ہے۔ اور ریاضی کے میدان میں اس کے دور رس اور اہم استعمالات ہیں۔ ہم حساب کے بنیادی مسئلے کا استعمال دو اہم استعمالات میں کریں گے۔ اوّلاً ہم کئی اعداد کی غیر ناطقیت کو ثابت کرنے میں اس کا استعمال کریں گے، جس کا مطالعہ آپ نے نویں جماعت میں کیا ہے۔ جیسے $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ اور $\sqrt{5}$ اور ثانیاً اس کا استعمال یہ جاننے کے لیے کریں گے کہ کب ناطق عدد $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ کا عشری اظہار مختتم ہے اور کب غیر مختتم اور

تکراری ہے اور ایسا ہم $\frac{p}{q}$ کے نسب نما q کے مفرد اجزائے ضربی کو دیکھ کر کر سکتے ہیں آپ دیکھیں گے کہ q کے مفرد اجزائے ضربی $\frac{p}{q}$ کے عشری پھیلاؤ کے بارے میں حتمی بات بتاتے ہیں۔

آیئے اب ہم اپنے مطالعے کو شروع کرتے ہیں۔

1.2 اقلیدس کا تقسیم معاونہ (Euclid's Division Lemma)

مندرجہ ذیل لوک پہیلی (Folk Puzzle) پر غور کیجئے*

ایک تاجر ایک سڑک کے کنارے انڈے بیچتا ہوا جا رہا تھا۔ ایک بیکار آدمی جس کے پاس کرنے کو کوئی کام نہیں تھا، اس تاجر سے بدکلامی کرنے لگا جس کی وجہ سے دونوں کے درمیان جھگڑا شروع ہو گیا، اس نے اس ٹوکری کو جس میں انڈے تھے زمین پر پھینک دیا، جس کی وجہ سے تاجر کے سارے انڈے ٹوٹ گئے، تاجر نے پنچایت سے التجا کی کہ وہ اس آدمی سے اس کے انڈوں کے پیسے دلوائے، پنچایت تاجر سے پوچھتی ہے کہ اس کے کتنے انڈے ٹوٹے، اس نے مندرجہ ذیل جوابات دئے:

اگر جوڑوں میں گنا جائے تو ،ایک باقی بچے گا ؛
اگر تین ،تین کر کے گنا جائے تو دو باقی بچیں گے ؛
اگر چار ،چار کر کے گنے جائیں تو تین باقی بچیں گے ؛
اگر پانچ پانچ کر کے گنے جائیں تو چار باقی بچیں گے ؛
اگر چھ چھ کر کے گنے جائیں تو پانچ باقی بچیں گے؛
اگر سات سات کر کے گنے جائیں تو کچھ باقی نہیں بچتا ؛
میری ٹوکری میں 150 سے زیادہ انڈے نہیں آسکتے ۔

بتایئے اس ٹوکری میں کل کتنے انڈے تھے؟ آیئے ہم اس پہیلی کو حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں مان لیجئے انڈوں کی تعداد a ہے۔ پہیلی کے مطابق a یا تو 150 سے کم ہے یا برابر:

اگر سات سات میں گنتے ہیں تو کچھ باقی نہیں بچتا جس کا حساب کی زبان میں مطلب ہے $a = 7p + 0$، جہاں P کوئی طبعی عدد ہے۔ اگر چھ چھ کر کے گنیں تو $a = 6q + 5$

اگر پانچ پانچ کر کے گنیں تو 4 باقی بچتا ہے، اس کو ہم لکھتے ہیں $a = 5w + 4$, جہاں w کوئی طبعی عدد ہے۔
اگر چار چار کر کے گنیں تو 3 باقی بچتا ہے اس کا مطلب ہے $a = 4s + 3$, جہاں s کوئی طبعی عدد ہے۔

*رام پال اور دیگر حضرات کے عددی شماریات ! (Numeracy Counts) میں شامل پہیلی کی یہ جدید شکل ہے۔

اگر تین تین میں گنیں تو دو باقی بچتا ہے اس کا مطلب ہے $a = 3t + 2$, جہاں t کوئی طبعی عدد ہے۔

اگر جوڑوں میں گنتے ہیں تو ایک باقی بچتا ہے اس کا مطلب ہے $a = 2u + 1$, جہاں u کوئی طبعی عدد ہے۔

یعنی ہر حالت میں ہمارے پاس ہوتا ہے a اور ایک مثبت صحیح عدد b (ہماری مثال میں b کی قدریں بالترتیب 7،6،5،4،3، اور 2 ہیں) جو a کو تقسیم کر کے باقی r (ہماری مثال میں r بالترتیب ہے 0،5،4،3،2، اور 1 ہے) جو b سے چھوٹا ہے، جس لمحہ ہم ایسی مساواتیں لکھتے ہیں ہم اقلیدس کے تقسیم کے معاونہ کا استعمال کرتے ہیں جو مسئلہ 1.1 میں دیا ہوا ہے۔

واپس ہم اپنی پہیلی کی طرف آتے ہیں، کیا آپ کو کچھ اندازہ ہے کہ آپ اس کو کس طرح حل کریں گے؟ ہاں! ہم 7 کے ایسے اضعاف پر غور کریں گے، جو تمام شرطوں کو مطمئن کریں، سعی و خطا کی مدد سے اس کو معلوم ہوگا کہ اس کے پاس 119 انڈے تھے۔

اس بات کو محسوس کرنے کے لیے اقلیدس کا تقسیم کا معاونہ کیا ہے۔ مندرجہ ذیل صحیح اعداد کے جوڑوں پر غور کیجیے

$$17, 6; \quad 5, 12; \quad 20, 4;$$

جیسا کہ ہم نے مذکورہ بالا مثال میں کیا، ایسے ہر ایک جوڑے کے لیے ہم مندرجہ ذیل تعلق (relations) لکھ سکتے ہیں۔

$17 = 6 \times 2 + 5$ (17 کو 6 سے تقسیم کرنے پر باقی 5 بچتا ہے)

$5 = 12 \times 0 + 5$ (یہ تعلق بھی صحیح ہے کیونکہ 12 یہ 5 سے بڑا ہے)

$20 = 4 \times 5 + 0$ (یہاں 20,4 میں 5 مرتبہ جاتا ہے اور باقی کچھ نہیں بچتا ہے)

یعنی ہر مثبت صحیح اعداد a اور b کی جوڑی کے لیے ہم کو مکمل اعداد q اور r ملتے ہیں جو درج ذیل تعلق (مساوات) کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$a = bq + r, 0 \le r < b$$

نوٹ کیجیے کہ q یا r صفر بھی ہوسکتا ہے۔

درج ذیل مثبت صحیح اعداد کی جوڑی a اور b کے لیے آپ q اور r معلوم کرنے کی کوشش کیوں نہیں کرتے؟

(i) 10, 3; (ii) 4, 19; (iii) 81, 3

کیا آپ نے یہ بات نوٹ کی کہ q اور r یکتا ہیں؟ یہی صرف ایسے صحیح اعداد میں جو شرط $a = bq + r$ کو مطمئن کرتے ہیں جہاں $0 \le r < b$ آپ نے یہ بھی محسوس کیا ہوگا آپ اتنے سالوں سے جو لمبی تقسیم کر رہے ہیں اس کی یہ دوسری شکل ہے اور صحیح اعداد q اور r بالترتیب خارج قسمت اور باقی کہلاتے ہیں اس نتیجے کا ایک رسمی بیان مندرجہ ذیل ہے۔

مسئلہ 1.1: (اقلیدس کی تقسیم کا معاونہ) a اور b مثبت صحیح اعداد کے لیے q اور ایسے دو منفرد صحیح اعداد موجود ہوتے ہیں $a = bq + r$ جب کہ $0 \le r < b$ کو مطمئن کرتے ہیں۔

اس نتیجہ کا انکشاف بہت پہلے ہو چکا تھا۔لیکن سب سے پہلے اس کو اقلیدس کے عناصر کی کتاب VII میں ریکارڈ کیا گیا، اقلیدس کے تقسیم کا الگورتھم کی بنیاد اس معاونہ پر ہے۔

الگورتھم اُن واضح اقدامات کا وہ سلسلہ ہے جو کسی مسئلہ کے حل کا طریقہ فراہم کرتا ہے۔

لفظ الگورتھم نویں صدی کے ایرانی ریاضی داں الخوارزمی کے نام سے اخذ کیا گیا ہے۔درحقیقت، لفظ الجبرا بھی ان ہی کی لکھی گئی کتاب 'حساب الجبر او المقابلہ' سے اخذ کیا گیا ہے۔

معاونہ ایک ایسا ثابت شدہ بیان ہے جس کا استعمال کسی دوسرے بیان کو ثابت کرنے میں کیا جاتا ہے۔

محمد ابن موسیٰ الخوارزمی
(C.E. 780 - 850)

اقلیدس کا تقسیم الگورتھم دیے ہوئے دو مثبت صحیح اعداد کا [اعادِ اعظم مشترک (HCF)] معلوم کرنے کی ایک تکنیک ہے۔ یاد کیجیے کہ دو مثبت صحیح اعداد a اور b کا عادِ اعظم (HCF) وہ سب سے بڑا مثبت صحیح عدد d ہے جو a اور b دونوں کی تقسیم کرتا ہے۔

آیئے دیکھتے ہیں کہ الگورتھم کس طرح عمل کرتا ہے۔اس کے لیے ہم ایک مثال لیتے ہیں مان لیجیے، ہمیں صحیح اعداد 455 اور 42 کا HCF (عادِ اعظم مشترک) معلوم کرنا ہے، ہم بڑے صحیح عدد یعنی 455 سے شروع کرتے ہیں، پھر ہم اقلیدس کے معاونہ کا استعمال کرتے ہیں، اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$455 = 42 \times 10 + 35$$

اب مقسوم علیہ 42 اور باقی 35 پر غور کیجیے اور مندرجہ ذیل حاصل کرنے کے لئے تقسیم کے معاونہ کا استعمال کیجیے

$$42 = 35 \times 1 + 7$$

اب مقسوم علیہ 35 اور باقی 7 پر غور کیجیے اور $35 = 7 \times 5 + 0$ حاصل کرنے کے لیے تقسیم کے معاونہ کا استعمال کیجیے۔نوٹ کیجیے کہ باقی صفر (0) ہو گیا ہے اس لئے ہم مزید آگے نہیں بڑھ سکتے ہم یہ دعویٰ کرتے ہیں کہ 455 اور 42 کا HCF عادِ اعظم اس

مرحلہ پرمقسوم علیہ ہے یعنی 7–اس کی تصدیق آپ 455 اور 42 کے تمام اجزائے ضربی کی فہرست بنا کر کر سکتے ہیں۔ یہ طریقہ کس لئے کام کرتا ہے؟ یہ مندرجہ ذیل نتیجے کی وجہ سے کام کرتا ہے۔

اس لئے آیئے اقلیدس کی تقسیم کے **الگورتھم** کو واضح طور پر بیان کرتے ہیں۔

دو مثبت صحیح اعداد c اور d کا مشترک عاد اعظم معلوم کرنا ہے جبکہ $c > d$ ہم مندرجہ ذیل اقدام اٹھاتے ہیں۔

قدم 1: c اور d پر اقلیدس کے تقسیم کے معاونہ کا استعمال کیجئے، اس طرح ہمیں مکمل اعداد q اور r ایسے ملتے ہیں کہ

$$c = dq + r, \ 0 \leq r < d.$$

قدم 2: اگر $r = 0$ ہو اور d یہ c اور d کا عاد اعظم مشترک ہے۔ اگر $r \neq 0$، تو d اور r پر تقسیم کے معاونہ کا استعمال لیجیے۔

قدم 3: باقی صفر ہونے تک اس عمل کو جاری رکھیے، اس مرحلہ پر مقسوم علیہ مطلوبہ عاد اعظم مشترک ہوگا۔

یہ الگورتھم کا کام کرتا ہے کیونکہ $\text{HCF}(c, d) = \text{HCF}(d, r)$ جہاں علامت $\text{HCF}(c,d)$، یہ c اور d کے HCF ہیں۔

مثال 1: اقلیدس کے الگورتھم کا استعمال کر کے 4052 اور 12576 کا عاد اعظم مشترک (HCF) معلوم کیجئے۔

حل:

قدم 1: کیونکہ $12576 > 4052$، ہم 4052 اور 12576 پر تقسیم کے معاونہ کا استعمال کر کے ہمیں

$12576 = 4052 \times 3 + 420$ یہ حاصل ہوتا ہے۔

قدم 2: کیونکہ باقی $420 \neq 0$ ہم، 4052 اور 420 پر تقسیم کے معاونہ کا استعمال کر کے ہمیں

$4052 = 420 \times 9 + 272$ حاصل ہوتا ہے۔

قدم 3: ہم نئے مقسوم علیہ 420 اور نئے باقی 272, پر غور کرتے ہیں اور تقسیم کے معاونہ کے استعمال کر کے ہمیں

$420 = 272 \times 1 + 148$ حاصل ہوگا۔

ہم نئے قاسم 272 اور باقی 148 پر غور کرتے ہیں اور تقسیم کے معاونہ کا استعمال کر کے ہمیں

$272 = 148 \times 1 + 124$ حاصل ہوتا ہے۔

ہم نئے مقسوم علیہ 148 اور باقی 124 پر غور کرتے ہیں اور تقسیم کے معاونہ کا استعمال کر کے ہمیں

$148 = 124 \times 1 + 124$ ہوتا ہے۔

ہم نئے مقسوم علیہ 124 اور نئے باقی 24 پر غور کرتے ہیں، اور تقسیم کے معاونہ کا استعمال کر کے ہمیں
$124 = 24\times 5 + 4$ یہ حاصل ہوتا ہے۔
اب ہم نئے مقسوم علیہ 24 اور نئے باقی 4 پر غور کرتے ہیں، اور نئے معاونہ کے استعمال کر کے ہمیں
$24=4\times 6+0$ حاصل ہوتا ہے

اب باقی صفر ہو گیا، اس لئے ہمارا طریقہ (الگورتھم) رک جاتا ہے۔ کیوں کہ اس مرحلہ پر مقسوم علیہ 4 ہے، 12576 اور 4052 کا HCF 4 ہے۔

نوٹ کیجئے کہ $4 = \text{HCF}\ (24, 4) = \text{HCF}\ (124, 24) = \text{HCF}\ (148, 124)$

$= \text{HCF}\ (272, 148) = \text{HCF}\ (420, 272) = \text{HCF}\ (4052, 420) = \text{HCF}\ (12576, 4052).$

اقلیدس کا تقسیم کا معاونہ نہ صرف بڑے اعداد کا HCF عادِ اعظم مشترک معلوم کرنے میں مفید ہے بلکہ یہ کسی الگورتھم کی وہ پہلی مثال ہے جس کو حل کرنے کے لئے کمپیوٹر نے پروگرامنگ کی۔

ریمارکس

1۔ اقلیدس کا تقسیم معاونہ اور الگورتھم اس طرح سے باہم مربوط ہیں کہ لوگ اکثر معاونہ کو تقسیم کا الگورتھم کہتے ہیں۔

2۔ حالاں کہ اقلیدس کی تقسیم کا الگورتھم صرف مثبت صحیح اعداد کے لئے بیان کیا جاتا ہے لیکن اس کی توسیع ہم صفر کے علاوہ تمام صحیح اعداد یعنی $b \neq 0$ کے لئے کر سکتے ہیں، اس باب میں ہم اس پہلو پر غور نہیں کریں گے۔

اعداد کی خصوصیات معلوم کرنے کے لیے اقلیدس کے تقسیم کے معاونہ/ الگورتھم کا مختلف طریقہ سے استعمال ہوتا ہے۔ ان میں سے کچھ ذیل میں دیے گئے ہیں۔

مثال 2: دکھائیے کے ہر مثبت جفت صحیح عدد $2q$ جیسا ہوتا ہے اور ہر مثبت طاق عدد $2q+1$ جیسا ہوتا ہے جہاں q کوئی صحیح عدد ہے۔

حل: مان لیجئے a کوئی مثبت صحیح عدد ہے اور $b = 2$ تب اقلیدس کے الگورتھم کے مطابق $a = 2q + r$، کسی صحیح عدد $q \geq 0$ کے لئے اور $r = 0$ یا $r = 1$ کیونکہ $0 \leq r < 2$ اس لئے $a = 2q$ یا $2q + 1$

اگر a، $2q$ جیسا ہے تب a ایک جفت صحیح عدد ہے۔ مزید ایک مثبت صحیح عدد یا تو جفت ہوتا ہے یا طاق۔ اس لئے کوئی بھی مثبت طاق عدد $2q + 1$ جیسا ہوتا ہے۔

مثال 3: دکھائیے کوئی بھی مثبت طاق صحیح عدد $4q + 1$ یا $4q + 3$ جیسا ہوتا ہے جہاں q کوئی صحیح عدد ہے۔

حل: آیئے شروعات a لے کر کرتے ہیں جہاں a مثبت طاق عدد ہے ہم a اور $b = 4$ پر تقسیم الگورتھم کا استعمال کرتے ہیں

کیونکہ $0 \le r < 4$ ممکنہ باقی ہیں 0، 1، 2 اور 3

یعنی a ہوسکتا ہے $4q$ یا $4q+1$، $4q+2$ یا $4q+3$ جہاں q خارج قسمت ہے۔

لیکن a، $4q$ یا $4q+2$ نہیں ہوسکتا کیونکہ a طاق ہے (کیونکہ دونوں 2 سے تقسیم ہوتے ہیں) اس لئے کوئی بھی طاق صحیح عدد $4q+1$ یا $4q+3$ جیسا ہوتا ہے۔

مثال 4: ایک حلوائی کے پاس 420 کاجو کی برفی اور 130 بادام کی برفی ہے۔ وہ برفی کو قطاروں میں اس طرح لگانا چاہتا ہے کہ ہر قطار میں برفی کی تعداد یکساں ہو اور ٹرے کا کم سے کم رقبہ استعمال ہو اس مقصد کے لئے ہر قطار میں کتنی برفیاں ہوں گی؟

حل: اس مسئلہ کو ہم Trial and error سعی و خطا کی مدد سے حل کرسکتے ہیں۔ لیکن اس کو منظّم طور پر کرنے کے لئے ہم (420,130) کا عاد اعظم مشترک معلوم کرتے ہیں۔ اس طرح سے اس سے ہمیں ہر قطار میں موجود برفی کی وہ اعظم تعداد ملے گی جس کی وجہ سے قطاروں کی تعداد کم سے کم ہو۔ اور اسی حالت میں ٹرے کا رقبہ کم سے کم استعمال ہوگا۔

آیئے، اب اقلیدس کے الگورتھم کا استعمال HCF معلوم کرنے میں کرتے ہیں، ہمارے پاس ہے

$$420 = 130 \times 3 + 30$$

$$130 = 30 \times 4 + 10$$

$$30 = 10 \times 3 + 0$$

اس طرح سے 420 اور 130 کا HCF 10 ہے

اس طرح سے حلوائی دونوں قسم کی برفیوں کی 10، 10 کی قطاریں بنائے گا۔

مشق 1.1

1۔ اقلیدس کی تقسیم کے الگورتھم کو استعمال کر کے مندرجہ ذیل کا HCF معلوم کیجئے۔

(i) 135 اور 225 (ii) 196 اور 38220 (iii) 867 اور 255

2۔ دکھایئے کہ کوئی بھی مثبت طاق صحیح عدد $6q+1$، $6q+3$ یا $6q+5$ جیسا ہے جہاں q کوئی صحیح عدد ہے۔

3۔ ایک پریڈ میں 616 افراد کی فوج کے ایک دستے کو 32 افراد کے ایک فوجی بنیڈ کے پیچھے چلنا ہے۔ دونوں گروپوں کو

کالموں کی یکساں تعداد میں مارچ کرتا ہے۔ کالموں کی وہ بڑی سے بڑی تعداد معلوم کیجیے جس میں وہ مارچ کر سکتے ہیں؟

4۔ اقلیدس کے تقسیم کے معاونہ کا استعمال کر کے دکھایئے کہ کسی مثبت صحیح عدد کا مربع یا تو $3m$ یا $3m+1$ کی شکل کا ہوگا جہاں m کوئی صحیح عدد ہے۔

[اشارہ:- مان لیجئے x کوئی مثبت صحیح عدد ہے تب یہ $3q$، $3q + 1$ یا $3q + 2$ کی شکل کا ہوگا۔ اب ان سب کا مربع نکالیے اور دکھایئے کہ کسی بھی مثبت صحیح عدد کا مربع $3m$ یا $3m + 1$ کی شکل کا ہوگا۔

5۔ اقلیدس کی تقسیم کے معاونہ کا استعمال کر کے دکھایئے کہ کسی بھی مثبت صحیح عدد کا کعب $9m$، $9m+1$ یا $9m+8$ کی شکل کا ہوگا۔

1.3 حساب کا بنیادی مسئلہ

سابقہ کلاسوں میں آپ دیکھ چکے ہیں کہ کسی بھی طبعی عدد کو آپ اس کے مفرد اجزائے ضربی کی شکل میں لکھ سکتے ہیں، مثال کے طور پر $2 = 2$، $4 = 2 \times 2$، $253 = 11 \times 23$ اور آگے تک۔ آیئے اب ہم طبعی عدد کو ایک دوسرے نظریہ سے دیکھتے ہیں یعنی کیا کسی طبعی عدد کو مفرد اعداد کی ضرب کے ذریعے حاصل کیا جا سکتا ہے؟ آیئے دیکھتے ہیں۔

مفرد اعداد کا کوئی بھی مجموعہ لیجئے جیسے 2, 3, 11,7 اور 23، اگر ہم ان میں کچھ یا تمام اعداد کو ضرب کریں، جس میں اعداد کی تکرار کی کوئی قید نہیں ہو، تو ہم مثبت صحیح اعداد کا ایک بہت بڑا مجموعہ حاصل کر سکتے ہیں (درحقیقت لامحدود) آیئے ان میں سے کچھ کی فہرست مندرجہ ذیل میں بتاتے ہیں۔

$$3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313 \qquad 7 \times 11 \times 23 = 1771$$

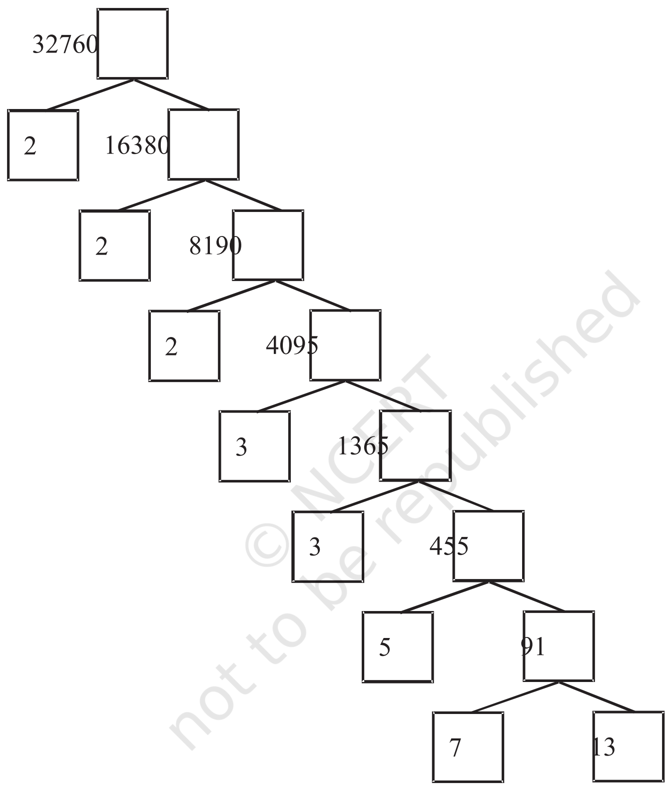
$$2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232 \qquad 2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$$

وغیرہ $\qquad 2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$

اب فرض کر لیجئے کہ آپ کے مفرد اعداد کے مجموعہ میں تمام ممکنہ مفرد اعداد شامل ہیں۔ اس مجموعہ کے سائز کے بارے میں آپ کا کیا اندازہ ہے؟ کیا اس میں محدود صحیح اعداد ہیں یا لامحدود؟ درحقیقت اس میں لامحدود مفرد اعداد ہیں۔ اس لئے اگر ہم ان تمام مفرد اعداد اور ان کے تمام ممکنہ حاصل ضربوں پر مشتمل کریں اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ کیا ہم اس طریقہ سے تمام مرکب اعداد بھی حاصل کر سکتے ہیں؟ آپ کیا سوچتے ہیں؟ کیا آپ یہ سوچتے ہیں کہ ایک ایسا مرکب عدد ہو سکتا ہے جو مفرد اعداد کی قوتوں (Power) کا حاصل ضرب نہ ہو؟ اس سے پہلے کہ ہم اس کا جواب دیں آیئے مثبت صحیح اعداد کے اجزائے ضربی بنائیں

یعنی اس سے قبل جو ہم نے کیا ہے اس کا برعکس کریں۔

ہم اجزائے ضربی کے درخت کا استعمال کرتے ہیں جس سے آپ سب پہلے ہی سے واقف ہیں۔ آیئے کوئی بڑا عدد مان لیجئے۔ 32760 لیتے ہیں اور اس کے اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں جیسا کہ ذیل شکل میں دکھایا گیا ہے۔



اس طرح سے ہم نے 32760 کے اجزائے ضربی مفرد اعداد کے حاصل ضرب $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ کی شکل میں معلوم کیجئے یعنی $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ یہ مفرد اعداد کی قوتوں کے حاصل ضرب کی شکل ہے۔ آیئے ایک دوسرا عدد لیتے ہیں جیسے 123456789 اس کو ہم $3^2 \times 3803 \times 3607$ کی طرح لکھ سکتے ہیں بے شک آپ کو جانچ کرنا ہوگا کہ 3803 اور 3607 مفرد ہیں! (اس کو آپ خود دوسرے بہت سے طبعی اعداد کے لئے کوشش کیجئے) اس سے ہمیں ایک Conjecture (قیاس) حاصل ہوتا ہے کہ ہر مرکب عدد کو مفرد اعداد کی قوتوں کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

درحقیقت یہ بیان صحیح ہے اور اسے ہم حساب کا بنیادی مسئلہ کہتے ہیں کیونکہ صحیح اعداد کے مطالعہ کے لئے اس کی بنیادی حیثیت ہے۔ آیئے اب ہم رسمی طور پر اس مسئلہ کو بیان کرتے ہیں۔

مسئلہ 1.2 حساب کا بنیادی مسئلہ (Fundamental Theorem of Arithmetic) :- ہر مرکب عدد کو مفرد اعداد کے حاصل ضرب اجزائے ضربی کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ یہ اجزائے ضربی میں (تحلیل) اظہار منفرد ہوتا ہے۔ بھلے ہی مفرد اجزائے ضربی کی ترتیب مختلف ہو۔

حساب کے بنیادی مسئلے کے مطابق ہر مرکب عدد کو مفرد اعداد کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ درحقیقت اس میں بھی زیادہ اس مسئلے کی رو سے دیے ہوئے کسی مرکب عدد کے اجزائے ضربی ایک مخصوص (منفرد) طریقہ سے مفرد اعداد کے حاصل ضرب کی شکل میں بنائے جا سکتے ہیں۔ سوائے اس ترتیب کے جس میں مفرد اعداد واقع ہوتے ہیں یعنی کسی بھی دیے ہوئے مرکب کو ایک اور صرف ایک ہی طریقے سے مفرد اعداد کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جا سکتا ہے۔ جب تک کے ہم اس کے مفرد اعداد کی ترتیب پر غور نہیں کرتے۔ مثال کے طور پر ہم $7 \times 5 \times 3 \times 2$ اور $2 \times 7 \times 5 \times 3$ کو ایک ہی سمجھتے ہیں یا اس کے علاوہ اور بھی کسی ترتیب میں ہوں۔ اس حقیقت کو ہم مندرجہ ذیل شکل میں بیان کرتے ہیں۔

طبعی اعداد کی مفرد اجزائے ضربی میں تحلیل منفرد (ایکتا) ہے سوائے اس کے اجزائے ضربی کی ترتیب کے۔

عمومی طور پر ایک دیے ہوئے مرکب عدد x کے ہم اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں $x = p_1p_2 \ldots p_n$, جہاں p_1,

مسئلہ 1.2 کا معادل بیان سب سے پہلے اقلیدس کے عناصر کی کتاب IX میں موضوعہ 14 کے طور پر ریکارڈ کیا گیا ہے۔ بعد میں اسے حساب کے بنیادی مسئلہ کے طور پر جانا جانے لگا۔ لیکن اس کا پہلا صحیح ثبوت کارل فریڈرک گاس (Carl Friedrich Gauss) نے *Disquisitiones Arithmeticae* میں دیا۔ گاس کو اکثر ریاضی کے شہزادے کے طور پر جانا جاتا ہے اور اس کا نام ابھی تک کے دنیا کے 3 بڑے ریاضی دانوں میں شامل ہوتا ہے۔ فریڈرک گاس، نیوٹن (Newton) اور ارشمدس (Archimedes) وغیرہ۔ انہوں نے سائنس اور ریاضی میں بنیادی تعاون دیا ہے۔

کارل فریڈرک گاس
(1777-1855)

ہیں جو بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھے ہیں ۔یعنی $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_n$ اگر ہم یکساں مفرد اعداد کو ملائیں تو ہمیں مفرد اعداد کی قوت حاصل ہوگی مثال کے طور پر،

$$32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$$

جب ہم نے ایک بار طے کرلیا کے ترتیب بڑھتی ہوئی ہوگی تب وہ طریقہ جس میں سے عدد کے اجزائے ضربی ہوں گے منفرد ہوگا حساب کے بنیادی مسئلے کے ریاضی اور دوسرے میدانوں میں بہت سے استعمال ہیں۔آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 5: اعداد 4^n پر غور کیجئے جہاں n ایک طبعی عدد ہے، جانچ کیجئے کہ آیا n کی کوئی ایسی قدر ہے جن کے لئے 4^n کا اختتام صفر پر ہو۔

حل: اگر عدد 4^n کسی بھی n کے لیے ہندسہ صفر پر ختم ہوتا ہے تب یہ 5 سے تقسیم ہوگا یعنی 4 مفر اجزائے ضربی میں مفرد عدد 5 شامل ہوگا یہ ممکن نہیں ہے کیونکہ $4^n = (2)^{2n}$ اس لئے 4^n کا مفرد جزوضربی 2 ہے۔اس لئے حساب کے بنیادی مسئلے کی انفرادیت سے یہ طے ہوجاتا ہے کہ 4^n کے مفرد اجزائے ضربی میں 2 کے علاوہ کوئی دوسرا مفرد عدد نہیں ہے۔اس لئے ایسا کوئی بھی طبعی عدد n نہیں ہے جس کے لئے 4^n ہندسہ صفر پر ختم ہو۔

سابقہ کلاسوں میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ حساب کے بنیادی مسئلہ کو استعمال کر کے دو مثبت صحیح اعداد کا HCF اور LCM کیسے معلوم کیا جاتا ہے۔جبکہ ہم اس مسئلہ کے بارے میں کچھ جانتے نہیں تھے۔

اس طریقہ کو ہم مفرد اجزائے ضربی کا طریقہ بھی کہتے ہیں۔آیئے ایک مثال کے ذریعہ اس طریقہ کو دہراتے ہیں۔

مثال 6: مفرد اجزائے ضربی کے طریقہ سے 6 اور 20 کا LCM اور HCF معلوم کیجئے۔

حل: ہمارے پاس ہے $6 = 2^1 \times 3^1$ اور $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$

آپ معلوم کرسکتے ہیں کہ HCF (6,20) = 2، $LCM = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ ہے اور 60 ہے جیسا کہ آپ سابقہ کلاسوں میں کر چکے ہیں۔

نوٹ کیجئے کہ $HCF(6, 20) = 2^1$ اعداد میں موجود ہر ایک مشترک مفرد اجزائے ضربی کی قلیل قوت کا حاصل ضرب۔

$LCM(6, 20) = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$ اعداد میں شامل ہر ایک مفرد اجزائے ضربی کی اعظم قوت کا حاصل ضرب۔

مذکورہ بالا مثال سے آپ نے نوٹ کیا ہوگا کہ $\mathrm{HCF}(6,20)\times \mathrm{LCM}(6,20)=6\times 20$ درحقیقت ہم تصدیق کر سکتے ہیں کہ کسی بھی دو مثبت صحیح اعداد a اور b کے لئے $\mathbf{HCF}\ (a,b)\times \mathbf{LCM}\ (a,b)=a\times b$ اس نتیجہ کے استعمال سے، ہم دو مثبت صحیح اعداد کا LCM معلوم کر سکتے ہیں اگر ہم دونوں مثبت اعداد کا HCF پہلے ہی معلوم کر چکے ہوں۔

مثال 7: مفرد اجزائے ضربی کے طریقہ سے 96 اور 404 کا HCF معلوم کیجئے اور پھر LCM بھی معلوم کیجئے۔

حل: 96 اور 404 کے مفرد اجزائے ضربی سے ہمیں ملتا ہے۔

$$96 = 2^5 \times 3, \qquad 404 = 2^2 \times 101$$

اس لئے ان دو صحیح اعداد کا HCF $2^2 = 4$ ہے

مزید $\mathrm{LCM}(96,404) = \dfrac{96\times 404}{\mathrm{HCF}(96,404)} = \dfrac{96\times 404}{4} = 9696$

مثال 8: مفرد اجزائے ضربی کے طریقہ کو استعمال کر کے 6، 72 اور 120 کا HCF اور LCM معلوم کیجئے۔

حل: ہمارے پاس ہے۔

$$6 = 2\times 3, 72 = 2^3\times 3^2, 120 = 2^3\times 3\times 5$$

یہاں 2^1 اور 3^1 مشترک اجزائے ضربی 2 اور 3 کی بالترتیب اصغر (سب سے چھوٹی) قوتیں ہیں۔

اس لئے، $\mathrm{HCF}(6,72,120) = 2^1\times 3^1 = 2\times 3 = 6$

اور 5^1 مفرد اجزائے ضربی 2، 3 اور 5 بالترتیب اعظم قوتیں ہیں جو تینوں اعداد میں شامل ہیں۔

اس لئے، $\mathrm{LCM}(6,72,120) = 2^3\times 3^2\times 5^1 = 360$

ریمارک: نوٹ کیجئے $6\times 72\times 120 \neq \mathrm{HCF}\ (6, 72, 120)\times \mathrm{LCM}\ (6, 72, 120).$ اس لئے تین اعداد کا حاصل ضرب ان کے HCF اور LCM کے حاصل ضرب کے برابر نہیں ہے۔

مشق 1.2

1۔ مندرجہ ذیل ہر ایک عدد کو اس کے مفرد اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے طور پر لکھیے۔

(i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2۔ مندرجہ ذیل صحیح اعداد کے جوڑوں کا HCF اور LCM معلوم کیجیے اور تصدیق کیجیے کہ
دونوں اعداد کا حاصل ضرب = LCM × HCF

(i) 26 اور 91 (ii) 510 اور 92 (iii) 336 اور 54

3۔ مفرد اجزائے ضربی کے طریقہ کے استعمال سے مندرجہ ذیل صحیح اعداد کا LCM اور HCF معلوم کیجیے

(i) 12, 15 اور 21 (ii) 17 , 23 اور 29 (iii) 8 , 9 اور 25

4۔ دیا ہوا ہے 9 = HCF (306 , 657)، LCM (306, 657) معلوم کیجیے۔

5۔ جانچ کیجیے آیا 6^n کسی طبعی عدد n کے لئے ہندسہ صفر پر ختم ہوتا ہے۔

6۔ تشریح کیجیے کہ کیوں $7 \times 11 \times 13 + 13$ اور $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ مرکب اعداد ہیں۔

7۔ کھیل کے ایک میدان کے چاروں طرف ایک دائری راستہ ہے۔ سونیا میدان کا ایک چکّر لگانے میں 18 منٹ لیتی ہے جبکہ روی ایک چکّر 12 منٹ میں پورا کر لیتا ہے۔ فرض کیجیے کہ دونوں ایک مقام سے ایک ہی سمت میں ایک وقت چلنا شروع کرتے ہیں۔ کتنے منٹ بعد وہ دونوں ابتدائی مقام پر دوبارہ ملیں گے۔

1.4 غیر ناطق اعداد پر نظر ثانی

نویں کلاس میں آپ کو غیر ناطق اعداد اور ان کی خصوصیات سے متعارف کرایا گیا تھا۔ آپ نے ان کے وجود کے بارے میں مطالعہ کیا اور آپ نے یہ بھی سیکھا کہ کس طرح دونوں ناطق اور غیر ناطق اعداد مل کر حقیقی اعداد کی تشکیل کرتے ہیں۔ آپ نے غیر ناطق اعداد کو عددی خط پر پلاٹ کرنا بھی سیکھا۔ لیکن ہم نے یہ ثابت نہیں کیا کہ یہ غیر ناطق ہیں۔ اس سیکشن میں ہم یہ ثابت کریں گے کہ $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ اور عمومی طور پر $\sqrt{p}$ غیر ناطق ہے جہاں p مفرد ہے۔ ایسے ثبوت میں ہم جس ایک مسئلہ کا استعمال کریں گے وہ ہے حساب کا بنیادی مسئلہ

یاد کیجیے کہ ایک عدد 's'، غیر ناطق اعداد کہلاتا ہے اگر اس کو '$\frac{p}{q}$' کی شکل میں نہ لکھا جا سکے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$۔ غیر ناطق اعداد کی کچھ مثالیں جس سے آپ پہلے ہی واقف ہیں۔

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0.10110111011110\ldots$$ وغیر

اس سے پہلے کہ ہم یہ ثابت کریں کہ $\sqrt{2}$ غیر ناطق ہے۔ہمیں ایک مسئلے کی ضرورت ہے جبکہ ثبوت کی بنیاد حساب کے بنیادی مسئلہ پر ہے۔

مسئلہ 1.3: مان لیجئے p ایک مفرد عدد ہے اگر p یہ a^2 کو تقسیم کرتا ہے تب p ، a کو بھی تقسیم کرے گا، جہاں a ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

*ثبوت: مان لیجئے a کے مفرد اجزائے ضربی مندرجہ ذیل ہیں۔

$a = p_1 p_2 .....p_n$ جہاں $p_1 p_2 ....p_n$ مفرد ہیں لیکن ضروری نہیں کہ یہ مختلف ہوں۔

اس لئے $a = (p_1 p_2 ...p_n)(p_1 p_2 ...p_n) = p_1^2 p_2^2 ...p_n^2$

اب ہمیں دیا ہوا ہے کہ p، a^2 کو تقسیم کرتا ہے۔اس لئے حساب کے بنیادی مسئلے کی رو سے یہ پتہ چلتا ہے p یہ a^2 کے مفرد اجزائے ضربی کا ایک جز ہے لیکن حساب کے بنیادی مسئلے کی انفرادیت کو استعمال کرکے ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ a^2 کے مفرد اجزائے ضربی صرف $p_1 p_2 ....p_n$ ہیں۔اس لئے p، $p_1 p_2 ....p_n$ میں سے ایک ہے اب کیونکہ $a = p_1 p_2 .....p_n$ $a, p,$ کو تقسیم کرتا ہے

اب ہم $\sqrt{2}$ کو غیر ناطق ثابت کرنے کے لئے تیار ہیں

اس ثبوت کی بنیاد جس تکنیک پر ہے اسے تضاد کا ثبوت، کہتے ہیں (اس تکنیک کو ضمیمہ میں تفصیل سے بیان کیا گیا ہے)

مسئلہ 1.4: $\sqrt{2}$ غیر ناطق ہے۔

ثبوت: آیئے فرض کرتے ہیں کہ $\sqrt{2}$ ناطق ہے۔

اس لئے ہم صحیح اعداد r اور s $(\neq 0)$ معلوم کرسکتے ہیں جبکہ $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$

مان لیجئے r اور s میں ایک کے علاوہ کوئی مشترک جزو ضربی ہے تب ہم اس مشترک جزو ضربی سے تقسیم کرکے $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ حاصل کرتے ہیں۔

جہاں a اور b باہمی مفرد (Coprime) ہیں

اس لئے $b\sqrt{2} = a$

*یہ امتحان کے نقطۂ نظر سے نہیں ہے۔

دونوں طرف مربع کرنے اور دوبارہ ترتیب دینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $2b^2 = a^2$ اس لئے 2، یہ a^2 کو تقسیم کرتا ہے۔
اب مسئلہ 1.3 کی رو سے یہ کہتے ہیں کہ 2 یہ a کو تقسیم کرتا ہے۔
اس لئے ہم لکھ سکتے ہیں $a = 2c$ کسی صحیح عدد c کے لئے، a کی جگہ رکھنے پر ہمیں ملتا ہے $2b^2 = 4c^2$ یعنی $b^2 = 2c^2$،
اس کا مطلب ہے کہ 2 یہ b^2 کو بھی تقسیم کرتا ہے اس لئے 2 یہ b کو بھی تقسیم کرے گا (دوبارہ مسئلہ 1.3 کی رو سے جس میں $p = 2$ ہے) اس لئے a اور b میں 2 ایک مشترک جزو ضربی ہے۔
لیکن یہ تضاد ہے کیونکہ ہم نے مانا تھا کے a اور b میں 1 کے علاوہ کوئی مشترک جزو ضربی نہیں ہے۔ اس تضاد سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ ہم نے جو مانا تھا وہ غلط تھا یعنی کہ $\sqrt{2}$ ناطق ہے غلط ہے۔
اس لئے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ $\sqrt{2}$ غیر ناطق ہے

مثال 9: ثابت کیجئے $\sqrt{3}$ غیر ناطق ہے

حل: آیئے اس کے برخلاف فرض کرتے ہیں کہ $\sqrt{3}$ ناطق ہے

یعنی ہم ایسے صحیح اعداد a اور b معلوم کر سکتے ہیں جن کے لئے $b \neq 0$ ہو

مان لیجئے a اور b میں 1 کے علاوہ ایک مشترک جزو ضربی ہے۔ تو ہم اس مشترک جزو ضربی سے تقسیم کر دیتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ a اور b، ہم مفرد ہیں

اس لئے $b\sqrt{3} = a$۔

دونوں طرف مربع کرنے اور ترتیب دینے پر ہمیں ملتا ہے $3b^2 = a^2$

اس لئے a^2 یہ 3 سے تقسیم ہو جائیگا اور مسئلہ 1.3 کی رو سے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ a بھی 3 سے تقسیم ہو جائیگا۔

اس لئے ہم $a = 3c$ لکھ سکتے ہیں جہاں c کوئی صحیح عدد ہے۔

a کی جگہ رکھنے پر ہمیں ملتا ہے $3b^2 = 9c^2$ یعنی

اس کا مطلب ہے کہ b^2 بھی 3 سے تقسیم ہو جائے گا۔ اس لئے b بھی 3 سے تقسیم ہو جائیگا۔ (مسئلہ 1.3 کی رو سے جب $p = 3$)

اس لئے a اور b کم سے کم ایک مشترک جزو ضربی ہے۔
لیکن یہ اس حقیقت کی نفی کرتا ہے کہ a اور b باہمی مفرد ہیں۔

اور یہ تضاد اس لئے ہوا کہ ہم نے غلط فرض کیا تھا کہ $\sqrt{3}$ غیر ناطق ہے۔

نویں کلاس میں ہم نے بیان کیا تھا

- کہ ایک ناطق اور غیر ناطق عدد کا حاصل جمع اور فرق غیر ناطق ہوتا ہے اور
- ایک غیر صفر اور غیر ناطق عدد کا حاصل ضرب اور حاصل تقسیم غیر ناطق ہوتا ہے۔

یہاں ہم کچھ مخصوص حالات کو ثابت کرتے ہیں۔

مثال 10: دکھایئے کہ $5 - \sqrt{3}$ غیر ناطق ہے۔

حل: آیئے اس کے برخلاف فرض کرتے ہیں کہ $5 - \sqrt{3}$ ناطق ہے

یعنی ہم دو باہم مفرد اعداد a اور b معلوم کر سکتے ہیں $(b \neq 0)$ جن کے لئے $5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$

$5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$ ہو اس لئے $5 - \frac{a}{b}\sqrt{3}$ ہے اس مساوات کو دوبارہ ترتیب دینے پر ہمیں ملتا ہے

$$\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b} = \frac{5b - a}{b}$$

کیونکہ a اور b صحیح اعداد ہیں اس لئے $5 - \frac{a}{b}$ ناطق ہے۔ اور اس لئے $\sqrt{3}$ بھی ناطق ہے۔

لیکن یہ اس حقیقت کی نفی کرتا ہے کہ $\sqrt{3}$ غیر ناطق ہے۔

یہ تضاد اس لئے ہوا کیونکہ ہم نے غلط مانا تھا کہ $5 - \sqrt{3}$ ناطق ہے۔

اس لئے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ $5 - \sqrt{3}$ غیر ناطق ہے۔

مثال 11: دکھایئے کہ $3\sqrt{2}$ غیر ناطق ہے

حل: اس کے برخلاف ہم مانتے ہیں کہ $3\sqrt{2}$ ناطق ہے۔

یعنی ہم دو باہم مفرد اعداد a اور b معلوم کریں گے جس میں $b \neq 0$ ہو اس طرح کہ $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

دوبارہ ترتیب دینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$۔

کیونکہ 3، a اور b صحیح اعداد ہیں $\frac{a}{3b}$ ناطق ہے اس لئے $\sqrt{2}$ بھی ناطق ہوگا۔

لیکن یہ اس حقیقت کی نفی کرتا ہے کہ $\sqrt{2}$ غیر ناطق ہے۔

اس لئے ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ $3\sqrt{2}$ غیر ناطق ہے۔

مشق 1.3

1۔ ثابت کیجئے $\sqrt{5}$ غیر ناطق ہے۔

2۔ ثابت کیجئے کہ $3 + 2\sqrt{5}$ غیر ناطق ہے۔

3۔ مندرجہ ذیل کو غیر ناطق ثابت کیجئے۔

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

1.5 ناطق اعداد اور ان کے عشری اظہار پر نظر ثانی

نویں کلاس میں آپ نے پڑھا ہے کہ ناطق اعداد کا عشری پھیلاؤ یا تو مختتم ہے یا غیر مختتم تکراری ہے اس سیکشن میں ہم ایک ناطق عدد $\frac{p}{q}$ جس کا $q \neq 0$ ہو اُس پر یہ جاننے کے لئے غور کریں گے کہ $\frac{p}{q}$ کا عشری پھیلاؤ مختتم اور کب غیر مختتم اور تکراری ہے۔ ایسا ہم بہت سی مثالیں لے کر کرتے ہیں ایسے مندرجہ ذیل اعداد پر غور کرتے ہیں۔

(i) 0.375 (ii) 0.104 (iii) 0.0875 (iv) 23.3408.

اب

(i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{1000} = \frac{104}{10^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10000} = \frac{233408}{10^4}$

جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ تمام اعداد اپنے ناطق اعداد میں ظاہر کئے جا سکتے ہیں جس کا نسب نما 10 کی کوئی قوت ہے اسے ہم شمار کنندہ اور نسب نما کے درمیان تمام مشترک اجزائے ضربی کو کینسل کرنے کی کوشش کرتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ ہمیں کیا حاصل ہوتا ہے۔

(i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{10^3} = \frac{13 \times 2^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{13}{5^3}$

(iii) $0.0875 = \dfrac{875}{10^4} = \dfrac{7}{2^4 \times 5}$ (iv) $23.3408 = \dfrac{233408}{10^4} = \dfrac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4}$

کیا آپ کوئی نمونہ (پیٹرن) دیکھ رہے ہیں جس سے ایسا ظاہر ہوتا ہے کہ ہم نے ایک حقیقی عدد کو جس کا عشری پھیلاؤ کو ایک ناطق عدد $\dfrac{p}{q}$ جہاں p اور q باہم مفرد ہیں ۔ پر مختتم اور نسب نما (یعنی q) کے مفرد اجزائے ضربی صرف 2 یا 5 یا دونوں کی قوتیں ہیں، اور ہمیں یہ معلوم تھا کہ ایسا ہی ہوگا کیونکہ 10 کی قوتوں کے صرف 2 اور 5 ہی اجزائے ضربی ہوتے ہیں۔

حالانکہ ہم نے چند ہی مثالیں لی ہیں لیکن آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی حقیقی عدد کو جس کا عشری پھیلاؤ مختتم ہے ایک ایسے ناطق عدد میں ظاہر کر سکتے ہیں جس کے نسب نما کی قوت 10 ہو۔ مزید 10 کے واحد مفرد اجزائے ضربی 2 اور 5 ہیں۔ اس طرح سے شمار کنندہ اور نسب نما کے درمیانی یا مشترک اجزائے ضربی کو کینسل کر کے ہم پاتے ہیں کہ ناطق عدد $\dfrac{p}{q}$ کی شکل کا ہوگا جہاں q کے مفرد اجزائے ضربی 2^n5^m کی شکل کے ہوں گے جہاں m اور n غیر منفی صحیح اعداد میں

آیئے اپنے نتیجہ کو رسمی طور پر لکھتے ہیں

مسئلہ 1.5: مان لیجئے x ایک ناطق عدد ہے جس کا عشری پھیلائو مختتم ہے ۔تب x کو $\dfrac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں p اور q باہم مفرد ہیں اور q کے مفرد اجزائے ضربی 2^n5^m کی شکل کے ہیں جہاں m اور n غیر منفی صحیح اعداد ہیں ۔

آپ یہ سوچ رہے ہوں گے کہ مسئلہ 1.5 میں اگر اس کے معکوس پر غور کریں تو کیا ہوگا۔

یعنی اگر ہمارے پاس $\dfrac{p}{q}$ کی شکل کا ایک ناطق عدد ایسا ہے جس میں q کے مفرد اجزائے ضربی 2^n5^m کی شکل کے ہیں جہاں m اور n غیر منفی صحیح اعداد ہیں تو کیا $\dfrac{p}{q}$ کا عشری پھیلاؤ مختتم ہے؟

آیئے دیکھتے ہیں کہ کیا کوئی واضح وجہ ہے اس کو صحیح سمجھنے کی، آپ اس بات سے ضرور اتفاق کریں گے کہ $\dfrac{a}{b}$ شکل کے کسی بھی ناطق عدد جہاں b، یہ 10 کی کوئی قوت ہے، کا عشری پھیلاؤ مختتم ہوگا۔

اس لئے یہ ایک دانشمندانہ قدم ہوگا کہ $\dfrac{p}{q}$ کی شکل کے ایک ناطق عدد، جہاں q یہ 2^n5^m کی شکل کا ہے کو ایک متبادل ناطق عدد ہے $\dfrac{a}{b}$ کی شکل میں تبدیل کر دیں جہاں b یہ 10 کی ایک قوت ہو۔

آیئے ہم مندرجہ بالا مثالوں کی طرف واپس چلتے ہیں عمل کو پیچھے کی طرف لے جاتے ہیں۔

(i) $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{375}{10^3} = 0.375$

(ii) $\frac{13}{125} = \frac{13}{5^3} = \frac{13 \times 2^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{104}{10^3} = 0.104$

(iii) $\frac{7}{80} = \frac{7}{2^4 \times 5} = \frac{7 \times 5^3}{2^4 \times 5^4} = \frac{875}{10^4} = 0.0875$

(iv) . $\frac{14588}{625} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4} = \frac{2^6 \times 7 \times 521}{2^4 \times 5^4} = \frac{233408}{10^4} = 23.3408$

ان مثالوں سے یہ بات واضح ہوجاتی ہے کہ ہم $\frac{p}{q}$ کی شکل والے کسی بھی ناطق عدد کو جہاں q یہ 2^n5^m کی شکل کا ہے $\frac{a}{b}$ کے معادل ناطق عدد میں تبدیل کر سکتے ہیں جہاں 10 کی کوئی قوت ہے۔اس لئے ایسے ناطق اعداد کا عشری پھیلاؤ مختتم ہوتا ہے۔اسے اپنے نتیجہ کو رسمی طور پر لکھتے ہیں۔

مسئلہ 1.6:مان لیجئے $x = \frac{p}{q}$ ایک ناطق عدد ہیں تب اس طرح کہ q کی منفرد اجزائے ضربی $2^n 5^m$ کی شکل کے ہوں گے۔n کا عشری پھیلائو ہمیشہ مختتم ہوگا اب ہم ایسے ناطق اعداد کے بارے میں جاننے کے تیار ہیں جن کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور تکراری ہے ۔ایک با ر پھر ہم ایک مثال پر غور کرتے ہیں جو آپ کہ ، نویں جماعت کی نصابی کتاب کے باب 1 کی مثال 5ہے ۔یعنی $\frac{1}{7}$ یہاں باقی 1,5,4,6,2,3,1,5,4,6,2,3ہیں اور مقسوم علیہ 7

$$\begin{array}{r}
0.1428571 \\
7\overline{)10} \\
7 \\
\hline
30 \\
28 \\
\hline
20 \\
14 \\
\hline
60 \\
56 \\
\hline
40 \\
35 \\
\hline
50 \\
49 \\
\hline
10 \\
7 \\
\hline
30
\end{array}$$

نوٹ کیجئے کہ یہاں نسب نما 7، صاف ظاہر ہے 2^n5^m کی شکل کا نہیں ہے۔اس لئے مسئلہ 1.5 اور 1.6 کی رو سے $\frac{1}{7}$ کا عشری پھیلاؤ مختتم نہیں ہوگا۔یعنی صفر کبھی بھی باقی کے طور پر نہیں آئے گا۔(کیوں؟) اور باقی خاص مرتبہ کے بعد اپنے آپ کو دہرانے لگے گا۔اس لئے ہمیں $\frac{1}{7}$ کے خارج قسمت میں ہندسوں کا ایک بلاک، جو 142857 ہے ملے گا جس کی تکرار ہوتی رہے گی۔

جو ہم نے $\frac{1}{7}$ کے مسئلہ میں دیکھا وہ تمام ایسے ناطق اعداد کے لئے درست ہے جو مسئلہ 1.5 اور 1.6 میں نہیں شامل کئے گئے ہیں۔ایسے اعداد کے لئے ہمارے پاس ایک مسئلہ ہے۔

مسئلہ 1.7: مان لیجئے $n = \frac{p}{q}$ یہاں p،q (Coprimes) ہیں، ایک ناطق عدد ہے جس میں q کے مفرد اجزائے ضربی 2^n5^m کی شکل کے نہیں ہیں، جہاں m اور n غیر منفی صحیح اعداد ہیں تب n کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور تکراری ہوگا۔

مذکورہ بالا مطالعہ سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ کسی بھی ناطق عدد کا عشری پھیلاؤ یا تو مختتم ہوگا یا غیر مختتم تکراری۔

مشق 1.4

1۔ لمبی تقسیم کیے بغیر بیان کیجئے کہ مندرجہ ذیل ناطق اعداد کا عشری پھیلاؤ مختتم ہے یا غیر مختتم تکراری۔

(i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{17}{8}$ (iii) $\frac{64}{455}$ (iv) $\frac{15}{1600}$

(v) $\frac{29}{343}$ (vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$ (vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ (viii) $\frac{6}{15}$

(ix) $\frac{35}{50}$ (x) $\frac{77}{210}$

2۔ مذکورہ بالا سوال نمبر 1 میں دیئے گئے ان تمام ناطق اعداد کا عشری پھیلاؤ معلوم کیجئے جن کا عشری پھیلاؤ مختتم ہے۔

3۔ مندرجہ ذیل حقیقی اعداد کا عشری پھیلاؤ نیچے دیا گیا ہے۔ ہر سوال میں بتایئے کہ وہ ناطق ہیں یا نہیں اگر وہ $\frac{p}{q}$ کی شکل کے ناطق اعداد ہیں تو آپ q کے مفرد اجزائے ضربی کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں۔

(i) 43.123456789 (ii) 0.120120012000120000 (iii) $43.\overline{123456789}$

1.6 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل نقاط کا مطالعہ کیا۔

1۔ اقلیدس کا تقسیم کا معاونہ دو مثبت صحیح اعداد a اور b کے لئے ایسے دو مکمل اعداد q اور r کا موجود ہوتے ہیں جو $a = bq + r$، $0 \le r < b$ کو مطمئن کرتے ہیں

2۔ اقلیدس کی تقسیم کا الگورتھم: اس کی بنیاد اقلیدس کے تقسیم کے معاونہ پر ہے اس کے مطابق دو مثبت صحیح اعداد a اور b، جہاں $a > b$ کا HCF ذیل طریقہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

قدم 1: q اور r معلوم کرنے کے لئے تقسیم کے معاونہ کا اطلاق کیجئے $a = bq + r$ جہاں $0 \le r < b$.

قدم 2: اگر $r = 0$ تو b HCF ہے اگر $r \neq 0$ تو b اور r پر اقلیدس کے معاونہ کا استعمال کیجیے۔

قدم 3: اس عمل کو جب تک جاری رکھئے جب تک کہ باقی صفر ہو جائے اس مرحلہ پر مقسوم علیہ $\text{HCF}(a,b)$ ہوگا اور

اور $\text{HCF}(a,b) = \text{HCF}(b, r)$۔

3۔ حساب کا بنیادی مسئلہ:

ہر مرکب عدد کو مفرد اعداد کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر (اجزائے ضربی میں تحلیل کر سکتے ہیں، اجزائے ضربی کی یہ تحلیل منفرد ہے بھلے ہی اجزائے ضربی کی ترتیب مختلف ہو۔

4۔ اگر p مفرد ہے اور p یہ a^2 کو تقسیم کرتا ہے تب a, p کو بھی تقسیم کرے گا جہاں a ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

5۔ ثابت کیجئے کہ $\sqrt{3}, \sqrt{2}$ غیر ناطق ہیں۔

6۔ مان لیجئے x ایک ایسا ناطق عدد ہے جس کا عشری پھیلاؤ مختتم ہے۔ تب ہم کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں جہاں p اور q باہمی مفرد ہیں اور q کے مفرد اجزائے ضربی $2^n 5^m$ کی شکل میں m اور n غیر منفی صحیح اعداد ہیں۔

7۔ مان لیجئے $x = \frac{p}{q}$ ایک ناطق عدد ہے جبکہ q کے مفرد اجزائے ضربی $2^n 5^m$ کی شکل میں ہیں جہاں m اور n غیر منفی صحیح اعداد ہیں، تب x کا عشری پھیلاؤ مختتم ہے۔

8۔ مان لیجئے $x = \frac{p}{q}$ ایک ناطق عدد ہے، جبکہ q کے مفرد اجزائے ضربی $2^n 5^m$ کی شکل میں نہیں ہیں جہاں m اور n غیر منفی صحیح اعداد ہیں تب x کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور تکراری ہوگا۔

قارئین کے لیے نوٹ

آپ دیکھ چکے ہیں کہ $\text{HCF}(p, q, r) \times \text{LCM}(p, q, r) \neq p \times q \times r$, جہاں p, q, r مثبت صحیح اعداد ہیں (مثال 8 دیکھیے) جبکہ تین اعداد p, q اور r کے لئے مندرجہ ذیل نتیجہ درست ہے۔

$$\text{LCM}(p,q,r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{HCF}(p, q, r)}{\text{HCF}(p, q) \cdot \text{HCF}(q, r) \cdot \text{HCF}(p, r)}$$

$$\text{HCF}(p,q,r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{LCM}(p, q, r)}{\text{LCM}(p, q) \cdot \text{LCM}(q, r) \cdot \text{LCM}(p, r)}$$