



4915CH02

باب 2

کثیررکنیاں (Polynomials)

2.1 تعارف (Introduction)

آپ الجبری عبارتیں، ان کی جمع، تفریق، ضرب، اور تقسیم کے بارے میں پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں۔ آپ یہ بھی پڑھ چکے ہیں کہ کچھ الجبری عبارتوں کے اجزائے ضربی کیسے معلوم کیے جاتے ہیں۔ آپ کچھ مماثلات کو یاد کیجیے۔

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

اور اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے ان کا استعمال کو یاد کیجیے۔ اس باب میں ہم ایک خاص قسم کی الجبری عبارت جسے کثیررکنی کہتے ہیں، اس کے بارے میں مطالعہ کریں گے اور اس سے متعلق اصطلاحات کا بھی مطالعہ کریں گے۔ ہم باقی کا مسئلہ اور جزو ضربی کے مسئلہ کا بھی مطالعہ کریں گے اور اجزائے ضربی بنانے کے لیے ان کا استعمال کرنا سیکھیں گے اس کے علاوہ ہم کچھ اور مماثلات کا مطالعہ کریں گے اور یہ بھی سیکھیں گے کہ کثیررکنیوں کے اجزائے ضربی معلوم کرنے اور الجبری عبارتوں کی قدر معلوم کرنے میں ان کا استعمال کس طرح کیا جاتا ہے۔

2.2 ایک متغیر والی کثیررکنیاں (Polynomials in One Variable)

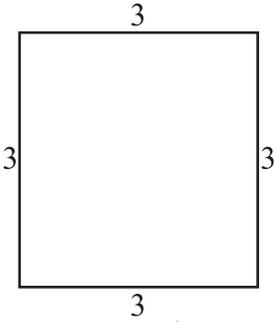
آئیے یہ بات دہرا کر شروعات کرتے ہیں کہ ایک متغیر کو کسی علامت سے ظاہر کر سکتے ہیں جس کی کوئی بھی حقیقی قدر ہو سکتی ہے۔ ہم ان متغیر کو ظاہر کرنے کے حروف x ، y اور z وغیرہ کا استعمال کرتے ہیں۔ نوٹ کیجیے کہ $2x$ ، $3x$ ، $-x$ اور $\frac{1}{2}x$ الجبری عبارتیں ہیں۔ یہ تمام عبارتیں (ایک مستقلہ) $\times x$ شکل کی ہیں۔ فرض کیجیے ہم ایک عبارت (مستقلہ) \times

(متغیر) کی شکل میں لکھنا چاہتے ہیں اور ہم مستقلہ کے بارے میں کچھ نہیں جانتے۔ ایسی حالت میں ہم مستقلہ a ، b ، c اور d وغیرہ لکھتے ہیں۔ اس طرح سے عبارت ax ہو جائے گی۔

یہ بات مزید غور کرنے کی ہے کہ مستقلہ اور متغیر کو ظاہر کرنے والے حروف میں فرق ہوتا ہے۔ کسی خاص حالت میں مستقلہ کی قدر یکساں رہتی ہے۔ یعنی کسی دیئے ہوئے سوال میں مستقلوں کی قدر نہیں بدلتی لیکن متغیر کی قدر بدلتی رہتی ہے۔ اب 3 اکائیوں والے ضلع کے ایک مربع پر غور کیجیے (شکل 2.1 دیکھئے)۔

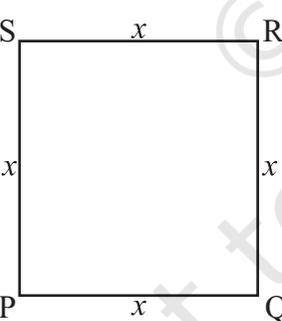
اس کا احاطہ کیا ہے؟ آپ جانتے ہیں کہ مربع کا احاطہ اس کے چاروں اضلاع کا حاصل جمع ہوتا ہے۔ یہاں ہر ضلع 3 اکائیوں کا ہے۔ اس لیے اس کا احاطہ 4×3 یعنی 12 اکائیاں ہے۔ اس کا احاطہ کیا ہوگا جب اس کا ضلع 10 اکائیوں کا ہو؟

احاطہ ہے 10×4 یعنی 40 اکائیاں۔ ایسی حالت میں جب اس کا ضلع x اکائی ہو (شکل 2.2 دیکھئے) تو اس کا احاطہ ہوگا $4x$ اکائیاں۔ اس طرح سے اگر ضلع کی لمبائی تبدیل ہوتی ہے تو احاطہ بھی تبدیل ہوتا ہے۔



شکل 2.1

آپ کیا مربع PQRS کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں؟ یہ ہے $x \times x = x^2$ مربع اکائیاں۔ x^2 ایک الجبری عبارت ہے۔ آپ اور دوسری الجبری عبارتوں سے بھی واقف ہیں جیسے $7 + 4x - x^2 + 2x$ ، $x^3 + 2x$ ، $x^2 + 2x$ ، $x^3 - x^2 + 4x + 7$ اور $3y^2 + 5y$ ۔ ان میں متغیر کا قوت نما ایک مکمل عدد ہے۔ اس طرح کی الجبری عبارتیں ایک متغیر والی کثیررکنیاں کہلاتی ہیں۔ مذکورہ بالا مثال میں متغیر x ہے۔ مثال کے طور پر $x^3 - x^2 + 4x + 7$ میں ایک کثیررکنی ہے۔ اسی طرح سے $3y^2 + 5y$ میں ایک کثیررکنی ہے اور $t^2 + 4$ میں ایک کثیررکنی ہے۔



شکل 2.2

کثیررکنی $x^2 + 2x$ میں عبارتیں x^2 اور $2x$ ارکان کہلاتی ہیں۔ اس طرح سے $3y^2 + 5y + 7$ میں 3 ارکان ہیں جو ہیں $3y^2$ ، $5y$ اور 7 ۔ کیا آپ کثیررکنی $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ کے ارکان لکھ سکتے ہیں؟ اس کثیررکنی کے 4 ارکان ہیں جو ہیں $-x^3$ ، $4x^2$ ، $7x$ اور -2 ۔

کثیررکنی کے ہر رکن کا ایک ضریب ہوتا ہے۔ اس لیے $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ میں x^3 کا ضریب -1 ، x^2 کا

ضریب 4 اور x ضریب 7 اور 2- ضریب ہے x^0 کا (یاد رکھیے $x^0 = 1$)۔ کیا آپ جانتے ہیں کہ $x^2 - x + 7$ میں x کا ضریب کیا ہے؟ یہ ہے 1 -

2 بھی ایک کثیررکنی ہے۔ درحقیقت 2, 5, 7, وغیرہ مستقل کثیررکنیوں کی کچھ مثالیں ہیں۔ مستقل کثیررکنی 0 صفر کثیررکنی (Zero Polynomial) کہلاتی ہیں۔ آپ اگلی جماعتوں میں دیکھیں گے کہ تمام کثیررکنیوں کے مجموعہ میں ان کا ایک اہم کردار ہوگا۔

اب الجبری عبارتوں جیسے $x + \frac{1}{x}$ ، $\sqrt{x} + 3$ ، اور $\sqrt[3]{y} + y^2$ پر غور کیجیے۔ کیا آپ جانتے ہیں کہ اب $x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$ لکھ سکتے ہیں؟ یہاں دوسرے رکن یعنی x^{-1} کا قوت نما -1 ہے جو ایک مکمل عدد نہیں ہے۔ اس لیے یہ الجبری عبارت ایک کثیررکنی نہیں ہے۔

مزید $\sqrt{x} + 3$ کو ہم $x^{\frac{1}{2}} + 3$ لکھ سکتے ہیں۔ یہاں x کا قوت نما $\frac{1}{2}$ ہے جو مکمل عدد نہیں ہے۔ تو کیا $\sqrt{x} + 3$ ایک کثیررکنی ہے؟ نہیں یہ نہیں ہے۔ $\sqrt[3]{y} + y$ کے بارے میں کیا خیال ہے؟ یہ بھی کثیررکنی نہیں ہے (کیوں؟)۔

اگر کسی کثیررکنی میں متغیر x ہے تو ہم اس کو $p(x)$ ، $q(x)$ یا $r(x)$ وغیرہ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر ہم لکھ سکتے ہیں:

$$p(x) = 2x^2 + 5x - 3$$

$$q(x) = x^3 - 1$$

$$r(y) = y^3 + y + 1$$

$$s(u) = 2 - u - u^2 + 6u^5$$

ایک کثیررکنی میں کتنے بھی محدود ارکان ہو سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر $151, x^{150} + x^{149} + \dots + x^2 + x + 1$ ارکان والی ایک کثیررکنی کی مثال ہے۔

کثیررکنیوں $2x$ ، 2 ، $5x^3$ ، $5x^2$ ، y اور u^4 پر غور کیجیے۔ کیا آپ دیکھتے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک کثیررکنی ہے؟ صرف ایک رکن ہے؟ ایسی کثیررکنیاں جن میں صرف ایک رکن ہوتا ہے ایک رکنی کہلاتی ہے (ایک کا مطلب ایک)۔ مندرجہ ذیل ہر ایک کثیررکنی کا مشاہدہ کیجیے:

$$p(x) = x + 1, \quad q(x) = x^2 - x, \quad r(y) = y^9 + 1, \quad t(u) = u^{15} - u^2$$

ان میں سے ہر ایک کثیررکنی میں کتنے ارکان ہیں؟ ہر کثیررکنی میں 2 ارکان ہیں۔ ایسی کثیررکنیاں جن میں صرف دو ارکان ہوں دورکنی کہلاتی ہیں۔

اسی طرح ایسی کثیررکنیاں جن میں 3 ارکان ہوتے ہیں سہرکنی (سہ مطلب تین) کہلاتی ہے۔ ان کی کچھ مثالیں ہیں:

$$p(x) = x + x^2 + \pi \qquad q(x) = \sqrt{2} + x - x^2$$

$$r(u) = u + u^2 - 2 \qquad t(y) = y^4 + y + 5$$

اب کثیررکنی $p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$ کو دیکھیے۔ وہ کونسارکن ہے جس میں x کی قوت سب سے زیادہ ہے؟ یہ $3x^7$ ہے۔ اس رکن میں x کا قوت نما 7 ہے۔ اسی طرح سے کثیررکنی $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$ میں وہ رکن جس میں y کی قوت سب سے زیادہ ہے $5y^6$ ہے اور اس رکن میں y کا قوت نما 6 ہے۔ کسی کثیررکنی میں متغیر کی سب سے بڑی قوت کو اس کثیررکنی کا درجہ کہتے ہیں۔ اس طرح سے کثیررکنی $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ کا درجہ 7 ہے اور کثیررکنی $5y^6 - 4y^2 - 6$ کا درجہ 6 ہے۔ ایک غیر صفر مستقلہ کثیررکنی کا درجہ صفر ہوتا ہے۔

مثال 1: درج ذیل ہر ایک کثیررکنی کا درجہ معلوم کیجیے:

$$(i) x^5 - x^4 + 3 \qquad (ii) 2 - y^2 - y^3 + 2y^8 \qquad (iii) 2$$

حل: (i) اس کثیررکنی میں متغیر کی سب سے بڑی قوت 5 ہے۔ اس لیے اس کا درجہ 5 ہے۔

(ii) اس کثیررکنی میں متغیر کی سب سے بڑی قوت 8 ہے۔ اس لیے اس کا درجہ 8 ہے۔

(iii) یہاں واحد رکن 2 ہے جس کو ہم $2x^0$ لکھ سکتے ہیں۔ اس لئے x کا قوت نما 0 ہے۔ اس لیے اس کثیررکنی کا درجہ 0 ہے۔

اب کثیررکنیوں $r(t) = t + \sqrt{2}$ ، $q(y) = 2y$ ، $p(x) = 4x + 5$ اور $s(u) = 3 - u$ کا مشاہدہ کیجیے۔

کیا آپ ان سب میں کچھ مشترک پاتے ہیں؟ ان تمام کثیررکنیوں کا درجہ ایک ہے۔ ایسی کثیررکنیاں جن کا درجہ 1، ہو خطی کثیررکنیاں کہلاتی ہیں۔ ایک متغیر والی کچھ اور کثیررکنیاں ہیں $2x - 1$ ، $\sqrt{2}y + 1$ ، $2 - u$ اب x متغیر والی ایسی خطی کثیررکنی معلوم کرنے کی کوشش کیجیے جس کے 3 ارکان ہوں؟ آپ معلوم کر سکتے ہیں کیونکہ x متغیر والی خطی کثیررکنی میں زیادہ سے زیادہ 2 ارکان ہو سکتے ہیں اور وہ $ax + b$ شکل کی ہوگی جہاں a اور b مستقلہ میں اور $a \neq 0$ ۔ کیوں؟ اسی طرح سے $ay + b$ میں ایک خطی کثیررکنی ہے۔

اب آپ ان کثیررکنیوں پر غور کیجیے:

$$x^2 + \frac{2}{5}x \text{ اور } 2x^2 + 5, 5x^2 + 3x + \pi, x^2$$

کیا آپ اس بات سے متفق ہیں کہ ان تمام کا درجہ 2 ہے؟ ایسی کثیررکنی جس کا درجہ دو ہو، دو درجی کثیررکنی کہلاتی ہے۔ دو درجی کثیررکنیوں کی کچھ مثالیں $5 - y^2$ ، $4y + 5y^2$ اور $6 - y - y^2$ ہیں۔ کیا آپ ایک متغیر والی ایسی دو درجی کثیررکنی کی مثال دے سکتے ہیں جن میں 4 مختلف ارکان ہوں؟ آپ پائیں گے کہ ایک متغیر والی دو درجی کثیررکنی میں زیادہ سے زیادہ 3 ارکان ہو سکتے ہیں۔ اگر آپ مزید کچھ دو درجی کثیررکنیوں کو دیکھیں تو آپ پائیں گے کہ کسی بھی دو درجی کثیررکنی x میں $ax^2 + bx + c$ کی شکل ہوتی ہے جہاں $a \neq 0$ اور a, b, c مستقلہ ہیں۔

ہم 3 درجے والی کثیررکنی کو کعب کثیررکنی کہتے ہیں۔ x میں کعب کثیررکنی کی کچھ مثالیں ہیں $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$ ، $4x^3$ ، $2x^3 + 1$ ، $5x^3 + x^2$ ، $6x^3 - x$ ، $6 - x^3$ ہو سکتے ہیں؟ زیادہ سے زیادہ 4 ارکان۔ ان کو ہم $ax^3 + bx^2 + cx + d$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں جہاں $a \neq 0$ اور a, b, c, d مستقلہ ہوں۔

اب آپ دیکھ چکے ہیں کہ درجہ 1، 2، یا درجہ 3 والی کثیررکنیاں کیسی ہوتی ہیں۔ کیا آپ ایک متغیر والی ایسی کثیررکنی لکھ سکتے ہیں جس کا درجہ x ہو جہاں x ایک طبعی عدد ہو؟ ایک متغیر x میں n درجے والی کثیررکنی کی شکل ہے:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

جہاں $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ مستقلہ ہیں اور $a_n \neq 0$

خصوصاً اگر $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ (تمام مستقلہ صفر ہوں)، ہمیں صفر کثیررکنی حاصل ہوتی ہے اور اس کو ہم 0 سے ظاہر کرتے ہیں۔ صفر کثیررکنی کا درجہ کیا ہے؟ صفر کثیررکنی درجہ معرّف نہیں ہے۔

ابھی تک ہم نے صرف ایسی کثیررکنیوں کی بات کی جس میں صرف ایک متغیر ہے۔ ایسی بھی کثیررکنیاں ہوتی ہیں جن میں ایک سے زیادہ متغیر ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر $xyz + x^2 + y^2$ (جہاں متغیر x, y, z اور z ہیں) تین متغیر والی کثیررکنیاں ہیں اسی طرح سے $p^2 + q^{10} + r$ (جہاں x, p, r متغیر ہیں) اور $u^3 + v^2$ (جہاں متغیر u اور v ہیں) 3 اور 2 متغیر والی کثیررکنیاں ہیں۔ ان کثیررکنیوں کے بارے میں تفصیل سے آپ بعد میں پڑھیں گے۔

مشق 2.1

1. مندرجہ ذیل میں کون سی عبارتیں ایک متغیر والی کثیررکنیاں ہیں اور کون سی نہیں؟

اپنے جواب کی وجوہات بھی بیان کیجیے۔

(i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

(iv) $y + \frac{2}{y}$ (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

2. مندرجہ ذیل ہر ایک میں x^2 کا ضریب معلوم کیجیے:

(i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + x^3$ (iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x^3$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$

3. 35 درجہ والی دو رکنی اور 100 درجہ والی ایک رکنی کی ایک ایک مثال دیجیے۔

4. مندرجہ ذیل ہر ایک کثیررکنی کا درجہ لکھیے:

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$ (iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3

5. مندرجہ ذیل کی خطی، دو درجہ، اور کعب کثیررکنی میں درجہ بندی کیجیے:

(i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$ (iv) $1 + x$ (v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

2.3 کثیررکنی کے صفر (Zeroes of a Polynomial)

کثیررکنی پر غور کیجیے $p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

اگر $P(x)$ میں ہر ایک جگہ x کو 1 رکھیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$\begin{aligned} p(1) &= 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times (1) - 2 \\ &= 5 - 2 + 3 - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں $x=1$ کے لیے $p(x)$ کی قدر 4 ہے۔

$$\begin{aligned} p(0) &= 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

کیا آپ $P(-1)$ معلوم کر سکتے ہیں؟

مثال 2: متغیر کی نشاندہی کی گئی قدروں کے لیے مندرجہ ذیل ہر ایک کثیررکنی کی قدر معلوم کیجیے:

$$(i) \text{ لیے } x = 1, p(x) = 5x^3 - 3x + 7$$

$$(ii) \text{ لیے } y = 2, q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$$

$$(iii) \text{ لیے } t = a, p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$$

$$p(x) = 5x^2 - 3x + 7 (i) \text{ حل:}$$

$x = 1$ کے لیے $p(x)$ کی قدر ہے

$$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$$

$$= 5 - 3 + 7 = 9$$

$$q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11} (ii)$$

$y = 2$ کے لیے کثیررکنی $q(y)$ کی قدر ہے

$$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11} = 16 + \sqrt{11}$$

$$p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6 (iii)$$

$t = a$ کے لیے $p(t)$ کی قدر ہے

$$p(a) = 4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6$$

اب کثیررکنی $P(x) = x - 1$ پر غور کیجیے

$p(1)$ کیا ہے؟

$$\text{نوٹ کیجئے: } P(1) = 1 - 1 = 0 \text{ جیسے کہ } P(1) = 0$$

اس لیے ہم کہتے ہیں کہ 1، کثیررکنی $p(x)$ کا صفر ہے۔

اسی طرح سے آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ 2، $q(x)$ کا صفر ہے جہاں $q(x) = x - 2$

عمومی طور پر ہم کہتے ہیں کہ عدد c کثیررکنی $p(x)$ کا صفر ہے اگر $p(c) = 0$ ۔
 آپ نے مشاہدہ کیا ہوگا کہ کثیررکن $x-1$ کا صفر اس کو 0 کے برابر رکھ کر حاصل ہوتا ہے یعنی $x-1=0$ جس سے ہمیں 1
 x ملتا ہے۔ ہم کہتے ہیں $p(x) = 0$ ایک کثیررکنی مساوات ہے اور 1 مساوات $p(x) = 0$ کا جزر ہے۔ اس لیے ہم کہتے
 ہیں کہ 1 ، $x-1$ کا صفر ہے یا کثیررکنی مساوات $x-1=0$ کا جزر۔

اب، مستقلہ کثیررکنی 5 پر غور کیجیے۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ اس کا صفر کیا ہے؟ اس کا کوئی صفر نہیں ہے کیونکہ $5x^0$ میں x کو
 کسی بھی عدد سے بدلنے پر ہمیں 5 ہی ملتا ہے۔ درحقیقت ایک غیر صفر مستقلہ کثیررکنی کا کوئی صفر نہیں ہوتا۔ ایک صفر کثیررکنی کے
 صفر کے بارے میں کیا خیال ہے؟ رواج ہے کہ ہر ایک حقیقی عدد ایک صفر کثیررکنی کا صفر ہے۔

مثال 3: جانچ کیجیے کہ -2 اور 2 ، کثیررکنی $x+2$ کے صفر ہیں

حل: مان لیجیے $p(x)=x+2$

تب: $p(2)=2+2=4$, $p(-2)=-2+2=0$

اس لیے -2 کثیررکنی $x+2$ کا صفر ہے لیکن 2 نہیں ہے۔

مثال 4: کثیررکنی $p(x) = 2x+1$ کا صفر معلوم کیجیے۔

حل: $p(x)$ کا صفر معلوم کرنا ایسا ہی ہے جیسے مساوات $p(x)=0$ کو حل کرنا۔

اب $2x+1=0$ سے ہمیں $x=-\frac{1}{2}$ ملتا ہے۔ اس لیے $-\frac{1}{2}$ کثیررکنی $2x+1$ کا صفر ہے۔

اب اگر $p(x)=ax+b$, $a \neq 0$ ایک خطی کثیررکنی ہے تو آپ اس کثیررکنی $p(x)$ کا صفر کیسے معلوم کریں گے؟

مثال 4 سے ہم نے کچھ سیکھا ہے یعنی کثیررکنی $p(x)$ کا صفر معلوم کرنا ایسا ہی ہے جیسے مساوات $p(x)=0$ کو حل کرنا۔

اس لیے $p(x)=0$ کا مطلب ہے۔ $ax+b=0$, $a \neq 0$

اس لیے $ax = -b$

یعنی $x = -\frac{b}{a}$

اس لیے $x = -\frac{b}{a}$, $p(x)$ کا واحد صفر ہے یعنی خطی کثیررکنی کا ایک اور صفر ہوتا ہے۔ اب ہم کہہ سکتے ہیں

کہ 1 ، کثیررکنی $x-1$ اور -2 ، $x+2$ کے صفر ہیں۔

مثال 5: تصدیق کیجیے کہ 2 اور 0 کثیررکنی $x^2 - 2x$ کے صفر ہیں

حل: مان لیجیے $p(x) = x^2 - 2x$

$$p(2) = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$p(0) = 0^2 - 0 = 0$$

اس لیے 2 اور 0 دونوں کثیررکنی $x^2 - 2x$ کے صفر ہیں۔

آئیے اب اپنے مشاہدات کی فہرست بناتے ہیں:

(i) کسی کثیررکنی کا صفر ضروری نہیں کہ صفر ہو۔

(ii) کسی کثیررکنی کا صفر، صفر بھی ہو سکتا ہے۔

(iii) ہر خطی کثیررکنی کا ایک اور صرف ایک صفر ہوتا ہے۔

(iv) ایک کثیررکنی کے ایک سے زیادہ صفر بھی ہو سکتے ہیں۔

مشق 2.2

1. مندرجہ ذیل کے لیے کثیررکنی $5x - 4x^2 + 3$ کی قدر معلوم کیجیے:

(i) $x = 0$

(ii) $x = -1$

(iii) $x = 2$

2. مندرجہ ذیل ہر ایک کثیررکنی کے لیے $P(0)$ ، $P(1)$ اور $P(2)$ معلوم کیجیے:

(i) $p(y) = y^2 - y + 1$

(ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

(iii) $p(x) = x^3$

(iv) $p(x) = (x-1)(x+1)$

3. معلوم کیجیے کہ کیا مندرجہ ذیل کثیررکنی کے سامنے لکھے ہوئے اعداد، کثیررکنی کے صفر ہیں:

(i) $p(x) = 3x + 1, x = -\frac{1}{3}$

(ii) $p(x) = 5x - \pi, x = \frac{4}{5}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1, x = 1, -1$

(iv) $p(x) = (x+1)(x-2), x = -1, 2$

$$(v) p(x) = x^2, x = 0 \quad (vi) p(x) = lx + m, x = -\frac{m}{l}$$

$$(vii) p(x) = 3x^2 - 1, x = -\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (viii) p(x) = 2x + 1, x = \frac{1}{2}$$

4۔ مندرجہ ذیل میں ہر ایک کثیررکنی کا صفر معلوم کیجیے:

$$(i) p(x) = x + 5 \quad (ii) p(x) = x - 5 \quad (iii) p(x) = 2x + 5$$

$$(iv) p(x) = 3x - 2 \quad (v) p(x) = 3x \quad (vi) p(x) = ax, a \neq 0$$

$$(vii) p(x) = cx + d, c \neq 0 \text{ جہاں } d \text{ اور } c \text{ حقیقی اعداد میں۔}$$

2.4 باقی مسئلہ (Remainder Theorem)

آئیے دو اعداد 15 اور 6 پر غور کرتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ جب ہم 15 کو 6 سے تقسیم کرتے ہیں تو ہمیں خارج قسمت 2 اور باقی 3 حاصل ہوتا ہے۔ کیا آپ کو یاد ہے کہ ہم اس حقیقت کا اظہار کس طرح کرتے ہیں؟ ہم 15 کو اس طرح لکھتے ہیں۔

$$15 = (6 \times 2) + 3$$

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ باقی 3 قاسم 6 سے چھوٹا ہے۔ اسی طرح سے اگر ہم 12 کو 6 سے تقسیم کریں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$12 = (6 \times 2) + 0$$

یہاں باقی کیا ہے؟ یہاں باقی 0 ہے اور ہم کہتے ہیں کہ 6، 12 کا جزو ضربی ہے یا 6، 12 کا ضعف ہے۔

اب سوال یہ ہے کہ کیا ہم ایک کثیررکنی کو دوسری کثیررکنی سے تقسیم کر سکتے ہیں؟ شروع میں آئیے ہم کوشش کرتے ہیں جب کہ قاسم یک رکنی ہے تو اب کثیررکنی $2x^3 + x^2 + x$ کو ایک رکنی x سے تقسیم کیجیے۔

ہمارے پاس ہے:

$$(2x^3 + x^2 + x) \div x = \frac{2x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}$$

$$= 2x^2 + x + 1$$

درحقیقت آپ نے نوٹ کیا ہوگا کہ $2x^3 + x^2 + x$ کے ہر رکن میں x مشترک ہے۔ اس لیے ہم $2x^3 + x^2 + x$ کو $x(2x^2 + x + 1)$ لکھ سکتے ہیں۔

ہم کہتے ہیں کہ x اور $2x^2 + x + 1$ ، $2x^3 + x^2 + x$ کے اجزائے ضربی ہیں اور x ، $2x^3 + x^2 + x$ اور $2x^2 + x + 1$ کا ضعف ہے۔

ایک دوسرے کثیررکنی کے جوڑے $3x^2 + x + 1$ اور x پر غور کیجیے۔

$$(3x^2 + x + 1) \div x = (3x^2 \div x) + (x \div x) + (1 \div x)$$

ہم دیکھتے ہیں کثیررکنی کا ایک رکن حاصل کرنے کے لیے ہم 1 کو x سے تقسیم نہیں کر سکتے۔ ایسی حالت میں ہم یہیں رک جاتے ہیں اور یہ نوٹ کرتے ہیں کہ 1 باقی بچ جاتا ہے۔ اس لیے ہمارے پاس ہے

$$3x^2 + x + 1 = \{(3x + 1) \times x\} + 1$$

اس حالت میں $3x + 1$ خارج قسمت ہے اور 1 باقی ہے۔ کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ x ، $3x^2 + x + 1$ کا جزو ضربی ہے؟ کیونکہ باقی صفر نہیں ہے اس لیے یہ جزو ضربی نہیں ہے۔

آئیے اب ہم ایک کثیررکنی کو کسی کثیررکنی سے تقسیم کریں۔

مثال 6: $p(x)$ کو $g(x)$ سے تقسیم کیجیے جہاں $p(x) = x + 3x^2 - 1$ اور $g(x) = 1 + x$ ہے

حل: ہم تقسیم کے عمل کو مندرجہ ذیل اقدام سے کرتے ہیں۔

قدم 1: ہم مقسوم $x + 3x^2 - 1$ اور قاسم $1 + x$ کو معیاری شکل میں لکھتے ہیں یعنی اس کے ارکان کو ان کے درجہ کے حساب سے گھٹی ہوئی ترتیب میں لکھتے ہیں۔ اس لیے مقسوم $3x^2 + x - 1$ اور قاسم $x + 1$ ہے۔

قدم 2: ہم مقسوم کے پہلے رکن کو قاسم کے پہلے رکن سے پہلا خارج قسمت $3x = \frac{3x^2}{x}$ تقسیم کرتے ہیں یعنی ہم $3x^2$ کو x سے تقسیم کر کے $3x$ حاصل کرتے ہیں۔ اس سے ہمیں خارج قسمت کا پہلا رکن ملتا ہے۔

قدم 3: ہم قاسم کو خارج قسمت کے پہلے رکن سے ضرب کرتے ہیں یعنی ہم $x + 1$ کو $3x$ سے ضرب کرتے ہیں اور حاصل ضرب کو مقسوم کے رکن $3x^2 + 3x$ میں سے گھٹاتے ہیں ایسا کرنے سے ہمیں $-2x - 1$ باقی کے طور پر ملتا ہے۔

قدم 4: ہم باقی $-2x-1$ کو نئے مقسوم کی حیثیت سے لیتے ہیں قاسم وہی رہتا ہے۔ ہم $(x+1) \overline{)3x^2+x-1}$ کے ساتھ $3x$ کو دہراتے ہیں جس سے ہمیں خارج قسمت کا اگلا رکن حاصل ہوتا ہے یعنی ہم نئے مقسوم کے پہلے رکن $-2x$ کو قاسم کے پہلے رکن x سے تقسیم کر کے -2 حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 3x \\ (x+1) \overline{)3x^2+x-1} \\ \underline{3x^2+3x} \\ -2x-1 \end{array}$$

اس طرح سے خارج قسمت میں دوسرا رکن -2 ہے

قدم 5: ہم قاسم کو خارج قسمت کے دوسرے رکن سے ضرب کرتے ہیں اور حاصل ضرب کو مقسوم میں سے گھٹاتے ہیں یعنی ہم $x+1$ کو -2 سے ضرب کرتے ہیں اور حاصل ضرب $-2x-2$ کو مقسوم $-2x-1$ میں سے گھٹاتے ہیں اور خارج قسمت $3x-2$ ہے جس سے ہمیں باقی 1 ملتا ہے۔

یہ عمل جب تک جاری رہتا ہے جب تک مقسوم صفر بن جاتا ہے اور خارج قسمت کے ارکان کا حاصل جمع ہمیں مکمل خارج قسم دیتا ہے۔

$$\begin{array}{r} (x+1)(-2) \overline{) -2x-1} \\ \underline{-2x-2} \\ + \\ +1 \end{array}$$

قدم 6: اس طرح سے مکمل خارج قسمت $3x-2$ اور باقی 1 ہے۔ اب ہم دیکھتے ہیں ہم نے مذکورہ بالا عمل یکجا طور پر کیسے کیا۔

$$\begin{array}{r} 3x-2 \\ x+1 \overline{)3x^2+x-1} \\ \underline{3x^2+3x} \\ -2x-1 \\ \underline{-2x-2} \\ + \\ + \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{array}$$

نوٹ کیجیے کہ $3x^2+x-1 = (x+1)(3x-2)+1$

مقسوم = (خارج قسمت × قاسم) + باقی

عمومی طور پر اگر $p(x)$ اور $g(x)$ دو ایسی کثیررکنیاں ہیں جن میں $p(x)$ کا درجہ $g(x)$ کے درجہ کے برابر یا بڑا ہے یعنی $q(x)$ کا درجہ $p(x)$ کا درجہ تب ہم کثیررکنیاں $q(x)$ اور $r(x)$ معلوم کر سکتے ہیں جب کہ $p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ جہاں $r(x) = 0$ یا $g(x)$ کا درجہ $r(x)$ کا درجہ یہاں ہم کہتے ہیں کہ $p(x)$ کو $g(x)$ سے تقسیم کیا گیا جس سے ہمیں $q(x)$ خارج قسمت کے طور پر اور $r(x)$ باقی کے طور پر مسلا اور دی گئی مثال میں قاسم ایک خطی کثیررکنی ہے ایسی حالت میں آئے دیکھتے ہیں کہ باقی اور مقسوم کی کچھ قدروں میں 5 کوئی تعلق ہے۔

اگر $p(x) = 3x^2 + x - 1$ میں ہم x کی جگہ -1 رکھیں تو ہمیں ملتا ہے۔

$$p(-1) = 3(-1)^2 + (-1) - 1 = 1$$

اس طرح سے $p(x) = 3x^2 + x - 1$ کو $x + 1$ سے تقسیم کرنے سے جو باقی ملتا ہے وہ وہی ہے قدر ہے جو کثیررکنی $x + 1$ کے صفر یعنی $x = -1$ کو $p(x)$ میں رکھنے کی وجہ سے حاصل ہوتی ہے۔ اس لیے کچھ اور مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 7: کثیررکنی $3x^4 - 4x^3 - 3x - 1$ کو $x - 1$ سے تقسیم کیجئے

حل: لمبی تقسیم کے طریقہ سے ہمیں ملتا ہے:

$$\begin{array}{r} 3x^3 - x^2 - x - 4 \\ -1 \overline{) 3x^4 - 4x^3 - 3x - 1} \\ \underline{-3x^4 \pm 3x^3} \\ -x^3 - 3x - 1 \\ \underline{x^3 \pm x^2} \\ -x^2 - 3x - 1 \\ \underline{x^2 + x} \\ -4x - 1 \\ \underline{4x \pm 4} \\ -5 \end{array}$$

یہاں باقی -5 ہے اب $x - 1$ کا صفر ہے اس لیے $p(x)$ میں $x = 1$ رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\begin{aligned} p(1) &= 3(1)^4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1 \\ &= 3 - 4 - 3 - 1 \\ &= -5 \end{aligned}$$

جو کہ باقی ہے؟

مثال 8: $p(x) = x^3 + 1$ کو $x + 1$ سے تقسیم کرنے سے حاصل باقی معلوم کیجیے

حل: لمبی تقسیم کے طریقہ سے

$$\begin{array}{r} x^2 - 11 + \\ x+1 \overline{) x^3 + 1} \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ -x^2 + 1 \\ \underline{-x^2 x} \\ x + 1 \\ \underline{-x + 1} \\ 0 \end{array}$$

اس طرح ہم پاتے ہیں کہ باقی 0 ہے۔؟

یہاں $p(x) = x^3 + 1$ ہے اور $x + 1$ کا صفر $x = -1$ ہے؟ میں x کی جگہ -1 رکھنے پر ہمیں دیکھتے ہیں کہ

$$\begin{aligned} p(-1) &= (-1)^3 + 1 \\ &= -1 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

جو وہی ہے جو اصل تقسیم کے طریقہ سے حاصل ہو رہے اس طرح سے ہم کو ایک کثیررکنی کو ایک خطی کثیررکنی سے تقسیم کے لیے بقیہ باقی معلوم کرنے 0 ہی حاصل ہوتا ہے کا ایک دلچسپ اور بہت آسان طریقہ معلوم ہوا۔ اب ہم اس حقیقت کا تقسیم مندرجہ مسئلہ کی شکل میں کرتے ہیں ہم مسئلہ کا ثبوت دیکر یہ بھی دیکھائیں گے کہ یہ مسئلہ کیوں درست ہے۔

باقی مسئلہ بیان کیجیے۔ $p(x)$ ایک کثیررکنی ہے جس کا درجہ 1 یا 1 سے زیادہ اور a کوئی حقیقی عدد ہے اگر $p(x)$ کو خطی کثیررکنی

$x-a$ سے تقسیم کیا جائے تو باقی؟

ثبوت: مان لیجیے $x-a$ ایک ایسی کثیررکنی ہے جس کا درجہ $p(x) \geq 1$ فرض کیجیے کہ جب $p(x)$ کو $x-1$ سے تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت $q(x)$ اور باقی $r(x)$ ہے یعنی

$$p(x) = (x-a)q(x) + r(x)$$

کیونکہ $x-a$ کا درجہ 1 ہے اور $r(x)$ کا درجہ $x-a$ کا درجہ سے کم ہے کیونکہ $r(a) = 0$ کا درجہ اس کا مطلب ہے؟ ایک مستقلہ لیے مان لیجیے۔ اس طرح سے x کی ہر قدر کے لیے $x, r(x) = r$

$$p(x) = (x-a)q(x) + r \quad \text{اس لیے}$$

خصوصی طور پر اگر $x = a$ تو یہ مساوات ہم کو دیتی ہے

$$p(a) = (a-a)q(a) + r \\ = r$$

جس سے یہ مسئلہ ثابت ہوتا ہے

اس لیے اس نتیجہ کو ہم دوسری مثال میں استعمال کرتے ہیں

مثال 9: $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ کو $x-1$ سے تقسیم کرنے پر حاصل باقی معلوم کیجیے

حل: یہاں $p(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ اور $x-1$ کا صفر 1 ہے

$$p(1) = (1)^4 + (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + 1 \\ = 2$$

اس لیے جب $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ کو $x-1$ سے تقسیم کیا جاتا ہے تو باقی پچھا ہے۔

مثال 10: جانچ کیجیے کہ کثیررکنی $q(t) = 4t^3 + 4t^2 - t - 1$ کا $2t+1$ ضعف ہے یا نہیں

حل: جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ $q(t)$ کا ضعف ہوگا اگر $2t+1$ کو $q(t)$ سے تقسیم کرنے پر باقی صفر حاصل ہو

$$2t+1 = 0 \quad \text{لیتے ہیں جس سے ہمیں } t = -\frac{1}{2} \text{ ملتا ہے۔}$$

$$q\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 1$$

اس طرح سے $q(t)$ کو $2t+1$ سے تقسیم کرنے پر باقی 0 آتا ہے۔
اس لیے $2t+1$ کثیررکنی $q(t)$ کا جزو ضربی ہے یعنی $q(t)$ کا ضعف ہے

مشق 2.3

1. باقی معلوم کیجئے اگر $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ کو مندرجہ ذیل سے تقسیم کیا جائے

- (i) $x+1$ (ii) $x-\frac{1}{2}$ (iii) x (iv) $x+\pi$
(v) $5+2x$

2. باقی معلوم کیجئے جب $x^3 - ax^2 + 6x - a$ کو $x-a$ سے تقسیم کیا جائے

3. جانچ کیجئے کہ آیا $7r+3x$ کا $3x^3 + 7x$ جزو ضربی ہے یا نہیں

2.5 کثیررکنیوں کے اجزائے ضربی (Factorisation of Polynomials)

اس لیے مذکورہ بالا مثال 10 کو غور سے دیکھیے اس سے ہمیں $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ ، $2t+1$ ، $q(t)$ پتہ چلتا ہے کہ باقی یعنی

$$q(t) = (2t+1)g(t)$$

کسی کثیررکنی $g(t)$ کے لیے یہ مندرجہ مسئلہ کی ایک مخصوص حالت ہے۔

جزو ضربی مسئلہ: اگر $p(x)$ ایک کثیررکنی ہے جس کا درجہ $n \geq 1$ اور a کو حقیقی عدد ہے تب

(i) $p(x)$ ، $x-a$ کا جزو ضربی ہے اگر $p(a) = 0$ اور

(ii) $p(a) = 0$ اگر $p(x)$ ، $x-a$ کا جزو ضربی ہے۔

حل: کثیررکنی کے ذریعے، $p(x) = (x-a)q(x) + p(a)$

(i) اگر $p(a) = 0$ تب $p(x) = (x-a)q(x)$ جو ظاہر کرتا ہے کہ $x-a$ ایک رکن ہے $p(x)$ کا۔

(ii) جب کہ $x-a$ ایک رکن ہے $p(x) = (x-a)q(x)$ ، $p(x)$ جو کثیررکنی اجزائے ضربی $g(x)$ کا۔ اس معاملے

$$p(a) = (a-a)q(x) = 0$$

مثال 11: جانچ کیجئے کہ $x+2$ ، $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ اور $2x+4$ کا جزو ضربی ہے یا نہیں۔

حل: $x + 2$ کا صفر -2 ہے مان لیجیے $p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ اور $s(x) = 2x + 4$

$$\begin{aligned} p(-2) &= (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6 \\ &= -8 + 12 - 10 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

اس طرح سے جزو ضربی کے مسئلہ کے مطابق $x + 2$ ، $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ کا جزو ضربی ہے۔

$$s(-2) = 2(-2) + 4 = 0 \text{ دوبارہ}$$

اس طرح سے $x + 2$ ، $2x + 4$ کا بھی جزو ضربی ہے درحقیقت اس کی جانچ ہم جزو ضربی کے مسئلہ کا استعمال کیے بغیر بھی کر سکتے

$$\text{ہیں کیونکہ } 2x + 4 = 2(x + 2)$$

مثال 12: k کی قسمت معلوم کیجیے اگر $x - 1$ ، $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ کا جزو ضربی ہے۔

حل: کیونکہ $x - 1$ جزو ضربی ہے $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ کا

$$p(1) = 0$$

$$p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k \quad \text{اب}$$

$$4 + 3 - 4 + k = 0 \text{ لیے}$$

$$k = -3 \text{ یعنی}$$

اب دو درجی کثیر رکنی جیسے $x^2 + lx + m$ کے اجزائے ضربی بنانے سے پہلی ہی واقف ہیں آپ نے اس کے وسطی رکن lx

کو $(ax + bx)$ کے طور پر منقسم کیا تھا جب کہ $ab = m$ تب $x^2 + lx + m = (x + a)(x + b)$ اب ہم دو درجی

کثیر رکنی جہاں $a \neq 0$ ، a ، b اور c مستقل ہوں کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کی کوشش کریں گے کثیر رکنی

$ax^2 + bx + c$ کے وسطی رکن کو منقسم کر کے اجزائے ضربی بنانے کا عمل مندرجہ ذیل ہے۔

مان لیجیے اسی اجزائے ضربی میں $(px + q)(rx + s)$ تب

$$ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s) = prx^2 + (ps + qr)x + qs$$

$$a = pr \text{ کے ضربیوں کا موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔}$$

اسی طرح سے x کھلے ضربیوں کا موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $b = ps + qr$ اور مستقلہ ارکان کا موازنہ کرنے پر

ہمیں حاصل ہوتا ہے $c=qr$ اس سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ b دو اعداد ps اور qr کا حاصل جمع ہے جس کا حاصل ضرب

$$(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$$

اس لیے $ax^2 + bx + c$ کے اجزائے ضربی بنانے کے لیے ہم b سے دو اعداد کے حاصل جمع کے طور پر لکھتے ہیں جن کا حاصل ضرب ac ہو مندرجہ ذیل مثال سے اس کی مزید وضاحت ہو جائے گی۔

مثال 13: $6x^2 + 17x + 5$ کے وسطی رکن کو منقسم کر کے اجزائے ضربی بنائے۔

حل 1: ہم دو اعداد p اور q ایسے تلاش کرتے ہیں جب کہ $pq = 6 \times 5 = 30$ تب ہمیں اجزائے ضربی حاصل ہو جائیں

گے اس لیے 30 کے اجزائے ضربی کے کچھ جوڑ و پر غور کیجیے۔ کچھ ہیں 1 اور 30، 2 اور 15، 3 اور 10، 5 اور 6

ان تمام جوڑوں میں ہمیں 2 اور 15 سے $p+q=17$ ملتا ہے۔

$$6x^2 + 17x + 5 = 6x^2 + (2+15)x + 5$$

$$= 6x^2 + 2x + 15x + 5$$

$$= 2x(3x+1) + 5(3x+1)$$

$$= (3x+1)(2x+5)$$

حل 1: ہم اس کے اجزائے ضربی، جز و ضربی کے مسئلہ کو استعمال کر کے بھی بنا سکتے ہیں جو مندرجہ ذیل ہے (مان لیجیے):

$$6x^2 + 17x + 5 = 6 \left\{ x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{5}{6} \right\} = 6p(x)$$

$$6x^2 + 17x + 5 = 6(x-a)(x-b) \text{ اگر } a \text{ اور } b, p(x) \text{ کے صفر ہیں تب}$$

$$\text{اس لیے } ab = \frac{5}{6} \text{ آئیے } \frac{5}{6} \text{ کے کچھ اجزائے ضربی پر نظر ڈالتے ہیں یہ ہو سکتے ہیں } \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{اب } p \left\{ \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{4} + \frac{17}{6} \left\{ \frac{1}{2} \right\} + \frac{5}{6} \neq 0 \text{ لیکن } p \left\{ \frac{-1}{3} \right\} = 0 \text{ اس لیے } \left\{ x + \frac{1}{3} \right\} \text{ کا } p(x) \text{ جز و ضربی}$$

ہے

اسی طرح سے آپ کوشش کر کے معلوم کر سکتے ہیں کہ $x + \frac{5}{2}$ بھی $p(x)$ کا جز و ضربی ہے۔

$$\begin{aligned}
6x^2 + 17x + 5 &= 6 \left\{ x + \frac{1}{3} \right\} \left\{ x + \frac{5}{2} \right\} \quad \text{اس لیے} \\
&= 6 \left\{ \frac{3x+1}{3} \right\} \left\{ \frac{2x+5}{2} \right\} \\
&= (3x+1)(2x+5)
\end{aligned}$$

اس مثال کے لیے وسطی رکن کی منقسم کرنے کا طریقہ زیادہ موضوع ہے۔ اس لیے اب دوسری مثال پر غور کرتے ہیں ہم جزو ضربی کے مسئلہ کو استعمال کر کے اس کے اجزائے ضربی بناتے ہیں جو درج ذیل ہیں۔

مثال 14: جزو ضربی کے مسئلہ کو استعمال کر کے $y^2 - 5y + 6$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے $p(y) = y^2 - 5y + 6$ اب اگر $p(y) = (y-a)(y-b)$ تو آپ جانتے ہیں کہ مسئلہ رکن ہوگا اس لیے $ab=6$ ۔ اس لیے $p(y)$ کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے ہم 6 اجزائے ضربی پر غور کرتے ہیں۔

6 کے اجزائے ضربی ہیں 1، 2 اور 3

$$p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0 \quad \text{اب}$$

اس لیے $y-2$ کا جزو ضربی ہے $p(y)$

$$p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0 \quad \text{مزید}$$

اس طرح سے $y-3$ بھی $y^2 - 5y + 6$

$$y^2 - 5y + 6 = (y-2)(y-3) \quad \text{اس لیے}$$

نوٹ کیجیے کہ $y^2 - 5y + 6$ کو وسطی نقطہ $-5y$ کو منقسم کر کے بھی اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔

اس لیے اب کعب کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی معلوم کرنے پر غور کرتے ہیں۔ یہاں وسطی رکن کو منقسم کرنے کا طریقہ

موضوع نہیں ہے۔ پہلے ہم کم سے کم ایک جزو ضربی معلوم کرنا ہوگا جیسا اب مندرجہ ذیل مثال میں دیکھیں گے۔

مثال 15: $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

$$p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120 \quad \text{حل: مان لیجیے}$$

اب ہم -120 کے تمام اجزائے ضربی پر غور کرتے ہیں یہ ہیں

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 24, \pm 30, \pm 60.$$

کوشش کرنے سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ $p(1)=0$ اس لیے $(x-1)$ ، $p(x)$ کا ایک جزو ضربی ہے اب ہم دیکھتے ہیں کہ:

$$x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$$

$$(x-1) = (x-1)x^2 - 22x(x-1) + 120(x-1)$$

$$[\text{comman}(x-1)] = (x-1)x^2 - 22(x+120)$$

یہ اجزائے ضربی ہم $p(x)$ کو $(x-1)$ سے تقسیم کر کے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

اب $x^2 - 22x + 120$ کو ہم وسطی رکن کو منقسم کر کے بھی اجزائے ضربی میں تحلیل کر سکتے ہیں اور جزو ضربی کے مسئلہ کو استعمال کر کے بھی وسطی رکن کو منقسم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x^2 - 22x + 120 = x^2 - 12x - 10x + 120$$

$$= x(x-12) - 10(x-12)$$

$$= (x-12)(x-10)$$

$$x^3 - 23x^2 - 142x - 120 = (x-1)(x-10)(x-12) \text{ اس لیے}$$

مشق 2.4

1. مندرجہ ذیل کوئی کثیر رکنیوں کا جزو ضربی $x+1$ ہے:

(i) $x^3 + x^2 + x + 1$

(ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

(iv) $x^3 + x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

2. جزو ضربی کے مسئلہ کو استعمال کر کے بنائے کہ مندرجہ ذیل ہر ایک کے لیے $p(x)$ ، $g(x)$ کا جزو ضربی ہے یا نہیں۔

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1, g(x) = x + 1$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, g(x) = x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 + 4x^2 + x + 6, g(x) = x + 3$

3. اگر $p(x) = x-1$ کا جزو ضربی ہے تو مندرجہ ذیل پر ایک کے لیے k کی قدر معلوم کیجیے۔

(i) $p(x) = x^2 + x + k$ (ii) $2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ (iv) $kx^2 - 3x + k$

4. اجزائے ضربی معلوم کیجیے:

(i) $12x^2 - 7x + 1$ (ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iii) $6x^2 + 5x - 6$ (iv) $3x^2 - x - 4$

5. اجزائے ضربی معلوم کیجیے:

(i) $x^3 - 2x^2 - x - 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 - 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

2.6 الجبری تہائیات (Algebraic Identities):

بچھلی جماعتوں میں آپ نے پڑھا ہے کہ الجبری تہائیات ایک ایسی الجبری مساوات ہوتی ہے جو اس میں موجود متغیر جن کی تمام قدروں کے لیے درست ہوتی ہے آپ مندرجہ ذیل الجبری تہائیات کے بارے میں بچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں۔

تہائیت I: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

تہائیت II: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

تہائیت III: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

تہائیت IV: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

آپ نے ان تمام تہائیات کا استعمال الجبری عبارتوں کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے کیا ہوگا اس کی افادیت آپ تجسب میں بھی دیکھ سکتے ہیں۔

مثال 16: مناسب تہائیات کا استعمال کر کے مندرجہ ذیل حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(x - 3)(x + 5)$

حل: (i) یہاں ہم تہائیت 1 کا استعمال کرتے ہیں: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ اس میں $y = 3$ رکھنے پر ہمیں حاصل

ہوتا ہے اگر $p(x) = x-1$ کا جزو ضربی ہے تو مندرجہ ذیل پر ایک کے لیے k کی قیمت معلوم کیجیے۔

$$(x+3)(x+3) = (x+3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + (3)^2 \\ = x^2 + 6x + 9$$

(ii) تماثل IV کا استعمال کرنے پر $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ ہمیں ملتا ہے:

$$(x-3)(x+5) = x^2 + (-3+5)x + (-3)(5) \\ = x^2 + 2x - 15$$

مثال 17: سیدھی ضرب کے بغیر 105×106 کی قدر معلوم کیجیے

$$105 \times 106 = (100+5) \times (100+6)$$

$$= (100)^2 + (5+6)(100) + (5 \times 6)$$

$$= 1000 + 1100 + 30$$

آپ کچھ دی ہوئی عبارتوں کا حاصل ضرب معلوم کرنے کے لیے مذکورہ بالا تماثلات کا استعمال دیکھ چکے ہیں ان تماثلات کا استعمال ہم الجبری عبارتوں کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے بھی کرتے ہیں جیسا کہ مندرجہ ذیل مثالوں میں کیا گیا ہے۔
مثال 18: اجزائے ضربی معلوم کیجیے:

$$(i) 49a^2 + 70ab + 25b^2$$

$$(ii) \frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$$

حل: (i) یہاں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ: $49a^2 = (7a)^2$, $25b^2 = (5b)^2$, $70ab = 2(7a)(5b)$

اس عبارت کا موازنہ $x^2 + 2xy + y^2$ سے کرنے پر ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ $x=7a$ اور $y=5b$ اس طرح سے تماثل I کا استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2 = (7a + 5b)(7a + 5b)$$

$$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left\{ \frac{5}{2}x \right\}^2 - \left\{ \frac{y}{3} \right\}^2$$

اب اس کو تماثل III سے موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left\{ \frac{5}{2}x \right\}^2 - \left\{ \frac{y}{3} \right\}^2$$

$$= \left\{ \frac{5}{2}x + \frac{y}{3} \right\} \left\{ \frac{5}{2}x - \frac{y}{3} \right\}$$

اس طرح سے ہماری تمام تر تہاثلات دو رکنیوں کے حاصل ضرب پر مشتمل ہیں آئیے اب ہم تہاثل I کی توسیع سے رکنی $x + y + z$ تک کرتے ہم $(x + y + z)^2$ کی تحسیب تہاثل I کے استعمال سے کرتے ہیں۔

$$\text{مان لیجیے } x + y = t \text{ تب } (x + y + z)^2 = (t + z)^2$$

$$= t^2 + 2tz + z^2 \text{ پر استعمال کرنے پر}$$

$$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2 \text{ کی قیمت رکھنے پر}$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 \text{ (تہاثل I کے استعمال کرنے پر)}$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \text{ (ارکان کو ترتیب میں رکھنے پر)}$$

اس طرح سے ہمیں مندرجہ ذیل تہاثل حاصل ہوتی ہے:

$$\text{تہاثل V: } (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

ریمارک: ہم R.H.S. عبارت کو L.H.S. عبارت کی پھیلی ہوئی شکل کہتے ہیں۔ نوٹ کیجئے کہ عبارت $(x + y + z)^2$ تین مربع ارکان اور تین حاصل ضرب ارکان میں:

مثال 19: $(3a + 4b + z)^2$ کو پھیلی ہوئی شکل میں لکھیے۔

حل: دی ہوئی عبارت کا موازنہ $(x + y + z)^2$ سے کرتے ہیں ہمیں ملتا ہے کہ $x = 3a, y = 3b$ اور $z = 5c$

اس لیے تہاثل کا استعمال کرنے پر ہمارے پاس ہے

$$\begin{aligned} (3a + 4b + 5c)^2 &= (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a) \\ &= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ac \end{aligned}$$

مثال 20: $(4a - 2b - 3x)^2$ کو پھیلا کر لکھیے:

حل: تہاثل V کا استعمال کرنے پر ہمیں ملتا ہے:

$$\begin{aligned} (4a - 2b - 3x)^2 &= [4a + (-2b) + (-3x)]^2 \\ &= (4a^2 + (-2b)^2 + (-3x)^2 + 2(4a)(-2b)(-3x) + 2(-3x)(4a) \end{aligned}$$

$$= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac$$

مثال 21: $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: ہمارے پاس ہے:

$$\begin{aligned} = 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz &= (2x)^2 + (-y)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(2x)(z) \\ &= (2x + (-y) + z)^2 \quad (\text{تمثال V کو استعمال کرنے پر}) \\ &= (2x - y + z)^2 = (2x - y + z)(2x - y + z) \end{aligned}$$

اب تک ہمارا واسطہ ان تماثل سے پڑا ہے جن کا درجہ 2 ہے اب ہم اپنی مثال 1 کی توسیع $(x + y)^3$ کی تحسب کرنے کے لیے کرتے ہیں ہمارے پاس ہے:

$$\begin{aligned} (x + y)^3 &= (x + y)(x + y)^2 \\ &= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2) \\ &= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2) \\ &= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \end{aligned}$$

اس طرح سے ہمیں مندرجہ ذیل تماثل حاصل ہوتی ہے:

$$\text{تمثال VI: } (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

مزید اگر تماثل vi میں y کی جگہ $-y$ کو دیں تو ہمیں تماثل vi حاصل ہوتی ہے

$$\begin{aligned} \text{تمثال VII: } (x - y)^3 &= x^3 - y^3 - 3xy(x - y) \\ &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \end{aligned}$$

مثال 22: مندرجہ ذیل مکعبوں کو پھیلی ہوئی شکل میں لکھیے:

$$(i) (3a + 4b)^3 \quad (ii) (5p - 3q)^3$$

حل: دی ہوئی عبارت کا موازنہ $(x + y)^3$ کرنے پر ہمیں ملتا ہے:

$$y = 4b \text{ اور } x = 3a$$

اس طرح سے تماشل VI کو استعمال کرنے سے ہمیں ملتا ہے:

$$\begin{aligned}(3a + 4b)^3 &= (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a + 4b) \\ &= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2\end{aligned}$$

(ii) دی ہوئی عبارت کا موازنہ $(x - y)^3$ سے کرنے پر ہم پاتے ہیں:

$$x = 5p, y = 3q$$

تماشل VII کا استعمال کرنے سے ہمیں ملتا ہے:

$$\begin{aligned}(5p - 3q)^3 &= (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p - 3q) \\ &= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2\end{aligned}$$

مثال 23: مناسب تماثلات کا استعمال کرتے ہیں مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجیے:

$$(i) (104)^3 \quad (ii) (999)^3$$

حل: ہمارے پاس ہے:

$$\begin{aligned}(104)^3 &= (100 + 4)^3 \\ &= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100 + 4) \quad (\text{تماشل VI کو استعمال کرنے پر}) \\ &= 100000 + 64 + 124800 \\ &= 1124864\end{aligned}$$

(ii) ہمارے پاس ہے:

$$\begin{aligned}(999)^3 &= (1000 - 1)^3 \\ &= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000 - 1) \quad (\text{تماشل VII کا استعمال کرنے پر}) \\ &= 1000000000 - 1 - 2997000 \\ &= 997002999\end{aligned}$$

مثال 24: $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے:

حل: دی ہوئی عبارت کو ہم لکھ سکتے ہیں:

$$\begin{aligned} & (2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y)^2 \\ &= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 \\ & \quad (\text{تماثل vi کا استعمال کرنے پر}) \\ &= (2x+3y)(2x+3y)(2x+3y) \end{aligned}$$

اب $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ پر غور کیجیے

پھیلانے پر اس حاصل ضرب سے ہمیں ملتا ہے

$$\begin{aligned} & x(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + y(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + z(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \\ &= x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2 + x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z + x^2z + y^2z + z^3 - xyz^2 - yz - xz^2 \\ & \quad \text{مختصر کرنے پر } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \end{aligned}$$

اس طرح سے ہمیں مندرجہ ذیل تماثل حاصل ہوتی ہے

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \text{ viii تماثل}$$

مثال 25: $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$ کے اجزائے ضربی بنائیے۔

حل: یہاں ہمارے پاس ہے

$$\begin{aligned} &= (2x)^3 + y^3 + (3z)^3 - 3(2x)(y)(3z) \\ &= (2x+y+3z)[(2x)^2 + y^2 + (3z)^2 - (2x)(y) - (y)(3z) - (2x)(3z)] \\ &= (2x+y+3z)(4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz) \end{aligned}$$

2.5 مشق

1. مناسب تماثلات کا استعمال کر کے مندرجہ ذیل حاصل ضرب معلوم کیجیے

(i) $(x+4)(x+10)$

(ii) $(x+8)(x-10)$

(iii) $(3x+4)(3x-5)$

$$(iv) \left(y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{2}\right) \quad (v) (3-2x)(3+2x)$$

2. سیدھی ضرب کے بغیر مندرجہ حاصل ضرب کی قدر معلوم کیجیے

$$(i) 103 \times 107 \quad (ii) 95 \times 96 \quad (iii) 104 \times 96$$

3. مناسب تماثلات کا استعمال کر کے اجزائے ضربی بنائیے

$$(i) 9x^2 + 6xy + y^2 \quad (ii) 4y^2 - 4y + 1 \quad (iii) x^2 - \frac{y^2}{100}$$

4. مناسب تماثلات کا استعمال کر کے مندرجہ ذیل میں ہر ایک کو پھیلائیے

$$(i) (x + 2y + 4z)^2 \quad (ii) (2x - y + z)^2 \quad (iii) (-2x + 3y + 2z)^2$$

$$(iv) (3a - 7b + c)^2 \quad (v) (-2x + 5y - 3z)^2 \quad (vi) \left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right]^2$$

5. اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے

$$(i) 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$$

$$(ii) 2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$$

6. مندرجہ ذیل مکعبوں کو پھیلی ہوئی شکل میں لکھیے

$$(i) (2x+1)^3 \quad (ii) (2a-3b)^3$$

$$(iii) \left[\frac{3}{2}x+1\right]^3 \quad (iv) \left[x-\frac{2}{3}y\right]^3$$

7. مناسب تماثلات کا استعمال کر کے مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجیے

$$(i) (99)^3 \quad (ii) (102)^3 \quad (iii) (998)^3$$

8. مندرجہ ذیل ہر ایک کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے

$$(i) 8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$$

$$(ii) 8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$$

$$(iii) 27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$$

$$(iv) 64a^3 - 27b^3 - 14412a^2b + 108ab^2$$

$$(v) 27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$$

9. تصدیق کیجیے

$$(i) x^2 + y^2 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$(ii) x^2 - y^2 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

10. ہر ایک کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے

$$(i) 27y^3 + 125z^2$$

$$(ii) 64m^2 - 343n^2$$

(اشارہ: سوال نمبر 9 دیکھیے)

11. $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے؟

$$12. x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$$
 کی تصدیق کیجیے

13. اگر $x + y + z = 0$ کو دکھاتے ہیں کہ $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

14. ملعوں کے حقیقی شمار کے بغیر مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کی قدر معلوم کیجیے

$$(i) (-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$$

$$(ii) (28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$$

15. مندرجہ ذیل مستطیلوں میں لمبائی اور چوڑائی کی وہ ممکن عبارتیں معلوم کیجیے جن میں ان کا رقبہ دیا ہوا ہے؟

$$\text{رقبہ: } 25a^2 - 35a + 12$$

$$\text{رقبہ: } 35y^2 + 13y - 12$$

16. اسی کعب نما کی ابعاد کیا ہوں گی جن کا حجم مندرجہ ذیل ہے

$$\text{حجم: } 3x^2 - 12x$$

$$\text{حجم: } 12ky^2 + 6ky = 20k$$

2.7 خلاصہ

اس باب میں آپ مندرجہ ذیل نفاط کے بارے میں پڑھا۔

1. ایک متغیر میں کثیررکنی $P(x)$ میں ایک الجبری عبارت ہے جس کی شکل ہے

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

جہاں $a_2, \dots, a_n, a_1, a_0, a_n \neq 0$ مستقلہ ہیں $a_n, \dots, a_2, a_1, a_0, a_n \neq 0$ بالترتیب x^n, \dots, x^2, x, x^0 کے ضرب ہیں n کثیررکنی کا درجہ کہلاتا ہے اور $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_1 x, a_0$ میں سے ہر ایک کثیررکنی کا درجہ کہلاتا ہے۔

2. ایک رکن والی کثیررکنی ایک رکنی کہلاتی ہے۔
3. دو رکن والی کثیررکنی دو رکنی کہلاتی ہے۔
4. تین رکن والی کثیررکنی تین رکنی کہلاتی ہے۔
5. ایک درجہ والی کثیررکنی خطی کثیررکنی کہلاتی ہے۔
6. دو درجہ والی کثیررکنی دو درجہ کثیررکنی کہلاتی ہے۔
7. تین درجہ والی کثیررکنی کعبی کثیررکنی کہلاتی ہے۔
8. ایک حقیقی عدد a کثیررکنی $p(x)$ کا صفر ہوتا ہے اگر $p(a) = 0$
9. ایک متغیر والی ہر ایک خطی کثیررکنی کا یکتا صفر ہوتا ہے۔ ایک غیر صفر مستقل کثیررکنی کا کو صفر نہیں ہوتا اور ہر حقیقی عدد صفر کثیررکنی کا صفر ہوتا ہے۔
10. باقی مسئلہ: اگر $P(x)$ ایک کثیررکنی ہے جیسا کہ درجہ 1 کے برابر اس سے بڑا ہو اور $p(x)$ کو ایک خطی کثیررکنی سے تقسیم کیا جائے تو باقی $x - a$ ہے
11. جزو ضربی مسئلہ: $x - a$ کثیررکنی $p(x)$ کا جزو ضربی $p(a) = 0$ بی ہے اگر $x - a$ مزید اگر $p(x)$ کثیررکنی کا $p(a) = 0$ کا جزو ضربی ہے تب
12. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
13. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$
14. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$
15. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$