باب 6

خطوط اور زاویے (LINES AND ANGLES)

1.1 تعارف (Introduction)

باب 5 میں آپ نے پڑھا کہ کسی ایک خط کو بنانے کے لئے کم سے کم دو نقطے چاہئیں آپ نے کچھ بدیہات بھی پڑھے اور ان بدیہیوں کی مدد سے آپ نے کچھ بیانات کو بھی ثابت کیا، اس باب میں آپ ان زاویوں کی خصوصیات کے بارے میں پڑھیں گے جو دو خطوط کے قطع کرنے پر بنتے ہیں۔اس کے علاوہ ان زاویوں کی خصوصیات کے بارے میں بھی پڑھیں گے جو ایک خط دو یا دو سے زیادہ متوازی خطوط کو مختلف نقطوں پر قطع کر کے بناتا ہے، مزید ان خصوصیات کا استعمال کچھ بیانوں کو استخراجی منطق کے ثابت کرنے میں کریں گے (Appendix دیکھیے)۔پچھلی کلاسوں میں آپ عملی کاموں کے ذریعہ ان بیانات کی تصدیق پہلے ہی کر چکے ہیں۔

آپ اپنی روزمرہ کی زندگی میں مستوی سطحوں کے کناروں کے درمیان بنے مختلف قسم کے زاویوں کو دیکھتے ہیں، مستوی سطحوں کا استعمال کر یکساں قسم کے ماڈل بنانے کے لئے آپ کو زاویوں کا پورا علم ہونا ضروری ہے مثال کے طور پر اسکول کی نمائش میں رکھنے کے لئے بانس کی لکڑی کا استعمال کر آپ جھونپڑی کا ایک ماڈل بنانا چاہتے ہیں، تصور کیجیے آپ اس کو کیسے بنائیں گے؟ کچھ لکڑیاں آپ ایک دوسرے کے متوازی رکھیں گے اور کچھ ترچھی جب کوئی آرکیٹیکٹ ایک کثیر منزلہ عمارت کا پلان تیار کرتی ہے تو اس کو قاطع خطوط اور متوازی خطوط مختلف زاویوں پر بنانے پڑتے ہیں کیا آپ سوچ سکتے ہیں کہ وہ ان خطوط اور زاویوں کی خصوصیات جانے بغیر عمارت کا صحیح نقشہ بنا سکتا ہے۔

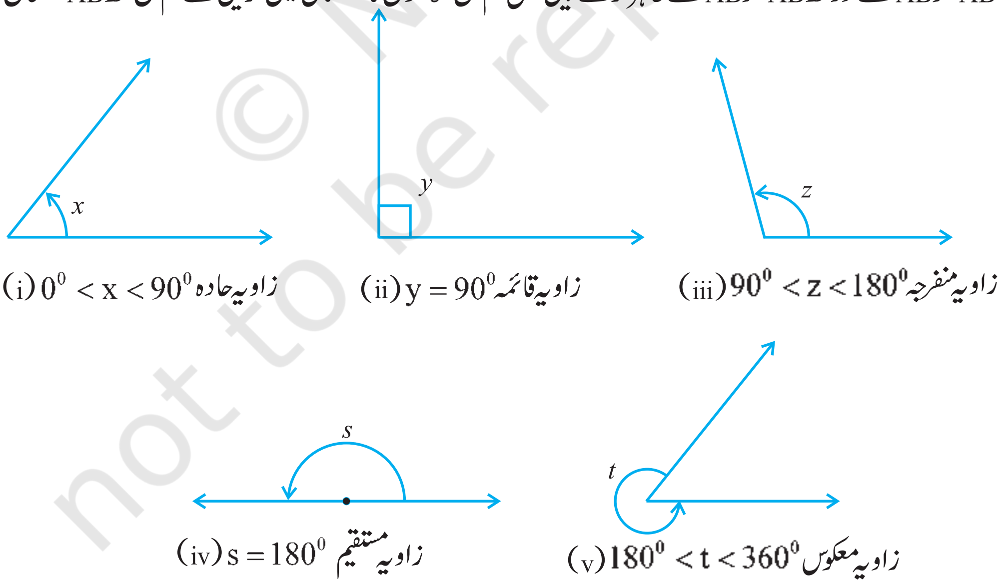
سائنس میں آپ روشنی کی خصوصیات کا مطالعہ شعاع کا ڈائیگرام بنا کر کرتے ہیں مثال کے طور پر روشنی کے انعطاف کی خصوصیت مطالعہ اس وقت کرنے کے لئے جب روشنی ایک میڈیم سے دوسرے میڈیم میں داخل ہوتی ہے۔آپ قاطع خطوط

اور متوازی خطوط کی خصوصیات کا استعمال کرتے ہیں۔ جب دو یا زیادہ قوتیں ایک جسم پر لگتی ہیں تب آپ ایک شکل بناتے ہیں جس میں قوتوں کا جسم پر کلی اثر جاننے کے لئے قوتوں کو سمت والے قطاعت خطوط سے ظاہر کرتے ہیں جب شعاعیں (یا قطعات خط) ایک دوسرے کے متوازی ہوں یا ایک دوسرے کو قطع کریں تو اس وقت آپ کو زاویوں کے درمیان تعلق معلوم کرنے کی ضرورت ہوتی ہے ایک مینار کی اونچائی معلوم کرنے کے لئے یا کسی لائٹ ہاؤس سے کسی پانی کے جہاز کا فاصلہ معلوم کرنے کے لئے بصیر کے خط اور افقی خط کے درمیان زاویہ معلوم کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ ایسی بہت سی مثالیں دی جاسکتی ہیں جہاں خطوط اور زاویوں کا استعمال ہوتا ہے۔ جیومیٹری کے اگلے بابوں میں دوسری اور خصوصیات کا استخراج کرنے کے لئے خطوط اور زاویوں کی ان خصوصیات کا استعمال کریں گے۔

اگلے سیکشن میں ہم پچھلی کلاسوں میں خطوط سے متعلق تعریفوں اور امکان کو دہرائیں گے۔

6.2 بنیادی ارکان اور تعریفیں (Basic Terms and Definitions)

یاد کیجیے کہ خط کا وہ حصہ جس کے سرے کے دو نقطے ہوتے ہیں قطع خط کہلاتا ہے اور خط کا وہ حصہ جس کا صرف ایک سرے کا نقطہ ہوتا ہے شعاع (Ray) کہلاتا ہے۔ نوٹ کیجیے کہ قطع خط $\overline{AB}$ کو ہم AB سے ظاہر کرتے ہیں اور اس کی لمبائی کو AB سے شعاع AB کو AB سے اور خط AB کو $\overline{AB}$ سے ظاہر کرتے ہیں لیکن ہم ان علامتوں کا استعمال نہیں کریں گے ہم قطع خط AB، شعاع



(i) $0^0 < x < 90^0$ زاویہ حادہ　(ii) $y = 90^0$ زاویہ قائمہ　(iii) $90^0 < z < 180^0$ زاویہ منفرجہ

(iv) $s = 180^0$ زاویہ مستقیم　(v) $180^0 < t < 360^0$ زاویہ معکوس

شکل 6.1 زاویوں کی قسمیں

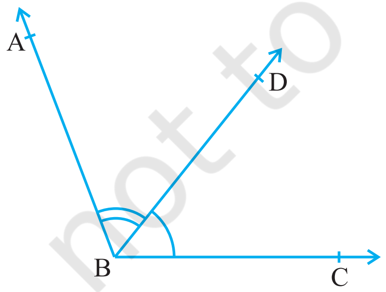
AB اور خط AB کو ایک ہی علامت AB سے ظاہر کریں گے اس کے معنی سیاق سے واضح ہو جائیں گے۔ کبھی کبھی چھوٹے حروف l، m اور n وغیرہ سے بھی خطوط کو ظاہر کیا جاتا ہے۔

اگر تین یا زیادہ نقطے ایک ہی خط پر واقع ہوتے ہیں تو وہ ہم خط نقطہ کہلاتے ہیں نہیں تو غیر ہم خط نقطے۔ یاد کیجیے کہ زاویہ جب بنتا ہے جب دو شعاع ایک ہی سرے کے نقطہ سے شروع ہوتی ہے وہ شعاعیں جو زاویہ بناتی ہیں زاویہ کے بازو کہلاتے ہیں اور سرے کا نقطہ زاویہ کا راس کہلاتا ہے۔ آپ نے مختلف قسم کے زاویوں جیسے زاویہ حادہ، زاویہ قائمہ، زاویہ منفرجہ، زاویہ مستقیم اور زاویہ معکوس (reflex) کے بارے میں پچھلی کلاسوں میں پڑھا ہوگا (شکل 6.1 دیکھئے)

ایک زاویہ حادہ کی پیائش O سے 90^0 کے درمیان ہوتی ہے جبکہ زاویہ قائمہ 90^0 کا ہوتا ہے، ایک زاویہ جو 90^0 سے زیادہ اور 180^0 سے کم ہوتا ہے زاویہ منفرجہ کہلاتا ہے۔ مزید یاد کیجیے کہ زاویہ مستقیم 180^0 کا ہوتا ہے۔ ایک زاویہ جو 180^0 سے زیادہ اور 360^0 سے کم ہوتا ہے زاویہ معکوس کہلاتا ہے۔ مزید دو زاویہ جن کا حاصل جمع 90^0 ہوتا ہے تتمی زاویے کہلاتے ہیں اور وہ دو زاویہ جن کا حاصل جمع 180^0 ہوتا ہے تکمیلی زاویے کہلاتے ہیں۔

آپ متصل زاویوں کے بارے میں بھی پچھلی کلاسوں میں پڑھ چکے ہیں (شکل 6.2 دیکھئے) دو زاویہ متصل زاویہ کہلاتے ہیں اگر انکا راس ایک ہی ہو اور ایک بازو مشترک ہو اور غیر مشترک بازو مشترک بازو کی مخالف سمتوں میں ہو۔ شکل 6.2 میں $\angle ABD$ اور $\angle DBC$ سے متصل زاویہ ہیں شعاع BD ان کا مشترک بازو ہے اور نقطہ B ان کا مشترک راس ہے شعاع BA اور BC غیر مشترک بازو میں مزید جب دو زاویہ متصل ہیں تو ان کا حاصل جمع غیر مشترک بازوں سے بنے زاویہ کے برابر ہوتا ہے۔ اس لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$$

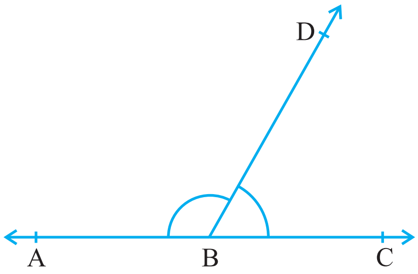


شکل 6.2 متصل زاویہ

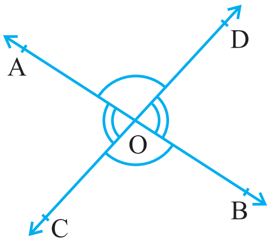
نوٹ کیجیے کہ $\angle ABC$ اور $\angle ABD$ سے متصل نہیں ہیں کیوں؟ کیونکہ ان کے غیر مشترک بازو BD اور BC مشترک بازو BA کی ایک ہی طرف واقع ہیں۔

شکل 6.2 میں اگر غیر مشترک بازو ایک خط بناتے ہیں تب یہ شکل 6.3 کی طرح نظر آتے ہیں۔ اس حالت میں $\angle ABD$ اور $\angle DBC$ زاویوں کا خطی جوڑا کہلاتا ہیں۔

آپ یہ بھی دہرا سکتے ہیں کہ جب دو خطوط جیسے AB اور CD ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں تو اس طرح سے بنے زاویہ بالمقابل زاویہ کہلاتے ہیں، بالمقابل زاویوں کے دو جوڑے ہوتے ہیں ایک جوڑا $\angle AOD$ اور $\angle BOC$ ہے، کیا آپ دوسرا جوڑا بتا سکتے ہیں؟



شکل 6.3 زاویوں کا جوڑا

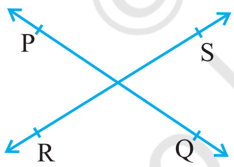


شکل 6.4 بالمقابل زاویہ

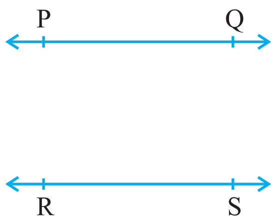
6.3 قاطع خطوط اور غیر قاطع خطوط

ایک پیپر پر دو مختلف خطوط PQ اور RS کھینچیے آپ دیکھیں گے کہ آپ ان کو دو طریقوں سے بنا سکتے ہیں جیسا کہ شکل 6.5(i) اور شکل 6.6(i) میں دکھایا گیا ہے۔

خط کے اس نظریہ کو دہرائیے کہ اس کو دونوں سمتوں میں لامحدود طور پر بڑھایا جا سکتا ہے۔ شکل 6.5 (i) میں خطوط PQ اور RS قاطع خطوط ہیں اور شکل 6.5(ii) میں متوازی خطوط نوٹ کیجیے کہ ان متوازی خطوط کے مختلف نقطوں پر مشترک عمودوں کی لمبائی یکساں ہے اس یکساں لمبائی کو متوازی خطوط کے درمیان کا فاصلہ کہا جاتا ہے۔



(i) قاطع خطوط

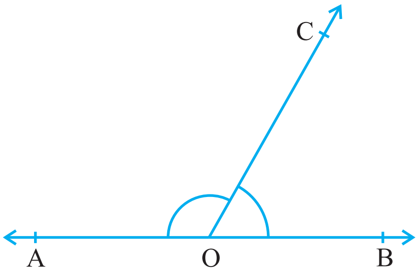


(ii) غیر قاطع (متوازی) خطوط

شکل 6.5 دو خطوط کو بنانے کے مختلف طریقہ

6.4 زاویوں کے جوڑے (Pairs of Angles)

سیکشن 6.2 میں آپ نے زاویوں کے کچھ جوڑے جیسے تکمیلی زوایہ، تتمی زاویہ، متصل زاویہ خطی جوڑا وغیرہ کے بارے میں سیکھا کیا



شکل 6.6 زاویوں کا خطی جوڑا

آپ ان زاویوں کے درمیان کسی تعلق کے بارے میں سوچ سکتے ہیں؟ آیئے اب ہم ان زاویوں کے درمیان تعلق معلوم کرنے کی کوشش کریں جو جب بنتے ہیں جب کوئی شعاع کسی خط پر کھڑی ہوتی ہے۔ ایک شکل بنائیے جس میں ایک شعاع کسی خط پر کھڑی ہو جیسا کے شکل 6.6 میں دکھایا گیا ہے۔ خط کو AB اور شعاع کو OC نام دیجیے، نقطہ O پر بنے زاویہ کیا ہیں؟ یہ ہیں $\angle AOC$ $\angle COB$ اور $\angle AOB$۔

کیا ہم لکھ سکتے ہیں جو $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$

ہاں! (کیوں؟ سیکشن 6.2 میں متصل زاویوں کے حوالہ سے) AOB سے کی پیائش کیا ہے؟ یہ 180^0 ہے (کیوں؟)

(1) اور (2) سے کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ $\angle AOC + \angle BOC = 180^0$ ؟

ہاں (کیوں؟)

مذکورہ بالا بحث سے ہم مندرجہ ذیل بدیجہ بیان کر سکتے ہیں:

بدیجہ 6.1: اگر کوئی شعاع ایک خط پر کھڑی ہو تو اس طرح سے بنے متصل زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہے۔

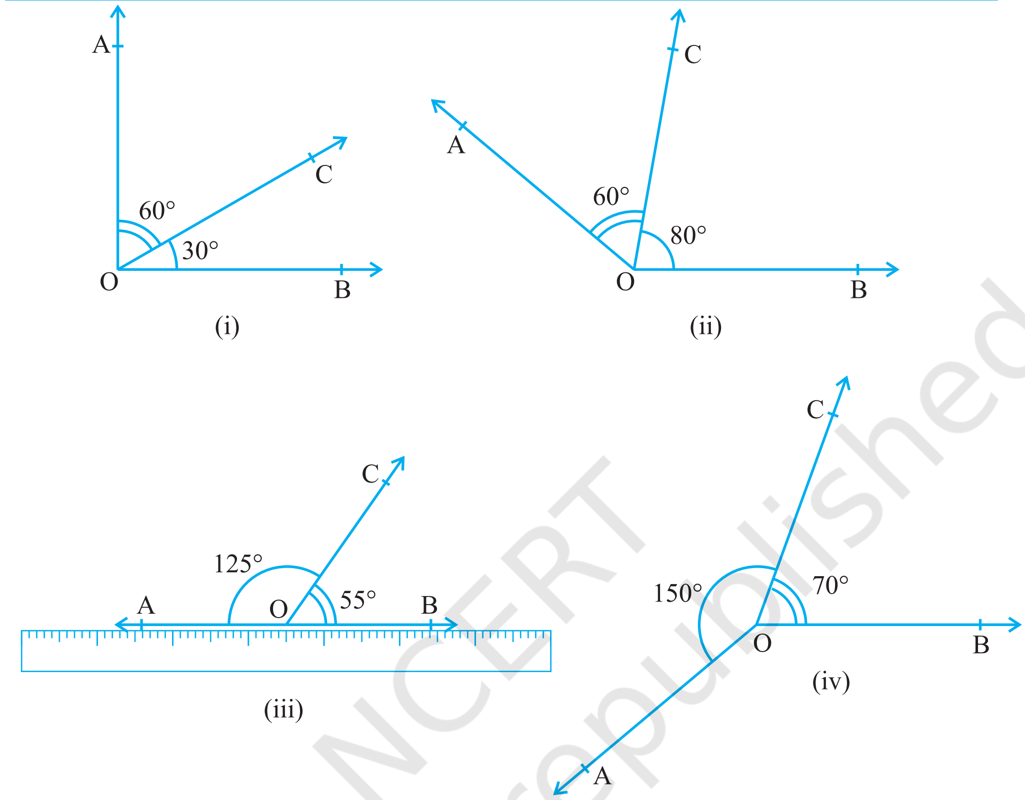
یاد کیجیے کہ جب دو متصل زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہوتا ہے تب زاویوں کا خطی جوڑا کہلاتا ہے۔

بدیجہ 6.1 میں یہ دیا ہوا ہے کہ شعاع ایک خط پر کھڑی ہے اس دیئے ہوئے سے ہم نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ اس طرح سے بنے دو متصل زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہے کیا ہم بدیجہ 6.1 کو دوسری طرح بھی لکھ سکتے ہیں؟ یعنی بدیجہ 6.1 کے نتیجہ کو دیا ہوا لیجئے اور دیئے ہوئے کو نتیجہ لیجئے اس طرح سے ہم کو ملے گا۔

(A) اگر دو متصل زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہے تب شعاع ایک خط پر کھڑی ہوتی ہے یعنی غیر مشترک بازو ایک خط بناتے ہیں۔

اب آپ دیکھتے ہیں کہ بدیجہ 6.1 اور بیان A ایک دوسرے کے معکوس ہیں ہم ایک کو دوسرے کا معکوس کہتے ہیں ہم نہیں جانتے کہ بیان A درست ہے یا نہیں۔ آیئے جانچ کرتے ہیں۔ مختلف پیائشوں کے متصل زاویہ بتایئے جیسا کے شکل 6.7 میں دکھایا گیا ہے، پھر ایک حالت میں غیر مشترک بازوں پر ایک فٹا رکھئے کیا دوسرا غیر مشترک بازو بھی فٹے کے ساتھ ساتھ ہے؟

آپ پائیں گے صرف شکل (iii) 6.7 میں دونوں غیر مشترک بازو فٹے کے ساتھ ساتھ ہیں یعنی نقطے O, A اور B ایک ہی



شکل 6.7 مختلف پیمائشوں کے متصل زاویہ

خط پر ہیں اور شعاع OC اس پر کھڑی ہے۔ مزید دیکھئے کہ $\angle AOC + \angle COB = 125^0 + 55^0 = 180^0$
اس سے آپ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ بیان A درست ہے۔ اس لئے آپ اس کو ایک بدیہہ کے طور پر مندرجہ ذیل طریقہ سے بیان کر سکتے ہیں۔

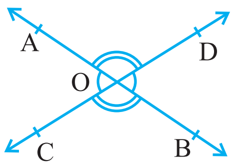
بدیہہ 6.2: اگر دو متصل زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہے تب زاویوں کے غیر مشترک بازو ایک خط بناتے ہیں۔

واضح وجوہات کی بنیاد پر مذکورہ بالا دو بدیہات ایک ساتھ خطی جوڑا بدیہیہ کہلاتا ہے۔

آیئے اب اس حالت کی جانچ کرتے ہیں جب دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

پچھلی کلاسوں سے دہرائیے کہ جب دو خط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تو ان سے بنے بالمقابل زاویہ مساوی ہوتے ہیں، آیئے اس نتیجہ کو ثابت کرتے ہیں ثبوت کے اجزاء کو جاننے کے لئے ضمیمہ دیکھئے اور مندرجہ ذیل ثبوت کو

پڑھتے وقت اس کو ذہن میں رکھیئے۔



شکل 6.8 بالمقابل زاویہ

مسئلہ 6.1: اگر دو خط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تو بالمقابل زاویہ مساوی ہوتے ہیں۔

ثبوت: مندرجہ بالا بیان میں یہ دیا ہوا ہے کہ دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ اس لئے مان لیجئے AB اور CD دو خطوط ہیں جو نقطہ 0 پر قطع کرتے ہیں جیسا کہ شکل 6.8 میں دکھایا گیا ہے۔ ان سے ہمیں بالمقابل زاویوں کے دو جوڑے حاصل ہوتے ہیں جن کے نام ہیں۔

(i) $\angle AOC$ اور $\angle BOD$ (ii) $\angle AOD$ اور $\angle BOC$

ہمیں ثابت کرنے کی ضرورت ہے کہ $\angle AOC = \angle BOD$ اور $\angle AOD = \angle BOC$

اب شعاع OA خط CD پر کھڑی ہے

اس لئے $\angle AOC + \angle AOD = 180^0$ (خطی جوڑے کا بدیہیہ)

کیا ہم لکھ سکتے ہیں $\angle AOD + \angle BOD = 180^0$ ہاں! (کیوں؟)

(1) اور (2) سے ہم لکھ سکتے ہیں

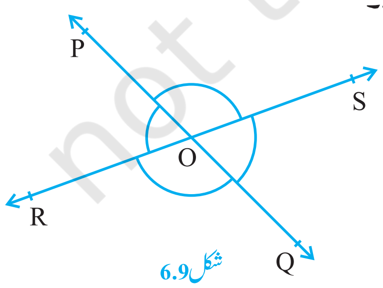
$$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$$

اس کا مطلب ہے کہ $\angle AOC = \angle BOD$ (بہ حوالہ سیکشن 5.2 بدیہیہ 3)

اسی طرح سے یہ بھی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ $\angle AOD = \angle BOC$

آیئے اب ہم خطی جوڑے کے بدیہیہ اور مسئلہ 6.1 پر منحصر کچھ مثالیں حل کرتے ہیں۔

مثال 1: شکل 6.9 میں خطوط PQ اور RS ایک دوسرے کو نقطہ 0 پر قطع کرتے ہیں اگر $\angle POR : \angle ROQ = 5:7$، تو تمام زاویہ معلوم کیجیے۔



شکل 6.9

حل: $\angle POR + \angle ROQ = 180^0$ (خطی جوڑا دیا ہوا ہے)

لیکن $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$

اس لئے $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180^0 = 75^0$

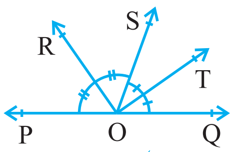
اسی طرح سے $\angle POQ = \frac{7}{12} \times 180^0 = 105^0$

اب $\angle POS = \angle ROQ = 105^0$ (بالمقابل زاویہ)

اور $\angle SOQ = \angle POR = 75^0$ (بالمقابل زاویہ)

مثال 2: شکل 6.10 میں شعاع OS خط POQ پر کھڑی ہے۔ شعاع OR اور شعاع OT بالترتیب $\angle POS$ اور $\angle SOQ$ کے زاویائی ناصف ہیں اگر $\angle POS = x$ ہے تو $\angle ROT$ معلوم کیجیے۔

حل: شعاع OS خط POQ پر کھڑی ہے۔



شکل 6.10

اس لئے $\angle POS + \angle SOQ = 180^0$

لیکن $\angle POS = x$

اس لئے $x + \angle SOQ = 180^0$

اب $\angle SOQ = 180^0 - x$

اب شعاع OR، $\angle POS$ کی تنصیف کرتی ہے۔

اس لئے $\angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS$

$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$

اسی طرح سے $\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$

$= \frac{1}{2} \times (180^0 - x)$

$= 90^0 - \frac{x}{2}$

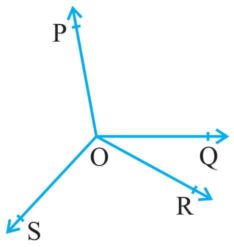
اب، $\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

$= \frac{x}{2} + 90 - \frac{x}{2}$

$= 90^0$

مثال 3: شکل 6.11 میں OP, OQ, OR اور OS چار شعاعیں ہیں ثابت کیجئے کہ

$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^0$

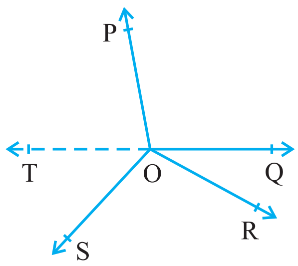


شکل 6.11

حل: شکل 6.11 میں آپ کو کسی ایک شعاع OP,OQ,OR یا OS کو پیچھے کی طرف ایک نقطہ تک بڑھانے کی ضرورت ہے۔ اس لئے شعاع OQ کو نقطہ T تک اس طرح بڑھاتے ہیں کہ TOQ ایک خط ہو (شکل 6.12 دیکھئے)

اب شعاع OP خط TOQ پر کھڑی ہے

اس لئے $\angle TOP + \angle POQ = 180^0$ (خطی جوڑے کا بدیہہ) (1)



شکل 6.12

اسی طرح سے شعاع OP خط TOQ پر کھڑی ہے۔

اس لئے $\angle TOS + \angle SOQ = 180^0$

لیکن $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

اس لئے (2) بن جاتی ہے۔

$\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180^0$

اب (1) اور (3) کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

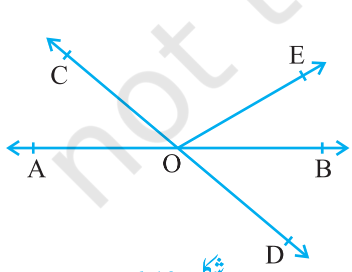
$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360^0$

لیکن $\angle TOP + \angle TOS + \angle POS$

اس لئے (4) بن جاتی ہے۔

$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^0$

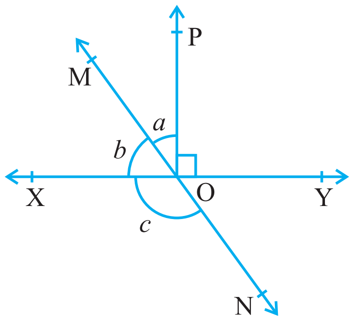
مشق 6.1



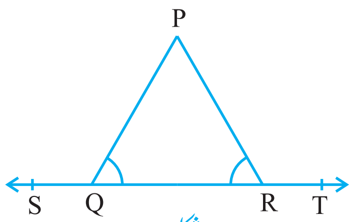
شکل 6.13

1. شکل 6.13 میں خطوط AB اور CD نقطہ O پر قطع کرتے ہیں اگر $\angle AOC + \angle BOE = 70^0$ اور $\angle BOD = 40^0$ ہے تو $\angle BOE$ اور معکوس $\angle COE$ سے معلوم کیجیے۔

2. شکل 6.14 میں خطوط XY اور MN نقطہ O پر قطع کرتے ہیں اگر $\angle POY = 90^0$ اور $a : b = 2 : 3$ تو c معلوم کیجیے۔

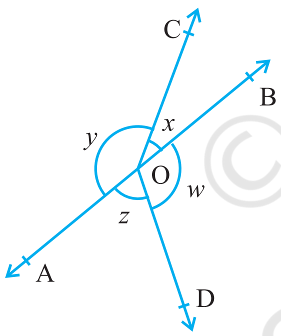


شکل 6.14



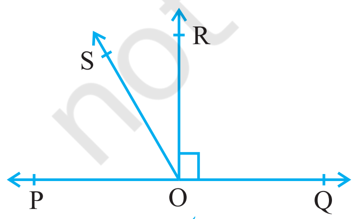
شکل 6.15

3. شکل 6.15 میں $\angle PQR = \angle PRQ$, تو ثابت کیجیے کہ $\angle PQS = \angle PRT$



شکل 6.16

4. شکل 6.16 میں اگر $x + y = w + z$ تو ثابت کیجیے کہ AOB ایک خط ہے



شکل 6.17

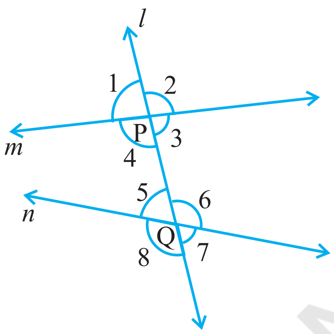
5. شکل 6.17 میں POQ ایک خط ہے شعاع OR خط PQ پر عمود ہے OS ایک دوسری شعاع ہے جو شعاعوں OP اور OR کے درمیان ہے ثابت کیجیے کہ

$$\angle POS = \frac{1}{2}(\angle QOS - \angle POS)$$

6. یہ دیا گیا ہے کہ $\angle XYZ=64^0$ اور XY کو نقطہ P تک بڑھا دی ہوئی اطلاعات سے ایک شکل بنائیے اگر شعاع YQ, $\angle ZYP$ سے کی تنصیف کرتی ہے تو $\angle XYQ$ اور معکوس زاویہ $\angle QYP$ معلوم کیجیے۔

6.5 متوازی خطوط اور قاطع

(Parallel Lines and a Transversal)

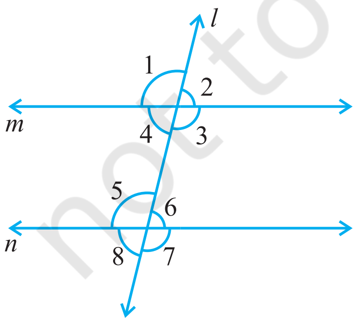


شکل 6.18

یاد کیجئے کہ ایک خط جو دو یا زیادہ خطوط کو مختلف نقطوں پر قطع کرتا ہے قاطع کہلاتا ہے۔ (شکل 6.18 دیکھیے) خط l خطوط m اور n کو بالترتیب دو نقطے P اور Q پر قطع کرتا ہے۔ اس لئے خط l, m اور n کے لئے قاطع ہے نقطے P اور Q پر بنے چار چار زاویوں کا مشاہدہ کیجیے۔

آیئے ان زاویوں کو $\angle 1, \angle 2, ... \angle 8$ نام دیجیے جیسا کہ شکل 6.18 میں دکھایا گیا ہے۔

$\angle 1, \angle 2, \angle 7$ اور $\angle 8$ خارجی زاویہ کہلاتے ہیں جبکہ $\angle 3, \angle 4, \angle 5$ اور $\angle 6$ داخلی زاویہ کہلاتے ہیں۔



شکل 6.19

یاد کیجیے کہ پچھلی کلاسوں میں آپ نے زاویوں کے کچھ جوڑوں، جو قاطع کے دو خطوط کو قطع کرنے سے بنتے ہیں، کے کچھ نام دیئے گئے، یہ مندرجہ ذیل میں

(a) مظہری زاویہ:

(i) $\angle 1$ اور $\angle 5$ (ii) $\angle 2$ اور $\angle 6$

(iii) $\angle 4$ اور $\angle 8$ (iv) $\angle 3$ اور $\angle 7$

(b) متبادل داخلی زاویہ:

(i) $\angle 4$ اور $\angle 6$ (ii) $\angle 3$ اور $\angle 5$

(c) متبادل خارجی زاویہ:

(i) $\angle 1$ اور $\angle 7$ (ii) $\angle 2$ اور $\angle 8$

(d) قاطع کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویہ:

(i) $\angle 4$ اور $\angle 5$ (ii) $\angle 3$ اور $\angle 6$

قاطع کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویوں کو ہم مسلسل داخلی زاویہ بھی کہتے ہیں مزید زیادہ تر ہم صرف متبادل داخلی زاویوں کی جگہ ہم متبادل زاویہ استعمال کرتے ہیں آیئے۔

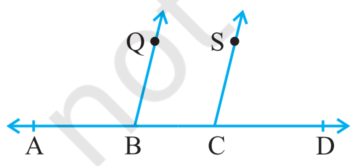
اب ہم زاویوں کے ان جوڑوں میں تعلق معلوم کرتے ہیں جب خط m خط l کے متوازی ہو آپ جانتے ہیں کہ آپ کی کاپی پر بنے خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں اس لئے فٹے اور پنسل کی مدد سے ان خطوط پر دو متوازی خطوط کھینچئے اور ان کو قطع کرتا ہوا ایک قاطع جیسا کہ شکل 6.19 میں دکھایا گیا۔

اب نظری زاویوں کے کسی جوڑے کی پیائش کیجیے اور ان کے درمیان تعلق معلوم کیجیے: آپ پائیں گے کہ $\angle 1 = \angle 5, \angle 2 = \angle 6, \angle 4 = \angle 8$ اور $\angle 3 = \angle 7$ اس سے آپ مندرجہ ذیل بدیہیہ اخذ کر سکتے ہیں۔

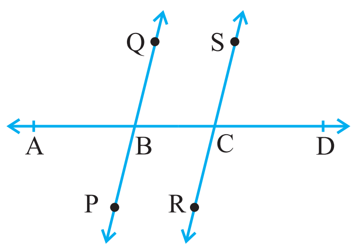
بدیہیہ 6.3: اگر کوئی قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہے تو نظیری زاویوں کا ہر جوڑا مساوی ہوتا ہے۔

بدیہیہ 6.3 کو ہم نظیری زاویوں کا بدیہیہ بھی کہتے ہیں آیئے اب اس بدیہیہ کے معکوس کے بارے میں بحث کرتے ہیں جو مندرجہ ذیل ہے۔

اگر ایک قاطع دو خطوط کو اس طرح قطع کرے کہ نظیری زاویوں کے جوڑے مساوی ہوں تو دونوں خطوط متوازی ہوتے ہیں۔



(i)



(ii)

شکل 6.20

کیا اس بیان میں کچھ صداقت ہے؟ اس کی ہم مندرجہ طریقہ سے تصدیق کر سکتے ہیں، ایک خط AD کھینچئے اس پر دو نقطے B اور C مارک کیجیے B اور C پر $\angle ABQ$ اور $\angle BCS$ ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں جیسا کہ شکل (i)6.20 میں دکھایا گیا ہے۔

AD کی دوسری طرف دو خطوط PQ اور RS بتانے کے لئے QB اور SC کو بڑھائیے [شکل (iii) 6.20 دیکھیے] آپ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ دونوں خطوط ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے، آپ خطوط PQ اور RS کے مختلف نقطوں پر مشترک عمود بنائیے اور ان کی پیمائش کیجیے آپ ان کو ہر جگہ یکساں پائیں گے اس لئے آپ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ خطوط متوازی ہیں اس طرح سے نظیری زاویوں کے بدیہیہ کا معکوس بھی درست ہے۔ اس طرح ہمیں مندرجہ ذیل بدیہیہ بھی ملتا ہے۔

بدیہیہ 6.4: اگر ایک قاطع دو خطوط کو اس طرح قطع کرے کہ نظیری زاویوں کے جوڑے مساوی ہوں تب دونوں خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہونگے۔

کیا ہم نظیری زاویوں کے بدیہیہ کا استعمال کس قاطع کے ذریعہ دو متوازی خطوط پر بنے متبادل داخلی زاویوں کے درمیان تعلق معلوم کرنے کے لئے کر سکتے ہیں؟ شکل 6.21 میں قاطع PS متوازی خطوط AB اور CD کو بالترتیب نقطے Q اور R پر قطع کرتا ہے۔

کیا $\angle AQR = \angle QRC$ اور $\angle BQR = \angle QRD$ ؟

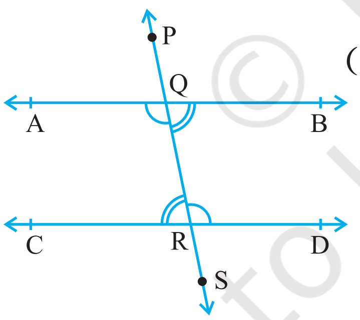
آپ جانتے ہیں کہ $\angle PQA = \angle QRC$ .....(نظیری زاویوں کا بدیہیہ) (1)

کیا $\angle PQA = \angle BQR$ ؟ ہاں! (کیوں؟) (2)

اس لئے (1) اور (2) سے آپ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ

$$\angle BQR = \angle QRC$$

اسی طرح $\angle AQR = \angle QRD$

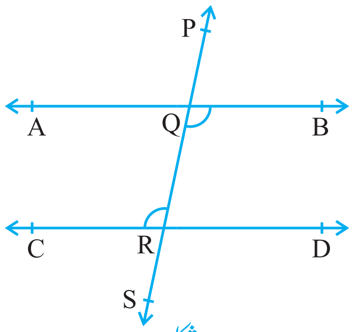


شکل 6.21

اس نتیجہ کے ایک مسئلہ کہ طور پر مندرجہ ذیل میں بیان کیا گیا ہے۔

مسئلہ 6.2: اگر کوئی قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرے تو متبادل داخلی زاویوں کا ہر ایک جوڑہ مساوی ہوتا ہے۔

کیا آپ نظیری زاویوں کے بدیہیہ کا معکوس استعمال کر یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ دو خطوط متوازی ہوتے ہیں اگر متبادل داخلی زاویہ مساوی ہوں؟ شکل 6.22 میں قاطع PS دو خطوط AB اور CD کو بالترتیب نقط Q اور R پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ



شکل 6.22

$\angle BQR = \angle QRC$

کیا AB || CD ؟

$\angle BQR = \angle PQA$ (کیوں؟) (1)

لیکن $\angle BQR = \angle QRC$ (دیا ہوا ہے) (2)

اس لیے (1) اور (2) سے آپ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ

$\angle PQA = \angle QRC$

لیکن یہ نظیری زاویہ ہے

اس لیے AB || CD (نظیری زاویوں کے بدیہیہ کا معکوس)

اس نتیجہ کو ایک مسئلہ کے طور پر درج ذیل بیان کیا گیا ہے۔

مسئلہ 6.3: اگر کوئی قاطع دو خطوط کو اس طرح قطع کرے اور متبادل داخلی زاویوں کا جوڑا مساوی ہو تو خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

اسی طرح سے آپ قاطع کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویوں سے متعلق مندرجہ ذیل مسئلہ حاصل کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 6.4: اگر کوئی قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرے تو قاطع کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویوں کا ہر ایک جوڑا تکمیلی ہوتا ہے۔

مسئلہ 6.5: اگر کوئی قاطع دو خطوط کو اس طرح قطع کرے کہ قاطع کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویوں کا جوڑا تکمیلی ہو تو دونوں خطوط متوازی ہوں گے۔

یاد کیجیے کہ اب مذکورہ بالا تمام بدایہوں اور مسئلوں کی تصدیق آپ پچھلی کلاسوں میں عملی کاموں کے ذریعہ کر چکے ہیں: آپ ان کو یہاں بھی دہرا سکتے ہیں۔

6.6 ایک ہی خط کے متوازی خطوط (Lines Parallel to the Same Line)

اگر کوئی دو خطوط ایک خط کے متوازی ہوں تو کیا وہ آپس میں بھی متوازی ہوں گے؟ آئیے اس کی جانچ کریں شکل 6.23 دیکھیے جس میں خط خط m || خط l اور خط n || خط l کے خطوط ML اور N کے لئے قاطع t بنائیے، یہ دیا ہوا ہے کہ خط m || خط l اور خط n || خط l اس لئے <i=<2 اور (نظیری زاویوں کا بدیہیہ)

اس لئے، <3 = <2 (کیوں؟)

$\angle 2 = \angle 1$ اور $\angle 3 = \angle 1$ لیکن $\angle 2 = \angle 3$ نظیری زاویہ ہیں

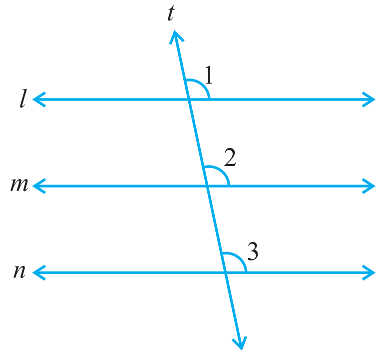
اور یہ برابر ہیں

اس لئے آپ کہہ سکتے ہیں کہ خط n || m خط

(نظیری زاویوں کے بدیہیہ کا معکوس)

اس نتیجہ کو ہم ایک مسئلہ کی شکل میں درج ذیل بیان کرتے ہیں

مسئلہ 6.6: خطوط جو ایک ہی خط کے متوازی ہوتے ہیں آپس میں بھی متوازی ہوتے ہیں۔

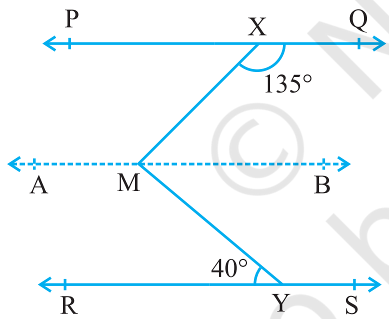


شکل 6.23

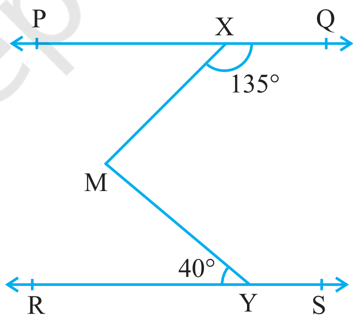
نوٹ:- مندرجہ بالا خصوصیت کی توسیع ہم دو سے زیادہ خطوط کے لئے بھی کر سکتے ہیں۔ آیئے اب متوازی خطوط سے متعلق کچھ مثالیں حل کرتے ہیں۔

مثال 4: شکل 6.24 میں اگر PQ || RS ، $\angle MXQ = 135^0$ اور $\angle MYR = 40^0$ تو $\angle XMY$ معلوم کیجیے۔

حل: یہاں ہمیں نقطہ M سے گذرتا ہوا اور خط PQ کے متوازی ایک خط AB کھینچنے کی ضرورت ہے جیسا کہ شکل 6.25 میں



شکل 6.24



شکل 6.25

دکھایا گیا ہے اب AB || PQ اور PQ || RS

اس لئے AB || RS (کیوں؟)

اب $\angle QXM + \angle XMB = 180^0$ (AB || PQ, قاطع XM کے ایک ہی طرف کے داخل زاویہ ہیں)

لیکن $\angle QXM = 135^0$

اس لئے $135^0 + \angle XMB = 180^0$

کیونکہ $\angle XMB = 45^0$

اب $\angle BMY = \angle MYR$ ($AB \parallel RS$, متبادل زاویہ)

اس لئے $\angle BMY = 40^0$

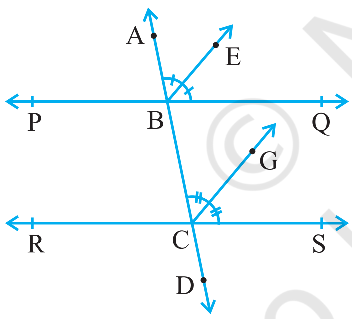
(1) اور (2) کو جمع کرنے پر حاصل ہوگا۔

$$\angle XMB + \angle BMY = 45^0 + 40^0$$

یعنی $\angle XMY = 85^0$

مثال 5: اگر کوئی قاطع دو خطوط کو اس طرح قطع کرے کہ نظیری زاویوں کے ایک جوڑے کے ناصف متوازی ہوں تو ثابت کیجیے کہ دو خطوط متوازی ہونگے۔

حل: شکل 6.26 میں قاطع AD دو خطوط PQ اور RS کو بالترتیب دو نقطوں B اور C پر قطع کرتا ہے۔ شعاع BE، $\angle ABQ$ کا ناصف ہے اور شعاع CG، $\angle BCS$ کا ناصف ہے اور $BE \parallel CG$



شکل 6.26

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $PQ \parallel RS$

یہ دیا ہوا ہے کہ شعاع BE ، $\angle ABQ$ کا ناصف ہے

اس لئے $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABQ$ (1)

اسی طرح سے شعاع CG، $\angle BCS$ کا ناصف ہے۔

اس لئے $\angle BCG = \frac{1}{2}\angle BCS$ (2)

لیکن $BE \parallel CG$ اور AD ایک قاطع ہے۔

اس لئے $\angle ABE = \angle BCG$ (نظیری زاویوں کا بدیہیہ) (3)

(1) اور (2) کو (3) میں رکھنے پر ہمیں ملتا ہے۔

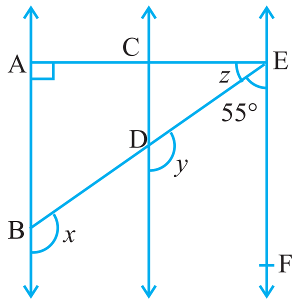
$$\frac{1}{2}\angle ABQ = \frac{1}{2}\angle BCS$$

یعنی $\angle ABQ = \angle BCS$

لیکن یہ قاطع یعنی AD سے خطوط PQ اور RS پر بنے نظیری زاویہ ہیں اور مساوی ہیں۔

اس لئے $PQ \parallel RS$ (نظیری زاویوں کے بدیہیہ کا معکوس)

مثال 6: شکل 6.27 میں $AB \parallel CD$ اور $CD \parallel EF$ اور $EA \perp AB$۔ اگر $\angle BEF = 55^0$ ہے تو x، y اور z کی قدر معلوم کیجیے۔



شکل 6.27

حل: $y + 55^0 = 180^0$

($CD \parallel EF$ قاطع ED کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویہ)

اس طرح $y = 180^0 - 55^0 = 125^0$

اس لئے $x = y = 125^0$ ($AB \parallel CD$ نظیری زاویوں کا بدیہیہ)

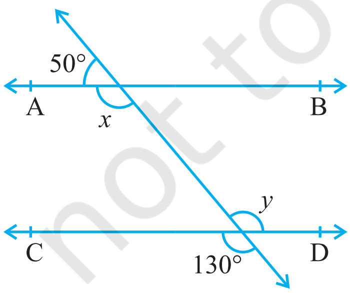
اب کیونکہ $AB \parallel CD$ اور $CD \parallel EF$ اس لئے $AB \parallel EF$

اس لئے $\angle EAB + \angle FEA = 180^0$ (قاطع EA کے ایک ہی طرف کے داخلی زا

اس لئے $90^0 + z + 55^0 = 180^0$

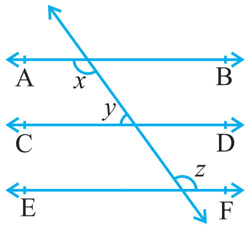
جس سے ہمیں ملتا ہے $z = 35^0$

مشق 6.2

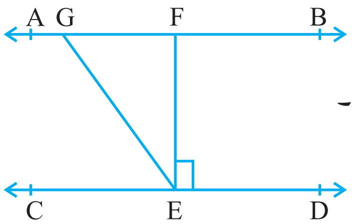


1. شکل 6.28 میں x اور y کی قدریں معلوم کیجیے اور پھر $AB \parallel CD$ دکھایئے۔

2. شکل 6.29 میں اگر $AB \parallel CD, CD \parallel EF$ اور $y : z = 3 : 7$ تو x معلوم کیجیے۔



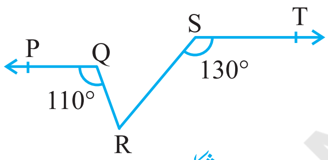
شکل 6.29



شکل 6.30

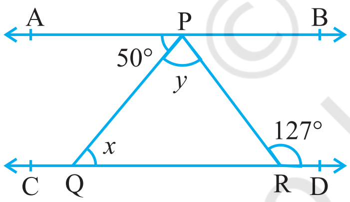
3. شکل 6.30 میں اگر $AB \parallel CD, EF \perp CD$ اور $\angle GED = 126^0$۔ تو $\angle AGE, \angle GEF$ اور $\angle FGE$ معلوم کیجیے۔

4. شکل 6.31 میں اگر $PQ \parallel ST, \angle PQR = 110^0$ اور $\angle RST = 130^0$ تو $\angle QRS$ معلوم کیجیے۔
[اشارہ: R سے گذرتا ہوا ایک خط ST کے متوازی کھینچیے]



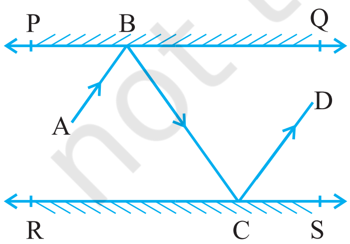
شکل 6.31

5. شکل 6.32 میں اگر $AB \parallel CD, \angle APQ = 50^0$ اور $\angle PRD = 127^0$ تو x اور y معلوم کیجیے۔



شکل 6.32

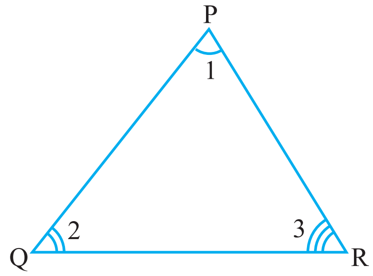
6. شکل 6.33 میں دو آئینہ PQ اور RS ایک دوسرے کے متوازی رکھے گئے ہیں ایک وقوع شعاع AB آئینہ PQ سے B, S اور پر ٹکراتی ہے اور منعکس شعاع BC کے راستے پر چلتی ہے اور RS آئینہ سے C پر ٹکراتی ہے اور دوبارہ منعکس ہو کر واپس CD پر آجاتی ہے ثابت کیجیے کہ $AB \parallel CD$



شکل 6.33

6.7 مثلث کے زاویوں کی جمعی خصوصیت (Angle Sum Property of a Triangle)

پچھلی کلاسوں میں آپ نے عملی کاموں کے ذریعہ یہ پڑھا ہوگا کہ مثلث کے تینوں زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہوتا ہے ہم اس بیان کو متوازی خطوط سے متعلق مسئلہ اور بدیہیوں کا استعمال کر ثابت کر سکتے ہیں۔

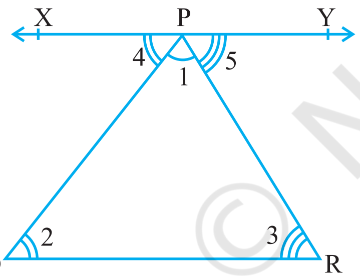


شکل 6.34

مسئلہ 6.7: مثلث کے زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہوتا ہے۔

ثبوت: آیئے دیکھتے ہیں کہ اوپر بیان میں کیا دیا گیا ہے یعنی مفروضہ اور ہمیں کیا ثابت کرنا ہے ہمیں ایک مثلث PQR دیا ہے۔ $\angle 1$ ، $\angle 2$ اور $\angle 3$ ΔPQR کے زاویہ ہیں [شکل 6.34 دیکھیے]

ہمیں ثابت کرنا ہے $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$ مخالف راس P سے گزرتا ہوا اور خط QR کے متوازی خط XPY بتایئے جیسا کہ شکل 6.35 میں دکھایا گیا تا کہ ہم متوازی خطوط سے متعلق خصوصیات کا استعمال کر سکیں۔



شکل 6.35

اب XPY ایک خط ہے۔

اس لئے $\angle 4 + \angle 1 + \angle 5 = 180^0$

لیکن $XPY \parallel QR$ اور PQ, PR قاطع ہیں۔

اس لئے $\angle 2 = \angle 4$ اور $\angle 3 = \angle 5$ (متبادل زاویوں کے جوڑے)

$\angle 4$ اور $\angle 5$ کو (1) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا

$$\angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = 180^0$$

یعنی

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$$

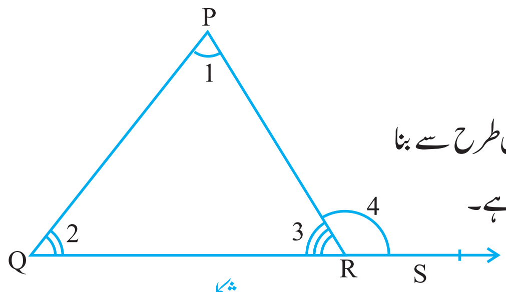
یاد کیجیے آپ نے پچھلی جماعتوں میں مثلث کے خارجی زاویہ کی بناوٹ کے بارے میں پڑھا (شکل 6.36 دیکھیے)۔ ضلع QR کو نقطہ S تک بڑھایا گیا ہے $\angle PRS$ سے مثلث ΔPQR کا خارجی زاویہ کہلاتا ہے۔

کیا $\angle 3 + \angle 4 = 180^0$ (کیوں؟) (1)

اور دیکھیے کہ $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$ (کیوں؟) (2)

(1) اور (2) سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$

اس نتیجہ کو ہم مندرجہ ذیل مسئلہ کی شکل میں بیان کرتے ہیں۔

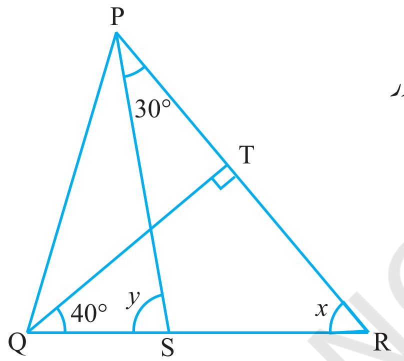


شکل 6.36

مسئلہ 6.8: اگر مثلث کے کسی ایک ضلع کو بڑھایا جائے تو اس طرح سے بنا خارجی زاویہ مخالف داخلی زاویوں کے حاصل جمع کے برابر ہوتا ہے۔

اوپر دیئے گئے مسئلہ سے یہ بات بالکل واضح ہے کہ مثلث کا خارجی زاویہ اس کے مخالف داخلی زاویوں میں ہر ایک سے بڑا ہوتا ہے۔

اوپر دیئے گئے مسئلوں سے اب ہم کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔



شکل 6.37

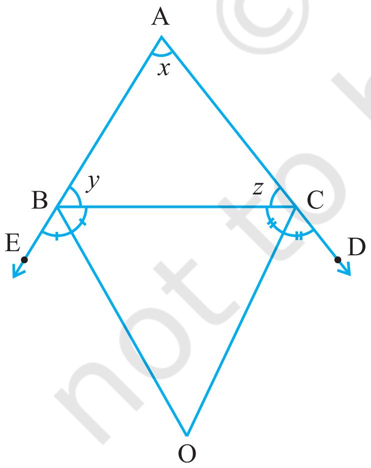
مثال 7: شکل 6.37 میں اگر $QT \perp PR, \angle TQR = 40^0$ اور $\angle SPR = 30^0$ تو x اور y معلوم کیجیے۔

حل: ΔTQR میں $90^0 + 40^0 + x = 180^0$ (مثلث کے زاویوں کی جمعی خصوصیت)

اس لئے $x = 50^0$

اب $y = \angle SPR + x$ (مسئلہ 6.8)

اس لئے $y = 30^0 + 50^0 = 80^0$



شکل 6.38

مثال 8: شکل 6.38 میں ΔABC کے اضلاع AB اور AC کو بالترتیب نقطوں E اور D تک بڑھایا گیا ہے اگر $\angle CBE$ اور $\angle BCD$ کے ناصف BO اور CO بالترتیب نقطہ O, پر ملتے ہیں تو ثابت کیجیے کہ

$$\angle BOC = 90^0 - \frac{1}{2}\angle BAC$$

حل: شعاع BO، $\angle CBE$ کا ناصف ہے

اس لئے $\angle CBO = \frac{1}{2}\angle CBE$

$= \frac{1}{2}(180^0 - y$

$$= 90^0 - \frac{y}{2}$$

اسی طرح سے شعاع CO، $\angle BCD$ کا ناصف ہے

اس لئے $\angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCD$

$$= \frac{1}{2}(180^0 - z)$$

$$= 90^0 - \frac{z}{2}$$

ΔBOC میں $\angle CBO + \angle BCO + \angle BOC = 180^0$

(1) اور (2) کو (3) میں رکھنے پر ہم پاتے ہیں۔

$$\angle BOC + 90^0 \frac{z}{2} + 90^0 - \frac{y}{2} = 180^0 \qquad (3)$$

اس لئے $\angle BOC = \frac{z}{2} + \frac{y}{2}$

یا $\angle BOC = \frac{1}{2}(y + z) \qquad (4)$

لیکن $x + y + z = 180^0$ (مثلث کے زاویوں کی جمعی خصوصیت)

اس لئے $y + z = 180^0 - x$

اس لئے (4) بن جاتی ہے

$$\angle BOC = \frac{1}{2}(180^0 - x)$$

$$= 90^0 - \frac{x}{2}$$

$$= 90^0 - \frac{1}{2}\angle BAC$$

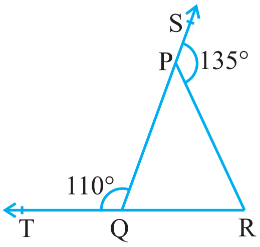
مشق 6.3

1. شکل 6.39 میں ΔPQR کے اضلاع QP اور RQ بالترتیب نقطوں S اور T تک بڑھائے گئے ہیں اگر

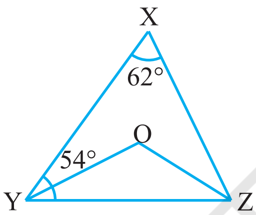
$\angle SPR = 135^0$ اور $\angle PQT = 110^0$ تو $\angle PRQ$ معلوم کیجیے۔

2. شکل 6.40 میں $\angle X = 62^0, \angle XYZ = 54^0$ ہے اگر YO اور ZO بالترتیب $\angle XYZ$ کے اور $\angle XZY$ کے ناصف ہیں تو $\angle OZY$ اور $\angle YOZ$ معلوم کیجیے:

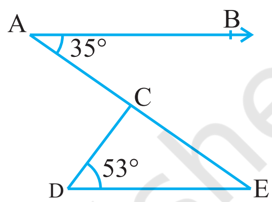
3. شکل 6.41 میں اگر $AB \parallel DE$، $\angle BAC = 35^0$ اور $\angle CDE = 53^0$ تو $\angle DCE$ معلوم کیجیے۔



شکل 6.39



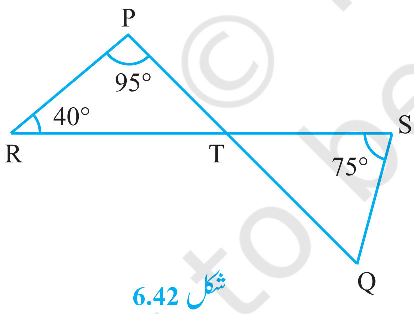
شکل 6.40



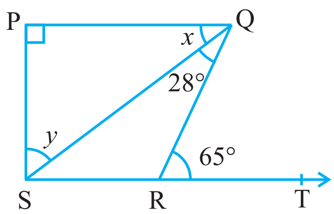
شکل 6.41

4. شکل 6.42 میں اگر خطوط PQ اور RS نقطہ T پر قطع کرتے ہیں جبکہ $\angle PRT = 40^0, \angle RPT = 95^0$ اور $\angle TSQ = 75^0$ تو $\angle SQT$ معلوم کیجیے:

5. شکل 6.43 میں اگر $PQ \perp PS, PQ \perp SR, \angle SQR = 28^0$ اور $\angle QRT = 65^0$ ہے تو x اور y کی قیمت معلوم کیجیے

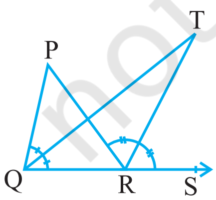


شکل 6.42



شکل 6.43

6. شکل 6.44 میں ΔPQR کے ضلع QR کو نقطہ S تک بڑھایا گیا ہے، اگر $\angle PQR$ اور $\angle PRS$ کے ناصف نقطہ T پر ملتے ہیں تو ثابت کیجیے $\angle RPT = \frac{1}{2}\angle QPR$



شکل 6.44

6.8 خلاصہ (Summary)

اس سبق میں آپ نے مندرجہ ذیل نقاط پڑھیں

1. اگر کوئی شعاع ایک خط پر کھڑی ہو تو اس سے بنے متصل زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہوتا ہے۔ اسی طرح سے اس کا معکوس بھی درست ہے اس خصوصیت کو خطی جوڑے کا بدیہیہ کہتے ہیں۔
2. جب دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تب بالمقابل زاویہ مساوی ہوتے ہیں۔
3. جب کوئی قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہے تب
   (i) نظیری زاویوں کا ہر ایک جوڑا مساوی ہوتا ہے۔
   (ii) متبادل داخلی زاویوں کا ہر ایک جوڑا مساوی ہوتا ہے
   (iii) قاطع کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویوں کا ہر ایک جوڑا تکمیلی ہوتا ہے
4. جب کوئی قاطع دو خطوط کو اس طرح قطع کرتے ہیں
   (i) نظیری زاویوں کا کوئی ایک جوڑا مساوی ہو یا
   (ii) متبادل داخلی زاویوں کا کوئی ایک جوڑا مساوی ہو یا
   (iii) قاطع کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویوں کا کوئی ایک جوڑا تکمیلی ہو تو خطوط متوازی ہونگے
5. خطوط جو دیئے ہوئے کسی خط کے متوازی ہوں تو وہ آپس میں بھی متوازی ہونگے۔
6. مثلث کے تینوں زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہوتا ہے
7. اگر مثلث کے کسی ضلع کو بڑھا دیا جائے تو اسطرح سے بنا خارجی زاویہ مخالف داخلی زاویوں کے حاصل جمع کے برابر ہوتا ہے۔