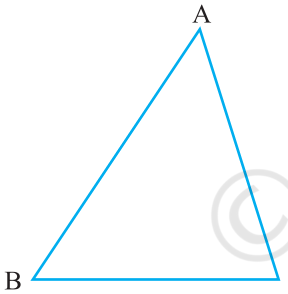
4915CH07

باب 7

مثلثیں (TRIANGLES)

7.1 تعارف: (Introduction)

آپ پچھلی کلاسوں میں مثلث اور اس کی بہت سی خصوصیات کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ تین قاطع خطوط سے بنی شکل کو مثلث کہتے ہیں ایک مثلث میں 3 اضلاع 3 زاویہ اور 3 راس ہوتے ہیں مثال کے طور پر مثلث ABC کو ΔABC سے ظاہر کرتے ہیں۔(شکل 7.1 دیکھیے) AB، BC، CA مثلث کے 3 اضلاع $\angle A$ ، $\angle B$ اور $\angle C$ زاویہ اور A ,B اور C، 3 راس میں پہلے باب 6 میں آپ نے مثلثوں کی کچھ خصوصیات کے بارے میں پڑھا ہے اس باب میں آپ تفصیل کے ساتھ مثلثوں کی متماثلت C اصولوں کے مثلثوں کی کچھ اور خصوصیات اور مثلث میں مساوات کے بارے میں پڑھیں گے۔ ان میں سے بہت سی خصوصیات کی تصدیق آپ پہلے ہی پچھلی کلاسوں میں کر چکے ہیں ہم ان میں کچھ کو اب ثابت کریں گے۔



شکل 7.1

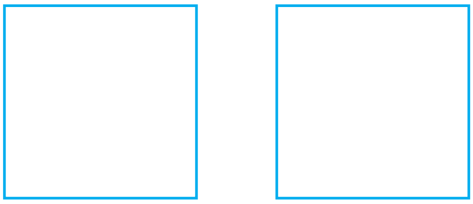
7.2 مثلثوں کی متماثلت (Congruence of Triangles)

آپ نے مشاہدہ کیا ہوگا کہ آپ کے فوٹوگراف کی یکساں سائز کی دو کاپیاں بالکل ایک سی ہوتی ہیں اسی طرح سے ایک ہی سائز کی دو چوڑیاں، ایک بینک کے ذریعہ دیئے گئے ATM کارڈ ایک ہی شکل کے ہوتے ہیں آپ ایک ہی سال میں نکالے گئے ایک روپیہ کے سکہ کو ایک دوسرے پر رکھا جائے تو وہ دونوں ایک دوسرے کو پوری طرح ڈھک لیتے ہیں۔

کیا آپ کو یاد ہے کہ ایسی اشکال کیا کہلاتی ہیں؟ یقیناً یہ متماثل اشکال کہلاتی ہیں۔ (متماثل کے معنی میں ہر طرح سے برابر

یعنی شکل میں سائز میں دونوں یکساں)

اب آپ ایک ہی نصف قطر کے دو دائرہ بنایئے اور ایک کو دوسرے پر رکھیے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ وہ دونوں ایک دوسرے کو پوری طرح ڈھک لیتے ہیں ہم انکو متماثل دائرہ کہتے ہیں۔ ایک ہی پیمائش والے ایک ضلاع والے دو مساوی ضلعی مثلثوں کو ایک دوسرے مربع کو دوسرے مربع پر رکھ کر اس عمل کو دہرایئے (شکل 7.2 دیکھیے) یا مساوی اضلاع والے دو مساوی مثلثوں کو ایک دوسرے پر رکھیئے آپ مشاہدہ کرتے ہیں کہ مربع بھی ایک دوسرے کے متماثل ہیں اور مساوی ضلعی مثلث بھی۔



شکل 7.2

آپ کو حیرت ہو رہی ہوگی کہ ہم متماثلت کیوں پڑھ رہے ہیں۔ آپ سب نے اپنے فریج میں برف کی ٹرے ضرور دیکھی ہونگی۔ مشاہدہ کیجیے کہ برف کے سارے ٹکڑے جو اس ٹرے سے نکلتے ہیں متماثل ہوتے ہیں۔ ٹرے میں برف کو ڈھالنے والے خانہ بھی متماثل ہوتے ہیں (سارے مستطیل یا سارے مثلث نما یا دائرہ نما) اس لیے جب بھی یکساں چیزوں کو بنایا جاتا ہے اس کو بنانے کے لیے متماثلت کے تصور کا استعمال کرتے ہیں۔

کبھی کبھی آپ کو اپنے پین کے ریفل کو نئے ریفل سے بدلنا مشکل ہوتا ہے یہ اس لیے ہوتا ہے کہ نیا ریفل اس سائز کی نہیں ہوتا جس کو آپ بدلنا چاہتے ہیں۔ ظاہر ہے اگر دونوں ریفل یکساں ہوں یا متشاکل ہوں تو نیا ریفل پین میں فٹ آئے گا۔

اس طرح سے آپ کو بہت سی ایسی مثالیں مل سکتی ہیں۔ جہاں متماثل اشیاء کا استعمال روزمرہ زندگی میں ہوتا ہے۔

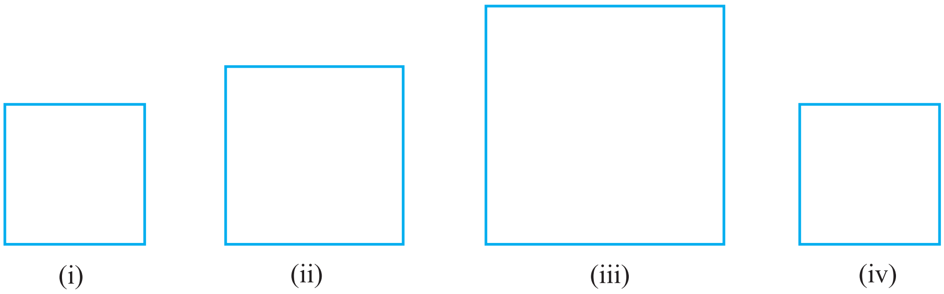
کیا آپ متماثل اشکال کی کچھ اور مثالوں کے بارے میں سوچ سکتے ہیں؟

اب مندرجہ ذیل میں کونسی اشکال مربع کے متماثل نہیں ہیں۔

شکل 7.3(ii) اور (iii) میں بڑے مربع بے شک شکل 7.3(i) میں دیئے گئے مربع کے متماثل ہیں لیکن شکل (iv) 7.3 میں دیا گیا مربع شکل 7.3(i) میں دیئے گئے مربع کے متماثل ہے۔

آیئے اب ہم دو مثلثوں کی متماثلت بارے میں بات کرتے ہیں۔

آپ پہلے ہی جانتے ہیں کہ دو مثلث متماثل ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کے اضلاع اور زاویہ دوسرے مثلث کے نظیری اضلاع اور زاویہ کے برابر ہوں۔



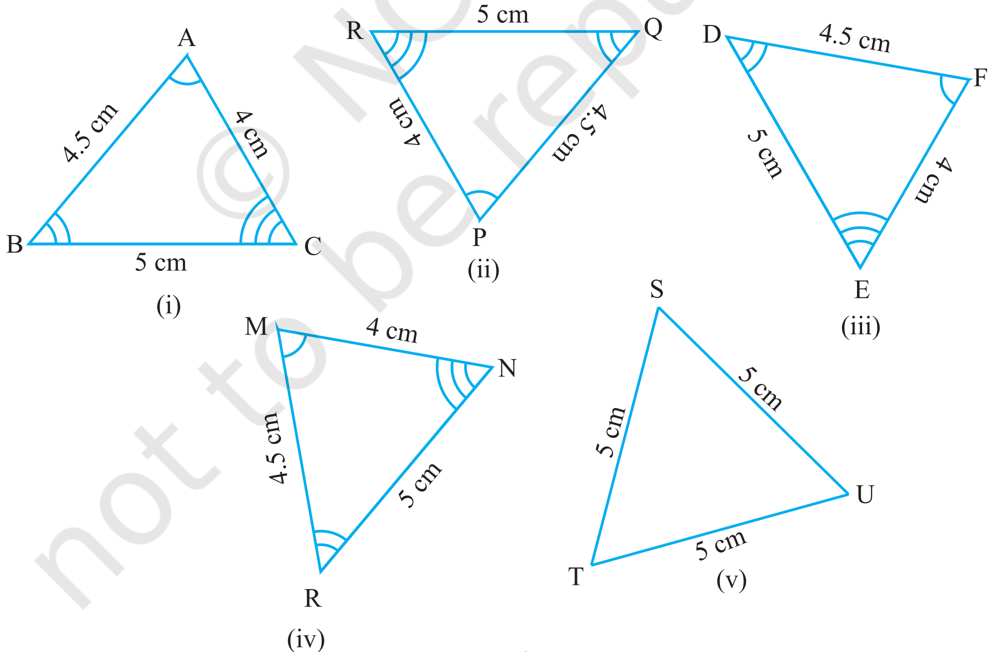
شکل 7.3

اب نیچے دیئے گئے مثلثوں میں سے کون سے مثلث شکل 7.4(i) کے ΔABC کے متماثل ہے۔

شکل 7.4(ii) سے (v) تک تمام مثلثوں کو کاٹ کر نکال لیجیے۔ اور پھر ان کو ایک ایک کر کے مثلث ΔABC پر رکھیے۔

آپ مشاہدہ کرتے ہیں کہ شکل 7.4 کے (ii)، (iii) اور (iv) ΔABC کی متماثل ہیں۔ جب کہ شکل 7.4(v)، ΔSTU ، ΔABC کے متماثل نہیں ہے۔

اگر ΔPQR ، ΔABC کے متماثل ہوتا ہے تو ہم اس کو اس طرح لکھتے ہیں۔ $\Delta PQR \cong \Delta ABC$



شکل 7.4

نوٹ کیجیے کہ جب $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ تب ΔPQR کے اضلاع ΔABC کے نظیری مساوی اضلاع پر گرتے ہیں ایسا ہی زاویوں کے ساتھ بھی ہوتا ہے۔

یعنی PQ، AB کو QR، BC کو اور RP، CA کو ڈھکتا ہے۔ $\angle P$ ؛ $\angle A$ کو، $\angle Q$ ، $\angle B$ کو اور $\angle R$ ، $\angle C$ کو ڈھکتا ہے۔ ان کے راسوں میں بھی ایک ایک مماثلت ہے۔ یعنی P کی مطابقت A سے Q کی B سے اور R کی C سے ہے۔ اس کو ہم اس طرح $P \leftrightarrow A, Q \leftrightarrow B, R \leftrightarrow C$ لکھتے ہیں۔

نوٹ کیجیے اس مطابقت کے تحت $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ لیکن یہ لکھنا صحیح نہیں ہوگا کہ $\Delta QRP \cong \Delta ABC$ ۔

اس طرح سے شکل 7.4(iii) میں۔

$FD \leftrightarrow AB, DE \leftrightarrow BC$ اور $EF \leftrightarrow CA$

اور $F \leftrightarrow A, D \leftrightarrow B$ اور $E \leftrightarrow C$

اس لیے $\Delta FDE \cong \Delta ABC$ لیکن $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ لکھنا ٹھیک نہیں ہے۔

شکل 7.4(vi) کے مثلثوں اور ΔABC کے درمیان مطابقت لکھیے۔

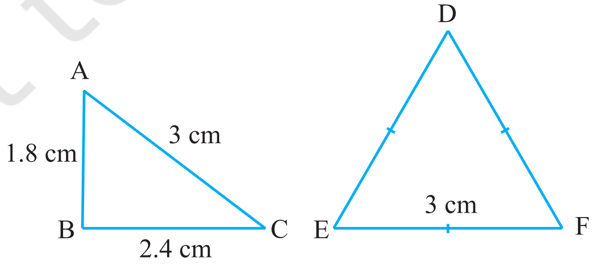
مثلثوں کی مماثلت کو علامتی شکل میں لکھنے کے لیے ضروری ہے کہ اس کے راسوں کی مطابقت کو صحیح لکھیں۔

نوٹ کیجیے متماثل مثلثوں کے نظیری حصہ مساوی ہوتے ہیں اور ہم مختصر CPCT لکھتے ہیں جس کا مطلب ہے متماثل مثلثوں کے نظیری حصہ۔

7.3 مثلثوں کی متماثلت کے اصول (Criteria for Congruence of Triangles)

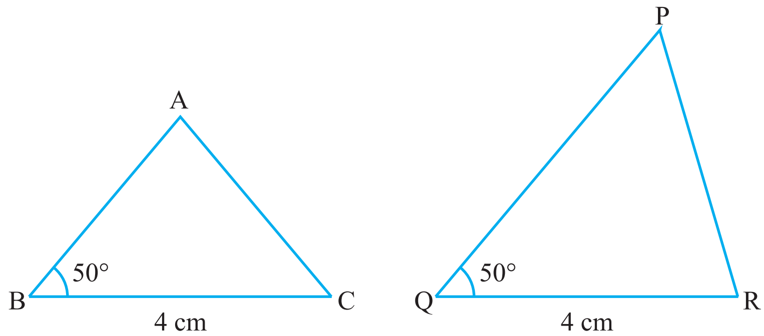
پچھلی کلاسوں میں آپ نے متماثل مثلثوں کے اصولوں کے بارے میں پڑھا تھا آیئے ان کو دہراتے ہیں۔

دو مثلث بنایئے جن کا ایک ضلع 3 سینٹی میٹر کا ہے۔ کیا یہ مثلث متماثل ہیں؟ مشاہدہ کیجیے کہ یہ متماثل نہیں ہے۔ (شکل 7.5 دیکھیے)



شکل 7.5

اب دوایسے مثلث بنایئے جن کا ایک ضلع 4 سم اور ایک زاویہ 50 کا ہو (شکل 7.6 دیکھیے) کیا یہ متماثل ہیں؟



شکل 7.6

ہم دیکھتے ہیں کہ یہ دو مثلث متماثل نہیں ہیں۔

اس مشغلہ کو مثلثوں کے دوسرے جوڑوں کے لیے دہرائیے۔

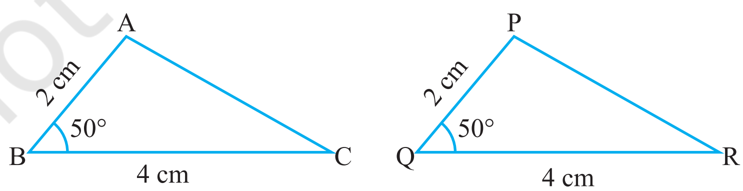
اس سے پتہ چلتا ہے کہ اضلاع کے ایک جوڑے یا اضلاع کے ایک جوڑے اور دو زاویوں کے ایک جوڑے کا برابر ہونا مثلث کے متماثل ہونے کے لیے کافی ہیں۔

کیا ہوا گر مساوی زاویوں کے دوسرے بازو (اضلاع بھی مساوی ہوں؟

شکل 7.7 میں $\angle B = \angle Q, BC = QR$ اور $AB = PQ$ ہیں ΔABC اور ΔPQR کی متماثلت کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں۔

سابقہ معلومات سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ اس حالت میں دونوں مثلث متماثل ہونگے۔ ΔABC اور ΔPQR کے لیے اس بات کی تصدیق کیجیے۔

اس مشغلہ کو دوسرے مثلثوں کے جوڑے کے لیے دہرایئے کیا آپ مشاہدہ کرتے ہیں کہ دو ضلع اور ان کے درمیان کے زاویہ کا مساوی ہونا مثلثوں کی متماثلت کے لیے کافی ہے۔؟ ہاں یہ کافی ہے۔



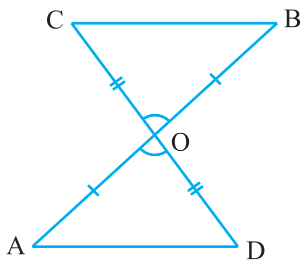
شکل 7.7

یہ متماثلت کا پہلا اصول ہے۔

بدیہیہ 7.1: (SAS متماثلت کا اصول) دو مثلث متماثل ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کے دو ضلع اور ان کے درمیان کا زاویہ اور دوسرے **مثلث** کے نظیری ضلع اور درمیانی زاویہ کے برابر ہو۔

اس نتیجہ کو پچھلے ثابت کیے گئے نتائج کی مدد سے ثابت نہیں کیا جاسکتا اس لیے اسکو بدیہہ کے طور پر صحیح قبول کیا جاتا ہے۔ (ضمیمہ-1 دیکھیے)

آیئے اب کچھ مثالیں حل کرتے ہیں۔



شکل 7.8

مثال 1: شکل 7.8 میں $OA = OB$ اور $OD = OC$ دکھایئے کہ

(i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ اور $AD \parallel BC$

حل: آپ مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ ΔAOD اور ΔBOC میں

$OA = OB$ اور $OD = OC$ (دیا ہوا ہے)

مزید کیوں کہ $\angle AOD$ اور $\angle BOC$ سے بالمقابل زاویہ ہیں۔ اس لیے $\angle AOD = \angle BOC$

اس لیے $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (SAS متماثلت کا اصول)

(ii) متماثل مثلثوں AOD اور BOC میں دوسرے نظیری حصہ بھی برابر ہوتے ہیں اس لئے $\angle OAD = \angle OBC$

اور یہ قطعات خط AD اور BC کے لئے متبادل زاویوں کے جوڑے ہیں۔

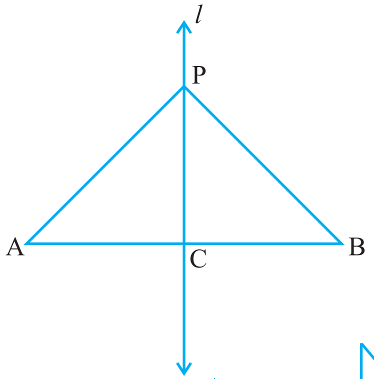
اس لیے $AD \parallel BC$

مثال 2: AB ایک قطعہ خط ہے اور l اس کا عمودی ناصف ہے۔ اگر کوئی نقطہ p، l پر واقع ہے تو دکھایئے کہ P، A اور B سے برابر فاصلہ پر ہے۔

حل: خط $AB \perp l$ اور C سے گزرتا ہے جو کہ AB کا وسطی نقطہ ہے۔ (شکل 7.9) آپ کو دکھانا ہے کہ $PA = PB$، ΔPCA اور ΔPCB پر غور کیجیے۔

ہمارے پاس ہے $AC = BC$ (C، AB کا وسطی نقطہ ہے)

$\angle PCA = \angle PCB = 90^0$ (دیا ہوا ہے)



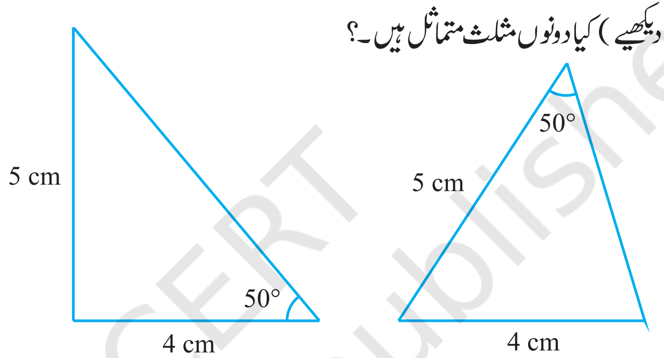
شکل 7.9

اس لیے $PC = PC$ (مشترک)

اس لیے $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (SAS متماثلت)

اس لیے $PA = PB$ کیونکہ یہ متماثل مثلث کے نظیری اضلاع ہیں۔

آیئے اب دو مثلث ایسے بناتے ہیں جن کے اضلاع 4cm اور 5cm ہیں اور ایک زاویہ 50^0 جو مساوی اضلاع کے درمیان نہیں ہے (شکل 7.10 دیکھیے) کیا دونوں مثلث متماثل ہیں۔؟



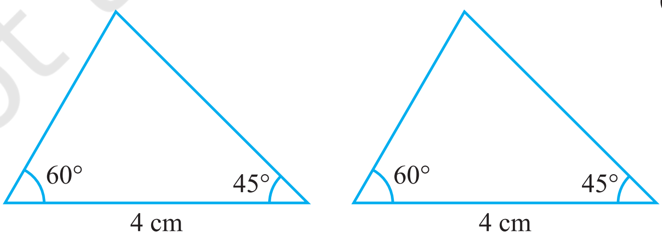
شکل 7.10

نوٹ کیجیے کہ دونوں مثلث متماثل نہیں ہیں۔

اس سرگرمی کو مثلثوں کے کچھ اور جوڑوں کے لیے دہرائیے۔ آپ مشاہدہ کرتے ہیں کہ مثلثوں کے متماثل ہونے کے لیے ضروری ہے کہ مساوی زاویہ مساوی ضلعوں کے درمیان ہوں۔

اس لیے SAS متماثلت اصول درست ہے لیکن ASS یا SSA درست نہیں۔

اب دو ایسے مثلث بنایئے جس میں دو زاویہ 60^0 اور 45^0 ہوں اور ان کے درمیان کا ضلع 4cm ہے (شکل 7.10 دیکھیے)



شکل 7.11

ان مثلثوں کو کاٹ کر نکالیے اور ایک مثلث کو دوسرے مثلث پر رکھیے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ آپ دیکھتے ہیں کہ ایک مثلث دوسرے کو پوری طرح ڈھک لیتا ہے، یعنی دونوں مثلث متماثل ہیں۔ اس مشغلہ کو کچھ اور مثلثوں کے لیے دہرائیے۔ آپ مشاہدہ کریں گے کہ دو زاویہ اور ان کے درمیان کے ضلع کا برابر ہونا مثلثوں کے لیے کافی ہے۔

اس نتیجہ کو ہم زاویہ۔ضلع۔زاویہ ASA متماثلت کا اصول کہتے ہیں۔ اس کو ASA کا اصول لکھتے ہیں۔ اپنے آپ نے پچھلی کلاسوں میں اس اصول کی تصدیق کی ہوگی۔ آیئے اس اصول کو بیان اور ثابت کرتے ہیں۔

کیونکہ اس نتیجہ کو ثابت کیا جا سکتا ہے۔ اس لیے یہ مسئلہ کہلاتا ہے۔ اور اس کو ثابت کرنے کے لیے ہم SAS بدیہہ کا استعمال کرتے ہیں۔

مسئلہ 7.1: (ASA متماثلت اصول): دو مثلث متماثل ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کے دو زاویہ اور ان کے درمیان کا ضلع دوسرے مثلث کے دو زاویہ اور درمیانی ضلع کے برابر ہو۔

ثبوت: ہمیں دو مثلث ΔABC اور ΔDEF دیئے ہوئے ہیں۔ جس میں

$$\angle B = \angle E, \angle C = \angle F$$

اور $BC = EF$

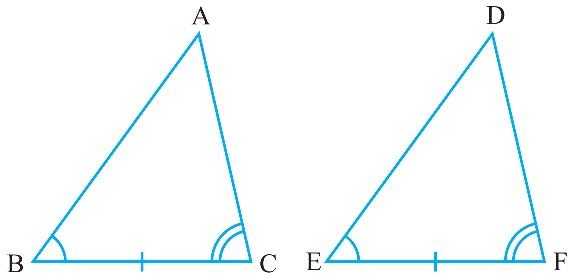
ہمیں ثابت کرنا ہے $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

دو مثلثوں کو متماثل ثابت کرنے کے لیے تین باتیں/حالتیں سامنے آتی ہیں۔

حالت (i) مان لیجیے۔ $AB = DE$ (شکل 7.12 دیکھیے)

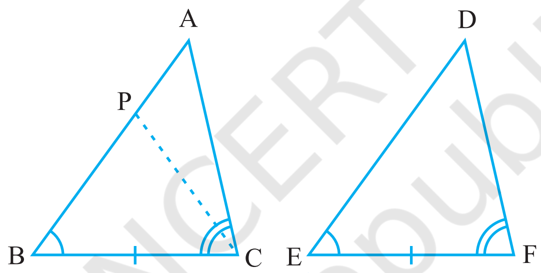
اب آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ آپ مشاہدہ کرتے ہیں کہ

$AB = DE$	(مانا گیا ہے)
$\angle B = \angle E$	(دیا ہوا ہے)
$BC = EF$	(دیا ہوا ہے)
اس لیے $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	(SAS اصول)



شکل 7.12

حالت ii: مان لیجیے اگر ممکن ہو $AB > DE$، اس لیے AB پر نقطہ P اس طرح لے سکتے ہیں کہ $PB = DE$۔ اب ΔPBC اور ΔDEF پر غور کیجیے (شکل 7.13 دیکھیے)



شکل 7.13

مشاہدہ کیجیے کہ ΔPBC اور ΔDEF میں

$PB = DE$	(بناوٹ سے)
$\angle E = \angle E$	(دیا ہوا ہے)
$BC = EF$	(دیا ہوا ہے)

اس لیے ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ

$\Delta PBC \cong \Delta DEF$ (متماثلت کا SAS اصول)

کیونکہ مثلث متماثل ہیں اس لیے ان کے نظیری حصہ بھی مساوی ہونگے۔

اس لیے $\angle PCB = \angle DEF$ بذریعہ SAS

لیکن ہمیں دیا ہوا ہے $\angle ACB = \angle DEF$

اس لیے $\angle ACB = \angle PCB$

لیکن کیا یہ ممکن ہے؟

یہ ممکن ہے اگر P اور A پر منطبق ہو یا $BA = ED$

اس لیے $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS اصول سے)

حالت (iii) اگر $AB < DE$ ، ہم DE پر نقطہ M اس طرح چنتے ہیں کہ $AB = ME$ اور حالت (ii) میں دیئے گئے دلائل کو دہراتے ہوئے ہم نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ AB=DE اور اس لیے $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

فرض کیجیے اب دو مثلثوں میں زاویوں کے دو جوڑے اور نظیری ضلعوں کا ایک جوڑا برابر ہے لیکن ضلع نظیری مساوی زاویوں کے درمیان نہیں ہے۔ کیا مثلث اب بھی متماثل ہیں؟ آپ دیکھیں گے کہ یہ متماثل ہیں کیا آپ وجہ بتا سکتے ہیں کہ کیوں؟

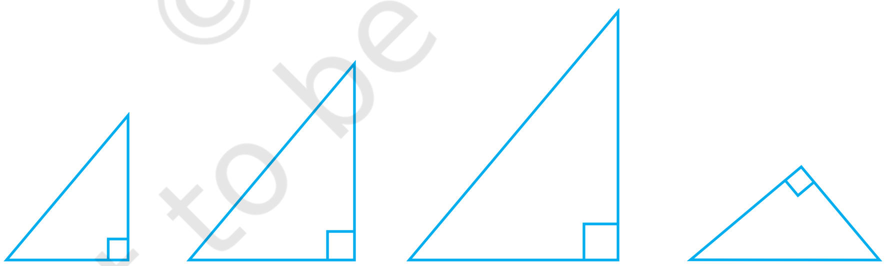
آپ جانتے ہیں کہ مثلث کے تینوں زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہوتا ہے۔ اس لیے اگر زاویوں کے دو جوڑے مساوی ہیں تو تیسرا بھی مساوی ہوگا۔ (مساوی زاویوں کا حاصل جمع - 180^0)

اس لیے دو مثلث متماثل ہوتے ہیں اگر کوئی زاویوں کے دو جوڑے اور نظیری ضلعوں کا ایک جوڑا مساوی ہوں۔ ہم اس کو AAS متماثلت اصول کہتے ہیں۔

اس لیے اب مندرجہ ذیل سرگرمی کرتے ہیں

40^0 ، 50^0 اور 90^0 زاویوں کے مثلث بنایئے۔ ایسے کتنے مثلث آپ بنا سکتے ہیں۔؟

درحقیقت مختلف لمبائیوں والے اضلاع کے ایسے بہت سے مثلث بنائے جا سکتے ہیں۔ (شکل 7.14 دیکھیے)



شکل 7.14

مشاہدہ کیجیے کہ یہ مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہو بھی سکتے ہیں اور نہیں بھی۔

اس لیے تینوں زاویوں کا مساوی ہونا مثلثوں کی متماثلت کے لیے کافی نہیں ہے۔ اس لیے مثلثوں کی متماثلت کے لیے تین مساوی حصوں میں سے ایک ضلع ہونا ضروری ہے اس لیے اب کچھ اور مثالیں لیتے ہیں۔

مثال 3: قطع خط AB ایک دوسرے قطع خط CD کے متوازی ہے، O، AD کا وسطی نقطہ ہے۔ (شکل 7.15 دیکھیے) دکھایئے کہ (i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) O، BC کا بھی وسطی نقطہ ہے۔

حل: (i) ΔAOB اور ΔDOC پر غور کیجیے۔

$\angle ABO = \angle DCO$ (متبادل زاویہ کیونکہ $AB \parallel CD$ اور BC قاطع ہے)

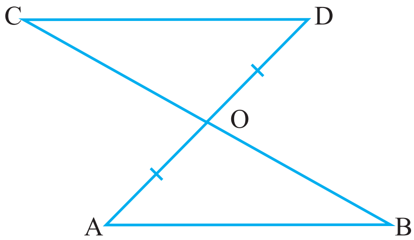
$\angle AOB = \angle DOC$ (بالمقابل زاویہ)

$OA = OD$ (دیا ہوا ہے)

اس لیے $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (AAS اصول)

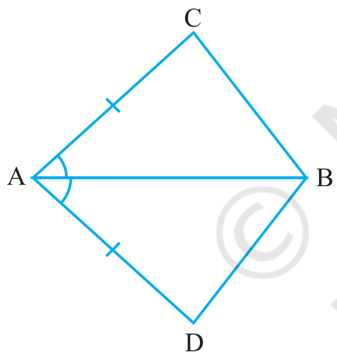
(ii) $OB = OC$ (CPCT)

اس لیے O؛ BC کا وسطی نقطہ ہے۔



شکل 7.15

مشق 7.1



شکل 7.16

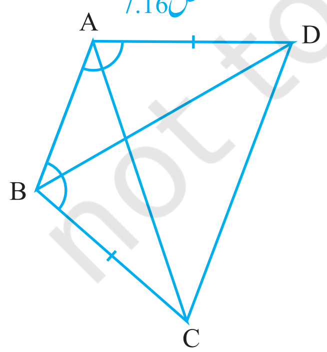
1. چار ضلعی ACBD میں $AC = AD$ اور AB، $\angle A$ کی تنصیف کرتا ہے (شکل 7.16 دیکھیے)۔ دکھایئے کہ $\Delta ABC \cong \Delta ABD$۔ BC اور BD کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں۔

2. ABCD ایک چار ضلعی ہے جس میں $AD = BC$ اور $\angle DAB = \angle CBA$ ہے (شکل 7.17 دیکھیے)۔ ثابت کیجیے کہ

(i) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$

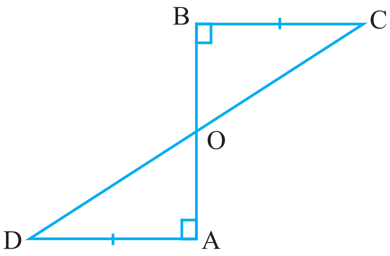
(ii) $BD = AC$

(iii) $\angle ABD = \angle BAC$



شکل 7.17

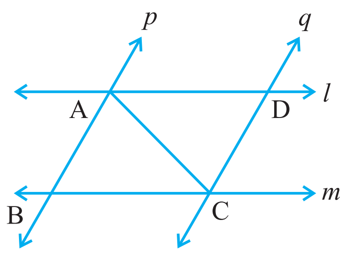
.3 AD اور BC ایک قطع خط AB کے مساوی عمود ہیں (شکل 7.18 دیکھیے) دکھائیے کہ CD، AB کی تصنیف کرتا ہے۔



شکل 7.18

.4 l اور m دو متوازی خطوط ہیں۔ جن کو دو متوازی خطوط p اور q قطع کرتے ہیں (شکل 7.19 دیکھیے) دکھائیے کہ

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$

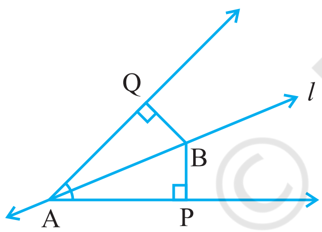


شکل 7.19

.5 خط l، $\angle A$ کا ناصف ہے اور B، l پر کوئی نقطہ ہے۔ BP اور BQ نقطہ B سے $\angle A$ کے بازؤں پر دو عمود ہیں۔ (شکل 7.20 دیکھیے) دکھائیے کہ:

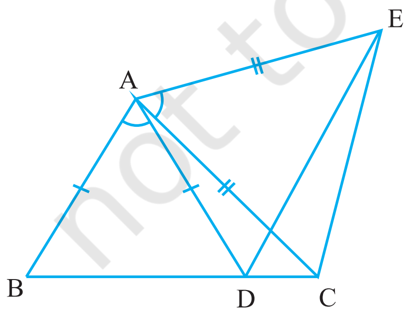
(i) $\Delta APB \cong \Delta AQB$

(ii) $BP = BQ$ یا B کے $\angle A$ کے بازؤں سے برابر کا فاصلہ پر ہے۔



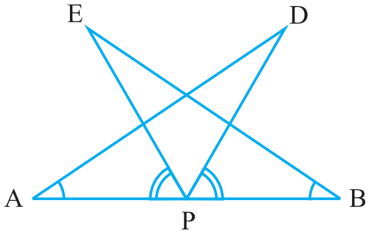
شکل 7.20

.6 شکل 7.21 میں $AC = AE$, $AB = AD$ اور $\angle BAD = \angle EAC$ دکھائیے کہ $BC = DE$



شکل :7.21

7. AB ایک قطع خط ہے اور P اسکا وسطی نقطہ D، اور E، AB کے ایک ہی طرف ایسے نقطے ہیں کہ $\angle BAD = \angle ABE$ اور $\angle EPA = \angle DPB$ ABE (شکل 7.22 دیکھئے) دکھائیے کہ:

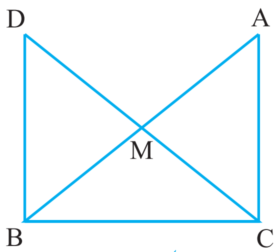


شکل 7.22

(i) $\Delta DAP \cong \Delta EBP$

(ii) $AD = BE$

8. ایک قائم زاوی مثلث ABC ہے $\angle C$ زاویہ قائمہ ہے۔
M وتر AB کا وسطی نقطہ ہے۔
C کو M سے ملایا جاتا ہے اور D تک اس طرح بڑھایا جاتا ہے۔
کہ $CM = DM$۔ نقطہ D کو نقطہ B سے ملایا جاتا ہے۔
(شکل 7.23 دیکھیے) دکھائیے کہ



شکل 7.23

(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

(ii) $\angle DBC$ ایک قائم زاویہ ہے۔

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACD$

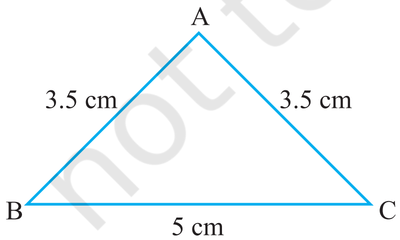
(iv) $CM = \frac{1}{2} AB$

7.4 مثلث کی کچھ خصوصیات (Some Properties of a Triangle)

اوپر دیئے گئے سیکشن میں آپ نے مثلثوں کی متماثلت کے دو اصول پڑھے۔ آیئے اب کا اطلاق ان مثلثوں سے متعلق خصوصیات کے مطالعہ کے لیے کریں جن کے دو اضلاع مساوی ہوں۔

مندرجہ ذیل سرگرمی انجام دیجیے

ایک مثلث بنایئے جس میں دو اضلاع مساوی ہوں مان لیجیے ہر ایک 3.5 سینٹی میٹر کا اور تیسرا ضلع 5 سینٹی میٹر کا ہے (شکل 7.24 دیکھیے) آپ ایسی بناوٹیں پچھلی کلاسوں میں کر چکے ہیں۔



شکل 7.24

کیا آپ کو یاد ہے کہ ایسے مثلث کیا کہلاتے ہیں۔

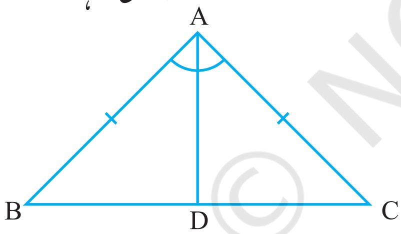
ایسے مثلث جس میں دو اضلاع مساوی ہوں مساوی الساقین کہلاتا ہے۔ اس لیے ΔABC (شکل 7.24 میں)
ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔ جس میں AB = AC
اب $\angle B$ اور $\angle C$ کی پیمائش کیجیے آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں۔
اس سرگرمی کو مختلف اضلاع والے دوسرے مساوی الساقین مثلث کے لیے دہرائیے۔
آپ مشاہدہ کرتے ہیں کہ ایسے ہر ایک مثلث میں مساوی ضلعوں کے سامنے کے زاویہ بھی مساوی ہیں۔
یہ ایک بہت اہم نتیجہ ہے۔ جو یقیناً تمام مساوی الساقین مثلث کے لیے درست ہے۔ اس کا ثبوت ہم مندرجہ ذیل میں پیش کرتے ہیں۔

مسئلہ 7.2: مساوی الساقین مثلث کے مساوی ضلعوں کے سامنے کے زاویہ بھی مساوی ہوتے ہیں۔

اس مسئلہ کو ہم کئی طریقوں سے ثابت کر سکتے ہیں۔ ایک ثبوت مندرجہ ذیل ہے۔

ثبوت: ہمیں ایک مساوی الساقین مثلث ABC دیا ہوا ہے۔ جس میں AB=AC ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $\angle B = \angle C$

آیئے $\angle A$ کا ناصف بناتے ہیں۔ اور مان لیجیے D، $\angle A$ کے ناصف اور BC کا نقطہ تقاطع ہے (شکل 7.25 دیکھیے)



شکل 7.25

ΔBAD اور ΔCAD

AB = AC (دیا ہوا ہے)

$\angle BAD = \angle CAD$ (بناوٹ سے)

AD = AD (مشترک)

اس لیے $\Delta BAD \cong \Delta CAD$ (SAS اصول)

اس لیے $\angle ABD = \angle ACD$ کیونکہ متماثل مثلثوں کے نظیری زاویہ ہیں۔

اس لیے $\angle B = \angle C$

کیا اس کا معکوس بھی درست ہے؟ یعنی اگر کسی مثلث کے دو زاویہ مساوی ہیں تو کیا ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ ان کے سامنے کے اضلاع بھی مساوی ہیں؟

مندرجہ ذیل عملی کام کیجیے:

کسی بھی لمبائی BC کا ایک مثلث ABC بنائیے جس میں $\angle B = \angle C = 50^0$ کا ناصف کھینچیے اور مان لیجیے کہ یہ BC کو D پر قطع کرتا ہے۔ (شکل 7.26)

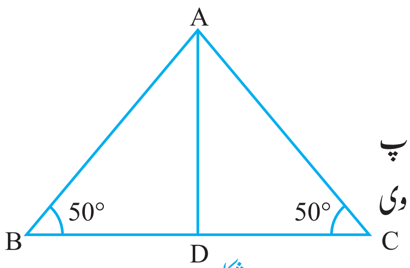
اس مثلث کو کاغذ کی شیٹ سے کاٹ لیجیے اور اس کو AD پر سے اس طرح موڑیئے کہ راس C اور راس B کو منطبق کرے۔

اضلاع AC اور AB کے بارے میں کیا خیال ہے۔؟

مشاہدہ کیجیے کہ AC، AB کو پوری طرح ڈھک لیتا ہے۔

اس لیے AC=AB

اس مشغلہ کو کچھ اور مثلثوں کے لیے دہرایئے۔ ہر ایک کے لیے آپ مشاہدہ کریں گے کہ مساوی زاویوں کے سامنے کے اضلاع بھی مساوی ہیں۔ اس لیے ہمارے پاس مندرجہ ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔



شکل 7.26

مسئلہ 7.3: مثلث کے مساوی زاویوں سامنے کے اضلاع بھی مساوی ہوتے ہیں۔

یہ مسئلہ 7.2 کا معکوس ہے۔

اس لیے اس مسئلہ کو آپ ASA متماثلت کے اصول کا استعمال کر ثابت کر سکتے ہیں۔

اس نتیجہ کو استعمال کرائیے اب کچھ مثالیں حل کرتے ہیں۔

مثال 4: ΔABC میں $\angle A$ کا ناصف AD ضلع BC پر عمود ہے۔ (شکل 7.27 دیکھیے) دکھایئے کہ AB = AC اور ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

حل: ΔABD اور ΔACD میں

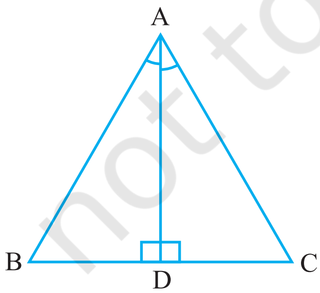
$\angle BAD = \angle CAD$ (دیا ہوا ہے)

AD=AD (مشترک)

$\angle ADB = \angle ADC = 90^0$ (دیا ہوا ہے)

اس لیے $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ASA اصول)

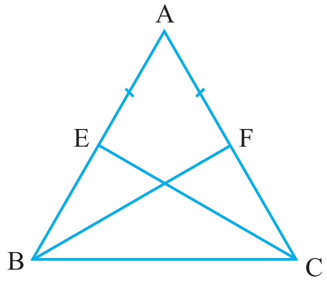
اس لیے AB=AC (CPCT)



شکل 7.27

یا ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

مثال 5: E اور F بالترتیب ΔABC کے مساوی اضلاع AC اور ABC کے وسطی نقطے ہیں۔ (شکل 7.28 دیکھیے) دکھائیے کہ $BF = CE$



شکل 7.28

حل: ΔABF اور ΔACE میں $AB = AC$ (دیا ہوا ہے)

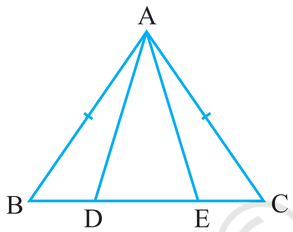
$\angle A = \angle A$ مشترک

$AF = AE$ (مساوی الاضلاع کے نصف)

اس لیے $\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (SAS اصول)

اس لیے $BF=CE$ (CPCT)

مثال 6: ایک مساوی الساقین مثلث ABC جس میں $AB = AC$، D اور E، BC پر ایسے نقطے ہیں کہ $BE=CD$ (شکل 7.29 دیکھئیے) دکھائیے کہ $AD= AE$



شکل 7.29

حل: ΔABD اور ΔACE میں

$AB=AC$ دیا ہوا ہے۔ (1)

$\angle B = \angle C$ (مساوی ضلعوں کے سامنے کے زاویہ) (2)

اس لیے $BE- DE= CD- DE$

یعنی $BD= CE$ (3)

اس لیے $\Delta ABD \cong \Delta ACE$ (1)، (2)، (3) اور SAS اصول کا استعمال کرنے پر)

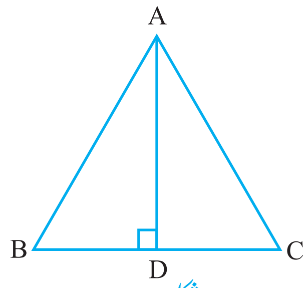
اس سے ہمیں ملتا ہے $AD= AE$ (CPCT)

مشق 7.2

1. ایک مساوی الساقین مثلث ABC میں $AB = AC$، $\angle B$ اور $\angle C$ کے ناصف ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔ A کو O سے ملائیے۔ دکھائیے۔

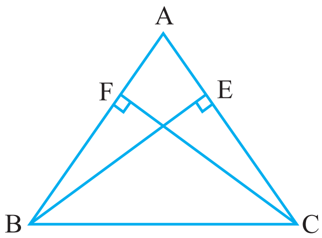
(i) $OB = OC$ (ii) AO، $\angle A$ کی تنصیف کرتا ہے۔

2. ΔABC میں AD، ضلع BC کا عمودی ناصف ہے۔ (شکل 7.30 دیکھئیے) دکھایئے کہ ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں $AB=AC$



شکل 7.30

3. ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔ جس میں ارتفاعات (altitudes) BE اور CF بالترتیب اضلاع AC اور AB پر کھینچے گئے ہیں (شکل 7.31 دیکھئے) دکھایئے کہ یہ ارتفاعات مساوی ہیں۔

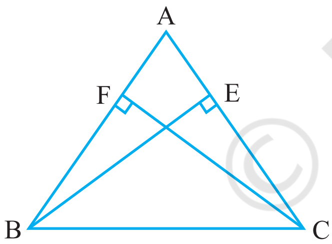


شکل 7.31

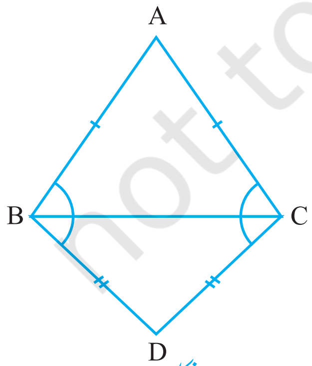
4. ABC ایک مثلث ہے جس میں اضلاع AC اور AB کے ارتفاعات BE اور CF مساوی ہیں (شکل 7.32 دیکھئیے) دکھایئے کہ

(i) $\Delta ABE \cong \Delta ACF$

(ii) $AB = AC$ یعنی ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔



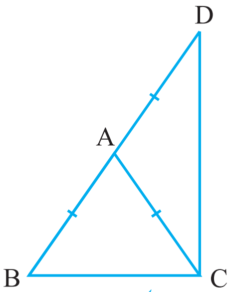
شکل 7.32



شکل 7.33

5. ABC اور DBC ایک ہی قاعدہ BC پر بنے دو مساوی الساقین مثلث ہیں (شکل 7.33 دیکھئیے) دکھایئے کہ $\angle ABD = \angle ACD$

6. ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔جس میں AB = AC ضلع BA کو D تک اس طرح بڑھایا گیا ہے کہ AD = AB ہے (شکل 7.34 دیکھئے) دکھائیے کہ ΔBCD ایک زاویہ قائمہ ہے۔



شکل 7.34

7. ABC ایک قائم زاوی مثلث ہے جس میں $\angle A = 90^0$ اور AB = AC ہے تو $\angle B$ اور $\angle C$ معلوم کیجیے

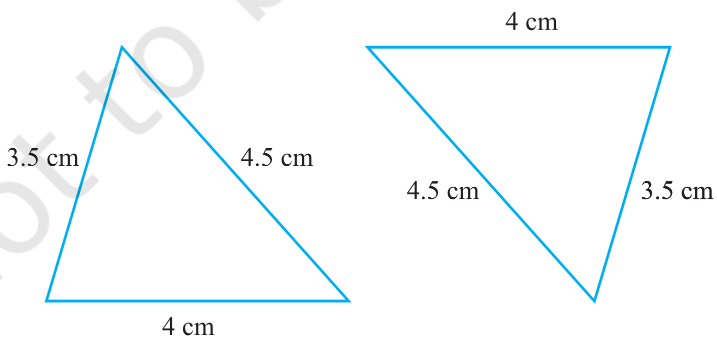
8. دکھائیے کہ مساوی ضلعی مثلث کا ہر ایک زاویہ 60^0 کا ہوتا ہے۔

7.5: مثلثوں کی متماثلت کے کچھ اور اصول

(Some More Criteria for Congruence of Triangles)

اس باب کے شروع میں آپ دیکھ چکے ہیں کہ ایک مثلث کے تینوں زاویوں کا دوسرے مثلث کے تینوں زاویوں کے برابر ہونا ان کی متماثلت کے لیے کافی نہیں ہے۔آپ متحیّر ہونگے کہ آیا ایک مثلث کے تینوں اضلاع دوسرے مثلث کے تینوں اضلاع کے برابر ہوتا مثلثوں کی متماثلت کے لیے کافی ہے۔آپ پچھلی کلاسوں میں تصدیق کر چکے ہیں کہ یہ یقیناً درست ہے۔

مزید یقین کرنے کے لیے 4cm ، 3.5cm اور 4.5cm اضلاع والے دو مثلث بنائیے (شکل 7.35 دیکھیے) ان کو کاٹ لیجیے اور ایک دوسرے پر رکھ کر دیکھیے کیا آپ مشاہدہ کرتے ہیں وہ ایک دوسرے کو پوری طرح ڈھک لیتے ہیں اگر مساوی ضلعوں کو مساوی ضلعوں پر رکھا جائے۔اس لیے مثلث متماثل ہیں۔



شکل 7.35

اس سرگرمی کو کچھ اور مثلثوں کے لیے دہرایئے۔ ہم متماثلت کے ایک اور اصول تک پہنچتے ہیں۔

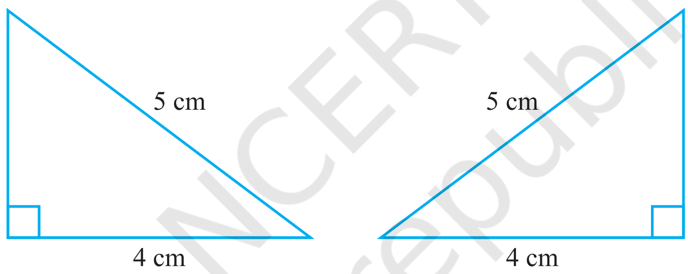
مسئلہ 7.4 (SSS متماثلت اصول) اگر ایک مثلث کے تینوں اضلاع دوسرے مثلث کے تینوں اضلاع کے مساوی ہوں تو دونوں مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

اس مسئلہ کو ہم مناسب بناوٹ (عمل) کے استعمال سے ثابت کر سکتے ہیں۔

آپ SAS متماثلت اصول میں دیکھ چکے ہیں کہ مساوی زاویوں کے جوڑے نظیری مساوی اضلاع کے جوڑوں کے درمیان میں ہونے چاہئیں۔ اگر ایسا نہیں ہوتا تو ضروری نہیں کہ مثلث متماثل ہوں۔

اس عملی کام کو کیجیے۔

وتر 5cm اور ضلع 4cm والے دو قائم زاوی مثلث بنایئے (شکل 7.36 دیکھیے)



شکل 7.36

ان کو کاٹ لیجیے اور ایک مثلث کو دوسرے کے اوپر اس طرح رکھیے کہ مساوی ضلعوں پر ہوں۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں۔ دونوں مثلث ایک دوسرے کو پوری طرح ڈھک لیتے ہیں اس لیے یہ متماثل ہیں اسی مشغلہ کو قائم مثلثوں کے دوسرے جوڑوں کے ساتھ دہرایئے آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں۔؟

آپ پاتے ہیں کہ دو قائم مثلث متماثل ہوتے ہیں اگر اضلاع کا ایک جوڑا اور وتر آپس میں برابر ہوں پچھلی کلاسوں میں آپ اس کی تصدیق کر چکے ہیں۔

نوٹ کیجیے کہ اس متماثلت میں زاویہ قائمہ درمیانی زاویہ نہیں ہے۔

اس طرح سے آپ کو متماثلت کا ایک اور اصول ملتا ہے۔

مسئلہ 7.5: RHS متماثلت اصول: دو قائم زاوی مثلثوں میں اگر ایک مثلث کا وتر اور ایک ضلع دوسرے مثلث کے ایک وتر

اور ضلع کے مساوی ہوتو دونوں مثلث متماثل ہوں گے۔

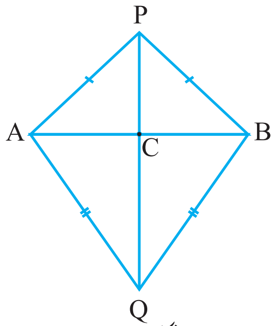
نوٹ کیجیے کہ RHS کا مطلب زاویہ قائمہ-وتر-ضلع

آیئے اب کچھ مثال حل کرتے ہیں۔

مثال 7: AB ایک قطع خط ہے۔ AB کی مخالف سمتوں میں P اور Q دو ایسے نقطے ہیں کہ ہر ایک A اور B نقطوں سے برابر فاصلہ پر ہے۔ (شکل 7.37 دیکھیے) دکھایئے کہ خط PQ، AB کا عمودی ناصف ہے۔

حل: آپ کو یاد ہوگا کہ PA=PB اور QA=QB اور آپ کو دکھانا ہے کہ $PQ \perp AB$ اور PQ, AB کی تنصیف کرتا ہے۔

مان لیجیے PQ، AB کو C پر قطع کرتا ہے۔



شکل 7.37

کیا آپ اس شکل میں دو متماثل مثلثوں کے بارے میں سوچ سکتے ہیں؟

آیئے ہم ΔPAQ اور ΔPBQ لیتے ہیں۔

ان مثلثوں میں

$AP = BP$ (دیا ہوا ہے)

$AQ = BQ$ (دیا ہوا ہے۔)

$PQ = PQ$ (مشترک)

اس لیے $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (SSS اصول)

اس لیے $\angle APQ = \angle BPQ$ (CPCT)

آیئے اب ΔPAC اور ΔPBC پر غور کرتے ہیں۔

آپ کے پاس ہے $AP = BP$ (دیا ہوا ہے۔)

$\angle APC = \angle BPC$ **($\angle APQ = \angle BPQ$)** پہلے ثابت ہو چکا ہے۔

$PC = PC$ (مشترک)

اس لیے $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ (SAS اصول)

اس لیے $AC = BC$ (CPCT)

اور $\angle ACP = \angle BCP$

اور $\angle ACP + \angle BCP = 180^0$ (CPCT)

اور $2\angle ACP = 180^0$ (خطی جوڑا)

یا $\angle ACP = 90^0$ (2)

(1) اور (2) سے آپ آسانی سے نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ PQ، AB کا عمودی ناصف ہے۔

[نوٹ کیجیے کہ ΔPAQ اور ΔPBQ کی متماثلت کو دکھائے بغیر آپ $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ نہیں دکھا سکتے

حالانکہ AP = BP (دیا ہوا ہے)

PC = PC (مشترک)

$\angle PAC = \angle PBC$ (ΔAPB میں مساوی ضلعوں کے سامنے کے زاویہ)

کیونکہ یہ نتائج ہمیں SSA اصول دیتے ہیں۔ جو مثلثوں کی متماثلت کے لیے ہمیشہ درست نہیں ہے۔ اور زاویہ بھی مساوی ضلعوں کے جوڑوں کے درمیان نہیں ہے۔]

ان کے کچھ اور مثالیں حل کرتے ہیں۔

مثال 8: P ایک نقطہ ہے جو خطوط l اور m جو ایک دوسرے کو نقطہ A پر قطع کرتے ہیں اور مساوی فاصلہ پر ہے (شکل 7.38 دیکھیے) دکھائیے کہ خط AP ان کے درمیان زاویہ کی تنصیف کرتا ہے۔

حل: آپ کو دیا ہوا ہے کہ خطوط l اور m ایک دوسرے کو نقطہ A پر قطع کرتے ہیں۔ مان لیجیے کہ PB = PC یہ دیا ہوا ہے

آپ کو دکھانا ہے کہ $\angle PAB = \angle PAC$

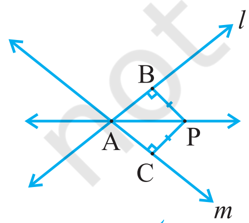
اس لیے ΔPAB اور ΔPAC پر غور کیجیے۔ ان دونوں مثلثوں میں

PB = PC (دیا ہوا ہے)

$\angle PBA = \angle PCA = 90^0$ (دیا ہوا ہے)

PA = PA (مشترک)

اس لیے $\Delta PAB \cong \Delta PAC$ (RHS اصول)



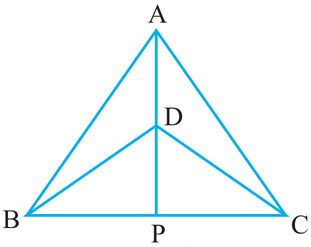
شکل 7.38

اس لیے $\angle PAB = \angle PAC$ (CPCT)

نوٹ کیجیے کہ یہ نتیجہ مشق 7.1 سوال 5 میں ثابت کیے گئے نتیجہ کا معکوس ہے۔

مشق 7.3

1. ΔABC اور ΔDBC ایک قاعدہ BC پر ہے دو مساوی الساقین مثلث میں اور ان کے راس A اور D ضلع BC کے ایک ہی طرف ہیں (شکل 7.39 دیکھیے) اگر AD کو اس طرح بڑھایا جاتا ہے کہ وہ BC کو P پر قطع کرتے تو دکھائیے کہ:



شکل 7.39

(i) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

(ii) $\Delta ABP \cong \Delta ACP$

(iii) AP، $\angle A$ اور $\angle D$ دونوں کی تنصیف کرتا ہے۔

(iv) AP، BC کا عمودی ناصف ہے۔

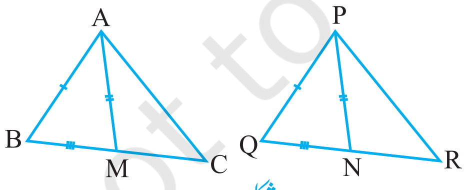
2. AD مساوی الساقین مثلث ABC کا ارتفاع ہے جس میں $AB = AC$ دکھائیے کہ

(i) AD، BC کی تنصیف کرتا ہے۔ (ii) AD، $\angle A$ کی تنصیف کرتا ہے۔

3. ΔABC کے دو اضلاع AB اور BC اور وسطانیہ AM بالترتیب ΔPQR کے اضلاع PQ اور QR اور وسطانیہ PN کے مساوی ہیں۔ (شکل 7.40 دیکھیے) دکھائیے کہ:

(i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

(ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$



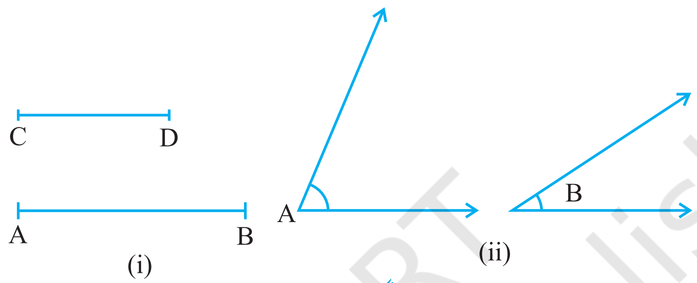
شکل 7.40

4. BE اور CF، ABC کے درمیان ارتفاعات ہیں۔ RHS متماثلت کے اصول کو استعمال کیجیے ثابت کیجیے کہ ABC مساوی الساقین مثلث ہے۔

5. ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں $AB = AC$ ہے $AP \perp BC$ بنائیے اور دکھائیے کہ $\angle B = \angle C$

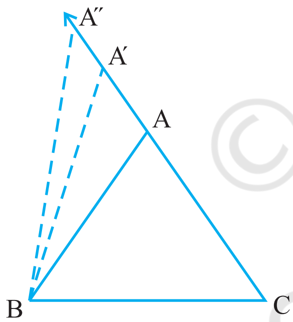
7.6 مثلث میں نا مساواتیں (Inequalities in a Triangle)

ابھی تک آپ مثلث یا مثلثوں کے اضلاع اور زاویوں کی برابری کے بارے میں پڑھ رہے تھے کبھی کبھی ہمارا سامنا غیر مساوی اشیاء سے ہوتا ہے اور ہمیں ان کا موازنہ کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر قطع خط AB کی لمبائی قطع خط CD کے مقابلہ میں بڑی ہے (شکل 7.41(i) میں) اور $\angle A$ ، $\angle B$ سے بڑا ہے۔ (شکل 7.41(ii) میں)



شکل 7.41

آیئے اب جانچ کرتے ہیں کہ آیا مثلث کے غیر مساوی اضلاع اور غیر مساوی زاویوں کے درمیان کوئی تعلق ہے۔ اس کے لیے ہم مندرجہ ذیل عملی کام کرتے ہیں۔



شکل 7.42

سرگرمی: ایک ڈرائنگ بورڈ پر دو پن B اور C پر لگایئے اور ان کو ایک دھاگے سے باندھ دیجیے جو مثلث کے ضلع BC کو ظاہر کرتا ہے۔

ایک دوسرے دھاگے کے ایک سرے کو C پر اور دوسرے سرے پر ایک پنسل باندھ دیجیے پنسل سے نقطہ A مارک کیجیے اور ΔABC بنایئے۔ (شکل 7.42 دیکھیے) اب پنسل کو کھسکایئے اور ایک دوسرا نقطہ A، CA پر A سے دور (اس کے نئے مقام) مارک کیجیے:

اس طرح سے $A'C > AC$ (لمبائیوں کا موازنہ کرنے پر)

A کو B سے ملایئے اور A'BC مکمل کیجیے۔ آپ $\angle ABC$ اور $\angle A'BC$ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ ان کا موازنہ کیجیے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں۔؟

ظاہر ہے $\angle A'BC > \angle ABC$

CA (بڑھے ہوئے) پر اس طرح کچھ اور نقطے مارک کر کے کھینچئے اور ضلع BC اور مارک کئے گئے نقطوں سے مثلث بنائیے۔

آپ مشاہدہ کریں گے کہ جیسے جیسے AC کی لمبائی بڑھتی جاتی ہے۔(A کے مختلف مقام لینے پر) اس کے سامنے کا زاویہ یعنی $\angle B$ بھی بڑا ہوتا جاتا ہے۔

آیئے اب ایک اور سرگرمی انجام دیتے ہیں۔

سرگرمی: ایک مختلف ضلعی مثلث بنائیے (مثلث جس کے تمام اضلاع مختلف لمبائیوں کے ہوں) اضلاع کی لمبائیوں کی پیمائش کیجیے۔

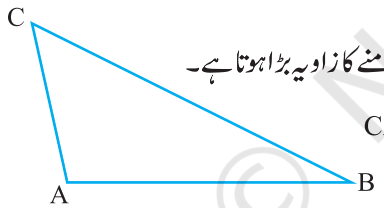
اب زاویوں کی پیمائش کیجیے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں۔

شکل 7.43 کے مثلث ΔABC میں BC سب سے بڑا ضلع ہے اور

AC سب سے چھوٹا اور $\angle A$ سب سے بڑا۔ اور $\angle B$ سب سے چھوٹا۔

اس سرگرمی کو کچھ اور مثلثوں کے لیے دہرائیے۔

ہم مثلثوں کی نامساواتوں کے ایک بہت اہم نتیجہ تک پہنچتے ہیں۔ اس کو ایک مسئلہ کی شکل میں ہم مندرجہ ذیل میں بیان کرتے ہیں۔



شکل 7.43

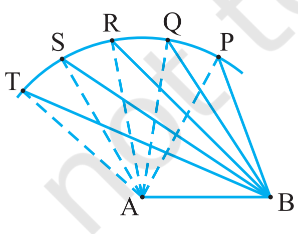
مسئلہ 7.6: اگر مثلث کے دو اضلاع غیر مساوی ہوں تو بڑے ضلع کے سامنے کا زاویہ بڑا ہوتا ہے۔

اس مسئلہ کو آپ BC پر ایک نقطہ P لے کر ثابت کر سکتے ہیں جب کہ CA = CP

(شکل 7.43 دیکھیے)

آیئے اب ایک اور عملی کام کرتے ہیں۔

سرگرمی: ایک قطع خط AB کھینچیے، A کو مرکز مان کر اور ایک ہی نصف قطر لے کر ایک قوس بنائیے اور اس پر نقطے P، Q، R، S اور T مارک کیجیے۔

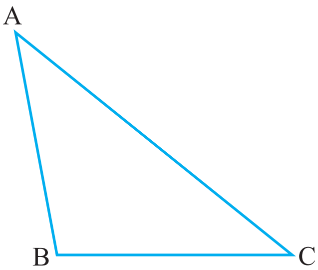


شکل 7.44

ان میں سے ہر ایک نقطہ کو A اور B سے ملائیے مشاہدہ کیجیے کہ ہم P سے T کی طرف حرکت کرتے ہیں۔ $\angle A$ بڑے سے بڑا ہوتا جاتا ہے۔ اس کے مخالف ضلع کے لمبائی کا کیا ہوتا ہے؟ مشاہدہ کیجیے کہ اس ضلع کی لمبائی بھی بڑھ رہی ہے۔ یعنی

$\angle TAB > \angle SAB > \angle RAB > \angle QAB > \angle PAB$ اور

$TB > SB > RB > QB > PB$



شکل7.45

اب ایک ایسا مثلث بنائیے جس کے تمام زاویہ غیر مساوی ہوں۔ اضلاع کی لمبائیوں کی پیائش کیجیے(شکل 7.45 دیکھیے) مشاہدہ کیجیے کہ سب سے بڑے زاویے کے سامنے ضلع سب سے لمبا ہے شکل 7.45 میں $\angle B$ سب سے بڑا زاویہ ہے اور AC سب سے لمبا ضلع۔

کچھ اور مثلث پر اس عملی کام کو دہرائیے ہم دیکھتے ہیں کہ مسئلہ 7.6 کا معکوس بھی درست ہے۔ اس طرح سے ہمیں مندرجہ ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

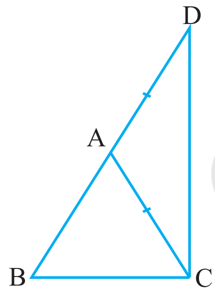
مسئلہ 7.7: کسی مثلث میں بڑے زاویہ کے سامنے کا ضلع لمبا (بڑا) ہوتا ہے۔

اس مسئلہ کو ہم تضاد اور ختم ہونے والے (Exhaustion) طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں۔

اب ایک ΔABC لیجیے اور اس میں AB+BC, BC+AC اور AC+AB معلوم کیجیے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

آپ مشاہدہ کریں گے کہ AB+BC > AC

BC + AC>AB اور AC + AB>BC



شکل7.46

اس مشغلہ کو کچھ اور مثلث لے کر دہرائیے۔ اس سے مندرجہ ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 7.8: مثلث کے کسی بھی دو اضلاع کا حاصل جمع تیسرے ضلع سے بڑا ہوتا ہے۔

شکل 7.41 میں مشاہدہ کیجیے کہ ΔABC کے ضلع BA کو نقطہ D کے اس طرح بڑھایا گیا کہ AD = AC کیا آپ دکھا سکتے ہیں کہ $\angle BCD > \angle BDC$ اور BA+AC >BC

کیا آپ مذکورہ بالا مسئلہ کے ثبوت تک پہنچ گئے۔

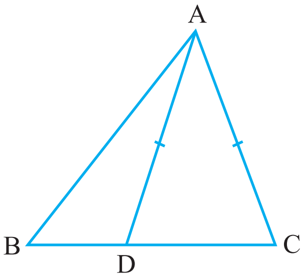
آیئے اب اس نتیجہ پر کچھ مثالوں کو حل کرتے ہیں۔

مثال 9: ΔABC کے ضلع BC پر D ایک نقطہ ہے جب کہ AD = AC (شکل 7.47 دیکھیے)۔ دکھایئے کہ AB>AD

حل: ΔDAC میں AD = AC (دیا ہوا ہے)

اس لیے $\angle ADC = \angle ACD$ (مساوی ضلعوں کے سامنے کے زاویہ)

اب $\angle ADC$ ΔABD کا خارجی زاویہ ہے۔



شکل 7.47

اس لیے $\angle ADC > \angle ABD$

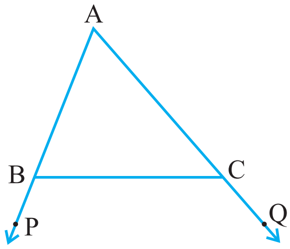
یا $\angle ACD > \angle ABD$

یا $\angle ACB > \angle ABC$ مثلث ΔABC میں

اس لیے $AB > AC$ (بڑے زاویہ کے سامنے کا ضلع)

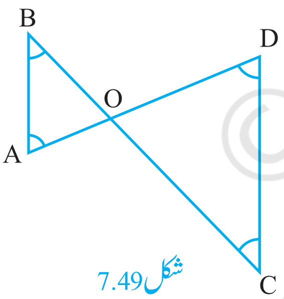
یا $AB > AD$ $(AD = AC)$

مشق 7.4



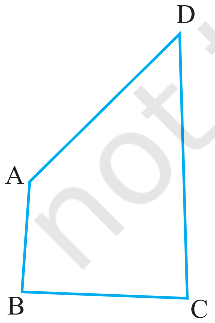
شکل 7.48

1. دکھائیے کہ ایک قائم زاوی مثلث میں وتر سب سے بڑا ضلع ہے۔
2. شکل 7.48 میں ΔABC کے اضلاع AB اور AC کو بالترتیب نقطے P اور Q تک بڑھائیے اور $\angle PBC < \angle QCB$ دکھائیے کہ $AC > AB$۔



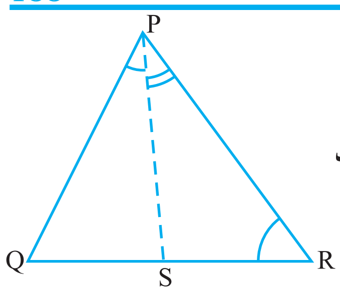
شکل 7.49

3. شکل 7.49 میں $\angle B < \angle A$ اور $\angle C < \angle D$ دکھائیے کہ $AD < BC$۔



شکل 7.50

4. AB اور CD چار ضلعی ABCD کی بالترتیب سب سے چھوٹے اور سب سے بڑے اضلاع ہیں (شکل 7.50 دیکھیے)۔ دکھائیے کہ $\angle A > \angle C$ اور $\angle B > \angle D$ ۔



شکل 7.51

.5 شکل 7.51 میں PQ < PR اور PS، $\angle QPR$ کی تنصیف کرتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ $\angle PSR > \angle PSQ$

.6 دکھائیے کہ کسی دیئے گئے نقطہ سے کسی خط پر کھینچے گئے تمام قطعات خط میں عمود سب سے چھوٹا قطع خط ہے۔

مشق 7.5 (اختیاری)

.1 ABC ایک مثلث ہے۔ ΔABC کے اندرون میں ایک ایسا نقطہ معلوم کیجیے جو ΔABC کے تمام راسوں سے برابر فاصلہ پر ہو۔

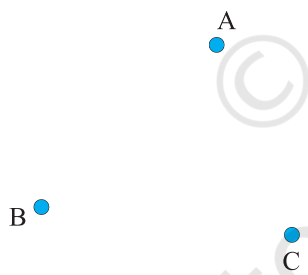
.2 ایک مثلث کے اندرون میں ایک ایسا نقطہ تلاش کیجیے جو اس کے تمام اضلاع سے برابر فاصلہ پر ہو۔

.3 ایک بہت بڑے پارک میں لوگ تین نقطوں پر جمع ہیں (شکل 7.52 دیکھیے)

A : جہاں بچوں کے لیے بہت سے سلائڈ اور جھولے ہیں۔

B : جو انسانوں کے ذریعہ بنی ایک جھیل کے قریب ہے۔

C : جو پارک کے بڑی پارکنگ اور نکاس کے قریب ہے۔

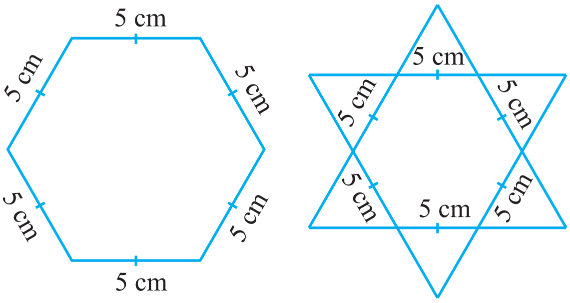


شکل 7.52

آئس کریم والا اپنی ریڑی کہاں لگائے کہ زیادہ سے زیادہ لوگ اس تک پہنچ سکیں۔؟

(اشارہ:- ریڑی A، B اور C سے برابر فاصلہ پر رہو۔)

.4 ایک مسدس (چھ ضلعی) اور تارے کی شکل کی رنگوں کو مکمل کیجیے (شکل 7.53(i) اور (ii) کو دیکھیے) اس میں 1cm ضلع والے مساوی ضلعی مثلثوں کو بھریے، جتنے آپ لے سکیں۔ ہر ایک حالت میں مثلثوں کی گنتی کیجیے۔ کس میں زیادہ مثلث آتے ہیں۔



شکل 7.53

7.7 خلاصہ Summary

اس سبق میں آپ نے مندرجہ ذیل نقاط کے بارے میں پڑھا ہے۔

1. دو اشکال متماثل ہیں اگر ان کی شکل اور سائز یکساں ہوں۔
2. ایک ہی نصف قطر والے دائرہ متماثل ہوتے ہیں۔
3. یکساں ضلع والے مربع متماثل ہوتے ہیں۔
4. مطابقت $A \leftrightarrow P$ ، $B \leftrightarrow Q$ اور $C \leftrightarrow Q$ کے تحت اگر دو مثلث ABC اور PQR متماثل ہیں تو ہم علامتی طور پر ہم ان کو $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔
5. اگر ایک مثلث کے دو ضلع اور انکے درمیان کا زاویہ دوسرے مثلث کے دو ضلع اور ان کے درمیان کے زاویہ کے برابر ہوں تو دونوں مثلث متماثل ہونگے۔ (متماثلت کا SAS اصول)
6. اگر ایک مثلث کے دو زاویہ اور ان کے درمیان کا ضلع دوسرے مثلث کے دو زاویہ اور ان کے درمیان کے ضلع کے برابر ہوں تو دونوں مثلث مساوی ہونگے۔ (متماثلت کا ASA اصول)
7. اگر ایک مثلث کے دو زاویہ اور ایک ضلع دوسرے مثلث کے دو زاویہ اور نظیری ضلع برابر ہوں تو دونوں مثلث متوازی ہونگے۔ (AAS متماثلت اصول)
8. مثلث کے مساوی ضلعوں کے سامنے کے زاویہ مساوی ہوتے ہیں۔
9. مثلث کے مساوی زاویوں کے سامنے کے ضلع مساوی ہوتے ہیں۔
10. مساوی ضلعی مثلث کا ہر زاویہ 60^0 کا ہوتا ہے۔

11. اگر ایک مثلث کے تینوں ضلع دوسرے مثلث کے تینوں ضلعوں کے برابر ہوں تو دونوں مثلث متماثل ہونگے (متماثلت کا SSS اصول)

12. اگر دو قائم زاوی مثلثوں میں ایک مثلث وتر اور ایک ضلع دوسرے مثلث کے وتر اور ایک ضلع کے برابر ہو تو دونوں مثلث متماثل ہونگے۔(متماثلت کا RHS اصول)

13. مثلث میں بڑے اضلاع کے سامنے کا زاویہ بڑا ہوتا ہے۔

14. مثلث میں بڑے زاویہ کے سامنے کا ضلع بڑا ہوتا ہے۔

15. مثلث کے دو اضلاع کا حاصل جمع تیسرے ضلع سے بڑا ہوتا ہے۔