باب 12

الجبریائی عبارتیں

12.1 تعارف (Introduction)

ہم پہلے ہی آسان الجبریائی عبارتیں $x+3$، $y-3$، $4x+5$، $10y-5$ وغیرہ دیکھ چکے ہیں۔ چھٹی جماعت میں ہم نے دیکھا کہ کیسے یہ عبارتیں مسئلہ اور معمہ بنانے میں کارآمد ثابت ہوتی ہیں۔ ہم نے بہت سی عبارتوں کی مثالیں سادہ مساوات کے سبق میں بھی دیکھی ہیں۔

الجبرا کا مرکزی تصور عبارتیں ہی ہیں۔ یہ باب الجبریائی عبارتوں کا ہے۔ جب آپ یہ سبق پڑھیں گے تو آپ یہ جانیں گے کہ کیسے الجبریائی عبارتیں عبارتیں بنتی ہیں، کیسے انہیں ملایا جاتا ہے، کیسے ہم ان کی قیمتیں نکالتے ہیں اور کیسے وہ استعمال کی جاتی ہیں۔

12.2 عبارتیں کیسے بنتی ہیں

ہم متغیر کے بارے میں اچھی طرح سے جانتے ہیں۔ متغیر کو ظاہر کرنے کے لیے ہم حروف $x, y, l, m, ...$ وغیرہ کو استعمال کرتے ہیں ایک متغیر کی بہت سی قیمتیں ہوسکتی ہیں۔ اس کی قیمت طے شدہ نہیں ہے۔ دوسری طرف مستقل (constant) ہے جس کی قیمت طے شدہ ہے۔ مثالیں ہیں $4, 100, -17$ وغیرہ۔

الجبریائی عبارتیں بنانے کے لیے ہم متغیر اور مستقل کو ملاتے ہیں۔ اس کے لیے، ہم جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کے اعمال کا استعمال کرتے ہیں۔ ہم $4x + 5$, $10y - 20$ جیسی عبارتیں سے پہلے ہی واقف ہیں۔ عبارت $4x+5$، متغیر x سے بنی ہے۔ پہلے x اور عدد 4 سے ضرب کیا اور پھر اس حاصل ضرب میں عدد 5 کو جوڑ دیا۔ اسی طرح، $10y-20$ کو حاصل کرنے کے لیے پہلے y کو 10 سے ضرب کیا گیا ہے اور پھر حاصل ضرب میں سے 20 کو گھٹایا گیا۔

اوپر دی گئی عبارتیں متغیر کو مستقل کے ساتھ ملانے سے حاصل ہوتی ہیں۔ ہم متغیروں کو ان ہی کے ساتھ یا دوسرے متغیروں کے ساتھ بھی ملا سکتے ہیں۔ ذرا دیکھیے مندرجہ ذیل عبارتیں کیسے بنی ہیں۔

$$x^2,\ 2y^2,\ 3x^2-5,\ xy,\ 4xy+7$$

(i) عبارت x^2 متغیر x کو اس سے ہی ضرب کرکے حاصل کی گئی ہے۔

$x \times x = x^2$

بالکل ویسے ہی جیسے 4×4 کو 4^2 لکھتے ہیں، ہم $x \times x = x^2$ لکھ سکتے ہیں۔ عام طور پر اس کو مربع x square پڑھا جاتا ہے۔

(بعد میں جب آپ قوت نما اور قوت (Exponents and Powers) کا سبق پڑھیں گے جس سے آپ کو پتہ چلے گا کہ x^2 کو x قوت 2 بھی پڑھتے ہیں۔

اسی طریقے سے، ہم لکھ سکتے ہیں

$x \times x \times x = x^3$

عام طور پر x^3 کو کعب x (x cubed) پڑھتے ہیں۔ بعد میں آپ جان جائیں گے اس کو ہم x کی قوت 3 بھی پڑھتے ہیں۔

$x, x^2, x^3, \ldots$ وغیرہ سبھی x سے حاصل کی گئی الجبریائی عبارتیں ہیں۔

(ii) عبارت $y, 2y^2$ سے حاصل ہوئی۔

$y, 2y^2 = 2 \times y \times y$

یہاں سے پہلے ہم نے y کو y سے ضرب کر کے y^2 حاصل کیا پھر اس کو 2 سے ضرب کیا۔

(iii) $(3x^2 - 5)$ میں پہلے ہم نے x^2 حاصل کیا اور اس کو 3 سے ضرب کر کے $3x^2$ حاصل کیا۔ $3x^2$ سے 5 کو گھٹانے پر آخر میں ہمیں $3x^2 - 5$ مل گیا۔

(iv) xy میں ہم نے متغیر x کو ایک دوسرے متغیر y سے ضرب کیا ہے لہٰذا $x \times y = xy$

(v) 4xy+7 میں پہلے ہم نے xy حاصل کیا پھر اس کو 4 سے ضرب کر کے $4xy$ میں 7 کو جوڑ کر یہ عبارت حاصل کی۔

کوشش کیجیے:

بتائیے کہ مندرجہ ذیل عبارتیں کیسے حاصل کی گئی ہیں۔

$7xy + 5,\ x^2y,\ 4x^2 - 5x$

12.3 عبارت کے ارکان (Terms of expression)

عبارتیں کیسے حاصل کی جاتی ہیں اس کے بارے میں ہم نے جو کچھ سیکھا ہے اب ہم اس کو ایک باضابطہ شکل (Systematic form) میں رکھتے ہیں۔ اس مقصد کے لیے ہم کو سمجھنے کی ضرورت ہے کہ ارکان اور ان کے اجزائے ضربی کیا ہیں۔

عبارت (4x+5) کو دیکھیے۔ اس عبارت کو بتانے میں پہلے ہم نے 4r کو 4 اور x کی حاصل ضرب کی شکل میں الگ سے بنایا اور پھر اس میں 5 کو جوڑ دیا۔ اسی طرح سے عبارت $(3x^2 - 7y)$ کو دیکھیے۔ یہاں ہم نے $3x^2$ کو 3، x اور x کے حاصل ضرب کی شکل میں علیحدہ سے بنایا۔ پھر $7y$ کو 7 اور y کا حاصل ضرب علیحدہ سے بنایا۔ علیحدہ علیحدہ $3x^2$ اور $7y$ کو بنانے کے بعد ہم نے ان دونوں کو جوڑ کر یہ عبارت حاصل کی۔

آپ معلوم کریں گے کہ جن عبارتوں کے ساتھ ہم کام کرتے ہیں ان کو ہمیشہ ایسے بھی دیکھا جا سکتا ہے۔ ان کے الگ الگ حصے ہوتے ہیں جن کو جوڑا جاتا ہے۔ عبارت کے ایسے حصے جن کو پہلے علیحدہ سے حاصل کیا جاتا ہے اور پھر جوڑا جاتا ہے 'ارکان' (terms) کے نام

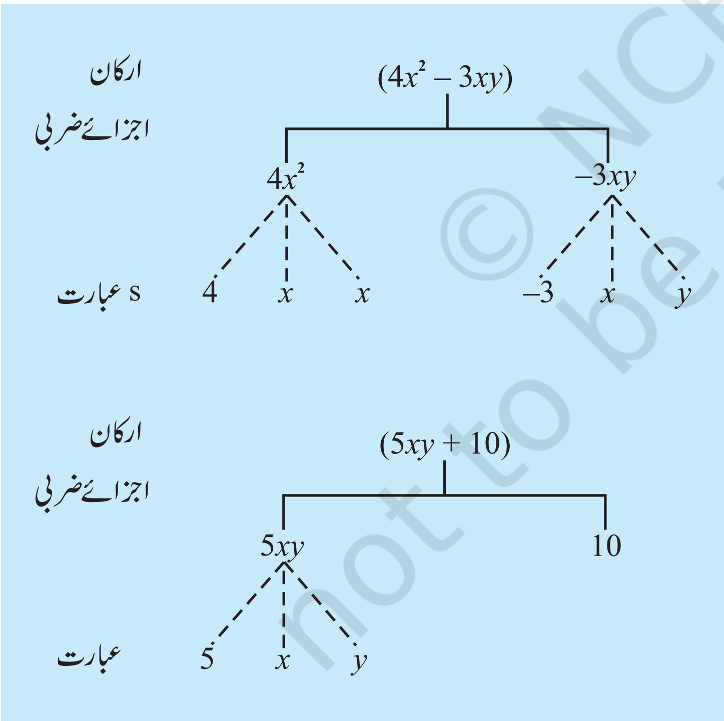
سے جانے جاتے ہیں۔عبارت $(4x^2 - 3xy)$ کو دیکھتے۔ہم کہتے ہیں کہ اس کے دو ارکان ہیں $4x^2$ اور $-3xy$ رکن $4x^2$، 4، x اور x کی حاصل ضرب ہے۔اور رکن $-3xy$، (–3)، x اور y کا حاصل ضرب ہے۔

ارکان کو جوڑ کر عبارتیں بنائی جاتی ہیں۔ بالکل اسی طرح جیسے رکن $4x$ اور 5 کو جوڑ کر عبارت $(4x+5)$ بنی۔ارکان جیسے رکن $4x^2$ اور $(-3xy)$ کو جوڑ کر عبارت $(4x^2 - 3xy)$ حاصل ہوئی۔ایسا اس لیے ہے کہ کیونکہ $4x^2 + (-3xy) = 4x^2 - 3xy$.

> نوٹ کیجیے کہ منفی علامت (–) رکن میں ہی شامل ہے۔عبارت $4x^2 - 3xy$ میں رکن کو $(-3xy)$ کی طرح دیکھیں گے نہ کہ $(3xy)$ کی طرح۔اسی وجہ سے یہ کہنے کی ضرورت نہیں ہے کہ ارکان کو جوڑ یا گھٹا کر،عبارتیں بنائی جاتی ہیں:صرف جوڑ ہی کافی ہے۔

ایک رکن کے اجزائے ضربی (Factors of a terms)

ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ عبارت $(4x^2 - 3xy)$ میں دو رکن $4x^2$ اور $-3xy$ میں۔رکن $4x^2$، 4، x اور x کا حاصل ضرب ہے۔ہم کہتے ہیں کہ 4، x اور x رکن $4x^2$ کے اجزائے ضربی ہیں۔ایک رکن اپنے اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہوتی ہے۔رکن $-3xy$ اجزائے ضربی –3، x اور y کا حاصل ضرب ہے۔



کسی عبارت کے ارکان اور ارکارن کے اجزائے ضربی کو آسانی سے ایک درخت ڈائیگرام (Tree Diagram) کی مدد سے دکھا سکتے ہیں۔ $4x^2 - 3xy$ کا درخت سامنے ڈائیگرام میں دکھایا گیا ہے۔

نوٹ کیجیے کہ ہم نے اس درخت ڈائیگرام میں اجزائے ضربی کے لیے نقطہ دار (dotted) خط اور ارکان کے لیے پورے خط کا استعمال کیا ہے۔یہ ضرب دنوں چیزوں کو الگ الگ رکھنے کے لیے ہے۔

عبارت $5xy+10$ کا درخت ڈائیگرام بنایئے اجزائے ضربی ایسے ہوں جن کو اور زیادہ اجزائے ضربی میں تحلیل نہ کیا جا سکے۔لہٰذا $5xy$ نہیں لکھتے ہیں کیونکہ xy اور اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔اس طرح اگر x^3 ایک رکن ہے تو اس کو $x \times x \times x$ لکھیں گے نہ کہ $x^2 \times x$۔یہ بھی یاد رکھیے کہ '1' کو الگ سے جزو ضربی کی طرح نہیں لیا جاتا ہے۔

ضریب (Coefficients)

ہم نے سیکھا کہ ایک رکن کو اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھتے ہیں۔ان اجزائے ضربیوں میں سے ایک عددی اور باقی

کوشش کیجیے:

1۔ مندرجہ ذیل عبارتوں کے ارکان کیا ہیں؟ یہ ارکان کیسے بنے ہیں یہ بھی دکھایئے۔ ہر عبارت کے لیے درست ڈائیگرام بنایئے۔

$8y + 3x^2,\ 7mn - 4,\ 2x^2y$

2۔ 4 رکن والی تین عبارتیں لکھیے۔

الجبرائی (یعنی ان میں متغیر بھی ہوں) ہو سکتے ہیں۔ عددی جزوضربی کو عددی ضریب بھی کہتے ہیں۔ یا رکن کا ضریب بھی کہتے ہیں۔ اس کو باقی بچے رکن (جو کہ رکن کے الجبرائی اجزائے ضرب کا حاصل ضرب ہوگا) کا ضریب بھی کہتے ہیں لہٰذا $5xy$ میں 5، رکن کا ضریب ہے۔ xy کا بھی ضریب ہے۔ رکن $10xyz$ میں 10، xyz کا ضریب ہے۔ رکن $7x^2y^2$ میں x^2y^2 کا ضریب 3 ہے۔

جب کسی رکن کا ضریب 1+ ہوتا ہے تو عام طور پر اس کو لکھتے نہیں ہیں۔ مثال کے طور پر $1x$ کو x؛ $1x^2y^2$ کو x^2y^2 اور اسی طرح اور بھی لکھے جاتے ہیں۔

کوشش کیجیے:

مندرجہ ذیل عبارتوں میں ارکان کے ضریب بتایئے

$4x - 3y,\ a + b + 5,\ 2y + 5,\ 2xy$

کبھی کبھی لفظ ضریب کو اور بھی زیادہ عام طریقے سے استعمال کیا جاتا ہے۔ لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ رکن $5xy$ میں $5x$ کا ضریب 5 ہے۔ $5y$، x، 5 کا ضریب اور $5x$، y کا ضریب ہے۔

$10x^2y^2$ میں 10، xy^2 کا ضریب، x، $10y^2$ کا ضریب اور $10x.y^2$ کا ضریب اور ہے۔ لہٰذا، اس اور زیادہ عام طریقے میں ایک ضریب عددی جزوضربی یا الجبرائی جزوضربی یا دو سے زیادہ اجزائے ضربی کا حاصل ضرب بھی ہو سکتا ہے۔ یہ بھی کہا جاتا ہے کہ یہ ضرب باقی بچے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کا ضریب ہے۔

مثال 1 مندرجہ ذیل عبارتوں میں، وہ ارکان ڈھونڈیے جو مستقل نہ ہوں۔ ان کے عددی ضریب بتایئے۔

$xy + 4,\ 13 - y^2,\ 13 - y + 5y^2,\ 4p^2q - 3pq^2 + 5$

حل

نمبر شمار	عبارت	رکن (جو کہ نہ ہوں)	عددی ضریب
(i)	$xy + 4$	xy	1
(ii)	$13 - y^2$	$-y^2$	–1
(iii)	$13 - y + 5y^2$	$-y$	–1
		$5y^2$	5
(iv)	$4p^2q - 3pq^2 + 5$	$4p^2q$	4
		$3p^2q$	–3

مثال 2 (a) مندرجہ ذیل عبارتوں میں x کے ضریب کیا ہیں؟

$4x - 3y,\ 8 - x + y,\ y^2x - y,\ 2z - 5xz$

(b) مندرجہ ذیل عبارتوں میں y کے ضریب کیا ہیں؟

$4x - 3y,\ 8 + yz,\ yz^2 + 5,\ my + m$

حل (a) ہرایک عبارت میں ہم ایک ایسے رکن کو دیکھتے ہیں جس کا جزوی ضربی x ہو۔ رکن کا باقی حصہ x کا ضریب ہے۔

نمبر شمار	عبارت	وہ رکن جس کا جزو ضربی x ہو	x کے ضربی
(i)	$4x - 3y$	$4x$	4
(ii)	$8 - x + y$	$-x$	-1
(iii)	$y^2x - y$	y^2x	y^2
(iv)	$2z - 5xz$	$-5xz$	$-5z$

(b) اوپر (a) میں دیا گئے طریقہ ہی یہاں ہے۔

نمبر شمار	عبارت	وہ رکن جس کا جزو ضربی y ہو	y کا ضریب
(i)	$4x - 3y$	$-3y$	-3
(ii)	$8 + yz$	yz	z
(iii)	$yz^2 + 5$	yz^2	z^2
(iv)	$my + m$	my	m

12.4 یکساں اور غیر یکساں ارکان (Like and Unlike Terms)

کوشش کیجیے:

مندرجہ ذیل میں سے یکساں ارکان اکٹھے کیجیے۔

$12x, 12, -25x, -25, -25y, 1, x, 12y, y$

جن ارکان کے الجبریائی اجزائے ضربی ایک سے ہوں ان کو یکساں ارکان (like terms) کہتے ہیں۔ اور جن ارکان کے الجبریائی اجزائے ضربی مختلف ہوتے ہیں۔ غیر یکساں ارکان کہلاتے ہیں۔ مثال کے طور پر، عبارت $2xy - 3x + 5xy - 4$، میں $2xy$ اور $5xy$ کے اجزائے ضربی 5، x اور y ہیں۔ لہٰذا ان کے الجبریائی (یعنی وہ متغیر ہوں) اجزائے ضربی ایک سے ہیں۔ لہٰذا یہ یکساں ارکان ہیں۔ دوسری طرف، ارکان $2xy$ اور $-3x$ کے الجبریائی ارکان مختلف ہیں۔ یہ غیر یکساں ارکان ہیں۔ اسی طرح ارکان $2xy$ اور 4 غیر یکساں ارکان ہیں۔ اور $-3x$ اور 4 غیر یکساں ارکان ہیں۔

12.5 یک رکنی، دو رکنی، سہ رکنی اور کثیر رکنی (Monomials, Binomials, Trinomials and Polynomials)

ایسی عبارت جس میں صرف ایک ہی رکن ہوتا ہے، یک رکنی (nomial) کہلاتی ہے مثال کے طور پر $7xy, -5m, 3z^2, 4$

ایسی عبارتیں جن میں دو غیر یکساں ارکان ہوں دو رکنی کہلاتی ہیں مثال کے طور پر $x + y,\ m - 5,\ mn + 4m,\ a^2 - b^2$ دو رکنی نہیں ہے۔ یہ ایک یک رکنی ہے۔ عبارت $(a+b+5)$ دو رکنی نہیں ہے۔ اس میں تین رکن ہیں۔

کوشش کیجیے:

مندرجہ ذیل عبارتوں میں یک رکنی، دو رکنی اور سہ رکنی کی درجہ بندی کیجیے۔ a, $a + b$, $ab + a + b$, $ab + a + b - 5$, xy, $xy + 5$, $5x^2 - x + 2$, $4pq - 3q + 5p$, 7, $4m - 7n + 10$, $4mn + 7$.

ایک عبارت جس میں تین ارکان ہوتے ہیں، سہ رکنی (trimonial) کہلاتی ہیں۔ مثال کے طور پر $x+y+7$, $ab+a+b$, $3x^2-5x+2, m+n+10$ سہ رکنی ہے۔ تاہم عبارت $ab+a+b+5$ تین رکنی نہیں ہے۔ اس میں چار ارکان ہیں، تین نہیں۔ عبارت $x+y+5x$ سہ رکنی نہیں ہے۔ کیونکہ x اور $5x$ یکساں ارکان ہیں۔

عام طور پر، ایک عبارت جس کے ایک یا زیادہ رکن ہوتے ہیں، کثیر رکنی (polynomial) کہلاتی ہے۔ لہٰذا یک رکنی، دو رکنی، اور سہ رکنی یہ سب کثیر رکنیاں ہیں۔

مثال 3 ارکان کے مندرجہ ذیل جوڑوں میں سے یکساں اور غیر یکساں ارکان بتایئے، وجہ بھی بتایئے۔

(i) $7x$, $12y$ (ii) $15x$, $-21x$ (iii) $-4ab$, $7ba$ (iv) $3xy$, $3x$

(v) $6xy^2$, $9x^2y$ (vi) pq^2, $-4pq^2$ (vii) $mn2$, $10mn$

حل

نمبر شمار	جوڑا	اجزائے ضربی	الجبریائی اجزائے ضربی ایک سے میں یا مختلف	یکساں غیر یکساں ارکان	ریمارک
(i)	$7x$ $12y$	$\begin{cases} 7, x \\ 12, y \end{cases}$	مختلف	غیر یکساں	ارکان میں متغیر مختلف ہیں
(ii)	$15x$ $-12x$	$\begin{cases} 15, x \\ -21, x \end{cases}$	یہی	یکساں	
(iii)	$-4ab$ $7ba$	$\begin{cases} -4, a, b \\ 7, a, b \end{cases}$	یہی	یکساں	یاد رہے $ab = ba$
(iv)	$3xy$ $3x$	$\begin{cases} 3, x, y \\ 3, x \end{cases}$	مختلف	غیر یکساں	متغیر y صرف ایک رکن میں ہے
(v)	$6xy^2$ $9x^2y$	$\begin{cases} 6, x, y, y \\ 9, x, x, y \end{cases}$	مختلف	غیر یکساں	دو رکنوں کے صرف متغیر میل کھاتے ہیں، ان کی قوتیں نہیں۔

(vi)	pq^2 $-4pq^2$	$\begin{cases} 1, p, q, q \\ -4, p, q, q \end{cases}$	یہی	یکساں	دیکھیں، عددی جز و ضربی دکھایا نہیں گیا ہے۔

مندرجہ ذیل میں مختلف آسان مرحلے یہ طے کرنے میں مدد کریں گے کہ کیا دیے گئے ارکان یکساں ہیں یا غیر یکساں

(i) عددی ضریب پر دھیان مت دیجیے ارکان کے الجبریائی حصہ پر دھیان دیجیے۔

(ii) ارکان کے متغیروں کو دیکھیے ۔ یہ ایک ہونے چاہئیں۔

(iii) پھر، ارکان میں ہر متغیر کی قوت کو دیکھیے ، یہ ایک جیسی ہونی چاہئیں۔

نوٹ کیجیے کہ یہ طے کرنے میں کہ ارکان یکساں ہیں یا نہیں۔ دو چیزوں سے کوئی فرق نہیں پڑتا: (1) ارکان کے عدد ضریب اور (2) ارکان میں متغیر کے ضرب ہونے کی ترتیب۔

مشق 12.1

1۔ مندرجہ ذیل صورت حال میں متغیر استعمال کر کے الجبریائی عبارتیں بنائیے۔

(i) z کو y میں سے گھٹائیے۔

(ii) اعداد x اور y کے جوڑ کا آدھا

(iii) عدد z کو اسی سے ضرب کیجیے۔

(iv) اعداد p اور q کے حاصل ضرب کا ایک چوتھائی۔

(v) اعداد x اور y دونوں کے مربع کیجیے اور پھر دونوں کو جوڑیے۔

(vi) اعداد x اور n کے حاصل ضرب کے تین گنے میں عددی 5 کو جوڑیے۔

(vii) اعداد y اور z کے حاصل ضرب کو 10 میں سے گھٹائیے۔

(viii) a اور b اعداد کا جوڑ اُن کے حاصل ضرب میں سے گھٹائیے۔

2۔ (i) ان مندرجہ ذیل عبارتوں میں ارکان اور ان کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔ ارکان اور ان کے اجزائے ضربی کو رف ڈائیگرام کے ذریعے دکھائیے۔

(a) $x-3$ (b) $1+x+x^2$ (c) $y-y^3$

(d) $5xy^2+7x^2y$ (e) $-ab+2b^2-3a^2$

(ii) نیچے دی گئی عبارتوں میں ارکان اور ان کے اجزائے ضربی پہچانیے ۔

(a) $-4x+5$ (b) $-4x+5y$ (c) $5y+3y^2$

(d) $xy+2x^2y^2$ (e) $pq+q$ (f) $1.2\,ab-2.4\,b+3.6\,a$

(g) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$ (h) $0.1\,p^2+0.2\,q^2$

3۔ مندرجہ ذیل عبارتوں میں ارکان کے عددی ضریب پہچانیے :

(i) $5-3t^2$ (ii) $1-t+t^2+t3$ (iii) $x+2xy+3y$

(iv) $100m+1000n$ (v) $-p^2q^2+7pq$ (vi) $1.2a+0.8b$

(vii) $3.14r^2$ (viii) $2(l+b)$ (ix) $0.1y+0.01y^2$

4- (a) وہ ارکان پہچانیے جن میں x ہو اور x کا ضریب بھی بتائیے۔

(i) y^2x+y (ii) $13y^2-8yx$ (iii) $x+y+2$

(iv) $5+z+zx$ (v) $1+x+xy$ (vi) $12xy^2+25$

(vii) $7x+xy^2$

(b) وہ ارکان بتائی جن میں y^2 ہو۔ y^2 کا ضریب بھی بتایئے۔

(i) $8-xy^2$ (ii) $5y^2+7x$ (iii) $2x^2y-15xy^2+7y^2$

5- یک رکنی، دورکنی اور سہ رکنی میں درجہ بندی کیجیے۔

(i) $4y-7z$ (ii) y^2 (iii) $x+y-xy$ (iv) 100

(v) $ab-a-b$ (vi) $5-3t$ (vii) $4p^2q-4pq^2$ (viii) $7mn$

(ix) z^2-3z+8 (x) a^2+b^2 (xi) z^2+z

(xii) $1+x+x^2$

6- بتایئے کہ ارکان دیے گئے جوڑے یکساں ہیں یا غیر یکساں ہیں۔

(i) $1, 100$ (ii) $-7x, \frac{2}{5}x$ (iii) $-29x, -29y$

(iv) $14xy, 42yx$ (v) $4m^2p, 4mp^2$ (vi) $12xz, 12x^2z^2$

7- مندرجہ ذیل میں یکساں ارکان پہچانیے۔

(a) $-xy^2, -4yx^2, 8x^2, 2xy^2, 7y, -11x^2, -100x, -11yx, 20x^2y,$
$-6x^2, y, 2xy, 3x$

(b) $10pq, 7p, 8q, -p^2q^2, -7qp, -100q, -23, 12q^2p^2, -5p^2, 41, 2405p, 78qp, 13p^2q, qp^2, 701p^2$

12.6 الجبریائی عبارتوں کی جمع اور تفریق
(Addition and Subtraction of Algebraic Expressions)

مندرجہ ذیل مسائل کو دیکھیے۔

1- سریتا کے پاس کچھ ماربلس ہیں۔ امینا کے پاس 10 سے زیادہ ہیں۔ اپو نے کہا کہ سریتا اور امینہ کے پاس جتنے ماربل ہیں میرے پاس ان دونوں کے مجموعی سے بھی 3 زیادہ ہیں۔ آپ کیسے بتائیں گے کہ اپو کے پاس کتنے ماربل ہیں؟

کیونکہ یہ نہیں دیا گیا ہے کہ سریتا کے پاس کتنے ماربل ہیں، ہم اس کو 'x' لے لیتے ہیں۔ امینہ کے پاس 10 زیادہ ہیں۔ یعنی $x+10$۔ اپو نے کہا کہ سریتا اور امینا کے کل ماربل pg–236 سے 3 زیادہ۔ اس لیے ہم سریتا اور امینہ کے ماربل کا حاصل جمع

معلوم کریں گے اور پھر اس میں 3 جوڑ دیں گے، یعنی ہم x، $x+3$ اور 3 کا حاصل جمع لیں گے۔

2۔ راموکے ابا کی موجودہ عمر راموں کی عمر کی 3 گنا ہے۔ راموکے دادا کی عمر رامو اور رامو کے ابا کی کل عمر سے 13 سال زیادہ ہے۔ آپ راموکے دادا کی عمر کیسے معلوم کریں گے؟

کیونکہ راموکی عمر نہیں دی گئی ہے۔ اس لیے اس کو ہم y سال مان لیتے ہیں۔ پھر اس کے ابا کی عمر $3y$ سال ہوگئی۔ راموکے دادا کی عمر معلوم کرنے کے لیے ہم راموکی عمر (y) راموکے ابا کی عمر (3y) اور پھر حاصل جمع سے 13 جوڑ دیں گے، یعنی ہم کو y، $3y$ اور 13 کا حاصل جمع لینا ہے۔

3۔ ایک باغ میں ایک مربع نما زمین کے الگ الگ ٹکڑوں پر گلاب اور گیندے کے پھول لگے ہیں۔ گیندے کے پھولوں والی مربع زمین کی لمبائی گلاب کے پھولوں والے مربع زمین کی لمبائی سے 3 میٹر زیادہ ہے۔ گیندے کی زمین کا رقبہ، گلاب کی زمین کے رقبے سے کتنا زیادہ ہے؟

آیئے گلاب والی زمین کی لمبائی ہم 'l' لیتے ہیں۔ تو گیندے والی زمین کی لمبائی $(l+3)$ میٹر ہوگی۔ دونوں کے بالترتیب رقبے l^2 اور $(l+3)^2$ ہوں گے۔ $(l+3)^2$ اور l^2 کے درمیان کا فرق بتائے گا کہ گیندے کی زمین کا رقبہ کتنا زیادہ ہے۔

تینوں صورت حال میں، ہم کو الجبری عبارتوں کی جمع یا گھٹا کرنی ہے۔ روزمرہ زندگی میں ہی ایسے بہت سے مسائل ہوتے ہیں جن میں ہمیں عبارتیں استعمال کرنے کی ضرورت ہوتی ہے اور ان پر ریاضیائی اعمال کرنے کی بھی ضرورت ہے۔ اس حصے میں، ہم یہ دیکھیں گے کہ الجبریائی عبارتوں کو کیسے جوڑا اور گھٹایا جاتا ہے۔

کوشش کیجیے:

کم از کم دو ایسی صورت حال کے بارے میں سوچیے جن میں سے ہر ایک میں آپ کو دو الجبریائی عبارتوں کی ضرورت پڑے گی اور ان کو جوڑنا یا گھٹانا بھی ہو۔

یکساں ارکان کی جمع اور تفریق (Adding and subtracting like terms)

سادہ ترین عبارتیں یک رکنی ہوتی ہیں۔ ان میں صرف ایک ہی رکن ہوتا ہے۔ ہم شروع کرتے ہیں کہ کیسے یکساں ارکان کو جوڑا یا گھٹایا جاتا ہے۔

- $3x$ اور $4x$ کو جوڑیے۔ ہم جانتے ہیں کہ x ایک عدد ہے اور اسی لیے $3x$ اور $4x$ بھی۔

کیونکہ متغیر بھی اعداد ہیں اس لیے ہم ان کے لیے تقسیمی قانون استعمال کرسکتے ہیں۔

اب $3x + 4x = (3 \times x) + (4 \times x)$

$= (3+4) \times x$ (تقسیمی قانون کا استعمال)

$= 7 \times x = 7x$

یا $3x + 4x = 7x$

- اب جوڑیے $8xy$، $4xy$ اور $2xy$

$$8xy + 4xy + 2xy = (8 \times xy) + (4 \times xy) + (2 \times xy)$$
$$= (8 + 4 + 2) \times xy$$
$$= 14 \times xy = 14xy$$

یا $8xy + 4xy + 2xy = 14\,xy$

- $7x$ میں سے $4x$ کو گھٹائیے۔

$$7n - 4n = (7 \times n) - (4 \times n)$$
$$= (7 - 4) \times n = 3 \times n = 3n$$

یا $7n - 4n = 3n$

- بالکل اسی طرح $11ab$ میں سے $5ab$ گھٹائیے

$$11ab - 5ab = (11 - 5)\ ab = 6ab$$

لہٰذا دو یا زیادہ یکساں ارکان کی حاصل جمع بھی یکساں رکن ہی ہے جس کا عددی ضریب یکساں ارکان کے عددی ضریبوں کی حاصل جمع ہے۔

اسی طرح، دو یکساں ارکان کے درمیان کا فرق ایک یکساں رکن ہے۔ جس کا عددی ضریب دونوں یکساں ارکان کے عددی ضریبوں کا فرق ہے۔

نوٹ کیجیے، کہ غیر یکساں ارکان اسی طریقے سے جوڑے یا گھٹائے نہیں جاتے ہیں۔ ہم اس کی مثالیں رکھ چکے ہیں، جب 5 کو x میں جوڑا جاتا ہے، ہم جواب کو $(x+5)$ لکھتے ہیں۔ دھیان دیجیے کہ $(x+5)$ میں دونوں ارکان 5 اور x قائم ہیں۔ اسی طرح، اگر ہم غیر یکساں ارکان $3xy$ میں 7 کو گھٹائیں تو جواب ہوگا $3xy - 7$۔

عام الجبریائی عبارتیں جوڑنا اور گھٹانا (Adding and subtracting general algebraic expressions)

- جوڑیے $3x + 11$ اور $7x - 5$

حاصل جمع $= 3x + 11 + 7x - 5$

اب، ہم جانتے ہیں کہ $3x$ اور $7x$ یکساں ارکان ہیں اور 11 اور -5 بھی ساتھ ہی $3x + 7x = 10\,x$ اور $11 + (-5) = 6$

اس لیے ہم حاصل جمع کو حل کر سکتے ہیں ایسے:

$$= 3x + 11 + 7x - 5$$

$= 3x + 7x + 11 - 5$ (ارکان کو پھر سے ترتیب دینا)

$= 10x + 6$

لہٰذا $3x + 11 + 7x - 5 = 10x + 6$

- جوڑیے $3x + 11 + 8z$ اور $7x - 5$

حاصل جمع ہوگی $= 3x + 11 + 8z + 7x - 5$

(ارکان کو پھر سے ترتیب دے کر) $= 3x + 7x + 11 - 5 + 8z$

نوٹ کیجیے ہم نے یکساں ارکان کو اکٹھا کر لیا ہے، اکیلا رکن $8z$ جوں کا توں ہی بچا ہے، اس لیے جوڑ $= 10x + 6 + 8z$

> نوٹ کیجیے کہ جیسے
>
> $-(5-3) = -5+3,$
>
> $-(a-b) = -a+b.$
>
> الجبریائی ارکان کے علامتوں پر بالکل اسی طرح کام کیا جاتا ہے جیسے اعداد کے علامتوں پر

- $3a - b + 4$ میں سے $a - b$ کو گھٹائیے

فرق $= 3a - b + 4 - (a - b)$

$= 3a - b + 4 - a + b$

دھیان دیجیے کہ ہم نے $(a-b)$ کو بریکٹ میں کیسے رکھا اور بریکٹ کو کھولتے وقت علامات کا کیسے خیال رکھا۔ یکساں ارکان کو ایک ساتھ رکھنے کے لیے ارکان کی ترتیب پھر سے کی گئی۔

فرق $= 3a - a + b - b + 4$

$= (3-1)\,a + (1-1)\,b + 4$

فرق $= 2a + (0)\,b + 4 = 2a + 4$

یا $3a - b + 4 - (a - b) = 2a + 4$

اب ہم بریکٹس کے لیے عبارتوں کی جمع اور تفریق کے لیے کچھ اور مثالیں لیتے ہیں۔

> **کوشش کیجیے:**
>
> 
>
> جوڑیے اور گھٹائیے
>
> (i) $m - n,\ m + n$
>
> (ii) $mn + 5 - 2,\ mn + 3$

مثال 4 یکساں ارکان کو اکٹھا کیجیے اور عبارت کو آسان بنائیے۔

$$12m^2 - 9m + 5m - 4m^2 - 7m + 10$$

حل ارکان کی ترتیب بدل کر ہمیں ملا

$$12m^2 - 4m^2 + 5m - 9m - 7m + 10$$

$$= (12-4)\,m^2 + (5-9-7)\,m + 10$$

$$= 8m^2 + (-4-7)m + 10$$

$$= 8m^2\ (-11)\ m + 10$$

$$= 8m^2 - 11m + 10$$

مثال 5 $30ab + 12b + 14a$ میں سے $24ab - 10b - 18a$ کو گھٹائیے۔

حل
$30ab + 12b + 14a - (24ab - 10b - 18a)$
$= 30ab + 12b + 14a - 24ab + 10b + 18a$
$= 30ab - 24ab + 12b + 10b + 14a + 18a$
$= 6ab + 22b + 32a$

دوسرے طریقے سے ہم ایک عبارت کو دوسری کے نیچے اس طرح رکھتے ہیں کہ یکساں ارکان ایک دوسرے کے نیچے ہیں۔

$$\begin{array}{rr} & 30ab + 12b + 14a \\ - & 24ab - 10b - 18a \\ & \quad\; + \quad\; + \\ \hline & 6ab + 22b + 32a \\ \hline \end{array}$$

نوٹ کیجیے، کہ ایک رکن کو گھٹانا بالکل ایسا ہے جیسا مقلوب کو جوڑنا $-10b$ گھٹانا ایسا ہی جیسے $+10b$ کو جوڑنا؛ $-18a$ کو گھٹانا ایسا ہے جیسے $18a$ جوڑنا۔ $24ab$ کو گھٹانا ایسا ہے جیسے $-24ab$ جوڑنا۔ عبارت کے نیچے دکھائے گئے علامات گھٹانے کے عمل میں مدد کے لیے لگائے جاتے ہیں۔

مثال 6 $2y^2 + 3yz, -y^2 - yz - z^2$ اور $yz + 2z^2$ کے حاصل جمع میں سے $3y^2 - z^2$ اور $-y^2 + yz + z^2$ کے حاصل جمع کو گھٹائیے۔

حل ہم پہلے $2y^2 + 3yz, -y^2 - yz - z^2$ اور $2y^2 + 2z^2$ کو جوڑتے ہیں۔

$$\begin{array}{rrrr} & 2y^2 & + 3yz & \\ & -y^2 & - yz & - z^2 \\ (1) & & + yz & + 2z^2 \\ \hline & y^2 & + 3yz & + z2 \\ \hline \end{array}$$

اب ہم $3y^2 - z^2$ اور $-y^2 + yz + z^2$ کو جوڑتے ہیں۔

$$\begin{array}{rrrr} & 3y^2 & & - z^2 \\ (2) & - y^2 & + yz & + z^2 \\ \hline & 2y^2 & + yz & \\ \hline \end{array}$$

اب ہم حاصل جمع (2) کو حاصل جمع (1) میں سے گھٹاتے ہیں۔

$$\begin{array}{rrr} y^2 & + 3yz & + z^2 \\ 2y^2 & + yz & \\ \hline - & - & \\ \hline -y^2 & + yz & + z^2 \end{array}$$

مشق 12.2

1۔ یکساں ارکان کو ملا کر حل کیجیے۔

(i) $21b - 32 + 7b - 20b$

(ii) $z^2 + 13z^2 \quad 5z + 7z^3 \quad 15z$

(iii) $p - (p - q) - q - (q - p)$

(iv) $3a - 2b - ab - (a - b + ab) + 3ab + b - a$

(v) $5x^2y - 5x^2 + 3yx^2 - 3y^2 + x^2 - y^2 + 8xy^2 - 3y^2$

(vi) $(3y^2 + 5y - 4) - (8y - y^2 - 4)$

2۔ جوڑیے

(i) $3mn, -5mn, 8mn, -4mn$

(ii) $t - 8tz, 3tz - z, z - t$

(iii) $-7mn + 5, 12mn + 2, 9mn - 8, -2mn - 3$

(iv) $a + b - 3, b - a + 3, a - b + 3$

(v) $14x + 10y - 12xy - 13, 18 - 7x - 10y + 8xy, 4xy$

(vi) $5m - 7n, 3n - 4m + 2, 2m - 3mn - 5$

(vii) $4x^2y, -3xy^2, -5xy^2, 5x^2y$

(viii) $3p^2q^2 - 4pq + 5, -10p^2q^2, 15 + 9pq + 7p^2q^2$

(ix) $ab - 4a, 4b - ab, 4a - 4b$

(x) $x^2 - y^2 - 1, y^2 - 1 - x^2, 1 - x^2 - y^2$

3۔ گھٹائیے۔

(i) $-5y^2$ *from* y^2

(ii) $6xy$ from $-12xy$

(iii) $(a - b)$ from $(a + b)$

(iv) $a(b - 5)$ from $b(5 - a)$

(v) $-m^2 + 5mn$ *from* $4m^2 - 3mn + 8$

(vi) $-x^2+10x-5$ *from* $5x-10$

(vii) $5a^2-7ab+5b^2$ *from* $3ab-2a^2-2b^2$

(viii) $4pq-5q^2-3p^2$ *from* $5p^2+3q^2-pq$

4۔ (a) x^2+xy+y^2 میں کیا جوڑیں کہ $2x^2+3xy$ حاصل ہو؟

(b) $2a+8b+10$ میں سے کیا گھٹائیں کہ $-3a+7b+16$ ملے؟

5۔ $3x^2-4y^2+5xy+20$ میں سے کیا نکالیں کہ $-x^2-y^2+6xy+20$ حاصل ہو؟

6۔ (a) $3x-y+11$ اور $-y-11$ کے حاصل جمع سے $3x-y-11$ کو گھٹائیے۔

(b) $4+3x$ اور $5-4x+2x^2$ کے حاصل جمع میں سے $3x^2-5x$ اور $-x^2+2x+5$ کے حاصل جمع کو گھٹائیے۔

12.7 عبارت کی قیمت معلوم کرنا (Finding the Value of an Expression)

ہم جانتے ہیں الجبریائی عبارت کی قیمت عبارت کو بنانے والے متغیروں کی قیمت پر منحصر ہوتی ہے۔ایسی بہت سی صورت حال ہوتی ہیں جن میں ہم کو ایک عبارت کی قیمت معلوم کرنی ہوتی ہے،جیسے جب ہم یہ جانچ کرنا چاہتے ہیں متغیر کی ایک خاص قیمت دی گئی مساوات کو مطمئن کررہی ہے یا نہیں۔

ہم عبارتوں کی قیمت معلوم کرتے ہیں،اُس وقت بھی جب ہم جیومیٹری اور اور روزمرہ ریاضی کا فارمولہ استعمال کرتے ہیں۔مثال کے طور پر،ایک مربع کا رقبہ l^2 مربع کے ضلع کی لمبائی ہے۔اگر l=5cm ہے تو رقبہ ہوگا۔ 5^2 cm^2 یا 25^2 cm^2: اگر ضلع 10cm ہے تو رقبہ 10^2 cm^2 یا 100^2 اور اسی طرح آگے بھی۔ایسی ہی اور مثالیں ہم اگلے حصے میں دیکھیں گے۔

مثال 7 x=2 کے لیے مندرجہ ذیل عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $x+4$ (ii) $4x-3$

(iii) $19-5x^2$ (iv) $100-10x^3$

حل x=2 رکھیے۔

(i) $x+4$ میں،ہم کو $x+4$ کی قیمت مل جائے گی یعنی

$$x+4=2+4=6$$

(ii) $4x-3$ میں ہم کو حاصل ہے۔

$$4x-3=(4\times 2)-3=8-3=5$$

(iii) $19-5x^2$ میں، ہم کو حاصل ہوگا،

$$19-5x^2=19-(5\times 22)=19-(5\times 4)=19-20=-1$$

(iv) $100-10x^3$ میں، ہم کو حاصل ہوگا،

$$100-10x^3=100-(10\times 23)=100-(10\times 8)\ (Note 2^3=8)$$
$$=10-80=20$$

مثال 8 جب $n=-2$ ہو تو مندرجہ ذیل عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $5n-2$ (ii) $5n^2+5n-2$ (iii) n^3+5n^2+5n-2

حل

(i) $n-2$ میں $n=-2$ رکھنے پر ہم کو حاصل ہوگا۔

$$5(-2)-2=-10-2=-12$$

(ii) $5n^2+5n-2$ میں $4=-2$ رکھنے پر ہم کو حاصل ہوگا۔

$$n=-2,\ 5n-2=-12$$

اور $5n^2=5\times(-2)^2=5\times 4=20$ (کیونکہ $(-2)^2=4$)

ملانے پر $5n^2+5n-2=20-12=8$

(iii) اب $n=-2$ کے لیے

$n^3=(-2)3=(-2)\times(-2)\times(-2)=8$ اور $5n^2+5n-2=8$

ملانے پر

$$n^3+5n^2+5n\ \ 2=\ \ 8+8=0$$

اب ہم دو متغیروں کی عبارتوں پر دھیان دیتے ہیں مثال کے طور پر x + y, xy۔ دو متغیروں کی عبارت کی عددی قیمت نکالنے کے لیے ہم کو دونوں متغیروں کی قیمت دینی ہوگی۔ مثال کے طور پر $(x+y)$ کی قیمت $x=3$ اور $y=5$ کے لیے $3+5=8$

مثال 9 $a=3,\ b=2$ کے لیے مندرجہ ذیل عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) a + b (ii) 7a – 4b

(iv) a^3-b^3 (iii) $a^2+2ab+b^2$

حل $a=3$ اور $b=3$ رکھیے۔

(i) $a+b$ میں، تو ہم کو حاصل ہوگا:

$a + b = 3 + 2 = 5$

(ii) $7a - 4b$ میں، تو ہم کو حاصل ہوگا:

$7a - 4b = 7 \times 3 - 4 \times 2 = 21 - 8 = 13$

(iii) $a^2 + 2ab + b^2$ میں، تو ہم کو حاصل ہوگا

$$a^2 + 2ab + b^2 = 3^2 + 2\times3\times2 + 2^2 = 9 + 2\times6 + 4 = 9 + 12 + 4 = 25$$

(iv) $a^3 - b^3$ میں، تو ہم کو حاصل ہوگا:

$$a^3 - b^3 = 3^3 - 2^3 = 3\times3\times3 - 2\times2\times2 = 9\times3 - 4\times2 = 27 - 8 = 19$$

مشق 12.3

1۔ اگر $m = 2$، تو مندرجہ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $m - 2$ (ii) $3m - 5$ (iii) $9 - 5m$

(iv) $3m^2 \;\; 2m \;\; 7$ (v) $\frac{5m}{2} - 4$

2۔ اگر $p = -2$، تو مندرجہ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $4p + 7$ (ii) $-3p^2 + 4p + 7$ (iii) $-2p^3 - 3p^2 + 4p + 7$

3۔ جب $x = -1$ ہوتو مندرجہ ذیل عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $2x - 7$ (ii) $-x + 2$ (iii) $x^2 + 2x + 1$

(iv) $2x^2 - x - 2$

4۔ اگر $a = 2, b = -2$ ہوتو مندرجہ ذیل عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $a^2 + b^2$ (ii) $a^2 + ab + b^2$ (iii) $a^2 - b^2$

5۔ جب، $a = 0, b = -1$ ہوتو دی گئی عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $2a + 2b$ (ii) $2a^2 + b^2 + 1$ (iii) $2a^2b + 2ab^2 + ab$

(iv) $a^2 + ab + 2$

6۔ اگر $x=2$ ہے تو مندرجہ ذیل عبارتوں کو حل کیجیے، اور قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $x + 7 + 4(x - 5)$ (ii) $3(x + 2) + 5x - 7$

(iii) $6x + 5(x - 2)$ (iv) $4(2x - 1) + 3x + 11$

7۔ مندرجہ ذیل عبارتوں کو حل کیجیے اور ان کی قیمت معلوم کیجیے اگر $x = 3, a = -1, b = -2$ ہوں۔

(i) $3x - 5 - x + 9$ (ii) $2 - 8x + 4x + 4$

(iii) $3a + 5 - 8a + 1$ (iv) $10 - 3b - 4 - 5b$

(v) $2a - 2b - 4 - 5 + a$

8۔ (i) $z=10$ تو $z^3-3(z-10)$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(ii) اگر $p=-10$ تو $p^2-2p-100$

9۔ a کی قیمت کیا ہوگی اگر $2x^2+x-a$ کی قیمت 5 ہے جب کہ $x=0$ ہو۔

10۔ عبارت کو حل کیجیے اور اس کی قیمت معلوم کیجیے جب $a=3$ اور $b=3$ ہو۔

$2(a^2+ab)+3-ab$

12.8 الجبریائی عبارتوں کا استعمال-فارمولے اور قواعد

(Using Algebraic Expressions – Formulas and Rules)

ہم نے پہلے بھی دیکھا ہے کہ ریاضی میں الجبریائی عبارتوں کا استعمال کرکے فارمولوں اور قاعدوں کو جامع اور مختصر انداز میں دیکھا جا سکتا ہے۔ ہم نیچے بہت سی مثالیں دیکھیں گے۔

- **احاطے کے فارمولے (Perimeter formulas)**

1۔ ایک مساوی ضلعی مثلث کا احاطہ = 3 × اس کے ضلع کی لمبائی۔ اگر ہم مساوی ضلعی مثلث کے ضلع کی لمبائی کو l سے ظاہر کریں تو

مساوی ضلعی مثلث کا احاطہ $= 3l$

2۔ اسی طرح، مربع کا احاطہ $= 4l$

جہاں l = مربع کے ضلع کی لمبائی

3۔ منظّم پانچ ضلعی کا احاطہ $= 5l$

جہاں l = پانچ ضلعی کے ضلع کی لمبائی ہے

- **رقبے کے فارمولے (Area formulas)**

1۔ اگر ایک مربع کی لمبائی l ہے تو مربع کا رقبہ l^2

2۔ اگر ہم ایک مستطیل کی لمبائی 'l' اور ایک اس کی چوڑائی کو 'b' سے ظاہر کریں تو مستطیل کا رقبہ $lb = l \times b$

3۔ اسی طرح اگر ایک مثلث کا قاعدہ 'b' اور اونچائی 'h' سے ظاہر کی جائے تو مثلث کا رقبہ $\frac{bh}{2} = \frac{b \times 4}{2}$

کسی دی ہوئی مقدار کے لیے کوئی الجبرائی عبارت جب فارمولہ بن جاتی ہے تو مقدار کی قیمت کسی بھی طرح معلوم کی جاسکتی ہے۔
مثال کے طور پر، 3 سم لمبائی والے ایک مربع کے لیے، قیمت 3 سم = l مربع کے احاطہ کی عبارت یعنی $4l$ میں رکھ کر نکالی جاسکتی ہے۔

دیے گئے مربع کا احاطہ = (4×3) سم = 12 سم

اسی طرح، مربع کا رقبہ معلوم کیا جاتا ہے مربع کے رقبہ کی عبارت یعنی l^2 میں l (= 3 سم) رکھ کر۔

دیے گئے مربع کا رقبہ = (3^2) مربع سم = 9 مربع سم

● عددی پیٹرن کے قاعدے (Rules for number patterns)

مندرجہ ذیل بیانات کو پڑھیے۔

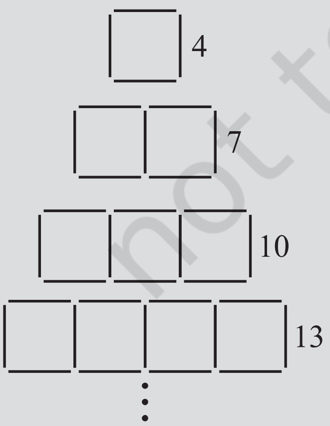
1۔ اگر ایک فطری عدد کو n سے ظاہر کیا جاتا ہے، اس کا جانشین/قائم مقام $(n+1)$۔ ہم اس کو کسی بھی فطری عدد کے لیے تصدیق کر سکتے ہیں۔

مثال کے طور پر اگر $n=10$، اس کا قائم مقام $n+1=11$ ہے۔

2۔ اگر کسی فطری عدد کو n سے ظاہر کیا جائے تو $2n$ ایک جفت عدد اور $(2n+1)$ ایک طاق عدد ہے۔ آیئے اس کو کسی بھی عدد کے لیے تصدیق کریں، جیسے 15; $2n = 2 \times n = 2 \times 15 = 30$، بلاشبہ جفت عدد ہے اور $2n + 1 = 2 \times 15 + 1 = 30 + 1 = 31$ بلاشبہ طاق عدد ہے۔

اسے کیجیے

برابر لمبائی کی قطعات خط (چھوٹی) لیجیے جیسے ماچس کی تیلیاں خلال یا اسٹرا کے ٹکڑے کے برابر لمبائی کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑے کر لیجیے۔ ان کو جوڑ کر نیچے دی گئی اشکال کے دکھائے گئے پیٹرن بنائیے۔



شکل 12.2

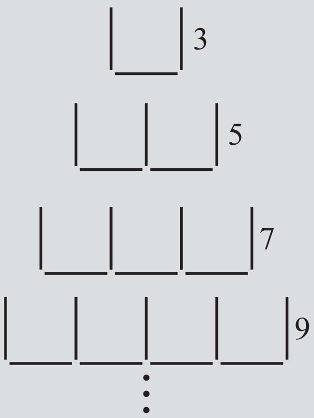
1۔ تصویر 12.1 میں پیٹرن کا مشاہدہ کیجیے۔

4 قطعہ خط کو ملا کر بنائی گئی شکل کے بار بار دہرانے سے یہ بنا ہے جیسا کہ آپ نے دیکھا کہ ایک شکل کو بنانے کے لیے 4 قطعات کی ضرورت ہوتی ہے، 2 اشکال کے لیے 7 کی اور 3 کے لیے 10 کی وغیرہ وغیرہ۔ اگر اشکال کی تعداد 'n' ہے تو n اشکال بنانے کے لیے مطلوبہ قطعات کو $(3n+1)$ سے دکھایا جائے گا۔

آپ اس کی $n = 1, 2, 3, 4, ..., 10,$ وغیرہ لے کر تصدیق کر سکتے ہیں۔ مثال، اگر بنائے گئے حروف کی تعداد 3 ہے تو مطلوبہ

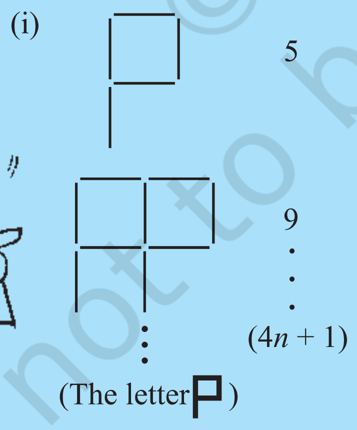
قطعات خط $10 = 1 + 9 = 1 + 3 \times 3$ ہے، جیسا کہ تصویر میں دکھائی دے رہا ہے۔

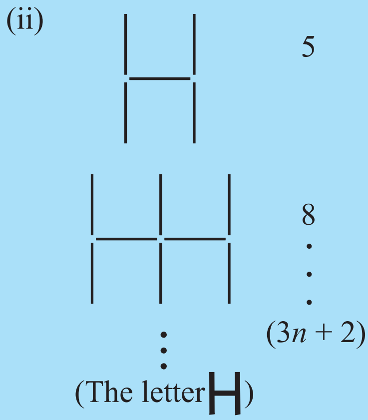
2۔ اب، تصویر 12.2 کے پیٹرن ہی لیجیے، یہاں پر شکل 1.1 بار بار دوہرائی گئی ہے۔ ... ,1, 2, 3, 4 اشکال کو بنانے کے لیے مطلوبہ قطعات کی تعداد بالترتیب ... ,3, 5, 7, 9 ہے۔ اگر بنائی گئی اشکال کو n سے ظاہر کیا جائے تو مطلوبہ قطعات کو $(2n+1)$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ n کی کوئی بھی قیمت لے کر آپ عبارت کو درست کر کے جانچ سکتے ہیں۔ جیسے، $n=4$ تو $(2n+1) = (2 \times 4) + 1 = 9$ جو کہ بلاشبہ 4 کو بنانے کے لیے قطعات کی تعداد ہے۔



کوشش کیجیے:

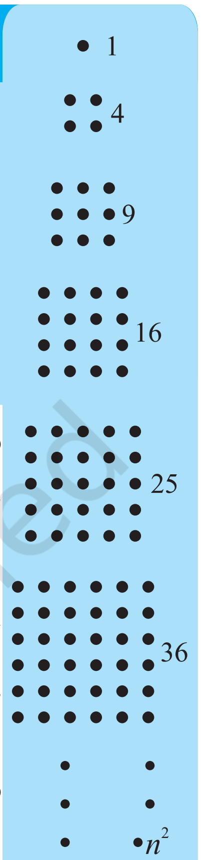
دکھائی گئی بنیادی اشکال کی مدد سے پیٹرن بنائیے





(شکل کو بنانے کے لیے مطلوبہ قطعات کی تعداد دائیں جانب دی گئی ہیں۔ اور n اشکال کو بنانے کے لیے مطلوبہ قطعات کی تعداد کے لیے عبارت بھی دی گئی ہے۔)

اسی طرح کے پیٹرن ڈھونڈھنے کے لیے مزید کوشش کیجیے۔



اسے کیجیے

مندرجہ ذیل ڈاٹس کو پیٹرن بنائیے۔ اگر آپ ایک گراف پیپر یا ڈاٹ پیپر لیں تو پیٹرن بنانے میں آسانی ہوگی۔ غور کیجیے کہ مربع شکل میں ڈاٹس کی ترتیب کیسی ہے۔ اگر کسی خاص شکل میں عمودی یا افقی قطار میں ڈاٹس کی تعداد کو متغیر n سے ظاہر کریں تو شکل میں ڈاٹس کی تعداد کو عبارت $n \times n = n^2$ سے دکھایا جاتا ہے۔ مثلاً، $n=4$ لیجیے۔ ایسی شکل، جس کی افقی قطار (یا عمودی قطار) میں ڈاٹس ہوں ڈاٹس کی تعداد $4\times4=16$ ہے بلاشبہ جیسا کہ تصویر میں دکھایا گیا ہے۔ آپ n کی دوسری قیمتوں کے لیے بھی اس کی جانچ کر سکتے ہیں۔ قدیم یونانی ریاضی دانوں نے $1, 4, 9, 16, 25,$ اعداد کو مربع عدد کہا ہے۔

- **کچھ اور عددی پیٹرن (Some more number patterns)**

آیئے اب ہم کچھ اور عددی پیٹرن کو دیکھتے ہیں۔ اس دفعہ ہم بغیر کسی ڈرائینگ کی مدد کے دیکھیں گے.. $3, 6, 9, 12, ..., 3n, ..$

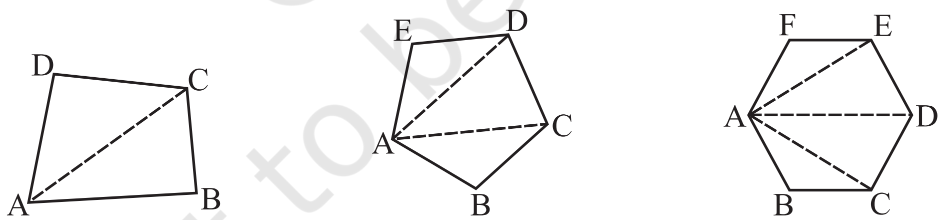
یہ اعداد 3 کے ضعف ہیں اور بڑھتی ترتیب میں لکھے گئے ہیں۔ n^{th} مقام پر آنے والے رکن کو عبارت $3n$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

آپ آسانی سے دسویں مقام پر آنے والے رکن کو معلوم کر سکتے ہیں (جو کہ $30=3\times10$): سوواں مقام (جو کہ $300=3\times100$ ہے) اور اسی طرح آگے بھی۔

- **جیومیٹری میں پیٹرن (Pattern in geometry)**

ایک چار ضلعی کے ایک راس سے ہم کتنے وتر کھینچ سکتے ہیں؟ جانچ کیجیے۔ یہ ایک ہے۔

پانچ ضلعی کے ایک راس سے؟ جانچ کیجیے، یہ 2 ہے۔



چھ ضلعی کے ایک راس سے، یہ 3 ہے۔

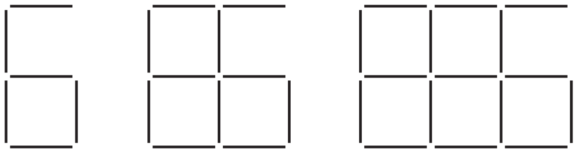
کثیر رکنی کے ایک راس سے کھینچے جانے والے وتروں کی تعداد $(n-3)$ ہے۔ اس کی تصویر بنا کر سات ضلعی (7 اضلاع) کے لیے جانچیے اور مثلث (3 ضلع) کے لیے یہ عدد کیا ہے؟

دھیان دیجیے کہ کسی ایک راس سے کھینچے جانے والے وتر کثیر ضلعی کو اتنے مثلث میں بانٹتے ہیں جتنے کہ ایک راس سے وتر کھینچے جا سکتے ہیں۔ اس میں 1 اور جوڑ دیں۔

مشق 12.4

1۔ برابر کے قطعات خط سے ہندسوں کے بننے والے پیٹرنس پر دھیان دیجیے۔ آپ نے قطعات سے بنے ہندسوں کے ایسے نظارے الیکٹرانک گھڑیوں یا کلکولیٹر میں دیکھے ہوں گے۔

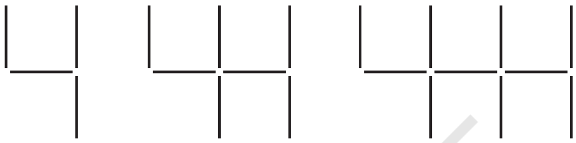
(a)



... ...

6 11 16 21 ... $(5n + 1)$ ...

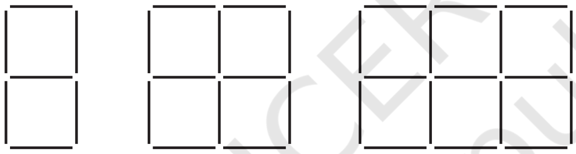
(b)



... ...

4 7 10 13 ... $(3n + 1)$ ...

(c)



... ...

7 12 17 22 ... $(5n + 2)$ ...

اگر بننے والے ہندسوں کی تعداد n ہے تو n سے بنائے گئے کی قطعات کی مطلوبہ تعداد الجبرائی عبارت پیٹرن کے دائیں جانب دی گئی ہیں۔

648 قسم کے 5, 10, 100 ہندسے بنانے کے لیے قطعات کی مطلوبہ تعداد کیا ہے۔

2۔ عددی پیٹرن کے جدول کو مکمل کرنے کے لیے دی گئی الجبرائی عبارت کا استعمال کیجیے۔

ارکان										عبارت	نمبرشمار
…	100^{th}	…	10^{th}	…	5^{th}	4^{th}	3^{rd}	2^{nd}	1^{st}		
–	–	–	19	–	9	7	5	3	1	$2n - 1$	(i)
–	–	–	–	–	–	11	8	5	2	$3n + 2$	(ii)
–	–	–	–	–	–	17	13	9	5	$4n + 1$	(iii)
–	–	–	–	–	–	48	41	34	27	$7n + 20$	(iv)
–	10,001	–	–	–	–	17	10	5	2	$n^2 + 1$	(v)

ہم نے کیا سیکھا؟

1۔ متغیر اور مستقل الجبریائی عبارتیں بنتی ہیں۔ ہم متغیر اور مستقل پر جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کے اعمال کا استعمال کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر عبارت $4xy + 7$، متغیر x اور y اور مستقل 4 اور 7 سے بنی ہے۔ عدد 4، اور متغیر x اور y کے حاصل ضرب $4 \times y$ ہے اور اس حاصل ضرب میں مستقل 7 کو جوڑ کر عبارت حاصل ہوئی۔

2۔ عبارتیں ارکان سے بنتی ہیں۔ ارکان کو جوڑ کر عبارتیں بنتی ہے۔ مثلاً، ارکان $4xy$ اور 7 کو جوڑ کر عبارت $4xy$ بنا۔

3۔ ایک رکن اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔ عبارت $4xy+7$ میں رکن $4xy$ اجزائے ضربی x، y اور 4 کا حاصل ضرب ہے۔ وہ اجزائے ضربی جس میں متغیر بھی ہوں الجبریائی اجزائے ضربی کہلاتے ہیں۔

4۔ ایک رکن کا عددی جزوضربی کہلاتا ہے۔ کبھی کبھی رکن کا کوئی بھی ایک جزوضربی رکن کے باقی حصے کا ضریب کہلاتا ہے۔

5۔ کوئی بھی عبارت جس میں ایک یا زیادہ ارکان ہوتے ہیں کثیر رکنی کہلاتا ہے۔ خاص طور پر ایک رکن کی عبارت کو یک رکنی، دو رکن کی عبارت کو دو رکنی اور تین ارکان والی عبارت کو سہ رکنی کہتے ہیں۔

6۔ وہ ارکان جن میں الجبریائی اجزائے ضربی ایک سے ہوں یکساں کہلاتے ہیں۔ اور وہ ارکان جن میں الجریائی اجزائے ضربی مختلف ہوں غیر یکساں ارکان کہلاتے ہیں۔ لہٰذا $4xy$ اور $-3xy$ یکساں ارکان میں لیکن $4xy$ اور $-3xy$ غیر یکساں ارکان ہیں۔

7۔ دو یکساں ارکان کی حاصل جمع (یا تفریق) ایک یکساں رکن ہوتی ہے جس کا ضریب دونوں یکساں ارکان کے ضریبوں کی حاصل جمع (یا تفریق) ہوتی ہے۔ لہٰذا $8xy - 3xy = (8 - 3)xy$، $5xy$

8۔ جب ہم دو الجبریائی عبارتوں کو جوڑتے ہیں تو یکساں ارکان اوپر دیے گئے طریقے سے جوڑے جاتے ہیں۔ اور غیر یکساں ارکان کو ایسے ہی چھوڑ دیا جاتا ہے۔ لہٰذا $4x^2 + 5x$ اور $2x + 3$ کی حاصل جمع ہے۔ $4x^2 + 7x + 2$ یکساں ارکان $5x$ اور $2x$ کو $7x$ میں جوڑ دیا جاتا ہے۔ غیر یکساں $4x^2$ ارکان اور 3 جوں کے توں چھوڑ دیئے جاتے ہیں

9۔ کسی عبارت کو حل کرنے یا کسی فارمولے کو استعمال کرنے میں ہمارا مقصد اس عبارت کی تعداد کا پتا لگانا ہوتا ہے۔ عبارت کی مقدار اس کے ارکان کی تعداد پر منحصر ہوتی ہے جن ارکان سے وہ عبارت بنتی ہے۔ لہٰذا $7x-3$ کی تعداد جبکہ $x=5$ ہو، 32 ہوگی کیونکہ $7(5)-3=35-3=32$

10۔ ریاضیات میں فارمولے اور قوانین مختصر اور عام شکل میں لکھے جاتے ہیں جن میں کہ الجبرا کی عبارتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ لہٰذا مستطیل کا رقبہ $=lb$، جہاں کہ l لمبائی ہے اور b مستطیل کی چوڑائی ہے۔ اعداد کے سلسلے میں (nth) نمبر کی عبارت میں n شامل ہوتا ہے۔ لہٰذا، نمبرات 11، 21، 31، 41، ..... کا اعدادی سلسلہ $(10n+1)$ ہوتا ہے۔