पाठ 2. बहुपद

प्रश्नावली 2.1

Q1. निम्नलिखित व्यंजकों में कौन-कौन एक चर में बहुपद हैं और कौन-कौन नहीं हैं ? कारण के साथ उत्तर दीजिए :
(i) $4x^2 – 3x + 7$

(ii) $y^2 + \sqrt{2}$

(iii)$3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

(iv) $y + 2/y$

(v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

हल:

(i) $4x^2 – 3x + 7$

यह एक चर में बहुपद है क्योंकि चर घात एक प्राकृत संख्या है |

(ii) $y^2 + \sqrt{2}$

यह एक चर में बहुपद है क्योंकि चर घात एक प्राकृत संख्या है |

(iii)$3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

यह एक चर में बहुपद नहीं है क्योंकि चर का घात एक भिन्नात्मक संख्या है कोई प्राकृत संख्या नहीं है |

(iv) $y + 2/y$

यह एक चर में बहुपद नहीं है |

(v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

यह एक चर में बहुपद नहीं है | बल्कि यह तीन चर में बहुपद है |

Q2. निम्नलिखित में से प्रत्येक में x^2 का गुणांक लिखिए |

(i) $2 + x^2 + x$

(ii) $2 – x^2 + x3$ (

iii) $\pi/2\ x^2 + x$

(iv) $\sqrt{2}x - 1$

हल:

(i) $2 + x^2 + x$

x^2 का गुणांक = 1

(ii) $2 - x^{2} + x3$

x2 का गुणांक = −1

(iii) $\pi/2$ x2 + x

x2 का गुणांक = $\pi/2$

(iv) $\sqrt{2}x - 1$

x2 का गुणांक = 0 [क्योंकि यहाँ x2 नहीं है इसलिए इसका गुणांक शून्य होगा |]

Q3. 35 घात के द्विपद का और 100 घात के एकपदी का एक-एक उदाहरण दीजिए |

हल:

35 घात का एक द्विपदी

⇒ $2x^{35} + 5y$

Note: द्विपदी का अर्थ दो पदों वाला व्यंजक जैसे - x + 5, 3a - 2b, 3t + 7 आदि.

100 घात का एक एकपदी

⇒ $3y^{100}$

Note: एकपदी का अर्थ एक पद वाला व्यंजक जैसे- 3x, 5t, y, 3xy आदि.

Q4. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक के घात लिखिए:
(i) $5x^{3} + 4x^{2} + 7x$

(ii) $4 - y^{2}$

(iii) $5t - \sqrt{7}$

(iv) 3

हल:

(i) $5x^{3} + 4x^{2} + 7x$

उत्तर: बहुपद का घात = 3

[**नोट:** बहुत का घात ज्ञात करने के लिए सभी घातों में से सबसे बड़ी घात को चुना जाता है |]

(ii) $4 - y^{2}$

उत्तर: बहुपद का घात = 2

(iii) $5t - \sqrt{7}$

उत्तर: बहुपद का घात = 1

(iv) 3

उत्तर: बहुपद का घात = 0

[**नोट:** चूँकि यहाँ कोई चर नहीं है इसलिए बहुपद का घात शून्य (0) है ।]

Q5. निम्नलिखित को रैखिक, द्विघात और त्रिघात बहुपद में वर्गीकृत कीजिए:

(i) $x^2 + x$

(ii) $x - x^3$

(iii) $y + y^2 + 4$

(iv) $1 + x$

(v) $3t$

(vi) r^2

(vii) $7x^2$

हल:

(i) $x^2 + x$

उत्तर: द्विघात बहुपद

(ii) $x - x^3$

उत्तर: त्रिघात बहुपद

(iii) $y + y^2 + 4$

उत्तर: द्विघात बहुपद

(iv) $1 + x$

उत्तर: रैखिक बहुपद

(v) $3t$

उत्तर: रैखिक बहुपद

(vi) r^2

उत्तर: द्विघात बहुपद

(vii) $7x^2$

उत्तर: त्रिघात बहुपद

प्रश्नावली 2.2

प्र1. निम्नलिखित पर बहुपद $5x - 4x^2 + 3$ के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

हल:

(i) $p(x) = 5x - 4x^2 + 3$

बहुपद p(x) में x = 0 रखने पर

$P(0) = 5(0) - 4(0)^2 + 3$

$= 0 - 0 + 3$

$= 3$

अत: बहुपद का मान 3 है |

(ii) $p(x) = 5x - 4x^2 + 3$

बहुपद p(x) में x = -1 रखने पर

$P(1) = 5(-1) - 4(-1)^2 + 3$

$= - 5 - 4 + 3$

$= - 9 + 3$

$= - 6$

अत: बहुपद का मान - 6 है |

(iii) $p(x) = 5x - 4x^2 + 3$

बहुपद p(x) में x = 2 रखने पर

$P(2) = 5(2) - 4(2)^2 + 3$

$= 10 -16 + 3$

$= - 3$

अत: बहुपद का मान - 3 है |

Q2. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक के लिए p(0), p(1) और p(2) ज्ञात कीजिए |

(i) $p(y) = y^2 – y + 1$

(ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 – t^3$

(iii) $p(x) = x^3$

(iv) $p(x) = (x – 1) (x + 1)$

हल:

(i) $p(y) = y^2 - y + 1$

P(0) के लिए

$P(0) = (0)^2 - 0 + 1$

$=1$

P(1) के लिए

$P(1) = (1)^2 - 1 + 1$

$= 1 - 1 + 1$

$= 1$

P(2) के लिए

$P(2) = (2)^2 - 2 + 1$

$= 4 - 2 + 1$

$= 3$

(ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

P(0) के लिए

$P(0) = 2 + 0 + 2(0)^2 - (0)^3$

$= 2$

P(1) के लिए

$P(1) = 2 + 1 + 2(1)^2 - (1)^3$

$= 4$

P(2) के लिए

$P(2) = 2 + 2 + 2(2)^2 - (2)^3$

$= 4 + 8 - 8$

$= 4$

(iii) $p(x) = x^3$

P(0) के लिए

$P(0)=(0)^3 =0$

P(1) के लिए

$P(1)=(1)^3 =1$

P(2) के लिए

$P(2)=(2)^3=8$

(iv) P(x) = (x − 1) (x + 1)

P(0) के लिए

P(0)= (0-1) (0+1)=(-1) (1) =-1

P(1) के लिए

P(1)= (1-1) (1+1) =0(1) =0

P(2) के लिए

P(2)= (2-1) (2+1)=1(3) =3

Q3. सत्यापित कीजिए कि दिखाए गए मान निम्नलिखित स्थितियों में संगत बहुपद के शुन्यक हैं :

हल:

(i) $p(x) = 3x + 1, \ x = -\frac{1}{3}$

(ii) $p(x) = 5x - \pi, x = \frac{4}{5}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1, x = 1, -1$

(iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2), x = -1, 2$

(v) $P(x) = x^2, x = 0$

(vi) $p(x) = lx + m, x = -\frac{m}{l}$

(vii) $P(x) = 3x^2 - 1, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

(viii) $p(x) = 2x + 1, x = \frac{1}{2}$

(i) P(x) = 3x + 1

Given $x = \frac{1}{3}$

$$P\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right)+1$$

$$= -1 + 1$$

$$= 0$$

p(x) = 0, अत: दिया गया x का मान बहुपद का शुन्यक है |

(ii) P(x) = 5x - π

$$P\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(\frac{4}{5}\right) - \pi$$

= 5 - π

∵ P(x) ≠ 0

∴ x के लिए दिया गया मान P(x) का शुन्यक नहीं है |

(iii) P(x) = x2 - 1

(iv) P(x) =(x+1) (x-2)

For x = – 1,

P (-1) = (-1+1) (-1-2)

=0(3) =0,

For x = 2

P (2) = (2+1) (2-2)

= (3) (0) =0,

In both the cases P(x) = 0,

Therefore x = – 1, 2 are zeroes of polynomial.

(v) $\mathbf{p(x) = x^2}$

$P(0) = (0)^2 = 0,$

$P(x) = 0$, Therefore $x = 0$ is zero of polynomial.

(vi) $\mathbf{P(x) = lx + m}$

$P(-\frac{m}{l}) = (l \times -\frac{m}{l}) + m$

$= - m + m = 0,$

$P(x) = 0$, Therefore $x = -\frac{m}{l}$ is zero of polynomial.

(vii) $\mathbf{P(x) = 3x^2 - 1}$

For $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$P(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = 3(-\frac{1}{\sqrt{3}})^2 - 1$

$= 1 - 1 = 0,$

$P(x) = 0$, Therefore $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ is zero of polynomial.

For $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$P(\frac{2}{\sqrt{3}}) = 3(\frac{2}{\sqrt{3}})^2 - 1$

$= 4 - 1 = 3$

$P(x) \neq 0$, Therefore $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ is not zero of polynomial.

(viii) $P(x) = 2x + 1$

For $x = \frac{1}{2}$

$P(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2}) + 1$

$= 1 + 1 = 2$,

$P(x) \neq 0$, Therefore $x = \frac{1}{2}$ is not zero of polynomial.

Q4. निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति मेंबहुपद का शुन्यक ज्ञात कीजिए : (ii) $P(x) = x - 5$

(iii) $Px) = 2x + 5$

(iv) $P(x) = 3x - 2$

(v) $P(x) = 3x$

(vi) $P(x) = ax,\ a \neq 0$

हल (i) :

(i) $P(x) = x + 5$

$\Rightarrow x + 5 = 0$

$\Rightarrow x = -5$

बहुपद का शुन्यक - 5 हैं |

हल (ii) :

(ii) $P(x) = x - 5$

$\Rightarrow x - 5 = 0$

$\Rightarrow x = 5$

बहुपद का शुन्यक 5 है |

(iii) $P(x) = 2x + 5$

$P(x) = 0$

$2x + 5 = 0$

$2x = -5$

$x = -\frac{5}{2}$

बहुपद का शुन्यक - 5/2 है |

(iv) $P(x) = 3x - 2$

$3x - 2 = 0 \neq$

$x = \frac{2}{3}$

बहुपद का शुन्यक 2/3 है |

(v) $P(x) = 3x$

$3x = 0$

$3x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{3} \Rightarrow x = 0.$

(vi) $P(x) = ax,\ a \neq 0$

$ax = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{a} \Rightarrow x = 0.$

The zero of P(x) is 0.

प्रश्नावली 2.3

Q1. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को निम्नलिखित से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए :

(i) $x + 1$

(ii) $x - \frac{1}{2}$

(iii) x

(iv) x + θ

(v) 5 + 2x

हल : (i) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को $x + 1$ से भाग देने पर

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x + 1 \\
\hline
x + 1 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
 & x^3 + x^2 \\
 & (-) \quad (-) \\
\hline
 & \quad 2x^2 + 3x + 1 \\
 & \quad 2x^2 + 2x \\
 & \quad (-) \quad (-) \\
\hline
 & \qquad x + 1 \\
 & \qquad x + 1 \\
 & \qquad (-) \quad (-) \\
\hline
 & \qquad \quad 0
\end{array}
$$

अत: भाग देने पर शेषफल 0 है | **Ans.**

हल : (ii) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को $x - \frac{1}{2}$ से भाग देने पर

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + \frac{5x}{2} + \frac{7}{4} \\
\hline
x + \frac{1}{2} & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
 & \underset{(-)}{x^3} + \underset{(-)}{\frac{x^2}{2}} \\
\hline
 & \frac{5x^2}{2} + 3x + 1 \\
 & \underset{(-)}{\frac{5x^2}{2}} + \underset{(-)}{\frac{5x}{4}} \\
\hline
 & \frac{7x}{4} + 1 \\
 & \underset{(-)}{\frac{7x}{4}} + \underset{(-)}{\frac{7}{8}} \\
\hline
 & \frac{1}{8}
\end{array}
$$

अत: भाग देने पर शेषफल $\frac{1}{8}$ है | **Ans.**

हल : (iii) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को x से भाग देने पर

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 3x + 3 \\
\hline
x & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
 & \underset{(-)}{x^3} \\
\hline
 & 3x^2 + 3x + 1 \\
 & \underset{(-)}{3x^2} \\
\hline
 & 3x + 1 \\
 & \underset{(-)}{3x} \\
\hline
 & 1
\end{array}
$$

अत: भाग देने पर शेषफल 1 है | **Ans.**

हल : (iv) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को $x + \pi$ से भाग देने पर

$$x^2 + (-\pi + 3)x + (\pi^2 - 3\pi + 3)$$

$$x + \pi \overline{\big) \; x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

$$x^3 + \pi x^2$$

$$(-) \quad (-)$$

$$(-\pi + 3)x^2 + 3x + 1$$

$$(-\pi + 3)x^2 + (-\pi^2 + 3\pi)\, x$$

$$(-) \qquad (-)$$

$$(\pi^2 - 3\pi + 3)\, x + 1$$

$$(\pi^2 - 3\pi + 3)\, x + (\pi^3 - 3\pi^2 + 3\pi)$$

$$(-) \qquad (-)$$

$$-\pi^3 + 3\pi^2 - 3\pi + 1$$

अत: भाग देने पर शेषफल **- Π^3** + 3Π^2 - 3Π + 1 है | **Ans.**

हल : (v) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को 5 + 2x से भाग देने पर

यहाँ $5 + 2x = 0 \Rightarrow \; 2x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{2} \Rightarrow x + \frac{5}{2}$

$$x^2 + \frac{x}{2} + \frac{7}{4}$$

$$x + \frac{5}{2} \overline{\big) \; x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

$$x^3 + \frac{5x^2}{2}$$

$$(-) \quad (-)$$

$$\frac{x^2}{2} + 3x + 1$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{5x}{4}$$

$$(-) \quad (-)$$

$$\frac{7x}{4} + 1$$

$$\frac{7x}{4} + \frac{35}{8}$$

$$(-) \quad (-)$$

$$\frac{-27}{8}$$

अत: भाग देने पर शेषफल $\frac{-27}{8}$ है | **Ans.**

Q2. x^3 - ax^2 + 6x - a को x - a से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए |

हल : $p(x) = x^3 - ax^2 + 6x - a$ और $g(x) = x - a$ है |

$g(x) = x - a$ का शुन्यक

अत: $x - a = 0$

$x = a$

अत: शेषफल प्रमेय से

p(x) को x - a से भाग देने पर शेषफल प्रमेय द्वारा शेषफल p(a) प्राप्त होगा |

इसलिए, $p(a) = (a)^3 - a(a)^2 + 6(a) - a$

$= a^3 - a^3 + 6a - a$

$= 5a$

अत: शेषफल 5a है |

Q3. जाँच कीजिए कि 7 + 3x, $3x^3$ + 7x का एक गुणनखंड है या नहीं |

हल : $7 + 3x = 0$

$\Rightarrow \quad 3x = -7$

$\Rightarrow \quad x = \frac{-7}{3}$

अत: $7 + 3x$ का शुन्यक $\frac{-7}{3}$ है |

अब गुणनखंड प्रमेय से

यदि $p(\frac{-7}{3}) = 0$ तो 7 + 3x, $3x^3$ + 7x का एक गुणनखंड है अथवा नहीं है |

अत: $p(x) = 3x^3 + 7x$

तो $p\left(\frac{-7}{3}\right) = 3\left(\frac{-7}{3}\right)^3 + 7\left(\frac{-7}{3}\right)$

$= \frac{-343}{3} - \frac{49}{3}$

$= \frac{-343-147}{9}$

$= \frac{-490}{9}$

चूँकि शेषफल = $\frac{-490}{9}$ है |

अत: $p(x) \neq 0$ है |

इसलिए 7 + 3x, $3x^3$ + 7x का एक गुणनखंड नहीं है |

प्रश्नावली 2.4

Q1. बताइए कि निम्नलिखित बहुपदों में से किस बहुपद का एक गुणनखंड x + 1 है |

(i) $x^3 + x^2 + x + 1$

(ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

(iv) $x^3 - x^3 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

हल : (i) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

माना $g(x) = x + 1 = 0$

=> $\quad x = -1$

अब गुणनखण्ड प्रमेय के प्रयोग से

$p(x) = 0$ यदि $x = -1$ $p(x)$ का शुन्यक है |

अत: $p(x)$ में $x = -1$ रखने पर

$p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$p(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$

$= - 1 + 1 - 1 + 1$

$= 0$

चूँकि $p(-1) = 0$ इसलिए -1 $p(x)$ का शुन्यक है और $x + 1$ $p(x)$ का एक गुणनखंड है |

हल : (ii) $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

माना $g(x) = x + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad x = - 1$

अब गुणनखण्ड प्रमेय के प्रयोग से

$p(x) = 0$ यदि $x = -1$ $p(x)$ का शुन्यक है |

अत: $p(x)$ में $x = -1$ रखने पर

$p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$p(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$

$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1$

$= 1$

चूँकि $p(-1) = 1$ इसलिए -1 $p(x)$ का शुन्यक नहीं है इसलिए गुणनखंड प्रमेय से $x + 1$ $p(x)$ का एक गुणनखंड नहीं है |

हल : (iii) $p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

माना $g(x) = x + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad x = - 1$

अब गुणनखण्ड प्रमेय के प्रयोग से

$p(x) = 0$ यदि $x = -1$ $p(x)$ का शुन्यक है |

अत: $p(x)$ में $x = -1$ रखने पर

$p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

$p(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^3 + 3(-1)^2 + (-1) + 1$

$= 1 - 3 + 3 - 1 + 1$

$= 1$

चूँकि p(-1) = 1 इसलिए -1 p(x) का शुन्यक नहीं है अत: गुणनखंड प्रमेय से x + 1 p(x) का एक गुणनखंड नहीं है |

हल : (iv) $p(x) = x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

माना g(x) = x + 1 = 0

=> x = - 1

अब गुणनखण्ड प्रमेय के प्रयोग से

p(x) = 0 यदि x = -1 p(x) का शुन्यक है |

अत: p(x) में x = -1 रखने पर

$$p(x) = x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$$

$$p(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - (2 + \sqrt{2})(-1) + \sqrt{2}$$

$$= -1 - 1 + 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$= -2 + 2 + 2\sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

चूँकि $p(-1) = 2\sqrt{2}$ है

इसलिए -1 p(x) का शुन्यक नहीं है अत: गुणनखंड प्रमेय से x + 1 p(x) का एक गुणनखंड नहीं है |

Q2. गुणनखंड प्रमेय लागु करके बताइए कि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में g(x), p(x) का एक गुणनखंड है या नहीं :

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 – 2x – 1, g(x) = x + 1$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, g(x) = x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 – 4x^2 + x + 6, g(x) = x – 3$

हल : (i) $p(x) = 2x^3 + x^2 – 2x – 1, g(x) = x + 1$

g(x) का शुन्यक => x + 1 = 0

अत: x = - 1

गुणनखंड प्रमेय लागु करने पर यदि p(-1) = 0, तो गुणनखंड है अथवा नहीं |

अत: $p(x) = 2x^3 + x^2 – 2x – 1$ दिया है |

अब, $p(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 – 2(-1) – 1$

$= 2(-1) + 1 + 2 - 1$

$= -2 + 1 + 2 - 1$

$= 0$

चूँकि $p(-1) = 0$ है इसलिए -1 $p(x)$ का एक शुन्यक है अत: गुणनखंड प्रमेय से $x + 1$ $p(x)$ का एक गुणनखंड है |

हल : (ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x + 2$

$g(x)$ का शुन्यक => $x + 2 = 0$

अत: $x = -2$

गुणनखंड प्रमेय लागु करने पर यदि $p(-2) = 0$, तो गुणनखंड है अथवा नहीं |

अत: $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ दिया है |

अब, $p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 1$

$= -8 + 12 - 6 + 1$

$= 13 - 14$

$= -1$

चूँकि $p(-2) = -1$ है इसलिए -2 $p(x)$ का एक शुन्यक नहीं है अत: गुणनखंड प्रमेय से $x + 2$ $p(x)$ का एक गुणनखंड भी नहीं है |

हल : (iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, $g(x) = x - 3$

$g(x)$ का शुन्यक => $x - 3 = 0$

अत: $x = 3$

गुणनखंड प्रमेय लागु करने पर यदि $p(3) = 0$, तो गुणनखंड है अथवा नहीं |

अत: $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ दिया है |

अब, $p(3) = (3)^3 - 4(3)^2 + 3 + 6$

$= 27 - 36 + 3 + 6$

$= 36 - 36$

$= 0$

चूँकि $p(3) = 0$ है इसलिए 3 $p(x)$ का एक शुन्यक है अत: गुणनखंड प्रमेय से $x - 3$ $p(x)$ का एक गुणनखंड है |

Q3. k का मान ज्ञात कीजिए जबकि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में (x - 1), p(x) का एक गुणनखंड हो :

(i) $p(x) = x^2 + x + k$

(ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$

(iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

हल : (i) $p(x) = x^2 + x + k$

x - 1 p(x) का एक गुणनखंड है |

इसलिए $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

अत: 1 p(x) का शुन्यक है |

इसलिए $p(1) = 0$

अब $p(x) = x^2 + x + k = 0$

$p(1) = (1)^2 + (1) + k = 0$

$1 + 1 + k = 0$

$2 + k = 0$

$k = -2$

हल : (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

चूँकि x - 1 p(x) का एक गुणनखंड है |

इसलिए $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

अत: 1 p(x) का शुन्यक है |

इसलिए $p(1) = 0$

अब $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2} = 0$

$p(1) = 2(1)^2 + k(1) + \sqrt{2} = 0$

$2 + k + \sqrt{2} = 0$

$k = -2 - \sqrt{2}$

$k = -(2 + \sqrt{2})$

हल : (iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$

चूँकि x - 1 p(x) का एक गुणनखंड है |

इसलिए $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

अत: 1 p(x) का शुन्यक है |

इसलिए $p(1) = 0$

अब $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$

$p(1) = k(1)^2 - \sqrt{2}(1) + 1 = 0$

$k - \sqrt{2} + 1 = 0$

$k = \sqrt{2} - 1$

हल : (iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

चूँकि x - 1 p(x) का एक गुणनखंड है |

इसलिए x - 1 = 0 => x = 1

अत: 1 p(x) का शुन्यक है |

इसलिए p(1) = 0

अब $p(x) = kx^2 - 3x + k = 0$

$p(1) = k(1)^2 - 3(1) + k = 0$

$k - 3 + k = 0$

$2k - 3 = 0$

$2k = 3$

$k = 3/2$

Q4. गुणनखंड ज्ञात कीजिए :

(i) $12x^2 - 7x + 1$

(ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iii) $6x^2 + 5x - 6$

(iv) $3x^2 - x - 4$

हल : (i) $12x^2 - 7x + 1$

=> $12x^2 - 3x - 4x + 1$

=> $3x(4x - 1) - 1(4x - 1)$

=> $(4x - 1)(3x - 1)$

हल : (ii) $2x^2 + 7x + 3$

=> $2x^2 + 6x + x + 3$

=> $2x(x + 3) + 1(x + 3)$

=> $(x + 3)(2x + 1)$

हल : (iii) $6x^2 + 5x - 6$

=> $6x^2 + 9x - 4x - 6$

=> $3x(2x + 3) - 2(2x + 3)$

=> $(2x + 3)(3x - 2)$

हल : (iv) $3x^2 - x - 4$

=> $3x^2 - 4x + 3x - 4$

=> $x(3x - 4) + 1(3x - 4)$

=> $(3x - 4)(x + 1)$

Q5. गुणनखंड ज्ञात कीजिए :

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

(ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

(iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

हल : (i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

बहुपद का संभावित शुन्यक हैं - ± 1 और ± 2

अत: बहुपद $x^3 - 2x^2 - x + 2$ में $x = 1$ रखने पर

$p(x) = (1)^3 - 2(1)^2 - (1) + 2$

$= 1 - 2 - 1 + 2$

$= 0$

चूँकि $p(x) = 0$ है, अत: 1 $p(x)$ का शुन्यक है इसलिए $x - 1$ $p(x)$ का एक गुणनखंड है |

पहली विधि : $x - 1$ से $x^3 - 2x^2 - x + 2$ में भाग देने पर

$$x^2 - x - 2$$

$$x - 1 \overline{\big)\, x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

$$x^3 - x^2$$

$$(-) \quad (+)$$

$$-x^2 - x + 2$$

$$-x^2 + x$$

$$(+) \quad (-)$$

$$-2x + 2$$

$$-2x + 2$$

$$(+) \quad (-)$$

$$0$$

अत: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x^2 - x - 2)$ [चूँकि $p(x) = g(x) \times q(x)$]

$= (x - 1)(x^2 - 2x + x - 2)$

$= (x - 1)[x(x - 2) + 1(x - 2)]$

$= (x - 1)(x - 2)(x + 1)$

नोटः चूँकि यह त्रिघात बहुपद है इसलिए इसके तीन शुन्यक होंगे और तीन गुणनखंड होंगे |

दूसरी विधि : हम यहाँ पर $x - 1$ से भाग की लंबी प्रक्रिया न अपनाकर गुणनखंड विधि से अन्य गुणनखंड प्राप्त कर सकते हैं | चूँकि एक गुणनखंड $x - 1$ प्राप्त है |

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x - 1) - x^2 - x + 2$

$= x^2(x - 1) - x(x - 1) - 2x + 2$

$= x^2(x - 1) - x(x - 1) - 2(x - 1)$

$= (x - 1)(x^2 - x - 2)$

$= (x - 1)(x^2 - 2x + x - 2)$

$= (x - 1)[x(x - 2) + 1(x - 2)]$

$= (x - 1)(x - 2)(x + 1)$

तीसरी विधि : हमें बहुपद का संभावित शुन्यक ± 1 और ± 2 ज्ञात है :

p(x) में x = 1, - 1, 2 और - 2 रखने पर

p(1) = 0 है | अत: x - 1 एक गुणनखंड है |

अब $p(-1) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

$= (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2$

$= -1 - 2 + 1 + 2$

$= 0$

अत: p(-1) = 0 है अत: x + 1 एक गुणनखंड है |

अब $p(2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

$= (2)^3 - 2(2)^2 - (2) + 2$

$= 8 - 8 - 2 + 2$

$= 0$

p(2) = 0 है अत: x - 2 p(x) का एक गुणनखंड है |

अब $p(-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

$= (-2)^3 - 2(-2)^2 - (-2) + 2$

$= -8 - 8 + 2 + 2$

$= -16 + 4 = -12$

$p(-2) \neq 0$ अत: - 2 p(x) का शुन्यक नहीं है |

अत: $x^3 - 2x^2 - x + 2$ के गुणनखंड है (x - 1) (x + 1) (x - 2) **उत्तर**

हल : (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

बहुपद का संभावित शुन्यक ± 1 और ±5 है |

बहुपद में x = -1 रखने पर

$p(-1) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

$= (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) - 5$

$= -1 - 3 + 9 - 5$

$= 9 - 9$

$= 0$

अत: x = -1 p(x) का शुन्यक है इसलिए x + 1 एक गुणनखंड है |

$x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = x^2(x + 1) - 4x^2 - 9x - 5$

$= x^2(x + 1) - 4x(x + 1) - 5x - 5$

$= x^2(x + 1) - 4x(x + 1) - 5(x + 1)$

$= (x + 1) (x^2 - 4x - 5)$

$= (x + 1) (x^2 - 5x + x - 5)$

$= (x + 1) [x(x - 5) +1(x - 5)]$

$= (x + 1) (x - 5) (x + 1)$

अत: त्रिघात बहुपद के गुणनखंड $(x + 1)$, $(x - 5)$ और $(x + 1)$ है |

हल : (iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

बहुपद का संभावित शुन्यक ±1, ±2, ±4, ±5, ±10 और ±20 हैं |

बहुपद में $x = - 1$ रखने पर

$p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

$= (-1)^3 + 13(-1)^2 + 32(-1) + 20$

$= -1 + 13 + - 32 + 20$

$= 33 - 33$

$= 0$

चूँकि $p(-1) = 0$ है अत: $x + 1$ बहुपद का एक गुणनखंड है |

$x^3 + 13x^2 + 32x + 20 = x^2(x + 1) + 12x^2 + 32x + 20$

$= x^2(x + 1) + 12x(x + 1) + 20x + 20$

$= x^2(x + 1) + 12x(x + 1) + 20(x + 1)$
$= (x + 1) (x^2 + 12x + 20)$

$= (x + 1) (x^2 + 10x + 2x + 20)$

$= (x + 1) [(x(x + 10) + 2(x + 10)]$

$= (x + 1) (x + 10) (x + 2)$

अत: त्रिघात बहुपद के गुणनखंड $(x + 1)$, $(x + 10)$ और $(x + 2)$ है |

हल : (iv) $2y^3 + y^2 – 2y – 1$

$= y^2(2y + 1) -1(2y + 1)$

$= (y^2 - 1) (2y + 1)$

$= (y + 1) (y - 1) (2y + 1)$

बहुपद के गुणनखंड (y + 1), (y - 1) और (2y + 1)हैं |

प्रश्नावली 2.5

उपयोगी बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ:

---

(1) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

(2) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

(3) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

(4) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

(5) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

(6) $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

(7) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

(8) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

(9) $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

(10) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

अभ्यास 2.5

Q1. उपयुक्त सर्वसमिकाओं को प्रयोग करके निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए:

(i) $(x + 4)(x + 10)$

(ii) $(x + 8)(x - 10)$

(iii) $(3x + 4)(3x - 5)$

(iv) $\left(y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{2}\right)$

(v) $(3 - 2x)(3 + 2x)$

हल:

(i) $(x + 4)(x + 10)$

सर्वसमिका $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का प्रयोग करने पर

$(x + 4)(x + 10) = x^2 + (4 + 10)x + (4)(10)$

$= x^2 + 14x + 40$

(ii) (x + 8) (x – 10)

सर्वसमिका $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का प्रयोग करने पर

$(x + 8)(x - 10) = x^2 + [8 + (-10)]x + (8)(-10)$

$= x^2 - 2x - 80$

(iii) (3x + 4) (3x – 5)

सर्वसमिका $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का प्रयोग करने पर

$(3x + 4)(3x - 5) = (3x)^2 + [4 + (-5)]3x + (4)(-5)$

$= 9x^2 - 3x - 20$

(iv) $\left(y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{2}\right)$

सर्वसमिका $(x + y)(x - y) = x2 - y2$ का प्रयोग करने पर

$= (y^2)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$= y^4 - \frac{9}{4}$

(v) (3 – 2x) (3 + 2x)

सर्वसमिका $(x + y)(x - y) = x2 - y2$ का प्रयोग करने पर

$(3 - 2x)(3 + 2x) = (3)^2 - (2x)^2$

$= 9 - 4x^2$

Q2. सीधे गुना किये बिना निम्नलिखित गुणनफलों के मान ज्ञात कीजिए :

(i) 103 × 107

(ii) 95 × 96

(iii) 104 × 96

हल:

(i) 103 × 107 = (100 + 3) (100 + 7)

सर्वसमिका $(x + a)(x + b) = x2 + (a + b)x + ab$ का प्रयोग करने पर

$(100 + 3)(100 + 7) = (100)^2 + (3 + 7)100 + 3\times7$

$=10000 + 1000 + 21$

= 11021

(ii) 95 × 96 = (90 + 5) (90 + 6)

सर्वसमिका (x + a) (x + b) = x2 + (a + b)x + ab का प्रयोग करने पर

$(90 + 5) (90 + 6) = (90)^2 + (5 + 6)90 + 5\times6$

=8100 + 990 + 30

= 9120

(iii) 104 × 96 = (100 + 4) (100 - 4)

सर्वसमिका (x + y) (x - y) = x2 - y2 का प्रयोग करने पर

$(100)^2 - (4)^2$

=10000 - 16

= 9984

3. उपयुक्त सर्वसमिकाओं को प्रयोग करके निम्नलिखित का गुणनखंड कीजिए:

(i) $9x^2 + 6xy + y^2$

(ii) $4y^2 - 4y + 1$

(iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

हल:

(i) $9x^2 + 6xy + y^2$

$= (3x)^2 + 2.3x.y + (y)^2$ [$\because x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$]

$\therefore = (3x + y)^2$

= (3x + y) (3x + y)

(ii) $4y^2 - 4y + 1$

$= (2y)^2 - 2.2y.1 + (1)^2$ [$\because x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$]

$\therefore = (2y - 1)^2$

= (2y - 1) (2y - 1)

(iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

$= (x)^2 - \left(\frac{y}{10}\right)^2$

$= \left(x + \frac{y}{10}\right)\left(x - \frac{y}{10}\right)$

$= (x)^2 - \left(\frac{y}{10}\right)^2$

$= \left(x + \frac{y}{10}\right)\left(x - \frac{y}{10}\right)$

[∵ $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$]

Q4. उपयुक्त सर्वसमिकाओं को प्रयोग करके निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रसार कीजिए:

(i) $(x + 2y + 4z)^2$

(ii) $(2x - y + z)^2$

(iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$

(iv) $(3a - 7b - c)^2$

(v) $(-2x + 5y - 3z)^2$

हल:

(i) $(x + 2y + 4z)^2$

यहाँ माना कि $a = x$, $b = 2y$, $c = 4z$ और a, b तथा c का मान सर्वसमिका

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ में रखने पर

$\therefore (x + 2y + 4z)^2 = (x)^2 + (2y)^2 + (4z)^2 + 2(x)(2y) + 2(2y)(4z) + 2(4z)(x)$

$= x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8zx$

(ii) $(2x - y + z)^2$

यहाँ माना कि $a = 2x$, $b = -y$, $c = z$ और a, b तथा c का मान सर्वसमिका

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ में रखने पर

$\therefore (2x - y + z)^2 = (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(z)(2x)$

$= 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4zx$

(iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$

यहाँ माना कि $a = -2x$, $b = 3y$, $c = 2z$ और a, b तथा c का मान सर्वसमिका

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ में रखने पर

$\therefore (-2x + 3y + 2z)^2$

$= (-2x)^2 + (3y)^2 + (2z)^2 + 2(-2x)(3y) + 2(3y)(2z) + 2(2z)(-2x)$

$= 4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12xy + 12yz - 8zx$

(iv) $(3a - 7b - c)^2$

यहाँ माना कि $x = 3a, y = -7b, z = -c$ और x, y तथा z का मान सर्वसमिका

$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ में रखने पर

$\therefore (3a - 7b - c)^2$

$= (3a)^2 + (-7b)^2 + (-c)^2 + 2(3a)(-7b) + 2(-7b)(-c) + 2(-c)(3a)$

$= 9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ac$

(v) $(-2x + 5y - 3z)^2$

यहाँ माना कि $a = -2x, b = 5y, c = -3z$ और a, b तथा c का मान सर्वसमिका

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ में रखने पर

$\therefore (-2x + 5y - 3z)^2$

$= (-2x)^2 + (5y)^2 + (-3z)^2 + 2(-2x)(5y) + 2(5y)(-3z) + 2(-3z)(-2x)$

$= 4x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 20xy - 30yz + 12zx$

Q5. गुणनखंड कीजिए:
(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

हल:

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

$= (2x)^2 + (3y)^2 + (4z)^2 + 2(2x)(3y) + 2(3y)(4z) + 2(4z)(2x)$

$[\because a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2]$

$= (2x + 3y + 4z)^2$

$= (2x + 3y + 4z)(2x + 3y + 4z)$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

$$= (\sqrt{2}x)^2 + y^2 + (2\sqrt{2}z)^2 - 2(\sqrt{2}x)(y) + 2(y)(2\sqrt{2}z) - 2(\sqrt{2}x)(2\sqrt{2}z)$$

$$= (-\sqrt{2}x)^2 + y^2 + (2\sqrt{2}z)^2 + 2(-\sqrt{2}x)(y) + 2(y)(2\sqrt{2}z) + 2(-\sqrt{2}x)(2\sqrt{2}z)$$

[$\because$ $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2$]

$\therefore (-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)^2$

$= (-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)(-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)$

Q6. निम्नलिखित घनों को विस्तारित रूप में लिखिए :

(i) $(2x + 1)^3$

(ii) $(2a - 3b)^3$

(iii) $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$

(iv) $\left[x - \frac{3}{2}y\right]^3$

हल:

(i) $(2x + 1)^3$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$]

$(2x + 1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1)^2 + (1)^3$

$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

(ii) $(2a - 3b)^3$

[सर्वसमिका के प्रयोग से (x - y)3 = x3 - 3x2y + 3xy2 - y3]

$(2a - 3b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2(3b) + 3(2a)(3b)^2 - (3b)^3$

$= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$

(iii) $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$

[सर्वसमिका के प्रयोग से (a + b)3 = a3 + 3a2b + 3ab2 + b3]

$$\left[\frac{3}{2}x+1\right]^3 = \left(\frac{3}{2}x\right)^3 + 3\left(\frac{3}{2}x\right)^2(1) + 3\left(\frac{3}{2}x\right)(1)^2 + (1)^3$$

$$= \frac{27}{8}x^3 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$$

(iv) $\left[x-\frac{3}{2}y\right]^3$

[सर्वसमिका के प्रयोग से (a - b)3 = a3 - 3a2b + 3ab2 - b3]

$$\left[x-\frac{3}{2}y\right]^3 = (x)^3 - 3(x)^2\left(\frac{3}{2}y\right) + 3(x)\left(\frac{3}{2}y\right)^2 - \left(\frac{3}{2}y\right)^3$$

$$= x^3 - \frac{9}{2}x^2y + \frac{27}{4}xy^2 - \frac{27}{8}y^3$$

Q7. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कर निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(99)^3$

(ii) $(102)^3$

(iii) $(998)^3$

हल :

(i) $(99)^3$

$= (100 - 1)^3$

[सर्वसमिका के प्रयोग से (a - b)3 = a3 - 3a2b + 3ab2 - b3]

$(100 - 1)^3 = (100)^3 - 3(100)^2(1) + 3(100)(1)^2 - (1)^3$

$= 1000000 - 30000 + 300 - 1$

$= 1000300 - 30001$

$= 970299$

(ii) $(102)^3$

$= (100 + 2)^3$

[सर्वसमिका के प्रयोग से (a + b)3 = a3 + 3a2b + 3ab2 + b3]

$(100 + 2)^3 = (100)^3 + 3(100)^2(2) + 3(100)(2)^2 + (2)^3$

$= 1000000 + 60000 + 1200 + 8$

$= 1061208$

(iii) $(998)^3$

= $(1000 - 2)^3$

[सर्वसमिका के प्रयोग से (a - b)3 = a3 - 3a2b + 3ab2 - b3]

$(1000 - 2)^3 = (1000)^3 - 3(1000)^2(2)+ 3(1000)(2)^2 - (2)^3$

= 1000000000 - 6000000 + 12000 - 8

= 1000012000 - 6000008

= 994011992

Q8. निम्नलिखित का गुणनखंड कीजिए :

(i) $8a^3 + b3 + 12a^2b + 6ab^2$

(ii) $8a^2 – b^2 – 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 – 125a^3 – 135a + 225a^2$

(iv) $64a^3 – 27b^3 – 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

हल:

(i) $8a^3 + b3 + 12a^2b + 6ab^2$

= $(2a)^3 +(b)^3 + 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2$

[सर्वसमिका के प्रयोग से x3 + y3 + 3x2y + 3xy2 = (x + y)3]

= $(2a)^3 +(b)^3 + 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2 = (2a + b)^3$

= (2a + b)(2a + b)(2a + b)

(ii) $8a^2 – b^2 – 12a^2b + 6ab^2$

= $(2a)^3 - (b)^3 - 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2$

[सर्वसमिका के प्रयोग से x3 - y3 - 3x2y + 3xy2 = (x - y)3]

= $(2a)^3 - (b)^3 - 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2 = (2a - b)^3$

= (2a - b)(2a - b)(2a - b)

(iii) $27 – 125a^3 – 135a + 225a^2$

= $(3)^3 - (5a)^3 - 3(3)^2(5a) + 3(3)(5a)^2$

[सर्वसमिका के प्रयोग से x3 - y3 - 3x2y + 3xy2 = (x - y)3]

$= (3)^3 - (5a)^3 - 3(3)^2(5a) + 3(3)(5a)^2 = (3 - 5a)^3$

$= (3 - 5a)(3 - 5a)(3 - 5a)$

(iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

$= (4a)^3 - (3b)^3 - 3(4a)^2(3b) + 3(4a)(3b)^2$

[सर्वसमिका के प्रयोग से x3 - y3 - 3x2y + 3xy2 = (x - y)3]

$= (4a)^3 - (3b)^3 - 3(4a)^2(3b) + 3(4a)(3b)^2 = (4a - 3b)^3$

$= (4a - 3b)(4a - 3b)(4a - 3b)$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

[सर्वसमिका के प्रयोग से x3 - y3 - 3x2y + 3xy2 = (x - y)3]

$(3p)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 - 3(3p)^2\left(\frac{1}{6}\right) - 3(3p)\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \left(3p - \frac{1}{6}\right)^3$

$= \left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)$

Q9. सत्यापित कीजिए :

(i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

हल :

RHS $= (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$= x(x^2 - xy + y^2) + y(x^2 - xy + y^2)$

$= x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - xy^2 + y^3$

$= x^3 - \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} + \cancel{x^2y} - \cancel{xy^2} + y^3$

$= x^3 + y^3$

∵ LHS = RHS सत्यापित

(ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

हल :

RHS $= (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 + xy + y^2)$

$= x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3$

$= x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3$

$= x^3 - y^3$

∵ LHS = RHS सत्यापित |

Q10. निम्नलिखित में से प्रत्येक का गुणनखंड ज्ञात कीजिए:

(i) $27y^3 + 125z^3$

(ii) $64m^3 - 343n^3$

हल :

(i) $27y^3 + 125z^3$

$= (3y)^3 + (5z)^3$

[सर्वसमिका के प्रयोग से x3 + y3 = (x + y) (x2 − xy + y2)]

$(3y)^3 + (5z)^3 = (3y + 5y) [(3y)^2 - (3y)(5z) + (5z)^2]$

$= (3y + 5y) (9y^2 - 15yz + 25z^2)$

(ii) $64m^3 - 343n^3$

हल :

(ii) $64m^3 - 343n^3$

$= (4m)^3 - (7n)^3$

[सर्वसमिका के प्रयोग से x3 − y3 = (x − y) (x2 + xy + y2)]

$(4m)^3 - (7n)^3 = (4m - 7n) [(4m)^2 + (4m)(7n) + (7n)^2]$

$= (4m - 7n) (16m^2 + 28mn + 49n^2)$

Q11. गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए : $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

हल :

$= (3x)^3 + (y)^3 + (z)^3 - 9xyz$

∵ $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

सर्वसमिका के प्रयोग से :

$= (3x + y + z) ((3x)^2 + (y)^2 + (z)^2 - (3x)(y) - (y)(z) - (z)(3x))$

$= (3x + y + z) (9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3zx)$

Q12. सत्यापित कीजिए:

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = ½ (x + y + z) [(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

हल :

LHS = $½(x + y + z) [x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2xz + x^2]$

$= ½(x + y + z) (2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz)$

$= ½ \times 2(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$

$= x3 + y3 + z3 - 3xyz$ [सर्वसमिका के प्रयोग से]

LHS = RHS

Q13. यदि $x + y + z = 0$ हो, तो दिखाइए कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ है |

हल : $x + y + z = 0$ दिया है |

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= (0) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= 0$

अत: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

या $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ सत्यापित

Q14. वास्तव में घनों का परिकलन किए बिना निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(−12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

(ii) $(28)^3 + (−15)^3 + (−13)^3$

हल : (i) $(−12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

प्रश्न 13. में हमने एक सर्वसमीका प्राप्त किया था कि यदि $x + y + z = 0$ हो तो

$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ है |

अत: इस सर्वसमिका में $x = -12$, $y = 7$ और $z = 5$ रखने पर

चूँकि $- 12 + 7 + 5 => -12 + 12 = 0$

अत: $x + y + z = 0$ है |

अब, $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ [x, y, और z का मान रखने पर]

$=> (-12)^3 + (7)^3 + (5)^3 = 3 \times (-12) \times 7 \times 5$

$= - 1260$

हल : (ii) (28)3 + (−15)3 + (−13)3

28 + (-15) + (-13) = 28 - 28 = 0

चूँकि x + y + z = 0 है |

इसलिए $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

अब, (28)3 + (−15)3 + (−13)3 = 3 × 28 × (-15) × (-13)

= 133380

Q15. नीचे दिए गए आयातों, जिनमें उनके क्षेत्रफल दिए गए है, में से प्रत्येक की लंबाई और चौड़ाई के लिए संभव व्यंजक दीजिये |

(i) क्षेत्रफल : $25a^2 - 35a + 12$

(ii) क्षेत्रफल : $35y^2 + 13y - 12$

हल : (i) क्षेत्रफल : $25a^2 - 35a + 12$

क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

अत: 25a2 - 35a + 12 के दो गुणनखंड होंगे जिसमें एक लंबाई होगा और दूसरा चौड़ाई होगा |

गुणनखंड करने पर :
25a2 - 35a + 12 = 25a2 + 15a + 20a + 12

= 5a(5a + 3) + 4(5a + 3)

= (5a + 3) (5a + 4)

चूँकि (5a + 3) < (5a + 4) है |

अत: लंबाई = 5a + 4 और चौड़ाई = 5a + 3 **उत्तर**

हल : (ii) क्षेत्रफल : $35y^2 + 13y - 12$

गुणनखंड करने पर

$35y^2 + 13y - 12 = 35y^2 + 28y - 15y - 12$

= 7y(5y + 4) - 3(5y + 4)
= (5y + 4) (7y - 3)

अत: लंबाई = 5y + 4 और चौड़ाई = 7y - 3

Q16. घनाभों (cuboids), जिनके आयतन नीचे दिए गए हैं कि, विमाओं के लिए संभव व्यंजक क्या हैं ?

(i) आयतन : $3x^3 - 12x$

(ii) आयतन : $12ky^2 + 8ky - 20k$

हल : (i) आयतन : $3x^3 - 12x$

गुणनखंड करने पर

आयतन = $3x^3 - 12x$

= $3x(x - 4)$

चूँकि आयतन = $L \times B \times H$

अत: $L = 3$, $B = x$ और $H = x - 4$ **उत्तर**

हल : (ii) आयतन : $12ky^2 + 8ky - 20k$

आयतन = $12ky^2 + 8ky - 20k$

= $4k(3y^2 + 2y - 5)$

= $4k(3y^2 + 5y - 3y - 5)$

= $4k[y(3y + 5) - 1(3y + 5)]$

= $4k(3y + 5)(y - 1)$

चूँकि आयतन = $L \times B \times H$

अत: $L = 4k$, $B = (3y + 5)$ और $H = (y - 1)$ **उत्तर**