पाठ 7. त्रिभुज

प्रश्नावली 7.1

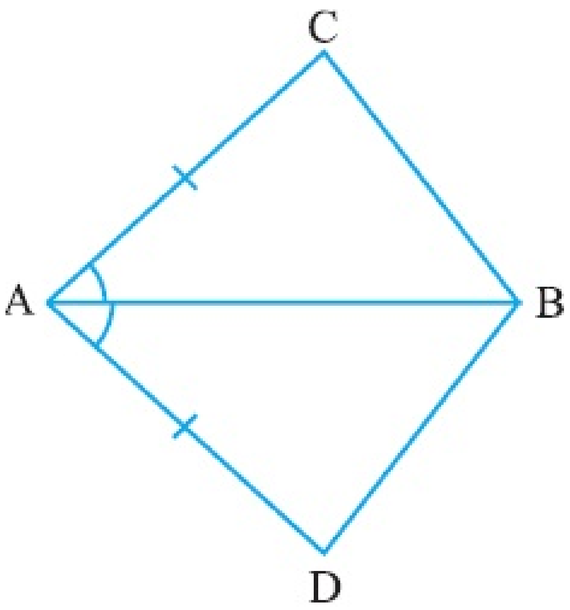
Q1. चतुर्भुज ACBD में, AC = AD है और AB, ∠A को समद्विभाजित करता है | (see Fig. 7.16). दर्शाइए Δ ABC ≅ Δ ABD है |

हल:

दिया है : AC = AD और AB ∠A को समद्विभाजित करता है |

सिद्ध करना : Δ ABC ≅ Δ ABD.

प्रमाण :



Δ ABC तथा Δ ABD में,

AC = AD [दिया है]

∠CAB = ∠BAD [AB ∠A समद्विभाजित करता है]

AB = AB [उभयनिष्ठ]

SAS सर्वांगसमता नियम से

Δ ABC ≅ Δ ABD

BC = BD [CPCT]

Q2. ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें AD = BC है और ∠ DAB = ∠ CBA (see Fig.7.17) है | सिद्ध कीजिए कि :

(i) Δ ABD ≅ Δ BAC

(ii) BD = AC

(iii) ∠ ABD = ∠ BAC

हल :

दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें AD = BC और ∠ DAB = ∠ CBA है |

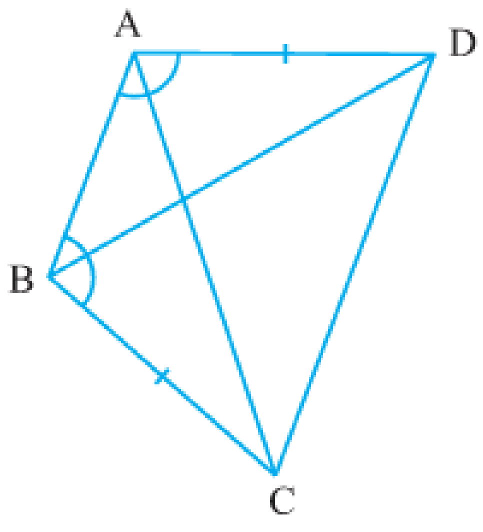
सिद्ध करना है :

(i) Δ ABD ≅ Δ BAC

(ii) BD = AC

(iii) ∠ ABD = ∠ BAC

प्रमाण :



(i) Δ ABD तथा Δ BAC में,

AD = BC [दिया है]

∠ DAB = ∠ CBA [दिया है]

AB = AB [उभयनिष्ठ]

SAS सर्वांगसमता नियम से

Δ ABD ≅ Δ BAC

(ii) BD = AC **[By CPCT]**

(iii) ∠ ABD = ∠ BAC **[By CPCT]**

Q3. एक रेखाखंड AB पर AD और BC दो बराबर लंब रेखाखंड हैं (देखिये आकृति 7.18) | दर्शाइए कि CD, AB रेखाखंड को समद्विभाजित करता है |

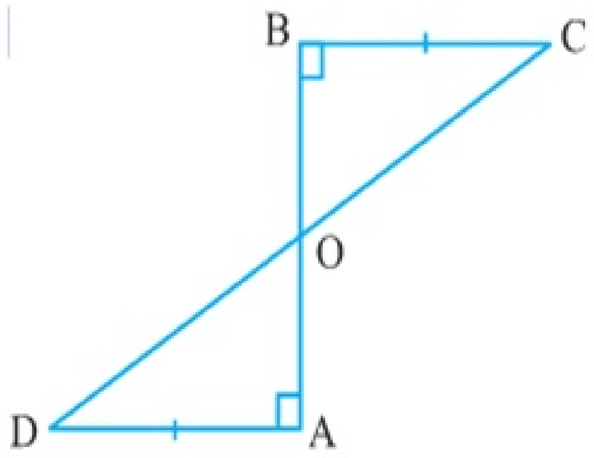
हल :

दिया है : AD ⊥ AB और BC ⊥ AB है और AD = BC है |

सिद्ध करना है :

AO = BO अर्थात CD, AB रेखाखंड को समद्विभाजित करता है |

प्रमाण :



ΔAOD तथा ΔBOC

∠AOD = ∠ BOC (शीर्षाभिमुख कोण)

∠DAO = ∠CBO (प्रत्येक 90°)

BC = AD (दिया है)

ASA सर्वांगसमता नियम से

ΔAOD ≅ ΔBOC

∴ AO = BO (By CPCT)

अत: CD, AB रेखाखंड को समद्विभाजित करता है |

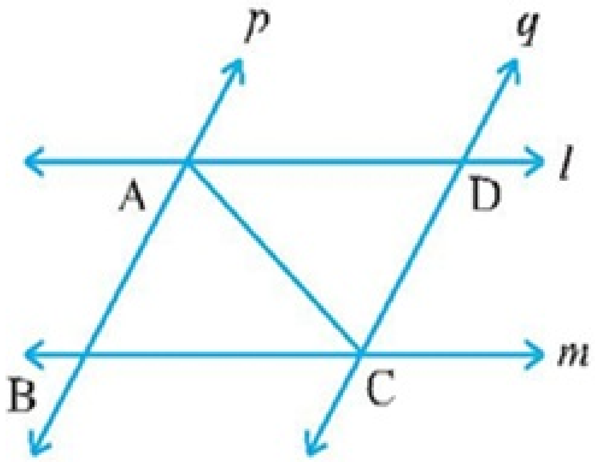
Q4. l और m दो समांतर रेखाएँ हैं जिन्हें समांतर रेखाओं p और q का एक अन्य युग्म प्रतिच्छेद करता है | दर्शाइए कि ΔABC ≅ ΔCDA है |

हल :

दिया है : l || m और p || q है जो एक दुसरे को A, B, C तथा D पर प्रतिच्छेद करते हैं |

सिद्ध करना है : ΔABC ≅ ΔCDA

प्रमाण :



l || m .... (1) दिया है |

p || q ....(2) दिया है |

समी० (1) तथा (2) से

ABCD एक समांतर चतुर्भुज है |

अब, ΔABC तथा ΔCDA में,

BC = AD [समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा]

∠B = ∠D [समांतर चतुर्भुज की सम्मुख कोण]

AC = AC [दिया है]

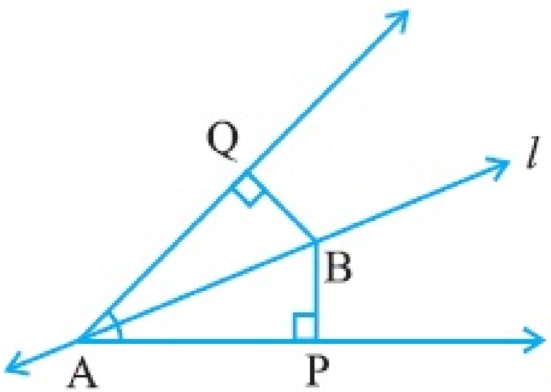
SAS सर्वांगसमता नियम से

∴ ΔABC ≅ ΔCDA **Proved**

Q5. रेखा *l* कोण A को समद्विभाजित करती है और B रेखा *l* पर स्थित कोई बिंदु है | BP और BQ कोण A की भुजाओं पर B से डाले गए लम्ब हैं (देखिये आकृति 7.20) दर्शाइए कि :

(i) Δ APB ≅ Δ AQB

(ii) BP = BQ हैं, अर्थात बिंदु B कोण की भुजाओं से समदूरस्थ है



हल :

दिया है : ∠PAQ को रेखा *l* समद्विभाजित करती है
और BP तथा BQ, AP तथा AQ पर क्रमश: लंब है |

सिद्ध करना है :

(i) Δ APB ≅ Δ AQB
(ii) BP = BQ

प्रमाण :

(i) Δ APB तथा Δ AQB में,

∠APB = ∠AQB (90° प्रत्येक)

∠PAB = ∠QAB (दिया है)

AB = AB (उभयनिष्ठ)

ASA सर्वांगसमता नियम से

Δ APB ≅ Δ AQB

∴ (ii) BP = BQ (By CPCT)

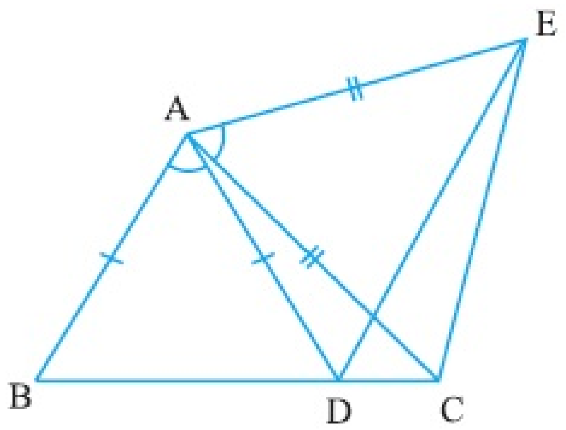
Q6. आकृति 7.21 में, AC = AE, AB = AD और ∠ BAD = ∠ EAC है | दर्शाइए कि BC = DE है |

हल :

दिया है : AC = AE, AB = AD और ∠ BAD = ∠ EAC है |

सिद्ध करना है : BC = DE

प्रमाण :



∠ BAD = ∠ EAC .... (1) दिया है

समी० के दोनों पक्षों में ∠ CAD जोड़ने पर

∠ BAD + ∠ CAD = ∠ EAC + ∠ CAD

या ∠ BAC = ∠ EAD .... (2)

Δ BAC तथा Δ DAE में

AC = AE (दिया है)

AB = AD (दिया है)

∠ BAC = ∠ EAD ....समी० (2) से

SAS सर्वांगसमता नियम से

Δ BAC ≅ Δ DAE

∴ BC = DE (By CPCT) **Proved**

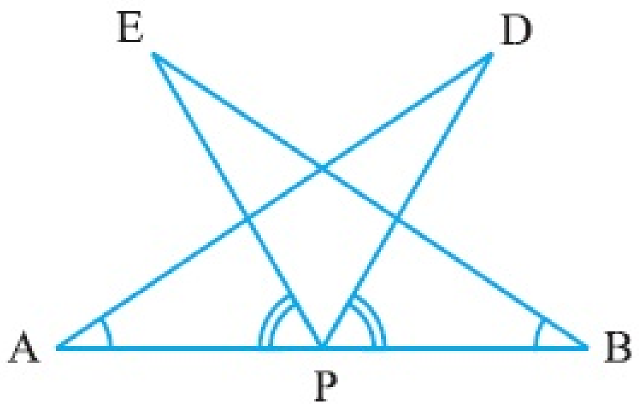
Q7. AB एक रेखाखंड है और P इसका मध्य-बिंदु है | D और E रेखाखंड AB के एक ही ओर स्थित दो बिंदु इस प्रकार हैं कि ∠ BAD = ∠ ABE और ∠ EPA = ∠ DPB है | (देखिए आकृति 7.22) |

दर्शाइए कि :

(i) Δ DAP ≅ Δ EBP
(ii) AD = BE

दिया है : AB एक रेखाखंड है और P इसका मध्य-बिंदु है | ∠ BAD = ∠ ABE और ∠ EPA = ∠ DPB है |

सिद्ध करना है :



(i) Δ DAP ≅ Δ EBP
(ii) AD = BE

प्रमाण :

∠ EPA = ∠ DPB .....(1) दिया है |

समी० (1) के दोनों पक्षों में ∠ EPD जोड़ने पर

∠ EPA + ∠ EPD = ∠ DPB + ∠ EPD

या ∠ DPA = ∠ EPB .... (2)

(1) Δ DAP तथा Δ EBP में

AP = BP .... (दिया है)

∠ BAD = ∠ ABE ..(दिया है)

∠ DPA = ∠ EPB   ....समी० (2) से

ASA सर्वांगसमता नियम से

Δ DAP ≅ Δ EBP

(ii) AD = BE   (BY CPCT)

अभ्यास 7.2

Q1. एक समबाहु त्रिभुज ABC में जिसमें AB = AC है, ∠ B और ∠ C के समद्विभाजक परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं | A और O को जोडिए | दर्शाइए कि :

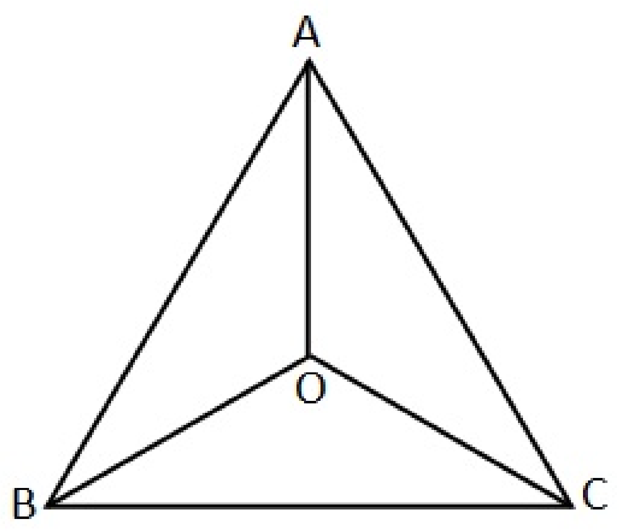
(i) OB = OC

(ii) AO कोण ∠ A को समद्विभाजित करता है |

हल:

दिया है: समद्विबाहु त्रिभुज ABC में, जिसमें AB = AC, और ∠ B और ∠ C कोण समद्विभाजक O पर मिलते हैं |

सिद्ध करना है :



(i) OB = OC

(ii) AO कोण ∠ A को समद्विभाजित करता है |

प्रमाण: ΔABC में हमें प्राप्त है:

AB = AC

∠ B = ∠ C [बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं |]

अथवा ½∠ B = ½∠C

इसलिए, ∠OBC = ∠OCB [...1]

ΔABO and ΔACO में

AB = AC [दिया है]

∠OBC = ∠OCB [समी0 1 से]

AO = AO [उभयनिष्ठ]

SAS सर्वांगसमता नियम से

ΔABO ≅ ΔACO

OB = OC [By CPCT]

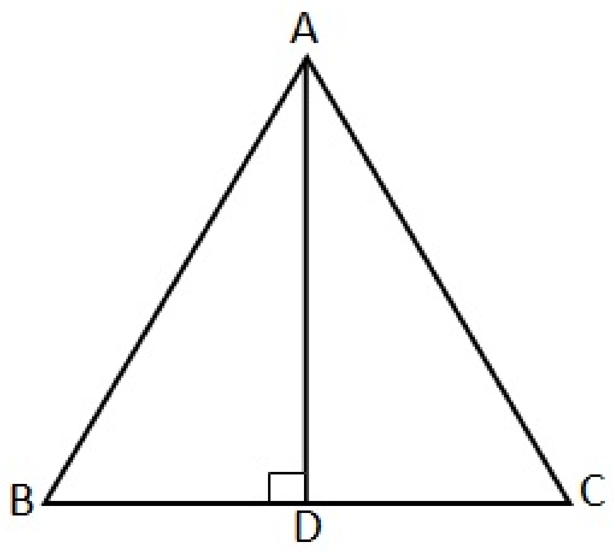
∠BAO = ∠CAO [By CPCT]

अत: AO कोण ∠A को समद्विभाजित करता है |

Q2. Δ ABC में, AD भुजा BC का लम्ब सम्द्विभाजक है (देखिये आकृति 7.30). दर्शाइए कि Δ ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें AB = AC है |.

हल:

दिया है : Δ ABC में, AD, BC का लंब सम्द्विभाजक है
|.



सिद्ध करना है : Δ ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है.

प्रमाण: Δ ABD तथा Δ ACD में,

DB = DC [चूँकि D BC को समद्विभाजित करता है]

∠ BDA = ∠CDA [90° प्रत्येक].

AD = AD [उभयनिष्ठ']

SAS सर्वांगसमता नियम से

Δ ABD ≅ Δ ACD

AB =AC [by CPCT]

अत:, Δ ABC समद्विबाहु त्रिभुज है

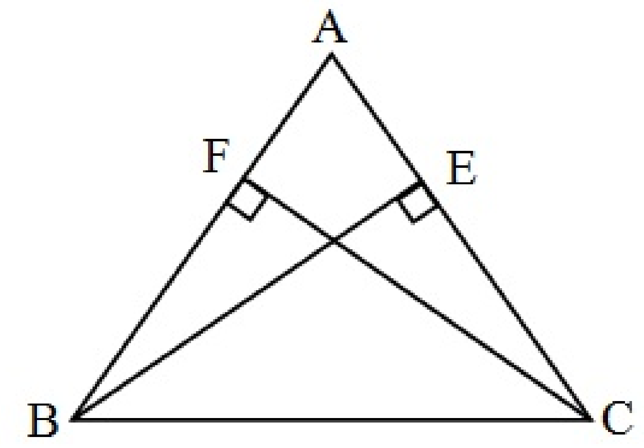
Q3. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें बराबर भुजाओं BE और CF पर क्रमशः शीर्षलम्ब AC और AB खींचे गए हैं (देखिए आकृति 7.31)। दर्शाइए कि ये शीर्षलम्ब बराबर हैं।

हल :

दिया है : ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें BE ⊥ AC और CF ⊥ AB जहाँ AB = AC है |

सिद्ध करना है : BE = CF.

प्रमाण : यहाँ, BE ⊥ AC और CF ⊥ AB (दिया है)



ΔABE और Δ ACF में

∠ AEB = ∠ AFC (90° प्रत्येक)

∠ A = ∠ A (उभयनिष्ठ)

AB = AC (दिया है)

ASA सर्वांगसमता कसौटी नियम से

ΔABE ≅ Δ ACF

∴ BE = CF [By CPCT]

Proved

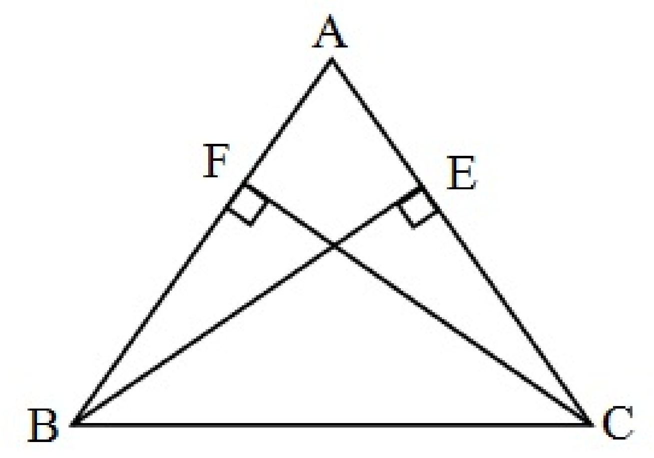
Q4. ABC एक त्रिभुज है जिसमें AC और AB पर खींचे गए शीर्षलंब BE और CF बराबर हैं (देखिए आकृति. 7.32). दर्शाइए कि

(i) Δ ABE ≅ Δ ACF

(ii) AB = AC, अर्थात, ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है |

हल :

दिया है : ABC एक त्रिभुज है जिसमें



BE ⊥ AC और CF ⊥ AB है और BE = CF है |

सिद्ध करना है :

(i) Δ ABE ≅ Δ ACF

(ii) AB = AC,अर्थात, ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है |

प्रमाण :

(i) Δ ABE तथा Δ ACF में

BE = CF (दिया है)

∠ AEB = ∠ AFC (90° प्रत्येक)

∠ A = ∠ A (उभयनिष्ठ)

ASA सर्वांगसमता नियम के उपयोग से

Δ ABE ≅ Δ ACF सत्यापित -I

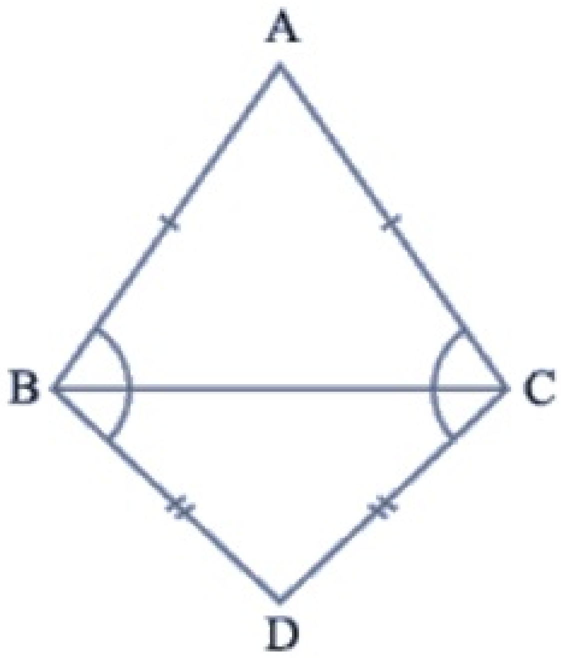
(ii) AB = AC [**By CPCT**]

इसलिए, ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है |

Q5. ABC और DBC सामान आधार BC पर स्थित दो समद्विबाहु त्रिभुज हैं (देखिए आकृति 7.33). दर्शाइए कि ∠ ABD = ∠ ACD है |

हल :

दिया है : ABC और DBC सामान आधार BC पर बने दो
समद्विबाहु त्रिभुज हैं |



सिद्ध करना है : ∠ ABD = ∠ ACD

प्रमाण: ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है |

AB = AC (दिया है)

∴ ∠ ABC = ∠ ACB .... (1)

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

इसीप्रकार,

BCD भी एक समद्विबाहु त्रिभुज है |

BD = CD (दिया है)

∴ ∠ DBC = ∠ DCB .... (2)

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर

∠ ABC + ∠ DBC = ∠ ACB + ∠ DCB

Or, ∠ ABD = ∠ ACD **Proved**

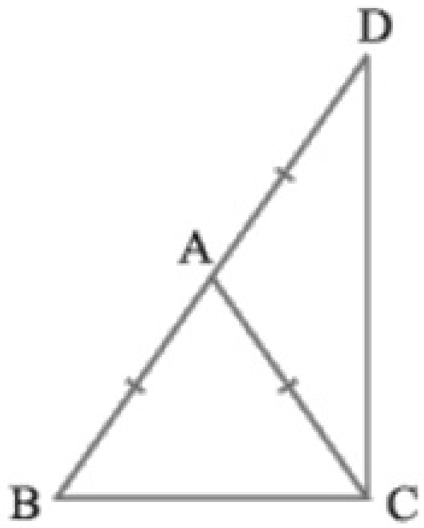
Q6. ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है | भुजा BA बिंदु D तक इस प्रकार बढाया गया है कि AD = AB है (देखिए आकृति. 7.34) | दर्शाइए कि ∠ BCD एक समकोण है |

हल :

दिया है : ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है |

भुजा BA को बिंदु D तक बढाई गयी है जिससे AD = AB है |

सिद्ध करना है : ∠ BCD = 90°



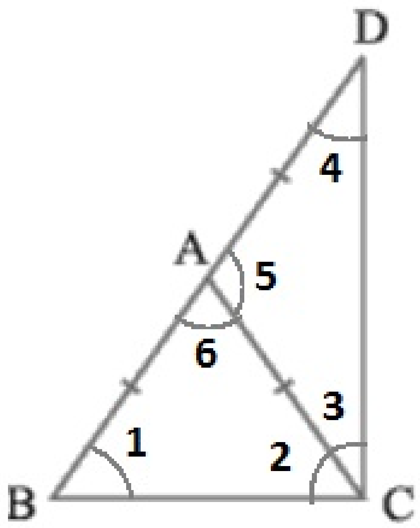
प्रमाण:

AB = AC .... (1) (दिया है)

और AB = AD .... (2) (दिया है)

समीकरण (1) तथा (2) से हमें प्राप्त होता है |

AC = AD ....(3)



$\therefore$ $\angle 3 = \angle 4$ .... (4) (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण ..)

अब, AB = AC समी० (1) से

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$ .... (5) (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण ..)

ΔABC में

बहिष्कोण $\angle 5 = \angle 1 + \angle 2$ (बहिष्कोण अत:अभिमुख कोणों के योग के बराबर होता है)

अथवा, $\angle 5 = \angle 2 + \angle 2$ समी० (5) से

अथवाr, $\angle 5 = 2\angle 2$ .... (6)

इसीप्रकार,

बहिष्कोण $\angle 6 = \angle 3 + \angle 4$

अथवा, $\angle 6 = 2\angle 3$ समी० (7) से

समीकरण (6) तथा (7) को जोड़ने पर

$\angle 5 + \angle 6 = 2\angle 2 + 2\angle 3$

$\angle 5 + \angle 6 = 2(\angle 2 + \angle 3)$

अथवा, $180° = 2(\angle 2 + \angle 3)$ [$\because$ $\angle BAC + \angle DAC = 180°$]

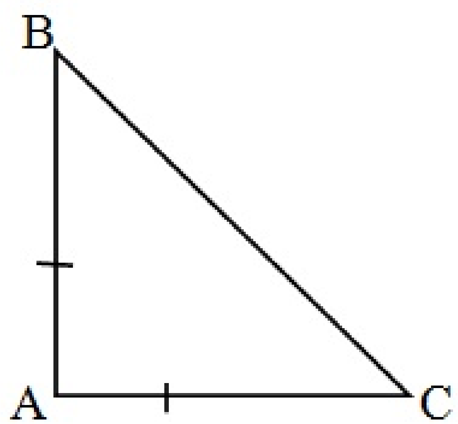
अथवा, $\angle 2 + \angle 3 = 180° / 2$

अथवा, $\angle BCD = 90°$ **Proved**

Q7. ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें ∠ A = 90° और AB = AC. तो ∠ B और ∠ C ज्ञात कीजिए |

हल :

दिया है : ABCएक समकोण त्रिभुज है जिसमें



∠ A = 90° और AB = AC है |

ज्ञात करना है : ∠B and ∠C

AB = AC (दिया है)

∴ ∠B = ∠C ....(1)

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

त्रिभुज ABC में,

∠A + ∠B + ∠C = 180° (त्रिभुज के तीनों कोणों का योग)

90° + ∠B + ∠B = 180° समीकरण (1) के प्रयोग से

2 ∠B = 180° - 90°

2 ∠B = 90°

∠B = 90°/ 2

∠B = 45°

∴ ∠B = 45° and ∠C = 45°

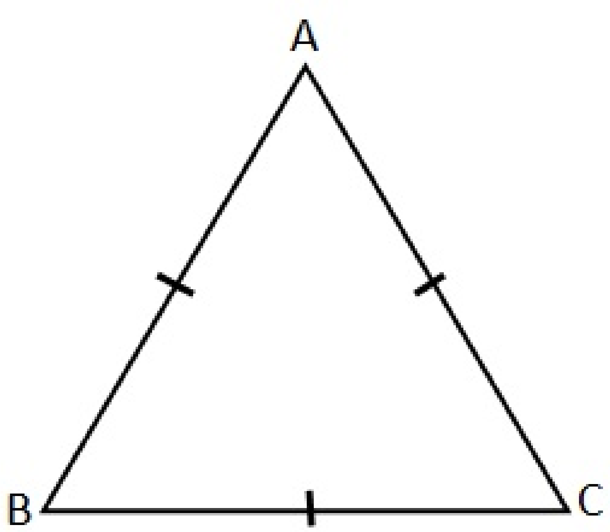
Q8. दर्शाइए कि समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° का होता है |

हल :

दिया है : ABC एक समबाहु त्रिभुज है जिसमें

AB = BC = AC

सिद्ध करना है :



$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

प्रमाण :

AB = AC (दिया है)

$\angle B = \angle C$ .... (1) [बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण]

AB = BC (दिया है)

$\angle A = \angle C$ .... (2) [बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण]

AC = BC (दिया है)

$\angle A = \angle B$ .... (3) [बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण]

समीकरण (1), (2) और (3) से हमें प्राप्त होता है |

$\angle A = \angle B = \angle C$ .... (4)

त्रिभुज ABC में

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$\angle A + \angle A + \angle A = 180°$

$3 \angle A = 180°$

$\angle A = 180°/3$

$\angle A = 60°$

$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 60°$

प्रश्नावली 7.3

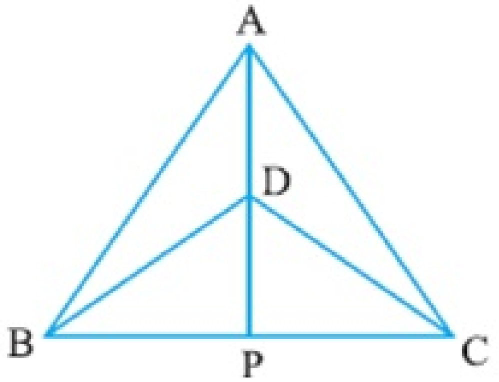
Q1. ΔABC और ΔDBC एक ही आधार BC पर बने दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि A और D भुजा BC के एक ही ओर स्थित हैं (देखिए आकृति 7.39) | यदि AD बढ़ाने पर BC को P पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए कि

(i) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

(ii) $\Delta ABP \cong \Delta ACP$

(iii) AP कोण A और कोण D दोनों को समद्विभाजित करता है |

(iv) AP रेखाखंड BC का लम्ब समद्विभाजक है |



हल :

दिया है : ΔABC और ΔDBC दो समबाहु त्रिभुज हैं और AD को बढ़ाने पर BC को P पर प्रतिच्छेद करता है |

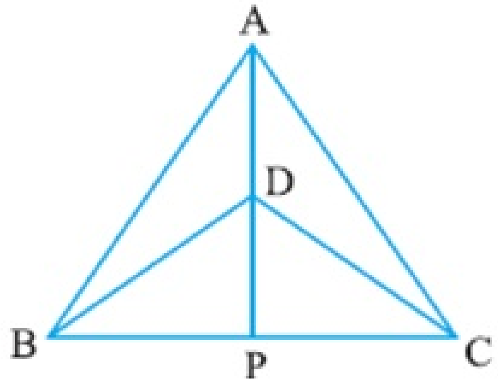
सिद्ध करना है :

(i) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

(ii) $\Delta ABP \cong \Delta ACP$

(iii) AP कोण A और कोण D दोनों को समद्विभाजित करता है |

(iv) AP रेखाखंड BC का लम्ब समद्विभाजक है |



प्रमाण : ABC आधार BC पर बना समद्विबाहु त्रिभुज है |

इसलिए, AB = AC .... (i)

इसी प्रकार, DBC भी एक समद्विबाहु त्रिभुज है |

इसलिए, BD = CD .... (ii)

(I) ΔABD और Δ ACD में

AB = AC ... (i) से

BD = CD ... (ii) से

AD = AD (उभयनिष्ठ)

SSS सर्वांगसमता नियम से

$\Delta ABD \cong \Delta ACD$ Proved (I)

$\therefore$ $\angle BAD = \angle CAD$ (iii) BY **(CPCT)**

(II) अब, ΔABP और Δ ACP में

AB = AC ... (i) से

$\angle BAD = \angle CAD$ समी० (iii) से

AP = AP (उभयनिष्ठ)

SAS सर्वांगसमता नियम से

$\Delta ABP \cong \Delta ACP$ Proved (ii)

(III) अब, ΔBDP और Δ CDP में

BD = CD (ii) से

$\angle DBP = \angle DCP$ बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण

$DP = DP$ (उभयनिष्ठ)

SAS सर्वांगसमता नियम से

$\Delta BDP \cong \Delta CDP$

$\therefore \angle BDP = \angle CDP$ (iv) BY **(CPCT)**

और $\angle DPB = \angle DPC$ (v) BY **(CPCT)**

और $BP = CP$ (vi) BY **(CPCT)**

समीकरण (iii) और (iv) से स्पष्ट है कि AP कोण A और कोण D दोनों को समद्विभाजित करता है | Proved (III)

(IV) $\angle DPB + \angle DPC = 180^\circ$ ..... रैखिक युग्म

या $\angle DPB + \angle DPB = 180^\circ$ समी० (v) से

या $2\angle DPB = 180^\circ$

या $\angle DPB = \frac{180^\circ}{2}$

या $\angle DPB = 90^\circ$

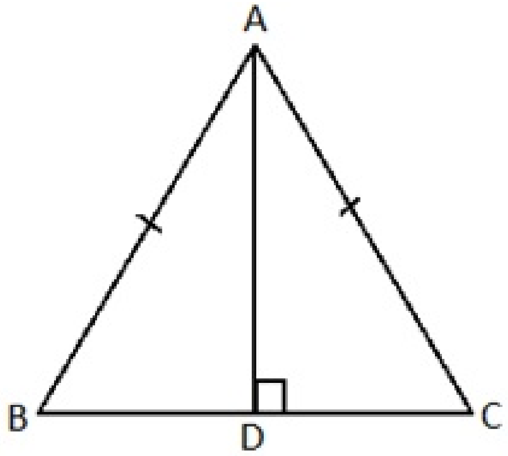
चूँकि $\angle DPB = 90^\circ$ हैं और $BP = CP$ समी० (vi) से यह सिद्ध होता है कि AP रेखाखंड BC का लम्ब समद्विभाजक है | **Proved (IV)**

Q2. AD एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC का एक शीर्षलम्ब है, जिसमें AB = AC है। दर्शाइए कि

(i) AD रेखाखंड BC को समद्विभाजित करता है।

(ii) AD कोण A को समद्विभाजित करता है।

हल :



दिया है : AD एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC का एक शीर्षलम्ब है, जिसमें AB = AC है।

सिद्ध करना है :

(i) AD रेखाखंड BC को समद्विभाजित करता है।

(ii) AD कोण A को समद्विभाजित करता है।

प्रमाण :

ΔABD और Δ ACD में

AB = AC (कर्ण) दिया है

AD = AD (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle ADB = \angle ADC$ (प्रत्येक कोण 90°)

RHS सर्वांगसमता नियम से

$\therefore \Delta BDP \cong \Delta CDP$

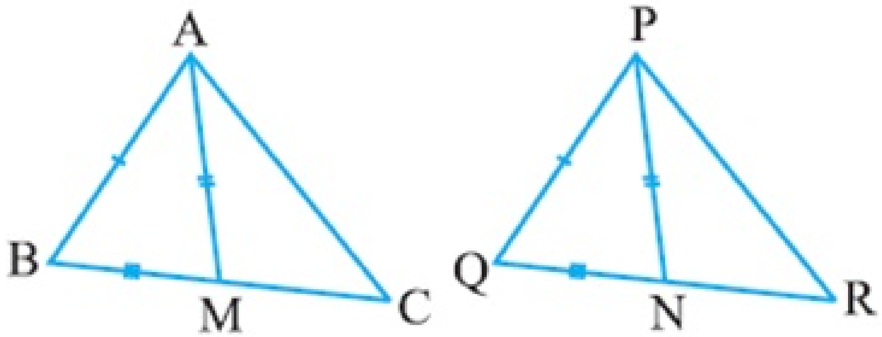
अत: BD = CD .... (i) By CPCT

और $\angle BAD = \angle CAD$ .... (ii) By CPCT

समीकरण (i) से सिद्ध होता है कि AD रेखाखंड BC को समद्विभाजित करता है।

और समीकरण (ii) से यह सिद्ध होता है कि AD कोण A को समद्विभाजित करता है।

Q3. एक त्रिभुज ABC की दो भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AM क्रमशः एक दूसरे त्रिभुज की भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PN के बराबर हैं (देखिए आकृति 7.40)। दर्शाइए कि



(i) $\Delta ABM \cong \Delta\ PQN$

(ii) $\Delta ABC \cong \Delta\ PQR$

हल :

दिया है : त्रिभुज ABC की दो भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AM क्रमशः एक दूसरे त्रिभुज की भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PN के बराबर हैं |

सिद्ध करना है :

(i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

(ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

प्रमाण :

(i) ΔABM और ΔPQN में

$AB = PQ$ (दिया है)

$BM = QN$ (दिया है)

$AM = PN$ (दिया है)

SSS सर्वांगसमता नियम से

$\Delta ABM \cong \Delta PQN$ **Proved**

$\angle B = \angle Q$ .... (i) By CPCT

(ii) BM = QN दिया है

या $\frac{1}{2}$ BC = $\frac{1}{2}$ QR (चूँकि AM और PN माध्यिका है इसलिए माध्यिका सम्मुख भुजा को समद्विभाजित करती है)

या BC = QR .... (ii)

ΔABC और ΔPQR में

AB = PQ (दिया है)

$\angle$B = $\angle$Q समीकरण (i) से

BC = QR समीकरण (ii) से

SAS सर्वांगसमता नियम से

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$ **Proved**

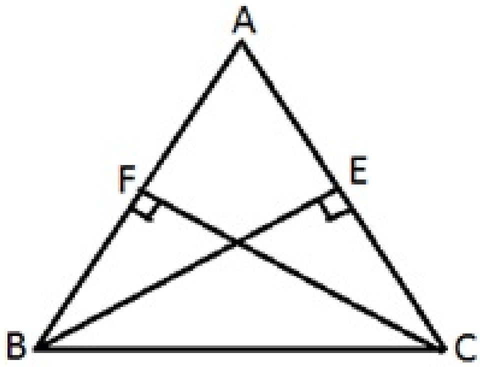
Q4. BE और CF एक त्रिभुज ABC के दो बराबर शीर्षलंब हैं | RHS सर्वागसमता नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि DABC एक समद्विबाहु त्रिभुज हैं |

हल :

दिया है : त्रिभुज ABC में दो बराबर शीर्षलंब BE और CF हैं |

अत: BE = CF है, BE ⊥ AC और CF ⊥ AB है |

सिद्ध करना है :



AB = AC

प्रमाण : ΔBCF और ΔCBE में

CF = BE (भुजा दिया है)

BC = BC (उभयनिष्ठ कर्ण)

∠BFC = ∠CEB (प्रत्येक 90°)

RHS सर्वांगसमता नियम से

ΔBCF ≅ ΔCBE

अत: ∠B = ∠C BY CPCT

इसलिए, AB = AC (बराबर कोणों के सम्मुख भुजा बराबर होते हैं)

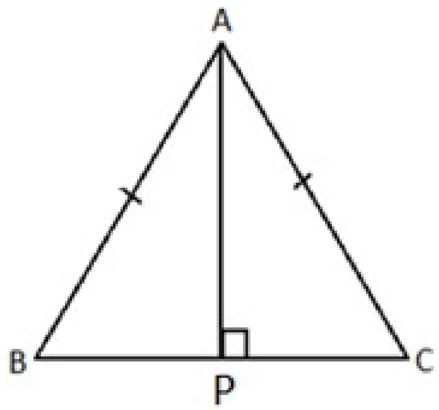
Q5. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है | AP ⊥ BC खींच कर दर्शाइए कि ∠B = ∠C है |

हल :

दिया है : ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है | जिसमें AP ⊥ BC हैं |

सिद्ध करना है :

$\angle B = \angle C$



प्रमाण : ΔABP और ΔACP में

$AB = AC$ (कर्ण दिया है)

$AP = AP$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle APB = \angle APC$ (प्रत्येक $90°$)

RHS सर्वांगसमता नियम से

$\Delta ABP \cong \Delta ACP$

अत: $\angle B = \angle C$ BY CPCT

प्रश्नावली 7.4

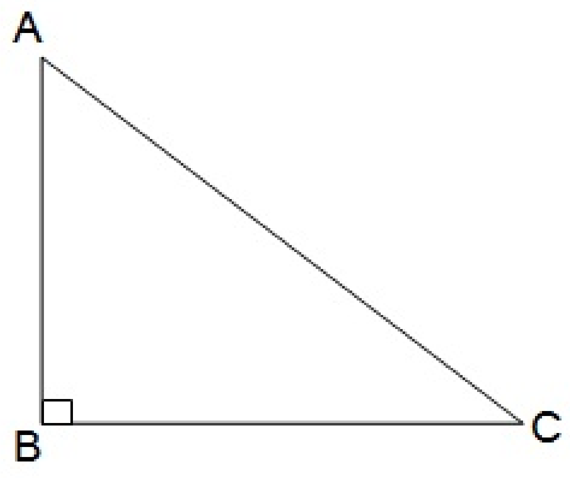
Q1. दर्शाइए कि समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लंबी भुजा होती है |

हल :

दिया है : ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसका

कोण B समकोण है और AC कर्ण है |

सिद्ध करना है :



(i) AC > AB
(ii) AC > BC
} अर्थात AC सबसे लंबी भुजा है |

प्रमाण : Δ ABC का ∠B समकोण है |

अत: ∠A और ∠C न्यूनकोण है |

इसलिए, ∠B > ∠C [क्योंकि B समकोण है और C न्यूनकोण है]

∴ AC > AB (i) (बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है)

पुन: ∠B समकोण है और ∠A न्यूनकोण है |

इसलिए, ∠B > ∠A [क्योंकि B समकोण है और C न्यूनकोण है]

∴ AC > BC (ii) (बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है)

समी० (i) तथा (ii) से कर्ण AC सबसे बड़ी भुजा है |

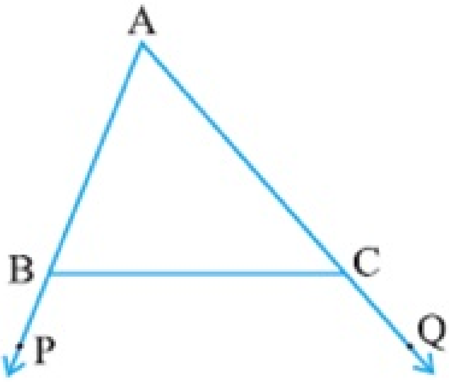
Proved

Q2. आकृति 7.48 में, ΔABC की भुजाओं AB और AC को क्रमश: बिन्दुओं P तथा Q तक बढाया गया है | साथ ही, ∠PBC < ∠QCB है | दर्शाइए कि AC > AB है |

हल :

दिया है : ΔABC की भुजाओं AB और AC को क्रमश: बिन्दुओं P
तथा Q तक बढाया गया है जिसमें, ∠PBC < ∠QCB है |

सिद्ध करना है : AC > AB



प्रमाण : AB और AC को क्रमश: बिन्दुओं P तथा Q तक बढाया गया है,

इसलिए, $\angle ABC + \angle PBC = 180°$ ...... (1) रैखिक युग्म

और $\angle ACB + \angle QCB = 180°$ ...... (2) रैखिक युग्म

समीकरण (1) तथा (2) से

$\angle ABC + \angle PBC = \angle ACB + \angle QCB$ (चूँकि दोनों समी० का मान समान है)

जबकि $\angle PBC < \angle QCB$ (दिया है)

अत: स्पष्ट है कि

$\angle ABC > \angle ACB$ **Proved**

ATP Help:

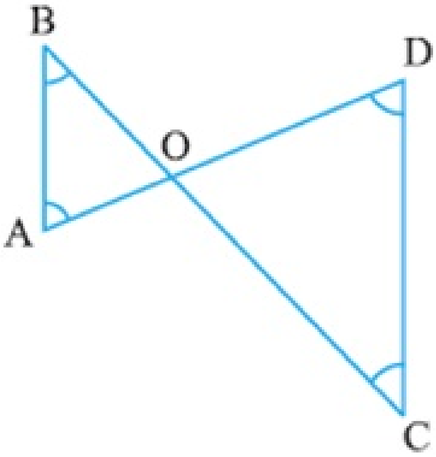
A + b = a + B माना

चूँकि A > a इसलिए b < B

Q3. आकृति 7.49 में, $\angle B < \angle A$ और $\angle C < \angle D$ है |

दर्शाइए कि AD < BC है |

हल :



दिया है : Δ AOB और Δ COD में ∠B < ∠A और ∠C < ∠D है |

सिद्ध करना है : AD < BC

प्रमाण : Δ AOB में,

∠B < ∠A (दिया है)

∴ AO < BO .... (1) (बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है)

अब, Δ COD में,

∠C < ∠D (दिया है)

∴ DO < CO .... (2) (बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है)

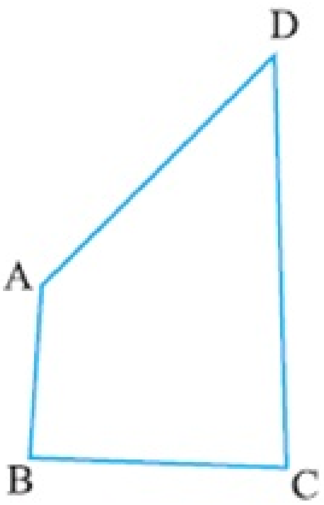
समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर

AO + DO < BO + CO

या AD < BC **Proved**

Q4. AB और CD क्रमश: एक चतुर्भुज ABCD की सबसे छोटी और सबसे बड़ी भुजा हैं (देखिये आकृति 7.50) | दर्शाइए कि ∠A > ∠C और ∠B > ∠D है |

हल :

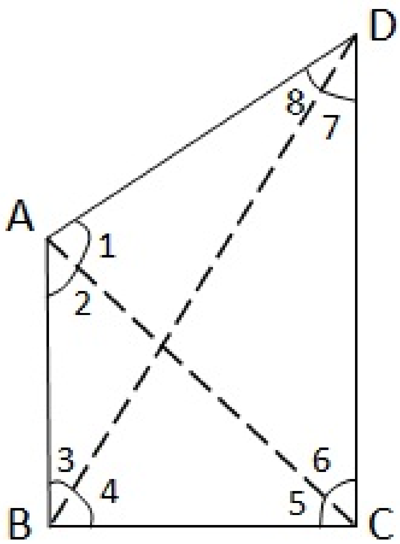


दिया है : AB और CD क्रमश: एक चतुर्भुज ABCD की सबसे छोटी और सबसे बड़ी भुजा हैं |

सिद्ध करना है :

(i) ∠A > ∠C

(ii) ∠B > ∠D



रचना : A को C से और B को D से मिलाया |

प्रमाण : (i) ΔABC में,

AB सबसे छोटी भुजा है, (दिया है)

अत:, BC > AB

∴ $\angle 2 > \angle 5$ ...... (1) (बड़े भुजा की सम्मुख कोण बड़ी होती है)

अब, ΔACD में,

CD सबसे बड़ी भुजा है, (दिया है)

अत:, CD > AD

∴ $\angle 1 > \angle 6$ ...... (2) (बड़े भुजा की सम्मुख कोण बड़ी होती है)

समी० (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$\angle 1 + \angle 2 > \angle 5 + \angle 6$

या $\angle A > \angle C$ **Proved**,

(ii) इसी प्रकार ΔABD में,

AD > AB (क्योंकि AB सबसे छोटी भुजा है)

∴ $\angle 3 > \angle 8$ ...... (3)

और ΔBCD में,

CD > BC (क्योंकि CD सबसे बड़ी भुजा है)

∴ $\angle 4 > \angle 7$ ...... (4)

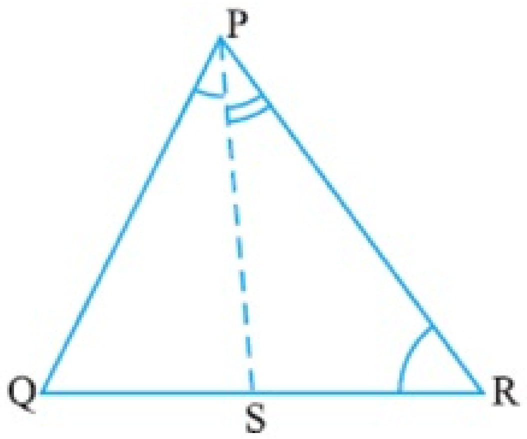
समी० (3) तथा (4) को जोड़ने पर

$\angle 3 + \angle 4 > \angle 7 + \angle 8$

या $\angle B > \angle D$ **Proved,**

Q5. आकृति 7.51 में PR > PQ है और PS कोण QPR समद्विभाजित करता है | सिद्ध कीजिए कि $\angle PSR > \angle PSQ$ है |

हल :



दिया है : PR > PQ और PS कोण QPR समद्विभाजित करता है |

सिद्ध करना है : ∠PSR > ∠PSQ

प्रमाण : PS कोण QPR समद्विभाजित करता है | (दिया है)

∴ ∠QPS = ∠RPS ...... (1)

और, PR > PQ (दिया है)

∴ ∠PQS > ∠PRS ....(2)

ΔPQS में,

∠QPS + ∠PQS + ∠PSQ = 180° ..... (3) (Δ के तीनों कोणों का योग)

इसीप्रकार, ΔPRS में,

∠PRS + ∠RPS + ∠PSR = 180° ..... (4) (Δ के तीनों कोणों का योग)

समीकरण (3) और (4) से हम पाते है कि ..

∠QPS + ∠PQS + ∠PSQ = ∠PRS + ∠RPS + ∠PSR

या ∠QPS + ∠PQS + ∠PSQ = ∠PRS + ∠QPS + ∠PSR समी॰ (1) से

या ∠PQS + ∠PSQ = ∠PRS + ∠PSR

जबकि ∠PQS > ∠PRS समी॰ (2) से

अत: स्पष्ट है कि ∠PSQ < ∠PSR **Proved**

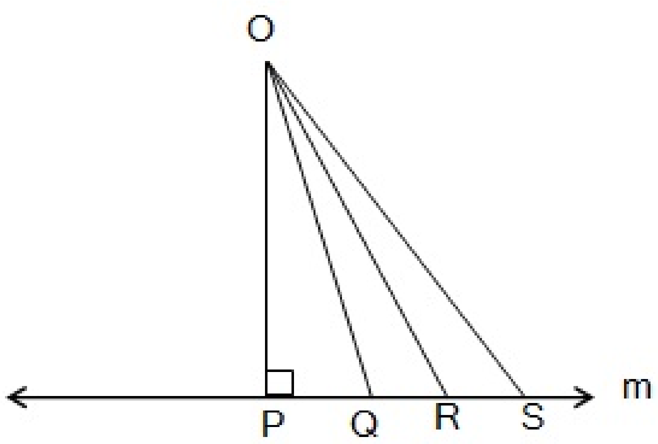
ATP Help:

A + b = a + B माना

चूँकि A > a इसलिए b < B

Q6. दर्शाइए कि एक रेखा पर एक दिए हुए बिंदु से, जो उस रेखा पर स्थित नहीं है, जितने रेखाखंड खींचे जा सकते हैं उनमें लम्ब रेखाखंड सबसे छोटा होता है।

हल :



दिया है : m एक रेखा है और O एक बिंदु है

जो m पर स्थित नहीं है | OP ⊥ m

सिद्ध करना है : OP < OQ < OR < OS

प्रमाण : OP ⊥ m दिया है |

∴ ∠OPQ = 90° और ∠OQP, ∠ORP, ∠OSP न्यूनकोण हैं |

अत: ∠OQP < ∠OPQ

$\therefore$ $OP < OQ$ ..... (1) (बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है)

इसीप्रकार, $\angle ORP < \angle OPQ$

$\therefore$ $OP < OR$ ..... (2) (बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है)

समी० (1) तथा (2) से

$OP < OQ < OR$

OP जो लंब है सबसे छोटी भुजा है |