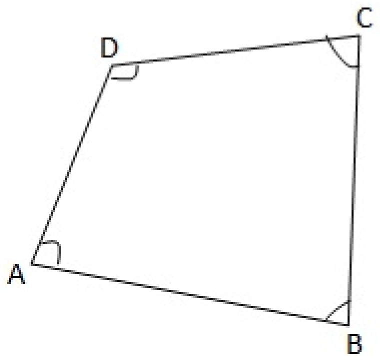
पाठ 8. चतुर्भुज

प्रश्नावली 8.1

Q1. एक चतुर्भुज के कोण 3 : 5 : 9 :13 के अनुपात में हैं | इस चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए |

Solution:

माना ∠A = 3x,



∠B = 5x,

∠C = 9x और

∠D = 13x,

∴∠A + ∠B + ∠C + ∠D = 360o

(किसी चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360० होता है)

⇒ 3x + 5x + 9x + 13x = 360o

⇒ 30x = 360o

$$X = \frac{360^0}{30} = 12^0$$

अत: सभी कोण

∠A = 3x = 3 × 12o = 36o

∠B = 5x = 5 × 12o = 60o

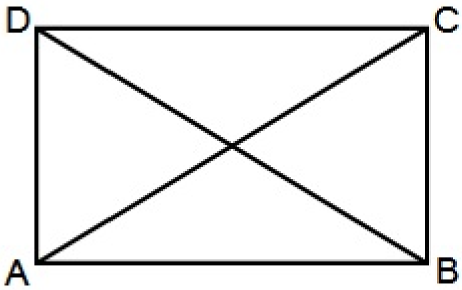
∠C = 9x = 9 × 12o = 108o

∠D = 13x = 13 × 12o = 156o

Q2. यदि एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो दर्शाइए कि वह एक आयत है |

Solution:

दिया है : ABCD एक समांतर चतुर्भुज है |



जिसके विकर्ण AC = BD है |

सिद्ध करना है : ABCD एक आयत है |

प्रमाण : ΔABD तथा ΔABC में

AD = BC (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा)

AB = AB (उभयनिष्ठ)

BD = AC (दिया है)

SSS सर्वांगसमता नियम से

नोट: CPCT का पूरा नाम

सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं |

Corresponding Part of Congruent Triangles

ΔABD ≅ ΔABC

∴ ∠A = ∠B (By CPCT) …… (1)

चूँकि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है |

∴ AD || BC और AB एक तिर्यक रेखा है |

अत: ∠A + ∠B = 180o (अंत: आसन्न कोणों का योग)

⇒∠A + ∠A = 180o ..समीo (1) से

⇒2∠A = 180o

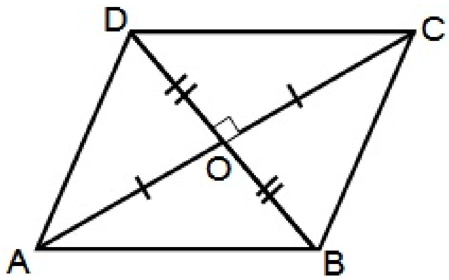
⇒∠A = 90o

(वह समांतर चतुर्भुज जिसकी एक कोण समकोण हो आयत कहलाता है)

अत: ABCD एक आयत है | proved

Q3. दर्शाइए कि यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करें, तो वह एक समचतुर्भुज होता है।

Solution:



दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है |

जिसके विकर्ण AC तथा BD एक दुसरे को बिंदु O

पर समद्विभाजित करते हैं | जहाँ ∠COD = 90o है

और AO = CO तथा BO = DO है |

सिद्ध करना है : ABCD एक आयत है |

नोट: कार्यकारी नियम:

(i) सबसे पहले इसको एक समांतर चतुर्भुज सिद्ध करेंगे फिर इसकी प्रत्येक भुजा को बराबर दिखायेंगे | जब यह समचतुर्भुज सिद्ध हो जायेगा |

ATP Help

प्रमाण : ΔAOB तथा ΔCOD में

AO = CO (दिया है)

BO = DO (दिया है)

∠AOB = ∠COD (शिर्षाभिमुख कोण)

अत: SAS सर्वांगसमता नियम से

ΔAOB ≅ ΔCOD

∴ AB = CD (By CPCT) ...... (1)

तथा ∠BAO = ∠DCO (एकांतर कोण) (By CPCT)

∴ AB || CD .... (2) (एकांतर कोण बराबर हो तो रेखाएँ समांतर होती है)

समी० (1) तथा (2) से

ABCD एक समांतर चतुर्भुज है |

(यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर एवं समान्तर हो तो वह समान्तर चतुर्भुज होता है |)

∴ AD = BC .... (3) (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा बराबर होती है)

अब ΔAOD तथा ΔCOD में

AO = CO (दिया है)

DO = DO (उभयनिष्ठ)

∠AOD = ∠COD (90o प्रत्येक)

अत: SAS सर्वांगसमता नियम से

ΔAOD ≅ ΔCOD

∴ AD = CD (By CPCT) ...... (4)

समी० (1), (3) तथा (4) से हम पाते हैं |

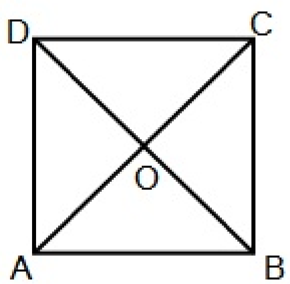
AB = BC = CD = AD

अत: ABCD एक समचतुर्भुज है | **(Proved)**

(वह समान्तर चतुर्भुज जिसकी प्रत्येक भुजा बराबर हो समचतुर्भुज होता है |)

Q4. दर्शाइए कि एक वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं और परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं |

Solution:



दिया है : ABCD एक वर्ग है जिसके विकर्ण AC तथा BD एक

दुसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते है |

सिद्ध करना है :

(i) AO = CO तथा BO = DO

(ii) AOB = 90o

प्रमाण : ΔAOB तथा ΔCOD में

$AB = CD$ (वर्ग की भुजा)

$\angle BAO = \angle DCO$ (एकांतर कोण)

$\angle AOB = \angle COD$ (शिर्षाभिमुख कोण)

अत: ASA सर्वांगसमता नियम से

$\Delta AOB \cong \Delta COD$

$\therefore AO = CO$ तथा $BO = DO$ (By CPCT) .... (1)

पुन: ΔAOB तथा ΔBOC में

$AB = BC$ (वर्ग की भुजा)

$BO = BO$ (उभयनिष्ठ)

$AO = CO$ समी० (1) से

अत: SSS सर्वांगसमता नियम से

$\Delta AOB \cong \Delta BOC$

अत: $\angle AOB = \angle COB$ (By CPCT) .... (2)

अब $\angle AOB + \angle COB = 180o$ (रैखिक युग्म)

$\Rightarrow \angle AOB + \angle AOB = 180o$ समी0 (2) से

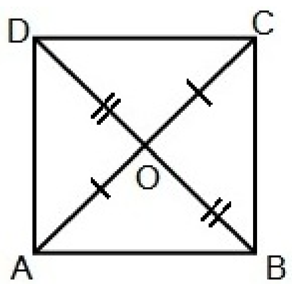
$\Rightarrow 2\angle AOB = 180o$

$\Rightarrow \angle AOB = 90o$

Proved

Q5. दर्शाइए कि यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हो और परस्पर समद्विभाजित करें, तो वह एक वर्ग होता है |

Solution:



दिया है : ABCD एकचतुर्भुज है जिसमें विकर्ण $AC = BD$ है और एक

दुसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते है | जहाँ $AO = CO$ तथा $BO = DO$ है |

सिद्ध करना है : ABCD एक वर्ग है |

प्रमाण : ΔAOB तथा ΔCOD में

AO = CO (दिया है)

BO = DO (दिया है)

∠AOB = ∠COD (शिर्षाभिमुख कोण)

अत: SAS सर्वांगसमता नियम से

ΔAOB ≅ ΔCOD

∴ AB = CD (By CPCT) …… (1)

तथा ∠BAO = ∠DCO (एकांतर कोण) (By CPCT)

∴ AB || CD ……… (2) (एकांतर कोण बराबर हो तो रेखाएँ समांतर होती है)

समी० (1) तथा (2) से

ABCD एक समांतर चतुर्भुज है |

(यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर एवं समान्तर हो तो वह समान्तर चतुर्भुज होता है |)

∴ AD = BC ……….. (3) (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा बराबर होती है)

अब ΔAOD तथा ΔCOD में

AO = CO (दिया है)

DO = DO (उभयनिष्ठ)

∠AOD = ∠COD (90o प्रत्येक)

अत: SAS सर्वांगसमता नियम से

ΔAOD ≅ ΔCOD

∴ AD = CD (By CPCT) …… (4)

समी० (1), (3) तथा (4) से हम पाते हैं |

AB = BC = CD = AD ……….. (5)

अब, ΔABD तथा ΔABC में

AD = BC (वर्ग की सम्मुख भुजा)

AB = AB (उभयनिष्ठ)

BD = AC (दिया है)

SSS सर्वांगसमता नियम से

ΔABD ≅ ΔABD

∴ ∠A = ∠B (By CPCT) …… (6)

चूँकि ABCD एक वर्ग है |

∴ AD || BC और AB एक तिर्यक रेखा है |

अत: ∠A + ∠B = 180o (अंत: आसन्न कोणों का योग)

⇒∠A + ∠A = 180o ..समीo (6) से

⇒2∠A = 180o

$$\Rightarrow \angle A = \frac{180^{o}}{2} = 90^{o}$$

⇒∠A = 90o   ………. (7)

समीo (5) तथा (7) से स्पष्ट है कि

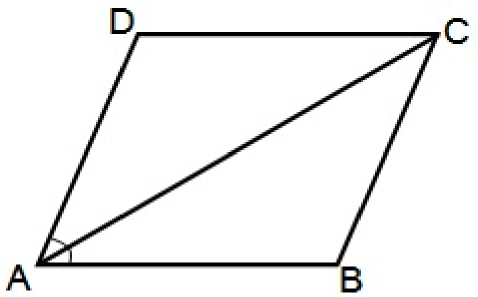
ABCD एक वर्ग है | **Proved**

Q6. समांतर चतुर्भुज ABCD का विकर्ण AC कोण A को समद्विभाजित करता है | दर्शाइए कि

(i) यह ∠C को भी समद्विभाजित करता है |

(ii) ABCD एक समचतुर्भुज है |

Solution:



दिया है : ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसका

विकर्ण AC कोण A को समद्विभाजित करता है |

सिद्ध करना है :

(i) AC, ∠C को भी समद्विभाजित करता है |

(ii) ABCD एक समचतुर्भुज है |

प्रमाण:

(i)

ΔABC तथा ΔDAC में,

$\angle BAC = \angle BAC$ (दिया है)

$\angle B = \angle D$ (समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते है)

$AC = AC$ (उभयनिष्ठ)

अत: ASA सर्वांगसमता नियम से

$\Delta ABC \cong \Delta DAC$

$\therefore \angle BCA = \angle DCA$ (By CPCT)

अत: विकर्ण AC, $\angle C$ को समद्विभाजित करता है |

(ii)

पुन: $AB = AD$ (By CPCT) .... (1)

चूँकि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है |

$\therefore AB = CD$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा) ......(2)

और

$BC = AD$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा) ......(3)

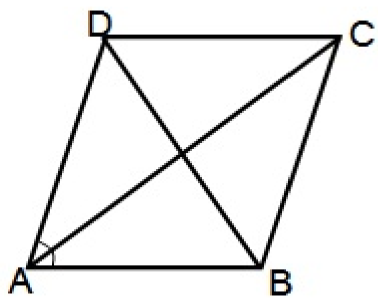
समीकरण (1), (2) तथा (3) से

$AB = BC = CD = AD$

अत: ABCD एक समचतुर्भुज है | **(Proved)**

Q7. ABCD एक समचतुर्भुज है | दर्शाइए कि AC कोणों A और C दोनों को समद्विभाजित करता है तथा विकर्ण BD कोणों B तथा D दोनों को समद्विभाजित करता है |

Solution:



दिया है : ABCD एक समचतुर्भुज चतुर्भुज है |

सिद्ध करना है :

(i) AC, $\angle A$ तथा $\angle C$ को भी समद्विभाजित करता है |

(ii) BD, $\angle B$ तथा $\angle D$ को भी समद्विभाजित करता है |

प्रमाण:

(i)

ΔABC तथा ΔADC में,

AB = AD (समचतुर्भुज की भुजाएँ)

∠B = ∠D (समचतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते है)

AC = AC (उभयनिष्ठ)

अत: SAS सर्वांगसमता नियम से

ΔABC ≅ ΔADC

∴ ∠BAC = ∠DAC (By CPCT) .... (1)

∴ ∠BCA = ∠DCA (By CPCT) ....(2)

समी० (1) तथा (2) से

विकर्ण AC, ∠A तथा ∠C को समद्विभाजित करता है |

इसी प्रकार हम

(ii) BD, ∠B तथा ∠D को भी समद्विभाजित करता है |

को भी सिद्ध कर सकते हैं |

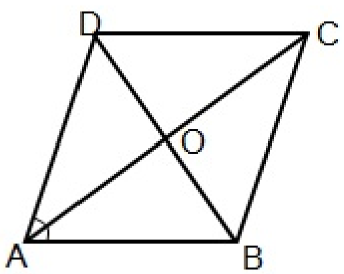
Q8. ABCD एक आयत है जिसमें विकर्ण AC दोनों कोण A और C को समद्विभाजित करता है | दर्शाइए कि:

(i) ABCD एक वर्ग है |

(ii) विकर्ण BD दोनों कोण B और D को समद्विभाजित करता है

Solution:

दिया है: ABCD एक आयत है जिसमें विकर्ण AC दोनों कोण A और C को समद्विभाजित करता है |



सिद्ध करना है :

(i) ABCD एक वर्ग है |

(ii) विकर्ण BD दोनों कोण B और D को समद्विभाजित करता है |

प्रमाण:

(i) चूँकि ABCD एक आयत है |

∴ AB = CD .... (1) आयत की सम्मुख भुजा

और AD = BC .... (2) आयत की सम्मुख भुजा

अब, ΔABC तथा ΔACD में,

∠BAC = ∠DAC (दिया है) चूँकि AC कोण A और C को समद्विभाजित करता है |

AC = AC (उभयनिष्ठ)

∠B = ∠D (प्रत्येक 90o) आयत के कोण

A.A.S सर्वांगसमता नियम से

ΔABC ≅ ΔACD

∴ AB = AD .... (3) (By CPCT /सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

समीकरण (1), (2) और (3) से

AB = BC = CD = AD

चूँकि ABCD एक आयत है और इसकी प्रत्येक भुजा बराबर भी है |

अत: ABCD एक वर्ग है | **Proved**

(ii) ΔABD तथा ΔCBD में,

AB = BC (वर्ग की भुजा)

BD = BD (उभयनिष्ठ)

∠A = ∠C (प्रत्येक 90o) वर्ग के कोण

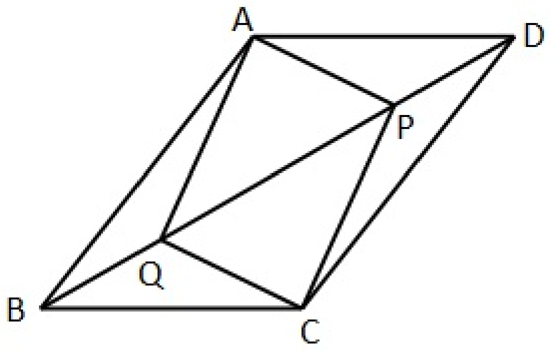
S.A.S सर्वांगसमता नियम से

ΔABD ≅ ΔCBD

$$\left.\begin{array}{l} \therefore\ \angle ABD = \angle CBD \\ \text{और}\ \angle ADB = \angle CDB \end{array}\right\}\ \text{(By CPCT /सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)}$$

Δ ∠

Q9. समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण BD पर दो बिंदु P और Q इस प्रकार स्थित हैं कि DP = BQ है। दर्शाइए कि



(i) Δ APD ≅ Δ CQB

(ii) AP = CQ

(iii) Δ AQB ≅ Δ CPD

(iv) AQ = CP

(v) APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है |

Solution:

दिया है : ABCD एक समांतर चतुर्भुज है और DP = BQ है |

सिद्ध करना है :

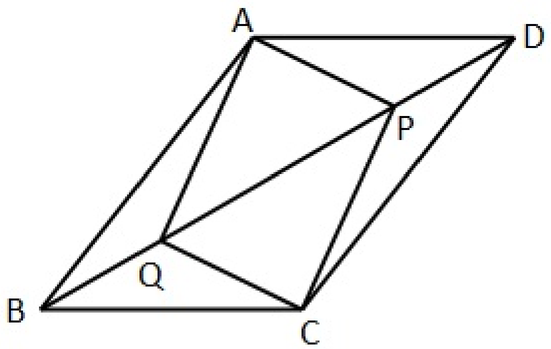
(i) Δ APD ≅ Δ CQB

(ii) AP = CQ

(iii) Δ AQB ≅ Δ CPD

(iv) AQ = CP

(v) APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है |



प्रणाम :

(i) Δ APD तथा Δ CQB में

AD = BC (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा)

DP = BQ (दिया है)

$\angle ADP = \angle CBQ$ (एकांतर अत: कोण)

अत: S.A.S सर्वांगसमता नियम से

∴ $\Delta\ APD \cong \Delta\ CQB$

(i) अत: AP = CQ .... (1) (By CPCT /सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

(iii) Δ AQB तथा Δ CPD में

AB = DC (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा)

BQ = DP (दिया है)

$\angle ABQ = \angle CDP$ (एकांतर अत: कोण)

अत: S.A.S सर्वांगसमता नियम से

∴ $\Delta\ AQB \cong \Delta\ CPD$

(iv) अत: AQ = CP .... (2) (By CPCT /सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

(v) समी० (1) तथा (2) से

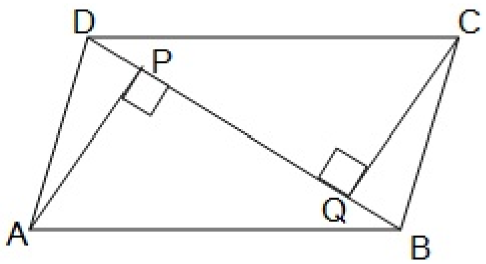
APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है |

Q10. ABCD एक समांतर चतुर्भज है तथा AP और CQ

शीर्षों A और C से विकर्ण BD पर क्रमशः लम्ब हैं। दर्शाइए कि

(i) Δ APB ≅ Δ CQD

(ii) AP = CQ



Solution:

दिया है : ABCD एक समांतर चतुर्भज है तथा AP और CQ

शीर्षों A और C से विकर्ण BD पर क्रमशः लम्ब हैं।

सिद्ध करना है :

(i) $\Delta\ APB \cong \Delta\ CQD$

(ii) AP = CQ

प्रमाण:

(i) Δ APB तथा Δ CQD में,

AB = CD (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा)

∠ABP = ∠CDQ (एकांतर अत: कोण)

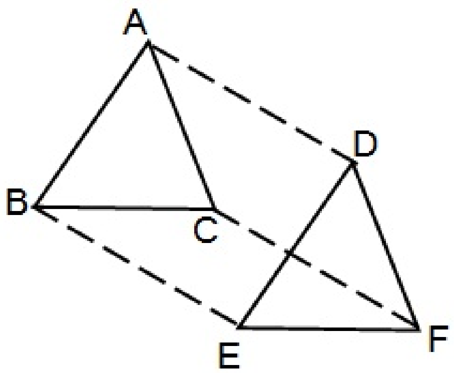
∠APB = ∠CQD (प्रत्येक 90o)

अत:, ASA सर्वांगसमता नियम से

Δ APB ≅ Δ CQD

(ii) इसलिए, AP = CQ (By CPCT /सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

Q11. ΔABC और ΔDEF में, AB = DE, AB||DF, BC = EF और BC||EF है | शीर्षों A, B और C को क्रमश: शीर्षों D, E और F से जोड़ा जाता है | दर्शाइए कि



(i) चतुर्भुज ABED एक समांतर चतुर्भुज है।

(ii) चतुर्भुज BEFC एक समांतर चतुर्भुज है।

(iii) AD || CF और AD = CF है|

(iv चतुर्भुज ACFD एक समांतर चतुर्भुज है।

(v) AC = DF है |

(vi) Δ ABC ≅ Δ DEF है |

Solution:

दिया है : ΔABC और ΔDEF में, AB = DE, AB||DF, BC = EF और BC||EF है |

सिद्ध करना है :

(i) चतुर्भुज ABED एक समांतर चतुर्भुज है।

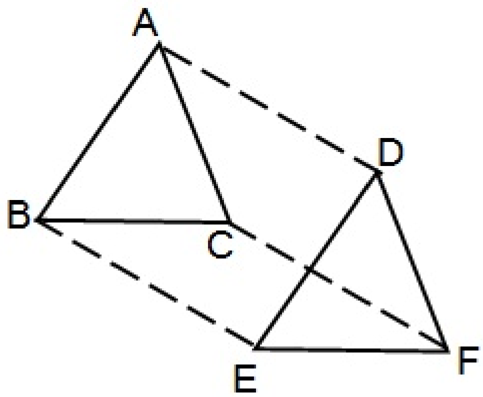
(ii) चतुर्भुज BEFC एक समांतर चतुर्भुज है।

(iii) AD || CF और AD = CF है|

(iv चतुर्भुज ACFD एक समांतर चतुर्भुज है।

(v) AC = DF है |

(vi) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ है |



प्रमाण:

(i) चतुर्भुज ABED में

AB = DE और AB||DF दिया है |

$\therefore$ चतुर्भुज ABED एक समांतर चतुर्भुज है |

(यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समांतर हो तो वह समांतर चतुर्भुज होता है)

अब, चूँकि ABED एक समांतर चतुर्भुज है |

$\therefore$ AD = BE और AD|| BE ....(1)

(समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा बराबर और समांतर होती है)

(ii) इसीप्रकार से, चतुर्भुज BEFC में

BC = EF और BC||EF दिया है |

$\therefore$चतुर्भुज BEFC एक समांतर चतुर्भुज है |

अत: CF = BE और CF||BE .... (2) (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख)

(iii) समी० (1) तथा (2) से

AD || CF और AD = CF है|

(चूँकि सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समांतर है)

$\therefore$चतुर्भुज ACFD एक समांतर चतुर्भुज है।

इसलिए, AC = DF और AC||DF .... (3)

(vi) Δ ABC और Δ DEF में,

AB = DE (दिया है)

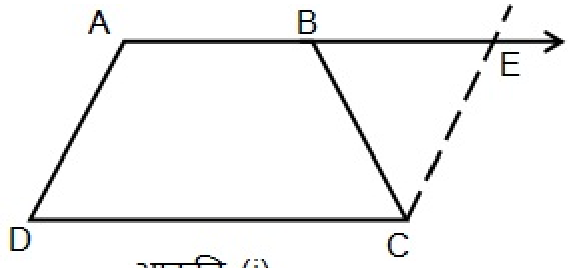
BC = EF (दिया है)

AC = DF (समी० 3 से)

S.S.S सर्वांगसमता नियम से

Δ ABC ≅ Δ DEF Proved

Q12. ABCD एक समलम्ब है, जिसमें AB || DC और AD = BC है | दर्शाइए कि



आकृति (i)

(i) ∠ A = ∠ B

(ii) ∠ C = ∠ D

(iii) Δ ABC ≅ Δ BAD

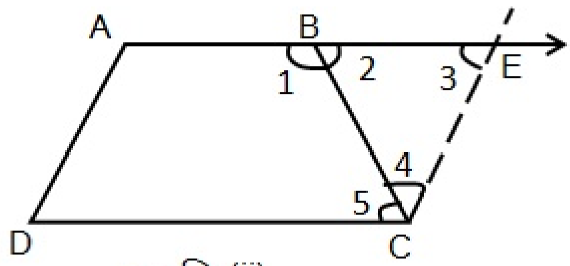
(iv) विकर्ण AC = विकर्ण BD है |

Solution:

दिया है : ABCD एक समलम्ब है,

जिसमें AB || DC और AD = BC है |

सिद्ध करना है :



आकृति (ii)

(i) ∠ A = ∠ B

(ii) ∠ C = ∠ D

(iii) Δ ABC ≅ Δ BAD

(iv) विकर्ण AC = विकर्ण BD है |

रचना : AD के समांतर CE खिंचा |

प्रमाण: AB || DC .... (1) दिया है |

AD || CE .... (2) रचना से

[चूँकि सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म समांतर हो तो वो समांतर चतुर्भुज होता है] |]

समीकरण (1) तथा (2) से

AECD एक समांतर चतुर्भुज है |

$\therefore$ AD = CE .... (3) [समांतर चतुर्भुज AECD की सम्मुख भुजा]

जबकि, AD = BC .... (4) दिया है |

समी० (3) तथा (4) से

BC = CE

$\therefore \angle 2 = \angle 3$ .... (5) (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण ...)

AB || CD दिया है और BC एक तिर्यक रेखा है |

$\therefore \angle 2 = \angle 5$ .... (6) **[अंत: एकांतर कोण]**

समी० (5) तथा (6) से हमें प्राप्त होता है |

$\angle 3 = \angle 5$ .... (7)

अब DBEC में,

बहिष्कोंण $\angle 1 = \angle 3 + \angle 4$

या $\angle 1 = \angle 5 + \angle 4$ समी० (7) से

या $\angle B = \angle ECD$ .... (8)

चूँकि, AECD एक समांतर चतुर्भुज है |

$\therefore$ $\angle A = \angle ECD$ .... (9) **[समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण]**

समी० (8) और (9) से

$\angle A = \angle B$ ....(10) Proved (i)

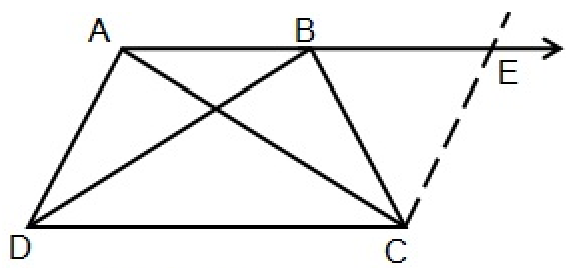
(ii) पुन:, $\angle D = \angle E$ [समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण]

या $\angle D = \angle 3$ .... (11)

समी० (7) और (11) से

$\angle D = \angle 5$

या $\angle D = \angle C$ **proved(ii)**



आकृति (ii)

(iii) Δ ABC और Δ BAD में

AD = BC (दिया है)

AB = AB (उभयनिष्ठ भुजा')

$\angle A = \angle B$ समीo (10) से

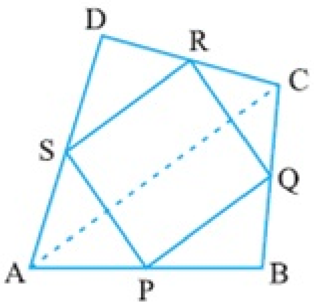
अत: SAS सर्वांगसमता नियम से

$\Delta ABC \cong \Delta BAD$

(iv) विकर्ण AC = विकर्ण BD (By CPCT /सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

प्रश्नावली 8.2

Q1. ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं | AC उसका एक विकर्ण है | दर्शाइए कि



हल :

दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं |

सिद्ध करना है :

(i) SR || AC और SR = $\frac{1}{2}$ AC है |

(ii) PQ = SR है |

(iii) PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है |

प्रमाण : त्रिभुज ADC में

AD तथा CD का मध्यबिंदु क्रमश: S तथा R है | **(दिया है)**

अत: मध्य-बिंदु प्रमेय से

इसलिए, SR || AC और SR = $\frac{1}{2}$ AC .... (i)

त्रिभुज ABC में,

AB तथा BC का मध्य-बिंदु P तथा Q है | **(दिया है)**

इसलिए मध्य-बिंदु प्रमेय से

PQ || AC और PQ = $\frac{1}{2}$ AC .... (ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से

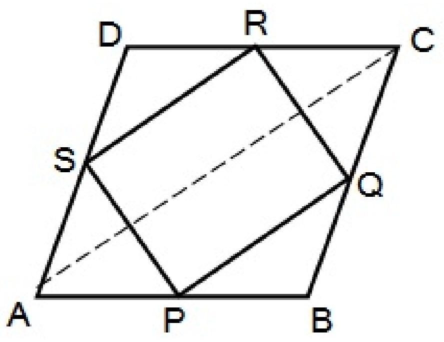
SR || PQ और SR = PQ

अर्थात PQ = SR

(यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के एक युग्म में से कोई भी एक युग्म बराबर और समान्तर हो तो वो समान्तर चतुर्भुज होता है) .

इसलिए PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है |

Q2. ABCD एक समचतुर्भुज है और P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु है। दर्शाइए कि चतुर्भुज PQRS एक आयत है।



हल :

दिया है : ABCD एक समचतुर्भुज है और P, Q, R और S

क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु है।

सिद्ध करना है :

PQRS एक आयत है |

प्रमाण : त्रिभुज ADC में

AD तथा CD का मध्यबिंदु क्रमशः S तथा R है | **(दिया है)**

अत: मध्य-बिंदु प्रमेय से

इसलिए, SR || AC और SR = $\frac{1}{2}$ AC .... (i)

त्रिभुज ABC में,

AB तथा BC का मध्य-बिंदु P तथा Q है | **(दिया है)**

इसलिए मध्य-बिंदु प्रमेय से

PQ || AC और PQ = $\frac{1}{2}$ AC .... (ii)

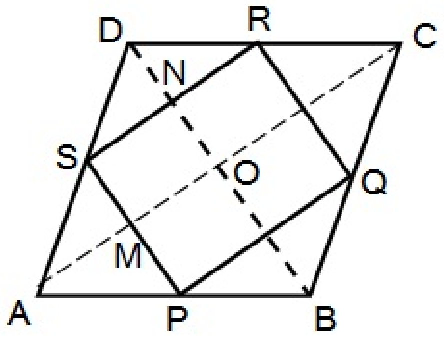
समीकरण (i) तथा (ii) से

SR || PQ और SR = PQ

(यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के एक युग्म में से कोई भी एक युग्म बराबर और समान्तर हो तो वो समान्तर चतुर्भुज होता है) .

इसलिए PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है |

चूँकि ABCD एक समचतुर्भुज है |



इसलिए, $\angle AOD = 90°$

या $\angle MON = 90°$

(समचतुर्भुज के विकर्ण एक दुसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं !)

अब SR || AC और SP || BD है

तो SMON भी एक समान्तर चतुर्भुज है |

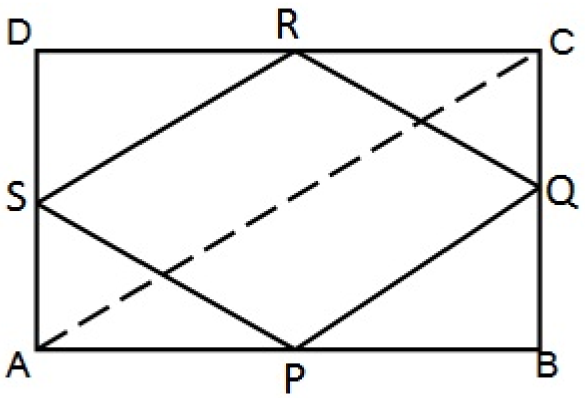
इसलिए $\angle MSN = \angle MON = 90°$ (समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

या $\angle PSR = 90°$

अत: PQRS एक आयत है | **Proved**

Q3. ABCD एक आयत है, जिसमें P, Q, R और S क्रमश: भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं | दर्शाइए कि चतुर्भुज PQRS एक समचतुर्भुज है |

हल :



दिया है : ABCD एक आयत है, जिसमें P, Q, R और S क्रमश: भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं |

सिद्ध करना है :

PQRS एक समचतुर्भुज है |

रचना : A को C से मिलाया |

प्रमाण : त्रिभुज ADC में

AD तथा CD का मध्यबिंदु क्रमश: S तथा R है | **(दिया है)**

अत: मध्य-बिंदु प्रमेय से

इसलिए, SR || AC और SR = $\frac{1}{2}$ AC .... (i)

त्रिभुज ABC में,

AB तथा BC का मध्य-बिंदु P तथा Q है | **(दिया है)**

इसलिए मध्य-बिंदु प्रमेय से

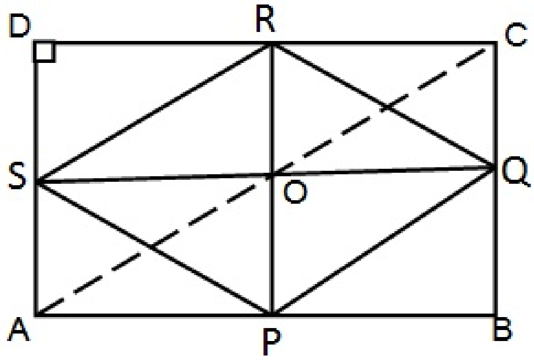
PQ || AC और PQ = $\frac{1}{2}$ AC .... (ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से

SR || PQ और SR = PQ

(यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के एक युग्म में से कोई भी एक युग्म बराबर और समान्तर हो तो वो समान्तर चतुर्भुज होता है) .

इसलिए PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है |



अब, चूँकि ABCD एक आयत है |

इसलिए , AB || CD या SQ || CD ...(i)

(क्योंकि S तथा Q AD तथा BC के मध्य-बिंदु है |)

इसीप्रकार AD || PR ...... (ii)

अत: समीकरण (i) तथा (ii) से

DSOR एक समान्तर चतुर्भुज है |

इसलिए, ∠SOR = ∠D (समान्तर चतुर्भुज कि सम्मुख भुजा)

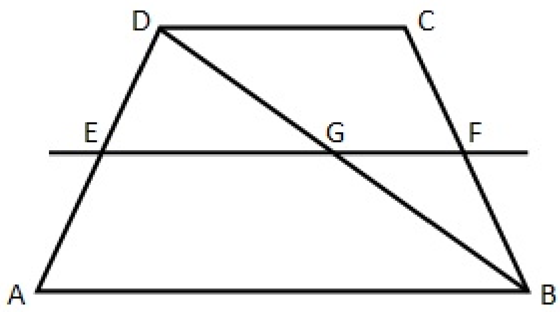
जबकि, ∠D = 90° (आयत का प्रत्येक कोण)

इसलिए ∠SOR = 90°

चूँकि PQRS एक समांतर चतुर्भुज है जिसके विकर्ण समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं |

अत: PQRS एक समचतुर्भुज है |
(वह समांतर चतुर्भुज जिसके विकर्ण समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं समचतुर्भुज कहलाता है |)

Q4. ABCD एक समलंब है, जिसमें AB || DC है। साथ ही, BD एक विकर्ण है और E भुजा AD का मध्य-बिंदु है। E से होकर एक रेखा AB के समांतर खींची गई है, जो BC को F पर प्रतिच्छेद करती है । दर्शाइए कि F भुजा BC का मध्य-बिंदु है।



हल :

दिया है : ABCD एक समलंब है, जिसमें AB || DC है।

साथ ही, BD एक विकर्ण है और E भुजा AD का

मध्य-बिंदु है। E से होकर एक रेखा AB के समांतर

खींची गई है, जो BC को F पर प्रतिच्छेद करती है ।

सिद्ध करना है : CF = BF

रचना : D को B से मिलाया जो EF को G पर प्रतिच्छेद करता है |

प्रमाण :

DABD में,

AB || EF ..... (i) (दिया है)

और E भुजा AD का मध्य-बिंदु है |

(किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिंदु से दूसरी भुजा के समांतर खिंची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है)

अत: मध्य-बिंदु प्रमेय 8.10 से

इसलिए बिंदु G भुजा BD का मध्य-बिंदु है | .... (i)

अब   AB || CD   .... (ii) (दिया है)

समीकरण (i) तथा (ii) से

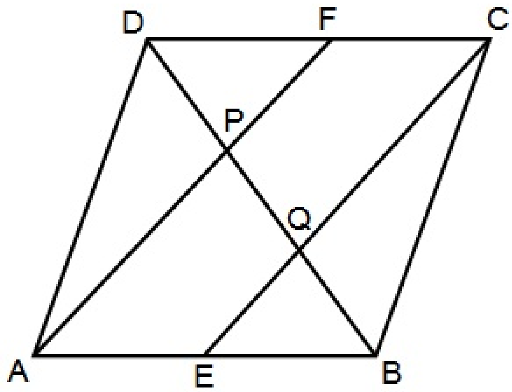
CD || EF और बिंदु G भुजा BD का मध्य-बिंदु है **[समीकरण (i) से]**

अत: मध्य-बिंदु प्रमेय 8.10 से DBCD में

F भुजा BC का मध्य-बिंदु है |

इसलिए CF = BF **proved**

Q5. एक समांतर चतुर्भुज ABCD में E और F क्रमशः भुजाओं AB और CD के मध्य-बिंदु हैं | दर्शाइए कि रेखाखंड AF और EC विकर्ण BD को समत्रिभाजित करते हैं |



हल :

दिया है : एक समांतर चतुर्भुज ABCD में E और F

क्रमशः भुजाओं AB और CD के मध्य-बिंदु हैं |

सिद्ध करना है : DP = PQ = QB

प्रमाण :

DABP में,

E भुजा AB का मध्य-बिंदु है और AF||EC दिया है |

अत: मध्य-बिंदु प्रमेय 8.10 से

Q भुजा PB का मध्य-बिंदु है |

अत: PQ = QB .... (i)

(किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिंदु से दूसरी भुजा के समांतर खिंची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है)

अब, DCDQ में,

F भुजा CD का मध्य-बिंदु है और AF||EC दिया है |

अत: मध्य-बिंदु प्रमेय 8.10 से

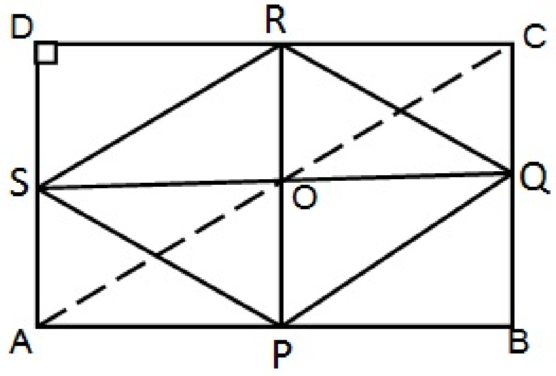
P भुजा DQ का मध्य-बिंदु है |

इसलिए, DP = PQ   .... (ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से

DP = PQ = QB   **Proved**

Q6. दर्शाइए कि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड परस्पर समद्विभाजित करते हैं।



हल :

दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है जिसके भुजाएँ

AB, BC, CD और DA का मध्य-बिंदु क्रमश:

P, Q, R और S है |

सिद्ध करना है : विकर्ण PR और SQ एक दुसरे को समद्विभाजित करते हैं |

रचना : P, Q, R और S को मिलाया और A को C से मिलाया |

प्रमाण : त्रिभुज ADC में

AD तथा CD का मध्यबिंदु क्रमश: S तथा R है | **(दिया है)**

अत: मध्य-बिंदु प्रमेय से

इसलिए, SR || AC और SR = $\frac{1}{2}$ AC .... (i)

त्रिभुज ABC में,

AB तथा BC का मध्य-बिंदु P तथा Q है | **(दिया है)**

इसलिए मध्य-बिंदु प्रमेय से

PQ || AC और PQ = $\frac{1}{2}$ AC .... (ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से

SR || PQ और SR = PQ

अर्थात PQ = SR

(यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के एक युग्म में से कोई भी एक युग्म बराबर और समान्तर हो तो वो समान्तर चतुर्भुज होता है) .

इसलिए PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है |

अब चूँकि PQRS एक समांतर चतुर्भुज है तो इसके विकर्ण PR और SQ एक दुसरे को समद्विभाजित करते हैं |

(समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दुसरे को समद्विभाजित करते है |)

Q7. ABC एक त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है | कर्ण AB के मध्य-बिंदु M से होकर BC के समांतर खिंची गई रेखा AC को D पर प्रतिच्छेद करती है | दर्शाइए कि

(i) D भुजा AC का मध्य-बिंदु है |

(ii) MD $\perp$ AC है |

(iii) CM = MA = $\frac{1}{2}$ AB है |

हल :

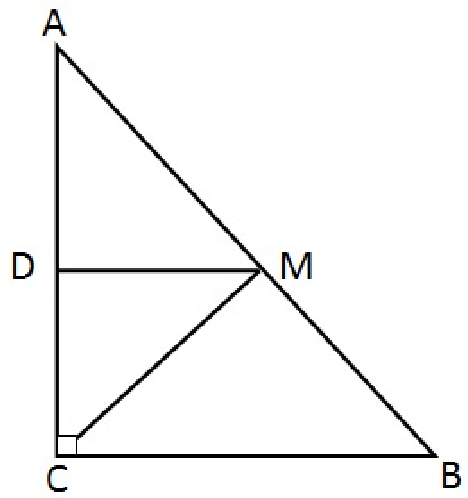
दिया है : ABC एक त्रिभुज है जिसका

कोण C समकोण है | कर्ण AB के मध्य-बिंदु

M से होकर BC के समांतर खिंची गई रेखा

AC को D पर प्रतिच्छेद करती है |

सिद्ध करना है :



(i) D भुजा AC का मध्य-बिंदु है |

(ii) $MD \perp AC$ है |

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2}$ AB है |

प्रमाण : (i) DABC में

M भुजा AB का मध्य-बिंदु है और MD || BC है |

अत: मध्य-बिंदु प्रमेय 8.10 से

(किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिंदु से दूसरी भुजा के समांतर खिंची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है)

इसलिए, D भुजा AC का मध्य-बिंदु है |

अत: AD = CD .... (i)

(ii) MD || BC दिया है और AC एक तिर्यक रेखा है |

इसलिए $\angle ADM = \angle ACB$ (संगत कोण)

या $\angle ADM =$ [चूँकि $\angle ACB = 90^\circ$]

अत: $MD \perp AC$ है |

(iii) ΔADM तथा ΔCDM में

$AD = CD$ .... समी० (i) से

$MD = MD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle ADM = \angle CDM$ (प्रत्येक 90°)

SAS सर्वांगसमता नियम से

$\Delta ADM \cong \Delta CDM$

इसलिए, $MA = CM$ .... (ii) By CPCT नियम से

अब $MA + MB = AB$

या $MA + MA = AB$ [चूँकि $MA = MB$]

या $2\ MA = AB$

या $MA = \frac{1}{2} AB$

या $CM = MA = \frac{1}{2} AB$ समी० (ii) से