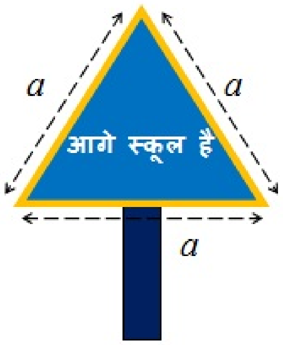
पाठ 12. हीरोन सूत्र

प्रश्नावली 12.1

Q1. एक यातायात संकेत बोर्ड पर 'आगे स्कूल है' लिखा है और यह भुजा '*a*' वाले एक समबाहु त्रिभुज के आकार का है। हीरोन के सूत्र का प्रयोग करके इस बोर्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यदि संकेत बोर्ड का परिमाप 180 cm है, तो इसका क्षेत्रफल क्या होगा?

हल :



a = a, b = a, c = a

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$s = \frac{a+a+a}{2} = \frac{3a}{2}$$

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{3.\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\, a^2 \text{cm}^2$$

संकेत बोर्ड का परिमाप = 180 cm

3 × भुजा = परिमाप

या भुजा = $\frac{\text{परिमाप}}{3}$

या भुजा = $\frac{180}{3}$ = 60 cm

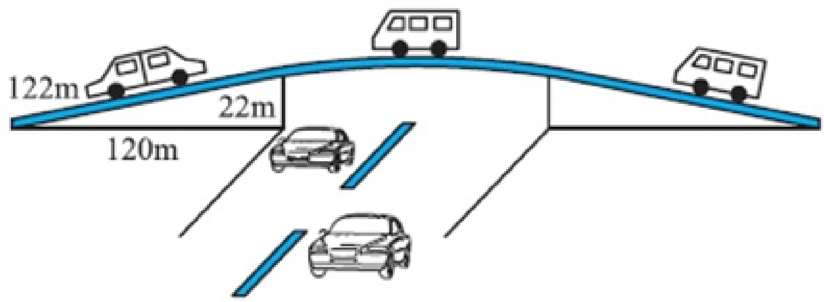
समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}\ a^2\ cm^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\ 60^2\ cm^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\ 60 \times 60\ cm^2$

$= 900\sqrt{3}\ cm^2$ **Ans.**

Q2. किसी फ्रलाईओवर (flyover) की त्रिभुजाकार दीवार को विज्ञापनों के लिए प्रयोग किया जाता है। दीवार की भुजाओं की लंबाइयाँ 122 m, 22 m और 120 m हैं (देखिए आकृति 12.9)। इस विज्ञापन से प्रति वर्ष 5000 रु प्रति m^2 की प्राप्ति होती है। एक कम्पनी ने एक दीवार को विज्ञापन देने के लिए 3 महीने के लिए किराए पर लिया। उसने कुल कितना किराया दिया ?



हल : a = 122 m, b = 22 m और c = 120 m

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \frac{122+22+120}{2} = \frac{164}{2} = 132 \text{ m}$$

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{132(132-122)(132-22)(132-120)}$

$= \sqrt{132(10)(110)(12)}$

$= \sqrt{132 \times 10 \times 110 \times 12}$

$= \sqrt{12 \times 11 \times 10 \times 11 \times 10 \times 12}$

$= \sqrt{12 \times 12 \times 10 \times 10 \times 11 \times 11}$

$= 12 \times 10 \times 11$

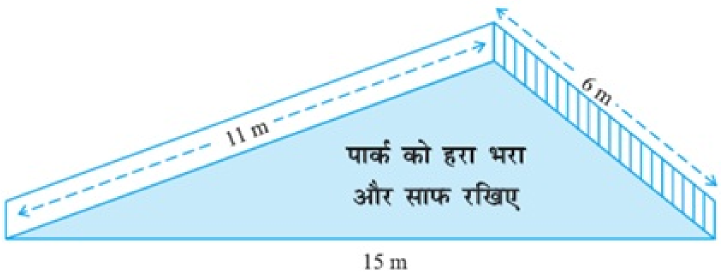
$= 1320 \text{ m}^2$

3 महीने का विज्ञापन किराया $= 1320 \times 5000 \times \frac{3}{12}$

$= 1320 \times 5000 \times \frac{1}{4}$

= 1650000 रूपये **Ans.**

Q3. किसी पार्क में एक फिसल पट्टी (slide) बनी हुई है। इसकी पार्श्वीय दीवारों (side walls) में से एक दीवार पर किसी रंग से पेंट किया गया है और उस पर "पार्क को हरा-भरा और साफ रखिए" लिखा हुआ है । यदि इस दीवार की विमाएँ **15m, 11m** और **6m** हैं, तो रंग से पेंट हुए भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल :

a = 15 m, b = 11 m और c = 6 m

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \frac{15+11+6}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ m}$$

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{16(16-15)(16-11)(16-6)}$

$= \sqrt{16(1)(5)(10)}$

$= \sqrt{4 \times 4 \times 1 \times 5 \times 5 \times 2}$

$= 20\sqrt{2}\ m^2$

अत: त्रिभुज का क्षेत्रफल = $20\sqrt{2}\ m^2$ **Ans.**

Q4. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाएँ 18 cm और 10 cm हैं तथा उसका परिमाप 42 cm है।

हल :

a = 18 cm, b = 10 cm और c = ?

परिमाप = 42 cm

a + b + c = 42

या 18 + 10 + c = 42

या c = 42 - 28

या c = 14 cm

$S = \frac{a+b+c}{2}$

$S = \frac{42}{2}$ = 21 cm

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

= $\sqrt{21(21-18)(21-10)(21-14)}$

= $\sqrt{21 \times 3 \times 11 \times 7}$

= $\sqrt{21 \times 21 \times 11}$

= 21 $\sqrt{11}$ cm^2

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल = 21 $\sqrt{11}$ cm^2 **Ans.**

Q5. **एक त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात 12: 17: 25 है और उसका परिमाप 540cm है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।**

हल :

माना भुजाएँ a = 12x, b = 17x और c = 25x है |

अत: a + b + c = 540 cm

या 12x + 17x + 25x = 540

या 54x = 540

या $x = \frac{540}{54}$ = 10

अतः भुजाएँ a = 12 × 10 = 120 cm

b = 17 × 10 = 170 cm

c = 25 × 10 = 250 cm

$S = \frac{a+b+c}{2}$

$S = \frac{540}{2}$ = 270 cm

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

= $\sqrt{270(270-120)(270-170)(270-250)}$

= $\sqrt{270(150)(100)(20)}$

= $\sqrt{270 \times 150 \times 100 \times 20}$

= $\sqrt{3 \times 3 \times 30 \times 30 \times 5 \times 10 \times 10 \times 4 \times 5}$

= $\sqrt{3 \times 3 \times 30 \times 30 \times 5 \times 5 \times 10 \times 10 \times 2 \times 2}$

= 3 × 30 × 5 × 10 × 2

= 9000 cm^2 **Ans.**

Q6. एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 30 cm है और उसकी बराबर भुजाएँ 12 cm लम्बाई की हैं। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :

दिया है : a = 12 cm, b = 12 cm और c = ?

अत: a + b + c = 30 cm

या 12 + 12 + c = 30 cm

या c = 30 - 24 cm

या c = 6 cm

$S = \frac{a + b + c}{2}$

$S = \frac{30}{2} = 15$ cm

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

= $\sqrt{15(15-12)(15-12)(15-6)}$

= $\sqrt{15(3)(3)(9)}$

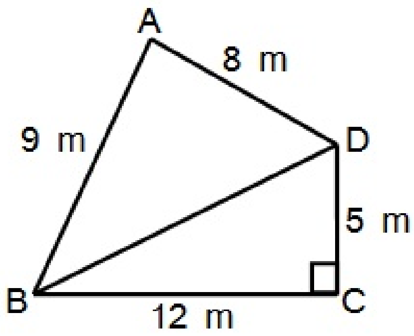
= $\sqrt{5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$

= $9\sqrt{15}$ cm^2 **Ans.**

अत: त्रिभुज का क्षेत्रफल = $9\sqrt{15}$ cm^2 **Ans.**

प्रश्नावली 12.2

Q1. एक पार्क चतुर्भुज ABCD के आकार का है, जिसमें ∠C = 90°, AB = 9 m, BC = 12 m, CD = 5 m और AD = 8 m है। इस पार्क का कितना क्षेत्रफल है?



हल :

समकोण Δ BCD में,

पाईथागोरस प्रमेय से -

$BD^2 = CD^2 + BC^2$

अब, $BD^2 = 5^2 + 12^2$

या $BD^2 = 25 + 144$

या $BD^2 = 169$

या $BD = \sqrt{169} = 13$ m

Δ BCD का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × लंब

$= \frac{1}{2} \times 12 \times 5$

$= 6 \times 5$

$= 30\ m^2$

Δ ABD में,

AB = 9 m, BD = 13 m और AD = 8 m

Δ ABD में,

AB = 9 m, BD = 13 m और AD = 8 m

$S = \frac{a+b+c}{2}$

$S = \frac{9+13+8}{2} = \frac{30}{2} = 15$ m

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{15(15-9)(15-13)(15-8)}$

$= \sqrt{15(6)(2)(7)}$

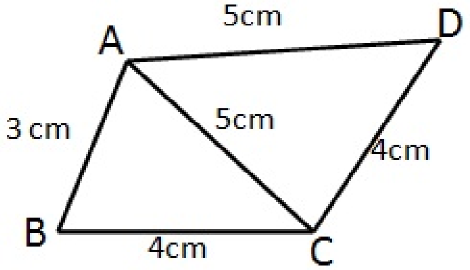
$= \sqrt{5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 7}$

$= 6\sqrt{35} = 6 \times 5.91\ m^2 = 35.04\ m^2$

अत: पार्क के आकार के चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $30\ m^2 + 35.04\ m^2$

$= 65.04\ m^2$

Q2. **एक चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसमें AB = 3 cm, BC = 4 cm, CD = 4 cm, DA = 5 cm और AC = 5 cm है।**



हल :

ΔABC में,

a = 3 cm, b = 4 cm और c = 5 cm

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \frac{3+4+5}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$$

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}$

$= \sqrt{6(3)(2)(1)}$

$= 6 \text{ cm}^2$

अब ΔACD में,

a = 5 cm, b = 4 cm और c = 5 cm |

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \frac{5+4+5}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}$$

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

= $\sqrt{7(7-5)(7-4)(7-5)}$

= $\sqrt{7(2)(3)(2)}$

= $2\sqrt{21}$ cm^2

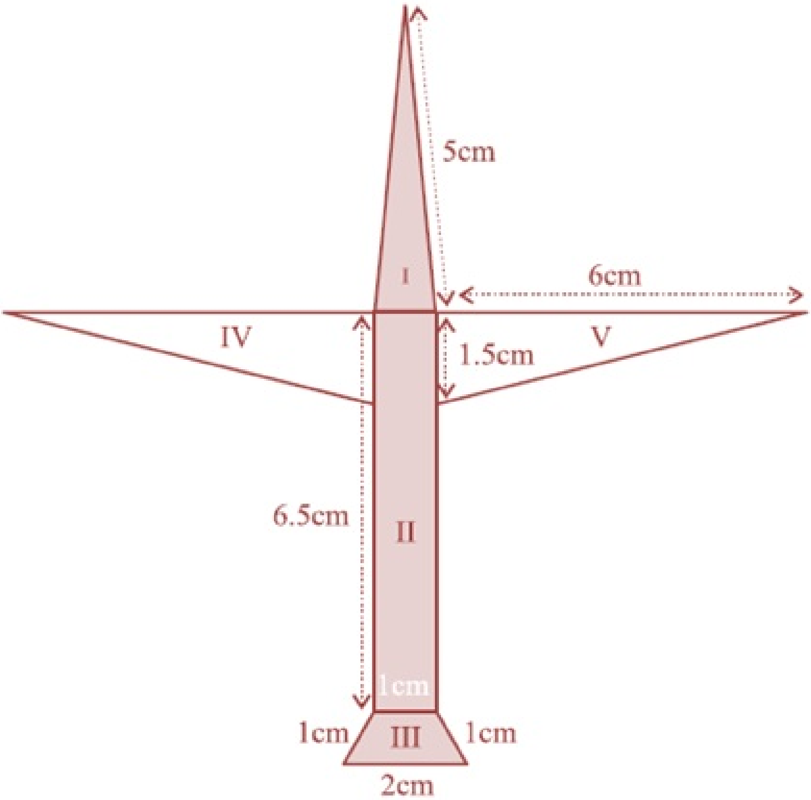
= 2 × 4.583 cm^2

= 9.166 cm^2

अत: चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल + ΔACD का क्षेत्रफल

= 7 cm^2 + 9.166 cm^2 = 15.2 cm^2 (Aprox)

Q3. राधा ने एक रंगीन कागज से एक हवाईजहाज का चित्र बनाया, जैसा कि आकृति 12.15 में दिखाया गया है। प्रयोग किए गए कागज का कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल :

भाग-I एक समद्विबाहु त्रिभुज है ।

अत: a = 5 cm, b = 5 cm और c = 1 cm

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \frac{5+5+1}{2} = \frac{11}{2} = 5.5 \text{ cm}$$

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{5.5(5.5-5)(5.5-5)(5.5-1)}$$

$$= \sqrt{5.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 4.5}$$

$$= \sqrt{6.1875} = 2.49 \text{ cm}^2$$

भाग-II का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

$$= 6.5 \times 1 = 6.5 \text{ cm}^2$$

भाग-III में,

समलंब की ऊंचाई $= \sqrt{1^2 + 0.5^2}$

$= \sqrt{1 + 0.25}$

$= \sqrt{1.25} = 1.12$ cm

अत: h = 1.12 cm, a = 1 cm, b = 2 cm

समलंब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times (a + b) \times h$

$= \frac{1}{2} \times (1 + 2) \times 1.12$

$= 0.56 \times 3$

$= 0.56 \times 3$

$= 1.68 \text{ cm}^2$

भाग-IV का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times b \times h$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 1.5$

$= 3 \times 1.5$

$= 4.5 \text{ cm}^2$

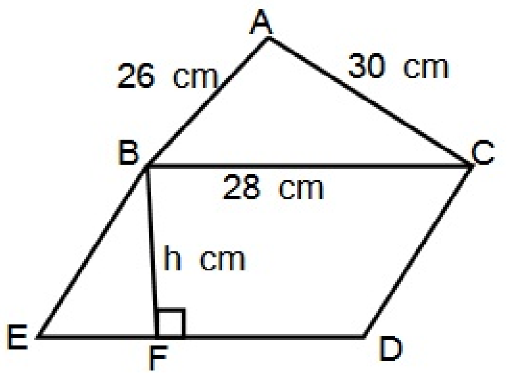
भाग-V का क्षेत्रफल $= 4.5 \text{ cm}^2$

हवाई जहाज का क्षेत्रफल $= 2.49 \text{ cm}^2 + 6.5 \text{ cm}^2 + 1.68 \text{ cm}^2 + 4.5 \text{ cm}^2 + 4.5 \text{ cm}^2$

$= 19.67 \text{ cm}^2$

अत: हवाई जहाज का क्षेत्रफल 19.67 cm^2 है ।

Q4. एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज का एक ही आधर है और क्षेत्रफल भी एक ही है। यदि त्रिभुज की भुजाएँ 26 cm, 28 cm और 30 cm हैं तथा समांतर चतुर्भुज 28 cm के आधर पर स्थित है, तो उसकी संगत ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



ΔABC में,

a = 26 cm, b = 28 cm और c = 30 cm

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \frac{26+28+30}{2} = \frac{84}{2} = 42 \text{ cm}$$

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{42(42-26)(42-28)(42-30)}$

$= \sqrt{42 \times 16 \times 14 \times 12}$

$= \sqrt{14 \times 3 \times 4 \times 4 \times 14 \times 4 \times 3}$

$= \sqrt{14 \times 14 \times 4 \times 4 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3}$

$= 14 \times 4 \times 2 \times 3 = 336 \text{ cm}^2$

अब चूँकि समांतर चतुर्भुज BCDE का क्षेत्रफल ΔABC के बराबर है ।

अत: समांतर चतुर्भुज BCDE का क्षेत्रफल = 336 cm^2

या $b \times h = 336 \text{ cm}^2$

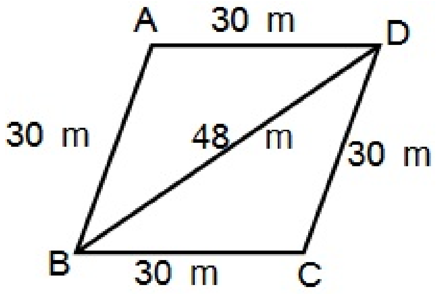
या $28 \times h = 336 \text{ cm}^2$

या $h = \frac{336}{28}$ cm

या $h = 12$ cm

अत: समलंब की ऊँचाई = 12 cm है ।

Q5. **एक समचतुर्भुजाकार घास के खेत में 18 गायों के चरने के लिए घास है। यदि इस समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा 30 m है और बड़ा विकर्ण 48m है, तो प्रत्येक गाय को चरने के लिए इस घास के खेत का कितना क्षेत्रफल प्राप्त होगा?**



हल :

ΔABD में,

a = 30 m, b = 30 m, c = 48 m

$s = \frac{a+b+c}{2}$

$s = \frac{30+30+48}{2} = \frac{108}{2} = 54$ m

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

= $\sqrt{54(54-30)(54-30)(54-48)}$

= $\sqrt{54(24)(24)(6)}$

= $\sqrt{9 \times 6 \times 24 \times 24 \times 6}$

= $3 \times 6 \times 24\ m^2$

= $432\ m^2$

अत: खेत ABCD का क्षेत्रफल = 2 × क्षेत्र०(ABD)

= $2 \times 432\ m^2 = 864\ m^2$

तो प्रत्येक गाय को चरने के लिए क्षेत्र = $\frac{864}{18}\ m^2$

= $48\ m^2$

अत प्रत्येक गाय को चरने के लिए क्षेत्रफल 48 m2 है ।

Q6. दो विभिन्न रंगों के कपड़ों के 10 त्रिभुजाकार टुकड़ों को सीकर एक छाता बनाया गया है (देखिए आकृति 12.16)। प्रत्येक टुकड़े के माप 20 cm, 50 cm और 50 cm हैं। छाते में प्रत्येक रंग का कितना कपड़ा लगा है?

हल :

a = 20 cm, b = 50 cm और c = 50 cm

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \frac{20+50+50}{2} = \frac{120}{2} = 60 \text{ cm}$$

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{60(60-20)(60-50)(60-50)}$

$= \sqrt{60(40)(10)(10)}$

$= \sqrt{10 \times 6 \times 10 \times 4 \times 10 \times 10}$

$= 200\sqrt{6} \text{ cm}^2$

चूँकि प्रत्येक त्रिभुजाकार टुकड़ा का क्षेत्रफल = $200\sqrt{6} \text{ cm}^2$

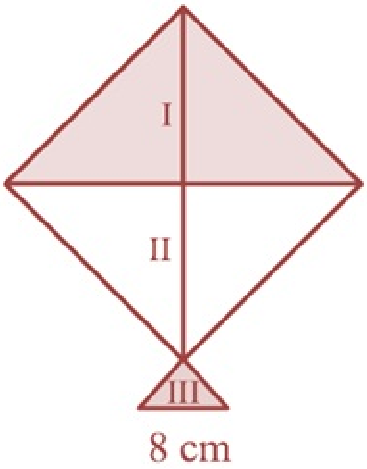
कुल 10 टुकड़ों में से प्रत्येक रंग का 5 टुकड़ा है ।

इसलिए प्रत्येक रंग के लिए कपड़ा कस क्षेत्रफल = $5 \times 200\sqrt{6} \text{ cm}^2$

$= 1000\sqrt{6} \text{ cm}^2$

Q7. एक पतंग तीन भिन्न-भिन्न शेडों (shades) के कागजों से बनी है। इन्हें आकृति 12.17 में I, II और III से दर्शाया गया है। पतंग का ऊपरी भाग 32 cm विकर्ण का एक वर्ग है और निचला भाग 6 cm, 6 cm और 8 cm भुजाओं का एक समद्विबाहु त्रिभुज है। ज्ञात कीजिए कि प्रत्येक शेड का कितना कागज प्रयुक्त किया गया है।

हल :



पतंग के भाग I का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times b \times h$

$= \frac{1}{2} \times 32 \times 16$

$= 16 \times 16$

$= 256\ cm^2$

अत: भाग II का क्षेत्रफल = $256\ cm^2$

भाग III में,

a = 6 cm, b = 6 cm और c = 8 cm

$S = \frac{a+b+c}{2}$

$S = \frac{6+6+8}{2} = \frac{20}{2} = 10\ cm$

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{10(10-6)(10-6)(10-8)}$

$= \sqrt{10(4)(4)(2)}$

$= 8\sqrt{5}\ cm^2$

$= 8 \times 2.24$

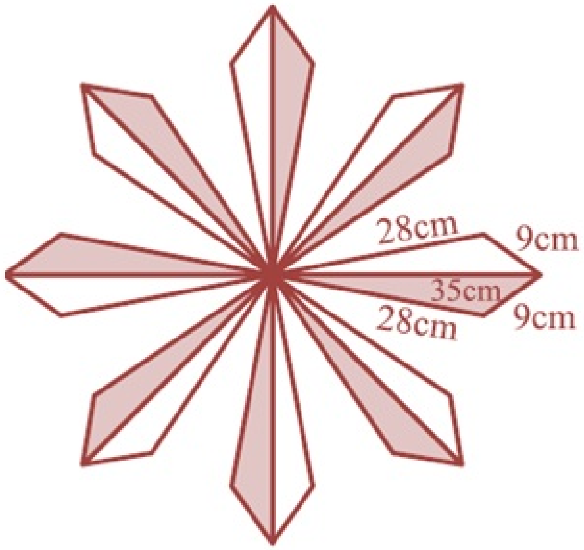
$= 17.92\ cm^2$

भाग I का क्षे० = $256\ cm^2$

भाग II का क्षे० = $256\ cm^2$

भाग III का क्षे० = $17.92\ cm^2$

Q8. फर्श पर एक फूलों का डिज़ाइन 16 त्रिभुजाकार टाइलों से बनाया गया है, जिनमें से प्रत्येक की भुजाएँ 9 cm, 28 cm और 35 cm हैं (देखिए आकृति 12.18)। इन टाइलों को 50 पैसे प्रति cm^2 की दर से पालिश कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।



हल :

टाइल में,

a = 9 cm, b = 28 cm और c = 35 cm

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$s = \frac{9+28+35}{2} = \frac{72}{2} = 36 \text{ cm}$$

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{36(36-9)(36-28)(36-35)}$

$= \sqrt{36(27)(8)(1)}$

$= 36\sqrt{6}$

= 36 × 2.45 = 88.2 cm^2

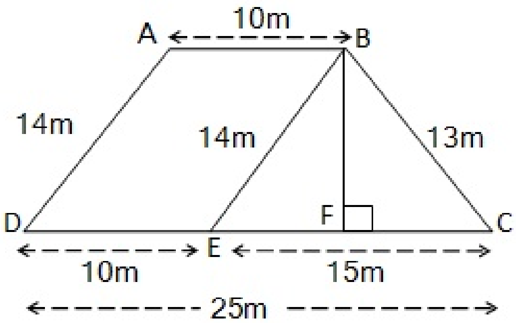
अत: इन सभी 16 टाइल्स का क्षेत्रफल = 88.2 × 16

= 1411.2 cm^2

टाइलों पर पॉलिश कराने का खर्च = 1411.2 × 0.50

= 705.60 रुपये ।

Q9. एक खेत समलंब के आकार का है जिसकी समांतर भुजाएँ 25 m और 10 m हैं। इसकी असमांतर भुजाएँ 14 m और 13 m हैं। इस खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल :

AB के बराबर भुजा BC पर DE काटा

अत: DE = 10 m

इसलिए, EC = DC - DE

= 25 - 10 = 15 m

अब चूँकि AB = DE है और AB || DE इसलिए ABED एक समांतर चतुर्भुज है |

अत: AD = BE = 14 m

DBCE में,

a = 14 m, b = 15 m और c = 13 m

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \frac{14+15+13}{2} = \frac{42}{2} = 21 \text{ m}$$

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{21(21-14)(21-15)(21-13)}$

$= \sqrt{21 \times 7 \times 6 \times 8}$

$= \sqrt{7 \times 3 \times 7 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$

$= \sqrt{7 \times 7 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$

$= 7 \times 3 \times 2 \times 2$

$= 84\ m^2$

क्षेत्रफल (ΔBCE) $= 84\ m^2$

या $\frac{1}{2} \times b \times h = 84\ m^2$

या $\frac{1}{2} \times 15 \times h = 84\ m^2$

या $h = 84 \times \frac{2}{15}$

या $h = \frac{168}{15} = 11.2\ m$

समांतर भुजाओं का योग $(a + b) = (10 + 25) = 35\ m$

ऊंचाई $h = 11.2\ m$

अब समलंब ABCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times (a + b) \times h$

$= \frac{1}{2} \times 35 \times 11.2$

$= 35 \times 5.6 = 196\ m^2$