باب 2

# اکائیاں اور پیمائش
# (UNITS AND MEASUREMENT)



## 2.1 تعارف (INTRODUCTION)

طبیعیات ایک مقداری سائنس ہے۔ کسی بھی طبیعی مظہر کی تشریح کرنے کے لیے مختلف طبیعی مقداروں کی پیمائش نہایت ضروری ہے۔ کسی بھی طبیعی مقدار کی پیمائش ایک بنیادی اختیاری بین الاقوامی معیار پر منظور شدہ حوالہ معیار کے تقابل پر مشتمل ہوتی ہے۔ اس حوالہ معیار کو **اکائی** (unit) کہا جاتا ہے۔ کسی بھی طبیعی مقدار کی پیمائش کو اکائی کے ساتھ ایک عدد (عددی پیمائش) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگرچہ ہمارے ذریعہ پیمائش کی جانے والی طبیعی مقداروں کی تعداد بہت زیادہ ہے، پھر بھی ہمیں سبھی طبیعی مقداروں کو ظاہر کرنے کے لیے اکائیوں کی محدود تعداد کی ضرورت ہوتی ہے، کیونکہ یہ مقداریں ایک دوسرے سے باہمی طور پر متعلق ہیں۔ بنیادی یا اساسی مقداروں کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال کی گئی اکائیوں کو **بنیادی** یا **اساسی اکائی** کہتے ہیں۔ اس کے علاوہ دیگر سبھی طبیعی کمیتوں کی اکائیوں کو ان بنیادی یا اساسی اکائیوں کے اتحاد کے طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح سے حاصل کی گئی مقداروں کی اکائیوں کو **ماخوذ اکائیاں** (derived units) کہتے ہیں۔ اساسی اکائیوں اور ماخوذ اکائیوں کے مکمل سیٹ کو **اکائیوں کا نظام** (system of units) کہا جاتا ہے۔

## 2.2 اکائیوں کا بین الاقوامی نظام (THE INTERNATIONAL SYSTEM OF UNITS)

پہلے مختلف ممالک کے سائنسداں اکائیوں کی پیمائش کے لیے مختلف اکائیوں کا نظام استعمال کرتے تھے۔ اس طرح تین اکائیوں کا نظام CGS نظام، FPS نظام اور MKS نظام حال تک استعمال ہوتا رہا ہے۔

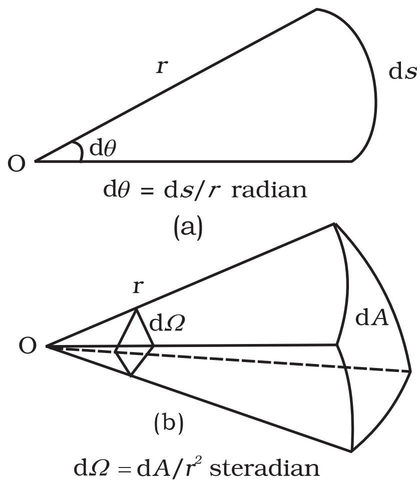
لمبائی، کمیت اور مدت کی اکائی مختلف نظام میں درج ذیل تھیں۔

- CGS نظام میں یہ بالترتیب سینٹی میٹر، گرام اور سیکنڈ ہے
- FPS نظام میں یہ بالترتیب فٹ، پاؤنڈ اور سیکنڈ ہے
- MKS نظام میں یہ بالترتیب میٹر، کلوگرام اور سیکنڈ ہے

آج کل بین الاقوامی سطح پر منظور شدہ نظام۔

بین الاقوامی نظام (International System of Units) کا فرانسیسی ترجمہ] اور اس کا مخفف SI ہے۔ یہ SI نظام، علامتوں، اکائیوں اور مخففوں کے ساتھ 1971 میں منعقد ہوئی ”اوزان اور پیمانوں پر عمومی کانفرنس“ کے ذریعے تیار کیا گیا اور اس کانفرنس نے پوری دنیا میں سائنسی، تکنیکی اور کاروباری کام میں اس کے استعمال کی فرمائش کی۔ کیونکہ SI اکائیوں میں اعشاریہ نظام استعمال کیا گیا ہے، اس لیے اس نظام میں ایک اکائی سے دوسری اکائی (جیسے میٹر سے سینٹی میٹر یا اس کے برعکس) میں تبدیل کرنا، بہت سادہ اور سہل ہے۔ہم اس کتاب میں SI اکائیاں ہی استعمال کریں گے۔

SI میں سات اساسی اکائیاں ہیں جو جدول 2.1 میں دی گئی ہیں۔ان سات اساسی اکائیوں کے ساتھ ساتھ دو اور اکائیاں بھی ہیں جو سطح زاویہ (plane angle) $\Delta\theta$، اور ٹھوس زاویہ ($\Omega d$) کے لیے ہیں۔ ان کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے: سطح زاویہ $\Delta\theta$ قوس کی لمبائی $\Delta s$ اور نصف قطر $\Delta r$ کی نسبت ہے۔ٹھوس زاویہ $\Delta r$، اوج (apex) O مرکز لیتے ہوئے، اس کے گرد کروی سطح کے قطع کیے گئے رقبے $\Delta A$ اور نصف قطر r کے مربع کا تناسب ہے۔انہیں شکل 2.1 (a) اور (b) میں بالترتیب دکھایا گیا ہے۔




شکل **2.1** (a) مستوی زاویہ $d\theta$ اور (b) ٹھوس زاویہ $\Delta r$ کا اظہار

سطح زاویہ کی اکائی ریڈین (radian) اور علامت rad ہے۔

**جدول 2.1 SI اساسی مقدار اور اکائیاں ***

| بنیادی مقدار | SI اکائی | | |
|---|---|---|---|
| | نام | علامت | تعریف |
| لمبائی | میٹر | m | روشنی کے ذریعہ خلا میں ایک سیکنڈ کے 1/299,792,458 وقفہ وقت میں طے کی گئی راہ کی لمبائی میٹر ہے۔ (1983 سے تسلیم شدہ) |
| کمیت | کلوگرام | kg | فرانس میں پیرس کے پاس سیورس میں بین الاقوامی وزن اور پیمائش بیورو میں رکھے گئے کلوگرام (پلیٹینم اریڈیم مخلوط دھات سے بنے سلنڈر) کے بین الاقوامی نمونے کی کمیت کلوگرام ہے۔ (1989 سے تسلیم شدہ) |
| وقت | سیکنڈ | s | ایک سیکنڈ وہ وقفہ ہے جو سیزیم 133 ایٹم کی تحتی حالت کی دو باریک ترین سطحوں کے درمیان عبور میں اشعاع ریزی کے 9,192, 631,770 دوری وقفوں کی مدت ہے۔ (1967 سے تسلیم شدہ) |
| برقی کرنٹ | ایمپیر | A | ایک ایمپیر وہ مستقل کرنٹ ہے جسے خلا میں 1 میٹر کی دوری پر واقع دو سیدھے لامتناہی لمبائی والے متوازی اور قابل نظر انداز عمودی تراش کے موصلوں کے درمیان قائم رکھا جائے تو فی میٹر لمبائی پر $2\times10^{-7}$ نیوٹن قوت پیدا ہو۔ (1948 سے تسلیم شدہ) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| حرکیاتی درجہ حرارت | کیلون | K | پانی کے ثلاثی نقطہ حرکیاتی درجہ حرارت کے 1/273.16 ویں حصے کو کیلون کہتے ہیں۔(1967 سے تسلیم شدہ) |
| شے کی مقدار | مول (mole) | mol | مول کسی نظام میں شے کی وہ مقدار ہے جس میں اساسی ہستیوں (عناصر) کی تعداد اتنی ہے جتنی 0.0 12 kg کاربن 12 میں ایٹموں کی تعداد۔(1971 سے تسلیم شدہ) |
| درخشاں شدت | کینڈیلا | cd | کینڈیلا، ایک دی ہوئی سمت میں، اس وسیلہ کی درخشاں شدت ہے جو $540 \times 10^{12}$ Hertz تواتر کی یک رنگی شعاعیں خارج کرتا ہے اور جس کی اس دی ہوئی سمت میں اشعاعی شدت 1/683 واٹ فی اسٹریڈین ہے۔ |

**جدول 2.2 SI اساسی اکائیوں میں ظاہر کی گئی بعض ماخوذ اکائیاں**

| طبیعی مقدار | | SI اکائی |
|---|---|---|
| نام | علامت | |
| منٹ | min | 60 s |
| گھنٹہ | h | 60 min = 3600s |
| دن | d | 24h = 86400s |
| سال | y | $365.25d = 3.156 \times 10^7 s$ |
| ڈگری | $^{o}$ | $1^{o} = (\pi/180)$rad |
| لیٹر | L | $1 dm^3 = 10^{-3}\ m^3$ |
| ٹن | t | $10^3$ Kg |
| کیرٹ | c | 200 mg |
| بار | bar | 0.1 Mpa = $10^5$ Pa |
| کیوری | Ci | $3.7 \times 10^{10}\ s^{-1}$ |
| رونجن | R | $2.58 \times 10^{-4}$ C/Kg |
| کوئنٹل | q | 100 Kg |
| بارن | b | $100\ fm^2 = 10^{-28}\ m^2$ |
| آر | a | $1\ dam^2 = 10^2\ m^2$ |
| ہیکٹیئر | ha | $1\ hm^2 = 10^4\ m^2$ |
| میعاری کرہ فضائی داب | atm | 101325 Pa = $1.013 \times 10^5$ Pa |

* یہاں دی گئی قدروں کو یاد کرنے کی یا امتحان میں پوچھے جانے کی ضرورت نہیں ہے۔یہاں انہیں صرف یہ ظاہر کرنے کے لیے دیا گیا ہے کہ انہیں کس حدتک درستگی صحت کے ساتھ ناپا جاتا ہے۔ ٹکنولوجی میں ترقی کے ساتھ ساتھ پیمائش کی ٹکنیکیوں میں بھی سدھار ہوتا ہے اور پیمائشیں بہتر درستگی صحت کے ساتھ کی جاسکتی ہیں۔اساسی اکائیوں کی تعریفوں میں بھی' اس ترقی کا ساتھ دینے کے لیے، ردوبدل کی جاتی رہتی ہے

ٹھوس زاویہ کی اکائی اسٹریڈین (steradian) اور علامت sr ہے۔ دونوں مقداریں غیرابعادی ہیں۔

یہ نوٹ کریں کہ جب مول (Mole) کا استعمال کریں تو اس کے بنیادی عناصر کی نشاندہی کی جانی چاہیے۔ یہ بنیادی عناصر ایٹم، مالیکیول، آین، الیکٹران، دیگر ذرّات یا خصوصی طور پر صراحت کیے گئے کچھ ایسے ذرّات کے گروپ ہو سکتے ہیں۔

ضمیمہ A 6.1 میں کچھ SI ماخوذ اکائیاں جو بنیادی اکائیوں کی شکل میں ہیں دی گئی ہیں۔ اس کے علاوہ کچھ طبیعی مقداروں کے لیے ایسی اکائیاں استعمال میں لائی جاتی ہیں جو سات بنیادی اکائیوں سے اخذ کی جاسکتی ہیں۔ (ضمیمہ A 6)۔ کچھ SI ماخوذ اکائیوں کو مخصوص نام سے جانا جاتا ہے ضمیمہ A 6.2 اور کچھ ماخوذ SI اکائیاں ان مخصوص ناموں والی اکائیوں اور سات بنیادی اکائیوں کے استعمال سے حاصل ہوتی ہیں ضمیمہ A 6.3۔ ان اکائیوں کو آپ کے فوری حوالے کے لیے ضمیمہ 6.2 اور ضمیمہ 6.3 میں دیا گیا ہے۔ عام استعمال کے لیے رکھی گئی کچھ دیگر اکائیوں کو جدول 2.2 میں دیا گیا ہے۔

عام SI سابقے (prefix) اور اضعاف اور تحت اضعاف کی علامتیں ضمیمہ A2 میں دی گئی ہیں۔ آپ کے فوری حوالے کے لیے طبیعی مقداروں، کیمیائی عناصر اور نیوکلائیڈوں کے لیے مستعمل علامتوں کے عام رہنما اصول ضمیمہ A7 میں اور SI اکائیوں اور دیگر اکائیوں کے لیے ضمیمہ A8 میں دیے گئے ہیں۔

## 2.3 لمبائی کی پیمائش
## (MEASUREMENT OF LENGTH)

آپ لمبائی کی پیمائش کے کچھ براہِ راست (direct) طریقوں سے پہلے سے واقف ہیں۔ مثال کے لیے $10^{-3}$m سے $10^{2}$ m تک کی لمبائی کی پیمائش کے لیے میٹر پیمانے کا استعمال کیا جاتا ہے۔ $10^{-4}$ m تک کی لمبائی کو بالکل صحیح ناپنے کے لیے ورنیئر کیلیپرس (Vernier callipers) کا استعمال کیا جاتا ہے۔ $10^{-5}$m تک کی لمبائی ناپنے کے لیے اسکروگیج اور اسفیرومیٹر (Spherometer) (گولائی ماپنے والا) کا استعمال کر سکتے ہیں۔ لیکن ان حدوں سے آگے کی دوریوں کی پیمائش کے لیے ہم کچھ خاص بالواسطہ (indirect) طریقوں کا استعمال کرتے ہیں۔

### 2.3.1 بڑی دوریوں کی پیمائش
### (Measurement of Large Distances)

لمبی دوریاں جیسے کہ کسی سیارے یا تارے کی زمین سے دوری ہم براہِ راست کسی میٹر پیمانے کی مدد سے نہیں ناپ سکتے ہیں۔ ایسی صورتحال میں اہم طریقہ ہے **اختلاف منظر طریقہ (parallax method)**۔

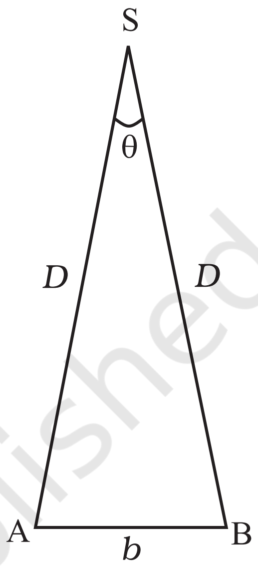
جب آپ کسی پنسل کو کسی پس منظر (دیوار) کے کسی مخصوص نقطے پر اپنے سامنے رکھتے ہیں اور پنسل کو پہلے اپنی بائیں آنکھ A (داہنی آنکھ بند رکھتے ہوئے) سے اور پھر اپنی داہنی آنکھ B (بائیں آنکھ کو بند رکھتے ہوئے) سے دیکھتے ہیں، آپ غور کریں گے کہ پس منظر (دیوار) کے نقطے کے لحاظ سے پنسل کی حالت تبدیل ہوتی دکھائی دیتی ہے۔ اسے *اختلاف منظر (parallax)* کہا جاتا ہے۔ مشاہدے کے دو نقاط کے درمیان دوری کو *بنیاد (basis)* کہا جاتا ہے۔ اس مثال میں آنکھوں کے درمیان کی دوری بنیاد ہے۔

اختلاف منظر طریقے کے ذریعہ سیارہ S کی دوری D کی پیمائش کے لیے، ہم زمین پر اسے دو مختلف مقامات (مشاہدگاہیں) (observatories) A اور B (جن کے درمیان دوری AB = b ہے) سے ایک ہی وقت پر دیکھتے ہیں جیسا کہ شکل 2.2 میں دکھایا گیا ہے۔ ہم ان دونوں نقاط پر جن دونوں سمتوں میں سیارہ دیکھا گیا ہے ان کے درمیان زاویہ کی پیمائش کرتے ہیں۔ شکل 2.2 میں $\angle ASB = \theta$ کو جسے علامت $\theta$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔ **زاویہ اختلاف منظر (parallax angle)** کہتے ہیں۔

چونکہ سیارہ بہت زیادہ دوری پر واقع ہے یعنی $\frac{b}{D} << 1$ اور اس لیے زاویہ $\theta$ بہت ہی چھوٹا ہے۔ ایسی حالت میں ہم AB کو مرکز S اور نصف قطر (radius) D والے دائرہ کی b لمبائی کا قوس مان سکتے ہیں۔ AS = BS نصف قطر، تب $AB = b = D\,\theta$، جہاں $\theta$

ریڈین میں ہے۔

$$D = \frac{b}{\theta} \qquad (2.1)$$




شکل 2.2 اختلاف منظر طریقہ

کے تعین کے بعد ہم اسی طریقے کے ذریعہ سیارے کا سائز یا زاویائی قطر بھی متعین کر سکتے ہیں۔ اگر کسی سیارے کا قطر d ہے اور اس کا زاویائی سائز α (d کے ذریعہ زمین کے کسی نقطے پر بنایا گیا زاویہ) ہے، تب

$$\alpha = d/D \qquad (2.2)$$

Dزاویہ α زمین کے اسی مقام سے ناپا جاسکتا ہے۔ یہ ان دوسمتوں کے بیچ کا زاویہ ہے جب سیارے کے کسی قطر کے دوانتہائی نقاط کو دوربین کے ذریعے دیکھا جاتا ہے۔ چونکہ D معلوم ہے تو سیارے کا قطر d مساوات (2.2) کی مدد سے متعین کیا جاسکتا ہے۔

**مثال 2.1** ریڈین میں زاویہ معلوم کریں (a) $1^0$ (ڈگری) (b) $1'$ (قوس کا ایک منٹ) (c) $1''$ (قوس کا ایک سیکنڈ)۔ استعمال کریں $360^0 = 2\pi$ ریڈین، $1^0 = 60'$، $1' = 60''$

**جواب** (a) معلوم ہے کہ $360^0 = 2\pi$ rad,

$1^o = (\pi/180)$ rad $= 1.745\times10^{-2}$ rad

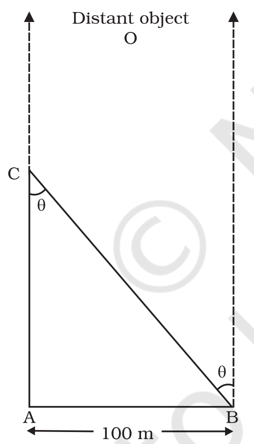
(b) $1^o = 60' = 1.745\times10^{-2}$ rad

$1' = 2.908\times10^{-4}$ rad $= 2.91\times10^{-4}$ rad

(c) $1' = 60'' = 2.908\times10^{-4}$ rad

$1'' = 4.847\times10^{-4}$ rad $= 4.85\times10^{-6}$ rad

**مثال 2.2** ایک آدمی اپنے قریبی مینار کی دوری معلوم کرنا چاہتا ہے۔ وہ مینار C کے سامنے نقطہ A پر کھڑا ہے۔ اور خط AC کے سمت میں کافی دوری کی شے O کو دیکھتا ہے۔ اس کے بعد AC کے عمودی سمت میں B نقطہ تک چلتا ہے جس کی دوری 100 میٹر ہے اور دوبارہ O اور C کو دیکھتا ہے۔ چونکہ O کافی دور ہے اس لیے سمت BO اور AO یکساں معلوم ہوتی ہیں۔ لیکن اسے معلوم ہوتا ہے کہ C کا خط اب آغازی خطِ نگاہ C سے $\theta=40^0$ (θ اختلاف منظر ہے) بنا رہا ہے۔ معلوم کریں کہ مینار کی دوری آغازی مقام A سے کتنی ہے۔




**شکل 2.3**

**جواب** معلوم ہے: $\theta = 40^o$ اختلاف منظر زاویہ

شکل 2.3 سے $AB = AC \tan\theta$

$AC = AB/\tan\theta = 100m/\tan 40^o$

$= 100m/0.8391 = 119m$

**مثال 2.3** زمین کے کسی قطر کے دوانتہائی نقاط A اور B سے چاند کو دیکھا گیا۔ مشاہدہ کی دوسمتوں کے درمیان چاند پر بننے والا زاویہ θ $1^o 54'$ ہے۔ زمین کا قطر تقریباً $1.276\times10^7$ m ہے۔ زمین سے چاند کی دوری کا شمار کیجیے۔

**جواب** معلوم ہے کہ، $\theta = 1^\circ\ 54' = 114'$

$$= (114\times60)'' \times (4.85\times10^{-6})\ \text{rad}$$
$$= 3.32\times10^{-2}\ \text{rad}$$

چونکہ $1'' = 4.85\times10^{-6}\ \text{rad}$

$$b = AB = 1.276\times10^{7}\text{m}$$

اس لیے مساوات (2.1) سے زمین اور چاند کے درمیان دوری

$$D = b/\theta$$
$$= \frac{1.276\times10^{7}}{3.32\times10^{-2}}$$
$$= 3.84\times10^{8}\text{m}$$

**مثال 2.4** سورج کے زاویائی قطر کی پیمائش "1920 ہے۔ سورج کی زمین سے دوری D، $1.496\times10^{11}$m ہے۔ سورج کا قطر کیا ہے؟

**جواب** سورج کا زاویائی قطر α

$$= 1920 \times (4.85 \times 10^{-6})\ \text{rad}$$
$$= 9.31\times10^{-3}\ \text{rad}$$

سورج کا قطر

$$d = \alpha D$$
$$= (9.31\times10^{-3}) \times (1.496\times10^{11})\ \text{m}$$
$$= 1.39 \times 10^{9}\ \text{m}$$

## 2.3.2 نہایت چھوٹی دوریوں کی پیمائش: مالیکول کا سائز (Estimation of Very Small Distances: size of a Molecule)

سالمہ کے سائز ($10^{-8}$ m–$10^{-10}$m) جیسی بہت ہی چھوٹی ناپوں کی پیمائش کے لیے ہمیں خاص طریقے اپنانے پڑتے ہیں۔ اس کے لیے ہم اسکروگیج یا اس طرح کے دیگر آلات کا استعمال نہیں کرسکتے۔ یہاں تک کہ مائیکرو اسکوپ (خوردبین) کی بھی کچھ حدیں ہیں۔ کسی نظام کی جانچ کے لیے نوری خردبین (optical microscope) میں بصری روشنی (visible light) کو استعمال کیا جاسکتا ہے۔ کیونکہ روشنی میں لہر جیسی خاصیتیں ہوتی ہیں، اس لیے وہ جز تجزیہ (Resolution) جس تک ایک نوری خردبین استعمال کی جاسکتی ہے، روشنی کی طولِ لہر ہے۔ (اس کی تفصیلی وضاحت کلاس XII کی طبیعیات کی درسی کتاب میں دی گئی ہے)۔ بصری روشنی کی طول لہر کی وسعت (رینج) تقریباً 4000 Å سے 7000 Å تک ہے (1 اینگسٹرام = 1 $10^{-10}$ m)۔ لہٰذا کوئی نوری خردبین اس سے چھوٹی ناپوں کے ذرات کا جزوی تجزیہ نہیں کرسکتی ہے۔ بصری روشنی کے بجائے ہم الیکٹران شعاع کو استعمال کرسکتے ہیں۔ الیکٹران شعاعوں کو مناسب طور پر وضع کی گئی برقی اور مقناطیسی میدانوں کے ذریعہ فوکس کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح کے الیکٹران مائیکرو اسکوپ کا تجزیہ جز آخر کار اس حقیقت کے سبب محدود ہوتا ہے کہ الیکٹران بھی ایک لہر کی طرح برتاؤ کرتا ہے! (اس سلسلے میں زیادہ معلومات آپ کلاس XII میں حاصل کریں گے)۔ کسی الیکٹران کی طول لہر ایک اینگسٹرام کی کسی کسر کے برابر تک کم ہوسکتی ہے۔ 0.6Å تک کے تجزیہ جز صلاحیت والے الیکٹران مائیکرو اسکوپ بنائے جاچکے ہیں۔ ان کے ذریعہ کسی مادے میں ایٹموں، مالیکولوں کا تقریباً تجزیہ جز کیا جا سکتا ہے۔ حال ہی میں ایجاد کی گئی سرنگائی خوردبینیات (Tunnelling microscopy) میں تجزیہ جز کی حد ایک اینگسٹرام سے بھی زیادہ بہتر ہے۔ اس سے بھی مالیکولوں کے سائزوں کا تخمینہ لگایا جاتا ہے۔ اولیک ایسڈ (Oleic acid) کی تقریبی مالیکولی سائز معلوم کرنے کے لیے ایک سہل طریقہ درج ذیل ہے۔ اولیک ایسڈ ایک صابن کے محلول جیسا مائع ہے جس کا مالیکولی سائز $10^{-9}$ m کے درجے کا ہے۔

مالیکولی سائز کو ناپنے کے لیے سب سے پہلے پانی کی سطح پر اولیک ایسڈ کی یک مالیکولی سطح بنانی ہوگی۔

20 $cm^3$ الکوحل میں 1 $cm^3$ اولیک ایسڈ ملایئے۔ پھر اس محلول کے 1 $cm^3$ حصہ کو 20 $cm^3$ الکوحل میں گھولیے۔ تب محلول کا ارتکاز $\frac{1}{(20\times20)}cm^3 = \frac{\text{اولیک ایسڈ}}{\text{محلول}}$ کے برابر ہے۔ اب پانی سے بھرے بڑے ٹب میں تھوڑا لائیکوپوڈیم پاوڈر چھڑکیے اور پانی کی سطح پر اولیک ایسڈ اور الکوحل کے اس محلول کی ایک بوند ڈالیے۔ جلد ہی اولیک ایسڈ کا قطرہ پانی کی سطح پر ایک یک مولیکیولیائی موٹائی کی تقریباً کروی فلم کی شکل میں پھیل جاتا ہے۔ پھر ہم اس پتلی فلم کا جلدی سے قطر معلوم کرکے اس کا رقبہ حاصل

کر لیتے ہیں۔ مانا کہ ہم نے پانی کی سطح پر محلول کی $n$ بوندیں ڈالی ہیں۔ شروع میں ہم ہر ایک بوند کا تخمینی حجم ($V cm^3$) معلوم کرتے ہیں۔

محلول کی $n$ بوندوں کا حجم $= n\,V\,cm^3$

اس محلول میں اولیک ایسڈ کی مقدار

$$nV[1/(20\times20]\,cm^3$$

اولیک ایسڈ کا یہ محلول پانی کی سطح پر نہایت تیزی سے پھیلتا ہے اور موٹائی t کی ایک بہت پتلی پرت بناتا ہے۔ اگر یہ پھیل کر $A\,cm^2$ رقبہ کی پرت بناتا ہے۔ تو پرت کی موٹائی

$$t = \frac{\text{پرت کا حجم}}{\text{پرت کا رقبہ}}$$

یا

$$t = \frac{nV}{20\times20A}\,cm$$

اگر ہم یہ مان لیں کہ پرت ایک مالیکولی موٹائی کی ہے تو یہ موٹائی اولیک (Oleic) ایسڈ کے مالیکول کے قطر کی ناپ کی ہوگی۔ اس کی موٹائی $10^{-9}$ m درجے کی ہوتی ہے۔

**مثال 2.5** اگر کسی نیوکلیس کے سائز (جو $10^{-15}$ سے $10^{-14}$ تک کی سعت میں ہوتا ہے) کو اتنے گنا بڑا کر دیا جائے کہ اسے ایک تیز پن کی نوک کے برابر مانا جا سکے، تو ایک ایٹم کا سائز تقریباً کتنا ہوگا؟ مان لیجیے کہ پن کی نوک $10^{-5}$m سے $10^{-4}$m تک کی سعت میں ہوتی ہے۔

**جواب** نیوکلیس کا سائز $10^{-15}$ m سے $10^{-14}$ m تک کی سعت (رینج) میں ہوتا ہے۔ پن کی تیز نوک کو $10^{-5}$ m سے $10^{-4}$ m کے رینج میں مانا جا سکتا ہے۔ اس طرح ہم نیوکلیس کے سائز کو $10^{10}$ کے جزو ضربی (factor) سے بڑھا رہے ہیں۔ لہٰذا ایٹم جس کا سائز $10^{-10}$ m ہوتا ہے تقریباً 1 m سائز کا ظاہر ہوگا۔ اس لیے، ایک نیوکلیس ایک ایٹم میں سائز کے لحاظ سے اتنا ہی چھوٹا ہوتا ہے، جتنی کہ تقریباً ایک میٹر سائز کے کرے کے مرکز پر رکھی ہوئی ایک سوئی کی تیز نوک اس دائرے کے مقابلے میں چھوٹی ہوگی۔

### 2.3.3 لمبائیوں کی سعت (Range of Lengths)

کائنات میں اشیا کے سائزوں کی سعت نہایت وسیع ہے۔ ان کی سعت کسی ایٹم کے ایک خوردترین (tiny) نیوکلیس کے سائز $10^{-14}$ m سے قابل مشاہدہ کائنات (observable universe) کی حد $10^{26}$ m تک ہوسکتی ہے۔ جدول 2.3 میں کچھ اشیا کے سائزوں اور لمبائیوں کے درجے اور سعت دیے گئے ہیں۔

نہایت خورد اور نہایت بڑی دوریوں کی پیمائش کے لیے کچھ اور خاص اکائیاں درج ذیل ہیں:

1 فرمی $= 1\ f = 10^{-15}$ m

1 اینگسٹرم $= 1\ \mathring{A} = 10^{-10} =$ m

1 فلکیاتی اکائی $= 1AU$ (سورج کی زمین سے اوسط دوری)

$= 1.496 \times 10^{11}$ m

1 نوری سال (روشنی کے ذریعے $= 9.46 \times 10^{15}$ m

ایک سال میں طے کی گئی دوری)

1 پارسیک $= 3.08 \times 10^{-16}$ m

پارسیک وہ فاصلہ ہے جس پر زمین کے مدار کا اوسط نصف قطر 1 arc second کا زاویہ بناتا ہے۔

## 2.4 کمیت کی پیمائش (MEASUREMENT OF MASS)

کمیت مادے کی بنیادی خصوصیت ہے۔ یہ شے کے درجہ حرارت، دباؤ یا خلا میں اس کے مقام کے تابع نہیں ہوتا۔ کمیت کی SI اکائی کلوگرام (kg) ہے۔ وزن اور ناپ کے بین الاقوامی بیورو [International Bureau of Weights and Measures(BIPM)] کے ذریعہ دیے گئے بین الاقوامی معیاری کلوگرام کے اصل نمونے (prototype) مختلف ملکوں کی بہت سی تجربہ گاہوں میں دستیاب ہیں۔ ہندوستان میں یہ نیشنل فزیکل لیباریٹری (NPL)، نئی دہلی میں دستیاب ہے۔

ایٹموں اور سالمات کی کمیت کی پیمائش کے لیے کلوگرام ایک غیر موزوں اکائی ہے۔ لہٰذا ایٹموں کی کمیت کو ظاہر کرنے

کے لیے کمیت کی ایک خصوصی معیاری اکائی، **متحدہ ایٹمی کمیت اکائی** **(unified atomic mass unit, u)** کا استعمال کرتے ہیں جس کے مطابق اکائی = 1 u

= کاربن 12 ہم جا (isotope) ($^{12}_{6}C$) کے ایک ایٹم کی کمیت کا (1/12 واں) حصہ، جس میں الیکٹرانوں کی کمیت بھی شامل ہے۔

$= 1.66 \times 10^{-27}$ kg

عام طور پر دستیاب اشیاء کی کمیت معلوم کرنے کے لیے دوکانوں میں استعمال ہونے والا ترازو استعمال کیا جاسکتا ہے۔ بڑی کمیتوں والی اشیاء جیسے سیارے، ستارے وغیرہ کی کمیتیں، نیوٹن کے مادی کشش کے قانون پر مبنی مادی کشش کے طریقے (دیکھیے باب 8) کے ذریعے ناپی جاسکتی ہیں۔ بہت ہی کم کمیت والی اشیاء جیسے ایٹمی/تحت ایٹمی ذرّات وغیرہ کی کمیتوں کی پیمائش کے لیے کمیت طیف نگار (mass spectrograph) استعمال کیا جاتا ہے، جس میں ایک یکساں برقی ومقناطیسی میدان میں حرکت کررہے چارج شدہ ذرّے کے خطِ حرکت کا نصف قطر اس کی کمیت کے راست متناسب ہوتا ہے۔

### 2.4.1 کمیتوں کی سعت (Range of Masses)

پورے عالم میں پائی جانے والی اشیا کی کمیتوں کی سعت کا پیمانہ کافی بڑے پیمانے پر ہے۔ جو کسی الیکٹران کی خفیف کمیت (درجہ $10^{-30}$ Kg) سے معلوم کائنات کی عظیم کمیت کے درجہ تقریباً $10^{55}$ Kg تک پھیلی ہوئی ہے۔

**جدول 2.3** لمبائیوں کی سعتیں اور درجات

| شے کے ناپ یا فاصلے | لمبائی (m) |
|---|---|
| پروٹان کا ناپ | $10^{-15}$ |
| ایٹمی نیوکلیس کا سائز | $10^{-14}$ |
| ہائیڈروجن ایٹم کا سائز | $10^{-10}$ |
| کسی مثالی (typical) وائرس کی لمبائی | $10^{-8}$ |
| روشنی کی طول لہر | $10^{-7}$ |
| سرخ دموی جسیمے (red blood corpuscle) کا سائز | $10^{-5}$ |
| کسی کاغذ کی موٹائی | $10^{-4}$ |
| سمندر کی سطح سے ماؤنٹ ایورسٹ کی اونچائی | $10^{4}$ |
| زمین کا نصف قطر | $10^{7}$ |
| زمین سے چاند کی دوری | $10^{8}$ |
| زمین سے سورج کی دوری | $10^{11}$ |
| سورج سے پلوٹو کی دوری | $10^{13}$ |
| ہماری گیلکسی کا سائز | $10^{21}$ |
| زمین سے اینڈرومیڈا (Andromeda) گیلکسی کی دوری | $10^{22}$ |
| قابل مشاہدہ کائنات کی سرحد تک دوری | $10^{26}$ |

جدول 2.4 میں مختلف اشیا کی مخصوص کمیتوں کے درجے اور وسعت دیے گئے ہیں۔

**جدول 2.4** کمیتوں کی سعتیں اور درجات

| شے | کمیت (کلو گرام) |
|---|---|
| الیکٹران | $10^{-30}$ |
| پروٹان | $10^{-27}$ |
| یورینیم ایٹم | $10^{-25}$ |
| سرخ دموی خلیہ | $10^{-13}$ |
| دھول کے ذرے | $10^{-9}$ |
| بارش کی بوند | $10^{-6}$ |
| مچھر | $10^{-5}$ |
| انگور | $10^{-3}$ |
| انسان | $10^{2}$ |
| آٹوموبائیل (سواریاں) | $10^{3}$ |
| بوئنگ 747 ہوائی جہاز | $10^{8}$ |
| چاند | $10^{23}$ |
| زمین | $10^{25}$ |
| سورج | $10^{30}$ |
| کہکشاں (گیلکسی) | $10^{41}$ |
| قابل مشاہدہ کائنات | $10^{55}$ |

## 2.5 وقت کی پیائش (MEASUREMENT OF TIME)

کسی بھی وقفہ وقت کی پیائش کے لیے ہمیں گھڑی کی ضرورت ہوتی ہے۔ وقت کی پیائش کے لیے بہتر معیار کی ضرورت کے تحت ایٹمی گھڑی کو فروغ دیا گیا ہے۔ اب ہم وقت کی پیائش کے لیے **ایٹمی معیار وقت (atomic standard of time)** کا استعمال کرتے ہیں جو سیزیم ایٹم میں پیدا ہونے والے دوری ارتعاش کو مبنی ہے۔ قومی معیاروں میں استعمال کی جانے والی **سیزیم گھڑی** جسے **ایٹمی گھڑی** بھی کہتے ہیں، کی یہی بنیاد ہے۔ ایسے معیار کئی تجربہ گاہوں میں دستیاب ہیں۔ سیزیم ایٹمی گھڑی میں ایک سیکنڈ سیزیم 133- ایٹم کے اس کی تحت حالت (ground state) کی دو باریک ترین سطحوں (hyper fine levels) کے درمیان عبور (transition) سے مطابقت رکھنے والے 9,192,631,770 ارتعاش کے لیے مطلوبہ وقت کے مساوی لیا جاتا ہے۔ سیزیم ایٹم کے ارتعاش سیزیم ایٹمی گھڑی کے شرح ارتعاش کو ٹھیک اسی طرح منضبط (regulate) کرتے ہیں جیسے کہ توازنی پہیے (balance wheel) کے ارتعاش ایک عام کلائی گھڑی کو منضبط کرتے ہیں یا ایک چھوٹے کوارٹز کرسٹل کے ارتعاش کسی کوارٹز کلائی گھڑی کو منضبط کرتے ہیں۔

سیزیم ایٹمی گھڑیاں نہایت درست و صحیح ہوتی ہیں۔ اصولی طور پر یہ گھڑیاں آسانی سے لے جا سکنے والے (portable) معیار فراہم کراتی ہیں۔ وقفہ وقت کے قومی معیار سکنڈ، اور ساتھ ساتھ تواتر کو چار سیزیم ایٹمی گھڑیوں کے ذریعہ قائم رکھا جاتا ہے۔ نیشنل فزیکل لیباریٹری (NPL)، نئی دہلی میں ہندوستانی معیاری وقت قائم رکھنے کے لیے سیزیم ایٹمی گھڑی استعمال کی جارہی ہے۔

ہمارے ملک میں، تواتر اور وقت کے طبعی معیاروں کی دیکھ بھال (نگرانی) اور ان میں اصلاح وغیرہ کی ذمہ داری NPL، نئی دہلی کی ہے۔ غور کریں کہ ہندوستانی معیاری وقت (IST) ان ایٹمی گھڑیوں کے مجموعے سے متعلق ہے۔ سیزیم ایٹمی گھڑیاں اتنا درست وقت بتاتی ہیں کہ پیائش وقت میں غیر یقینیت (uncertainty) $\pm 1\times10^{-13}$ یعنی $10^{13}$ میں 1 حصہ ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ ان گھڑیوں میں 1 سال میں $\pm 3\,\mu s$ سے زیادہ وقت کی کمی بیشی نہیں ہوگی۔ وقت کی پیائش میں بہت زیادہ درستیِ صحت کے سبب لمبائی کی SI اکائی کو روشنی کے ذریعہ متعین وقت کے وقفے (1/299, 792,458 ویں سیکنڈ) میں طے کی گئی راہ لمبائی (path length) کی اصطلاح میں ظاہر کیا گیا ہے۔

دنیا میں مختلف واقعات کے وقفہ وقت کی سِعت کافی وسیع ہے۔ جدول 2.5 میں کچھ اہم وقفہ وقت کے درجے اور سعتیں ظاہر کی گئی ہیں۔

جدول 2.3 اور 2.5 کا مشاہدہ کرنے پر آپ دیکھیں گے کہ مختلف پیائشوں کے اعداد اور ان میں فرق کے درمیان یکسانیت ایک دلچسپ

اتفاق ہے۔غور کریں کہ دنیا میں اشیا کی سب سے بڑی لمبائی اور مختصر ترین لمبائی کی پیمائش کی نسبت تقریباً $10^{41}$ ہے۔اسی طرح ہماری دنیا میں اشیا اور واقعات سے متعلق زیادہ سے زیادہ اور مختصر ترین وقفہ وقت کا تناسب بھی $10^{41}$ ہے۔اشیا کی کمیتوں کے جدول 2.4 میں عدد $10^{41}$ پھر سے ظاہر ہوتا ہے۔کائنات کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم کمیتوں کا تناسب $(10^{41})^2$ ہے۔کیا اعداد کے وسیع گروپ میں یہ غیر معمولی ہم آہنگی محض اتفاق ہے؟

## 2.6 آلات کی درستیِ صحت اور دقیق پیمائش میں سہو (ACCURACY, PRECISION OF INSTRUMENTS AND ERRORS IN MEASUREMENT)

پیمائش ہر تجرباتی سائنس اور ٹکنالوجی کی بنیاد ہے۔ کسی بھی پیمائشی آلے سے لی گئی ہر ایک پیمائش کے نتیجہ میں کچھ غیر یقینیت ہوتی ہے یہ غیر یقینیت (سہو یا غلطی) **(error)** کہلاتی ہے۔ ہر ایک تحسیب کی گئی مقدار میں، جو پیمائش کی گئی قدروں پر مبنی ہوتی ہے، کچھ نہ کچھ سہو ہوتا ہے۔ یہاں ہمیں دو اصطلاحات درستی صحت **(accuracy)** اور دقیق پیمائش **(precision)** میں امتیاز، کرنا ہوگا۔کسی قدر کی درستیِ صحت وہ پیمائش ہے جو یہ بتاتی ہے کہ کسی مقدار کی پیمائش کی گئی قدر اس کی حقیقی قدر کے کتنی قریب ہے جب کہ پیمائش کا دقیق ہونا ہمیں یہ بتاتا ہے کہ کسی مقدار کی کس جز تجزیہ یا حد تک پیمائش کی گئی ہے۔

پیمائش کی درستگی، کئی عوامل پر منحصر ہوتی ہے جس میں آلہ پیمائش کی حد یا جز تجزیہ بھی شامل ہے۔مثال کے لیے مان لیجیے کہ کسی شے کی لمبائی کی صحیح قدر 3.678 cm ہے۔کسی تجربے میں 0.1 cm جز تجزیہ کے پیمائشی آلے کے ذریعہ خاص شے کی لمبائی کی پیمائشی قدر 3.5 cm اور کسی دوسرے تجربے میں زیادہ جز تجزیہ 0.01 cm والے پیمائشی آلے کے ذریعہ حاصل اسی لمبائی کی پیمائشی قدر 3.38 cm ہے۔ لہٰذا پہلے پیمائشی طریقے سے حاصل شدہ پیمائش زیادہ درست ہے۔(کیونکہ یہ حقیقی قدر کے زیادہ قریب ہے) لیکن کم دقیق (کیونکہ اس کا جز تجزیہ صرف 0.1 cm ہے) جب کہ دوسرے پیمائشی طریقے کے ذریعہ حاصل شدہ پیمائش کم درست لیکن زیادہ دقیق ہے۔لہٰذا پیمائش میں غلطیوں (سہو) کے سبب ہر ایک پیمائش قریبی پیمائش ہے۔عام طور پر پیمائش میں سہو کی درجہ بندی درج ذیل طور پر کی جاسکتی ہے۔

**جدول 2.5** وقفہ وقت کی سِعت

| واقعہ | وقفہ وقت (s) |
|---|---|
| نہایت غیر پائیدار ذرے کی مدت حیات | $10^{-24}$ |
| روشنی کے لیے نیوکلیر دوری کو طے کرنے میں لگا وقت | $10^{-22}$ |
| x-کرنوں کا دور | $10^{-19}$ |
| ایٹمی ارتعاش کا دور | $10^{-15}$ |
| روشنی لہر کا دور | $10^{-15}$ |
| کسی ایٹم کی اشتعالی حالت کی مدت حیات | $10^{-8}$ |
| ریڈیو لہر کا دور | $10^{-6}$ |
| آواز لہر کا دور | $10^{-3}$ |
| آنکھ کے جھپکنے میں لگا وقت | $10^{-1}$ |
| انسانی دل کی دو متواتر دھڑکنوں کا درمیانی وقفہ | $10^{0}$ |

| | |
|---|---|
| روشنی کا چاند سے زمین تک آنے میں لگا وقت | $10^0$ |
| روشنی کا سورج سے زمین تک آنے میں لگا وقت | $10^2$ |
| کسی مصنوعی سیارچے کا دوری وقت | $10^4$ |
| زمین کی گردش کا دور | $10^5$ |
| چاند کا گردشی اور طواف کا دور | $10^6$ |
| زمین کے طواف کا دور | $10^7$ |
| روشنی کا قریبی تارے سے زمین تک آنے میں لگا وقت | $10^8$ |
| انسان کی اوسط مدت حیات | $10^9$ |
| مصر کے احراموں کی عمر | $10^{11}$ |
| ڈائناسور کے معدوم ہونے کے بعد گزرا وقت | $10^{15}$ |
| کائنات کی عمر | $10^{17}$ |

(a) بانظام سہو (systematic errors)

(b) بے ترتیب سہو (random errors)

### بانظام سہو (Systematic errors)

نظام سے وابستہ سہو وہ سہو ہیں جو کسی بھی ایک سمت، خواہ مثبت یا منفی، کی طرف مائل ہوتے ہیں۔اس قسم کے سہو کے کچھ اسباب درج ذیل ہیں :

(a) **آلاتی سہو (Instrumental errors)** : یہ غلطیاں پیمائشی آلے کے ناقص ڈیزائن یا پیمانہ بندی کے سبب، صفر سہو کی موجودگی وغیرہ کے سبب پیدا ہوتی ہیں۔ مثال کے لیے، ہوسکتا ہے کہ کسی تھرمامیٹر میں درجۂ حرارت کی نشان بندی درست نہ ہو (جس کے سبب STP پر پانی کے نقطۂ جوش کو وہ تھرمامیٹر $104^0C$ دکھا سکتا ہے جب کہ اسے $100^0C$ پڑھا جانا چاہیے)، کسی ورنیر کیلیپرس میں ورنیر پیمانے کا صفر نشان خاص پیمانے کے صفر نشان کی سیدھ میں نہ ہو یا کسی عام میٹر پیمانے کا ایک سرا گھسا ہوا ہو۔

(b) **تجرباتی تکنیک یا طریقہ عمل کا نقص (Imperfection in experimental procedure) :** مثال کے لیے کسی انسانی جسم کے درجہ حرارت کی پیمائش کے لیے جب تھرمامیٹر کو بغل میں لگایا جاتا ہے تو یہ جسم کے اصل درجہ حرارت سے کم درجہ حرارت دکھاتا ہے۔ تجربے کے دوران کچھ دیگر خارجی حالات (جیسے درجہ حرارت، رطوبت، ہوا کی رفتار وغیرہ میں تبدیلیاں) پیمائش کو منظّم طور پر متاثر کرسکتے ہیں۔

(c) **انفرادی سہو (Personal errors)** : یہ غلطیاں تجربہ کرنے والے فرد کے میلان، سازوسامان کی مناسب ترتیب میں کمی یا مشاہدہ سے متعلق مناسب احتیاطی تدابیر کے بغیر مشاہدات لینے میں کسی شخص کی لاپروائی وغیرہ کے سبب پیدا ہوتی ہیں۔ مثال کے لیے اگر آپ اپنی عادت کے مطابق پیمانے پر سوئی کے مقام کو پڑھتے وقت اپنے سر کو دائیں جانب کچھ زیادہ دور تک رکھتے ہیں تب آپ **اختلاف منظر (parallax)** کے سبب غلطی کر بیٹھیں گے۔

### بے ترتیب سہو (Random errors)

یہ سہو وہ سہو ہیں جو بے قاعدہ طور پر ہوتے ہیں اور اس لیے علامت اور سائز کے لحاظ سے یہ بے ترتیب ہوتے ہیں۔ یہ تجرباتی حالات (درجہ حرارت، وولٹیج سپلائی، تجرباتی بندوبست کے میکانکی ارتعاش وغیرہ) میں بے ترتیب اور غیر متوقع اُتار چڑھاؤ، مشاہد کے ذریعہ مشاہدہ اور اندراجات کے دوران کی گئی ذاتی غلطیاں (ذاتی میلان) وغیرہ کے سبب پیدا ہوسکتے ہیں۔ مثال

کے لیے، جب ایک ہی شخص کسی مشاہدے کو کئی بار دہراتا ہے تو یہ ممکن ہے کہ ہر بار وہ ان کی مختلف قدریں حاصل کرے۔

**کم ترین شمار سہو (Least count error)**

**کم ترین شمار سہو** (یا خطا) وہ خطا ہے جو آلے کے جز تجزیے کے ساتھ جڑی ہوتی ہیں۔ مثال کے لیے، کسی ورنیر کیلیپرس کا کم ترین شمار 0.01 cm ہے یا ایک اسفیرو میٹر میں کم ترین شمار 0.001 cm ہوسکتا ہے۔ کم ترین شمار سہو بے ترتیب سہو کے زمرے میں شامل ہیں لیکن ان کا سائز محدود ہوتا ہے۔ یہ سہو منظّم اور بے ترتیب دونوں قسموں کا ہوسکتا ہے۔ اگر ہم لمبائی کی پیائش کے لیے میٹر پیمانے کا استعمال کرتے ہیں تو میٹر پیمانے کی نشان بندی 1 mm کے فاصلے یا وقفے پر ہوسکتی ہے۔ نسبتاً دقیق آلات کے استعمال اور تجرباتی تکنیک میں بہتری لانے وغیرہ سے کم ترین شمار سہو کو کم کیا جاسکتا ہے۔ مشاہدات کو کئی بار دہرانے اور پھر ان حسابی درمیانہ لینے پر یہ درمیانہ قدر پیائش کی گئی مقدار کی حقیقی قدر کے بہت ہی قریب ہوگی۔

### 2.6.1 مطلق سہو، نسبتی سہو اور فی صد سہو (Absolute error, Relative error and Percentage error)

(a) مان لیجیے کہ کئی پیائشوں کی قدریں $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ ہیں۔ ان کا حسابی درمیانیہ، پیائش کے دیئے ہوئے حالات میں، مقدار کی سب سے بہتر ممکن قدر مانی جاتی ہے،

$$a_{mean} = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) / n \quad (2.4)$$

یا

$$a_{mean} = \sum_{i=1}^{n} a_i / n \quad (2.5)$$

اس کی وجہ یہ ہے (جیسا کہ پہلے تشریح کی گئی ہے) کہ یہ فرض کرنا معقول ہے کہ انفرادی پیائش کے ذریعے حاصل کیے گئے تخمینے کا صحیح قدر سے جتنا زیادہ ہونے کا امکان ہے اتنا ہی امکان کم ہونے کا بھی ہے۔

**مقدار کی صحیح قدر اور انفرادی پیمائش قدر کے درمیان کے فرق کی عددی قدر کو پیمائش کا مطلق سہو (absolute error) کہا جاتا ھے۔** اسے $|\Delta a|$ کے ذریعہ ظاہر کیا جاتا ہے (کیونکہ ہم کسی مقدار کی حقیقی قدر نہیں جانتے اس لیے حسابی درمیانے کو صحیح قدر تسلیم کر لیتے ہیں) تب انفرادی پیائش کی قدروں میں سہو اس طرح ہیں،

$$\Delta a_1 = a_{mean} - a_1$$

$$\Delta a_2 = a_{mean} - a_2$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\Delta a_n = a_n - a_{mean}$$

اوپر دیے ہوئے مشاہدات میں، کچھ مشاہدات کے لیے $\Delta a$ کی تحسیب شدہ عدد مثبت ہوسکتی ہے اور کچھ کے لیے منفی۔ لیکن مطلق سہو $|\Delta a|$ ہمیشہ مثبت ہوگا۔

(b) سبھی مطلق سہو کے حسابی درمیانے کو طبعی مقدار $a$ کی قدر میں حتمی یا درمیانہ مطلق سہو مانا جاتا ہے۔ اسے $\Delta a_{mean}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے

اس طرح:

$$\Delta a_{mean} = (|\Delta a_1| + |\Delta a_2| + |\Delta a_3| + \ldots + |\Delta a_n|)/n \quad (2.6)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\Delta a_i| / n \quad (2.7)$$

اگر ہم صرف ایک ہی پیائش لیں تو اس کی قدر $a_{mean} + \Delta a_{mean}$ کی سعت میں ہوسکتی ہے۔

یعنی $a = a_{mean} + \Delta a_{mean}$

یا

$$a_{mean} - \Delta a_{mean} \le a \le a_{mean} + \Delta a_{mean} \quad (2.8)$$

اس کا مطلب ہوا کہ طبعی مقدار a کی کسی بھی پیائش کا

$(a_{mean}+\Delta a_{mean})$ اور $(a_{mean}-\Delta a_{mean})$ کے درمیان ہونے کا امکان ہے۔

(c) مطلق سہو کے بجائے اکثر ہم **نسبتی سہو** یا **فی صد سہو** $(\delta a)$ کا بھی استعمال کرتے ہیں۔ نسبتی سہو درمیانہ مطلق سہو $\Delta a_{mean}$ اور پیمائش کی گئی شے کی درمیانہ قدر $a_{mean}$ کی نسبت ہے۔

(2.9) مطلق سہو (relative error) = $\Delta a_{mean}/a_{mean}$

جب نسبتی سہو کو فی صد میں ظاہر کیا جاتا ہے تو اسے **فی صد سہو** $(\delta a)$ کہتے ہیں۔ لہٰذا فی صد سہو

$$\delta a = (\Delta a_{mean}/a_{mean}) \times 100\% \qquad (2.10)$$

آیئے ایک مثال لیتے ہیں:

**مثال 2.6** دو گھڑیوں کی کسی قومی لیباریٹری میں رکھی ایک معیاری گھڑی کے ساتھ جانچ کی جارہی ہے۔ جس وقت معیاری گھڑی میں دو پہر کے 12:00:00 بجتے ہیں اس وقت ان دو گھڑیوں کی ریڈنگ اس طرح ہیں۔

| | گھڑی 1 | گھڑی 2 |
|---|---|---|
| دوشنبہ | 12:00:05 | 10:15:06 |
| منگل | 12:01:15 | 10:14:59 |
| بدھ | 11:59:08 | 10:15:18 |
| جمعرات | 12:01:50 | 10:15:07 |
| جمعہ | 11:59:15 | 10:14:53 |
| سنیچر | 12:01:30 | 10:15:24 |
| اتوار | 12:01:19 | 10:15:11 |

اگر آپ کوئی تجربہ کررہے ہیں جس میں وقفہ وقت کی دقیق پیمائشوں کی ضرورت ہے تو آپ ان دونوں میں سے کون سی گھڑی کا انتخاب کریں گے؟

**جواب** سات دنوں کے مشاہدات میں تغیرات کی رینج گھڑی 1 کے لیے 162s ہے اور گھڑی 2 کے لیے 31s ہے۔ گھڑی 1 کی اوسط ریڈنگ گھڑی 2 کی اوسط ریڈنگ کے مقابلے معیاری وقت کے زیادہ قریب ہے۔ اہم بات یہ ہے کہ گھڑی کا صفر سہو (zero error) دقیق کام کے لیے اتنا اہم نہیں ہے جتنا کہ ریڈنگ کا آپسی فرق کیونکہ 'صفر سہو' کو ہمیشہ آسانی سے دور کیا جاسکتا ہے۔ اس لیے گھڑی 1 کے بجائے گھڑی 2 کو ترجیح دی جائے گی۔ ▶

**مثال 2.7** ہم کسی سادہ پینڈولم کے اہتزاز (oscillation) کے دوری وقت کی پیمائش کرتے ہیں۔ متواتر پیمائشوں میں ریڈنگ 2.63s, 2.56 s, 2.42 s, 2.71s اور 2.80 s ہیں۔ مطلق سہو، نسبتی سہو یا فی صد سہو کا شمار کیجیے۔

**جواب** پینڈولم کے اہتزاز کا وسط دور

$$T = \frac{(2.63 + 2.56 + 2.42 + 2.71 + 2.80)\,\text{s}}{5}$$

$$= \frac{13.12}{5}\,\text{s} = 2.624\,\text{s} = 2.62\,\text{s}$$

کیونکہ ہر دور کی پیمائش 0.01 s کے جز تجزیہ (علاحدگی) تک ہوئی ہے، اس لیے سبھی وقت دوسرے اعشاریہ تک ہیں۔ اس لیے وسط دور کو بھی دوسرے اعشاریہ مقام تک لکھنا مناسب ہے۔

پیمائشوں میں مطلق سہو ہیں:

$$2.63\text{ s} - 2.62\text{ s} = 0.01\text{ s}$$
$$2.56\text{ s} - 2.62\text{ s} = -0.06\text{ s}$$
$$2.42\text{ s} - 2.62\text{ s} = -0.20\text{ s}$$
$$2.71\text{ s} - 2.62\text{ s} = 0.09\text{ s}$$
$$2.80\text{ s} - 2.62\text{ s} = 0.18\text{ s}$$

یہ نوٹ کیجیے کہ مطلق سہو کی بھی وہی اکائیاں ہیں جو پیمائش کی جانے والی مقداروں کی ہیں۔

سبھی مطلق سہو کی عددی قدروں کا حسابی درمیانہ (حسابی درمیانہ کے لیے ہم صرف عددی قدر (magnitude) لیتے ہیں)۔

$$\Delta T_{mean} = [(0.01+0.06+0.20+0.09+0.18)\text{s}]/5$$
$$= 0.54\text{ s}/5$$
$$= 0.11\text{ s}$$

اس کا مطلب یہ ہے کہ سادہ پینڈولم کے اہتزاز کا دور، (2.62 + 0.11) s ہے یا (2.62 + 0.11) s اور (2.62 −0.11) s یا 2.73 s اور 2.51 s کے درمیان ہے۔ کیونکہ سبھی مطلق سہو کا حسابی درمیانہ 0.11 s ہے، اس لیے سیکنڈ کے دسویں حصے میں پہلے ہی کوئی غلطی ہے۔ لہٰذا وقفہ وقت کو سویں حصے تک ظاہر کرنے کا کوئی مطلب نہیں ہے۔ لہٰذا لکھنے کا صحیح طریقہ ہے،

$$T = 2.6 + 0.1\ \mathrm{s}$$

یہ نوٹ کیجیے کہ آخری عدد 6 غیر معتبر ہے کیونکہ یہ 5 اور 7 کے درمیان میں کچھ بھی ہوسکتا ہے۔ ہم یہ کہہ کر اس کا اشارہ دیتے ہیں کہ اس پیائش کے دو بامعنی اعداد (significant figures) ہیں۔ اس معاملے میں دو بامعنی عدد ہیں: 2، جو معتبر ہے، اور 6 ہے جس سے کوئی غلطی یا سہو منسلک ہے۔ آپ بامعنی اعداد کے بارے میں زیادہ تفصیل سے حصہ 2.7 میں پڑھیں گے۔

اس مثال کے لیے نسبتی سہو یا فی صد سہو ہے،

$$\delta a = \frac{0.1}{2.6} \times 100 = 4\%$$

### 2.6.2 غلطیوں کا اجتماع (Combination of Errors)

اگر ہم کوئی ایسا تجربہ کریں جس میں مختلف پیائشیں شامل ہوں تو ہمیں یہ ضرور ہی جاننا چاہیے کہ سبھی پیائشوں میں ہونے والے سہو کس طرح جمع ہوتے ہیں۔ مثال کے لیے کمیتی کثافت شے کی کمیت اور اس کے حجم کی نسبت

## آپ ایک خط کی لمبائی کیسے معلوم کریں گے؟

(How will you measure the length of a line?)

کیسا مہمل سوال ہے؟ ہوسکتا ہے آپ اب یہ کہیں۔ لیکن اگر خط، خطِ مستقیم (straight line) نہ ہو تو؟ ایک ٹیڑھا میڑھا خط اپنی کاپی یا تختہ سیاہ پر کھینچیے۔ جی ہاں، اب بھی کوئی بڑی مشکل بات نہیں ہے۔ آپ ایک دھاگہ لے کر اسے خط پر اس طرح رکھیے کہ وہ خط کو پوری طرح ڈھک لے، پھر دھاگہ کو کھولیے اور اسکی لمبائی ناپ لیجیے۔

اب تصور کیجیے کہ آپ ایک قومی شاہ راہ کی لمبائی ناپنا چاہتے ہیں یا ایک دریا کی یا دو اسٹیشنوں کے درمیان بچھی ہوئی ریل کی پٹری کی یا دو صوبوں یا ملکوں کے درمیان سرحد کی لمبائی ناپنا چاہتے ہیں۔ اب اگر آپ ایک میٹر یا سو میٹر لمبا دھاگہ رسّی لیں، اسے خط پر رکھیں، پھر جہاں اس کا اگلا سرا تھا، وہاں پچھلا سرا رکھیں اور اس طرح دھاگے کے مقام کو بدلتے جائیں تو اس کام کے لیے جتنے گھنٹوں کی محنت درکار ہوگی اور جتنا خرچ آئے گا، اس کے مقابلے میں حاصل بہت چھوٹی سی بات ہوگی۔ مزید یہ کہ اس اتنے لمبے کام میں غلطیاں ہونے کے امکان تقریباً یقینی ہیں۔ اس کے بارے میں ایک دلچسپ حقیقی واقعہ ہے۔ فرانس اور بیلجیم کی ایک مشترکہ بین الاقوامی سرحد ہے، جس کی، دونوں ملکوں کی سرکاری دستاویزوں میں، درج لمبائی میں قابلِ لحاظ فرق ہے۔

ایک قدم آگے بڑھیے اور اس ساحلی خط کا تصور کیجیے جہاں زمین، سمندر سے ملتی ہے۔ سڑکوں اور دریاؤں میں ساحلی خط کے مقابلے میں بہت کم گہرے موڑ ہوتے ہیں۔ تب بھی تمام دستاویزوں میں، جن میں ہماری درسی کتابیں بھی شامل ہیں، گجرات یا آندھرا پردیش کے ساحلِ سمندر یا دو صوبوں کی مشترکہ سرحد وغیرہ کی لمبائی کے متعلق معلومات شامل ہوتی ہے۔ ریل کے ٹکٹوں پر دو اسٹیشنوں کا درمیانی فاصلہ چھپا ہوتا ہے۔ سڑک کے کنارے کنارے ہر جگہ میل کے پتھر لگے ہوتے ہیں، جو مختلف بستیوں کے فاصلوں کی نشاندہی کرتے ہیں۔ پھر یہ کیسے کیا جاتا ہے؟

ہمیں یہ فیصلہ کرنا ہوتا ہے کہ ہم کس حد تک پیائش میں سہو (error) برداشت کریں گے اور پھر یہ دیکھنا ہوتا ہے کہ کم از کم خرچ کیسے آئے گا۔ اس کے لیے اعلیٰ ٹکنولوجی اور بڑا خرچ درکار ہے۔ یہ کہنا کافی ہوگا کہ اس کے لیے اچھی خاصی اعلیٰ درجہ کی طبیعات، ریاضی انجینیرنگ اور ٹکنولوجی درکار ہوگی۔ یہ فریکٹلس (Fractals) سے متعلق ہے جو حال ہی میں نظریاتی قبولیت اختیار کرنے والی طبیعات کی شاخ ہے۔ پھر بھی ہم یہ نہیں جان

سکتے کہ جو اعداد ہمارے سامنے آئے ہیں وہ کس حد تک قابلِ بھروسہ ہیں، جیسا کہ فرانس اور بیلجیم کے قصّے سے ظاہر ہوتا ہے۔ آپ کی دلچسپی کے لیے یہ بتا دیں کہ فرانس اور بیلجیم کے درمیان لمبائی کی پیمائش کا یہ تناقص (Discrepancy)، فریکٹلس اور بے نظمی (chaos) کے موضوع پر طبیعات کی ایک اعلیٰ نصاب کی کتاب کے پہلے صفحے پر درج کیا گیا ہے۔

اگر کمیت اور ناپ یا ابعاد کی پیمائش میں سہو ہیں تو ہمیں یہ ضرور جاننا چاہیے کہ کثافت میں کتنی غلطی ہوگی۔ اس طرح کا اندازہ لگانے کے لیے ہمیں یہ سیکھنا ہوگا کہ مختلف ریاضیاتی عملوں میں سہو کس طرح مجتمع ہوتے ہیں۔ اس کے لیے ہم درج ذیل طریقوں کا استعمال کرتے ہیں۔

فرض کیجیے کہ دو طبعی مقداروں A اور B کی پیمائش کی 'قدریں' بالترتیب $A+\Delta A$ اور $B+\Delta B$ ہیں، جہاں $\Delta A$ اور $\Delta B$ ان کے مطلق سہو ہیں۔ ہم چاہتے ہیں کہ حاصلِ جمع: $z = A + B$ میں سہو معلوم کریں۔ جمع کے ذریعے ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$z + \Delta z = (A \pm \Delta A) + (B + \Delta B)$$

z میں ازحد ممکنہ سہو $\Delta z = \Delta A + \Delta B$

حاصلِ تفریق: $z = A - B$ کے لیے

$$z + \Delta z = (A + \Delta A) - (B + \Delta B)$$

$$= (A - B) \pm \Delta A + \Delta B$$

یا

$$\pm \Delta Z = \pm \Delta A \pm \Delta B$$

سہو $\Delta Z$ کی بیش ترین قدر پھر $\Delta A + \Delta B$ ہی ہے۔

لہٰذا اصول یہ ہے: **جب دو مقداروں کو جمع یا تفریق کیا جاتا ہے تو آخری نتیجے میں مطلق سہو انفرادی مقداروں کے مطلق سہو کا حاصل جمع ہوتا ہے۔**

**مثال 2.8** دو اجسام کے درجہ حرارت کی تھرمامیٹر سے ناپنے پر قدریں ہیں: $t_1 = 20^0C + 0.5^0C$ اور $t_0 = 50^0C + 0.5^0C$ درجہ حرارت کا فرق اور اس میں سہو معلوم کریں۔

**جواب:** $t' = t_2 - t_1$

$$= (50^0C + 0.5^0C) - (20^0C + 0.5^0C)$$

$$= 30^0C + 1^0C$$

### (b) حاصل ضرب یا حاصل تقسیم (خارج قسمت) میں سہو (Errors of a product or a quotient)

مان لیجیے $Z = AB$ اور A اور B کی پیمائش کی گئی قدر $A + \Delta A$ اور $B + \Delta B$ ہیں تب

$$Z + \Delta Z = (A \pm \Delta A)\ (B \pm \Delta B)$$

$$= AB \pm B\Delta A \pm A\Delta B \pm \Delta A\Delta B$$

LHS کو $Z$ سے اور RHS کو $AB$ سے تقسیم کرنے پر

$$1 \pm (\Delta Z/Z) = 1 \pm (\Delta A/A) \pm (\Delta B/B) \pm (\Delta A/A)\ \Delta B/B)$$

کیونکہ $\Delta A$ اور $\Delta B$ کی قدر بہت کم ہے لہٰذا ہم ان کے حاصل ضرب کو نظرانداز کریں گے۔

لہٰذا Z میں زیادہ سے زیادہ کسری سہو،

$$\Delta Z/Z = (\Delta A/A) + (\Delta B/B)$$

آپ یہ آسانی سے تصدیق کر سکتے ہیں کہ یہ مساوات تقسیم کے لیے بھی صحیح ہے۔ لہٰذا اصول یہ ہے: **جب دو مقداروں کو ضرب یا تقسیم کیا جاتا ہے تو نتیجے میں کسری سہو، ضاربوں میں کسری غلطیوں کی جمع کے برابر ہوتا ہے۔**

**مثال 2.9** مزاحمت $R = V/I$ جہاں $V = (100 + 5)$ اور $I = (10 + 0.2)(A)$ ہے۔ $R$ میں فی صد سہو معلوم کیجیے۔

**جواب** $V$ میں فی صد سہو 5% ہے $I$ میں 2% ہے۔ لہٰذا $R$ کی قدر میں کل سہو ہوگا۔ $5\% + 2\% = 7\%$

**مثال 2.10** دو مزاحموں کی مزاحمتیں $R_1 = 100 + 3$ ohm اور $R_2 = 200 + 4$ ohm ہیں جو کہ (a) سلسلہ وار ترتیب (b) متوازی ترتیب میں جڑے ہوئے ہیں۔ معاول مزاحمت کا پتہ لگائیں۔ استعال کریں (a) کے لیے رشتہ $R = R_1 + R_2$ اور (b) کے لیے $1/R' = 1/R_1 + 1/R_2$ اور

$$\frac{\Delta R'}{R'^2} = \frac{\Delta R_1}{R_1^2} + \frac{\Delta R_2}{R_2^2}$$

**جواب** (a) معاول مزاحمت، سلسلہ وار ترتیب کے لیے

$$R = R_1 + R_2 = (100 + 3)\ \text{ohm} + (200 + 4)\ \text{ohm}$$
$$= 300 + 7\ \text{ohm}$$

(b) معاول مزاحمت متوازی ترتیب کے لیے

$$R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{200}{3} = 66.7\ \text{ohm}$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\Delta R'}{R'^2} = \frac{\Delta R_1}{R_1^2} + \frac{\Delta R_2}{R_2^2}$$

$$\Delta R' = \left(R'^2\right)\frac{\Delta R_1}{R_1^2} + \left(R'^2\right)\frac{\Delta R_2}{R_2^2}$$

$$= \left(\frac{66.7}{100}\right)^2 3 + \left(\frac{66.7}{200}\right)^2 4 = 1.8$$

تب $R' = 66.7 \pm 1.8$ ohm

### (c) پیمائش کی گئی مقدار کی قوت کے سبب سہو (Eror in case of a measured quantity raised to power)

مان لیجئے $Z = a^2$

$$\Delta Z/Z = (\Delta A/A) + (\Delta A/A)$$

لہٰذا $A^2$ میں کسری سہو $A$ میں سہو کی دو گنی ہے۔

عمومی شکل میں، اگر $Z = A^p\, B^q / C^r$ تب

$$\Delta Z/Z = P\,(\Delta A/A) + q\,(\Delta B/B) + (\Delta C/C)$$

**لہٰذا اصول یہ ہے۔ کسی طبعی مقدار جس پر قوت k تک بڑھائی گئی ہو، میں کسری سہو، اس انفرادی مقدار میں کسری سہو کو قوت نما R سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے۔**

**مثال 2.11** Z میں کسری سہو معلوم کیجئے اگر $Z = A^4 B^{1/3} / CD^{3/2}$

**جواب** Z میں کسری سہو ہے : $\Delta Z/Z = 4\,(\Delta A/A) + (1/3)\,(\Delta B/B) + (\Delta C/C) + (3/2)(\Delta D/D)$

**مثال 2.12** ایک سادہ پینڈولم کے اہتزاز کا دور $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ہے۔ جس میں L کی پیمائش کی گئی قدر تقریباً 20.0cm ہے اور اس کی درستگی 1mm تک ہے۔ ایک گھڑی سے جس کا جز تجزیہ 1 s ہے، 100 اہتزاز کے لیے پیمائش کیا گیا وقت 90 سیکنڈ ہے۔ g کی قدر معلوم کرنے میں کتنی درستگی ہے؟

**جواب** $g = 4\pi^2\ L/T^2$

یہاں، $T = \dfrac{t}{n}$

اور، $\Delta T = \dfrac{\Delta t}{n}$

اس لیے

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta t}{t}$$

L اور t دونوں میں سہو، کم ترین شمار سہو ہیں۔ اس لیے

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta T}{T}$$

$$= \frac{0.1}{20.0} + 2\left(\frac{1}{90}\right) = 0.027$$

اس لیے، g میں فی صد سہو ہے:

$$100\frac{\Delta g}{g} = 100\left(\frac{\Delta L}{L}\right) + 2 \times 100\frac{\Delta T}{T}$$

$$= 3\%$$

## 2.7 بامعنی اعداد (SIGNIFICANT FIGURES)

جیسا کہ اوپر بتایا گیا ہر ایک پیمائش میں سہو شامل ہوتے ہیں۔ لہٰذا کسی بھی پیمائش کا نتیجہ اس طرح پیش کیا جانا چاہیے کہ یہ پیمائش کس حد تک دقیق ہے اس کی نشاندہی ہوجائے۔ عام طور پر کسی پیمائش کا پیش کیا گیا نتیجہ وہ عدد ہے جس میں اس عدد کے سبھی معتبر ہندسے اور پہلا غیر معتبر ہندسہ (غیر یقینی) شامل ہوتا ہے۔ کسی عدد کے معتبر ہندسوں اور شامل غیر یقینی ہندسے کو **بامعنی ہندسے (significant digits)** کہتے ہیں۔ اگر ہم کہیں کہ ایک سادہ پینڈولم کے اہتزاز کا دور 1.62 s ہے تو اس میں ہندسہ 1 اور 6 معتبر اور یقینی ہیں جب کہ ہندسہ 2 غیر یقینی ہے۔ لہٰذا، پیمائش کی گئی قدر میں تین بامعنی ہندسے ہیں۔ اگر پیمائش کے بعد کسی شے کی لمبائی 287.5 لکھی گئی ہے جس میں چار بامعنی ہندسے ہیں۔ اس عدد میں ہندسہ 2، 8، 7، یقینی ہیں جب کہ ہندسہ 5 غیر یقینی ہے۔ ظاہر ہے، پیمائش کے نتیجے میں بامعنی ہندسوں سے زیادہ ہندسہ لکھنا غیر ضروری اور گمراہ کن ہوگا کیونکہ یہ پیمائش کے دقیق ہونے کی حد (precision) کے بارے میں غلط تصور پیدا کرے گا۔

کسی بھی عدد میں بامعنی ہندسوں کی تعداد معلوم کرنے کے قاعدے درج ذیل مثالوں سے سمجھے جاسکتے ہیں۔ جیسا کہ پہلے ذکر کیا گیا کہ بامعنی ہندسے کسی پیمائش کی دقیق ہونے کی حد (باریکی) کی طرف اشارہ کرتے ہیں جو پیمائشی آلے کے کم ترین شمار (least count) پر منحصر ہوتی ہے۔ **کسی پیمائش میں مختلف اکائیوں کے انتخاب سے بھی بامعنی ہندسوں کی تعداد تبدیل نہیں ہوتی۔** یہ اہم تبصرہ درج اصولوں کی وضاحت کرتا ہے۔

(1) مثال کے لیے، لمبائی 2.308 cm میں چار بامعنی ہندسے ہیں۔ لیکن مختلف اکائیوں میں اس قدر کو علی الترتیب 0.02308 m یا 23.08 mm یا 23080 μm لکھا جاسکتا ہے۔

ان سبھی اعداد میں بامعنی ہندسوں کی تعداد چار ہے (ہندسے 2,3,0,8)۔ یہ ظاہر ہے کہ اعشاری نقطہ کے مقام کی بامعنی ہندسوں کی تعداد کے تعین میں کوئی اہمیت نہیں ہے۔ درج بالا مثال درج ذیل اصول فراہم کرتی ہے:

- سبھی غیر صفر ہندسے بامعنی ہیں۔
- کن ہی دو غیر صفر ہندسوں کے درمیان سبھی صفر بامعنی ہندسے ہیں چاہے اعشاریہ نقطہ کا کوئی بھی مقام ہو اور چاہے اعشاریہ نقطہ ہو یا نہ ہو۔
- **اگر کوئی عدد 1 سے چھوٹا ہو تو اعشاریہ نقطے کے داہنی جانب کے صفر جو پہلے غیر صفر ہندسے کے بائیں جانب ہیں، بامعنی ہندسے نہیں ہوتے ہیں۔** [0.002308 میں خط کشیدہ صفر بامعنی ہندسے نہیں ہیں]۔
- کسی بھی ایسے عدد میں جس میں اعشاریہ نقطہ نہوں ہو، ختمی یا پس رو **(terminal or trailing)** صفر بامعنی ہندسے نہیں ہوتے ہیں۔

[اس طرح 123 m = 12300 cm = 123000 mm میں تین بامعنی ہندسے ہیں۔ پس رو صفر بامعنی ہندسے نہیں ہیں۔ پھر بھی آپ اگلے اصول دیکھ سکتے ہیں]۔

- کسی بھی عدد میں جس میں اعشاری نقطہ ہو، پس رو صفر بامعنی ہندسے ہوتے ہیں۔

[جیسے اعداد 3.500 یا 0.06900 میں چار بامعنی ہندسے ہیں]۔

(2) پس رو صفر بامعنی ہندسے ہیں یا نہیں اس بارے میں غلط فہمی ہوسکتی ہے۔ مان لیجیے کسی شے کی لمبائی 4.700 m لکھی گئی ہے۔ اس مشاہدہ سے ظاہر ہے کہ یہاں صفر کا مقصد پیمائش کی درستگی ظاہر کرتا ہے لہٰذا یہاں یہ صفر بامعنی ہندسے ہیں۔ [اگر یہ صفر بامعنی ہندسے نہیں ہیں تو ان صفروں کو صاف طور پر لکھنا غیر ضروری ہے اور لکھی گئی پیمائش کو ہم 4.7 m لکھ سکتے ہیں]۔ اب اگر ہم اکائیوں میں تبدیلی کرتے ہیں تب،

4.700 m = 470.0 cm = 4700 mm = 0.004700 km

کیونکہ آخری سے پہلے والے عدد میں پس رو صفر بغیر اعشاریہ ہیں، یہاں ہم اوپر دیے گئے اصول (1) کی بنیاد پر، اعداد میں بامعنی ہندسوں کی تعداد دو بتائیں گے جب کہ اصل میں اس عدد میں بامعنی ہندسوں کی تعداد 4 ہے اور اکائیوں میں محض تبدیلی کردینے سے ہی کسی عدد میں بامعنی ہندسوں کی تعداد میں تبدیلی نہیں لائی جاسکتی ہے۔

(3) با معنی ہندسوں کے اعداد کے تعین میں اوپر بتائے گئے ابہام کو دور کرنے کا سب سے بہتر طریقہ ہے کہ ہر ایک پیائش کو سائنسی ترقیم (10 کی قوت) میں لکھا جائے۔ اس ترقیم میں ہر ایک عدد کو $a \times 10^b$ کے طور پر ظاہر کیا جاتا ہے

ہے جہاں $a$، 1 سے 10 کے درمیان کوئی عدد ہے اور $b$، 10 کا کوئی بھی مثبت یا منفی قوت نما (exponent) ہے۔ عدد کا ایک تقریبی تصور حاصل کرنے کے لیے، ہم عدد a کو 1 ($a<5$ کے لیے) یا 10 ($5<a<10$) کی تقریبی شکل میں ظاہر کرتے ہیں۔ اس طرح عدد کو تقریبی شکل میں $10^b$ کی صورت میں ظاہر کیا جاسکتا ہے، جس میں 10 کا قوت نما b، اس طبعی مقدار کا، عددی قدر کا درجہ (order of magnitude) کہلاتا ہے۔
جب صرف ایک تخمینہ درکار ہوتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ مقدار $10^b$ کے درجہ کی ہے۔ مثلاً، زمین کا قطر ($1.28\times10^7$ m)، $10^7$ m کے درجہ کا ہے، جس میں عددی قدر کا درجہ 7 ہے۔ ہائیڈروجن ایٹم کا قطر ($1.06\times10^{-10}$ m)، $10^{-10}$ m کے درجہ کا ہے، جس میں عددی قدر کا درجہ 10− ہے۔ زمین کا قطر، ہائیڈرجن ایٹم کے قطر سے 17 عددی قدر کے درجے زیادہ ہے۔
عام طور پر کسی بھی عدد میں اعشاریہ پہلے ہندسے کے بعد لکھا جاتا ہے جس سے اوپر بیان کیے گئے ابہام دور ہو جاتے ہیں:

$$4.700\ \text{m} = 4.700 \times 10^{2}\ \text{cm} = 4.700 \times 10^{3}\ \text{mm}$$

$$= 4.700 \times 10^{-3}\ \text{km}$$

یہاں با معنی ہندسوں کے تعین میں 10 کا پاور غیر اہم ہے۔ تاہم سائنسی ترقیم میں اساسی یا بنیادی عدد میں آنے والے سبھی صفر با معنی ہندسے ہیں۔ لہٰذا اوپر لکھے گئے اعداد میں سے ہر ایک عدد میں با معنی ہندسوں کی تعداد چار ہے۔

اس طرح سائنسی ترقیم میں بنیادی عدد $a$ میں پس رو صفر کے بارے میں کوئی ابہام پیدا نہیں ہوتا ہے۔ وہ ہمیشہ با معنی ہندسے ہیں۔

(4) کسی بھی پیائش کی رپورٹ کرنے میں سائنسی ترقیم ایک مثالی طریقہ ہے۔ لیکن اگر یہ طریقہ نہیں اپنایا جاتا ہے تو پہلی والی مثال میں اپنائے گئے اصول کو اپناتے ہیں:

- اگر دیے ہوئے بغیر اعشاریہ کے عدد 1 سے بڑے ہیں تو پس رو صفر با معنی ہندسے نہیں ہیں۔
- اعشاریہ والے عدد میں پس رو صفر بامعنی ہندسے ہیں۔

(5) کسی 1 سے چھوٹے عدد (جیسے 0.1250) میں اعشاریہ سے پہلے لکھا جانے والا صفر کبھی بھی با معنی ہندسہ نہیں ہوتا ہے۔ تاہم کسی پیائش میں ایسے اعداد کے آخر میں آنے والے صفر با معنی ہندسے ہوتے ہیں۔

(6) ضرب تقسیم کرنے والے ایسے جزء ضربی جو نہ تو تقریبی عدد ہیں اور نہ ہی پیائش کی گئی قدروں کو ظاہر کرنے والے عدد ہیں، قطعی (بالکل درست) ہوتے ہیں اور ان کے با معنی ہندسوں کی تعداد لامتناہی ہے۔ مثلاً، $r=d/2$ یا $s=2\pi r$ میں، جزء ضربی 2 ایک قطعی عدد (exact number) ہے اور اسے ضرورت کے مطابق 2.0، 2.00 یا 2.0000 لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح: $T = \frac{t}{n}$ میں، n ایک قطعی عدد ہے۔

### 2.7.1 با معنی اعداد کے ساتھ حسابی عمل کے لیے اصول
### (Rules for Arithmetic operation with significant figures)

کسی تحسیب کا نتیجہ جس میں مقداروں کی تقریبی پیائش کی گئی قدریں شامل ہیں (یعنی وہ قدر جن میں با معنی ہندسوں کے اعداد محدود ہیں) اسے اصلیت میں پیائش کی گئی قدروں کی عدم یقینی دکھانی چاہیے۔ یہ تحسیبی نتیجہ پیائش کی گئی ان قدروں سے جن پر نتیجہ مبنی ہے، زیادہ درست نہیں ہوسکتا ہے۔ لہٰذا کسی بھی نتیجے میں با معنی ہندسوں کی تعداد، بنیادی اعداد و شمار جن سے یہ حاصل کیا گیا ہے، سے زیادہ نہیں ہونا چاہیے۔ اگر کسی شے کی پیائش کی گئی کمیت، مان لیا کہ 4.237 g (چار با معنی ہندسے) اور اس کے پیائش کیے گئے حجم کی قدر $2.51\ \text{cm}^3$ ہو تو محض حسابی تقسیم کے ذریعہ اس کی کثافت $1.68804780876\ \text{g/cm}^3$ ہوگی۔ یہاں کثافت کی اس

قدر کو اتنی دقیق شکل میں (precision) لکھنا پوری طرح غیر متعلق یا بے محل ہوگا کیونکہ پیمائشیں جن پر کثافت کی قدر مبنی ہے، وہ اس کے مقابلے میں بہت کم دقیق ہیں ۔ بامعنی ہندسوں کے ساتھ حسابی عمل کے لیے مندرجہ ذیل اصول اس بات کو یقینی بناتے ہیں کہ کسی تحسیب کا آخری نتیجہ اتنا ہی دقیق ہو جتنی درآمد (input) دقیق ہیں، یعنی کہ، دونوں میں ہم آہنگی ہو۔

(1) اعداد کے ضرب یا تقسیم کرنے سے حاصل نتیجے میں صرف اتنے ہی با معنی ہندسے رکھنے چاہییں جتنے کہ سب سے کم بامعنی اعداد والے بنیادی عدد میں ہیں۔

لہٰذا مذکورہ بالا مثال میں کثافت کو تین بامعنی ہندسوں تک ہی لکھا جانا چاہیے۔

$$\text{کثافت} = \frac{4.237\ \text{g}}{2.51\ \text{cm}^3} = 1.69\ \text{g cm}^{-3}$$

اسی طرح، اگر روشنی کی چال $3 \times 10^8$ m/s (ایک بامعنی ہندسے) اور ایک سال (1 y = 365.25 d) میں $3.1557 \times 10^7$ s (پانچ بامعنی ہندسے) ہیں تو ایک نوری سال میں $9.47 \times 10^{15}$ m (تین بامعنی ہندسے) ہونگے۔

(2) اعداد کے جوڑنے یا تفریق کرنے سے حاصل آخری نتیجے میں اعشاریہ کے بعد اتنے ہی بامعنی ہندسے رکھنے چاہئیں جتنے کہ جوڑی یا تفریق کی جانے والی مقداروں سے اس عدد میں ہوں جس میں اعشاریہ کے سب سے کم مقام ہیں۔

مثال کے طور پر اعداد 436.32 g, 227.2 g اور 0.301 g کا حاصل جمع 663.821 g ہے۔ لیکن کم سے کم دقیق پیمائش (227.2 g) اعشاریہ کے صرف ایک مقام تک ہی درست ہے۔ لہٰذا آخری نتیجے کو 663.8 g تک پورا درج کیا جانا چاہیے۔

اسی طرح لمبائیوں میں فرق کو درج ذیل طرح سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$0.307\ \text{m} - 0.304\ \text{m} = 0.003\ \text{m} = 3 \times 10^{-3}\ \text{m}$$

خیال رہے کہ ہمیں اصول (1) جو ضرب اور تقسیم کے لیے لاگو ہوتا ہے اسے جمع کی مثال میں استعمال کر کے 664 g نہیں لکھنا چاہیے اور تفریق کی مثال میں بھی $3.00 \times 10^{-3}$ m نہیں لکھنا چاہیے۔ یہ پیمائش کتنی دقیق ہے اسے ٹھیک طرح سے ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ جوڑنے اور تفریق کرنے کے لیے اصول اعشاریہ کے مقام کی اصطلاح میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

### 2.7.2 غیر یقینی ہندسوں کی قریبی قدر لینا
### (Rounding off the Uncertain Digits)

اعداد، جن میں ایک سے زیادہ غیر یقینی ہندسے ہوتے ہیں، کی تحسیب کے نتیجہ کو قریب تر کیا جانا چاہیے۔ اعداد کے موزوں بامعنی ہندسوں تک قریب تر کرنے کے لیے اصول زیادہ تر حالات میں واضح ہیں۔ عدد 2.746 کو تین بامعنی ہندسوں تک قریب تر کر کے 2.75 لکھتے ہیں جب کہ عدد 2.743 کو 2.74 لکھا جائے گا۔ قرارداد کے مطابق اصول یہ ہے اگر بے معنی ہندسے (اس معاملے میں کشیدہ خط ہندسہ) 5 سے زیادہ ہے تو اس سے پہلے والے ہندسے میں **1** کا اضافہ کردیا جاتا ہے اور اگر بے معنی ہندسے **5** سے کم ہوتے ہیں تو پیش رو ہندسہ غیر تبدیل رکھا جاتا ہے۔ لیکن اگر کسی عدد جیسے 2.745 میں بے معنی ہندسہ 5 ہے، تو روایت کے مطابق اگر پیش رو ہندسہ جفت **(even)** ہے تو بے معنی ہندسے کو چھوڑ دیا جاتا ہے اور اگر یہ طاق **(odd)** ہے تو پیش رو ہندسے میں **1** کا اضافہ کردیتے ہیں۔ تب عدد 2.745 کو تین بامعنی ہندسوں تک قریب تر کرنے پر 2.74 حاصل ہوگا۔ دوسری طرف عدد 2.735 کو تین بامعنی ہندسوں تک قریب تر کرنے کے بعد 2.74 حاصل ہوتا ہے کیونکہ پیش رو ہندسہ طاق ہے۔

کسی بھی 'کثیر اقدامات پر مشتمل پیچیدہ تحسیب میں، درمیانی اقدامات میں بامعنی ہندسوں سے ایک زیادہ ہندسہ رکھنا چاہیے اور تحسیب کے آخر میں مناسب بامعنی ہندسوں تک قریب تر کردینا چاہیے۔ اسی طرح روشنی کی خلا میں چال جو کئی بامعنی ہندسوں تک معلوم ہے جیسے $2.99792458 \times 10^8$ m/s کو ایک تقریبی قدر $3 \times 10^8$ m/s تک قریب کردیتے ہیں جسے اکثر تحسیب میں استعمال کرتے ہیں۔ آخر میں خیال

رکھیں کہ فارمولوں میں جو قطعی اعداد (exact numbers) آتے ہیں جیسے $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ میں $2\pi$ میں با معنی ہندسوں کی تعداد بہت زیادہ (لا متناہی) ہے ۔ $\pi$ کی قدر (...3.1415926) لامحدود با معنی ہندسوں تک معلوم ہے لیکن ہم پیمائش کی گئی مقدار میں با معنی ہندسوں کی بنیاد پر $\pi$ کی قدر 3.142 یا 3.14 بھی لے سکتے ہیں۔

**مثال 2.13** کسی مکعب کے ہر ایک بازو کی پیمائش 7.203 m کی گئی ہے۔ موزوں با معنی ہندسوں تک مکعب کا کل سطح رقبہ اور حجم کیا ہے؟

**جواب** پیمائش کی گئی لمبائی میں با معنی ہندسوں کی تعداد 4 ہے۔ اس لیے تحسیب کیے گئے رقبے اور حجم کی قدر کو بھی 4 با معنی ہندسوں تک قریب تر کر دیا جانا چاہیے۔

مکعب کا سطح رقبہ $= 6(7.203)^2 m^2$

$= 311.299254\ m^2$

$= 311.3\ m^2$

مکعب کا حجم $= (7.203)^3\ m^2$

$= 373.714754\ m^3$

$= 373.7\ m^3$ ▶

**مثال 2.14** کسی شے کے 5.74g کا حجم $1.2\ cm^3$ ہے۔ اس کی کثافت کو با معنی ہندسوں کو ذہن میں رکھتے ہوئے ظاہر کیجیے۔

**جواب** کمیت میں 3 با معنی ہندسے ہیں جب کہ حجم میں صرف 2 با معنی ہندسے ہیں۔ اس لیے کثافت کو صرف 2 با معنی ہندسوں تک ظاہر کیا جانا چاہیے۔

کثافت $= 5.74/1.2\ g\ cm^{-3}$

$= 4.8\ g\ cm^{-3}$

### 2.7.3 حسابی عملیات کے نتائج میں عدم یقینی کے تعین کے لیے اصول (Rules for determining the uncertainty in the results of Arithmetic operations)

حسابی عملیات میں اعداد کی عدم یقینی کے تعین کے اصول مندرجہ ذیل مثالوں سے سمجھے جا سکتے ہیں۔

(1) اگر کسی پتلی مستطیل نما شیٹ کی لمبائی اور چوڑائی بالترتیب 16.2 cm اور 10.1 cm پیمائش کی گئی ہے جس میں ہر ایک پیمائش میں تین با معنی ہندسے ہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ حقیقی لمبائی $l$ اور چوڑائی b کو مندرجہ ذیل طریقے سے لکھا جا سکتا ہے۔

$$l = 16.2 \pm 0.1\ cm$$
$$= 16.2\ cm \pm 0.6\%$$

اسی طرح چوڑائی b کو لکھا جا سکتا ہے:

$$b = 10.1 \pm 0.1 cm$$
$$= 10.1\ cm \pm 1\%$$

دو (یا دو سے زیادہ) تجرباتی قدروں کے حاصل ضرب میں سہو، سہو کے اجتماع کا قاعدہ استعمال کرتے ہوئے، ہوگا

$$l\,b = 163.62\ cm^2 \pm 1.6\%$$
$$= 163.62\ cm^2 \pm 2.6\%\ cm^2$$

لہٰذا آخری نتیجہ ہوگا $lb = 164 \pm 3\ cm^2$

یہاں، $3\ cm^2$ مستطیل نما شیٹ کے رقبے کے تخمینہ میں عدم یقینی یا سہو ہے۔

(2) اگر کسی تجرباتی اعداد و شمار کے مجموعے میں $n$ بامعنی ہندسے متعین ہیں تو اعداد و شمار کے اجتماع سے حاصل نتیجہ بھی $n$ با معنی ہندسوں تک جائز ہوگا۔

تاہم، اگر اعداد نفی کیے جاتے ہیں تو با معنی ہندسوں کی تعداد کم ہو سکتی ہے۔

مثال کے لیے، $12.9\ g - 7.06\ g$ دونوں تین با معنی ہندسوں تک مخصوص ہیں لیکن ان کے فرق کو 5.84 g نہیں لکھا جاسکتا بلکہ صرف 5.8 g لکھا جاسکتا ہے کیونکہ تفریق یا جوڑنے میں عدم یقینی کا اجتماع مختلف طریقے سے ہوتا ہے (کسی جمع کیے جانے والے یا تفریق کیے جانے والے اعداد میں کم سے کم با معنی ہندسوں کی تعداد کی جگہ ان میں اعشاریہ کے بعد کم سے کم با معنی ہندسوں کی تعداد کی بنیاد پر)۔

(3) ایک عدد، جس میں بامعنی ہندسوں کی تعداد **'n'** متعین ہو، اس کا نسبتی سھو نہ صرف **n** کے بلکہ خود عدد کے بھی تابع ہوتا ھے۔

مثال کے لیے، 1.02 g کی کمیت کی پیمائش میں درستگی ± 0.01 g کی ہے جب کہ دوسری پیمائش 9.89 g بھی ± 0.01 g تک درست ہے۔

لہٰذا 1.02 g میں کسری سہو ہے :

$$= (\pm 0.01/1.02) \times 100\%$$
$$= \pm 1\%$$

دوسری طرف 9.89 g میں کسری سہو ہے :

$$= (\pm 0.005/9.89) \times 100\%$$
$$= \pm 0.1\%$$

آخر میں خیال رہے کہ **متعدد اقدام پر مشتمل تحسیب میں درمیانی نتائج، کی تحسیب اس میں شامل پیمانوں میں کم سے کم دقیق پیمائشی ہندسوں کی تعداد کی نسبت ایک زائد بامعنی ہندسے تک کی جانی چاہیے۔** پہلے یہ آنکڑوں کے ذریعہ توجیہہ کر لی جانی چاہیے اور تب ہی حسابی عملیات کو پورا کرسکتے ہیں ورنہ قریبی سہو (rounding error) ہوسکتا ہے۔ مثال کے لیے، 9.58 کے مقلوب کی اگر یکساں (اس صورت میں تین) بامعنی ہندسوں تک تحسیب کی جائے اور پھر تقریبی عدد حاصل کیا جائے تو وہ عدد 0.104 ہے۔ لیکن تین بامعنی ہندسوں تک تحسیب کیا گیا 0.104 کا مقلوب 9.62 ہے۔ لیکن اگر ہم نے $\frac{1}{9.58} = 0.1044$ لکھا ہوتا اور پھر 0.1044 کا مقلوب تین با معنی ہندسوں تک تحسیب کرتے تو ہمیں اصل قدر 9.58 دوبارہ حاصل ہوجاتی۔

مذکورہ بالا مثال پیچیدہ متعدد قدم پر مشتمل تحسیب میں درمیانی قدموں میں ایک زاید ہندسہ (کم سے کم دقیق پیمائش میں ہندسوں کی تعداد کی نسبت) رکھنے کے تصور کا جواز پیش کرتی ہے جس سے کہ اعداد کو قریب تر کرنے کے عمل میں اس مزید سہو سے بچاجاسکے۔

## 2.8 طبیعی مقداروں کے ابعاد (DIMENSIONS OF PHYSICAL QUANTITIES)

کسی بھی طبیعی مقدار کی طبع کو بیان کرنے کے لیے اس کے ابعاد کی ضرورت پڑتی ہے۔ ماخوذ اکائیوں کے ذریعے ظاہر کی جانے والی سب ہی طبعی مقداریں سات بنیادی یا اساسی مقداروں کے کسی اجتماع کی شکل میں ظاہر کی جاسکتی ہیں۔ ہم ان سات طبیعی مقداروں کو طبیعی دنیا کے سات ابعاد کہتے ہیں، جنہیں مربع بریکٹ [ ] میں ظاہر کرتے ہیں۔ اس طرح لمبائی کا بعُد [L]، کمیت کا [M]، وقت کا [T]، برقی رو کا [A]، حرحرکیاتی درجۂ حرارت کا [K]، درخشانی شدت کا [cd] اور شے کی مقدار کا [mol] ہیں۔

**کسی طبیعی مقدار کے ابعاد ان قوت نماؤں کو کھتے ھیں جنھیں اس مقدار کی اکائی کو ظاھر کرنے کے لیے بنیادی مقداروں پر چڑھاتے ھیں۔** غور کیجیے کہ کسی مقدار کو مربع بریکٹ [ ] میں رکھنے سے مراد ہے کہ ہم اس مقدار **کے ابعاد سے** متعلق عمل کر رہے ہیں۔

میکانیات میں، سبھی طبیعی مقداروں کے ابعاد [L]، [M]، اور [T] کی اصطلاح میں ظاہر کیے جاسکتے ہیں۔ مثال کے لیے کسی شے کے ذریعہ گھیرے گئے حجم کو اس کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی یا تین لمبائیوں کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ لہٰذا حجم کے ابعاد $[L] \times [L] \times [L] = [L]^3 = [L^3]$ ہیں۔ چونکہ حجم، کمیت اور وقت پر منحصر نہیں ہوتا ہے لہٰذا یہ کہا جاسکتا ہے کہ اس کی کمیت، کا بعد صفر: $[M^0]$، اس کے وقت کا بُعد صفر: $[T^0]$ اور لمبائی کے ابعاد تین $[L^3]$ ہیں۔

اس طرح، قوت، جو کمیت اور اسراع (acceleration) کا حاصل ضرب ہے، کے ابعاد کو اس طرح حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{قوت} = \text{کمیت} \times \text{اسراع}$$

$$= \text{کمیت} \times \frac{\text{لمبائی}}{(\text{وقت})^2}$$

قوت کے ابعاد ہیں: $\frac{[M][L]}{[T]^2} = [MLT^{-2}]$

اس طرح قوت میں کمیت کا 1 بعد، لمبائی کا 1 بعد اور وقت کے (2−) ابعاد ہیں۔ دیگر سبھی بنیادی مقداروں کے ابعاد صفر ہیں۔

غور کریں کہ اس طرح کے اظہار میں مقداروں کی عددی قدروں کو شامل نہیں کیا جاتا۔ اس میں طبیعی مقدار کی خاصیت کی قسم کو شامل کیا جاتا ہے۔ لہٰذا اس ضمن میں رفتار میں تبدیلی، ابتدائی رفتار، اوسط رفتار، آخری رفتار اور چال سبھی مترادف ہیں۔ کیونکہ یہ سبھی مقداریں $\frac{\text{دوری}}{\text{وقت}}$ کی اصطلاح میں ظاہر کی جاسکتی ہیں، لہٰذا ان کے ابعاد $\frac{[L]}{[T]}$ یا $[LT^{-1}]$ ہیں۔

## 2.9 ابعادی فارمولے اور ابعادی مساواتیں (DIMENSIONAL FORMULAE AND DIMENSIONAL EQUATIONS)

کسی دی ہوئی طبیعی مقدار کا ابعادی فارمولا (dimensional formula) وہ اظہار ہے جو یہ دکھاتا ہے کہ کسی طبیعی مقدار کے ابعاد کی کون کون سی بنیادی مقداریں اور کس طرح نمایندگی کر رہی ہیں۔ مثال کے لیے حجم، چال یا رفتار، اسراع اور کمیت۔ کثافت کے ابعادی فارمولے بالترتیب $[M^1 L^{-3} T^o], [M^o LT^{-2}], [M^o LT^{-2}], [M^o L^{-3} T^o]$ ہیں۔

وہ مساوات جو طبیعی مقدار کو اس کے ابعادی فارمولے سے مساوی کرنے پر حاصل ہوتی ہے اس طبیعی مقدار کی ابعادی مساوات (dimensional equation) کہلاتی ہے۔ لہٰذا ابعادی مساوات وہ مساوات ہیں جو کسی طبیعی مقدار کے ابعاد کو بنیادی مقداروں کی شکل میں ظاہر کرتی ہیں۔ مثال کے لیے، حجم [V]، چال [v]، قوت [F] اور کمیت کثافت [$\rho$] کی ابعادی مساواتیں درج ذیل طور پر ظاہر کی جاسکتی ہیں۔

$$[V] = [M^o L^3 T^o]$$
$$[v] = [M^o LT^{-1}]$$
$$[F] = [MLT^2]$$
$$[\rho] = [M L^{-3} T^o]$$

ابعادی مساوات طبیعی مقداروں کے درمیان رشتوں کی نمائندگی کرنے والی مساوات سے حاصل کی جاسکتی ہے۔ بہت ساری اور طرح طرح کی طبیعی مقداروں کے ابعادی فارمولے جو دیگر مقداروں کے درمیان رشتوں کی نمایندگی کرنے والی مساواتوں سے اخذ کیے گئے ہیں اور بنیادی مقداروں کی اصطلاح میں ظاہر کیے گئے ہیں، آپ کی رہنمائی اور فوری حوالے کے لیے ضمیمہ 9 میں دیئے گئے ہیں۔

## 2.10 ابعادی تجزیہ اور اس کا اطلاق (استعمال) (DIMENSIONAL ANALYSIS AND ITS APPLICATIONS)

ابعاد کے تصورات کو پہچاننا جو ابعاد کے طبیعی برتاؤ کے بیان کی رہنمائی کرتا ہے، بنیادی اہمیت کا حامل ہے کیونکہ یہ بتاتا ہے کہ صرف ایک یکساں ابعاد والی طبیعی مقداریں جمع یا نفی کی جاسکتی ہیں۔ ابعادی تجزیہ کا تفصیلی علم بعض طبیعی مقداروں کے درمیان متعین رشتوں کے استخراج (deducing) میں مدد کرتا ہے اور مختلف حسابی عبارتوں کے اشتقاق، صحت و درستی اور ابعادی ہم آہنگی یا متجانس ہونے کی جانچ کرنے میں مددگار ہے۔ جب دو یا زیادہ طبیعی مقداروں کی عددی قدروں کو ضرب کیا جاتا ہے تو ان کی اکائیوں کو عام الجبرا کی علامتوں کی طرح استعمال کیا جانا چاہیے۔ ہم شمار کنندہ اور نسب نما میں مماثل اکائیوں کو رد کرسکتے ہیں۔ یہ اصول کسی طبیعی مقدار کی ابعادوں کے لیے بھی صحیح ہے۔ اسی طرح، کسی ریاضیاتی مساوات کے دونوں جانب علامتوں کے ذریعہ نمایندگی کی گئی طبیعی مقداروں کے ابعاد یکساں ہونا چاہیں۔

### 2.10.1 مساواتوں کی ابعادی ہم آہنگی کی جانچ (Checking the Dimensional Consistency of Equations)

کسی بھی طبیعی مقداروں کی قدریں تبھی جمع یا تفریق کی جاسکتی ہیں اگر ان کے ابعاد یکساں ہوں۔ یعنی ہم صرف یکساں طبیعی مقداروں کو ہی جمع یا نفی کر سکتے ہیں۔ اس طرح رفتار کو قوت کے ساتھ یا برقی رو کو درجہ حرارت سے جوڑا یا نفی نہیں کیا جاسکتا۔ اس سہل اصول کو ابعاد کی متجانسیت کا اصول **(the principle of homogeneity of dimensions)** کہا جاتا ہے۔ لہٰذا کسی مساوات کی درستگی کی جانچ کے لیے اس مساوات میں ابعاد کی متجانسیت کا اصول نہایت مفید ہے۔ اگر کسی مساوات میں سارے ارکان (terms) یکساں ابعاد کے نہیں ہیں تو مساوات غلط ہے۔ لہٰذا اس طرح جب ہم کسی شے کی لمبائی (یا دوری) کی عبارت اخذ کرتے ہیں تو ریاضی کے شروعاتی رشتے میں آنے والی علامتوں کو ذہن میں رکھے بغیر، جب سبھی ابعاد کو سادہ بنایا جاتا ہے تو سہل کرنے کے بعد حاصل ابعاد، لمبائی کے ابعاد ہی ہونا چاہئیں۔ اسی طرح اگر ہم چال (speed) کی مساوات اخذ کرتے ہیں تو مساوات کے دونوں جانب کی ابعاد سہل کرنے کے بعد، $\frac{\text{دوری}}{\text{وقت}}$ یا $[L\ T^{-1}]$ ہی ہونا چاہئیں۔

اگر کسی مساوات کے صحیح ہونے میں شبہہ ہو تو ابعادی طریقہ (dimensional method) اس مساوات کی ہم آہنگی کی جانچ کے لیے ایک ابتدائی جانچ ہے لیکن ابعادی ہم آہنگی کسی مساوات کے صحیح ہونے کی ضمانت نہیں دیتی۔ یہ غیر ابعادی مقداروں یا تفاعلوں کی حد تک غیر یقینی ہے۔ ٹرگنومیٹریائی (trigonometric)، لوگارتمی اور قوت نمائی (exponential) وغیرہ جیسے مخصوص تفاعلات (functions) کے حامل زاویہ یقینی طور پر غیر ابعادی ہونے چاہئیں۔ اسی طرح خالص عدد، یکساں طبیعی مقداروں کی نسبت جیسے زاویے، تناسب (لمبائی/لمبائی)، انعطاف اشاریہ (refractive index): $\frac{\text{(خلا میں روشنی کی چال)}}{\text{وسیلے میں روشنی کی چال}}$ وغیرہ غیر ابعادی ہیں۔

آیئے ہم درج ذیل مساوات کی ابعادی ہم آہنگی یا متجانسیت کی جانچ کریں،

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

جہاں کسی شے یا ذرے کے ذریعہ $t$ وقت میں چلی گئی دوری $x$ ہے جو $t = o$ پر $x_0$ کے مقام سے ابتدائی رفتار $v_0$ سے حرکت کی سمت میں یکساں اسراع $a$ سے چلنا شروع کرتی ہے۔

دونوں جانب کے رکن کے ابعاد اس طرح ہیں۔

$$[x] = [L]$$

$$[x_0] = [L]$$

$$[v_0\, t] = [L\ T^{-1}]\ [T] = [L]$$

$$[1/2\ a\, t^2] = [L\ T^{-2}]\ [T^2] = [L]$$

کیونکہ اس مساوات میں دائیں جانب کے رکن کے ابعاد لمبائی کے ابعاد ہیں جو بائیں جانب کے رکن کے ابعاد ہیں لہٰذا ابعادی طور پر یہ مساوات صحیح ہے۔

یہاں یہ غور کرنے کی بات ہے کہ ابعاد کی ہم آہنگی کی جانچ اکائیوں کی ہم آہنگی جانچ کے علاوہ کچھ نہیں بتاتی ہے لیکن اس کا فائدہ یہ ہے کہ ہم کسی مخصوص اکائی کے انتخاب کے لیے مجبور نہیں ہیں اور نہ ہمیں اکائیوں کے اضعاف اور اجزائے ضربی (factor multiple) کے درمیان بدل کی فکر کرنے کی ضرورت ہے۔ یہاں یہ بھی غور کرنے کی بات ہے کہ اگر کوئی مساوات اس ہم آہنگی کی جانچ میں کھری نہیں اُترتی ہے تو وہ غلط ثابت ہو جاتی ہے، لیکن اگر وہ جانچ میں کھری اُترتی ہے تو اس سے وہ صحیح ثابت نہیں ہو جاتی ہے۔ لہٰذا کوئی ابعادی طور پر صحیح مساوات لازمی

طور پر درست مساوات نہیں ہوتی جب کہ ابعادی طور پر غیر ہم آہنگ مساوات غلط ہوتی ہے۔

**مثال 2.15** اس مساوات پر غور کرتے ہیں

$$\frac{1}{2}\, mv^2 = mgh$$

جہاں m شے کی کمیت ہے، $v$ اس کی رفتار ہے، $g$ ارضی کشش کے سبب اسراع ہے اور $h$ اونچائی ہے۔ یہ پتہ لگائیے کہ کیا یہ مساوات ابعادی طور پر درست ہے۔

**جواب** LHS (بائیں جانب) کے ابعاد ہیں

$$[M]\,[LT^{-1}]^2\,[L] = [M][L^2\,T^{-2}]$$
$$= [ML^2\,T^{-2}]$$

RHS (دائیں جانب) کے ابعاد ہیں

$$[M]\;[LT^{-2}]\;[L] = [M][L^2\,T^{-2}]$$
$$= [ML^2\,T^{-2}]$$

دونوں جانب کی ابعاد یکساں ہیں اور اس لیے ابعادی طور پر مساوات صحیح ہے۔

**مثال 2.16** توانائی کی SI اکائی $J = kg\ m^2\ s^{-2}$، چال $v$ کی $ms^{-1}$ اور اسراع $a$ کی $ms^{-2}$ ہے۔ نیچے دیے گئے حرکی توانائی (K.E) کے فارمولوں میں سے آپ کس کس کو ابعادی دلیلوں کے ذریعہ غلط بتائیں گے؟ (m شے کی کمیت ہے)

(a) $K = m^2\, v^3$

(b) $K = (1/2)\, mv^2$

(c) $K = m\, a$

(d) $K = (3/16)\, mv^2$

(e) $K = (1/2)\, mv^2 + m\, a$

**جواب** ہر صحیح فارمولے یا مساوات کے دونوں جانب کے ابعاد یکساں ہونے چاہئیں اور پھر صرف انہیں مقداروں کو جوڑا یا نفی کیا جا سکتا ہے جن کے طبیعی ابعاد یکساں ہوتے ہیں۔ دائیں جانب کی مقدار کے ابعاد (a) کے لیے $[M^2\ L^3\ T^{-3}]$، (b) اور (d) کے لیے $[ML^2\ T^{-2}]$، (c) کے لیے $[MLT^{-2}]$ ہیں۔ مساوات (e) کے دائیں جانب کے کوئی مناسب ابعاد نہیں ہیں کیونکہ اس میں مختلف ابعاد کی دو مقداروں کو جوڑا گیا ہے۔ چونکہ K کے ابعاد ہیں $[ML^2\ T^{-2}]$ اس لیے فارمولا (a)، (c) اور (e) غلط ہیں۔ یہ نوٹ کیجیے کہ ابعادی دلیلوں سے یہ پتہ نہیں لگتا کہ (b) یا (d) میں کون سا فارمولا صحیح ہے۔ اس کے لیے حرکی توانائی کی حقیقی تعریف کو دیکھنا پڑے گا (باب 6 دیکھیں)۔ حرکی توانائی کے لیے صحیح فارمولا (b) میں دیا گیا ہے۔

### 2.10.2 طبعی مقداروں کے درمیان رشتہ اخذ کرنا (Deducing Relation among the Physical Quantities)

کبھی کبھی ابعادی طریقہ طبیعی مقداروں کے درمیان رشتہ اخذ کرنے کے لیے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اس کے لیے ہمیں یہ معلوم ہونا چاہیے کہ دی ہوئی طبیعی مقدار کن کن مقداروں کے تابع ہے۔ آیئے، ہم درج ذیل مثال پر غور کریں۔

**مثال 2.17** کسی سادہ پینڈولم پر غور کیجیے۔ فرض کیجیے کہ سادہ پینڈولم کے اہتزاز کا دور اس کی لمبائی، باب کی کمیت اور ارضی کشش کے اسراع کے تابع ہوتا ہے۔ اس کے اہتزاز کے دور کے لیے ریاضیائی عبارت، ابعاد کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے، حاصل کیجیے

**جواب** اگر دوری وقت T کے $l$، g اور m کے حاصل ضرب کے تابع ہونے کو مندرجہ ذیل طور پر لکھا جا سکتا ہے:

$$T = k\, l^x\, g^y\, m^z$$

جہاں k ایک غیر ابعادی مستقلہ ہے اور $x$، $y$ اور $z$ قوت نما ہیں۔ دونوں طرف ابعاد ملاحظہ کرتے ہوئے، ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$[L^o\ M^o\ T^1] = [L^1]^x\,[LT^{-2}]^y\,[M^1]^2$$
$$= L^{x+y}\,T^{-2y}\,M^z$$

دونوں طرف ابعاد مساوی کرتے ہوئے؛ ہمیں حاصل ہوتا ہے :

$$x + y = 0;\ -2y = 1\ \ z = 0$$

اس طرح :

$$x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$$

اور

$$z = 0$$

تب،

$$T = k\, l^{1/2}\ g^{-1/2}$$

یا

$$T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$$

نوٹ کریں کہ، مستقلہ k کی قدر ابعادی طریقے سے حاصل نہیں کی جاسکتی۔ اگر اس فارمولے کی دائیں سمت کو کسی بھی عدد سے ضرب کردیا جائے تو یہاں کوئی فرق نہیں پڑے گا، کیونکہ اس سے ابعاد متاثر نہیں ہوتے۔ دراصل، $k = 2\pi$، اس طرح : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

ایسی طبعی مقداریں، جو ایک دوسرے کے تابع ہوں، ان کے درمیان رشتہ حاصل کرنے کے لیے ابعادی طریقہ ایک کارآمد ذریعہ ہے۔ لیکن اس طریقے سے غیر ابعادی مستقلے نہیں حاصل کیے جاسکتے۔ ابعادی طریقہ مساوات میں صرف ابعادی درستی کی جانچ کرسکتا ہے لیکن اس کے ذریعے مساوات میں شامل طبعی مقداروں کا قطعی رشتہ نہیں حاصل کیا جاسکتا۔ یہ یکساں ابعاد والی طبعی مقداروں میں فرق نہیں کرسکتا۔

اس باب کے آخر میں دیے گئے کئی مشقی سوالات، ابعادی تجزیہ میں مہارت پیدا کرنے میں آپ کی مدد کریں گے۔

## خلاصہ

1۔ علم طبیعیات، طبیعی مقداروں کی پیمائش پر مبنی ایک مقداری سائنس ہے۔ کچھ مخصوص طبیعی مقداروں کو [ لمبائی، کمیت، وقت، برقی رو، حرحرکیاتی درجہ حرارت، شے کی مقدار اور درخشاں شدت (luminous intensity) ] بنیادی یا اساسی مقداروں کے بہ طور منتخب کیا گیا ہے۔

2۔ ہر ایک بنیادی مقدار کی تعریف کسی بنیادی معیاری حوالہ کی اصطلاح میں کی گئی ہے۔ جسے اختیاری طور پر منتخب لیکن مناسب طور پر معیار بند کیا گیا ہے۔ یہ معیاری حوالہ اکائی ہوتی ہیں (جیسے میٹر، کلوگرام، سیکنڈ، ایمپیر، کیلون، مول اور کینڈیلا)۔ بنیادی مقداروں کے لیے منتخب کی گئی اکائیوں کو بنیادی اکائی کہا جاتا ہے۔

3۔ بنیادی مقداروں سے ماخوذ دیگر طبیعی مقداروں کو بنیادی اکائیوں کے مجموعے کے طور پر ظاہر کرسکتے ہیں جنہیں ماخوذ اکائی کہا جاتا ہے۔ بنیادی اور ماخوذ دونوں اکائیوں کے مکمل سیٹ کو اکائیوں کا نظام کہا جاتا ہے۔

4۔ سات بنیادی اکائیوں پر مبنی اکائیوں کا بین الاقوامی نظام (SI) آج کل بین الاقوامی سطح پر منظور شدہ نظام ہے۔ یہ نظام پوری دنیا میں بڑے پیمانے پر استعمال کیا جاتا ہے۔

5۔ بنیادی مقداروں اور ماخوذ مقداروں سے حاصل سبھی طبیعی پیمائشوں میں SI اکائیوں کا استعمال کیا جاتا ہے۔ کچھ ماخوذ اکائیوں کو SI اکائیوں کے ذریعے خصوصی ناموں (جیسے جول، نیوٹن، واٹ وغیرہ) سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔

6۔ SI اکائیوں کی معین (well defined) اور بین الاقوامی سطح پر تسلیم شدہ اکائی علامات ہیں جیسے میٹر کے لیے m، کلوگرام کے لیے kg، سیکنڈ کے لیے s، ایمپیر کے لیے A، نیوٹن کے لیے N وغیرہ۔

7۔ اکثر چھوٹی و بڑی مقداروں کی طبیعی پیمائشوں کو سائنسی ترقیم میں 10 کی قوت کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ پیمائش کی علامتوں اور ہندسی تحسیب کی آسانی کے لیے سائنسی علامتوں اور سابقوں (prefixes) کا استعمال کیا جاتا ہے، جن سے یہ نشاندہی بھی ہوتی ہے کہ اعداد کتنے دقیق ہیں۔

8۔ طبیعی مقداروں کی ترقیم، SI اکائیوں اور کچھ دیگر اکائیوں کے استعمال، طبیعی مقداروں اور پیمائشوں کو مناسب طور پر ظاہر کرنے میں سابقوں کے استعمال کے لیے کچھ عام اصولوں اور ہدایات کی پابندی کرنی چاہیے۔

9۔ کسی بھی طبیعی مقدار کی تحسیب میں اس کی مطلوبہ اکائیوں کو حاصل کرنے کے لیے شامل ماخوذ مقداروں کی اکائیوں کو الجبری مقداروں کی طرح سمجھنا چاہیے۔

10۔ طبیعی مقداروں کی پیمائش کے لیے براہ راست اور بالواسطہ دونوں طریقوں کا استعمال کیا جاسکتا ہے۔ پیمائش کی گئی مقداروں کے نتیجے کے اظہار مندرجہ ذیل باتوں کا بھی خیال رکھا جانا چاہیے: پیمائش کے آلات کی درستی صحت (Accuracy) (ii) پیمائش کتنی دقیق (Precise) ہے (iii) پیمائش میں ہونے والے سہو

11۔ پیمائش کی گئی اور تحسیب کی گئی مقداروں میں صرف مناسب بامعنی ہندسوں کو ہی رکھنا چاہیے۔ کسی بھی عدد میں بامعنی ہندسوں کی تعداد کا تعین، ان سے حسابی فعل (arithmetic operation) اور غیر یقینی ہندسوں کو قریب تر کرنے کے اصولوں کی پابندی کرنی چاہیے۔

12۔ بنیادی مقداروں کے ابعاد اور ان ابعادوں کے مجموعے طبیعی مقداروں کی فطرت بیان کرتے ہیں۔ مساوات کی ابعادی ہم آہنگی جانچ اور طبیعی مقداروں میں رشتہ قائم کرنے کے لیے ابعادی تجزیہ کا استعمال کرنا چاہیے۔ کوئی ابعادی طور پر ہم آہنگ مساوات حقیقت میں صحیح ہو، ضروری نہیں ہے لیکن ابعادی طور پر غلط یا غیر ہم آہنگ مساوات غلط ہی ہوگی۔

## مشق

نوٹ : عددی جوابات لکھتے وقت، بامعنی ہندسوں کا خیال رکھیے

**2.1** خالی جگہوں کو بھریئے:

(a) کسی 1 cm ضلع والے مکعب کا حجم ..........$m^3$ کے برابر ہے۔

(b) کسی 2 cm نصف قطر اور 10 cm اونچائی والے ٹھوس اسطوانہ کی سطح کا رقبہ $(mm)^2$ .......... کے برابر ہے۔

(c) کوئی گاڑی 18 km/h کی رفتار سے چل رہی ہے تو یہ 1s میں m.......... کی دوری طے کرے گی۔

(d) سیسے کی نسبتی کثافت 11.3 ہے۔ اس کی کثافت $g\ cm^{-3}$ ........... یا $kg\ m^{-3}$ ........... ہے۔

**2.2** خالی جگہوں کو اکائیوں کی مناسب تبدیلی کے ذریعہ بھریئے :

(a) $1\ kg\ m^2\ s^{-2} = ......... g\ cm^2\ s^{-2}$

(b) $1\ m = ........ 1y$

(c) $3\ m\ s^{-2} = ........ km\ h^{-2}$

(d) $G = 6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2\ (kg)^{-2} = ........... (cm)^3\ s^{-2}\ g^{-1}$

**2.3** حرارت (بہتی ہوئی توانائی) کی اکائی کیلوری ہے اور تقریباً 4.2 J کے برابر ہے جہاں $1J=1kgm^2s^{-2}$ - مان لیجیے ہم اکائیوں کے کسی ایسے نظام کا استعمال کرتے ہیں جس میں کمیت کی اکائی α kg کے برابر ہے، لمبائی کی اکائی β m کے برابر ہے، وقت کی اکائی γ s کے برابر ہے۔ یہ ظاہر کیجیے کہ نئی اکائیوں کی بنیاد پر کیلوری کی عددی قدر $4.2\ \alpha^{-1}\ \beta^{-2}\ \gamma^2$ ہے۔

**2.4** اس بیان کی واضح تشریح کیجیے:

''موازنہ کے لیے معیار کی صراحت کے بغیر کسی ابعادی مقدار کو 'بڑا' یا 'چھوٹا' کہنا بے معنی ہے۔'' اسے ذہن میں رکھتے ہوئے نیچے دیئے گئے بیانوں کو جہاں کہیں بھی ضروری ہو، دوسرے لفظوں میں ظاہر کیجیے:

(a) ایٹم بہت چھوٹی شے ہوتی ہے۔

(b) جیٹ ہوائی جہاز نہایت تیز رفتار ہے۔

(c) مشتری (Jupiter) کی کمیت بہت زیادہ ہے۔

(d) اس کمرے کے اندر ہوا میں سالموں کی تعداد بہت زیادہ ہے۔

(e) الیکٹران کے مقابلے پروٹان بہت بھاری ہوتا ہے۔

(f) آواز کی رفتار روشنی کی رفتار سے بہت ہی کم ہوتی ہے۔

**2.5** لمبائی کی کوئی نئی اکائی منتخب کی گئی ہے تاکہ خلا میں روشنی کی چال کی قدر 1 (ایک اکائی) ہو۔ نئی اکائی کی بنیاد پر سورج اور زمین کے درمیان فاصلہ کتنا ہوگا، اگر روشنی اس فاصلے کو طے کرنے میں 8 منٹ اور 20 سیکنڈ لگائے؟

**2.6** لمبائی کی پیمائش کے لیے درج ذیل میں سے کون سا سب سے زیادہ دقیق (Precise) ہے

(a) ایک ورنیر کیلیپرس جس کے ورنیر پیمانے پر 20 نشان ہیں۔

(b) ایک اسکروگیج جس کی چوڑی فصل (pitch) 1 mm اور دائری پیمانے پر 100 نشان ہیں۔

(c) کوئی نوری آلہ جو لمبائی کی پیمائش روشنی کی طول لہر کی حد تک کرسکتا ہے۔

**2.7** کوئی طالب علم 100 تکبیر (magnification) کے ایک مائیکرواسکوپ (خوردبین) کے ذریعہ دیکھ کر انسان کے بال کی موٹائی کی پیمائش کرتا ہے۔ وہ 20 بار مشاہدہ کرتا ہے اور اسے معلوم ہوتا ہے کہ خوردبین کے نظر خطہ (field view) میں بال کی اوسط موٹائی 3.5 mm ہے۔ بال کی موٹائی کے بارے میں کیا تخمینہ ہے؟

**2.8** درج ذیل کے جواب دیجیے :

(a) آپ کو ایک دھاگہ اور میٹر پیمانہ دیا جاتا ہے۔ آپ دھاگے کے قطر کا تخمینہ کس طرح لگائیں گے؟

(b) ایک اسکرو گیج کی چوڑی فصل 1.00 mm ہے اور اس کے دائری پیمانے پر 200 نشان ہیں۔ کیا آپ یہ سوچتے ہیں کہ دائری پیمانے پر نشانوں کی تعداد اختیاری طور پر بڑھا دینے پر اسکرو گیج کی درستگی میں کتنا بھی اضافہ کرنا ممکن ہے؟

(c) ورنیر کیلیپرس کے ذریعہ پیتل کی کسی پتلی چھڑ کے اوسط قطر کی پیمائش کی جاتی ہے۔ صرف 5 پیمائشوں کے سیٹ کے مقابلے میں قطر (diameter) کی 100 پیمائشوں کے سیٹ کے ذریعہ زیادہ معتبر اندازہ حاصل ہونے کا امکان کیوں ہے؟

**2.9** کسی مکان کا فوٹو گراف 35 mm سلائیڈ پر $1.75\ cm^2$ کا رقبہ گھیرتا ہے۔ سلائیڈ کو کسی اسکرین پر پروجکٹ کیا جاتا ہے اور اسکرین پر مکان کا رقبہ $1.55\ m^2$ ہے۔ پروجکٹر-اسکرین بندوبست کی خطی تکبیر (linear magnification) کیا ہے؟

**2.10** درج ذیل میں بامعنی ہندسوں کی تعداد بتائیے :

(a) $0.007\ m^2$

(b) $2.64 \times 10^{24}\ kg$

(c) $0.2370\ g\ cm^{-3}$

(d) $6.320\ J$

(e) $6.032\ N\ m^{-2}$

(f) $0.0006032\ m^2$

**2.11** دھات کی کسی مستطیل چادر کی لمبائی، چوڑائی وموٹائی بالترتیب 4.234 m، 1.005 m اور 2.01 cm ہیں۔ صحیح بامعنی ہندسوں تک چادر کا رقبہ اور حجم معلوم کیجیے۔

**2.12** پنساری کی ترازو کے ذریعہ پیمائش کیے گئے ڈبے کی کمیت 2.3 kg ہے۔ سونے کے دو ٹکڑے جن کی کمیت 20.15 g اور 20.17 g ہے، ڈبے میں ڈال دیے جاتے ہیں۔ (a) ڈبے کی کل کمیت کتنی ہے، (b) صحیح بامعنی ہندسوں تک ٹکڑوں کی کمیتوں میں کتنا فرق ہے؟

**2.13** ایک طبیعی مقدار P، کا چار قابل مشاہدہ مقداروں a, b, c اور d سے رشتہ ہے:

$$P = a^3 b^2 / (\sqrt{cd})$$

a,b, c, اور d کی پیمائش میں فی صد سہو بالترتیب 1%، 3%، 4%، اور 2% ہیں۔ مقدار P میں فی صد سہو کتنا ہے؟ مذکورہ بالا رشتہ کا استعمال کر کے $P$ کی قیمت 3.763 نکلتی ہے تو آپ نتیجے کو کس قدر تک قریب تر (round off) کریں گے؟

**2.14** کسی کتاب میں جس میں چھپائی کی متعدد غلطیاں ہیں، ایک دوری حرکت (periodic motion) کر رہے ذرے کے نقل کے

لیے چار مختلف فارمولے دیئے گئے ہیں:

(a) $y = a \sin 2\pi t/T$

(b) $y = a \sin vt$

(c) $y = (a/T) \sin t/a$

(d) $y = (a\sqrt{2})\,(\sin 2\pi t/T + \cos 2\pi t/T)$

( $a$ = ذرے کا زیادہ سے زیادہ نقل (منتقلی)، $v$ = ذرے کی چال، $T$ = حرکت کا دوری وقت )۔ ابعادی بنیاد پر غلط فارمولوں کو نکال دیجیے۔

**2.15** طبیعیات میں ایک مشہور رشتہ کسی ذرے کی 'متحرک کمیت' (moving mass, m) 'سکونی کمیت' (rest mass, $m_0$) اس کی چال $v$، روشنی کی چال $c$ کے درمیان ہے۔ (یہ رشتہ سب سے پہلے البرٹ آئنسٹائن کے خصوصی اضافیت کے نظریئے کے نتیجے کے طور پر حاصل ہوا) کوئی طالب علم اس تعلق کو تقریباً صحیح یاد کرتا ہے لیکن مستقلہ $c$ کو لگانا بھول جاتا ہے۔ وہ لکھتا ہے: $m = \dfrac{m_0}{\left(1-v^2\right)^{1/2}}$ قیاس کیجیے کہ $c$ کہاں لگے گا۔

**2.16** ایٹمی پیمانے پر لمبائی کی آسان اکائی اینگسٹرام ہے اور اسے $A^o$ کے ذریعہ ظاہر کیا جاتا ہے: $1A^o = 10^{-10}$ m۔ ہائیڈروجن کے ایٹم کا سائز تقریباً $0.5 A^o$ ہے۔ ہائیڈروجن کے ایک مول ایٹموں کا $m^3$ میں کل ایٹمی حجم کتنا ہوگا؟

**2.17** کسی مثالی گیس کا ایک مول (جوہری گرام) معیاری درجہ حرارت اور دباؤ پر 22.4 L حجم (مولر حجم) گھیرتا ہے۔ ہائیڈروجن کے ایک مول کے مولر حجم اور اس کے ایک مول کے ایٹمی حجم کا تناسب کیا ہے؟ (ہائیڈروجن کے ایٹم کے سائز کو تقریباً $1A^o$ مانیے)۔ یہ تناسب اتنا زیادہ کیوں ہے؟

**2.18** اس عام مشاہدہ کی صاف طور پر تشریح کیجیے: اگر آپ تیز جارہی کسی ریل گاڑی کی کھڑکی سے باہر دیکھیں تو قریب کے پیڑ، مکان وغیرہ ریل گاڑی کی حرکت کی مخالف سمت میں تیزی کے ساتھ حرکت کرتے دکھائی دیتے ہیں لیکن دور کی اشیا (پہاڑی، چاند، تارے) وغیرہ ساکن لگتے ہیں۔ (درحقیقت، چونکہ آپ کو معلوم ہے کہ آپ چل رہے ہیں اس لیے یہ دور کی اشیا آپ کو اپنے ساتھ چلتی ہوئی دکھائی دیتی ہیں)۔

**2.19** نہایت دور کے تاروں کی دوریاں معلوم کرنے کے لیے سیکشن 2.3.1 میں دیئے گئے 'اختلاف منظر' (parallax) کے اصول کا استعمال کیا جاتا ہے۔ سورج کے گرد اپنے مدار میں چھ مہینوں کے وقفے پر زمین کے دو مقامات کو ملانے والے خط کو بنیادی خط (base line) کہتے ہیں یعنی بنیادی خط زمین کے مدار کے قطر = $3 \times 10^{11}$m کے تقریباً برابر ہے۔ لیکن، چونکہ قریب ترین تارے بھی اتنی دور ہیں کہ اتنا طویل بنیادی خط ہونے پر بھی ان کے اختلاف منظر کا درجہ قوس کے "1 (سکنڈ) کے لگ بھگ ہوتا ہے۔ فلکیاتی پیمانے پر لمبائی کی سہل اکائی **پارسیک** (parsec) ہے۔ یہ کسی شے کی وہ دوری ہے جو زمین سے سورج تک کی دوری کے برابر لمبائی کے بنیادی خط کے دو مخالف کناروں سے قوس کے "1 کا اختلاف منظر ظاہر کرتی ہے۔ میٹروں کی اصطلاح میں ایک پارسیک کتنا ہے؟

**2.20** ہمارے نظام شمسی سے قریب ترین تارا 4.29 نوری سال دور ہے۔ پارسیک کی اصطلاح میں یہ دوری کتنی ہے؟ یہ تارا [الفا سنٹوری (Alpha Centauri) نام کا] تب کتنا اختلاف منظر ظاہر کرے گا جب اسے سورج کے گرد اپنے مدار میں زمین کے دو

مقامات سے جو چھ مہینے کے وقفے پر ہیں، دیکھا جاتا ہے؟

**2.21** سائنس کی ضرورت ہے کہ طبیعی مقداروں کی دقیق پیائش کی جائے۔ مثال کے لیے کسی جہاز کی چال کا پتہ لگانے کا کوئی ایسا بالکل درست طریقہ ہونا چاہیے جس سے دونہایت ہی قلیل مدت کے وقفہ پر جہاز کے مقامات (position) کا تعین کیا جا سکے۔ دوسری عالمی جنگ میں رڈار کی دریافت کے پس پردہ حقیقی مقصد یہی تھا۔ جدید سائنس کی ان مختلف مثالوں کے بارے میں سوچیے جن میں لمبائی، وقت، کمیت وغیرہ کی دقیق پیائش کی ضرورت ہوتی ہے۔ جہاں آپ بتا سکتے ہوں وہاں یہ بھی بتائیے کہ پیائش کس حد تک دقیق (تقریباً عددی قدر) ہونا چاہیے۔

**2.22** جیسے سائنس میں بہتر دقیق کی ضرورت ہوتی ہے، اسی طرح ابتدائی تصورات اور عام مشاہدات کا استعمال کرتے ہوئے مقداروں کے موٹے طور پر تخمینہ لگانے کا اہل ہونا بھی ضروری ہے۔ ان طریقوں کو سوچیے جن کے ذریعے آپ درج ذیل کا اندازہ لگا سکتے ہیں: (جہاں تخمینہ لگانا مشکل ہے، وہاں مقدار کی اوپری حد (upper bound) کا پتہ لگانے کی کوشش کیجیے)

(a) مانسون کے دوران ہندوستان کے اوپر چھائے ہوئے بارش والے بادلوں کی کل کمیت

(b) کسی ہاتھی کی کمیت

(c) کسی طوفان کے دوران ہوا کی چال

(d) آپ کے سر کے بالوں کی تعداد

(e) آپ کی کلاس کے کمرے میں ہوا کے سالموں کی تعداد

**2.23** سورج گرم پلازما (آئن شدہ مادہ) ہے جس کے اندرونی قالب (core) کا درجہ حرارت $10^7$ K سے زیادہ اور بیرونی سطح کا درجہ حرارت تقریباً 6000 K ہے۔ اتنے زیادہ درجہ حرارت پر کوئی بھی مادہ ٹھوس یا مائع شکل میں نہیں رہ سکتا۔ سورج کی کمیت۔ کثافت کے کس رینج میں ہونے کی آپ کو توقع ہے؟ کیا یہ ٹھوسوں کی کثافت کے رینج میں ہے یا مائع یا گیسوں کی؟ اپنے اندازے کی درستگی کی جانچ آپ درج ذیل اعداد وشمار کی بنیاد پر کیجیے: سورج کی کمیت $= 2.0 \times 10^{30}$ kg، سورج کا قطر $= 7.0 \times 10^8$ m۔

**2.24** جب سیارہ مشتری زمین سے 8.24.7 ملین (دس لاکھ) کلومیٹر دور ہوتا ہے تو اس کے زاویائی قطر کی پیائش ایک قوس کا "35.72 ہے۔ مشتری کے قطر کا حساب لگائیے۔

## اضافی مشق

**2.25** ایک شخص بارش میں تیز چال v کے ساتھ چلا جارہا ہے۔ اسے پانی سے بچنے کے لیے اپنے چھاتے کو ٹیڑھا کرکے عمود کیساتھ θ زاویہ بنانا پڑتا ہے۔ ایک طالب علم θ اور v کے درمیان درجِ ذیل رشتہ اخذ کرتا ہے: $\tan\theta = v$ اور جانچ کرتا ہے کہ اس رشتہ کی حد درست ہے: جب $v \to 0$ تو $\theta \to 0$ جیسی کہ امید تھی۔ (ہم فرض کررہے ہیں کہ تیز ہوا نہیں چل رہی ہے اور ایک ساکن شخص کے لیے بارش عمودی طور پر پڑ رہی ہے۔) کیا آپ سوچتے ہیں کہ یہ رشتہ درست ہوسکتا ہے؟ اگر نہیں، تو درست رشتہ کا اندازہ لگائیے۔

**2.26** یہ دعویٰ کیا جاتا ہے کہ اگر بغیر کسی رکاوٹ کے 100 سالوں تک دو سیزیم گھڑیوں کو چلنے دیا جائے تو ان کے وقت میں صرف 0.02 s کا فرق ہوسکتا ہے۔ معیاری سیزیم گھڑی کے ذریعہ 1 s کے وقفہ وقت کی پیمائش میں درستگی کے لیے اس کا کیا مطلب ہے؟

**2.27** ایک سوڈیم ایٹم کا سائز تقریباً 2.5 Å مانتے ہوئے اس کے اوسط کمیت - کثافت کا اندازہ لگائیے۔ (سوڈیم کی ایٹمی کمیت اور آوگاڈرو کے عدد کی معلوم قیمت کا استعمال کیجیے)۔ کرسٹل کی حالت میں سوڈیم کی کمیت کثافت $970\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ کے ساتھ اس کا موازنہ کیجیے۔ کیا ان دونوں کثافتوں کی مقدار ایک ہی درجہ (order) کی ہے؟ اگر ہاں، تو کیوں؟

**2.28** نیوکلیر پیمانے پر لمبائی کی موزوں اکائی فرمی ہے: $(1\ \mathrm{f} = 10^{-15}\mathrm{m})$۔ نیوکلیر سائز درج ذیل آزمائشی رشتے (emperical relation) کی موٹے طور پر تعمیل کرتے ہیں:

$$r = r_0\, A^{1/3}$$

جہاں $r$ نیوکلئس کا نصف قطر، $A$ اس کا کمیت عدد اور $r_0$ کوئی مستقلہ ہے جو تقریباً 1.2 f کے برابر ہے۔ یہ ثابت کیجیے کہ اس اصول سے مراد ہے کہ مختلف نیوکلیس کے لیے نیوکلیائی کمیت - کثافت تقریباً مستقل ہے۔ سوڈیم نیوکلیس کی کمیت - کثافت (mass density) کا اندازہ لگائیے۔ سوال 2.27 میں معلوم کیے گئے سوڈیم ایٹم کی اوسط کمیت- کثافت کے ساتھ اس کا موازنہ کیجیے۔

**2.29** لیزر (LASER) روشنی کی نہایت شدید، یک رنگی اور یک سمتی شعاع کا ذریعہ ہے۔ لیزر کی ان خوبیوں کا استعمال لمبی دوریوں کی پیمائش میں کیا جاسکتا ہے۔ لیزر کو روشنی کے ذریعہ کے طور پر استعمال کرتے ہوئے پہلے ہی چاند کی زمین سے دوری دقیق طور پر معلوم کی جاچکی ہے۔ کوئی لیزر شعاع چاند کی سطح سے منعکس ہوکر 2.56 s میں واپس آجاتی ہے۔ زمین کے گرد چاند کے مدار کا نصف قطر کتنا ہے؟

**2.30** پانی کے نیچے کی اشیا کو ڈھونڈنے اور ان کے مقام کا پتہ لگانے کے لیے سونار (sound navigation and ranging, SONAR) میں بالا صوتی لہروں (ultrasonic waves) کا استعمال ہوتا ہے۔ کوئی آبدوز کشتی سونار (صوتی جہاز رانی اور رینجنگ) سے لیس ہے۔ اس کے ذریعے پیدا ہوئی تحقیقی لہریں اور دشمن کی آبدوز کشتی سے منعکس اس کی بازگشت (echo) کے وصول ہونے کے درمیان وقت تاخیر (time delay) 77.0 s پایا گیا ہے۔ دشمن کی آبدوز کشتی (پن ڈبی) کتنی دور ہے؟ (پانی میں آواز کی چال = $1450\ \mathrm{ms^{-1}}$)۔

**2.31** ہماری کائنات میں جدید ماہرین فلکیات کے ذریعہ دریافت کی گئی سب سے دور کی اشیا اتنی دور ہیں کہ ان کے ذریعہ خارج کی گئی روشنی کو زمین تک پہنچنے میں اربوں سال لگتے ہیں۔ ان اشیا [جنھیں کواسار (quasar) کہا جاتا ہے] کی پراسرار خصوصیات ہیں، جن کی ابھی تک اطمینان بخش تشریح نہیں کی جاسکی ہے۔ کسی ایسے کواسار کی km میں دوری معلوم کیجیے جس سے خارج روشنی کو ہم تک پہنچنے میں 300 کروڑ سال لگتے ہوں۔

**2.32** یہ ایک معروف حقیقت ہے کہ مکمل سورج گرہن کے دوران چاند کی ڈسک سورج کی ڈسک کو پوری طرح ڈھک لیتی ہے۔ اس حقیقت اور مثال 2.1 اور 2.2 سے جمع معلومات کی بنیاد پر چاند کے قطر (تقریباً) کا تعین کیجیے۔

**2.33** اس صدی کے ایک عظیم طبیعیات داں (پی۔اے۔ایم۔ ڈیریک) فطرت کے بنیادی مستقلوں (fundamental (constants of nature کے ہندسوں کی قیمتوں کے ساتھ کھیلنے میں لطف اندوز ہوتے تھے۔ اس سے انہوں نے ایک بہت ہی دلچسپ مشاہدہ کیا۔ ایٹمی فزکس کے بنیادی مستقلوں (e، c، الیکٹران کی کمیت، پروٹون کی کمیت) اور قوت مادی کشش مستقلہ G سے انہیں پتہ لگا کہ وہ ایک ایسے عدد پر پہنچ گئے ہیں جس کے ابعاد وقت کے ابعاد ہیں۔ یہ ایک بہت بڑا عدد ہے جس کی قدر کائنات کی عمر کے موجودہ تخمینے (~15 کروڑ سال) کے قریب ہے۔ اس کتاب میں دیئے گئے بنیادی مستقلہ کے جدول میں دیکھیے کہ کیا آپ بھی اس عدد (یا اور کوئی عدد جسے آپ سوچ سکتے ہیں) کو بنا سکتے ہیں۔ اگر کائنات کی عمر سے اس کا انطباق ہونا بامعنی ہے تو بنیادی مستقلوں کی ہم آہنگی کے لیے اس سے کیا اشارہ ملتا ہے؟