



4915CH15

باب 15

احتمال (PROBABILITY)

15.1 تعارف (Introduction)

روزمرہ زندگی میں ہمارا واسطہ ایسے بیانات سے پڑتا ہے جیسے:

1. آج شاید بارش ہوگی۔
2. مجھے شبہ ہے وہ نیٹ پاس کر لے گا۔
3. زیادہ امکان اس بات کا ہے کہ کویتا سالانہ امتحان میں پہلا مقام حاصل کرے گی۔
4. اس بات کا زیادہ امکان ہے کہ ڈیزل کی قیمتیں بڑھیں گی۔
5. اس بات کی 50-50 امید ہے کہ آج کے میچ میں انڈیا ٹوس جیتے گی۔

الفاظ کا جیسے امکان، شبہ، زیادہ امکان وغیرہ جو اوپر دیئے گئے بیانات میں استعمال ہوئے ہیں۔ میں غیر یقینی کیفیت کا عنصر شامل ہے۔ مثال کے طور پر (2) میں شاید بارش کا مطلب ہے کہ آج بارش ہو بھی سکتی ہے اور نہیں بھی۔ آج بارش ہوگی اس پیش گوئی کا انحصار ہمارے ماضی کے تجربات کی بنا پر ہے۔ جب ایسی ہی حالتوں میں بارش ہوئی ہے۔ ایسی ہی پیش گوئیاں 2 سے 5 میں فہرست کئے گئے بیانات کے لیے کی جاتی ہیں۔

(امکان) وغیرہ کی لائینیت کو بہت سی حالتوں میں احتمال، کے ذریعہ عددی طور پر ناپا جاسکتا ہے۔ حالانکہ احتمال کی شروعات جوئے سے ہوئی۔ لیکن اس کا سب سے زیادہ استعمال، فزیکل سائنس، کامرس، بائیولوجیکل، میڈیکل سائنس موسم کی پیش گوئی وغیرہ میں ہوتا ہے۔

احتمال کا تصور ایک عجیب و غریب ڈھنگ سے قائم ہوا۔ 1654 میں ایک جواری Chevalier de Mere پانسے سے متعلق کسی مسئلہ کے سلسلہ میں



Blaise Pascal
(1623-1662)

شکل 15.1

17 ویں صدی کے مشہور فرانسیسی فلسفی اور ریاضی داں Blaise Pascal کے پاس پہنچا۔ پاسکل ان مسائل میں دلچسپی لینے لگا۔ اس نے انکا مطالعہ کیا اور ایک دوسرے ریاضی داں Pierre de Fermat سے اس کو Discuss کیا۔ دونوں پاسکل اور فرمٹ نے ان مسائل کو غیر تابع طور پر حل کر لیا۔ اس سے احتمال کے نظریہ کی شروعات ہوئی۔



Pierre de Fermat
(1601-1665)

شکل 15.2

15.2 احتمال۔ ایک تجرباتی طریقہ

اس مضمون پر پہلی کتاب ایک اطالوی ریاضی داں J. Cardan (1501 - 1576) نے لکھی۔ کتاب کا عنوان تھا، 'امکان کے کھیل پر کتاب' (Liber de Ludo Aleae) جس کی طباعت 1663 میں ہوئی۔ اس سلسلہ میں اچھا خاصا کام اور A. A. Markov (1856-1922)، P. Laplace (1749-1827)، J. Bernoulli (1655-1705) اور A. N. Kolmogorov (جو 1903 میں پیدا ہوا۔) ریاضی دانوں نے کیا۔

پچھلی کلاسوں میں آپ نے کچھ تجربات جیسے سکوں کا اچھالنا، پانسے کا پھینکنا اور انکے نتیجوں کا مشاہدہ کیا ہوگا۔ اب آپ کسی تجربہ میں کسی خاص وقوعہ کے واقع ہونے کے امکان کی پیمائش کے بارے میں سیکھیں گے۔

سرگرمی 1: (i) ایک سکہ لیچیے اور اس کو 10 مرتبہ اچھالیے اور ظاہر ہونے والے ہیڈ (Head) اور ٹیل (Tail) کی تعداد کو نوٹ کیجیے۔ اپنے مشاہدات کو مندرجہ ذیل جدول کی شکل میں ریکارڈ کیجیے۔

جدول 15.1

Tail آنے کی تعداد	Head آنے کی تعداد	سکہ کو اچھالے جانے کی تعداد
-	-	10

مندرجہ ذیل کسروں کی قدریں لکھیے۔

$\frac{\text{ہیڈ آنے کی تعداد}}{\text{سکہ اچھالے جانے کی کل تعداد}}$
$\frac{\text{Tail آنے کی کل تعداد}}{\text{سکہ اچھالے جانے کی کل تعداد}}$

اور

(ii) اسی طرح سے سکہ کو 20 مرتبہ اچھالیے اور اوپر دیئے گئے طریقہ اپنے مشاہدات کو ریکارڈ کیجیے اور مشاہدات کے اس مجموعہ کے لیے مذکورہ بالا کسر کی قدریں معلوم کیجیے۔

(iii) سکوں کو اچھالنے کی تعداد کو بڑھاتے ہوئے اسی تجربہ کو دہرائے اور Head اور Tail آنے کی تعداد کو ریکارڈ کیجیے۔ اور پھر متعلقہ کسریں معلوم کیجیے۔

آپ دیکھیں گے جیسے جیسے سکہ کو اچھالنے کی تعداد بڑھے گی کسروں کی قدر 0.5 سے نزدیک ہوتی جائے گی۔ یہ جاننے کے لیے کہ زیادہ بار سکہ اچھالنے سے کیا ہوتا ہے۔ مندرجہ ذیل مشغلہ کیا جاتا ہے

سرگرمی 2: کلاس کے طلباء کو 2 اور 3 گروپ میں بانٹیں۔ مان لیجیے ہر ایک گروپ کا طالب علم سکہ کو 15 مرتبہ اچھالتا ہے۔ ہر ایک گروپ کا دوسرا طالب علم ہیڈ اور ٹیل سے متعلق مشاہدہ کو ریکارڈ کرتا ہے۔ (اس بات کا خیال رکھیے کہ ایک ہی قسم کا سکہ (جیسے 50 پیسے کا) ایک روپیہ کا یا 2 روپے کا سکہ ہر ایک گروپ استعمال کرے۔ ایسا معلوم ہونا چاہیے کہ تمام گروپوں نے ایک ہی سکہ کو اچھالا ہے۔

اب بلیک بورڈ پر 15.2 جدول کی طرح ایک جدول بنائیے۔ پہلے گروپ 1 اپنی مشاہدات دے سکتا ہے۔ اس کے نتیجے میں ملی کسروں کی تحسیب کیجیے۔ ہر گروپ اپنی مشاہدات لکھ سکتا ہے لیکن وہ گروپ 1 اور گروپ 2 کے ملے جلے آنکڑوں کے کسروں کی تحسیب کیجیے۔ (ہم ان کو مجموعی کسور Cumulative fractions کہتے ہیں)۔ ہم ایک کلاس کے طلباء کے ذریعے دی گئی مشاہدات پر منحصر پہلی 3 قطاروں کو نوٹ کرتے ہیں۔

جدول 15.2

گروپ	ہیڈ کی تعداد	ٹیل کی تعداد	ہیڈ کی مجموعی تعداد سکوں کو اچھالنے کی کل تعداد	ٹیل کی مجموعی تعداد سکوں کو اچھالنے کی کل تعداد
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	3	12	$\frac{3}{15}$	$\frac{12}{15}$
2	7	8	$\frac{7+3}{15+15} = \frac{10}{30}$	$\frac{8+12}{15+15} = \frac{20}{30}$
3	7	8	$\frac{7+10}{15+30} = \frac{17}{45}$	$\frac{8+20}{15+30} = \frac{28}{45}$
4

آپ اس جدول میں کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ آپ پائیں گے کہ جیسے جیسے آپ سکوں کو اچھالنے کی تعداد بڑھائیں گے کالم (4) اور (5) میں کسروں کی قدریں 0.5 سے نزدیک تر ہوتی جائیں گی۔

سرگرمی 3: ایک پانسہ کو 20 مرتبہ پھینکیے اور نوٹ کیجیے کہ اس کی اوپری سطح پر اعداد 1، 2، 3، 4، 5، 6 کتنی کتنی مرتبہ آئے ہیں۔

جدول 15.3

پانسے کو پھینکنے کی تعداد	جتنی مرتبہ یہ اعداد اوپری سطح پر ہوتے ہیں۔					
	1	2	3	4	5	6
20						

مندرجہ ذیل کسروں کی قیمت معلوم کیجیے:

$$\frac{1 \text{ کے اوپری سطح پر آنے کی تعداد}}{\text{پانسہ کو پھینکنے جانے کی کل تعداد}}$$

$$\frac{2 \text{ کے اوپری سطح پر ظاہر ہونے کی تعداد}}{\text{پانسہ کو پھینکنے جانے کی کل تعداد}}$$

⋮

$$\frac{6 \text{ کے اوپری سطح پر آنے کی تعداد}}{\text{پانسہ کو پھینکنے جانے کی کل تعداد}}$$

(ii) آپ اب پانسہ کو 40 مرتبہ پھینکیے اور مشاہدات کو ریکارڈ کر کے کسروں کی تحسیب کیجیے جیسے ایک میں کیا گیا ہے۔

جیسے جیسے پانسہ کو پھینکنے کی تعداد بڑھیں گی آپ پائیں گے کہ ہر ایک کسر کی قدر جو (i) اور (ii) میں تحسیب کی گئی ہے۔ $\frac{1}{6}$ کے نزدیک ہوتی جائے گی۔

اس کو دیکھنے کے لیے آپ ایک اور مشغلہ کر سکتے ہیں جیسا مشغلہ (2) میں کیا گیا ہے۔ اپنی کلاس کے طلباء کو چھوٹے گروپوں میں بانٹ دیجیے۔ ہر گروپ کا ایک طالب علم ایک پانسہ کو 10 مرتبہ پھینکیے۔ مشاہدات کو نوٹ کیا جائے۔ اور مجموعی کسروں کی تحسیب کی جائے۔ نمبر (1) کے لیے کسروں کی قدروں کو جدول 15.4 میں ریکارڈ کیا جاسکتا ہے۔ اس جدول کی توسیع ہم دوسرے اعداد کی کسروں کو لکھ کر کر سکتے ہیں۔ یا اسی قسم کے دوسرے جدول دوسرے اعداد کے لیے بنائے جاسکتے ہیں۔

جدول 15.4

گروپ	پانسہ کو پھینکنے جانے کی کل تعداد	عدد 1 کے ظاہر ہونے کی مجموعی تعداد پانسہ کو پھینکنے جانے کی کل تعداد
(1)	(2)	(3)
1	—	—
2	—	—
3	—	—
4	—	—

تمام گروپوں میں استعمال ہوا پانسہ دیکھنے اور سائز میں ایک سا ہونا چاہیے۔ تب تمام گروپوں کے ذریعے پھینکنے جانے والا پانسہ ایک ہی لگے گا۔

ان جدول سے آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

آپ دیکھیں گے جیسے جیسے پانسہ کو پھینکنے کی تعداد بہت بڑی ہوتی ہے۔ کالم (3) میں موجود کسریں۔ $\frac{1}{6}$ سے نزدیک ہوتی

جاتی ہیں۔

سرگرمی 4: دو سکوں کو ایک ساتھ 10 مرتبہ اچھالیے اور اپنے مشاہدات کو مندرجہ ذیل جدول میں نوٹ کیجیے۔

جدول 15.5

دو ہیڈ آنے کی تعداد	ایک ہیڈ آنے کی تعداد	ہیڈ نہ آنے کی تعداد	دونوں سکوں کو اچھالنے کی کل تعداد
-	-	-	10

کسروں کی قدریں لکھیے:

$$A = \frac{\text{ہیڈ نہ آنے کی تعداد}}{\text{دونوں سکوں کو اچھالنے کی کل تعداد}}$$

$$B = \frac{\text{ایک ہیڈ آنے کی تعداد}}{\text{دونوں سکوں کو اچھالنے کی کل تعداد}}$$

$$C = \frac{\text{2 ہیڈ آنے کی تعداد}}{\text{دونوں سکوں کو اچھالنے کی کل تعداد}}$$

ان کسروں کی قدریں تحسب کیجیے۔

اب سکوں کو اچھالنے کی تعداد کو بڑھا دیجیے (جیسا کہ سرگرمی 2 میں کیا تھا)۔ آپ پائیں گے کہ سکوں کو چننی بار زیادہ سے زیادہ مرتبہ اچھالا جائے گا، A، B اور C کی قدریں اتنی ہی بالترتیب، 0.5، 0.25 اور 0.5 کے نزدیک ہوتی جائے گی۔

سرگرمی 1 میں سکے کی ہر اچھال کو ایک Trial کہتے ہیں اسی طرح سے مشغلہ 3 میں پانسے کی ہر بار پھینکنے (Throw) کو ایک Trial اور سرگرمی 4 میں دو سکوں کو ہر بار ایک ساتھ اچھالنے کو بھی Trial کہتے ہیں۔

اس طرح سے Trial ایک عمل ہے جو ایک یا بہت سے وقوعات (Outcomes) کا نتیجہ ہوتا ہے۔ سرگرمی 1 میں ممکن وقوعات ہیڈ اور ٹیل تھے، جب کہ سرگرمی 3 میں ممکن وقوعات 1، 2، 3، 4، 5 اور 6 ہیں۔

سرگرمی 1 میں کسی ایک اچھال میں ہیڈ آنا ایک وقوعہ ہے جس کا نتیجہ ہیڈ ہے اسی طرح سے ایک ٹیل آنا ایک وقوعہ ہے جس کا نتیجہ ٹیل ہے۔ مشغلہ 2 میں ایک خاص عدد جیسے 1 آنا ایک وقوعہ ہے۔

اگر ہمارا تجربہ جفت عدد حاصل کرنے کے لیے ایک پانسے کو پھینکنا ہے۔ تب وقوعہ تین نتیجوں پر مشتمل ہوگا۔ 2، 4 اور 6۔

اس طرح سے کسی تجربہ کے لیے وقوعہ اس تجربوں سے کچھ نتیجوں کا مجموعہ ہوتا ہے۔ دسویں جماعت میں آپ وقوعہ کی ایک رسمی تعریف پڑھیں گے۔

تو کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ مشغلہ 4 میں کیا وقوعات ہیں۔
اس پس منظر کو نظر میں رکھتے ہوئے آئیے دیکھتے ہیں کہ احتمال کیا ہے۔

مان لیجیے Trial کی کل تعداد n ہے۔ تو کسی E وقوعہ کے واقع ہونے کا احتمال ہے

$$P(E) = \frac{\text{Trials کی کل تعداد جن میں وقوعہ واقع ہوتا ہے}}{\text{Trials کی کل تعداد}}$$

اس باب میں ہم امپریکل احتمال معلوم کریں گے۔ حالانکہ ہم آسانی کے لیے صرف احتمال ہی لکھیں گے۔
آئیے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

اس لیے جدول 15.2 اور مشغلہ 2 سے شروع کرتے ہیں اس جدول کے کالم 4 میں وہ کیا کسر ہے جو آپ نے تحسیب کی ہے؟ کچھ نہیں بلکہ ہیڈ حاصل کرنے کا احتمال ہے۔ نوٹ کیجیے کہ یہ احتمال بدلتا رہتا ہے۔ اس کا انحصار اس بات پر ہے کہ Trials کی تعداد کتنی ہے اور ان Trials سے ملے ہیڈ کتنے ہیں۔ اسی طرح سے جدول 15.2 کے کالم (5) سے Tails حاصل کرنے کا احتمال حاصل ہوتا ہے۔ شروع میں یہ $\frac{12}{15}$ اور پھر $\frac{2}{3}$ پھر $\frac{28}{45}$ اسی طرح سے آگے تک۔

اس طرح سے امپریکل احتمال کئے گئے Trials کی تعداد۔ اور ان Trials میں وہ نتائج کی تعداد جن کی تلاش ہے پر منحصر ہے۔

سرگرمی 5: آگے بڑھنے سے پہلے مشغلہ 3 میں بنائے گئے جدول کو دیکھیے۔ ایک پانسہ کو کئی مرتبہ پھٹکے جانے پر 3 آنے کے احتمال معلوم کیجیے یہ بھی دکھائیے کہ Trials کی تعداد بڑھنے سے اس میں کیا تبدیلی آتی ہے۔
آئیے اب کچھ اور مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 1: ایک سکہ کو 1000 مرتبہ اچھالا جاتا ہے۔ جس کہ تعداد مندرجہ ذیل ہے ہیڈ 455: ٹیل 545
ہر ایک وقوعہ کا احتمال معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ سکہ کو 1000 بار اچھالا گیا ہے۔ اس لیے Trials کی کل تعداد 1000 ہے آئیے ہیڈ اور ٹیل آنے کے وقوعہ کو بالترتیب E اور F سے ظاہر کرتے ہیں۔ E کے واقع ہونے یعنی جتنی مرتبہ ہیڈ آتا ہے وہ 455 ہے۔

$$\frac{\text{ہیڈ کی تعداد}}{\text{Trials کی کل تعداد}} = \text{اس طرح، (E) کا احتمال}$$

$$P(E) = \frac{455}{1000} = 0.455 \quad \text{یعنی،}$$

$$\frac{\text{ہیڈ کی تعداد}}{\text{Trials کی کل تعداد}} = \text{اسی طرح، ٹیل حاصل کرنے والے وقوع کا احتمال}$$

$$P(F) = \frac{545}{1000} = 0.545 \quad \text{یعنی،}$$

نوٹ کیجیے کہ $P(E) + P(F) = 0.455 + 0.545 = 1$ اور E اور F ہر ایک Trial کے صرف دو ممکن نتائج ہیں۔

مثال 2: دو سکوں کو ایک ساتھ 500 مرتبہ اچھا لایا گیا۔ ہمیں حاصل ہوا۔

دو ہیڈ : 105 مرتبہ

ایک ہیڈ : 275 مرتبہ

کوئی ہیڈ نہیں : 120 مرتبہ

ان تمام وقوعات کے واقع ہونے کا احتمال بنائیے۔

حل: آئیے وقوعات دو ہیڈ، ایک ہیڈ اور کوئی ہیڈ نہیں۔ حاصل ہونے کو بالترتیب E_1 ، E_2 اور E_3 سے ظاہر کرتے ہیں۔

اس لیے،

$$P(E_1) = \frac{105}{500} = 0.21$$

$$P(E_2) = \frac{275}{500} = 0.55$$

$$P(E_3) = \frac{120}{500} = 0.24$$

مشاہدہ کیجیے کہ $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$ اور E_1, E_2, E_3 کے کل نتائج ہیں۔

مثال 3: ایک پانسہ کو ہزار مرتبہ پھینکا جاتا ہے۔ جس کے نتائج 1، 2، 3، 4، 5 اور 6 جو جدول 15.6 دیئے ہوئے ہیں، کی تعداد مندرجہ ذیل ہیں۔

جدول 15.6:

نتیجہ	1	2	3	4	5	6
تعداد	179	150	157	149	175	190

ہر ایک نتیجہ کے واقع ہونے کا احتمال معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے۔ E_i جہاں $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ہے نتیجہ حاصل کرنے کے وقوع کو ظاہر کرتا ہے۔
تب،

$$P(E_1) = \frac{\text{نتیجہ 1 کا تعداد}}{\text{نتیجہ 1 کا احتمال پانسہ کو پھینکنے کی کل تعداد}} = \frac{179}{1000} = 0.179$$

$$P(E_2) = \frac{150}{1000} = 0.15, P(E_3) = \frac{157}{1000} = 0.157 \quad \text{اسی طرح سے،}$$

$$P(E_4) = \frac{149}{1000} = 0.149, P(E_5) = \frac{175}{1000} = 0.175$$

$$P(E_6) = \frac{190}{1000} = 0.19 \quad \text{اور،}$$

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_6) = 1 \quad \text{نوٹ کیجیے کہ}$$

مزید نوٹ کیجیے کہ:

(i) ہر ایک وقوع کا احتمال 0 اور 1 کے درمیان ہوتا ہے۔

(ii) تمام احتمالوں کا حاصل جمع 1 ہے۔

(iii) E_1, E_2, \dots, E_6 ایک Trial کے تمام ممکنہ نتائج ہیں۔

مثال 4: ٹیلی فون ڈائریکٹری کے ایک صفحہ پر 200 ٹیلی فون نمبر ہیں۔ ان کے اکائی ہندسوں کا تعداد بتاؤ۔ (مثال کے طور پر نمبر 25828573 میں اکائی کا ہندسہ 3 ہے) مندرجہ ذیل جدول میں دیکھیے۔

جدول 15.7

ہندسہ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
تعداد	22	26	22	22	20	10	14	28	16	20

صفحہ کو دیکھے بغیر پنسل کو ان میں سے کسی نمبر پر رکھو۔ یعنی نمبر کو بلا منصوبہ چنا گیا۔ کیا احتمال ہے کہ اس نمبر کا اکائی کا ہندسہ 6 ہے؟

حل: کے ہندسہ کا اکائی کے مقام پر ہونے کا احتمال

$$= \frac{6 \text{ کا تعداد}}{\text{چنے گئے ٹیلی فون نمبر کی کل تعداد}}$$

$$= \frac{14}{200} = 0.07$$

اسی طرح سے آپ اکائی کے مقام پر دوسرے ہندسوں کے ہونے کا امپریکل احتمال معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال 5: موسم کے محکمہ کاریکارڈ یہ بتاتا ہے کہ پچھلے 250 لگاتار دنوں میں سے اس کی پیش گوئی 175 مرتبہ صحیح ثابت ہوئی۔

(i) اس بات کا کیا احتمال ہے کہ ایک دن ہونے میں اس کی پیش گوئی صحیح تھی؟

(ii) اس بات کا کیا احتمال ہے کہ ایک دن ہونے میں اس کی پیش گوئی صحیح نہیں تھی؟

حل: دنوں کی کل تعداد جن کاریکارڈ دستیاب ہے۔ 250

(i) P (ان دنوں کی تعداد جب پیش گوئی صحیح تھی)

$$= \frac{\text{دیئے گئے دن میں پیش گوئی صحیح ہے}}{\text{دنوں کی تعداد جن کاریکارڈ دستیاب ہے}}$$

$$= \frac{175}{250} = 0.7$$

(ii) دنوں کی کل تعداد جب پیش گوئی صحیح نہیں تھی $250-175=75$

$$P(\text{دیے ہوئے دن میں پیش گوئی صحیح نہیں تھی}) = \frac{75}{250} = 0.3$$

نوٹ کیجیے کہ:

$$P(\text{دیے ہوئے دن میں پیش گوئی صحیح نہیں تھی}) + P(\text{دیے ہوئے دن میں پیش گوئی صحیح تھی}) \\ = 0.7 + 0.3 = 1$$

مثال 6: ایک ٹائر بنانے والی کمپنی اس طے کیے گئے فاصلہ کار ریکارڈ رکھتی ہے۔ جس کے بعد ٹائر کو بدلنا ضروری ہوتا ہے۔ ایسے 1000 کیسوں کے نتائج مندرجہ ذیل جدول میں دکھائے گئے ہیں۔

فاصلہ کلومیٹر میں	4000 سے کم	4000 سے 9000	9001 سے 14000	14000 سے زیادہ
تعداد	20	210	325	445

اگر آپ اس کمپنی کا ایک ٹائر خریدتے ہیں تو احتمال کیا ہوگا کہ:

- (i) 400 کلومیٹر فاصلہ طے کرنے کے بعد اس کو بدلنے کی ضرورت پڑے گی؟
(ii) یہ 9000 کلومیٹر سے زیادہ فاصلہ طے کرے گا؟
(iii) 4000 سے 14000 کلومیٹر تک کا فاصلہ طے کرنے کے بعد اس کو بدلنے کی ضرورت پڑے؟

حل: کوششوں (Trials) کی کل تعداد 1000

4000 کلومیٹر سے کم فاصلہ پر ٹائر بدلنے کا تعداد = 20

$$P(\text{4000 کلومیٹر طے کرنے سے}) = \frac{20}{1000} = 0.02$$

(ii) اس ٹائر کا تعداد جو 9000 کلومیٹر سے زیادہ چلتا ہے۔ $325 + 445 = 770$

$$P(\text{9000 کلومیٹر سے زیادہ چلتا ہے}) = \frac{770}{1000} = 0.77$$

(iii) اس ٹائر کی تعداد جن کو 4000 کلومیٹر سے 14000 کلومیٹر کے درمیان بدلنے کی ضرورت ہوتی ہے $210 + 325 = 535$

$$= \frac{535}{1000} = 0.535 \text{ P (کلومیٹر کے درمیان سے 4000 بدلتا 14000 سے)}$$

مثال 7: ایک ماہانہ اکائی کی ٹیسٹ میں ایک طالب علم کے ذریعے حاصل کیے گئے فی صد نمبر نیچے دیے گئے ہیں۔

جدول 15.9

یونٹ اکائی ٹیسٹ	I	II	III	IV	V
حاصل کردہ نمبروں کا فیصد	69	71	73	68	74

ان اعداد و شمار کے مد نظر اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ یونٹ ٹیسٹ میں طالب علم نے 70% سے زیادہ نمبر حاصل کیے۔

حل: یونٹ ٹیسٹوں کی کل تعداد ہے 5۔

ان یونٹ ٹیسٹوں کی تعداد جن میں طالب علم نے 70% سے زیادہ نمبر حاصل کیے 3 ہے۔

$$\text{اس لیے، } P (70\% \text{ سے زیادہ نمبر حاصل کرے}) = \frac{3}{5} = 0.6$$

مثال 8: کسی ایک شہر میں عمر اور حادثوں کے درمیان ایک تعلق معلوم کرنے کے لیے ایک بیمہ کمپنی نے 2000 ڈرائیوروں کو بلا منصوبہ (یعنی کسی ایک ڈرائیور کو دوسرے پر فوقیت دینے بغیر) چنا۔ محصول اعداد و شمار مندرجہ ذیل اعداد و شمار میں دیئے گئے ہیں:

جدول 15.10

ڈرائیوروں کی عمر (سالوں میں)	ایک سال میں ہوئے حادثے				
	0	1	2	3	3 سے زیادہ
18-29	440	160	110	61	35
30-50	505	125	60	22	18
50 سے زیادہ	360	45	35	15	9

مندرجہ ذیل وقوعات میں ان ڈرائیوروں کا احتمال معلوم کیجیے۔ جن کو شہر سے بلا منصوبہ چنا گیا ہو:

(i) جن کی عمر 18-29 سال ہو اور ان سے سال میں صرف 3 حادثے ہوئے ہوں۔

(ii) جن کی عمر 30-50 سال کا ہو اور ان سے ایک سال میں 1 یا اس سے زیادہ حادثے ہوئے ہوں۔

(iii) جنہوں نے سال میں کوئی ایکسیڈنٹ نہ کیا ہو۔

حل: ڈرائیوروں کی کل تعداد = 2000

(i) ڈرائیوروں کی تعداد جن کی عمر 18-29 سال ہے اور انہوں نے ایک سال میں 3 ایکسیڈنٹ کیے ہوں 61 ہے۔

اس لیے، $0.031 \approx 0.0305 = \frac{61}{2000}$ (18-29 سال عمر کے ڈرائیور جن کے صرف 3 ایکسیڈنٹ کیے

ہوں) P

(ii) 30-70 سال عمر والے ان ڈرائیوروں کی کل تعداد جنہوں نے ایک سال میں ایک یا ایک سے زیادہ ایکسیڈنٹ کیے

$$= 125 + 60 + 22 + 18 = 225 \text{ ہوں}$$

اس لیے $0.225 = \frac{225}{1000}$ (30-50 سال عمر کے ڈرائیور جن کے صرف ایک سے زیادہ Accident کیے ہوں) P

(iii) ڈرائیور کی تعداد جن سے ایک سال میں کوئی ایکسی ڈینٹ نہ ہوا ہو $440 + 505 + 360$

$$= 1305$$

اس لیے، $0.653 = \frac{1305}{2000}$ (وہ ڈرائیور جن کا کوئی ایکسیڈنٹ نہ ہوا ہو)

مثال 9: جدول 14.3 مثال 4 باب 14 کا تعدد بتاؤ جدول پر غور کیجیے۔ جس میں کلاس کے 38 طلباء کے وزن دیئے ہیں۔

(i) احتمال معلوم کیجیے کہ کلاس کے ایک طالب علم کا وزن 46-50 کلوگرام ہو۔

(ii) اس سلسلہ میں دو واقعات بتائیے جن میں ایک کا احتمال 0 ہو اور دوسرے کا 1 ہو۔

حل: طلباء کی کل تعداد 38 ہے۔ اور ان طلباء کی تعداد جن کا وزن 46-50 کلوگرام ہے 3 ہے۔

اس لیے، $0.079 = \frac{3}{38}$ (طالب علم کا وزن 46-50 کلوگرام کے ذریعے ہو۔)

(ii) اس وقوعہ پر غور کیجیے جب طالب علم کا وزن 30 کلوگرام ہے۔ کیونکہ کسی بھی طالب علم کا وزن 30 کلوگرام نہیں ہے اس لیے

اس وقوعہ کے واقع ہونے کا احتمال 0 ہے۔ اسی طرح سے 30 کلوگرام سے زیادہ وزن کے طالب علم کا احتمال ہے

$$\frac{38}{38} = 1$$

مثال 10: بیجوں کے 5 تھیلوں میں سے بلا منصوبہ 50 بیج چنے گئے اور ان کو ایسی مخصوص جگہ رکھا گیا۔ جو تخلیق (Germination) کے لیے موافق ہو۔ 20 دنوں بعد ہر ایک مجموعہ کے ان بیجوں کو جو پھوٹ گئے ہوں۔ گنا گیا جن کا ریکارڈ مندرجہ ذیل ہے:

جدول 15.11

تھیلا	1	2	3	4	5
بیجوں کی تعداد	40	48	42	39	41

(i) ایک تھیلے میں 40 سے زیادہ بیجوں کے پھوٹنے کا احتمال کیا ہے؟

(ii) ایک تھیلا میں 49 بیجوں کے پھوٹنے کا احتمال کیا ہے؟

(iii) ایک تھیلا میں 35 سے زیادہ بیجوں کے پھوٹنے کا احتمال کیا ہے؟

حل: تھیلوں کی کل تعداد 5 ہے۔

(i) ان تھیلوں کی تعداد جن میں 50 بیجوں میں سے 40 سے زیادہ بیج پھوٹے ہوں = 3

$$P = \frac{3}{5} = 0.6 \quad (\text{تھیلا میں 40 سے زیادہ بیجوں کے پھوٹنے کی})$$

(ii) ان تھیلوں کی تعداد جن میں 49 بیج پھوٹے ہوں = 0

$$P = \frac{0}{5} = 0 \quad (\text{تھیلا میں 40 بیجوں کے پھوٹنے کی})$$

(iii) تھیلوں کی تعداد جس میں 35 سے زیادہ بیج پھوٹے ہوں = 5

$$\frac{5}{5} = 1 \quad \text{اس لیے، مطلوبہ احتمال}$$

ریمارک: مذکورہ بالا مثالوں میں آپ نے نوٹ کیا ہوگا کہ کسی وقوعہ کا احتمال 0 سے 1 تک کوئی بھی کسر ہو سکتی ہے۔

مشق 15.1

1. کرکٹ کے ایک میچ میں ایک خاتون بلے باز نے کھیلی گئی 30 گیندوں میں 6 مرتبہ باؤنڈری لگائی احتمال معلوم کیجئے کہ

اس نے کوئی باؤنڈری نہیں لگائی۔

2. دو بچوں والے 1500 کنپے بلا منصوبہ چنے گئے اور مندرجہ ذیل اعداد و شمار ریکارڈ کیے گئے۔

ایک کنپہ میں لڑکیوں کی تعداد	2	1	0
کنپوں کی تعداد	475	814	211

بلا منصوبہ یہ چنے گئے اس کنپہ کا احتمال معلوم کیجیے جب کہ اندر

(i) 2 لڑکیاں (ii) 1 لڑکی (iii) کوئی لڑکی نہ ہو۔

یہ بھی جانچ کیجیے کہ ان تمام احتمالوں کا حاصل جمع 1 ہے۔

3. باب 14 میں سیکشن 14.4 کی مثال 5 میں۔ احتمال معلوم کیجیے کہ کلاس کا ایک طالب علم اگست میں پیدا ہوا۔

4. مختلف نتائج کے مندرجہ ذیل تعدد کے ساتھ تین سکوں کو ایک ساتھ 200 مرتبہ اچھالا گیا۔

نتیجہ	3 ہیڈ	2 ہیڈ	1 ہیڈ	کوئی ہیڈ نہیں
تعدد	23	72	77	28

اگر تین سکوں کو دوبارہ ایک ساتھ اچھالا جائے تو 2 ہیڈ آنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

5. کسی گھر میں آمدنی کا لیول اور گاڑیوں کے تعداد میں تعلق معلوم کرنے کے لیے ایک کمپنی نے 3400 کنپوں کو بلا منصوبہ

چنا اور ان کا سروے کیا۔ جمع کی گئی اطلاعات کو مندرجہ ذیل جدول میں دیا گیا ہے:

ماہانہ آمدنی روپیوں میں	گاڑیاں فی کنپہ			
	0	1	2	2 سے زیادہ
7000 سے کم	10	160	25	0
7000-10000	0	305	27	2
10000-13000	1	535	29	1
13000-16000	2	469	59	25
16000 سے زیادہ	1	579	82	88

مان لیجیے ایک کنبہ چنا گیا۔ احتمال معلوم کیجیے کہ چنے گئے کنبہ کی۔

- (i) آمدنی 10000-13000 روپیہ فی مہینہ ہے اور صرف 2 گاڑیاں ہیں۔
 (ii) آمدنی 16000 یا اس سے زیادہ فی مہینہ ہے اور صرف 1 گاڑی ہے۔
 (iii) آمدنی 7000 فی مہینہ سے کم اور کوئی گاڑی نہیں ہے۔
 (iv) آمدنی 13000-16000 فی مہینہ ہے اور 2 سے زیادہ گاڑیاں ہیں۔
 (v) ایک سے زیادہ گاڑی نہیں ہے۔

6. باب 14 کے جدول 14.7 کو دیکھیے اور

- (i) ریاضی کے ٹیسٹ میں 20% سے کم نمبر لانے والے طالب علم کا احتمال معلوم کیجیے۔
 (ii) 60 یا اس سے زیادہ نمبر لانے والے طلبہ کا احتمال معلوم کیجیے۔

7. شماریات کے مضمون کے لیے طلبہ کا نظریہ جاننے کے لیے 200 طالب علم کا سروے کیا گیا ریکارڈ کیے گئے آئٹمز کو مندرجہ ذیل جدول میں دکھایا گیا ہے۔

نظریہ	طلبہ کی تعداد
پسند	135
ناپسند	65

احتمال معلوم کیجیے کہ بلا منصوبہ چنا گیا طالب علم

- (i) شماریات پسند کرتا ہے۔
 (ii) نہیں پسند کرتا ہے۔

8. مشق 14.2 کا سوال 2 دیکھیے احتمال کیا ہے کہ ایک انجنیر

- (i) اپنے کام کرنے کی جگہ سے 7 کلومیٹر سے کم فاصلہ پر رہتا ہے۔
 (ii) اپنے کام کرنے کی جگہ سے 7 کلومیٹر سے زیادہ فاصلہ پر رہتا ہے۔
 (iii) اپنے کام کرنے کی جگہ سے $\frac{1}{2}$ کلومیٹر کے اندر رہتا ہے۔

سرگرمی 9: اپنے اسکول کے گیٹ کے سامنے سے کسی خاص وقت۔ وقفہ میں گزرنے والی چار پہیوں، تین پہیوں اور دو پہیوں

والی گاڑیوں کا تعدد نوٹ کیجیے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ آپ کے ذریعے مشاہدہ کی گئی تمام گاڑیوں میں سے ایک گاڑی 2 پہیوں والی ہے۔

سرگرمی 10: اپنی کلاس کے تمام طلباء سے کہیے کہ ایک 3 ہندسوں کا عدد لکھیں کمرہ میں سے کسی بھی طالب علم کو بلا منصوبہ چینیے۔ احتمال کیا ہے کہ اس کے ذریعے لکھا گیا عدد 3 سے منقسم ہے۔ یاد کیجیے کہ عدد 3 سے تقسیم ہوتا ہے اگر اس کے ہندسوں کا حاصل جمع 3 سے تقسیم ہو تو۔

11. گےہوں کے آٹے کے 11 تھیلوں میں جن پر 5 کلوگرام چھپا ہے۔ دراصل آٹے کا مندرجہ ذیل وزن ہے۔

4.97, 5.05, 5.08, 5.03, 5.00, 5.06, 5.08, 4.98, 5.04, 5.07, 5.00

احتمال معلوم کیجیے کہ ان تھیلوں میں سے بلا منصوبہ چنے گئے کسی تھیلا میں 5 کلوگرام سے زیادہ آتا ہے۔

12. مشق 14.2 کے سوال 5 میں آپ سے 30 دن کے لیے کسی شہر میں ہوا میں فی ملین سلفر ڈائی آکسائیڈ سے متعلق تعداد بتاؤ جدول، بنانے کو کہا گیا۔ اس جدول کا استعمال کرتے ہوئے ان میں سے کسی ایک دن 0.16—0.12 وقفہ میں سلفر ڈائی آکسائیڈ کے ارتکاز کا احتمال معلوم کیجیے۔

13. مشق 14.2 کے سوال نمبر 1 میں ایک کلاس کے 30 طلباء کے بلڈ گروپ سے متعلق ایک تعداد بتاؤ جدول بنانے کو کہا گیا۔ اس جدول کو استعمال کرتے ہوئے احتمال معلوم کیجیے کہ اس کلاس کے بلا منصوبہ چنے گئے طالب علم کا بلڈ گروپ AB ہے۔

13.2 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں۔

1. ایک تجربہ کا وقوع اس تجربہ کے کچھ نتائج کا مجموعہ ہے۔

2. کسی مجموعہ کا تجزیہ احتمال $P(E)$ ہے۔

کوششوں کی تعداد جس میں E واقع ہو چکا ہو $P(E)$

کوششوں کی کل تعداد

3. کسی بھی وقوعہ کا احتمال 0 اور 1 کے درمیان ہوتا ہے (0 اور 1 تامل ہیں)