अध्याय 3

त्रिकोणमितीय फलन

3.1 समग्र अवलोकन (Overview)

3.1.1 शब्द 'trigonometry' (त्रिकोणमितीय) यूनानी शब्द 'ट्रिगोन' (trigon) और 'मीट्रोन' (metron) से व्युत्पत्ति हुआ है, जिसका अर्थ एक त्रिभुज की भुजाओं का मापना है। एक कोण एक निश्चित रेखा के सापेक्ष परिभ्रमण करने वाली किसी रेखा के घूर्णन की मात्रा होती है। यदि यह घूर्णन दक्षिणावर्त दिशा में है तो कोण ऋणात्मक होता है तथा कोण धनात्मक होता है, यदि घूर्णन वामावर्त दिशा में होता है। प्राय:, हम कोणों को मापने के लिए, दो प्रकार की पद्धतियाँ, अर्थात् (i) षोष्टिक पद्धति (sexagesinal system) और (ii) वृत्तीय पद्धति अपनाते हैं।

षौष्टिक पद्धति में, कोण के मापन की इकाई अंश या डिग्री (Degree) है। यदि प्रारंभिक भुजा से अंतिम भुजा तक का घूर्णन एक परिभ्रमण का $\frac{1}{360}$ वाँ भाग हो, तो कोण के माप को $1°$ कहा जाता है। इस पद्धति में, वर्गीकरण निम्नलिखित प्रकार हैं–

$$1° = 60'$$

$$1' = 60''$$

मापन की वृत्तीय पद्धति में, मापन की इकाई रेडियन (radian) है। एक रेडियन वह कोण है जो किसी वृत्त की त्रिज्या के बराबर लंबाई का चाप उस वृत्त के केंद्र पर अंतरित करता है। त्रिज्या r वाले एक वृत्त के चाप PQ की लंबाई $s = r\theta$ दी जाती है, जहाँ θ रेडियनों में मापा गया वह कोण है, जो चाप PQ वृत्त के केंद्र पर अंतरित करता है।

3.1.2 *डिग्री और रेडियन में संबंध*

किसी वृत्त की परिधि का उसके व्यास के साथ सदैव एक अचर अनुपात होता है। यह अचर अनुपात π से व्यक्त की जाने वाली एक संख्या है जिसका मान सभी व्यावहारिक प्रयोजन के लिए लगभग $\frac{22}{7}$ लिया जाता है। डिग्री और रेडियन मापों के बीच संबंध निम्नलिखित हैं–

$$2 \text{ समकोण} = 180° = \pi \text{ रेडियन}$$

$$1 \text{ रेडियन} = \frac{180°}{\pi} = 57°16' \text{ (लगभग)}$$

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ रेडियन} = 0.01746 \text{ रेडियन (लगभग)}$$

3.1.3 *त्रिकोणमितीय फलन*

न्यून कोणों के लिए, त्रिकोणमितीय अनुपात को, किसी समकोण त्रिभुज की भुजाओं के अनुपातों के रूप में परिभाषित किया जाता है। रेडियन माप में व्यक्त किसी कोण के लिए, त्रिकोणमितीय अनुपात का विस्तार, त्रिकोणमितीय फलन कहलाता है। त्रिकोणमितीय फलनों के विभिन्न चतुर्थांशों में चिह्न निम्नलिखित तालिका में दिए हैं–

	I	**II**	**III**	**IV**
$\sin x$	+	+	–	–
$\cos x$	+	–	–	+
$\tan x$	+	–	+	–
$\operatorname{cosec} x$	+	+	–	–
$\sec x$	+	–	–	+
$\cot x$	+	–	+	–

3.1.4 *त्रिकोणमितीय फलनों के प्राँत और परिसर*

फलन	**प्रांत**	**परिसर**
sine	$\mathbf{R}$	$[-1, 1]$
cosine	$\mathbf{R}$	$[-1, 1]$
tan	$\mathbf{R} - \{(2n+1)\dfrac{\pi}{2} : n \in \mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R}$
cot	$\mathbf{R} - \{n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R}$
sec	$\mathbf{R} - \{(2n+1)\dfrac{\pi}{2} : n \in \mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$
cosec	$\mathbf{R} - \{n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$

3.1.5 *समकोण अर्थात् 90º से छोटे या उसके बराबर कुछ कोणों के sine, cosine और tangent*

	0°	**15°**	**18°**	**30°**	**36°**	**45°**	**60°**	**90°**
sine	0	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1

cosine	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	1	$\sqrt{3}$	परिभाषित नहीं

3.1.6 समवर्गीय या संबंधित कोण

कोण $\frac{n\pi}{2} \pm \theta$ समवर्गी या संबंधित कोण कहलाते हैं तथा कोण $\theta \pm n \times 360°$ सहावासनी (coterminal) कोण कहलाते हैं। व्यापक समानयन के लिए, हमें निम्नलिखित नियम प्राप्त हैं:

$(\frac{n\pi}{2} \pm \theta)$ के लिए, त्रिकोणमितीय फलन का संख्यात्मक मान बराबर है–

(a) उसी फलन के मान के, यदि n एक सम पूर्णांक है तथा इस मान का चिह्न उस चतुर्थांश के अनुसार होता है जिसमें वह कोण स्थित है।

(b) θ के संगत सहफलन के मान के यदि n एक विषम पूर्णांक है तथा फलन का चिह्न उस चतुर्थांश के अनुसार होता है, जिसमें वह कोण स्थित है। यहाँ sine और cosine, tan और cot तथा sec और cosec एक दूसरे के सहफलन हैं।

3.1.7 ऋणात्मक कोणों के फलन मान लीजिए θ कोई कोण है। तब,

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta, \quad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$
$$\sec(-\theta) = \sec\theta, \quad \text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec}\,\theta$$

3.1.8 यौगिक कोणों से संबधी कुछ सूत्र

दो या अधिक कोणों के योग या अंतर से बना एक कोण यौगिक कोण कहलाता है। इस संबंध में मूलभूत परिणाम त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ कहलाते हैं। जिन्हें नीचे दिया जा रहा है:

(i) $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

(ii) $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

(iii) $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

(iv) $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

(v) $\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

(vi) $\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

(vii) $\cot (A + B) = \dfrac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$

(viii) $\cot (A - B) = \dfrac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$

(ix) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \dfrac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$

(x) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = \dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

(xi) $\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

(xii) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(xiii) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

(xiv) $\tan 3A = \dfrac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

(xv) $\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right) \cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

(xvi) $\cos A - \cos B = 2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right) \sin\left(\dfrac{B-A}{2}\right)$

(xvii) $\sin A + \sin B = 2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right) \cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

(xviii) $\sin A - \sin B = 2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right) \sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

(xix) $2\sin A \cos B = \sin (A + B) + \sin (A - B)$

(xx) $2\cos A \sin B = \sin (A + B) - \sin (A - B)$

(xxi) $2\cos A \cos B = \cos (A + B) + \cos (A - B)$

(xxii) $2\sin A \sin B = \cos (A - B) - \cos (A + B)$

(xxiii) $\sin \dfrac{A}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \cos A}{2}}$ $\begin{cases} + \text{ यदि } \dfrac{A}{2} \text{ चतुर्थांश I या II में स्थित है} \\ - \text{ यदि } \dfrac{A}{2} \text{ चतुर्थांश III या IV में स्थित है} \end{cases}$

(xxiv) $\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ $\begin{cases} + \text{ यदि } \frac{A}{2} \text{ चतुर्थांश I या IV में स्थित है} \\ - \text{ यदि } \frac{A}{2} \text{ चतुर्थांश II या III में स्थित है} \end{cases}$

(xxv) $\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$ $\begin{cases} + \text{ यदि } \frac{A}{2} \text{ चतुर्थांश I या III में स्थित है} \\ - \text{ यदि } \frac{A}{2} \text{ चतुर्थांश II या IV में स्थित है} \end{cases}$

18° के कोण के त्रिकोणमितीय फलन

मान लीजिए $\theta = 18°$ है। तब, $2\theta = 90° - 3\theta$

अत:, $\sin 2\theta = \sin(90° - 3\theta) = \cos 3\theta$

या $\sin 2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

क्योंकि $\cos\theta \neq 0$, इसलिए

$2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3 = 1 - 4\sin^2\theta$ या $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0.$

अत:, $$\sin\theta = \frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

क्योंकि $\theta = 18°$ है, इसलिए $\sin\theta > 0$, है। अत:, $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

साथ ही, $$\cos 18° = \sqrt{1-\sin^2 18°} = \sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}$$

अब, हम सरलता पूर्वक $\cos 36°$ और $\sin 36°$ का मान, निम्नलिखित प्रकार ज्ञात कर सकते हैं:

$$\cos 36° = 1 - 2\sin^2 18° = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{8} = \frac{2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

अत:, $$\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

साथ ही, $$\sin 36° = \sqrt{1-\cos^2 36°} = \sqrt{1-\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

3.1.9 त्रिकोणमितीय समीकरण

किसी चर के त्रिकोणमितीय फलनों से संबद्ध समीकरण **त्रिकोणमितीय समीकरण** कहलाते हैं। समीकरण सर्वसमिकाएँ कहलाती हैं, यदि वे अज्ञात कोणों के उन सभी मानों से संतुष्ट हो जाएँ, जिनके

लिए वे फलन परिभाषित हैं। किसी त्रिकोणमितीय समीकरण के वे हल जिसके लिए $0 \le \theta < 2\pi$, उसका **मुख्य हल** कहलाते हैं। पूर्णांक n से संबद्ध वह व्यंजक जो त्रिकोणमितीय समीकरण के सभी हल दे, उसका **व्यापक हल** कहलाता है।

त्रिकोणमितीय समीकरणों के व्यापक हल

(i) यदि किसी कोण α के लिए, $\sin\theta = \sin\alpha$ हो, तो $\theta = n\pi + (-1)^n \alpha$, $n \in \mathbf{Z}$, दिये हुए समीकरण का व्यापक हल देता है।

(ii) यदि किसी कोण α के लिए $\cos\theta = \cos\alpha$ हो, तो $\theta = 2n\pi \pm \alpha$, $n \in \mathbf{Z}$, दिये हुए समीकरण का व्यापक हल देता है।

(iii) यदि $\tan\theta = \tan\alpha$ या $\cot\theta = \cot\alpha$ हो, तो $\theta = n\pi + \alpha$, $n \in \mathbf{Z}$, इन दोनों समीकरणों का व्यापक हल देता है।

(iv) समीकरण $\sin^2\theta = \sin^2\alpha$, $\cos^2\theta = \cos^2\alpha$ और $\tan^2\theta = \tan^2\alpha$ में से किसी भी समीकरण को संतुष्ट करने वाला θ का व्यापक मान $\theta = n\pi \pm \alpha$ होता है।

(v) समीकरण $\sin\theta = \sin\alpha$ और $\cos\theta = \cos\alpha$ को युगपत् रूप से संतुष्ट करने वाला θ का व्यापक मान $\theta = 2n\pi + \alpha$, $n \in \mathbf{Z}$ है।

(vi) $a\cos\theta + b\sin\theta = c$, के रूप के किसी समीकरण का हल ज्ञात करने के लिए, हम $a = r\cos\alpha$ और $b = r\sin\alpha$ रखते हैं, जिससे $r^2 = a^2 + b^2$ और $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$ प्राप्त होता है, इस प्रकार हम देखते हैं कि $a\cos\theta + b\sin\theta = r(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta \,.\, \sin\alpha) = c$, या $r\cos(\theta - \alpha) = c$ के रूप में परिवर्तित हो जाता है। और इसीलिए, $\cos(\theta - \alpha) = \dfrac{c}{r}$ यह दी हुई समीकरण का हल प्रदान करता है।

व्यंजक $\mathrm{A}\cos\theta + \mathrm{B}\sin\theta$ के अधिकतम और न्यूनतम मान क्रमशः $\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}$ और $-\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}$ हैं, जहाँ A और B अचर हैं।

3.2 हल किये हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय प्रश्न (S. A.)

उदाहरण 1 3 cm त्रिज्या वाले एक वृत्ताकार तार को काट कर इस प्रकार मोड़ा जाता है कि वह 48 cm (त्रिज्या) वाले एक छल्ले की परिधि के अनुदिश स्थित हो जाए। अंशों (डिगरीस) में वह कोण ज्ञात कीजिए जो यह छल्ले के केंद्र पर अंतरित करता है।

हल तार की त्रिज्या 3 cm, दिया हुआ है। इसलिये, इसे काटने पर, इसकी लंबाई $= 2\pi \times 3\text{cm} = 6\pi$ cm। पुनः इसे 48 cm. त्रिज्या वाले एक वृत्ताकार छल्ले के अनुदिश रखा जाता है। यहाँ $s = 6\pi$ cm चाप की लंबाई है तथा $r = 48$ cm वृत्त की त्रिज्या है। इसलिए, इस चाप द्वारा वृत्त के केंद्र पर अंतरित

कोण θ (रेडियन में) निम्नलिखित है–

$$\theta = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}} = \frac{6\pi}{48} = \frac{\pi}{8} = 22.5°$$

उदाहरण 2 यदि θ के सभी मानों के लिए $A = \cos^2\theta + \sin^4\theta$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{3}{4} \le A \le 1$ है।

हल हमें प्राप्त है: $A = \cos^2\theta + \sin^4\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta \sin^2\theta \le \cos^2\theta + \sin^2\theta$

अत:, $A \le 1$

साथ ही, $$A = \cos^2\theta + \sin^4\theta = (1 - \sin^2\theta) + \sin^4\theta$$

$$= \left(\sin^2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \left(\sin^2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4}$$

अत:, $$\frac{3}{4} \le A \le 1$$

उदाहरण 3 $\sqrt{3}$ cosec 20° – sec 20° का मान ज्ञात कीजिए।

हल हमें प्राप्त है:

$$\sqrt{3}\ \text{cosec}\ 20° - \sec 20° = \frac{\sqrt{3}}{\sin 20°} - \frac{1}{\cos 20°}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cos 20° - \sin 20°}{\sin 20° \cos 20°} = 4\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20° - \frac{1}{2}\sin 20°}{2\sin 20° \cos 20°}\right)$$

$$= 4\left(\frac{\sin 60° \cos 20° - \cos 60° \sin 20°}{\sin 40°}\right) \qquad \text{(क्यों?)}$$

$$= 4\left(\frac{\sin (60° - 20°)}{\sin 40°}\right) = 4 \qquad \text{(क्यों?)}$$

उदाहरण 4 यदि θ दूसरे चतुर्थांश में स्थित है, तो दशाईए कि

$$\sqrt{\frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}} + \sqrt{\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}} = -2\sec\theta$$

हल हमें प्राप्त है:

$$\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}+\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \frac{1-\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}+\frac{1+\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{2}{\sqrt{\cos^2\theta}}$$

$= \dfrac{2}{|\cos\theta|}$ (क्योंकि प्रत्येक वास्तविक संख्या α के लिए $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$ होता है)

दिया है कि θ दूसरे चतुर्थांश में स्थित है। इसलिए, $|\cos\theta| = -\cos\theta$ (क्योंकि $\cos\theta < 0$ है)

अतः दिए हुए व्यंजक का अभीष्ट मान $= \dfrac{2}{-\cos\theta} = -2\sec\theta$

उदाहरण 5 $\tan 9° - \tan 27° - \tan 63° + \tan 81°$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हमें प्राप्त है: $\tan 9° - \tan 27° - \tan 63° + \tan 81°$

$= \tan 9° + \tan 81° - \tan 27° - \tan 63°$

$= \tan 9° + \tan (90° - 9°) - \tan 27° - \tan (90° - 27°)$

$= \tan 9° + \cot 9° - (\tan 27° + \cot 27°)$ (1)

साथ ही, $\tan 9° + \cot 9° = \dfrac{1}{\sin 9° \cos 9°} = \dfrac{2}{\sin 18°}$ (क्यों?) (2)

इसी प्रकार, $\tan 27° + \cot 27° = \dfrac{1}{\sin 27° \cos 27°} = \dfrac{2}{\sin 54°} = \dfrac{2}{\cos 36°}$ (क्यों?) (3)

(2) और (3) का (1) में प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$\tan 9° - \tan 27° - \tan 63° + \tan 81° = \frac{2}{\sin 18°} - \frac{2}{\cos 36°} = \frac{2\times 4}{\sqrt{5}-1} - \frac{2\times 4}{\sqrt{5}+1} = 4$$

उदाहरण 6 सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\sec 8\theta - 1}{\sec 4\theta - 1} = \dfrac{\tan 8\theta}{\tan 2\theta}$

हल हमें प्राप्त हैं :

$$\frac{\sec 8\theta - 1}{\sec 4\theta - 1} = \frac{(1-\cos 8\theta)\cos 4\theta}{(1-\cos 4\theta)\cos 8\theta}$$

$$= \frac{2\sin^2 4\theta \cos 4\theta}{\cos 8\theta \, 2\sin^2 2\theta} \quad \text{(क्यों?)}$$

$$= \frac{\sin 4\theta (2 \sin 4\theta \cos 4\theta)}{2 \cos 8\theta \sin^2 2\theta}$$

$$= \frac{\sin 4\theta \sin 8\theta}{2 \cos 8\theta \sin^2 2\theta} \quad \text{(क्यों?)}$$

$$= \frac{2 \sin 2\theta \cos 2\theta \sin 8\theta}{2 \cos 8\theta \sin^2 2\theta}$$

$$= \frac{\tan 8\theta}{\tan 2\theta} \quad \text{(क्यों?)}$$

उदाहरण 7 $\sin \theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta = 0$ को हल कीजिए।

हल हमें प्राप्त है: $\sin \theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta = 0$

या $(\sin \theta + \sin 5\theta) + \sin 3\theta = 0$

या $2 \sin 3\theta \cos 2\theta + \sin 3\theta = 0$ (क्यों?)

या $\sin 3\theta (2 \cos 2\theta + 1) = 0$

इसलिए, $\sin 3\theta = 0$ या $2\cos^2 \theta + 1 = 0$

जब $\sin 3\theta = 0$, तो $3\theta = n\pi$ अर्थात् $\theta = \frac{n\pi}{3}$

जब $\cos 2\theta = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$, तो $2\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ अर्थात् $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

इससे $\theta = (3n + 1)\frac{\pi}{3}$ या $\theta = (3n - 1)\frac{\pi}{3}$ प्राप्त होता है।

θ के उपरोक्त सभी मान $\theta = \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$. में निहित है।

अत:, वांछित हल समुच्चय $\{\theta : \theta = \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}\}$ है।

उदाहरण 8 $2 \tan^2 x + \sec^2 x = 2$, $0 \le x \le 2\pi$ के लिए, हल कीजिए।

हल यहाँ, $2 \tan^2 x + \sec^2 x = 2$

जिससे $\tan x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

यदि हम $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ लेते हैं, तो $x = \dfrac{\pi}{6}$ या $\dfrac{7\pi}{6}$ (क्यों?)

पुनः यदि हम $\tan x = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$ लेते हैं, तो $x = \dfrac{5\pi}{6}$ या $\dfrac{11\pi}{6}$ (क्यों?)

अतः, उपर्युक्त समीकरणों के संभव हल

$x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}$ और $\dfrac{11\pi}{6}$ हैं, जहाँ $0 \le x \le 2\pi$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

उदाहरण 9 $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\dfrac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\dfrac{5\pi}{8}\right)\left(1+\cos\dfrac{7\pi}{8}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हम लिखते हैं: $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\dfrac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\dfrac{5\pi}{8}\right)\left(1+\cos\dfrac{7\pi}{8}\right)$

$$= \left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)\right)\left(1+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$= \left(1-\cos^2\frac{\pi}{8}\right)\left(1-\cos^2\frac{3\pi}{8}\right) \qquad \text{(क्यों?)}$$

$$= \sin^2\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{3\pi}{8}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\cos\frac{3\pi}{4}\right) \qquad \text{(क्यों)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(क्यों?)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\cos^2\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

उदाहरण 10 यदि $x\cos\theta = y\cos\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right) = z\cos\left(\theta+\dfrac{4\pi}{3}\right)$ हो, तो $xy+yz+zx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल ध्यान दीजिए कि $xy + yz + zx = xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

यदि हम $x \cos\theta = y \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) = z \cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right) = k$ (मान लीजिए) रखें,

तो $$x = \frac{k}{\cos\theta},\ y = \frac{k}{\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)} \text{ और } z = \frac{k}{\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)} \text{ होगा।}$$

इससे, $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{k}\left[\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{k}[\cos\theta + \cos\theta\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\theta\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$+ \cos\theta\cos\frac{4\pi}{3} - \sin\theta\sin\frac{4\pi}{3}]$$

$$= \frac{1}{k}\left[\cos\theta + \cos\theta\left(\frac{-1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right.$$

$$\left.\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\theta\left(-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right] \quad \text{(क्यों?)}$$

$$= \frac{1}{k}\times 0 = 0$$

अतः, $$xy + yz + zx = 0$$

उदाहरण 11 यदि α और β समीकरण $a \tan\theta + b \sec\theta = c$ के मूल हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$\tan(\alpha + \beta) = \frac{2ac}{a^2 - c^2}$ है।

हल हमें दिया है: $a\tan\theta + b\sec\theta = c$ या $a\sin\theta + b = c\cos\theta$

सर्वसमिकाओं, $\sin\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$ और $\cos\theta = \dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$ का प्रयोग करने पर,

$$\frac{a\left(2\tan\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} + b = \frac{c\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

या $$(b+c)\ \tan^2\frac{\theta}{2} + 2a\ \tan\frac{\theta}{2} + b - c = 0$$

उपरोक्त समीकरण $\tan\frac{\theta}{2}$ में एक द्विघात समीकरण है और इसीलिए $\tan\frac{\alpha}{2}$ और $\tan\frac{\beta}{2}$ इस समीकरण के मूल हैं। (क्यों?)

इसलिए $\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} = \dfrac{-2a}{b+c}$ और $\tan\frac{\alpha}{2}\ \tan\frac{\beta}{2} = \dfrac{b-c}{b+c}$ है। (क्यों?)

सर्वसमिका $$\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}$$ का प्रयोग करने पर,

हमें प्राप्त होता है: $$\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\frac{-2a}{b+c}}{1-\frac{b-c}{b+c}} = \frac{-2a}{2c} = \frac{-a}{c} \quad \text{... (1)}$$

पुन:, एक अन्य सर्वसमिका $$\tan 2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$$ के प्रयोग से,

हमें प्राप्त होता है: $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{2\left(-\dfrac{a}{c}\right)}{1-\dfrac{a^2}{c^2}} = \dfrac{2ac}{a^2-c^2}$ [(1) से]

वैकल्पिक रूप से, $a \tan\theta + b \sec\theta = c$

$\Rightarrow \quad (a\tan\theta - c)^2 = b^2(1+\tan^2\theta)$

$\Rightarrow \quad a^2\tan^2\theta - 2ac\tan\theta + c^2 = b^2 + b^2\tan^2\theta$

$\Rightarrow \quad (a^2-b^2)\tan^2\theta - 2ac\tan\theta + c^2 - b^2 = 0$ ... (1)

क्योंकि $\tan\alpha$ और $\tan\beta$ समीकरण (1) के मूल हैं, इसलिए

$\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{2ac}{a^2-b^2}$ और $\tan\alpha\tan\beta = \dfrac{c^2-b^2}{a^2-b^2}$

अत:, $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$$= \frac{\dfrac{2ac}{a^2-b^2}}{\dfrac{c^2-b^2}{a^2-b^2}} = \frac{2ac}{a^2-c^2}$$

उदाहरण 12 सिद्ध कीजिए कि $2\sin^2\beta + 4\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta + \cos 2(\alpha+\beta) = \cos 2\alpha$

हल LHS $= 2\sin^2\beta + 4\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta + \cos 2(\alpha+\beta)$

$= 2\sin^2\beta + 4(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\sin\alpha\sin\beta$
$\quad + (\cos 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\alpha\sin 2\beta)$

$= 2\sin^2\beta + 4\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta - 4\sin^2\alpha\sin^2\beta$
$\quad + \cos 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\alpha\sin 2\beta$

$= 2\sin^2\beta + \sin 2\alpha\sin 2\beta - 4\sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\alpha\sin 2\beta$

$= (1-\cos 2\beta) - (2\sin^2\alpha)(2\sin^2\beta) + \cos 2\alpha\cos 2\beta$ (क्यों?)

$= (1-\cos 2\beta) - (1-\cos 2\alpha)(1-\cos 2\beta) + \cos 2\alpha\cos 2\beta$ (क्यों?)

$= \cos 2\alpha$ = R.H.S.

उदाहरण 13 यदि कोण θ को ऐसे भागों में विभाजित किया जाता है कि एक भाग का tangent दूसरे भाग के tangent का k गुना है, तथा इन भागों का अंतर ϕ है, तो

सिद्ध कीजिए कि $\sin\theta = \dfrac{k+1}{k-1}\sin\phi$

हल मान लीजिए कि $\theta = \alpha + \beta$ तब, $\tan\alpha = k\tan\beta$

या $$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{k}{1}$$

योगांतरानुपात (componendo and dividendo) का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है,

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} = \frac{k+1}{k-1}$$

या $$\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta} = \frac{k+1}{k-1}$$ (क्यों?)

अर्थात्, $$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{k+1}{k-1}$$ (क्यों?)

$\alpha - \beta = \phi$ और $\alpha + \beta = \theta$ दिया है। अत:,

$$\frac{\sin\theta}{\sin\phi} = \frac{k+1}{k-1} \quad \text{or} \quad \sin\theta = \frac{k+1}{k-1}\sin\phi$$

उदाहरण 14 $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$ को हल कीजिए।

हल दिये दिए समीकरण को 2 से भाग देने पर

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{या} \quad \cos\frac{\pi}{6}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{6}\sin\theta = \cos\frac{\pi}{4}$$

या $$\cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = \cos\frac{\pi}{4} \quad \text{या} \quad \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$ (क्यों?)

अत:, इस समीकरण के हल $\theta = 2m\pi \pm \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$

अत:, θ का मान है:

$$\theta = 2m\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \quad \text{या} \quad \theta = 2m\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \quad \text{अर्थात्} \quad \theta = 2m\pi + \frac{5\pi}{12} \quad \text{या} \quad \theta = 2m\pi - \frac{\pi}{12}$$

वस्तुनिष्ठ उदाहरण (MCQ)

उदाहरण 15 से 19 तक प्रत्येक में, दिए हुए चारों विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए:

उदाहरण 15 यदि $\tan\theta = \dfrac{-4}{3}$ है, तो $\sin\theta$ है

(A) $\dfrac{-4}{5}$ परंतु $\dfrac{4}{5}$ नहीं (B) $\dfrac{-4}{5}$ या $\dfrac{4}{5}$

(C) $\dfrac{4}{5}$ परंतु $-\dfrac{4}{5}$ नहीं (D) इनमें से कोई नहीं

हल सही विकल्प (B) है। क्योंकि $\tan\theta = \dfrac{-4}{3}$ ऋणात्मक है, इसलिए θ या तो दूसरे चतुर्थांश में है या चौथे चतुर्थांश में है। इस प्रकार, $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ यदि θ दूसरे चतुर्थांश में स्थित है या $\sin\theta = \dfrac{-4}{5}$, यदि θ चौथे चतुर्थांश में स्थित है।

उदाहरण 16 यदि $\sin\theta$ और $\cos\theta$ समीकरण $ax^2 - bx + c = 0$ के मूल हैं, तो a, b और c निम्नलिखित संबंध को संतुष्ट करते हैं:

(A) $a^2 + b^2 + 2ac = 0$ (B) $a^2 - b^2 + 2ac = 0$

(C) $a^2 + c^2 + 2ab = 0$ (D) $a^2 - b^2 - 2ac = 0$

हल सही विकल्प (B) है। दिया है कि $\sin\theta$ और $\cos\theta$ समीकरण $ax^2 - bx + c = 0$ के मूल हैं।

इसलिए, $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{b}{a}$ और $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{c}{a}$ (क्यों?)

सर्वसमिका $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$ का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{2c}{a} \text{ या } a^2 - b^2 + 2ac = 0$$

उदाहरण 17 $\sin x\cos x$ का अधिकतम मान है:

(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

हल सही विकल्प (D) है, क्योंकि

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \le \frac{1}{2}, \text{ क्योंकि } |\sin 2x| \le 1$$

उदाहरण 18 $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80°$ का मान है

(A) $\frac{-3}{16}$ (B) $\frac{5}{16}$ (C) $\frac{3}{16}$ (D) $\frac{1}{16}$

हल सही विकल्प (C) है। वास्तव में, $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20° \sin(60° - 20°)\sin(60° + 20°) \left(\text{क्योंकि } \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20° (\sin^2 60° - \sin^2 20°) \qquad \text{(क्यो?)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20° \left[\frac{3}{4} - \sin^2 20°\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4}[3\sin 20° - 4\sin^3 20°]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4}(\sin 60°) \qquad \text{(क्यों?)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{16}$$

उदाहरण 19 $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{8\pi}{5}$ का मान है;

(A) $\frac{1}{16}$ (B) 0 (C) $\frac{-1}{8}$ (D) $\frac{-1}{16}$

हल (D) सही उत्तर है। हमें ज्ञात है;

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{8\pi}{5}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}} 2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{8\pi}{5}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{8\pi}{5}$$ (क्यों?)

$$=\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{5}}\sin\frac{4\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{8\pi}{5}$$ (क्यों?)

$$=\frac{1}{8\sin\frac{\pi}{5}}\sin\frac{8\pi}{5}\cos\frac{8\pi}{5}$$ (क्यों?)

$$=\frac{\sin\frac{16\pi}{5}}{16\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{5}\right)}{16\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$=\frac{-\sin\frac{\pi}{5}}{16\sin\frac{\pi}{5}}$$ (क्यों?)

$$=-\frac{1}{16}$$

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

उदाहरण 20 यदि, $3\tan(\theta-15°)=\tan(\theta+15°)$, $0°<\theta<90°$ है, तो $\theta=$ __________ है।

हल $3\tan(\theta-15°)=\tan(\theta+15°)$ को इस रूप में लिखा जा सकता है:

$$\frac{\tan(\theta+15°)}{\tan(\theta-15°)}=\frac{3}{1}$$

योगांतरानुपात के प्रयोग से हमें प्राप्त हुआ $\frac{\tan(\theta+15°)+\tan(\theta-15°)}{\tan(\theta+15°)-\tan(\theta-15°)}=2$

$$\Rightarrow\frac{\sin(\theta+15°)\cos(\theta-15°)+\sin(\theta-15°)\cos(\theta+15°)}{\sin(\theta+15°)\cos(\theta-15°)-\sin(\theta-15°)\cos(\theta+15°)}=2$$

$\Rightarrow\frac{\sin 2\theta}{\sin 30°}=2$ अर्थात् $\sin 2\theta=1$ (क्यों?)

इससे $\theta = \frac{\pi}{4}$

बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

उदाहरण 21 "असमिका $2^{\sin\theta} + 2^{\cos\theta} \geq 2^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$ θ के सभी वास्तविक मानों के लिए सत्य है।"

हल सत्य। क्योंकि $2^{\sin\theta}$ और $2^{\cos\theta}$ धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं, इसलिए इनका समांतर माध्य (A.M.) इनके गुणोत्तर माध्य (G.M.) से बड़ा या उसके बराबर होगा। अत:,

$$\frac{2^{\sin\theta} + 2^{\cos\theta}}{2} \geq \sqrt{2^{\sin\theta}\ 2^{\cos\theta}} = \sqrt{2^{\sin\theta+\cos\theta}}$$

$$\geq 2^{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}} = 2^{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)}$$

$$\geq 2^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}$$

क्योंकि $-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) \leq 1$ होता है, इसलिए हमें प्राप्त है:

इसलिए, $$\frac{2^{\sin\theta} + 2^{\cos\theta}}{2} \geq 2^{\frac{-1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow 2^{\sin\theta} + 2^{\cos\theta} \geq 2^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

स्तंभ C_1 में दिए प्रत्येक प्रविष्टि की स्तंभ C_2 में दी गई प्रविष्टियों से मिलान कीजिए:

उदाहरण 22

	C_1		C_2
(a)	$\frac{1-\cos x}{\sin x}$	(i)	$\cot^2\frac{x}{2}$
(b)	$\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$	(ii)	$\cot\frac{x}{2}$
(c)	$\frac{1+\cos x}{\sin x}$	(iii)	$\lvert\cos x + \sin x\rvert$
(d)	$\sqrt{1+\sin 2x}$	(iv)	$\tan\frac{x}{2}$

हल

(a) $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}} = \tan\dfrac{x}{2}$

अत:, (a) का सही मिलान (iv) से होगा, जिसे (a) $\leftrightarrow$ (iv) से व्यक्त किया जाएगा:

(b) $\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x} = \dfrac{2\cos^2\dfrac{x}{2}}{2\sin^2\dfrac{x}{2}} = \cot^2\dfrac{x}{2}$ है। अत:, (b) का सही मिलान (i) से होगा, अर्थात् (b) $\leftrightarrow$ (i) है।

(c) $\dfrac{1+\cos x}{\sin x} = \dfrac{2\cos^2\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}} = \cot\dfrac{x}{2}$ है।

अत:, (c) का सही मिलान (ii) से होगा, अर्थात् (c) $\leftrightarrow$ (ii) है।

(d) $\sqrt{1+\sin 2x} = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x}$

$$= \sqrt{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= |(\sin x + \cos x)|$$

अत: (d) का सही मिलान (iii) से हागा। अर्थात् (d) $\leftrightarrow$ (iii) है।

3.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} = \dfrac{1+\sin A}{\cos A}$

2. यदि $\dfrac{2\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha} = y$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$ भी y के बराबर है।

$\left[\text{संकेत: व्यक्त कीजिए: } \dfrac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\sin\alpha} \cdot \dfrac{1+\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}\right]$

3. यदि $m\sin\theta = n\sin(\theta + 2\alpha)$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\tan(\theta+\alpha)\cot\alpha = \dfrac{m+n}{m-n}$

[**संकेत:** $\frac{\sin(\theta+2\alpha)}{\sin\theta}=\frac{m}{n}$ लिखकर योगांतरानुपात का प्रयोग कीजिए।]

4. यदि $\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$ और $\sin(\alpha-\beta)=\frac{5}{13}$ है; जहाँ α, 0 और $\frac{\pi}{4}$ के बीच स्थित है; तो $\tan 2\alpha$ का मान ज्ञात कीजिए।
[**संकेत:** $\tan 2\alpha$ को $\tan(\alpha+\beta+\alpha-\beta)$ के रूप में व्यक्त कीजिए।]

5. यदि $\tan x=\frac{b}{a}$ है, तो $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. सिद्ध कीजिए कि $\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}-\cos 3\theta\cos\frac{9\theta}{2}=\sin 7\theta\sin 8\theta$ है।

[**संकेत:** L.H.S. $=\frac{1}{2}[2\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}-2\cos 3\theta\cos\frac{9\theta}{2}]$ के रूप में व्यक्त कीजिए।]

7. यदि $a\cos\theta+b\sin\theta=m$ और $a\sin\theta-b\cos\theta=n$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $a^2+b^2=m^2+n^2$ है।

8. $\tan 22°30'$ का मान ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** मान लीजिए कि $\theta=45°$ है।

अत: $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ का प्रयोग कीजिए।]

9. सिद्ध कीजिए कि $\sin 4A=4\sin A\cos^3 A-4\cos A\sin^3 A$ है।

10. यदि $\tan\theta+\sin\theta=m$ और $\tan\theta-\sin\theta=n$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $m^2-n^2=4\sin\theta\tan\theta$ है।
[**संकेत:** $m+n=2\tan\theta$, $m-n=2\sin\theta$ है। तो $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$ का प्रयोग कीजिए]

11. यदि $\tan(A+B)=p$ और $\tan(A-B)=q$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\tan 2A=\frac{p+q}{1-pq}$ है।

[**संकेत:** $2A=(A+B)+(A-B)$ का प्रयोग कीजिए]

12. यदि $\cos\alpha+\cos\beta=0=\sin\alpha+\sin\beta$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\cos 2\alpha+\cos 2\beta=-2\cos(\alpha+\beta)$ है।
[**संकेत:** $(\cos\alpha+\cos\beta)^2-(\sin\alpha+\sin\beta)^2=0$ है।]

13. यदि $\dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \dfrac{a+b}{a-b}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\tan x}{\tan y} = \dfrac{a}{b}$ है।

[**संकेत:** योगांतरानुपात का प्रयोग कीजिए।]

14. यदि $\tan\theta = \dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि कि $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\theta$ है।

[**संकेत:** व्यक्त कीजिए: $\tan\theta = \tan(\alpha - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \theta = \alpha - \frac{\pi}{4}$]

15. यदि $\sin\theta + \cos\theta = 1$ है, तो θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए।

16. समीकरण $\tan\theta = -1$ और $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ को संतुष्ट करने वाले θ का उभयनिष्ठ व्यापक मान ज्ञात कीजिए।

17. यदि $\cot\theta + \tan\theta = 2\,\text{cosec}\,\theta$ है, तो θ का व्यापक मान ज्ञान कीजिए।

18. यदि $2\sin^2\theta = 3\cos\theta$ है, जहाँ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ है, तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

19. यदि $\sec x \cos 5x + 1 = 0$ है, जहाँ $0 < x \leq \dfrac{\pi}{2}$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (LA)

20. यदि $\sin(\theta + \alpha) = a$ और $\sin(\theta + \beta) = b$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\cos 2(\alpha - \beta) - 4ab \cos(\alpha - \beta) = 1 - 2a^2 - 2b^2$ है।

[**संकेत:** $\cos(\alpha - \beta) = \cos\{(\theta + \alpha) - (\theta + \beta)\}$ लिखिए।]}

21. यदि $\cos(\theta + \phi) = m\cos(\theta - \phi)$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\tan\theta = \dfrac{1-m}{1+m}\cot\phi$ है।

[**संकेत:** $\dfrac{\cos(\theta+\pi)}{\cos(\theta-\pi)} = \dfrac{m}{1}$ के रूप में व्यक्त कर योगांतरानुपात का प्रयोग कीजिए।]

22. व्यंजक $3\left[\sin^4\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin^4(3\pi + \alpha)\right] - 2\left\{\sin^6\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin^6(5\pi - \alpha)\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

23. यदि $a\cos 2\theta + b\sin 2\theta = c$ के मूल α और β हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{2b}{a+c}$ है।

[संकेतः सर्वसमिकाओं $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ और $\sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ का प्रयोग कीजिए।]

24. यदि $x = \sec\phi - \tan\phi$ और $y = \text{cosec}\,\phi + \cot\phi$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $xy + x - y + 1 = 0$ है।
[संकेतः Find $xy + 1$ ज्ञात कीजिए और फिर सिद्ध कीजिए कि $x, y = -(xy + 1)$ है।]

25. यदि θ प्रथम चतुर्थांश में स्थित है तथा $\cos\theta = \dfrac{8}{17}$ है, तो

$\cos(30° + \theta) + \cos(45° - \theta) + \cos(120° - \theta)$ का मान ज्ञात कीजिए।

26. व्यंजक $\cos^4\dfrac{\pi}{8} + \cos^4\dfrac{3\pi}{8} + \cos^4\dfrac{5\pi}{8} + \cos^4\dfrac{7\pi}{8}$ का मान ज्ञात कीजिए।

[संकेतः व्यंजक $2\left(\cos^4\dfrac{\pi}{8} + \cos^4\dfrac{3\pi}{8}\right)$

$= 2\left[\left(\cos^2\dfrac{\pi}{8} + \cos^2\dfrac{3\pi}{8}\right)^2 - 2\cos^2\dfrac{\pi}{8}\cos^2\dfrac{3\pi}{8}\right]$ के रूप में सरल कीजिए।

27. समीकरण $5\cos^2\theta + 7\sin^2\theta - 6 = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

28. समीकरण $\sin x - 3\sin 2x + \sin 3x = \cos x - 3\cos 2x + \cos 3x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

29. समीकरण $(\sqrt{3} - 1)\cos\theta + (\sqrt{3} + 1)\sin\theta = 2$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

[संकेतः $\sqrt{3} - 1 = r\sin\alpha$, $\sqrt{3} + 1 = r\cos\alpha$ रखिए, जिससे $\tan\alpha = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$
$\alpha = \dfrac{\pi}{12}$ प्राप्त होता है।]

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 30 से 59 में, दिए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए (M.C.Q).

30. यदि $\sin\theta + \text{cosec}\,\theta = 2$, तो $\sin^2\theta + \text{cosec}^2\theta$ बराबर है–

(A) 1 (B) 4
(C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं

31. यदि $f(x) = \cos^2 x + \sec^2 x$ है, तो

(A) $f(x) < 1$ (B) $f(x) = 1$
(C) $1 < f(x) < 2$ (D) $f(x) \geq 2$

[संकेतः A.M $\geq$ GM.]

32. यदि $\tan \theta = \frac{1}{2}$ और $\tan \phi = \frac{1}{3}$ है, तो $\theta + \phi$ का मान है

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) π (C) 0 (D) $\frac{\pi}{4}$

33. निम्नलिखित में से कौन सही नहीं है?

(A) $\sin \theta = -\frac{1}{5}$ (B) $\cos \theta = 1$

(C) $\sec \theta = \frac{1}{2}$ (D) $\tan \theta = 20$

34. $\tan 1° \tan 2° \tan 3° \ldots \tan 89°$ का मान है–

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) परिभाषित नहीं

35. $\frac{1-\tan^2 15°}{1+\tan^2 15°}$ का मान है–

(A) 1 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 2

36. $\cos 1° \cos 2° \cos 3° \ldots \cos 179°$ का मान है–

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) 0 (C) 1 (D) –1

37. यदि $\tan \theta = 3$ है और θ तीसरे चतुर्थांश में स्थित है,तो $\sin \theta$ का मान है–

(A) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (B) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ (C) $\frac{-3}{\sqrt{10}}$ (D) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

38. $\tan 75° - \cot 75°$ का मान है–

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $2+\sqrt{3}$ (C) $2-\sqrt{3}$ (D) 1

39. निम्नलिखित में से कौन सही है?

(A) $\sin 1° > \sin 1$ (B) $\sin 1° < \sin 1$

(C) $\sin 1° = \sin 1$ (D) $\sin 1° = \frac{\pi}{180} \sin 1$

[**संकेत:** 1 रेडियन $= \frac{180°}{\pi} = 57° 30'$ लगभग]

40. यदि $\tan \alpha = \frac{m}{m+1}$, और $\tan \beta = \frac{1}{2m+1}$ है, तो $\alpha + \beta$ बराबर है–

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

41. $3 \cos x + 4 \sin x + 8$ का न्यूनतम मान है–

(A) 5 (B) 9 (C) 7 (D) 3

42. $\tan 3A - \tan 2A - \tan A$ बराबर है–

(A) $\tan 3A \tan 2A \tan A$ (B) $-\tan 3A \tan 2A \tan A$

(C) $\tan A \tan 2A - \tan 2A \tan 3A - \tan 3A \tan A$ (D) इनमें से कोई नहीं

43. $\sin (45° + \theta) - \cos (45° - \theta)$ का मान है–

(A) $2 \cos\theta$ (B) $2 \sin\theta$ (C) 1 (D) 0

44. $\cot\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$ का मान है–

(A) –1 (B) 0 (C) 1 (D) परिभाषित नहीं

45. $\cos 2\theta \cos 2\phi + \sin^2 (\theta - \phi) - \sin^2 (\theta + \phi)$ बराबर है–

(A) $\sin 2(\theta + \phi)$ (B) $\cos 2(\theta + \phi)$

(C) $\sin 2(\theta - \phi)$ (D) $\cos 2(\theta - \phi)$

[संकेत: $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin (A + B) \sin (A - B)$ का प्रयोग कीजिए।]

46. $\cos 12° + \cos 84° + \cos 156° + \cos 132°$ का मान है–

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{8}$

47. यदि $\tan A = \frac{1}{2}$, $\tan B = \frac{1}{3}$ है, तो $\tan (2A + B)$ का मान बराबर है–

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

48. $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{13\pi}{10}$ का मान है–

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) 1

[संकेत: $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ और $\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ प्रयोग कीजिए।]

49. $\sin 50° - \sin 70° + \sin 10°$ का मान बराबर है–

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

50. यदि $\sin\theta + \cos\theta = 1$ है, तो $\sin 2\theta$ का मान बराबर है–

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) –1

51. यदि $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ है, तो $(1 + \tan\alpha)(1 + \tan\beta)$ का मान बराबर है–

(A) 1 (B) 2
(C) – 2 (D) परिभाषित नहीं

52. यदि $\sin\theta = \frac{-4}{5}$ है और θ तीसरे चतुर्थांश में स्थित है, तो $\cos\frac{\theta}{2}$ का मान बराबर है–

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ (C) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

53. अंतराल $[0,2\pi]$ में स्थित समीकरण $\tan x + \sec x = 2\cos x$ के हलों की संख्या है–

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

54. $\sin\frac{\pi}{18} + \sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{2\pi}{9} + \sin\frac{5\pi}{18}$ का मान निम्नलिखित है–

(A) $\sin\frac{7\pi}{18} + \sin\frac{4\pi}{9}$ (B) 1

(C) $\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{3\pi}{7}$ (D) $\cos\frac{\pi}{9} + \sin\frac{\pi}{9}$

55. यदि A दुसरे चतुर्थांश में स्थित है तथा $3\tan A + 4 = 0$, तो $2\cot A - 5\cos A + \sin A$ का मान है–

(A) $\frac{-53}{10}$ (B) $\frac{23}{10}$ (C) $\frac{37}{10}$ (D) $\frac{7}{10}$

56. $\cos^2 48° - \sin^2 12°$ का मान है–

(A) $\frac{\sqrt{5}+1}{8}$ (B) $\frac{\sqrt{5}-1}{8}$

(C) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{5}$ (D) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{2}}$

[**संकेत** : $\cos^2 A - \sin^2 B = \cos (A + B) \cos (A - B)$ का प्रयोग कीजिए।]

57. यदि $\tan \alpha = \dfrac{1}{7}$, और $\tan \beta = \dfrac{1}{3}$, तो $\cos 2\alpha$ बराबर है–

(A) $\sin 2\beta$ (B) $\sin 4\beta$ (C) $\sin 3\beta$ (D) $\cos 2\beta$

58. यदि $\tan \theta = \dfrac{a}{b}$ है, तो $b \cos 2\theta + a \sin 2\theta$ बराबर है

(A) a (B) b (C) $\dfrac{a}{b}$ (D) इनमें से कोई नहीं

59. यदि x की सभी वास्तविक मान के लिए, $\cos \theta = x + \dfrac{1}{x}$ है, तो

(A) θ एक न्यून कोण है (B) θ एक समकोण है

(C) θ एक अधिक कोण है (D) θ का कोई मान संभव नहीं है

प्रश्न संख्या 60 से 67 तक में रिक्त स्थानों को भरिए:

60. $\dfrac{\sin 50^\circ}{\sin 130^\circ}$ का मान ________ है।

61. यदि $k = \sin\left(\dfrac{\pi}{18}\right)\sin\left(\dfrac{5\pi}{18}\right)\sin\left(\dfrac{7\pi}{18}\right)$ है, तो k का संख्यात्मक मान ________ है।

62. यदि $\tan A = \dfrac{1-\cos B}{\sin B}$, तो $\tan 2A =$ ________.

63. यदि $\sin x + \cos x = a$, तो

(i) $\sin^6 x + \cos^6 x =$ ________ (ii) $|\sin x - \cos x| =$ ________.

64. एक त्रिभुज ABC, जिसमें $\angle C = 90^\circ$ के लिए वह समीकरण, जिसके मूल $\tan A$ और $\tan B$ हैं, ________ होगा।

[**संकेत:** $A + B = 90^\circ \Rightarrow \tan A \tan B = 1$ और $\tan A + \tan B = \dfrac{2}{\sin 2A}$]

65. $3 (\sin x - \cos x)^4 + 6 (\sin x + \cos x)^2 + 4 (\sin^6 x + \cos^6 x) =$ ________

66. $x > 0$ दिया रहने पर, $f(x) = -3 \cos \sqrt{3 + x + x^2}$ के मान अंतराल ________ में स्थित हैं।

67. फलन $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ के आलेख पर स्थित किसी बिंदु की x-अक्ष से अधिकतम दूरी ________ है।

प्रश्न 68 से 75 तक प्रत्येक में बताइए कि कथन सत्य है या असत्य, साथ ही इसका औचित्य भी दीजिए।

68. यदि $\tan A = \dfrac{1-\cos B}{\sin B}$ है, तो $\tan 2A = \tan B$

69. समिका $\sin A + \sin 2A + \sin 3A = 3$ के कुछ वास्तविक मानों के लिए सत्य है।

70. $\sin 10°$, $\cos 10°$ से बड़ा है।

71. $\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}\cos\dfrac{16\pi}{15} = \dfrac{1}{16}$

72. θ का एक मान, जो समीकरण $\sin^4\theta - 2\sin^2\theta - 1 = 0$ को संतुष्ट करता है, तथा 0 और 2π के बीच में स्थित होता है।

73. यदि $\operatorname{cosec} x = 1 + \cot x$, तो $x = 2n\pi,\ 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

74. यदि $\tan\theta + \tan 2\theta + \sqrt{3}\tan\theta\tan 2\theta = \sqrt{3}$, तो $\theta = \dfrac{n\pi}{3} + \dfrac{\pi}{9}$

75. यदि $\tan(\pi\cos\theta) = \cot(\pi\sin\theta)$ है, तो $\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ है।

76. निम्नलिखित में स्तंभ C_1 में लिखे प्रत्येक व्यंजक को स्तंभ C_2 में दिए सही उत्तरों से सही मिलान कीजिए:

C_1	C_2
(a) $\sin(x+y)\sin(x-y)$	(i) $\cos^2 x - \sin^2 y$
(b) $\cos(x+y)\cos(x-y)$	(ii) $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$
(c) $\cot\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)$	(iii) $\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$
(d) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)$	(iv) $\sin^2 x - \sin^2 y$