अध्याय 5

सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघात समीकरण

5.1 समग्र अवलोकन

हम जानते हैं कि एक वास्तविक संख्या का वर्ग सदैव ऋणेत्तर होता है। उदाहरणार्थ, $(4)^2 = 16$ और $(-4)^2 = 16$ है। इसलिए 16 का वर्गमूल ± 4 है। किसी ऋणात्मक संख्या के वर्गमूल के बारे में क्या कहा जा सकता है? यह स्पष्ट है कि एक ऋणात्मक संख्या का कोई वास्तविक वर्गमूल नहीं हो सकता। अत:, हमें वास्तविक संख्याओं के निकाय को एक ऐसे निकाय में विस्तृत करने की आवश्यकता है जिसमें हम ऋणात्मक संख्याओं के वर्गमूल भी ज्ञात कर सकें। ऑयलर (1707-1783) ऐसा प्रथम गणितज्ञ था, जिसने -1 के धनात्मक वर्गमूल के लिए संकेत i [आयोटा ((iota)] प्रयुक्त किया। अर्थात्, $i = \sqrt{-1}$ है।

5.1.1 *काल्पनिक संख्याएँ*

किसी ऋणात्मक संख्या का वर्गमूल एक काल्पनिक संख्या कहलाता है,

जैसे $$\sqrt{-9} = \sqrt{-1}\sqrt{9} = i3,\ \sqrt{-7} = \sqrt{-1}\sqrt{7} = i\sqrt{7}$$

5.1.2 *i की पूर्णांकीय घातें*

$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$, इत्यादि।

$n > 4$ के लिए, i^n अभिकलित करने के लिए, हम n को 4 से भाग देकर उसे $n = 4m + r$ के रूप में लिखते हैं, जहाँ m भागफल है और r शेषफल है $0 \le r \le 4$ है।

अत:, $$i^n = i^{4m+r} = (i^4)^m \cdot (i)^r = (1)^m (i)^r = i^r$$

उदाहरणार्थ, $$(i)^{39} = i^{4\times 9+3} = (i^4)^9 \cdot (i)^3 = i^3 = -i$$

तथा $$(i)^{-435} = i^{-(4\times 108+3)} = (i)^{-(4\times 108)} \cdot (i)^{-3}$$

$$= \frac{1}{(i^4)^{108}} \cdot \frac{1}{(i)^3} = \frac{i}{(i)^4} = i$$

(i) यदि a और b धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं, तो

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{-1}\sqrt{a} \times \sqrt{-1}\sqrt{b} = i\sqrt{a} \times i\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$$

(ii) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ यदि a और b धनात्मक हैं अथवा इनमें से कम से कम एक ऋणात्मक हो या शून्य हो। परंतु $\sqrt{a}\sqrt{b} \neq \sqrt{ab}$, यदि a और b दोनों ऋणात्मक हैं।

5.1.3 सम्मिश्र संख्याएँ

1. वह संख्या जिसे $a + ib$ के रूप में लिखा जा सके एक सम्मिश्र संख्या कहलाती है, जहाँ a और b वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $i = \sqrt{-1}$ है।
2. यदि $z = a + ib$ एक सम्मिश्र संख्या है, तो a और b क्रमशः इस सम्मिश्र संख्या के वास्तव और काल्पनिक भाग कहलाते हैं। इन्हें $\text{Re}\,(z) = a$ और $\text{I}m\,(z) = b$ लिखा जाता है।
3. सम्मिश्र संख्याओं के लिए क्रम संबंध 'से बड़ा है' और 'से छोटा है' परिभाषित नहीं है।
4. यदि किसी सम्मिश्र संख्या का काल्पनिक भाग शून्य हो, तो वह एक शुद्धतः वास्तविक संख्या कही जाती है तथा यदि उसका वास्तविक भाग शून्य हो, तो वह शुद्धतः काल्पनिक संख्या कही जाती है। उदाहरणार्थ, 2 एक शुद्धतः काल्पनिक संख्या है, क्योंकि इसका काल्पनिक भाग शून्य है तथा $3i$ के शुद्धतः काल्पनिक संख्या है, क्योंकि इसका वास्तविक भाग शून्य है।

5.1.4 सम्मिश्र संख्याओं का बीजगणित

1. दो सम्मिश्र संख्या $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$ बराबर कहलाती है,
   यदि $a = c$ और $b = d$
2. मान लीजिए कि $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$ दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं।
   तब $z_1 + z_2 = (a + c) + i\,(b + d)$ होता है।

5.1.5 सम्मिश्र संख्याओं का योग निम्नलिखित गुणों (गुणधर्मों) को संतुष्ट करता है

1. क्योंकि दो सम्मिश्र संख्याओं का योग पुनः एक सम्मिश्र संख्या होता है, इसलिए सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय योग के लिए संवृत है।
2. सम्मिश्र संख्याओं का योग क्रम विनिमेय होता है, अर्थात् $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
3. सम्मिश्र संख्याओं का योग साहचर्य (या सहचारी) होता है, अर्थात्
   $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
4. किसी सम्मिश्र संख्या $z = x + i\,y$ के लिए एक ऐसी सम्मिश्र संख्या 0, अर्थात् $(0 + 0i)$ ऐसी होती है कि $z + 0 = 0 + z = z$ होता है। यह संख्या 0 योग के लिए तत्समक अवयव कहलाती है।
5. एक सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ के लिए, सदैव एक सम्मिश्र संख्या $-z = -x - iy$ ऐसी होती है कि $z + (-z) = (-z) + z = 0$। यह संख्या $-z$, z का योज्य प्रतिलोम कहलाती है।

5.1.6 सम्मिश्र संख्याओं का गुणन

मान लीजिए कि $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$, दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं।

तब $z_1 \,.\, z_2 = (a + ib)\,(c + id) = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$

1. क्योंकि दो सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल पुनः एक सम्मिश्र संख्या है, इसलिए सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय गुणन के लिए संवृत है।
2. सम्मिश्र संख्याओं का गुणन क्रम विनिमेय होता है, अर्थात् $z_1 z_2 = z_2 . z_1$

3. सम्मिश्र संख्याओं का गुणन सहचारी होता है, अर्थात् $(z_1.z_2) . z_3 = z_1 . (z_2.z_3)$
4. किसी सम्मिश्र संख्या $z = (x + iy)$ के लिए एक ऐसी सम्मिश्र संख्या 1, अर्थात् $(1 + 0i)$, इस प्रकार कि $z . 1 = 1 . z = z$ होता है। यह संख्या 1 गुणन के लिए तत्समक अवयव कहलाती है।
5. किसी शून्येतर सम्मिश्र संख्या $z = x + i y$ के लिए, एक सम्मिश्र संख्या $\frac{1}{z}$ है जिसके लिए $z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = 1$ होता है। $\frac{1}{z}$, z का गुणनात्मक प्रतिलोम कहलाता है। अर्थात् $a + ib$ का गुणनात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$ है।
6. किन्हीं तीन सम्मिश्र संख्या z_1, z_2 और z_3 के लिए,
$$z_1 . (z_2 + z_3) = z_1 . z_2 + z_1 . z_3$$
तथा
$$(z_1 + z_2) . z_3 = z_1 . z_3 + z_2 . z_3$$
अर्थात् सम्मिश्र संख्याओं के लिए गुणन, योग पर वितरित (या बंटित) है।

5.1.7 मान लीजिए कि $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$ (शून्येत्तर)

दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं। तब, $z_1 \div z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + i\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}$

5.1.8 एक सम्मिश्र संख्या का संयुग्मी

मान लीजिए कि $z = a + ib$ एक सम्मिश्र संख्या है। तब इसके काल्पनिक भाग के चिन्ह को बदलने पर प्राप्त संख्या सम्मिश्र संख्या z का संयुग्मी कहलाती है तथा इसे $\overline{z}$ से निर्दिष्ट किया जाता है, अर्थात् $\overline{z} = a - ib$

ध्यान दीजिए कि z का योज्य प्रतिलोम $- a - ib$ है, जबकि इसका संयुग्मी $a - ib$ है।

हमें ज्ञात है:

1. $\overline{(\overline{z})} = z$
2. $z + \overline{z} = 2 \text{ Re } (z)$, $z - \overline{z} = 2\, i \text{ Im}(z)$
3. $z = \overline{z}$, यदि z शुद्धतः वास्तविक संख्या है।
4. $z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z$ शुद्धतः काल्पनिक संख्या है।
5. $z . \overline{z} = \{\text{Re } (z)\}^2 + \{\text{Im } (z)\}^2$
6. $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ और $\overline{(z_1 - z_2)} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$
7. $\overline{(z_1 . z_2)} = (\overline{z}_1) . (\overline{z}_2)$ और $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{(\overline{z}_1)}{(\overline{z}_2)}$, $(\overline{z}_2 \neq 0)$

5.1.9 एक सम्मिश्र संख्या का मापांक या निरपेक्ष मान

मान लीजिए कि $z = a + ib$ एक सम्मिश्र संख्या है। तब, इसके वास्तविक भाग के वर्ग और काल्पनिक

भाग के वर्ग के योग का धनात्मक वर्गमूल z का मापांक (निरपेक्ष मान) कहलाता है। और इसे $|z|$ से निर्दिष्ट किया जाता है, अर्थात् $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

सम्मिश्र संख्याओं के एक समुच्चय में, $z_1 > z_2$ या $z_2 > z_1$ अर्थहीन है; परंतु $|z_1| > |z_2|$ या $|z_1| < |z_2|$ अर्थपूर्ण हैं; क्योंकि $|z_1|$ और $|z_2|$ वास्तविक संख्याएँ हैं।

5.1.10 *एक सम्मिश्र संख्या के मापांक के गुण*

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$, अर्थात् Re $(z) = 0$ और Im $(z) = 0$
2. $|z| = |\bar{z}| = |-z|$
3. $-|z| \le \text{Re}\,(z) \le |z|$ और $-|z| \le \text{Im}\,(z) \le |z|$
4. $z\,\bar{z} = |z|^2,\ |z^2| = |\bar{z}|^2$
5. $|z_1 z_2| = |z_1|.|z_2|,\ \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\ (z_2 \ne 0)$
6. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\text{Re}\,(z_1\,\bar{z}_2)$
7. $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\text{Re}\,(z_1\,\bar{z}_2)$
8. $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$
9. $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$
10. $|az_1 - bz_2|^2 + |bz_1 + az_2|^2 = (a^2 + b^2)\,(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

    विशेषतः

    $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2\,(|z_1|^2 + |z_2|^2)$
11. जैसा कि पूर्व में चर्चा की जा चुकी है, एक सम्मिश्र संख्या $z = a + ib\ (\ne 0)$ का गुणनात्मक प्रतिलोम (व्युत्क्रम)

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

5.2 आर्गंड तल

किसी सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ को समकोणिक अक्षों के एक युग्म के सापेक्ष एक कार्तीय (तल) में एक अद्वितीय बिंदु (a, b) के रूप में निरूपित किया जा सकता है। सम्मिश्र संख्या $0 + 0i$ मूल बिंदु $O(0, 0)$ को निरूपित करती है। एक शुद्धत: वास्तविक संख्या a, अर्थात् $(a + 0i)$ को x-अक्ष पर स्थित बिंदु $(a, 0)$ से निरूपित किया जाता है। इसीलिए, x-अक्ष को वास्तविक अक्ष कहते हैं। एक शुद्धत: काल्पनिक संख्या ib, अर्थात् $(0 + ib)$ को y-अक्ष स्थित बिंदु $(0, b)$ से निरूपित किया जाता है। इसीलिए, y-अक्ष को काल्पनिक अक्ष कहते हैं।

इसी प्रकार, तल में सम्मिश्र संख्याओं के बिंदुओं द्वारा निरूपण को **आर्गंड आरेख (Argand) diagram)** कहते हैं। वह तल जिस पर सम्मिश्र संख्याओं को बिंदुओं के रूप में निरूपित किया जाता है। सम्मिश्र तल या आर्गंड तल या गाउसनीय तल कहलाता है।

यदि एक सम्मिश्र तल में, दो सम्मिश्र संख्या z_1 और z_2 को क्रमश: बिंदुओं P और Q से निरूपित किया जाता है, तो $|z_1 - z_2| = PQ$

5.2.1 *एक सम्मिश्र संख्या का ध्रुवीय रूप*

मान लीजिए कि P आर्गंड तल में एक शून्येत्तर सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ को निरूपित करने वाला एक बिंदु है। यदि OP, x-अक्ष की धनात्मक दिशा से कोण θ बनाये तो $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ इस सम्मिश्र संख्या का ध्रुवीय रूप कहलाता है, जहाँ $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ है और $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$ है। यहाँ θ सम्मिश्र संख्या z का कोणांक (argument या amplitude) कहलाता है तथा हम इसे $\arg(z) = \theta$ लिखते हैं। θ का वह अद्वितीय मान, जिससे $-\pi \le \theta \le \pi$ हो, मुख्य कोणांक कहलाता है।

$$\arg(z_1 . z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

5.2.2 एक द्विघात समीकरण का हल

समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ जहाँ a, b और c संख्याएँ (वास्तविक या सम्मिश्र, $a \neq 0$ हैं, चर x में एक व्यापक द्विघात समीकरण कहलाता है। चर के वे मान जो इस समीकरण को संतुष्ट करते हैं, इसके मूल कहलाते हैं।

वास्तविक गुणांकों वाली द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के दो मूल $\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ और $\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ होते हैं, जहाँ $D = b^2 - 4ac$ होता है, जो इस समीकरण का विविक्तकर कहलाता है।

टिप्पणियाँ

1. जब $D = 0$ है, तो द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक और बराबर (समान) होते हैं। जब $D > 0$ है, तो मूल वास्तविक और असमान होते हैं। साथ ही, यदि $a, b, c \in Q$ और D एक पूर्ण वर्ग है, तो समीकरण के मूल परिमेय और असमान होते हैं तथा यदि $a, b, c \in Q$ और D एक पूर्ण वर्ग नहीं है, तो मूल अपरिमेय होते हैं और एक युग्म के रूप में होते हैं। जब $D < 0$ तो द्विघात समीकरण के मूल अवास्तविक (सम्मिश्र) होते हैं।

2. यदि α, β समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हैं, तो मूलों का योग $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$ और मूलों का गुणनफल $(\alpha . \beta) = \frac{c}{a}$ होता है।

3. मान लीजिए कि किसी द्विघात समीकरण के मूलों का योग S है और मूलों का गुणनफल P है, तो वह समीकरण $x^2 - Sx + P = 0$ होता है।

5.3. हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय प्रश्न (SA)

उदाहरण 1 मान ज्ञात कीजिए : $(1 + i)^6 + (1 - i)^3$

हल $(1 + i)^6 = \{(1 + i)^2\}^3 = (1 + i^2 + 2i)^3 = (1 - 1 + 2i)^3 = 8\, i^3 = -8i$

तथा $(1 - i)^3 = 1 - i^3 - 3i + 3i^2 = 1 + i - 3i - 3 = -2 - 2i$

अतः, $(1 + i)^6 + (1 - i)^3 = -8i - 2 - 2i = -2 - 10i$

उदाहरण 2 यदि $(x+iy)^{\frac{1}{3}} = a + ib$, जहाँ $y, a, b \in \mathbf{R}$ तो दर्शाइए कि

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = -2\,(a^2 + b^2)$$

हल $(x+iy)^{\frac{1}{3}} = a + ib$

$\Rightarrow \quad x + iy = (a + ib)^3$

अर्थात् $\quad x + iy = a^3 + i^3 b^3 + 3a^2 (ib) + 3a\,(ib)^2$

$= a^3 - ib^3 + i3a^2b - 3ab^2$

$= a^3 - 3ab^2 + i\,(3a^2b - b^3)$

$\Rightarrow \quad x = a^3 - 3ab^2$ और $y = 3a^2b - b^3$

अतः, $\dfrac{x}{a} = a^2 - 3b^2$ और $\dfrac{y}{b} = 3a^2 - b^2$

इसलिए, $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = a^2 - 3b^2 - 3a^2 + b^2 = -2a^2 - 2b^2 = -2(a^2 + b^2)$

उदाहरण 3 समीकरण $z^2 = \bar{z}$ को हल कीजिए, जहाँ $z = x + iy$ है।

हल $z^2 = \bar{z} \Rightarrow x^2 - y^2 + i2xy = x - iy$

अतः, $x^2 - y^2 = x$ ... (1) और $2xy = -y$ ... (2)

(2) से, हम $y = 0$ या $x = -\dfrac{1}{2}$ प्राप्त करते हैं।

जब $y = 0$, तो (1), से हम $x^2 - x = 0$ प्राप्त करते हैं, जिससे $x = 0$ या $x = 1$ प्राप्त होता है।

जब $x = -\dfrac{1}{2}$ तो (1) से हम $y^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}$ अर्थात् $y^2 = \dfrac{3}{4}$ जिससे $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ प्राप्त होता है।

अतः समीकरण के हल $0 + i0,\ 1 + i0,\ -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ है।

उदाहरण 4 यदि $\dfrac{2z+1}{iz+1}$ का काल्पनिक भाग–2 है, तो दर्शाइए कि z को आर्गंड तल में निरूपित करने वाले बिंदु का बिंदु पथ एक सरल रेखा है।

हल मान लीजिए कि $z = x + iy$ तब,

$$\frac{2z+1}{iz+1} = \frac{2(x+iy)+1}{i(x+iy)+1} = \frac{(2x+1)+i2y}{(1-y)+ix}$$

$$= \frac{\{(2x+1)+i2y\}}{\{(1-y)+ix\}} \times \frac{\{(1-y)-ix\}}{\{(1-y)-ix\}}$$

$$= \frac{(2x+1-y)+i(2y-2y^2-2x^2-x)}{1+y^2-2y+x^2}$$

इस प्रकार, $\mathrm{Im}\left(\dfrac{2z+1}{iz+1}\right) = \dfrac{2y-2y^2-2x^2-x}{1+y^2-2y+x^2}$

परंतु, $\mathrm{Im}\left(\dfrac{2z+1}{iz+1}\right) = -2$ (दिया है)

अतः, $\dfrac{2y-2y^2-2x^2-x}{1+y^2-2y+x^2}=-2$

$\Rightarrow$ $2y - 2y^2 - 2x^2 - x = -2 \quad -2y^2 + 4y - 2x^2$

अर्थात् $x + 2y - 2 = 0$, जो एक सरल रेखा का समीकरण है।

उदाहरण 5 यदि $|z^2-1|=|z|^2+1$ है, तो दर्शाइए कि z काल्पनिक अक्ष पर स्थित है।

हल मान लीजिए कि $z = x + iy$, तब $|z^2 - 1| = |z|^2 + 1$

$\Rightarrow$ $|x^2-y^2-1+i\,2xy|=|x+iy|^2+1$

$\Rightarrow$ $(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2 = (x^2 + y^2 + 1)^2$

$\Rightarrow$ $4x^2 = 0$ अर्थात् $x = 0$

अतः, z, y-अक्ष, अर्थात् काल्पनिक अक्ष पर स्थित है।

उदाहरण 6 मान लीजिए कि z_1 और z_2 दो सम्मिश्र संख्याएँ इस प्रकार है कि $\overline{z}_1+i\overline{z}_2=0$ है तथा $\arg(z_1 z_2) = \pi$, तब $\arg(z_1)$ ज्ञात कीजिए।

हल दिया है: $\overline{z}_1+i\overline{z}_2=0$

$\Rightarrow$ $z_1 = i z_2$ और $z_2 = -i z_1$

इस प्रकार $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(-iz_1) = \pi$

$\Rightarrow$ $\arg(-iz_1^2) = \pi$

$\Rightarrow$ $\arg(-i) + \arg(z_1^2) = \pi$

$\Rightarrow$ $\arg(-i) + 2\arg(z_1) = \pi$

$\Rightarrow$ $\dfrac{-\pi}{2} + 2\arg(z_1) = \pi$

$\Rightarrow$ $\arg(z_1) = \dfrac{3\pi}{4}$

उदाहरण 7 मान लीजिए कि z_1 और z_2 दो सम्मिश्र संख्याएँ इस प्रकार हैं कि

$|z_1 + x_2| = |z_1| + z_2|$ तब दर्शाइए कि $\arg(z_1) - \arg(z_2) = 0$

हल मान लीजिए कि $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ तथा $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

जहाँ $r_1 = |z_1|$, $\arg(z_1) = \theta_1$, $r_2 = |z_2|$ और $\arg(z_2) = \theta_2$

हमें ज्ञात है $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$

$= |r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)+r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)|=r_1+r_2$

$$= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2) = (r_1 + r_2)^2 \Rightarrow \cos(\theta_1 - \theta_2) = 1$$

$$\Rightarrow \theta_1 - \theta_2 = 0 \text{ अर्थात् } \theta_1 = \theta_2$$

अर्थात् $\arg(z_1) = \arg(z_2)$ या $\arg(z_1) - \arg(z_2) = 0$

उदाहरण 8 यदि z_1, z_2, z_3 ऐसी सम्मिश्र संख्याएँ हैं कि $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = 1$, तो $|z_1 + z_2 + z_3|$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$

$\Rightarrow$ $|z_1|^2 = |z_2|^2 = |z_3|^2 = 1$

$\Rightarrow$ $z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3 = 1$

$\Rightarrow$ $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}, \bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}, \bar{z}_3 = \frac{1}{z_3}$

दिया है कि $\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = 1$

$\Rightarrow$ $|\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3| = 1$, अर्थात् $|\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = 1$

$\Rightarrow$ $|z_1 + z_2 + z_3| = 1$

उदाहरण 9 यदि एक सम्मिश्र संख्या z त्रिज्या 3 इकाई और केंद्र $(-4, 0)$ वाले एक वृत्त के अभ्यंतर या उसकी परिसीमा पर स्थित है, तो $|z+1|$ के अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

हल z को निरूपित करने वाले बिंदु की वृत्त के केंद्र से दूरी $|z - (-4 + i0)| = |z + 4|$

अब, $|z + 1| = |z + 4 - 3| \le |z + 4| + |-3| \le 3 + 3 = 6$

अतः, $|z + 1|$ का अधिकतम मान 6 है।

क्योंकि किसी सम्मिश्र संख्या के मापांक का न्यूनतम मान शून्य होता है, इसलिए $|z + 1|$ का न्यूनतम मान 0 है।

उदाहरण 10 वे बिंदु निर्धारित कीजिए, जिनके लिए $3 < |z| < 4$

हलः $|z| < 4 \Rightarrow x^2 + y^2 < 16$, जो केंद्र मूलबिंदु और त्रिज्या 4 इकाई वाले वृत्त का अभ्यंतर है तथा $|z| > 3 \Rightarrow x^2 + y^2 > 9$, जो केंद्र मूलबिंदु और त्रिज्या 3 इकाई वाले वृत का बहिर्भाग है। अतः

$3 < |z| < 4$ वह भाग है जो दो वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ और $x^2 + y^2 = 16$ के बीच में स्थित है।

उदाहरण 11 $2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - x + 41$ का मान ज्ञात कीजिए, जब $x = -2 - \sqrt{3}\,i$

हल $x + 2 = -\sqrt{3}\,i \Rightarrow x^2 + 4x + 7 = 0$

अतः $\qquad 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - x + 41 = (x^2 + 4x + 7)(2x^2 - 3x + 5) + 6$

$$= 0 \times (2x^2 - 3x + 5) + 6 = 6$$

उदाहरण 12 P का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए समीकरण $x^2 - Px + 8 = 0$ के मूलों का अंतर 2 हो।

हल मान लीजिए कि $x^2 - Px + 8 = 0$ के मूल α और β हैं।

इसलिए, $\qquad \alpha + \beta = P$ और $\alpha \,.\, \beta = 8$

अब, $\qquad \alpha - \beta = \pm\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$

अतः, $\qquad 2 = \pm\sqrt{P^2 - 32}$

$\Rightarrow \qquad P^2 - 32 = 4,\ P^2 = 36$ अर्थात् $P = \pm 6$

उदाहरण 13 a का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए समीकरण $x^2 - (a - 2)\,x - (a + 1) = 0$ के मूलों के वर्गों का योग न्यूनतम है।

हल मान लीजिए कि α, β दिए हुए समीकरण के मूल हैं।

अतः, $\qquad \alpha + \beta = a - 2$ और $\alpha\beta = -(a + 1)$

अब, $\qquad \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$$= (a - 2)^2 + 2(a + 1)$$

$$= (a - 1)^2 + 5$$

अतः, $\qquad \alpha^2 + \beta^2$ न्यूनतम होगा, जब $(a - 1)^2 = 0$, अर्थात् $a = 1$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (LA)

उदाहरण 14 यदि सम्मिश्र संख्याओं z_1 और z_2 के लिए,

$$|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = k(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$$ तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हलः

$$\text{LHS} = |1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2$$

$$= (1 - \bar{z}_1 z_2)\,\overline{(1 - \bar{z}_1 z_2)} - (z_1 - z_2)\,\overline{(z_1 - z_2)}$$

$$= (1 - \bar{z}_1 z_2)\,(1 - z_1 \bar{z}_2) - (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$$

$$= 1 + z_1 \bar{z}_1\, z_2 \bar{z}_2 - z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2$$

$$= 1+|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2$$

$$= (1-|z_1|^2)\,(1-|z_2|^2)$$

$$\text{RHS} = k\,(1 - |z_1|^2)\,(1-|z_2|^2)$$

अतः, LHS और RHS को बराबर करने पर $k = 1$

उदाहरण 15 यदि z_1 और z_2 दोनों $z + \bar{z} = 2|z-1|$, जहाँ $\arg(z_1 - z_2) = \frac{\pi}{4}$ को संतुष्ट करते हैं, तो $\text{I}m\,(z_1 + z_2)$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ और $z_2 = x_2 + iy_2$ है।

तब, $\quad z + \bar{z} = 2|z-1|$

$\Rightarrow \quad (x + iy) + (x - iy) = 2\,|x-1+iy|$

$\Rightarrow \quad 2x = 1 + y^2 \qquad \ldots (1)$

क्योंकि z_1 और z_2 दोनों (1) को संतुष्ट करते हैं, इसलिए हमें प्राप्त है:

$2x_1 = 1 + y_1^2$ और $2x_2 = 1 + y_2^2$

$\Rightarrow \quad 2\,(x_1 - x_2) = (y_1 + y_2)\,(y_1 - y_2)$

$\Rightarrow \quad 2 = (y_1 + y_2)\left(\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right) \qquad \ldots (2)$

पुनः $\quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$

अतः $\quad \tan\theta = \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$, जहाँ $\theta = \arg(z_1 - z_2)$ है।

$\Rightarrow \quad \tan\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \qquad \left(\text{क्योंकि } \theta = \dfrac{\pi}{4}\right)$

अर्थात् $\quad 1 = \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

अतः, (2) से हमें प्राप्त होता है: $2 = y_1 + y_2$, अर्थात् $\text{Im}\,(z_1 + z_2) = 2$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण 16 रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

(i) 'a' का वास्तविक मान जिसके लिए $3i^3 - 2ai^2 + (1 - a)i + 5$ वास्तविक है ______ होगा।

(ii) यदि $|z| = 2$ और $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$ है, तो $z =$ ——— है।

(iii) $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$ को संतुष्ट करने वाले z का बिंदु पथ ——— है।

(iv) $(-\sqrt{-1})^{4n-3}$ का मान ——— है, जहाँ $n \in \mathbf{N}$

(v) सम्मिश्र संख्या $\dfrac{1-i}{1+i}$ का संयुग्मी ——— है।

(vi) यदि एक सम्मिश्र संख्या तीसरे चतुर्थांश में स्थित है, तो उसका संयुग्मी ——— में स्थित होगा।

(vii) यदि $(2 + i)(2 + 2i)(2 + 3i) \ldots (2 + ni) = x + iy$ तो $5.8.13 \ldots (4 + n^2) =$ ———

हल

(i) $3i^3 - 2ai^2 + (1 - a)i + 5 = -3i + 2a + 5 + (1 - a)i$
$= 2a + 5 + (-a - 2)i$, जो वास्तविक होगा यदि $-a - 2 = 0$ अर्थात् $a = -2$

(ii) $z = |z|\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}(1+i)$

(iii) मान लीजिए कि $z = x + iy$, तो इसका ध्रुवीय रूप $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ है, जहाँ

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ और θ, $\arg(z)$ है। $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ दिया है।

इस प्रकार, $\tan\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = \sqrt{3}x$, जहाँ $x > 0, y > 0$ है।

अतः, z का बिंदु पथ, मूलबिंदु के अतिरिक्त $y = \sqrt{3}x$, का प्रथम चतुर्थांश में एक भाग है।

(iv) यहाँ, $(-\sqrt{-1})^{4n-3} = (-i)^{4n-3} = (-i)^{4n}(-i)^{-3} = \dfrac{1}{(-i)^3}$

$$= \frac{1}{-i^3} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$$

(v) $\dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{1-i}{1+i} \times \dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{1+i^2-2i}{1-i^2} = \dfrac{1-1-2i}{1+1} = -i$

अतः, $\dfrac{1-i}{1+i}$ का संयुग्मी i है।

(vi) किसी सम्मिश्र संख्या का संयुग्मी x-अक्ष के सापेक्ष उसका प्रतिबिंब होता है। अतः, एक संख्या तीसरे चतुर्थांश में स्थित है, तो उसका प्रतिबिंब दूसरे चतुर्थांश में स्थित होगा।

(vii) दिया है: $(2 + i)(2 + 2i)(2 + 3i) \ldots (2 + ni) = x + iy$ ... (1)

$\Rightarrow \qquad (\overline{2+i})\,(\overline{2+2i})\,(\overline{2+3i})\ldots(\overline{2+ni}) = (\overline{x+iy}) = (x-iy)$

अर्थात् $\quad (2-i)\,(2-2i)\,(2-3i)\ \ldots\ (2-ni) = x - iy$ ... (2)

(1) और (2) का गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है: $5.8.13\ \ldots\ (4 + n^2) = x^2 + y^2$

उदाहरण 17 बताइए कि निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य है और कौन सा असत्य है।

(i) एक शून्येतर सम्मिश्र संख्या को i से गुणा करने पर, वह उसे वामावर्त दिशा में एक समकोण पर घुमा देता है।

(ii) सम्मिश्र संख्या $\cos\theta + i\sin\theta$, θ के किसी मान के लिए शून्य हो सकती है।

(iii) यदि कोई सम्मिश्र संख्या अपने संयुग्मी के साथ संपाती है, तो वह संख्या अवश्य ही काल्पनिक अक्ष पर स्थित होना चाहिए।

(iv) सम्मिश्र संख्याएं $z = (1 + i\sqrt{3})\,(1 + i)\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ का कोणांक $\frac{7\pi}{12} + \theta$ है।

(v) सम्मिश्र संख्या z, जिसके लिए $|z+1| < |z-1|$ है, को निरूपित करने वाले बिंदु एक वृत्त के अभ्यंतर में स्थित होते हैं।

(vi) यदि तीन सम्मिश्र संख्याएँ z_1, z_2 और z_3 एक समांतर श्रेणी (A.P) में हैं तो वे सम्मिश्र तल में एक वृत्त पर स्थित होते हैं।

(vii) यदि n एक धनात्मक पूर्णांक है, तो $i^n + (i)^{n+1} + (i)^{n+2} + (i)^{n+3}$ का मान शून्य है।

हल

(i) सत्य, मान लीजिए कि OP द्वारा निरूपित सम्मिश्र संख्या $z = 2 + 3i$ है। तब, $iz = -3 + 2i$ रेखाखंड OQ से निरूपित होगा, जहाँ OP वामावर्त दिशा में एक समकोण पर घूमने पर OQ के संपाती हो जाता है।

(ii) असत्य, क्योंकि $\cos\theta + i\sin\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0$ और $\sin\theta = 0$. परंतु θ का कोई ऐसा मान नहीं है, जिसके लिए $\cos\theta$ और $\sin\theta$ एक साथ शून्य होंगे।

(iii) असत्य, क्योंकि $x + iy = x - iy \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ संख्या x-अक्ष पर स्थित है।

(iv) सत्य, $\arg(z) = \arg(1 + i\sqrt{3}) + \arg(1 + i) + \arg(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \theta = \frac{7\pi}{12} + \theta$$

(v) असत्य, क्योंकि $|x+iy+1| < |x+iy-1|$

$\Rightarrow \qquad (x + 1)^2 + y^2 < (x - 1)^2 + y^2$ जिससे $4x < 0$ प्राप्त होता है।

(vi) असत्य, क्योंकि यदि z_1, z_2 और z_3 एक समांतर श्रेणी में हों, तो $z_2 = \frac{z_1 + z_3}{2} \Rightarrow z_2$, z_1 और z_3 का मध्य बिंदु है। इसका अर्थ है कि z_1, z_2 और z_3 संरेख हैं।

(vii) सत्य, क्योंकि $i^n + (i)^{n+1} + (i)^{n+2} + (i)^{n+3}$

$$= i^n (1 + i + i^2 + i^3) = i^n (1 + i - 1 - i)$$
$$= i^n (0) = 0$$

उदाहरण 18 स्तंभ A और स्तंभ B के कथनों का सही मिलान कीजिए:

स्तंभ A	**स्तंभ B**
(a) $1+i^2 + i^4 + i^6 + \ldots i^{20}$ का मान है	(i) शुद्धत: काल्पनिक सम्मिश्र संख्या
(b) i^{-1097} का मान है	(ii) शुद्धत: वास्तविक सम्मिश्र संख्या
(c) $1+i$ का संयुग्मी किस चतुर्थांश में स्थित है	(iii) द्वितीय चतुर्थांश
(d) $\dfrac{1+2i}{1-i}$ किस चतुर्थांश में स्थित है	(iv) चौथा चतुर्थांश
(e) यदि $a, b, c \in R$ और $b^2 - 4ac < 0$ तब समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल अवास्तविक एवं सम्मिश्र हैं	(v) संयुग्मी युग्मों में घटित नहीं हो सकते हैं
(f) यदि $a, b, c \in \mathbf{R}$ और $b^2 - 4ac > 0$ एवं $b^2 - 4ac$ एक पूर्ण वर्ग है, तो समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हैं	(vi) संयुग्मी युग्मों में घटित हो सकते हैं

हल

(a) $\Leftrightarrow$ (ii), क्योंकि $1 + i^2 + i^4 + i^6 + \ldots + i^{20}$

$= 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 = 1$ (जो शुद्धत: एक वास्तविक सम्मिश्र संख्या है)

(b) $\Leftrightarrow$ (i), क्योंकि $i^{-1097} = \dfrac{1}{(i)^{1097}} = \dfrac{1}{i^{4\times 274+1}} = \dfrac{1}{(i^4)^{274}\, i} = \dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i^2} = -i$, जो

शुद्धत: एक काल्पनिक सम्मिश्र संख्या है।

(c) $\Leftrightarrow$ (iv), $1 + i$ का संयुग्मी $1 - i$ है, जो बिंदु $(1, -1)$ से निरूपित किया जाता है और यह चौथे चतुर्थांश में स्थित है।

(d) $\Leftrightarrow$ (iii), क्योंकि $\dfrac{1+2i}{1-i} = \dfrac{1+2i}{1-i} \times \dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{-1+3i}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$, जिसे द्वितीय चतुर्थांश

में बिंदु $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ से निरूपित किया जाता है।

(e) $\Leftrightarrow$ (vi), यदि $b^2 - 4ac < 0$ तो $= D < 0$ अर्थात् D का वर्गमूल एक काल्पनिक संख्या है। अतः मूल $x = \dfrac{-b \pm \text{काल्पनिक संख्या}}{2a}$ है, अर्थात् मूल संयुग्मी युग्मों में हैं।

(f) $\Leftrightarrow$ (v), समीकरण $x^2 - (5 + \sqrt{2})\,x + 5\sqrt{2} = 0$ पर विचार कीजिए, जहाँ $a = 1$, $b = -(5 + \sqrt{2})$, $c = 5\sqrt{2}$ स्पष्टतः $a, b, c \in$ R

अब $D = b^2 - 4ac = \{-(5 + \sqrt{2})\}^2 - 4.1.5\sqrt{2} = (5 - \sqrt{2})^2$

अतः $x = \dfrac{5 + \sqrt{2} \pm (5 - \sqrt{2})}{2} = 5, \sqrt{2}$ जिससे संयुग्मी युग्म नहीं बनता है।

उदाहरण 19: $\dfrac{i^{4n+1} - i^{4n-1}}{2}$ का क्या मान है?

हल: i, क्योंकि $\dfrac{i^{4n+1} - i^{4n-1}}{2} = \dfrac{i^{4n}i - i^{4n}i^{-i}}{2}$

$$= \frac{i - \frac{1}{i}}{2} = \frac{i^2 - 1}{2i} = \frac{-2}{2i} = i$$

उदाहरण 20: वह कौन-सा न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक n है, जिसके लिए $(1 + i)^{2n} = (1 - i)^{2n}$?

हल $n = 2$, क्योंकि $(1 + i)^{2n} = (1 - i)^{2n} \Rightarrow \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2n} = 1$

$\Rightarrow \quad (i)^{2n} = 1$ जो $n = 2$ के लिए संभव है $\quad (\because i^4 = 1)$

उदाहरण 21: $3 + \sqrt{7}\, i$ का व्युत्क्रम क्या है?

हल: z का व्युत्क्रम $= \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

अतः, $3 + \sqrt{7}\, i$ का व्युत्क्रम $= \dfrac{3 - \sqrt{7}i}{16} = \dfrac{3}{16} - \dfrac{\sqrt{7}i}{16}$

उदाहरण 22: यदि $z_1 = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ और $z_2 = \sqrt{3} + i$, तो ज्ञात कीजिए कि $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$ किस चतुर्थांश में स्थित है।

हल: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}\right)+\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}\right)i$, जो प्रथम चतुर्थांश में स्थित एक बिंदु से निरूपित होता है।

उदाहरण 23: $\dfrac{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}$ का संयुग्मी क्या है?

हल: मान लीजिए कि

$$z = \frac{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}} \times \frac{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}$$

$$= \frac{5+12i+5-12i+2\sqrt{25+144}}{5+12i-5+12i}$$

$$= \frac{3}{2i} = \frac{3i}{-2} = 0-\frac{3}{2}i$$

अतः, z का संयुग्मी $= 0+\dfrac{3}{2}i$

उदाहरण 24: $1-i$ के कोणांक का मुख्य मान क्या है?

हल: मान लीजिए कि $1-i$ के कोणांक का मुख्यमान θ है।

$$\text{क्योंकि } \tan\theta = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

उदाहरण 25: सम्मिश्र संख्या $(i^{25})^3$ का ध्रुवीय रूप क्या है?

हल: $z = (i^{25})^3 = (i)^{75} = i^{4\times18+3} = (i^4)^{18}\ (i)^3$

$= i^3 = -i = 0-i$

z का ध्रुवीय रूप $= r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$= 1\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}$$

उदाहरण 26 : z का बिंदु पथ क्या होगा, यदि $z-2-3i$ का कोणांक $\dfrac{\pi}{4}$ है?

हल: मान लीजिए कि $z = x+iy$ तब, $z-2-3i = (x-2)+i(y-3)$

मान लीजिए कि $z - 2 - 3i$ का कोणांक θ है। तब, $\tan\theta = \dfrac{y-3}{x-2}$

$$\Rightarrow \qquad \tan\frac{\pi}{4} = \frac{y-3}{x-2} \left(\text{क्योंकि } \theta = \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad 1 = \frac{y-3}{x-2} \text{ अर्थात् } x - y + 1 = 0$$

अतः, z का बिंदु पथ एक सरल रेखा है।

उदाहरण 27 यदि $1 - i$ समीकरण $x^2 + ax + b = 0$ का एक मूल है, जहाँ $a, b \in \mathbf{R}$, तब a और b के मान ज्ञात कीजिए।

हल मूलों का योग $= \dfrac{-a}{1} = (1 - i) + (1 + i) \Rightarrow a = -2.$

(*क्योंकि अवास्तविक सम्मिश्र मूल संयुग्मी युग्मों में घटित होते हैं*)

मूलों का गुणनफल $= \dfrac{b}{1} = (1-i)(1+i) \Rightarrow b = 2$

उदाहरण 28 से 33 तक प्रत्येक के लिए दिए हुए चार विकल्पों में से सही विकल्प चुनिए (M.C.Q.):

उदाहरण 28 $1 + i^2 + i^4 + i^6 + ... + i^{2n}$ है:

(A) धनात्मक (B) ऋणात्मक

(C) 0 (D) इसका मान नहीं निकाला जा सकता

हल (D) $1 + i^2 + i^4 + i^6 + ... + i^{2n} = 1 - 1 + 1 - 1 + ... (-1)^n$

इसका मान तब तक नहीं निकाला जा सकता, जब तक कि n का ज्ञान न हो।

उदाहरण 29 यदि सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ प्रतिबंध $|z+1| = 1$ को संतुष्ट करती है, तो z स्थित है:

(A) x-अक्ष पर

(B) केंद्र (1, 0) और त्रिज्या 1 इकाई वाले एक वृत्त पर

(C) केंद्र (–1, 0) और त्रिज्या 1 वाले वृत्त पर

(D) y-अक्ष पर

हल (C), $|z+1| = 1 \Rightarrow |(x+1) + iy| = 1$

$$\Rightarrow \qquad (x+1)^2 + y^2 = 1$$

केंद्र (–1, 0) और त्रिज्या 1 इकाई वाला एक वृत्त है।

उदाहरण 30 सम्मिश्र संख्याओं $z, -iz$ और $z + iz$ द्वारा सम्मिश्र तल में बनाये गये त्रिभुज का क्षेत्रफल है।

(A) $|z|^2$ (B) $|\bar{z}|^2$

(C) $\dfrac{|z|^2}{2}$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल (C) मान लीजिए कि $z = x + iy$ तब, $-iz = y - ix$

अत: $z + iz = (x - y) + i\,(x + y)$

त्रिभुज का वांछित क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2) = \dfrac{|z|^2}{2}$

उदाहरण 31 समीकरण $|z+1-i| = |z-1+i|$ निरूपित करता है एक

(A) सरल रेखा (B) वृत्त

(C) परवलय (D) अतिपरवलय

हल (A), $|z+1-i| = |z-1+i|$

$\Rightarrow$ $|z-(-1+i)| = |z-(1-i)|$

$\Rightarrow$ PA = PB, जहाँ A बिंदु $(-1, 1)$ को व्यक्त करता है, B बिंदु $(1, -1)$ को व्यक्त करता है तथा P बिंदु (x, y) को व्यक्त करता है।

$\Rightarrow$ z रेखाखंड AB के लंब समद्विभाजक पर स्थित है और लंब समद्विभाजक एक सरल रेखा होती है।

उदाहरण 32 समीकरण $z^2 + |z|^2 = 0, z \neq 0$ के हलों की संख्या है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) अपरिमित रूप से अनेक

हल (D), $z^2 + |z|^2 = 0,\ z \neq 0$

$\Rightarrow$ $x^2 - y^2 + i2xy + x^2 + y^2 = 0$

$\Rightarrow$ $2x^2 + i2xy = 0 \Rightarrow 2x\,(x + iy) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0$ या $x + iy = 0$ (संभव नहीं)

इसलिए:, $x = 0$ और $z \neq 0$

इसी प्रकार, y का कोई भी वास्तविक मान हो सकता है। इसीलिए, अपरिमित रूप से अनेक हल।

उदाहरण 33 $\sin\dfrac{\pi}{5} + i\left(1-\cos\dfrac{\pi}{5}\right)$ का कोणांक है

(A) $\dfrac{2\pi}{5}$ (B) $\dfrac{\pi}{5}$ (C) $\dfrac{\pi}{15}$ (D) $\dfrac{\pi}{10}$

हल (D), यहाँ $r\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ तथा $r\sin\theta = 1-\cos\frac{\pi}{5}$

इसलिए, $$\tan\theta = \frac{1-\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right).\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}$$

$\Rightarrow$ $$\tan\theta = \tan\left(\frac{\pi}{10}\right) \text{ अर्थात् } \theta = \frac{\pi}{10}$$

5.4 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (SA)

1. एक धनात्मक पूर्णांक n के लिए, $(1-i)^n \left(1-\frac{1}{i}\right)^n$ का मान ज्ञात कीजिए।
2. $\sum_{n=1}^{13}(i^n + i^{n+1})$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $n \in \mathbf{N}$
3. यदि $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = x+iy$, तो (x, y) ज्ञात कीजिए।
4. यदि $\frac{(1+i)^2}{2-i} = x+iy$, तो $x+y$ ज्ञात कीजिए।
5. यदि $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100} = a+ib$ है, तो (a, b) ज्ञात कीजिए।
6. यदि $a = \cos\theta + i\sin\theta$ है, तो $\frac{1+a}{1-a}$ का मान ज्ञात कीजिए।
7. यदि $(1+i)z = (1-i)\bar{z}$ है, तो दर्शाइए कि $z = -i\bar{z}$
8. यदि $z = x+iy$, तो दर्शाइए कि $z\bar{z} + 2(z+\bar{z}) + b = 0$ जहाँ $b \in \mathbf{R}$, एक वृत्त निरूपित करता है।
9. यदि $\frac{\bar{z}+2}{\bar{z}-1}$ का वास्तविक भाग 4 है, तो दर्शाइए कि z को निरूपित करने वाले बिंदु का बिंदु पथ सम्मिश्र तल में एक वृत्त है।
10. दर्शाइए कि प्रतिबंध $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{4}$ को संतुष्ट करने वाली सम्मिश्र संख्या z एक वृत्त पर स्थित है।

11. समीकरण $|z| = z + 1 + 2i$ को हल कीजिए।

दीर्घ उत्तर प्रश्न (LA)

12. यदि $|z+1| = z + 2(1 + i)$ है, तो z ज्ञात कीजिए।

13. यदि $\arg(z - 1) = \arg(z + 3i)$ है, तो $x - 1 : y$. ज्ञात कीजिए, जहाँ $z = x + iy$

14. दर्शाइए कि $\left|\dfrac{z-2}{z-3}\right| = 2$ एक वृत्त निरूपित करता है। इसकी केंद्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

15. यदि $\dfrac{z-1}{z+1}$ एक शुद्धत: काल्पनिक संख्या है $(z \neq -1)$, तो $|z|$ का मान ज्ञात कीजिए।

16. यदि z_1 और z_2 दो ऐसी सम्मिश्र संख्याएँ हैं ताकि $|z_1|=|z_2|$ और $\arg(z_1) + \arg(z_2) = \pi$, तो दर्शाइए कि $z_1 = -\bar{z}_2$

17. यदि $|z_1| = 1$ $(z_1 \neq -1)$ और $z_2 = \dfrac{z_1-1}{z_1+1}$, तो दर्शाइए कि z_2 का वास्तविक भाग शून्य है।

18. यदि z_1, z_2 और z_3, z_4 संयुग्मी सम्मिश्र संख्याओं के दो युग्म हैं, तब

$\arg\left(\dfrac{z_1}{z_4}\right) + \arg\left(\dfrac{z_2}{z_3}\right)$ ज्ञात कीजिए।

19. यदि $|z_1|=|z_2| = \ldots = |z_n|=1$, तो दर्शाइए कि

$$|z_1+z_2+z_3+\ldots+z_n| = \left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}+\ldots+\frac{1}{z_n}\right|$$

20. यदि सम्मिश्र संख्या z_1 और z_2 के लिए, $\arg(z_1) - \arg(z_2) = 0$, तब दर्शाइए कि $|z_1 - z_2| = |z_1| - |z_2|$

21. समीकरणों के निकाय $\text{Re}(z^2) = 0$, $|z| = 2$ को हल कीजिए।

22. समीकरण $z + \sqrt{2}\,|(z + 1)| + i = 0$ को संतुष्ट करने वाली सम्मिश्र संख्या ज्ञात कीजिए।

23. सम्मिश्र संख्या $z = \dfrac{1-i}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}$ को ध्रुवीय रूप में लिखिए।

24. यदि z और w दो सम्मिश्र संख्याएँ इस प्रकार हैं कि $|zw| = 1$ और $\arg(z) - \arg(w) = \dfrac{\pi}{2}$, तो दर्शाइए कि $\bar{z}\,w = -i$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

25. *निम्नलिखित में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:*

(i) किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2 और किन्हीं वास्तविक संख्याओं a, b, के लिए, $|az_1 - bz_2|^2 + |bz_1 + az_2|^2 =$ .....

(ii) $\sqrt{-25} \times \sqrt{-9}$ का मान ....है।

(iii) संख्या $\frac{(1-i)^3}{1-i^3}$ .... के बराबर है

(iv) श्रेणी $i + i^2 + i^3 + \ldots$ का 1000 पदों तक का योग ....है।

(v) $1 + i$ का गुणनात्मक प्रतिलोम .... है।

(vi) यदि z_1 और z_2 ऐसी सम्मिश्र संख्याएँ हैं कि $z_1 + z_2$ एक वास्तविक संख्या है, तो $z_2 =$ ....

(vii) $\arg(z) + \arg \bar{z}$ $(\bar{z} \neq 0)$ .... है।

(viii) यदि $|z+4| \leq 3$ तो $|z+1|$ के अधिकतम और न्यूनतम मान..... एवं .... हैं।

(ix) यदि $\left|\frac{z-2}{z+2}\right| = \frac{\pi}{6}$ है, तो z का बिंदु पथ .... है।

(x) यदि $|z| = 4$ और $\arg(z) = \frac{5\pi}{6}$, तो $z =$ ....

26. *बताइए कि निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य है और कौन सा कथन असत्य है*

(i) सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में क्रम संबंध परिभाषित है।

(ii) एक शून्येत्तर सम्मिश्र संख्या का $-i$ से गुणन उस सम्मिश्र संख्या द्वारा निरूपित बिंदु का मूल बिंदु के परित वामावर्त दिशा में एक समकोण पर घूर्णन कर देता है।

(iii) किसी भी सम्मिश्र संख्या z के लिए, $|z| + |z-1|$ का कम से कम मान 1 है।

(iv) $|z-1| = |z-i|$ को निरूपित करने वाला बिंदु पथ $(1, 0)$ और $(0, 1)$ को मिलाने वाली रेखा पर एक लंब रेखा है।

(v) यदि z एक ऐसी सम्मिश्र संख्या है कि $z \neq 0$ और $\text{Re}(z) = 0$, तो $\text{Im}(z^2) = 0$

(vi) असमिका $|z-4| < |z-2|$ असमिका $x > 3$ से प्रदत्त क्षेत्र को निरूपित करती है।

(vii) मान लीजिए कि z_1 और z_2 दो ऐसी सम्मिश्र संख्याएँ हैं कि $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ तब $\arg(z_1 - z_2) = 0$

(viii) 2 एक सम्मिश्र संख्या है।

27. *स्तंभ A और स्तंभ B के कथनों का सही मिलान कीजिए:*

स्तंभ A	स्तंभ B
(a) $i+\sqrt{3}$ का ध्रुवीय रूप है	(i) (–2, 0) और (2, 0) को मिलाने वाले रेखाखंड का लंब समद्विभाजक
(b) $-1+\sqrt{-3}$ का कोणांक है	(ii) केंद्र (0, –4) और त्रिज्या 3 इकाई वाले वृत्त पर या उसके बाहर
(c) यदि $\lvert z+2\rvert=\lvert z-2\rvert$, तो z का बिंदु पथ है	(iii) $\frac{2\pi}{3}$
(d) यदि $\lvert z+2i\rvert=\lvert z-2i\rvert$, तो z का बिंदुपथ है	(iv) (0,–2) और (0, 2) को मिलाने वाले रेखाखंड का लंब समद्विभाजक
(e) $\lvert z+4i\rvert\geq 3$ से निरूपित क्षेत्र है	(v) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
(f) $\lvert z+4\rvert\leq 3$ से निरूपित क्षेत्र है	(vi) केंद्र (–4, 0) और त्रिज्या 3 मात्रक वाले वृत्त पर या उसके अंदर
(g) $\frac{1+2i}{1-i}$ का संयुग्मी किस चतुर्थांश में स्थित है	(vii) प्रथम चतुर्थांश
(h) $1-i$ का व्युत्क्रम किस चतुर्थांश में स्थित है	(viii) तीसरा चतुर्थांश

28. $\frac{2-i}{(1-2i)^2}$ का संयुग्मी क्या है?

29. यदि $\lvert z_1\rvert=\lvert z_2\rvert$ तब क्या $z_1=z_2$ होना आवश्यक है?

30. यदि $\frac{(a^2+1)^2}{2a-i}=x+iy$ तो x^2+y^2 का क्या मान है?

31. z ज्ञात कीजिए, यदि $\lvert z\rvert=4$ और $\arg(z)=\frac{5\pi}{6}$

32. $\left|(1+i)\dfrac{(2+i)}{(3+i)}\right|$ ज्ञात कीजिए।

33. $(1+i\sqrt{3})^2$ का मुख्य कोणांक ज्ञात कीजिए।

34. यदि $\left|\dfrac{z-5i}{z+5i}\right|=1$, तो z कहाँ स्थित है?

प्रश्न 35 से 50 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही विकल्प चुनिए (M.C.Q):

35. निम्नलिखित में से किसके लिए, $\sin x + i\cos 2x$ और $\cos x - i\sin 2x$ परस्पर संयुग्मी हैं

(A) $x = n\pi$ (B) $x = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{2}$

(C) $x = 0$ (D) x का कोई मान नहीं

36. α का वह वास्तविक मान, जिसके लिए व्यंजक $\dfrac{1-i\sin\alpha}{1+2i\sin\alpha}$ शुद्धतः वास्तविक है, निम्नलिखित में से कौन सा है:

(A) $(n+1)\dfrac{\pi}{2}$ (B) $(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$

(C) $n\pi$ (D) इनमें से कोई नहीं, जहाँ $n \in \mathbf{N}$

37. यदि $z = x + iy$ तीसरे चतुर्थांश में स्थित है, तो $\dfrac{\bar{z}}{z}$ भी तीसरे चतुर्थांश में स्थित होगा, यदि

(A) $x > y > 0$ (B) $x < y < 0$

(C) $y < x < 0$ (D) $y > x > 0$

38. $(z+3)(\bar{z}+3)$ का मान निम्नलिखित में से किसके समतुल्य है

(A) $|z+3|^2$ (B) $|z-3|$

(C) z^2+3 (D) इनमें से कोई नहीं

39. यदि $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^x = 1$, तो

(A) $x = 2n+1$ (B) $x = 4n$

(C) $x = 2n$ (D) $x = 4n+1$, जहाँ $n \in \mathrm{N}$

40. x का एक वास्तविक मान समीकरण $\left(\dfrac{3-4ix}{3+4ix}\right) = \alpha - i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$ को संतुष्ट करता है,

यदि $\alpha^2 + \beta^2 =$

(A) 1 (B) – 1 (C) 2 (D) – 2

41. किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के लिए, निम्नलिखित में से कौन सही है?

(A) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ (B) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1).\arg(z_2)$

(C) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ (D) $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

42. यदि सम्मिश्र संख्या $2 - i$ से निरूपित बिंदु को मूलबिंदु के प्रति दक्षिणावर्त दिशा में एक कोण $\frac{\pi}{2}$ पर घुमाया जाए, तो उस बिंदु की नयी स्थिति होगी

(A) $1 + 2i$ (B) $-1 - 2i$ (C) $2 + i$ (D) $-1 + 2i$

43. मान लीजिए कि $x, y \in \mathbf{R}$, तो $x + iy$ एक अवास्तविक सम्मिश्र संख्या है, यदि

(A) $x = 0$ (B) $y = 0$ (C) $x \neq 0$ (D) $y \neq 0$

44. यदि $a + ib = c + id$, तो

(A) $a^2 + c^2 = 0$ (B) $b^2 + c^2 = 0$

(C) $b^2 + d^2 = 0$ (D) $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

45. प्रतिबंध $\left|\frac{i+z}{i-z}\right|$ को संतुष्ट करने वाली सम्मिश्र संख्या स्थित होगी:

(A) वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ पर (B) x-अक्ष पर

(C) y-अक्ष पर (D) रेखा $x + y = 1$ पर

46. यदि z एक सम्मिश्र संख्या है, तो

(A) $|z^2| > |z|^2$ (B) $|z^2| = |z|^2$

(C) $|z^2| < |z|^2$ (D) $|z^2| \geq |z|^2$

47. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ संभव है, यदि

(A) $z_2 = \bar{z}_1$ (B) $z_2 = \frac{1}{z_1}$

(C) $\arg(z_1) = \arg(z_2)$ (D) $|z_1| = |z_2|$

48. θ का वह वास्तविक मान, जिसके लिए $\dfrac{1+i\cos\theta}{1-2i\cos\theta}$ एक वास्तविक संख्या है, निम्नलिखित में से कौन सा है:

(A) $n\pi+\dfrac{\pi}{4}$ (B) $n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{4}$

(C) $2n\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$ (D) इनमें से कोई नहीं

49. जब $x<0$ तो $\arg(x)$ का मान है

(A) 0 (B) $\dfrac{\pi}{2}$

(C) π (D) इनमें से कोई नहीं

50. यदि $f(z)=\dfrac{7-z}{1-z^2}$ जहाँ $z=1+2i$, तो $|f(z)|$ है

(A) $\dfrac{|z|}{2}$ (B) $|z|$

(C) $2|z|$ (D) इनमें से कोई नहीं।