अध्याय 8

द्विपद प्रमेय

8.1 समग्र अवलोकन (Overview)

8.1.1 चिह्नों '+' या '–' द्वारा जुड़े हुए दो पदों से बना व्यंजक एक द्विपद व्यंजक कहलाता है। उदाहरणार्थ, $x + a$, $2x - 3y$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$, $7x - \frac{4}{5y}$ इत्यादि सभी द्विपद व्यंजक हैं।

8.1.2 *द्विपद प्रमेय*

यदि a और b दो वास्तविक संख्याएँ हैं तथा n एक धनात्मक पूर्णांक है, तो

$$(a + b)^n = {}^nC_0\, a^n + {}^nC_1\, a^{n-1} b^1 + {}^nC_2\, a^{n-2} b^2 + \ldots$$

$$\ldots + {}^nC_r\, a^{n-r} b^r + \ldots + {}^nC_n\, b^n,$$ जहाँ $0 \le r \le n$ के लिए, $${}^nC_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$$

इस प्रसार में, व्यापक पद या $(r + 1)^{\text{वाँ}}$ पद,

$T_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r} b^r$ से प्राप्त होता है।

8.1.3 *कुछ महत्वपूर्ण प्रेक्षण*

1. $(a + b)^n$ के द्विपद प्रसार में पदों की कुल संख्या $(n + 1)$ है, अर्थात् यह घातांक n से एक अधिक है।

2. प्रसार के, प्रथम पद में a की घात द्विपद की घात के बराबर है तथा प्रत्येक उत्तरोतर पद में a की घात एक घटती जाती है और साथ ही b की घात एक बढ़ती जाती है। ऐसा तब तक होता रहता है जब तक कि b की घात द्विपद की घात के बराबर न हो जाए। अर्थात्, प्रथम पद में a की घात n, दूसरे पद में $(n - 1)$और ऐसा आगे भी होता रहता है तथा अंतिम पद में a की घात शून्य हो जाती है। इसके साथ ही, प्रथम पद में b की घात 0 है, दूसरे पद में तीसरे पद में 2 और ऐसा आगे भी होता रहता है तथा अंतिम पद में b की घात n हो जाती है।

3. किसी भी पद में a और b के घातांकों का योग n के बराबर है (अर्थात् द्विपद की घात के बराबर है)।

4. प्रसार में गुणांक एक प्रतिरूप या पैटर्न का अनुकरण करते हैं जिसे पास्कल त्रिभुज कहा जाता है।

द्विपद का घातांक	विभिन्न पदों के गुणांक
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1

किसी भी पंक्ति का प्रत्येक गुणांक इससे पिछली पंक्ति में इस गुणांक के ठीक बाएँ और ठीक दाएँ गुणांकों का योग होता है तथा पंक्ति दोनों ओर से 1 द्वारा परिबद्ध होती है।

$(r+1)$वाँ पद या व्यापक पद

$T_{r+1} = \quad {}^nC_r\, a^{n-r}\, b^r$ से प्राप्त होता है।

8.1.4 *कुछ विशेष स्थितियाँ*

यदि n एक धनात्मक पूर्णांक है, तो

$$(a+b)^n = {}^nC_0\, a^n\, b^0 + {}^nC_1\, a^{n-1}\, b^1 + {}^nC_2\, a^{n-2}\, b^2 + \ldots$$
$$+ {}^nC_r\, a^{n-r}\, b^r + \ldots + {}^nC_n\, a^0\, b^n \qquad \ldots (1)$$

विशिष्टत:

1. (i) में, b के स्थान पर $-b$ रखने पर, हमें

$(a-b)^n = {}^nC_0\, a^n\, b^0 - {}^nC_1\, a^{n-1}\, b^1 + {}^nC_2\, a^{n-2}\, b^2 + \ldots + (-1)^r\, {}^nC_r\, a^{n-r}\, b^r + \ldots +$ $(-1)^n\, {}^nC_n\, a^0\, b^n$ प्राप्त होता है $\qquad \ldots (2)$

2. (1) और (2) को जोड़ने पर, हमें

$(a+b)^n + (a-b)^n = 2\, [{}^nC_0\, a^n\, b^0 + {}^nC_2\, a^{n-2}\, b^2 + {}^nC_4\, a^{n-4}\, b^4 + \ldots]$

$= 2$ [विषम स्थानों वाले पद] प्राप्त होता है

3. (2) को (1) में से घटाने पर, हमें

$(a+b)^n - (a-b)^n = 2\, [{}^nC_1\, a^{n-1}\, b^1 + {}^nC_3\, a^{n-3}\, b^3 + \ldots]$

$= 2$ [सम स्थानों वाले पद] प्राप्त होता है

4. (1) में a को 1 से तथा b को x से प्रतिस्थापित करने पर, हमें

$(1+x)^n = {}^nC_0\, x^0 + {}^nC_1\, x^1 + {}^nC_2\, x^2 + \ldots + {}^nC_r\, x^r + \ldots + {}^nC_{n-1}\, x^{n-1} + {}^nC_n\, x^n$ प्राप्त होता है

अर्थात्, $\qquad (1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, x^r$

5. (1) में, a को 1 से तथा b को $-x$ से प्रतिस्थापित करने पर, हमें

$$(1-x)^n = {}^nC_0\, x^0 - {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 (-1) \overset{n}{\underset{r}{C}} x^r + \ldots + {}^nC_{n-1} (-1)^{n-1} x^{n-1} + {}^nC_n\ (-1)^n\ x^n$$

प्राप्त होता है

अर्थात् $\quad (1-x)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r\ {}^nC_r\ x^r$

8.1.5 अंतिम पद से *p*वाँ पद

$(a+b)^n$ के प्रसार में, अंतिम पद से pवाँ पद प्रारंभ से $(n-p+2)$वाँ पद है।

8.1.6 मध्य-पद

मध्य-पद n के मान पर निर्भर करता है।

(a) यदि n एक सम संख्या है, तो $(a+b)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या $n+1$ (विषम) है। इसलिए यहाँ केवल एक मध्य-पद है, अर्थात् $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वाँ पद ही मध्य-पद है।

(b) यदि n एक विषम संख्या है, तो $(a+b)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या $n+1$ (सम) है। इसलिए यहां दो मध्य पद हैं अर्थात् $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{वाँ}}$ और $\left(\frac{n+3}{2}\right)^{\text{वाँ}}$ पद दो मध्य-पद हैं।

8.1.7 द्विपद गुणांक

द्विपद व्यंजक के प्रसार से, हमें ज्ञात है कि

$$(a+b)^n = {}^nC_0\, a^n + {}^nC_1\, a^{n-1}\, b + {}^nC_2\, a^{n-2}\, b^2 + \ldots + {}^nC_n\, b^n \qquad \ldots (1)$$

गुणांक ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \ldots, {}^nC_n$ द्विपद गुणांक या संचयात्मक गुणांक कहलाते हैं।

(1) में $a = b = 1$ रखने पर, हमें

$${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ldots + {}^nC_n = 2^n$$ प्राप्त होता है

इस प्रकार, सभी द्विपद गुणांकों का योग 2^n होता है।

(1) में पुनः $a = 1$ और $b = -1$ रखने पर, हमें

$${}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \ldots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + {}^nC_5 + \ldots$$ प्राप्त होता है

इस प्रकार, सभी विषम द्विपद गुणांकों का योग सभी सम द्विपद गुणांकों के योग के बराबर होता है तथा इनमें से प्रत्येक $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ के बराबर है।

अर्थात् $^nC_0 + {^nC_2} + {^nC_4} + ... = {^nC_1} + {^nC_3} + {^nC_5} + ... = 2^{n-1}$

8.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय (S.A)

उदाहरण 1 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2r}$ के प्रसार में rवाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल ज्ञात है कि:
$$T_r = {^{2r}C_{r-1}}\,(x)^{2r-r+1}\left(\frac{1}{x}\right)^{r-1}$$
$$= \frac{\lfloor 2r}{\lfloor r-1 \lfloor r+1}\, x^{r+1-r+1}$$
$$= \frac{\lfloor 2r}{\lfloor r-1 \lfloor r+1}\, x^{2}$$

उदाहरण 2 $(1 - x + x^2)^4$ का प्रसार कीजिए।

हल $1 - x = y$ रखिए। तब,
$$\begin{aligned}(1 - x + x^2)^4 &= (y + x^2)^4\\ &= {^4C_0}\; y^4 (x^2)^0 + {^4C_1}\; y^3 (x^2)^1\\ &\quad + {^4C_2}\; y^2 (x^2)^2 + {^4C_3}\; y (x^2)^3 + {^4C_4}\; (x^2)^4\\ &= y^4 + 4y^3 x^2 + 6y^2 x^4 + 4y\, x^6 + x^8\\ &= (1-x)^4 + 4(1-x)^3 x^2 + 6(1-x)^2 x^4 + 4(1-x)\, x^6 + x^8\\ &= 1 - 4x + 10x^2 - 16x^3 + 19x^4 - 16x^5 + 10x^6 - 4x^7 + x^8\end{aligned}$$

उदाहरण 3 $\left(\frac{x^3}{2}-\frac{2}{x^2}\right)^9$ के प्रसार में अंतिम पद से चौथा पद ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि $(a + b)^n$ के प्रसार में अंतिम पद से rवाँ पद प्रारंभ से $(n - r + 2)$वाँ पद होता है, इसलिए इस प्रसार में अंतिम पद से चौथा पद प्रारंभ से $(9 - 4 + 2)$वाँ, अर्थात् 7वाँ पद होगा। यह पद है:
$$T_7 = {^9C_6}\left(\frac{x^3}{2}\right)^3\left(\frac{-2}{x^2}\right)^6 = {^9C_3}\,\frac{x^9}{8}\cdot\frac{64}{x^{12}} = \frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1}\times\frac{8}{x^3} = \frac{672}{x^3}$$

उदाहरण 4 मान ज्ञात कीजिए $\left(x^2-\sqrt{1-x^2}\right)^4 + \left(x^2+\sqrt{1-x^2}\right)^4$

हल $\sqrt{1-x^2} = y$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$\text{दिया हुआ व्यंजक} = (x^2 - y)^4 + (x^2 + y)^4 = 2\ (x^8 + {}^4C_2\ x^4\ y^2 + {}^4C_4\ y^4)$$

$$= 2\left[x^8 + \frac{4\times 3}{2\times 1}x^4\ (1-x^2) + (1-x^2)^2\right]$$

$$= 2\ [x^8 + 6x^4\ (1 - x^2) + (1 - 2x^2 + x^4]$$

$$= 2x^8 - 12x^6 + 14x^4 - 4x^2 + 2$$

उदाहरण 5 $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{12}$ के प्रसार में x^{11} का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि व्यापक पद, अर्थात् $(r + 1)$वें पद में x^{11} आता है।

ज्ञात है कि
$$T_{r+1} = {}^{12}C_r\ (x^3)^{12-r}\left(-\frac{2}{x^2}\right)^r$$

$$= {}^{12}C_r\ x^{36-3r-2r}\ (-1)^r\ 2^r$$

$$= {}^{12}C_r\ (-1)^r\ 2^r\ x^{36-5r}$$

इस पद में, x^{11} होने के लिए

$$36 - 5r = 11, \text{ अर्थात्, } r = 5$$

अतः, x^{11} का गुणांक $^{12}C_5\ (-1)^5\ 2^5 = -\frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8}{5\times 4\times 3\times 2}\times 32 = -25344$

उदाहरण 6 निर्धारित कीजिए कि क्या $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{18}$ के प्रसार में कोई x^{10} वाला पद होगा।

हल मान लीजिए कि T_{r+1} में x^{10} आता है। तब,

$$T_{r+1} = {}^{18}C_r\,(x^2)^{18-r}\left(\frac{-2}{x}\right)^r$$

$$= {}^{18}C_r\ x^{36-2r}\ (-1)^r\ .\ 2^r\ x^{-r}$$

$$= (-1)^r\ 2^r\ {}^{18}C_r\ x^{36-3r}$$

इस प्रकार,
$$36 - 3r = 10, \text{ अर्थात}, r = \frac{26}{3}$$

क्योंकि r एक भिन्न है, इसलिए दिए हुए प्रसार में x^{10} वाला कोई पद नहीं होगा।

उदाहरण 7 $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2x^2}\right)^{10}$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $(r+1)$वाँ पद x से स्वतंत्र है, जो निम्नलिखित है:

$$T_{r+1} = {}^{10}C_r \left(\sqrt{\frac{x}{3}}\right)^{10-r} \left(\frac{\sqrt{3}}{2x^2}\right)^r$$

$$= {}^{10}C_r \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{10-r}{2}} 3^{\frac{r}{2}}\left(\frac{1}{2^r x^{2r}}\right)$$

$$= {}^{10}C_r\ 3^{\frac{r}{2}-\frac{10-r}{2}}\ 2^{-r} x^{\frac{10-r}{2}-2r}$$

क्योंकि यह पद x से स्वतंत्र है, इसलिए हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{10-r}{2}-2r = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r = 2$$

अत:, तीसरा पद x से स्वतंत्र है तथा इसका मान

$$T_3 = {}^{10}C_2 \frac{3^{-3}}{4} = \frac{10\times 9}{2\times 1}\times\frac{1}{9\times 12} = \frac{5}{12} \text{ है}$$

उदाहरण 8 $\left(2ax-\frac{b}{x^2}\right)^{12}$ के प्रसार में मध्य-पद ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि इस द्विपद की घात सम है, इसलिए इसका एक ही मध्य-पद है, जो इसका $\left(\frac{12+2}{2}\right)^{\text{वाँ}}$ पद है, और यह निम्नलिखित है:

$$T_7 = {}^{12}C_6 (2ax)^6 \left(\frac{-b}{x^2}\right)^6$$

$$= {}^{12}C_6 \frac{2^6 a^6 x^6 \cdot (-b)^6}{x^{12}}$$

$$= {}^{12}C_6 \frac{2^6 a^6 b^6}{x^6} = \frac{59136 a^6 b^6}{x^6}$$

उदाहरण 9 $\left(\frac{p}{x}+\frac{x}{p}\right)^9$ के प्रसार में मध्य-पद ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि द्विपद की घात विषम है, इसलिए यहाँ दो मध्य-पद हैं, जो 5वें और 6वें पद हैं। ये पद निम्नलिखित हैं:

$$T_5 = {}^9C_4\left(\frac{p}{x}\right)^5\left(\frac{x}{p}\right)^4 = {}^9C_4\frac{p}{x} = \frac{126p}{x}$$

तथा
$$T_6 = {}^9C_5\left(\frac{p}{x}\right)^4\left(\frac{x}{p}\right)^5 = {}^9C_5\frac{x}{p} = \frac{126x}{p}$$

उदाहरण 10 दर्शाइए कि $2^{4n+4} - 15n - 16$, जहाँ $n \in \mathbf{N}$, 225 से विभाज्य है।

हल ज्ञात है कि

$$\begin{aligned}
2^{4n+4} - 15n - 16 &= 2^{4(n+1)} - 15n - 16\\
&= 16^{n+1} - 15n - 16\\
&= (1+15)^{n+1} - 15n - 16\\
&= {}^{n+1}C_0\, 15^0 + {}^{n+1}C_1\, 15^1 + {}^{n+1}C_2\, 15^2 + {}^{n+1}C_3\, 15^3\\
&\quad + \ldots + {}^{n+1}C_{n+1}\,(15)^{n+1} - 15n - 16\\
&= 1 + (n+1)\,15 + {}^{n+1}C_2\, 15^2 + {}^{n+1}C_3\, 15^3\\
&\quad + \ldots + {}^{n+1}C_{n+1}\,(15)^{n+1} - 15n - 16\\
&= 1 + 15n + 15 + {}^{n+1}C_2\, 15^2 + {}^{n+1}C_3\, 15^3\\
&\quad + \ldots + {}^{n+1}C_{n+1}\,(15)^{n+1} - 15n - 16\\
&= 15^2\,[{}^{n+1}C_2 + {}^{n+1}C_3\, 15 + \ldots \text{ so on}
\end{aligned}$$

इस प्रकार, $2^{4n+4} - 15n - 16$ संख्या 225 से विभाज्य है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

उदारहण 11 $(2+3x)^9$ के प्रसार में संख्यात्मक रूप से सबसे बड़ा पद ज्ञात कीजिए जहाँ $x = \frac{3}{2}$

हल ज्ञात है कि $(2+3x)^9 = 2^9\left(1+\frac{3x}{2}\right)^9$

अब,
$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{2^9\left[{}^9C_r\left(\frac{3x}{2}\right)^r\right]}{2^9\left[{}^9C_{r-1}\left(\frac{3x}{2}\right)^{r-1}\right]}$$

$$= \frac{{}^9C_r}{{}^9C_{r-1}}\left|\frac{3x}{2}\right| = \frac{\lfloor 9}{\lfloor r\,\lfloor 9-r}\cdot\frac{\lfloor r-1\,\lfloor 10-r}{\lfloor 9}\left|\frac{3x}{2}\right|$$

$$= \frac{10-r}{r}\left|\frac{3x}{2}\right| = \frac{10-r}{r}\left(\frac{9}{4}\right) \qquad \text{क्योंकि} \quad x = \frac{3}{2}$$

इसलिए
$$\frac{T_{r+1}}{T_r} \geq 1 \Rightarrow \frac{90-9r}{4r} \geq 1$$

$$\Rightarrow 90 - 9r \geq 4r \qquad \text{(क्यों?)}$$

$$\Rightarrow r \leq \frac{90}{13}$$

$$\Rightarrow r \leq 6\,\frac{12}{13}$$

इस प्रकार r का अधिकतम मान 6 है। इसलिए सबसे बड़ा पद $T_{r+1} = T_7$ है।

अत:
$$T_7 = 2^9\left[{}^9C_6\left(\frac{3x}{2}\right)^6\right], \qquad \text{जहाँ } x = \frac{3}{2}$$

$$= 2^9\cdot{}^9C_6\left(\frac{9}{4}\right)^6 = 2^9\cdot\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}\left(\frac{3^{12}}{2^{12}}\right) = \frac{7\times3^{13}}{2}$$

उदाहरण 12 यदि n एक धनात्मक पूर्णांक है, तो $(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ के प्रसार में x^{-1} का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल ज्ञात है कि

$$(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n = (1+x)^n\left(\frac{x+1}{x}\right)^n = \frac{(1+x)^{2n}}{x^n}$$

अब, $(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ में x^{-1} का गुणांक ज्ञात करना $\frac{(1+x)^{2n}}{x^n}$ में x^{-1} का गुणांक ज्ञात करने के समतुल्य है, जो $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में x^{n-1} के गुणांक के समान है।

क्योंकि $(1+x)^{2n} = {}^{2n}C_0\, x^0 + {}^{2n}C_1\, x^1 + {}^{2n}C_2\, x^2 + \ldots + {}^{2n}C_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + {}^{2n}C_{2n}\, x^{2n}$

इसलिए x^{n-1} का गुणांक ${}^{2n}C_{n-1}$

$$= \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n-1\, \lfloor 2n-n+1} = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n-1\, \lfloor n+1} \text{ है।}$$

उदाहरण 13 निम्नलिखित में कौन बड़ा है?

$99^{50} + 100^{50}$ या 101^{50}

ज्ञात है कि $(101)^{50} = (100+1)^{50}$

$$= 100^{50} + 50\,(100)^{49} + \frac{50.49}{2.1}(100)^{48} + \frac{50.49.48}{3.2.1}(100)^{47} + \ldots \quad (1)$$

इसी प्रकार, $99^{50} = (100-1)^{50}$

$$= 100^{50} - 50\,.\,100^{49} + \frac{50.49}{2.1}(100)^{48} - \frac{50.49.48}{3.2.1}(100)^{47} + \ldots \quad (2)$$

(2) को (1) में से घटाने पर

$$(101)^{50} - 99^{50} = 2\left[50\,(100)^{49} + \frac{50\cdot 49\cdot 48}{3\cdot 2\cdot 1}100^{47} + \ldots\right]$$

$$\Rightarrow \quad (101)^{50} - 99^{50} = (100)^{50} + 2\left(\frac{50\cdot 49\cdot 48}{3\cdot 2\cdot 1}\right)(100)^{47} + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad (101)^{50} - 99^{50} > (100)^{50}$$

अतः, $(101)^{50} > (99)^{50} + (100)^{50}$

उदारहण 14 $(1+x)^{1000} + x(1+x)^{999} + x^2(1+x)^{998} + \ldots + x^{1000}$ के प्रसार में सरल करने और समान पदों को एकत्रित करने के पश्चात् x^{50} का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि उपर्युक्त प्रसार एक गुणोत्तर श्रेणी है जिसका सार्व अनुपात $\frac{x}{1+x}$ है, इसलिए इसका योग

$$= \frac{(1+x)^{1000}\left[1-\left(\frac{x}{1+x}\right)^{1001}\right]}{\left[1-\left(\frac{x}{1+x}\right)\right]}$$

$$= \frac{(1+x)^{1000} - \frac{x^{1001}}{1+x}}{\frac{1+x-x}{1+x}} = (1+x)^{1001} - x^{1001}$$

अतः, x^{50} का गुणांक निम्नलिखित है:

$$^{1001}C_{50} = \frac{\underline{|1001}}{\underline{|50}\,\underline{|951}}$$

उदाहरण 15 यदि $(1+x)^n$ के प्रसार में a_1, a_2, a_3 और a_4 क्रमशः चार क्रमागत पदों के गुणांक हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_3}{a_3+a_4} = \frac{2a_2}{a_2+a_3}$$

हल मान लीजिए a_1, a_2, a_3 और a_4 क्रमशः चार क्रमागत पदों T_{r+1} T_{r+2} T_{r+3} और T_{r+4} के गुणांक हैं। तब,

$a_1 = T_{r+1}$ का गुणांक $= {}^nC_r$,

$a_2 = T_{r+2}$ का गुणांक $= {}^nC_{r+1}$,

$a_3 = T_{r+3}$ का गुणांक $= {}^nC_{r+2}$

तथा $a_4 = T_{r+4}$ का गुणांक $= {}^nC_{r+3}$

अतः, $$\frac{a_1}{a_1+a_2} = \frac{{}^nC_r}{{}^nC_r + {}^nC_{r+1}}$$

$$= \frac{{}^nC_r}{{}^{n+1}C_{r+1}} \qquad (\because\ {}^nC_r + {}^nC_{r+1} = {}^{n+1}C_{r+1})$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}} \times \frac{\underline{|r+1}\,\underline{|n-r}}{\underline{|n+1}} = \left(\frac{r+1}{n+1}\right)$$

इसी प्रकार, $\dfrac{a_3}{a_3 + a_4} = \dfrac{{}^nC_{r+2}}{{}^nC_{r+2} + {}^nC_{r+3}}$

$$= \frac{{}^nC_{r+2}}{{}^{n+1}C_{r+3}} = \frac{r+3}{n+1}$$

अत:, बायां पक्ष $= \dfrac{a_1}{a_1 + a_2} + \dfrac{a_3}{a_3 + a_4} = \dfrac{r+1}{n+1} + \dfrac{r+3}{n+1} = \dfrac{2r+4}{n+1}$

तथा दायां पक्ष $= \dfrac{2a_2}{a_2 + a_3} = \dfrac{2\left({}^nC_{r+1}\right)}{{}^nC_{r+1} + {}^nC_{r+2}} = \dfrac{2\left({}^nC_{r+1}\right)}{{}^{n+1}C_{r+2}}$

$$= \frac{2\underline{|n}}{\underline{|r+1}\,\underline{|n-r-1}} \times \frac{\underline{|r+2}\,\underline{|n-r-1}}{\underline{|n+1}} = \frac{2(r+2)}{n+1} = \frac{2r+4}{n+1}$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (M.C.Q)

उदाहरण 16 $(x+a)^{51} - (x-a)^{51}$ के प्रसार में सरलीकरण के बाद पदों की संख्या है

(a) 102 (b) 25 (c) 26 (d) इनमें से कोई नहीं

हल C सही उत्तर है। क्योंकि कुल 52 पद होंगे, जिनमें 26 पद परस्पर कट जाते हैं।

उदारहण 17 यदि $\left(2 + \dfrac{x}{3}\right)^n$ के प्रसार में, x^7 और x^8 के गुणांक बराबर हैं, तो n का मान है

(a) 56 (b) 55 (c) 45 (d) 15

हल (B) सही विकल्प है। क्योंकि $(a+x)^n$, के प्रसार में, $T_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r} x^r$

इसलिए $T_8 = {}^nC_7 (2)^{n-7} \left(\dfrac{x}{3}\right)^7 = {}^nC_7 \dfrac{2^{n-7}}{3^7} x^7$

तथा $$T_9 = {}^nC_8\,(2)^{n-8}\left(\frac{x}{3}\right)^8 = {}^nC_8\,\frac{2^{n-8}}{3^8}\,x^8$$

इसलिए $${}^nC_7\,\frac{2^{n-7}}{3^7} = {}^nC_8\,\frac{2^{n-8}}{3^8}$$ (क्योंकि दिया है कि x^7 = का गुणांक = x^8 का गुणांक)

$$\Rightarrow \quad \frac{\underline{|n}}{\underline{|7}\,\underline{|n-7}} \times \frac{\underline{|8}\,\underline{|n-8}}{\underline{|n}} = \frac{2^{n-8}}{3^8}\cdot\frac{3^7}{2^{n-7}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8}{n-7} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad n = 55$$

उदारहण 18 यदि $(1-x+x^2)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n} x^{2n}$ तो $a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_n$ बराबर है

(A) $\dfrac{3^n+1}{2}$ (B) $\dfrac{3^n-1}{2}$ (C) $\dfrac{1-3^n}{2}$ (D) $3^n + \dfrac{1}{2}$

हल: (A) सही विकल्प है। $(1-x+x^2)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n} x^{2n}$ में $x = 1$ और -1 रखने पर,

$$1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2n} \qquad \ldots (1)$$

और $$3^n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{2n} \qquad \ldots (2)$$

(1) और (2) को जोड़ने पर,

$$3^n + 1 = 2\,(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n})$$

इसलिए, $$a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n} = \frac{3^n+1}{2}$$

उदाहरण 19 $(1+x)^{p+q}$ के प्रसार में, x^p और x^q के गुणांक (p और q धनात्मक पूर्णांक हैं) हैं

(A) बराबर (B) बराबर परंतु विपरीत चिह्नों के

(C) एक दूसरे के व्युत्क्रम (D) इनमें से कोई नहीं

हल (A) सही विकल्प है। $(1+x)^{p+q}$ के प्रसार में, x^p और x^q के गुणांक क्रमशः ${}^{p+q}C_p$ और ${}^{p+q}C_q$ हैं,

तथा $${}^{p+q}C_p = {}^{p+q}C_q = \frac{\underline{|p+q}}{\underline{|p}\,\underline{|q}}$$

अतः, (A) सही उत्तर है।

उदाहरण 20 $(a+b+c)^n$, जहाँ $n \in \mathbf{N}$, के प्रसार में पदों की संख्या है

(A) $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ (B) $n+1$

(C) $n+2$ (D) $(n+1)\,n$

हल (A) सही विकल्प है।

$$(a+b+c)^n = [a+(b+c)]^n$$
$$= a^n + {}^nC_1\, a^{n-1}(b+c)^1 + {}^nC_2\, a^{n-1}(b+c)^2$$
$$+ \ldots + {}^nC_n (b+c)^n$$

साथ ही, दाएं पक्ष के प्रत्येक पद को प्रसारित करने पर, हम देखते हैं कि

प्रथम पद में एक पद है,

दूसरी पद को सरल करने पर उसमें दो पद हैं,

तीसरे पद को प्रसारित करने पर उसमें तीन पद हैं,

चौथे पद को प्रसारित करने पर उसमें चार पद हैं, और इस प्रकार आगे भी।

अत:, पदों की कुल संख्या $= 1 + 2 + 3 + \ldots + (n+1)$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

उदाहरण 21 $\left(x^2 + \dfrac{2}{x}\right)^{15}$ में x^{15} के गुणांक का x से स्वतंत्र पद से अनुपात है

(A) 12:32 (B) 1:32 (C) 32:12 (D) 32:1

हल (B) सही विकल्प है। मान लीजिए कि $\left(x^2 + \dfrac{2}{x}\right)^{15}$ का व्यापक पद T_{r+1}

इसलिए $$T_{r+1} = {}^{15}C_r\, (x^2)^{15-r} \left(\frac{2}{x}\right)^r$$

$$= {}^{15}C_r\, (2)^r\, x^{30-3r} \qquad \ldots (1)$$

अब x^{15} वाले पद के गुणांक के लिए,

$$30 - 3r = 15, \quad \text{अर्थात्} \quad r = 5$$

अत:, x^{15} का गुणांक $= {}^{15}C_5\, (2)^5$ [(1) से]

x से स्वतंत्र पद ज्ञात करने के लिए, $30 - 3r = 0$ रखिए।

इस प्रकार x से स्वतंत्र पद $= {}^{15}C_{10}\, 2^{10}$ [(1) से]

अब, अनुपात है: $\dfrac{{}^{15}C_5\, 2^5}{{}^{15}C_{10}\, 2^{10}} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$

उदाहरण 22 यदि $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^5 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right)^5$ है, तो

(A) Re $(z) = 0$ (B) $I_m\,(z) = 0$

(C) Re $(z) > 0$, $I_m\,(z) > 0$ (D) Re $(z) > 0$, $I_m\,(z) < 0$

हल (B) सही विकल्प है। सरल करने पर,

$$z = 2\left[{}^5C_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 + {}^5C_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\left(\frac{i}{2}\right)^2 + {}^5C_4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{i}{2}\right)^4\right]$$

क्योंकि $i^2 = -1$ और $i^4 = 1$, इसलिए z में कोई i नहीं होगा, और इस प्रकार $I_m\,(z) = 0$

8.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. $\left(\dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{1}{3x}\right)^{15}$ के प्रसार में, x से स्वतंत्र पद $(x \neq 0)$ ज्ञात कीजिए।

2. यदि $\left(\sqrt{x} - \dfrac{k}{x^2}\right)^{10}$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद 405 है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

3. $(1 - 3x + 7x^2)\,(1 - x)^{16}$ के प्रसार में x का गुणांक ज्ञात कीजिए।

4. $\left(3x - \dfrac{2}{x^2}\right)^{15}$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद ज्ञात कीजिए।

5. निम्नलिखित के प्रसार में, मध्य-पद ज्ञात कीजिए:

(i) $\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{a}{x}\right)^{10}$ (ii) $\left(3x - \dfrac{x^3}{6}\right)^9$

6. $(x - x^2)^{10}$ के प्रसार में x^{15} का गुणांक ज्ञात कीजिए।

7. $\left(x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^{15}$ के प्रसार में $\frac{1}{x^{17}}$ का गुणांक ज्ञात कीजिए।

8. $\left(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}\right)^n$ के प्रसार में 6वाँ पद ज्ञात कीजिए, यदि इसके अंतिम पद से तीसरे पद का द्विपद गुणांक 45 है।

[**संकेत:** अंतिम पद से तीसरे पद का द्विपद गुणांक = प्रारंभ से तीसरे पद का द्विपद गुणांक = ${}^nC_2$]

9. यदि $(1 + x)^{18}$ के प्रसार में $(2r + 4)$वें और $(r - 2)$वें पदों के गुणांक बराबर हैं, तो r का मान ज्ञात कीजिए।

10. यदि $(1 + x)^{2n}$ के प्रसार में, दूसरे, तीसरे और चौथे पदों के गुणांक समांतर श्रेणी में हैं, तो दर्शाइए कि

$2n^2 - 9n + 7 = 0$ है।

11. $(1 + x + x^2 + x^3)^{11}$ के प्रसार में x^4 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

12. यदि p एक वास्तविक संख्या है और $\left(\frac{p}{2} + 2\right)^8$ के प्रसार में मध्य-पद 1120 है, तो p ज्ञात कीजिए।

13. दर्शाइए कि $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2n}$ के प्रसार में मध्य-पद $\frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots (2n-1)}{\underline{|n}} \times (-2)^n$ है।

14. द्विपद, $\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$ में n ज्ञात कीजिए, यदि प्रारंभ से 7वें पद का अंतिम पद से 7वें पद से अनुपात $\frac{1}{6}$ है।

15. $(x + a)^n$ के प्रसार में, यदि विषम पदों के योग को O से तथा सम पदों के योग को E से निर्दिष्ट किया जाता है, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $O^2 - E^2 = (x^2 - a^2)^n$ (ii) $4OE = (x + a)^{2n} - (x - a)^{2n}$

16. यदि $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ के प्रसार में x^p आता है, तो सिद्ध कीजिए कि इसका गुणांक

$$\frac{\lfloor 2n}{\left\lfloor \frac{4n-p}{3} \right. \left\lfloor \frac{2n+p}{3} \right.}$$ है।

17. $(1+x+2x^3)\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^9$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद ज्ञात कीजिए।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 18 से 24 तक प्रत्येक के लिए दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए(M.C.Q.)

18. $(x+a)^{100}+(x-a)^{100}$ के प्रसार में सरलीकरण के बाद पदों की कुल संख्या है

(A) 50 (B) 202 (C) 51 (D) इनमें से कोई नहीं।

19. दिया हुआ है कि $r>1$, $n>2$ और $(1+x)^{2n}$ के द्विपद प्रसार में $(3r)$वें और $(r+2)$वें पदों के गुणांक बराबर हैं, तो

(A) $n=2r$ (B) $n=3r$ (C) $n=2r+1$ (D) इनमें से कोई नहीं

20. $(1+x)^{24}$ के प्रसार में दो उत्तरोत्तर पद, जिनके गुणांकों का अनुपात 1: 4 है, निम्नलिखित हैं

(A) तीसरा और चौथा (B) चौथा और पाँचवां (C) पाँचवां और छठा (D) छठा और सातवां

[**संकेत**: $\frac{{}^{24}C_r}{{}^{24}C_{r+1}}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{r+1}{24-r}=\frac{1}{4}\Rightarrow 4r+4=24-4\Rightarrow\boxed{r=4}$]

21. $(1+x)^{2n}$ और $(1+x)^{2n-1}$ के प्रसारों में x^n के गुणांकों का अनुपात है

(A) 1 : 2 (B) 1 : 3 (C) 3 : 1 (D) 2 : 1

[**संकेत** : ${}^{2n}C_n : {}^{2n-1}C_n$]

22. यदि $(1+x)^n$ के प्रसार में दूसरे, तीसरे और चौथे पदों के गुणांक समांतर श्रेणी में हैं, तो n का मान है:

(A) 2 (B) 7 (c) 11 (D) 14

[**संकेत**: $2\,{}^nC_2={}^nC_1+{}^nC_3\Rightarrow n^2-9n+14=0\Rightarrow n=2$ या 7]

23. यदि A और B क्रमश: $(1+x)^{2n}$ और $(1+x)^{2n-1}$ के प्रसारों में x^n के गुणांक हैं, तो $\frac{A}{B}$ बराबर है:

(A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{n}$

[**संकेत:** $\frac{A}{B} = \frac{{}^{2n}C_n}{{}^{2n-1}C_n} = 2$]

24. यदि $\left(\frac{1}{x} + x\sin x\right)^{10}$ का मध्य-पद $7\frac{7}{8}$ है, तो x का मान है

(A) $2n\pi + \frac{\pi}{6}$ (B) $n\pi + \frac{\pi}{6}$ (C) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ (D) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$

[**संकेत:** $T_6 = {}^{10}C_5 \frac{1}{x^5} \cdot x^5 \sin^5 x = \frac{63}{8} \Rightarrow \sin^5 x = \frac{1}{2^5} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$]

प्रश्न 25 से 33 तक रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

25. $(1 + x)^{30}$ के प्रसार में सबसे बड़ा गुणांक ______________ है।

26. $(x + y + z)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या ______________ है।

[**संकेत:** $(x + y + z)^n = [x + (y + z)]^n$]

27. $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^{16}$ के प्रसार में अचर पद का मान ______________ है।

28. यदि $\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$ के प्रसार में प्रारंभ से और अंतिम पद से सातवां पद बराबर हैं, तो n ______________ के बराबर है।

[**संकेत** : $T_7 = T_{n-7+2} \Rightarrow {}^nC_6 \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{n-6} \left(\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}\right)^6 = {}^nC_{n-6} \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6 \left(\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}\right)^{n-6}$

$\Rightarrow \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{n-12} = \left(\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}\right)^{n-12}$ $\Rightarrow$ केवल तभी संभव जब $n - 12 = 0 \Rightarrow n = 12$]

29. $\left(\frac{1}{a}-\frac{2b}{3}\right)^{10}$ के प्रसार में $a^{-6}\,b^4$ का गुणांक __________ है।

[संकेत : $T_5 = {}^{10}C_4\left(\frac{1}{a}\right)^{b}\left(\frac{-2b}{3}\right)^{4} = \frac{1120}{27}a^{-6}b^{4}$]

30. $(a^3 + ba)^{28}$ के प्रसार में मध्य-पद __________ है।

31. $(1+x)^{p+q}$ के प्रसार में x^p और x^q के गुणांकों का अनुपात __________ है।

[संकेत : ${}^{p+q}C_p = {}^{p+q}C_q$]

32. $\left(\sqrt{\frac{x}{3}}+\frac{3}{2x^2}\right)^{10}$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद का स्थान __________ है।

33. यदि 25^{15} को 13 से भाग दिया जाए, तो शेषफल __________ है।

प्रश्न 34 से 40 तक, कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य हैं :

34. श्रेणी $\sum_{r=0}^{10} {}^{20}C_r$ का योग $2^{19} + \frac{{}^{20}C_{10}}{2}$ है।

35. व्यंजक $7^9 + 9^7$, 64 से विभाज्य है।

संकेत: $7^9 + 9^7 = (1 + 8)^7 - (1 - 8)^9$

36. $[(2x + y^3)^4]^7$ के प्रसार में पदों की संख्या 8 है।

37. $(1 + x)^{2n-1}$ के प्रसार में दोनों मध्य-पदों के गुणांकों का योग ${}^{2n-1}C_n$ के बराबर है।

38. संख्या 3^{400} के अंतिम दो अंक 01 हैं।

39. यदि $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{2n}$ के प्रसार में x से स्वतंत्र एक पद है, तो n, संख्या 2 का एक गुणज है।

40. $(a + b)^n$ जहाँ $n \in \mathbf{N}$, के प्रसार में पदों की संख्या घात n से एक कम है।