अध्याय 16

प्रायिकता

16.1 समग्र अवलोकन (Overview)

अनिश्चितता (Uncertainty) की परिमाणात्मक माप (quantitative measure) प्रायिकता की परिभाषा है, अर्थात् वह संख्यात्मक मान, जो किसी घटना (event) के घटित (occurrence) होने के हमारे विश्वास की शक्ति को व्यक्त करे। किसी घटना की प्रायिकता सदैव 0 और 1 के बीच की एक संख्या होती है, जिसमें 0 और 1 दोनों सम्मिलित हैं। यदि किसी घटना की प्रायिकता 1 के निकट है तो उसके घटित होने की सम्भावना अधिक होती है; तथा यदि घटना की प्रायिकता 0 के निकट है तो घटना के घटित होने की सम्भावना कम होती है। यदि घटना घटित नहीं हो, तो उसकी प्रायिकता 0 होती है। यदि घटना का घटित होना निश्चित है, तो उसकी प्रायिकता 1 होती है।

16.1.1 ***यादृच्छिक परीक्षण (Random experiment)*** किसी परीक्षण के यादृच्छिक होने का अर्थ है कि परीक्षण के एक से अधिक संभव परिणाम हैं और निश्चित रूप से यह पूर्वानुमान (prediction) लगाना संभव नहीं है कि वह परिणाम क्या होगा। उदाहरण के लिए, एक सामान्य सिक्के के उछालने के परीक्षण में, यह पूर्वानुमान तो निश्चित रूप से लगाया जा सकता है, कि सिक्का या तो चित् (head) होगा या पट् (tail) होगा लेकिन (किन्तु) यह निश्चित रूप से ज्ञात नहीं है कि चित् या पट् में से क्या होगा। यदि किसी पासे (die) को एक बार फेंका जाए, तो छः संख्याओं, अर्थात् 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से कोई भी एक संख्या प्राप्त हो सकती है, परन्तु यह निश्चित नहीं है कि कौन-सी संख्या प्राप्त होगी।

(i) **परिणाम (Outcome)** किसी यादृच्छिक परीक्षण के संभव फल (नतीजे) को परीक्षण का परिणाम कहते हैं। उदाहरणार्थ किसी सिक्के को दो बार उछालने के परीक्षण के कुछ परिणाम HH, HT इत्यादि हैं।

(ii) **प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space)** किसी परीक्षण के सभी संभव परिणामों के समुच्चय को उस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि कहते हैं। वस्तुतः यह किसी प्रदत्त परीक्षण के लिए, प्रासंगिक सार्वत्रिक समुच्चय S होता है।

किसी सिक्के को दो बार उछालने के परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि निम्नलिखित हैं:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

ताश के पत्तों की किसी गड्डी से एक पत्ते को निकालने के परीक्षण के लिए प्रतिदर्श समष्टि, गड्डी के सभी पत्तों का समुच्चय है।

16.1.2 ***घटना (Event)*** प्रतिदर्श समष्टि S का कोई उपसमुच्चय एक घटना होती है। उदाहरण के लिए, ताश की किसी गड्डी से एक इक्का (Ace) निकालने की घटना

A = {पान का इक्का, चिड़ी का इक्का, ईंट का इक्का, हुकुम का इक्का}

16.1.3 *घटनाओं के प्रकार (Types of events)*

(i) असंभव और निश्चित घटनाएँ (Impossible and Sure Events) रिक्त समुच्चय ϕ तथा प्रतिदर्श समष्टि S भी घटनाओं को व्यक्त करते हैं। वस्तुत: ϕ को एक असंभव घटना कहते हैं और S, अर्थात्, सम्पूर्ण प्रतिदर्श समष्टि को एक निश्चित घटना कहते हैं।

(ii) सरल या प्रारम्भिक घटना (Simple or Elementary Event) यदि किसी घटना E में प्रतिदर्श समष्टि का केवल एक प्रतिदर्श बिन्दु हो, अर्थात् किसी परीक्षण का केवल एक परिणाम हो, तो घटना को सरल या प्रारम्भिक घटने कहते हैं। दो सिक्कों को उछालनें के किसी परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि, निम्नलिखित है,

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

घटना $E_1 = \{HH\}$ जिसमें प्रतिदर्श समष्टि S का अकेला परिणाम HH है, एक सरल या प्रारंभिक घटना है। ताश की भली भाँति फेंटी हुई गड्डी से एक पत्ता निकालनें के परीक्षण में, यदि कोई विशेष पत्ता, जैसे 'हुकुम की रानी' का निकालना, एक सरल घटना है।

(iii) मिश्र घटना (Compound Event) यदि किसी घटना में एक से अधिक प्रतिदर्श बिन्दु हैं, तो इसे मिश्र घटना कहते हैं, उदाहरणार्थ, $E = \{HH, HT\}$ एक मिश्र घटना है।

(iv) पूरक घटना (Complementary event) किसी प्रदत्त घटना A के सापेक्ष, A की पूरक, वह घटना है, जिसमें प्रतिदर्श समष्टि के वे सभी परिणाम हों, जो A के घटित होने से संबंधित नहीं हैं।

A की पूरक घटना को प्रतीक A′ अथवा $\bar{A}$ से निरूपित करते हैं। इसे घटना 'A-नहीं' भी कहते हैं। पुन: प्रतीक $P(\bar{A})$, A के नहीं घटनो की प्रायिकता को निरूपित करता है।

$$A' = \bar{A} = S - A = \{w : w \in S \text{ और } w \notin A\}$$

16.1.4 *घटना 'A या B' (Event 'A or B')* यदि A तथा B, एक ही प्रतिदर्श समष्टि से संबंधित, दो घटनाएँ हों, तो घटना 'A या B' घटना $A \cup B$ के समान होती है और इसमें वे सभी अवयव होते हैं, जो या तो A में या B में या दोनों में हों। पुन: $P(A \cup B)$, A या B (या दोनों) के घटित होने की प्रायिकता को निरूपित करता है।

16.1.5 *घटना 'A और B' (Event 'A and B')* यदि A तथा B, एक ही प्रतिदर्श समष्टि से संबंधित दो घटनाएँ हों, तो घटना 'A और B', घटना $A \cap B$ के समान होती है और इसमें वे सभी अवयव होते हैं, जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ हों। पुन:, $P(A \cap B)$, A और B के एक साथ घटित होने की प्रायिकता को निरूपित करता है।

16.1.6 *घटना 'A किन्तु B नहीं (अन्तर A - B) '(The Event 'A but not B' (Difference A – B))* घटना A – B एक ही समष्टि S के उन सभी अवयवों का समुच्चय है, जो A में तो है किन्तु B में नहीं, अर्थात्, $A - B = A \cap B'$.

16.1.7 *परस्पर अपवर्जी (Mutually exclusive)* किसी प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाएँ A तथा B परस्पर अपवर्जी होती हैं, यदि इनमें से किसी एक घटना का घटित होना दूसरी घटना के घटित होने को अपवर्जित करता है। अत: दोनों घटनाएँ A तथा B एक साथ घटित नहीं हो सकती हैं और इस प्रकार $P(A \cap B) = 0$.

टिप्पणी: किसी प्रतिदर्श समष्टि की सरल अथवा प्रारम्भिक घटनाएँ सदैव परस्पर अपवर्जी होती हैं। उदाहरण के लिए, किसी पासे के फेकनने के परीक्षण की सरल घटनाएँ $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ या $\{6\}$ परस्पर अपवर्जी हैं।

किसी पासे को एक बार फेंकने के परीक्षण पर विचार कीजिए:
घटना E = पासे पर एक सम संख्या प्रकट होना और घटना F = पासे पर एक विषम संख्या प्रकट होना परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, क्योंकि $E \cap F = \phi$.

टिप्पणी: किसी दिए हुए प्रतिदर्श समष्टि के लिए दो या अधिक परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हो सकती हैं

16.1.8 नि:शेष घटनाएँ (*Exhaustive events*) :यदि $E_1, E_2, ..., E_n$ किसी प्रतिदर्श समष्टि S की n घटनाएँ हैं और यदि

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup ... \cup E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = S \text{ तो } E_1, E_2, ...E_n$$

को नि:शेष घटनाएँ कहते हैं। दूसरे शब्दों में, किसी प्रतिदर्श समष्टि S की घटनाएँ $E_1, E_2, ..., E_n$ नि:शेष कहलाती हैं, यदि जब कभी परीक्षण किया जाए, तो इनमें से कम से कम एक घटना अवश्य ही घटित हो।

किसी पासे को फेंकने के परीक्षण पर विचार कीजिए। यहाँ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. दो घटनाओं को निम्नलिखित प्रकार परिभाषित कीजिए:

A : '4 के बराबर या 4 से कम संख्या का प्रकट होना'

B : '4 के बराबर या 4 से अधिक संख्या का प्रकट होना'

अब $A : \{1, 2, 3, 4\}, B = \{4, 5, 6\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$

इस प्रकार की घटनाएँ A तथा B नि:शेष घटनाएँ कहलाती हैं।

16.1.9 *परस्पर अपवर्जी और नि:शेष घटनाएँ (Mutually exclusive and exhaustive events)* : यदि $E_1, E_2, ..., E_n$ किसी प्रतिदर्श समष्टि S की n घटनाएँ हैं और यदि $E_i \cap E_j = \phi$

प्रत्येक $i \neq j$, अर्थात्, E_i और E_j युग्मत: असंयुक्त हैं तथा $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$, तो घटनाएँ $E_1, E_2, ... , E_n$ परस्पर अपवर्जी और नि:शेष घटनाएँ कहलाती हैं।

किसी पासे को फेंकने के उदाहरण पर विचार कीजिए,

यहाँ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

आइए हम तीन घटनाओं को निम्नलिखित प्रकार परिभाषित करें:

A = एक पूर्ण वर्ग संख्या

B = एक अभाज्य संख्या

C = एक संख्या, जो 6 के बराबर या 6 से बड़ी है

अब $A = \{1, 4\}, \quad B = \{2, 3, 5\}, C = \{6\}$

नोट कीजिए कि $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$. इसलिए, A, B तथा C नि:शेष घटनाएँ हैं। इसके अतिरिक्त

$A \cap B = B \cap C = C \cap A = \phi$

अत: घटनाएँ युग्मत: असंयुक्त है और परस्पर अपवर्जी हैं।

प्रायिकता के पुरातन (classical) सिद्धांत का प्रयोग, उस दशा में उपयोगी होता है, जब

परीक्षण के परिणाम सम संभाव्य (Equally likely) हों। इस दशा में प्रायिकता निर्धारित करने के लिए,हम तर्क शास्त्रीय विधियों का प्रयोग कर सकते हैं। पुरातन विधि को समझने के लिए, किसी अनभिनत (fair) सिक्के के परीक्षण पर विचार कीजिए। इस परीक्षण में दो सम संभाव्य परिणाम हैं–या तो चित्त (H) या पट (T)। जब प्रारम्भिक परिणामों को सम संभाव्य मान लेते हैं, तो हमें एक समान प्रायिकता का प्रतिमान प्राप्त होता है। यदि S में k प्रारम्भिक परिणाम हैं, तो प्रत्येक परिणाम की प्रायिकता $\frac{1}{k}$ निर्धारित की जाती है। इसलिए तर्कशास्त्र सुझाव देते हैं कि, P (H) द्वारा निरूपित, चित प्रकट होने की प्रायिकता $\frac{1}{2} = 0.5$ है और P (T) द्वारा निरूपित, पट प्रकट होने की प्रायिकता भी $\frac{1}{2} = 0.5$ है। नोट कीजिए कि इनमें से प्रत्येक प्रायिकता का मान 0 तथा 1 के बीच है। पुन: परीक्षण के कुल परिणाम H और T हैं, अत: P (H) + P (T) = 1.

16.1.10 ***प्रायिकता की पुरातन परिभाषा (Classical definition)*** यदि किसी प्रतिदर्श समष्टि के सभी परिणाम सम संभाव्य हों तो किसी एक घटना के घटित होने की प्रायिकता निम्नलिखित अनुपात के तुल्य (बराबर) होती है:

$$\frac{\text{उस घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रतिदर्श समष्टि के कुल परिणामों की संख्या}}$$

मान लीजिए कि कोई घटना E, कुल n संभव सम संभाव्य तरीकों में से, h तरीकों से घटित हो सकती है, तो, P(E) द्वारा निरूपित, उस घटना के घटित होने की पुरातन प्रायिकता निम्नलिखित होती है:

$$\text{P (E)} = \frac{h}{n}$$

साथ ही P(E–नहीं) द्वारा निरूपित, E के नहीं घटने की प्रायिकता निम्नलिखित होती हैं:

$$\text{P (not E)} = \frac{n-h}{n} = 1 - \frac{h}{n} = 1 - \text{P (E)}$$

अत: $\quad$ P (E) + P (E–नहीं) = 1

घटना 'E-नहीं' को प्रतीक $\overline{\text{E}}$ या E′ (E की पूरक) द्वारा निर्दिष्ट करते हैं।

अत: $\quad \text{P}(\overline{\text{E}}) = 1 - \text{P (E)}$

16.1.11 ***प्रायिकता का अभिगृहीती दृष्टिकोण (Axiomatic approach to probability) :*** मान लीजिए कि किसी यादृच्छिक परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि S है। प्रायिकत P एक वास्तविक मान फलन है, जिसका प्रांत S का घात समुच्चय है, अर्थात् P(S), तथा परिसर T अंतराल [0, 1] है, अर्थात्, P : P (S) → [0, 1] और जो निम्नलिखित अभिगृहीतियों को संतुष्ट करता है:

(i) किसी घटना E के लिए, P (E) ≥ 0.

(ii) P (S) = 1

(iii) यदि E और F परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, तो P (E $\cup$ F) = P (E) + P (F).

अभिगृहीत (iii) से निष्कर्ष निकलता है कि, P (ϕ) = 0.

मान लीजिए कि S एक प्रतिदर्श समष्टि है, जिसमें प्रारंभिक परिणाम $w_1, w_2, ..., w_n$ अंतर्विष्ट (contain) हैं, अर्थात्,

$$S = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$$

प्रायिकता की अभिगृहीती परिभाषा से यह निष्कर्ष निकलता है कि:

(i) प्रत्येक $w_i \in S$ के लिए, $0 \leq P(w_i) \leq 1$

(ii) $P(w_1) + P(w_2) + ... + P(w_n) = 1$

(iii) किसी घटना A के लिए, जिसमें प्रारम्भिक परिणाम w_i अंतर्विष्ट हैं, $P(A) = \sum P(w_i)$.

उदाहरण के लिए यदि अनभिनत सिक्का एक बार उछाला जाता है, तो

$P(H) = P(T) = \frac{1}{2}$, जिससे उपर्युक्त प्रायिकता के तीनों अभिगृहीत संतुष्ट होते हैं।

अब, मान लीजिए कि सिक्का अभिनत (biased) है और पट प्रकट होने की तुलना में चित प्रकट होने की संभावना दुगुनी है, तो $P(H) = \frac{2}{3}$ तथा $P(T) = \frac{1}{3}$.

H तथा T की प्रायिकताओं का यह (उपर्युक्त) निर्धारण भी वैध (valid) है, क्योंकि ये अभिगृहीती परिभाषा को संतुष्ट करते हैं।

16.1.12 *सम संभाव्य परिणामों की प्रायिकता (Probabilities of equally likely outcomes)*

मान लीजिए कि किसी परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि $S = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ है और मान लीजिए कि सभी परिणामों के घटित होने की संभावना समान है, अर्थात्, प्रत्येक सरल घटना के घटित होने की संभावना अनिवार्यतः समान है, अर्थात् सभी $w_i \in S$ के लिए, $P(w_i) = p$, जहाँ $0 \leq p \leq 1$

क्योंकि $$\sum_{i=1}^{n} P(w_i) = 1$$

अर्थात् $$p + p + p + ... + p \text{ (}n\text{ बार)} = 1$$

$$\Rightarrow \quad np = 1, \quad \text{अर्थात्} \quad p = \frac{1}{n}$$

मान लीजिए कि प्रतिदर्श समष्टि की एक घटना E,इस प्रकार है कि, $n(S) = n$ तथा $n(E) = m$. यदि प्रत्येक परिणाम सम संभाव्य है, तो परिणामतः (fallows)

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{\text{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल संभव परिणामों की संख्या}}$$

16.1.13 *प्रायिकता का योग नियम (Addition rule of probability)* यदि किसी प्रतिदर्श समष्टि S की A तथा B दो घटनाएँ हैं, तो घटनाओं A या B में से कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता निम्नलिखित प्रकार होती है:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

इसी प्रकार तीन घटनाओं A, B तथा C के लिए

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

16.1.14 परस्पर अपवर्जी घटनाओं के लिए योग नियम (*Addition rule for mutually exclusive events*) यदि A और B असंयुक्त समुच्चय हैं, तो

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ [क्योंकि $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$, जहाँ A और B असंयुक्त हैं]

परस्पर अपवर्जी घटनाओं के लिए योग नियम को दो से अधिक घटनाओं के लिए विस्तारित (extended) किया जा सकता है।

16.2 हल किए हुए उदाहरण (Solved Examples)

लघुउत्तरीय (S.A.)

उदाहरण 1 एक सामान्य ताश की गड्डी में 52 पत्ते चार वर्गों में विभाजित होते हैं। ईंट तथा पान के पत्ते लाल रंग के होते हैं और चिडी तथा हुकुम के पत्ते काले रंग के होते हैं। J,Q और K ताश के सचित्र पत्ते कहलाते हैं। मान लीजिए कि, गड्डी में से हम एक पत्ता यादृच्छया निकालते हैं, तो

(a) परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि क्या है?

(b) चुने गए पत्ते के काले सचित्र होने के लिए घटना क्या है?

हल

(a) प्रतिदर्श समष्टि के परिणाम गड्डी के 52 पत्ते हैं।

(b) मान लीजिए कि 'चुना गया पत्ता काला सचित्र पत्ता है' घटना E है। इस प्रकार हुकुम या चिड़ी का 'गुलाम', 'रानी', 'बादशाह', E के परिणाम हैं। प्रतीकात्मक रूप से

E = {हुकुम या चिड़ी के J, Q, K, } या $E = \{J\clubsuit, Q\clubsuit, K\clubsuit, J\spadesuit, Q\spadesuit, K\spadesuit\}$

उदाहरण 2 मान लीजिए कि पैदा होने वाले प्रत्येक बच्चे का लड़का या लड़की होना सम संभाव्य है। तथ्यत: (exactly) तीन बच्चों वाले एक परिवार पर विचार कीजिए।

(a) उस प्रतिदर्श समष्टि के आठ अवयवों की सूची बनाइए, जिसके परिणामों में तीनों बच्चों के लड़का या लड़की होने की सभी संभावनाएँ निहित हों।

(b) नीचे लिखी प्रत्येक घटना को समुच्चय रूप में लिखिए और उसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(i) घटना कि तत्थ्यत: एक बच्चा लड़की है।

(ii) घटना कि कम से कम दो बच्चे लड़की है।

(iii) घटना की एक भी बच्चा लड़की नहीं है।

हल

(a) लड़का या लड़की होने की सभी संभावनाएँ नीचे व्यक्त हैं:

S = {BBB, BBG, BGB, BGG, GBB,GBG, GGB, GGG}

(b) (i) मान लीजिए कि A, घटना 'तथ्यत: एक बच्चा लड़की है' को निर्दिष्ट करता है, तो A = {BBG, BGB, GBB}

अतएव, P (A) = $\frac{3}{8}$

(ii) मान लीजिए कि B, घटना 'कम से कम दो बच्चे लड़की हैं' को निर्दिष्ट करता है, तो

B = {GGB, GBG, BGG, GGG}, अतएव, P (B) = $\frac{4}{8}$.

(iii) मान लीजिए कि C, घटना : 'एक भी बच्चा लड़की नहीं है' को निर्दिष्ट करता है, तो C = {BBB}

अतएव, P (C) = $\frac{1}{8}$

उदाहरण 3

(a) दो अंकों के कितने धन पूर्णांक संख्या 3 के गुणज हैं?

(b) यादृच्छया चुने गए एक दो अंकों वाले धन पूर्णांक का संख्या 3 के गुणज होने की प्रायिकता क्या है?

हल

(a) 12, 15, 18, ... , 99 दो अंकों के ऐसे धन पूर्णांक हैं, जो संख्या 3 के गुणज हैं। अत: इस प्रकार के 30 पूर्णांक हैं।

(b) 10, 11, 12, ... , 99 दो अंकों के धन पूर्णांक हैं। अत: इस प्रकार के 90 पूर्णांक हैं। क्योंकि इनमें से 30 पूर्णांक संख्या 3 के गुणज हैं, इसलिए इस बात की प्रायिकता कि, एक यादृच्छया चुना गया दो अंकों का धन पूर्णांक संख्या 3 का गुणज है, $\frac{30}{90} = \frac{1}{3}$ है।

उदाहरण 4 एक विशिष्ट PIN (Personal identification number), अंग्रेजी वर्णमाला के 26 अक्षरों और प्रथम दस अंकों में से चुने गए किन्हीं भी चार प्रतीकों का, एक अनुक्रम है। यदि सभी PIN सम संभाव्य हैं, तो एक यादृच्छया चुने गए PIN में प्रतीकों की पुनरावृत्ति होने की क्या प्रायिकता है?

हल कोई PIN, 36 प्रतीकों (26 अक्षरों + 10 अंकों) में से चुने गए किन्हीं चार प्रतीकों का, एक अनुक्रम है। इस प्रकार गणना के आधारभूत सिद्धांत द्वारा, PINs की कुल संख्या $36 \times 36 \times 36 \times 36 = 36^4 = 1{,}679{,}616$ है जब पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं हो, तो गुणज नियम के प्रयोग द्वारा निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि इसप्रकार के विभिन्न PINs की संख्या $36 \times 35 \times 34 \times 33 = 1{,}413{,}720$ है अतएव, कम से कम एक प्रतीक के पुनरावृत्ति वाले PINs की

संख्या = 1,679,616 – 1,413,720 = 2,65,896

अतः एक प्रतीक के पुनरावृत्ति वाले, यादृच्छया चुने गए PIN की, प्रायिकत

$$\frac{265,896}{1,679,616} = .1583 \text{ है।}$$

उदाहरण 5 किसी परीक्षण के A, B, C तथा D, चार संभव परिणाम हैं, जो परस्पर अपवर्जी हैं। स्पष्ट कीजिए कि प्रायिकता का निम्नलिखित निर्धारण, अनुज्ञेय (permissible) क्यों नहीं है:

(a) $P(A) = .12$, $P(B) = .63$, $P(C) = 0.45$, $P(D) = -0.20$

(b) $P(A) = \frac{9}{120}$, $P(B) = \frac{45}{120}$ $P(C) = \frac{27}{120}$ $P(D) = \frac{46}{120}$

हल

(a) हम जानते हैं कि, किसी घटना A के लिए $0 \le P(A) \le 1$

इसलिए $P(D) = -0.20$ संभव नहीं है,

(b) $P(S) = P(A \cup B \cup C \cup D) = \frac{9}{120} + \frac{45}{120} + \frac{27}{120} + \frac{46}{120} = \frac{127}{120} \neq 1.$

यह प्रतिबंध $P(S) = 1$ का उल्लंघन करता है।

उदाहरण 6 एक ट्रक किसी मार्ग-बाधा पर रूका, तो इस बात की प्रायिकताएँ कि, ट्रक के ब्रेक दोषपूर्ण हैं या उसके टायर घिसे-पिटे हैं, क्रमशः 0.32 तथा 0.24 हैं। साथ ही, इस बात की प्रायिकता 0.38 है, कि यदि ट्रक उस मार्ग-बाधा पर रूकी, तो उसके ब्रेक दोषपूर्ण हैं / या उसके टायर घिसे-पिटे हैं। इस बात की प्रायिकता क्या है कि,यदि ट्रक उसी मार्ग बाधा पर रूका तो उसके ब्रेक दोषपूर्ण हैं साथ ही उसके टायर भी घिसे-पिटे हैं?

हल मान लीजिए कि घटना B 'ट्रक उस मार्ग-बाधा पर रूका, तो उसके ब्रेक दोषपूर्ण हैं' को प्रकट करता है और घटना T इस बात को प्रकट करता है कि उसके टायर घिसे-पिटे हैं। इस प्रकार $P(B) = 0.23$, $P(T) = 0.24$ तथा $P(B \cup T) = 0.38$

और $\quad P(B \cup T) = P(B) + P(T) - P(B \cap T)$

अतः $\quad 0.38 = 0.23 + 0.24 - P(B \cap T)$

$\Rightarrow \quad P(B \cap T) = 0.23 + 0.24 - 0.38 = 0.09$

उदाहरण 7 कोई व्यक्ति अपने दंतचिकित्सक के पास जाता है। मान लीजिए कि इस बात की प्रायिकता, कि वह अपने दांतों की सफाई करवाएगा, 0.48 है, इस बात की प्रायिकता, कि वह एक खोखले स्थान (Cavity) को भरवाएगा, 0.25 है, इस बात की प्रायिकता, कि वह एक दांत उखड़वाएगा (निकलवाएगा), 0.20 है, इस बात की प्रायिकता कि वह दांतों की सफाई करवाएगा और एक खोखले स्थान को भरवाएगा, 0.09 है, इस बात की प्रायिकता, कि वह दांतों की सफाई करवाएगा और एक दांत उखड़वाएगा, 0.12 है, इस बात की प्रायिकता, कि वह एक खोखले स्थान को भरवाएगा और एक

दांत उखड़वाएगा, 0.07 तथा इस बात की प्रायिकता, कि वह दांतों की सफाई करवाएगा, एक खोखले स्थान को भरवाएगा और एक दांत उखड़वाएगा 0.03 है। इस बात की प्रायिकता क्या है कि अपने दंतचिकित्सक के पास जाने वाला एक व्यक्ति इनमें से कम से कम एक (काम) करवाएगा?

हल मान लीजिए कि C व्यक्ति द्वारा दांतों की सफाई करवाने की घटना को प्रकट करता है और F तथा E क्रमशः खोखले स्थान को भरवाने तथा दांत को उखड़वाने की घटनाओं को प्रकट करते हैं। हमें दिया हुआ है कि,

$$P(C) = 0.48,\ P(F) = 0.25,\quad P(E) = .20,\quad P(C \cap F) = .09,$$

$$P(C \cap E) = 0.12,\ P(E \cap F) = 0.07 \text{ और } P(C \cap F \cap E) = 0.03$$

अब,
$$\begin{aligned} P(C \cup F \cup E) &= P(C) + P(F) + P(E) \\ &\quad - P(C \cap F) - P(C \cap E) - P(F \cap E) \\ &\quad + P(C \cap F \cap E) \\ &= 0.48 + 0.25 + 0.20 - 0.09 - 0.12 - 0.07 + 0.03 \\ &= 0.68 \end{aligned}$$

दीर्घउत्तरीय (L.A)

उदारहण 8 एक कलश में 1 से 20 तक क्रमांकित कागज़ की बीस सफ़ेद पर्चियाँ, 1 से 10 तक क्रमांकित कागज़ की दस लाल पर्चियाँ, 1 से 40 तक क्रमांकित कागज़ की चालीस पीली पर्चियाँ तथा 1 से 10 तक क्रमांकित कागज की दस नीली पर्चियाँ हैं। यदि कागज़ की ये 80 पर्चियाँ अच्छी तरह से मिला दी गई हों, जिससे प्रत्येक पर्ची के कलश से निकाले जाने की प्रायिकता समान हो, तो एक पर्ची के निकालने की निम्नलिखित प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए:

(a) पर्ची नीली या सफ़ेद हो

(b) पर्ची 1, 2, 3, 4 या 5 क्रमांकित हो

(c) पर्ची लाल या पीली हो और 1, 2, 3 या 4 क्रमांकित हो

(d) पर्ची 5, 15, 25, या 35 क्रमांकित हो

(e) पर्ची सफ़ेद हो और उस पर 12 से अधिक संख्या अंकित हो या पर्ची पीली हो और उस पर 26 से अधिक संख्या अंकित हो।

हल

(a) P (नीली या सफ़ेद) = P (नीली) + P (सफ़ेद) (क्यों?)

$$= \frac{10}{80} + \frac{20}{80} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}$$

(b) P (1, 2, 3, 4 या 5 क्रमांकित पर्ची)
= P (किसी भी रंग की अंक 1 वाली पर्ची) + P (किसी भी रंग की अंक 2 वाली पर्ची) + P (किसी भी रंग की अंक 3 वाली पर्ची) + P (किसी भी रंग की अंक 4 वाली पर्ची) + P (किसी भी रंग की अंक 5 वाली पर्ची)।

$$= \frac{4}{80}+\frac{4}{80}+\frac{4}{80}+\frac{4}{80}+\frac{4}{80} = \frac{20}{80}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

(c) P (लाल या पीली और 1, 2, 3 या 4 अंकित पर्ची)
= P (1, 2, 3 या 4 अंकित लाल पर्ची) + P (1, 2, 3 या 4 अंकित पीली पर्ची)

$$= \frac{4}{80}+\frac{4}{80}=\frac{8}{80}=\frac{1}{10}$$

(d) P (5, 15, 25 या 35 अंकित पर्ची)
= P (5) + P (15) + P (25) + P (35)
= P (अंक 5 वाली सफ़ेद, लाल, पीली या नीली पर्ची) + P (अंक 15 वाली सफ़ेद या पीली पर्ची) + P (अंक 25 वाली पीली पर्ची) + P (अंक 35 वाली पीली पर्ची)

$$= \frac{4}{80}+\frac{2}{80}+\frac{1}{80}+\frac{1}{80}=\frac{8}{80}=\frac{1}{10}$$

(e) P (12 से अधिक अंकित सफ़ेद पर्ची या 26 से अधिक अंकित पीली पर्ची)
= P (12 से अधिक अंकित सफ़ेद पर्ची)
+ P (26 से अधिक अंकित पीली पची)

$$= \frac{8}{80}+\frac{14}{80}=\frac{22}{80}=\frac{11}{40}$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण 1 से 15 तक प्रत्येक में दिए गए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए (M.C.Q).

उदाहरण 9 किसी लीप वर्ष (Leap year) में 53 रविवार या 53 सोमवार होने की प्रायिकता है:

(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{4}{7}$ (D) $\frac{5}{7}$

हल सही उत्तर (B) है। क्योंकि किसी लीप वर्ष में 366 दिन होते हैं और इसलिए 52 सप्ताह और 2 दिन होते हैं ये 2 दिन SM, MT, TW, WTh, ThF, FSt, StS हो सकते हैं।

अतः P (53 रविवार या 53 सोमबार) = $\frac{3}{7}$.

उदारहण 10: अंक 0, 2, 4, 6, 8 का प्रयोग करके तीन अंकों की संख्याएँ बनाई जाती हैं। इन संख्याओं में से एक संख्या यादृच्छया चुनी जाती है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि चुनी गई इस संख्या के तीनों अंक एक ही (same) हों?

(A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{16}{25}$ (C) $\frac{1}{645}$ (D) $\frac{1}{25}$

हल (D) सही उत्तर है। क्योंकि एक तीन अंकों की संख्या 0 से प्रारंभ नहीं हो सकती, इसलिए सैकड़े के स्थान पर 0 के अतिरिक्त शेष कोई भी 4 अंक हो सकते हैं। अब दहाई तथा इकाई के स्थान पर सभी 5 अंक हो सकते हैं। अत: तीन अंकों की कुल संभव संख्याएँ $4 \times 5 \times 5$, अर्थात् 100 हैं। इस प्रकार की तीन अंकों की कुल संभव संख्या, जिनके तीनों अंक एक ही हों = 4

अत: P अंकों की संख्याएँ जिनके तीनों अंक एक ही हैं $= \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$.

उदाहरण 11 किसी चेश बोर्ड (Chesas board) के तीन वर्ग यादृच्छया चुने जाते हैं। दो वर्गों के एक ही रंग के तथा तीसरे वर्ग के पृथक (भिन्न) रंग के होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{16}{21}$ (B) $\frac{8}{21}$ (C) $\frac{3}{32}$ (D) $\frac{3}{8}$

हल (A) सही उत्तर है। किसी चेश बोर्ड में 64 वर्ग होते हैं जिनमें से 32 सफ़ेद रंग के तथा 32 काले रंग के होते हैं। दो वर्ग एक रंग के तथा तीसरा पृथक् रंग का होने के लिए 2W, 1B या 1W या 2B हो सकता है। ऐसा होने के $({}^{32}C_2 \times {}^{32}C_1) \times 2$ तरीके हैं और साथ ही कोई भी तन वर्ग चुनने के ${}^{64}C_3$ तरीक़े हैं।

अत: अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{{}^{32}C_2 \times {}^{32}C_1 \times 2}{{}^{64}C_3} = \frac{16}{21}$.

उदाहरण 12 यदि A तथा B कोई दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ तथा $P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$ तो $\bar{A} \cap B$ की प्रायिकता है:

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{3}$

हल (C) सही उत्तर है। हमें ज्ञात है कि $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad P(A \cup (B - A)) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad P(A) + P(B - A) = \frac{1}{2}$ (क्योंकि A तथा B – A परस्पर अपवर्जी हैं)

$\Rightarrow \quad 1 - P(\bar{A}) + P(B - A) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{2}{3} + P(B - A) = \frac{1}{2}$$

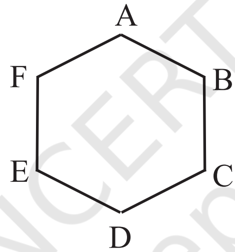
$$\Rightarrow \quad P(B - A) = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \quad P(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{6} \qquad (\text{क्योंकि } \overline{A} \cap B \equiv B - A)$$

उदाहरण 13 किसी सम षड्भुज (regular hexagon) के छः शीर्षों में से तीन शीर्षों को यादृच्छया चुना जाता है। इन शीर्षों से बने त्रिभुज के समभुज (equilateral) होने की प्रायिकता क्या है?

(A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{3}{20}$ (C) $\frac{1}{20}$ (D) $\frac{1}{10}$

हल (D) सही उत्तर है।



आकृति 16.1

ABCDEF एक सम षड्भुज है। त्रिभुजों की कुल संख्या ${}^6C_3 = 20$ हैं (क्योंकि कोई भी तीन शीर्ष संरेख नहीं हैं,) इन त्रिभुजों में से केवल Δ ACE; Δ BDF ही समबाहु हैं।

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

उदाहरण 14 यदि A, B, C किसी परीक्षण की तीन परस्पर अपवर्जी और निःशेष घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $3P(A) = 2P(B) = P(C)$, तो P(A) निम्नलिखित में से किसके तुल्य (समान) है:

(A) $\frac{1}{11}$ (B) $\frac{2}{11}$ (C) $\frac{5}{11}$ (D) $\frac{6}{11}$

हल (B) सही उत्तर है। मान लीजिए कि $3P(A) = 2P(B) = P(C) = p$ परिणामतः $p(A) = \frac{p}{3}$,

$P(B) = \frac{p}{2}$ और $P(C) = p$

अब, क्योंकि A, B, C परस्पर अपवर्जी और निःशेष घटनाएँ हैं, इसलिए

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p}{3} + \frac{p}{2} + p = 1 \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{6}{11}$$

अत: $\quad P(A) = \frac{p}{3} = \frac{2}{11}$

उदाहरण 15 समुच्चय $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ से स्वयं (A में) सभी फलनों में से एक फलन यादृच्छया चुना जाता है। चयनित (चुने गए) फलन के एकैकी (one to one) होने की प्रायिकता है।

(A) $\frac{1}{n^n}$ (B) $\frac{1}{\underline{|n}}$ (C) $\frac{\underline{|n-1}}{n^{n-1}}$

(D) इनमें से कोई भी नहीं है।

हल (C) सही उत्तर है। n अवयव वाले समुच्चय A से स्वयंम् में कुल फलनों की संख्या n^n है अब एकैकी फलन के लिए A के प्रथम अवयव के लिए स्वयंम् में कोई भी n प्रतिबिंब हो सकते हैं; A के द्वितीय अवयव के लिए शेष (बचे हुए) $(n-1)$ प्रतिबिंब हो सकते हैं, इसी प्रकार से गणना करने पर A के n-वें (n^{th}) अवयव का केवल 1 प्रतिबिंब होगा। इसलिए एकैकी फलनों की कुल संख्या $\underline{|n}$ होगी।

अत: अभीष्ट प्रायिकता $\frac{\underline{|n}}{n^n} = \frac{n\underline{|n-1}}{n\,n^{n-1}} = \frac{\underline{|n-1}}{n^{n-1}}$ है।

16.3 प्रश्नावली

लघुउत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. यदि शब्द ALGORITHM के अक्षरों को एक पंक्ति में यादृच्छया क्रमबद्ध किया जाए, तो GOR अक्षरों के एक इकाई के रूप में इकट्ठे एक साथ रहने की प्रायिकता क्या है?

2. छ: नए कर्मचारियों में, जिनमें से दो एक दूसरे से विवाहित हैं, एक पंक्ति में लगे छ: डेस्कों को बांट देना है। यदि डेस्कों का कर्मचारियों में यह आबंटन यादृच्छया किया गया हो, तो इस बात की प्रायिकता क्या है कि विवाहित जोड़े को संलग्न (अगल-बगल) डेस्क नहीं मिलेंगे?

   [**संकेत**: *जोड़े को संलग्न डेस्कें मिलने की प्रायिकता पहले ज्ञात कीजिए और तब इसे 1 से घटा दीजिए*]

3. मान लीजिए कि 1 से 1000 तक के पूर्णांकों में से एक पूर्णांक यादृच्छया चुना जाता है, तो इस पूर्णांक के संख्या 2 का गुणज या संख्या 9 का गुणज होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

4. किसी परीक्षण में एक पासे को तब तक फेंकते रहते हैं, जब तक संख्या 2 प्राप्त नहीं हो जाती है।

   (i) प्रतिदर्श समष्टि के कितने अवयव, पासे के k^{th} बार फेंकने पर संख्या 2 के प्राप्त होने की घटना के संगत हैं?

(ii) प्रतिदर्श समष्टि के कितने अवयव, पासे के k^{th} बार फेंकने के पश्चात् संख्या 2 के नहीं प्राप्त होने की घटना के, संगत हैं?

[**संकेत:** (a) *पहले* $(k-1)$ *बार फेंकने पर प्रत्येक के 5 परिणाम होंगे और* k^{th} *बार फेंकने पर 1 परिणाम होगा।* (b) $1 + 5 + 5^2 + ... + 5^{k-1}$.]

5. एक पासा इस प्रकार भारित (loaded) है कि उसे फेंकने पर प्रत्येक विषम संख्या के प्राप्त होने की संभावना प्रत्येक सम संख्या के प्राप्त होने की संभावना से दुगुनी है। P(G) ज्ञात कीजिए, जहाँ G पासे को एक बार फेंकने पर 3 से बड़ी संख्या प्राप्त होने की घटना है।

6. एक विशाल महानगरीय क्षेत्र में किसी परिवार (सर्वे के लिए यादृच्छया चुने गए) के पास एक रंगीन टेलीविज़न सेट एक काला-सफ़ेद (Black and white) टेलीविज़न सेट या दोनों प्रकार के सेटों के होनें की प्रायिकता क्रमशः 0.87, .36 या .30 है। किसी परिवार के पास दोनों में से कोई एक या दोनों ही प्रकार के सेट होने की क्या प्रायिकता है?

7. यदि A तथा B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, इस प्रकार हैं कि P (A) = 0.35 तथा P (B) = 0.45 तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए;

(a) $P(A')$ (b) $P(B')$ (c) $P(A \cup B)$ (d) $P(A \cap B)$

(e) $P(A \cap B')$ (f) $P(A' \cap B')$

8. आयुर्विज्ञान के विद्यार्थियों की एक टीम (टोली, दल) को अंतरंग अध्ययन (internship) के दौरान नगर के किसी चिकित्सालय में सर्जरी (शल्य क्रिया) में सहयोग करना है। सर्जरी को अति जटिल, जटिल, सामान्य, सरल या अति सरल श्रेणियों में रेखने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.15, 0.20, 0.31, 0.26 या 0.08 हैं। किसी विशेष सर्जरी को निम्नलिखित श्रेणियों में रखने की प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए:

(a) जटिल या अति जटिल

(b) न तो अति जटिल और न ही अति सरल

(c) सामान्य या जटिल

(d) सामान्य या सरल

9. किसी विद्यालय की क्रिकेट टीम को प्रशिक्षित करने के लिए चार प्रत्याशियों A, B, C तथा D ने आवेदन किया है। यदि A के चुनें जानें की संभावना B से दुगुनी है तथा B और C के चुने जाने की सम्भावनाएं लगभग समान हैं जबकि C के चुनें जाने की संभावना D से दोगुनी है, तो इस बात की प्रायिकता क्या है कि,

(a) C चुना जाएगा?

(b) A नहीं चुना जाएगा?

10. जॉन, रीता, असलम या गुरप्रीत चारों व्यक्तियों में से एक की पदोन्नति आगामी माह में कीजाएगी। फलस्वरूप, प्रतिदर्श समष्टि चार सरल परिणामों से बना है। इस प्रकार

S = {जॉन की उन्नति (promoted), रीता की उन्नति, असलम की उन्नति, गुरप्रीत की उन्नति}

आपको बताया जाता है कि जॉन की पदोन्नति की संभवना गुरप्रीत के समान है, रीता की पदोन्नति की संभावना जॉन से दुगुनी है। असलम की संभावन जॉन से चार गुनी (चौगुनी) है।

(a) ज्ञात कीजिए; P (जॉन उन्नति)

P (रीता उन्नति)

P (असलम उन्नति)

P (गुरप्रीत उन्नति)

(b) यदि A = {जॉन उन्नति या गुरप्रीत उन्नति}, तो P (A) ज्ञात कीजिए।

11. संलग्न वेन आरेख A, B, और C, तीन घटनाओं को प्रदर्शित करता है और साथ ही विविध सर्वनिष्ठों की प्रायिकताओं को भी प्रकट करता है (उदाहरण $P(A \cap B) = .07$)। निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए:

(a) $P(A)$

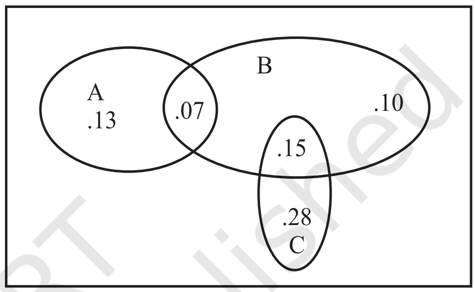
(b) $P(B \cap \bar{C})$

(c) $P(A \cup B)$

(d) $P(A \cap \bar{B})$

(e) $P(B \cap C)$

(f) तीनों में से तथ्यत: एक के घटित होने की प्रायिकता



आकृति 16.2

दीर्घउत्तरीय प्रश्न (L.A.)

12. किसी कलश में दो काले (चिह्नित B_1 तथा B_2) और एक सफ़ेद गेंद है। दूसरे कलश में एक काला गेंद और दो सफेद गेंद (चिह्नित W1 तथा W_2) हैं। मान लीजिए कि निम्नलिखित परीक्षण किया जाता है। दोनों कलशों में से एक को यादृच्छया चुना जाता हैं तदनन्तर (उसके बाद) इस कलश में से एक गेंद को यादृच्छया निकाला (चुना) जाता है। इसके उपरान्त पहले गेंद को वापस रखे बिना, इसी कलश से एक दूसरा गेंद यादृच्छया निकाला जाता है।

(a) सभी संभव परिणामों को प्रदर्शित करने वाला प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।

(b) दो काले गेंदों के चुने जाने की प्रायिकता क्या है?

(c) विपरीत रंगों के दो गेंदों के चुने जाने की प्रायिकता क्या है?

13. एक थैले में 8 लाल तथा 5 सफ़ेद की गेंदें हैं। तीन गेंदों को यादृच्छया निकाला जाता है। इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि,

(a) सभी तीनों गेंदें सफ़ेद रंग की हैं।

(b) सभी तीनों गेंदें लाल रंग की हैं।

(c) एक गेंद लाल रंग की है और दो गेंदें सफ़ेद रंग की हैं।

14. यदि शब्द ASSASSINATION के अक्षरों को यादृच्छया क्रमबद्ध (arranged) किया जाए, तो इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि,

(a) बनने वाले शब्द में चारो S लगातार हों।

(b) दो I' और दो N' एक साथ हों।

(c) सभी A एक साथ नहीं हों।

(d) कोई भी दो A एक साथ नहीं हों।

15. ताश के 52 पत्तों की किसी गड्डी से एक पत्ता निकाला जाता है। निकाले गए पत्ते की एक बादशाह होने की या एक पान का पत्ता होने की या एक लाल रंग का पत्ता होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

16. एक प्रतिदर्श समष्टि में 9 सरल परिणाम $e_1, e_2, ..., e_9$ हैं, जिनकी प्रायिकताएँ नीचे दी हुई हैं:
$P(e_1) = P(e_2) = .08, P(e_3) = P(e_4) = P(e_5) = .1$
$P(e_6) = P(e_7) = .2, P(e_8) = P(e_9) = .07$
मान लीजिए कि, $A = \{e_1, e_5, e_8\}, B = \{e_2, e_5, e_8, e_9\}$

(a) P (A), P (B), और $P(A \cap B)$ की गणना कीजिए।

(b) प्रायिकता के योग नियम का प्रयोग करके, $P(A \cup B)$ की गणना कीजिए।

(c) घटना $A \cup B$ की रचना (composition) की सूची बनाइए और प्रारम्भिक परिणामों की प्रायिकताओं को जोड़कर, $P(A \cup B)$ की गणना कीजिए।

(d) P(B) के माने से $P(\bar{B})$ की गणना कीजिए साथ ही सीधे $\bar{B}$ के प्रारम्भिक परिणामों से $P(\bar{B})$ की गणना कीजिए।

17. निम्नलिखित घटनाओं में से प्रत्येक की प्रायिकता p ज्ञात कीजिए:

(a) किसी अनभिनत (unbiased, fair) पासे को एक बार फेंकने पर एक विषम संख्या का प्राप्त होना।

(b) किसी अनभिनत सिक्के को दो बार उछालने पर कम से कम एक चित प्रकट होना।

(c) ताश के 52 पत्तों की भली-भाँति फेंटी हुई किसी साधारण गड्डी से एक पत्ते के निकालने पर एक बादशाह, पान का 9 या हुकुम का 3 प्राप्त होना।

(d) अनभिनत पासों के किसी जोड़े को एक बार फेंकने पर प्राप्त संख्याओं का योगफल 6 होना।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न संख्या 18 से 29 तक प्रत्येक में दिए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए (M.C.Q):

18. लीप वर्ष के अतिरिक्त किसी अन्य वर्ष में 53 मंगलवार या 53 बुधबार होने की प्रायिकता।

(A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) इनमें से कोई नहीं है।

19. 1 से 20 तक की संख्याओं में से तीन संख्याएँ चुनी जाती हैं। इन संख्याओं के क्रमागत (Consecutive) नहीं होने की प्रायिकता है:

(A) $\frac{186}{190}$ (B) $\frac{187}{190}$ (C) $\frac{188}{190}$ (D) $\frac{18}{^{20}C_3}$

20. ताश के 52 पत्तों की किसी गड्डी को फेंटते समय 2 पत्ते संयोगवश गिर जाते हैं। गिरे हुए पत्तों के असमान (भिन्न)रंगों के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(A) $\frac{29}{52}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{26}{51}$ (D) $\frac{27}{51}$

21. सात व्यक्तियों को एक पंक्ति में बैठना है। दो विशेष व्यक्तियों के एक दूसरे के अगल-बगल बैठने की प्रायिकता निम्नलिखित में कौन सी है:

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{1}{2}$

22. अंकों 0, 2, 3, 5 से, बिना पुनरावृत्ति किए, चार अंकों की संख्याएँ बनाई जाती हैं। इस प्रकार बनी संख्या के 5 से भाज्य होने की प्रायिकता है:

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{1}{30}$ (D) $\frac{5}{9}$

23. यदि घटनाएँ A तथा B परस्पर अपवर्जी हैं, तो

(A) $P(A) \le P(\bar{B})$ (B) $P(A) \ge P(\bar{B})$

(C) $P(A) < P(\bar{B})$ (D) इनमें से कोई नहीं है

24. किन्हीं दो घटनाओं A तथा B के लिए, यदि $P(A \cup B) = P(A \cap B)$, तो

(A) $P(A) = P(B)$ (B) $P(A) > P(B)$

(C) $P(A) < P(B)$ (D) इनमें से कोई नहीं है

25. 6 लड़के तथा 6 लड़कियाँ एक पंक्ति में यादृच्छया बैठते हैं। सभी लड़कियों के एक साथ (together) बैठने की प्रायिकता

(A) $\frac{1}{432}$ (B) $\frac{12}{431}$ (C) $\frac{1}{132}$ (D) इनमें से कोई नहीं।

26. 'PROBABILITY' शब्द से एक अक्षर यादृच्छया चुना जाता है। इस अक्षर के एक स्वर होने की प्रायिकता

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{4}{11}$ (C) $\frac{2}{11}$ (D) $\frac{3}{11}$

27. यदि किसी परीक्षा में A के असफल होने की प्रायिकता 0.2 है, जबकि B के असफल होने की प्रायिकता 0.3 है, या तो A या B के असफल होने की प्रायिकता है:

(A) $> .5$ (B) $.5$ (C) $\le .5$ (D) 0

28. घटनाओं A तथा B में से कम से कम किसी एक के घटने की प्रायिकता 0.6 है। यदि A और B के एक साथ घटित होनें की प्रायिकता 0.2 है, तो $P(\bar{A}) + P(\bar{B})$ है

(A) 0.4 (B) 0.8 (C) 1.2 (D) 1.6

29. यदि M तथा N कोई दो घटनाएँ हैं, तो इनमें से कम से कम किसी एक के घटित होने की प्रायिकता है:

(A) $P(M) + P(N) - 2P(M \cap N)$ (B) $P(M) + P(N) - P(M \cap N)$

(C) $P(M) + P(N) + P(M \cap N)$ (D) $P(M) + P(N) + 2P(M \cap N)$

बताइए कि प्रश्न 30 से 36 तक दिए हुए कथनों में से कौन-सा कथन सत्य है और कौन सा कथन असत्य है?

30. किसी चिड़ियाघर घूमने वाले एक व्यक्ति द्वारा जिराफ को देखने की प्रायिकता 0.72 है, भालू को देखने की प्रायिकता 0.84 है तथा दोनों को ही देखने की प्रायिकता 0.52 है।

31. किसी विद्यार्थी द्वारा परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.73 है, विद्यार्थी के पूरक परीक्षा (Compartment) देने की प्रायिकता 0.13 है तथा विद्यार्थी के या तो उत्तीर्ण होने की या पूरक परीक्षा देनें की प्रायिकता 0.96 है।

32. एक टाईपिस्ट द्वारा किसी रिपोर्ट को टाइप करने में 0, 1, 2, 3, 4 तथा 5 या अधिक गलतियाँ (त्रुटियाँ) करने की प्रायिकताएँ क्रमश: 0.12, 0.25, 0.36, 0.14, 0.08 तथा 0.11 है।

33. किसी इंजीनियरी कॉलेज में प्रवेश चाहने वाले A तथा B दो प्रवेशार्थी हैं। यदि A के चयन की प्रायिकता 0.5 है और A तथा B दोनों के ही चयन की अधिकतम प्रायिकता 0.3 है, तो क्या यह सम्भव है कि B के चयन की प्रायिकता 0.7 है।

34. A और B दो घटनाओं के सर्वनिष्ठ की प्रायिकता, घटना A के अनुकूल प्रायिकता से सदैव कम या उसके बराबर होती है।

35. किसी घटना A के घटित होने की प्रायिकता 0.7 है और एक अन्य घटना B के घटित होने की प्रायिकता 0.3 है तथा दोनों के घटित होने की प्रायकिता 0.4 है।

36. दो विद्यार्थियों की अपनी अन्तिम परीक्षाओं में श्रेष्ठता (distinction) प्राप्त करने की प्रायिकताओं का योगफल 1.2 है।

प्रश्न संख्याओं 37 से 41 में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

37. आगामी फुटबाल के खेल में मेज़बान टीम के जीतनें की प्रायिकता 0.77 है, खेल के बराबरी पर छूटने (tie) की प्रायिकता 0.08 है तथा टीम के हारने की प्रायिकता ________ है।

38. यदि e_1, e_2, e_3, e_4 किसी प्रतिदर्श समष्टि के, चार प्रारम्भिक परिणाम है और $P(e_1) = .1$, $P(e_2) = .5$, $P(e_3) = .1$, तो e_4 की प्रायिकता ________ है।

39. मान लीजिए कि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ और $E = \{1, 3, 5\}$, तो $\overline{E}$ ________ है।

40. यदि A तथा B, किसी यादृच्छिक परीक्षण से सम्बद्ध (सम्बंधित), दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.2$ तथा $P(A \cap B) = 0.1$, तो $P(A \cap \overline{B})$ का मान ________ है।

41. किसी घटना A के घटित होनें की प्रायिकता 0.5 है तथा घटना B के घटित होने की प्रायिकता 0.3 है। यदि A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, तो न तो A और B की प्रायिकता __________ है।

42. स्तम्भ C_1 के अन्तर्गत (नीचे) प्रस्तावित प्रायिकता का स्तम्भ C_2 के अंतर्गत उपयुक्त/समुचित (appropriate) लिखित वर्णन से मिलान (match) कीजिए:

$\mathbf{C_1}$ **प्रायिकता**	$\mathbf{C_2}$ **लिखित वर्णन**
(a) 0.95	(i) एक ग़लत निर्धारण करना
(b) 0.02	(ii) घटित होने की कोई सम्भावना नहीं होना।
(c) – 0.3	(iii) घटित होने की सम्भावना नहीं होने के बराबर।
(d) 0.5	(iv) घटित होने की सम्भव बहुत होना।
(e) 0	(v) घटित होने की सम्भावना बहुत कम होना।

43. निम्नलिखित का सही मिलान कीजिए:

(a) यदि E_1 और E_2 दो परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं	(i) $E_1 \cap E_2 = E_1$
(b) यदि E_1 और E_2 परस्पर अपवर्जी तथा नि:शेष घटनाएँ हैं	(ii) $(E_1 - E_2) \cup (E_1 \cap E_2) = E_1$
(c) यदि E_1 और E_2 के परिणाम उभयनिष्ठ हों, तो	(iii) $E_1 \cap E_2 = \phi, E_1 \cup E_2 = S$
(d) यदि E_1 और E_2 दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $E_1 \subset E_2$	(iv) $E_1 \cap E_2 = \phi$