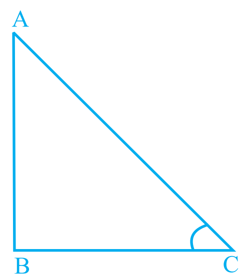
अध्याय 8

त्रिकोणमिति का परिचय और उसके अनुप्रयोग

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- एक त्रिभुज ABC, जिसका कोण B समकोण है, कोण A के त्रिकोणमितीय अनुपात इस प्रकार परिभाषित किए जाते हैं:



आकृति 8.1

$\angle A$ का sine (साइन)= $\sin A = \dfrac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{BC}{AC}$

$\angle A$ का cosine (कोसाइन)= $\cos A = \dfrac{\angle A \text{ की आसन्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{AB}{AC}$

$\angle A$ का tangent (टैनजेंट) = $\tan A = \dfrac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle A \text{ की आसन्न भुजा}} = \dfrac{BC}{AB}$

$\angle A$ का cosecant (कोसीकेंट)= $\text{cosec } A = \dfrac{1}{\sin A} = \dfrac{AC}{BC}$

$\angle A$ का secant (सीकेंट) = $\sec A = \dfrac{1}{\cos A} = \dfrac{AC}{AB}$

$\angle A$ का cotangent (कोटैंजेंट) = $\cot A = \dfrac{1}{\tan A}\ \dfrac{AB}{BC}$

$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$, $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$

© NCERT not to be republished

- यदि कोण वही रहे, तो एक कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयों के साथ बदलते (विचरित) नहीं हैं।
- यदि किसी कोण का एक त्रिकोणमितीय अनुपात दिया हो, तो उसके अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात निर्धारित किए जा सकते हैं।
- कोणों 0°, 30°, 45°, 60° और 90° के त्रिकोणमितीय अनुपात :

A	0°	30°	45°	60°	90°
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	परिभाषित नहीं
cosec A	परिभाषित नहीं	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	परिभाषित नहीं
cot A	परिभाषित नहीं	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

- sin A या cos A का मान 1 से अधिक कभी नहीं होता है, जबकि cosec A या sec A का मान सदैव 1 से बड़ा या उसके बराबर होता है।
- पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात:

  $\sin (90° - A) = \cos A, \cos (90° - A) = \sin A$

  $\tan (90° - A) = \cot A, \cot (90° - A) = \tan A$

  $\sec (90° - A) = \text{cosec } A, \text{cosec } (90° - A) = \sec A$
- त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ :

  $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

  $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

  $\cot^2 A + 1 = \text{cosec}^2 A$

© NCERT not to be republished

- किसी प्रेक्षक की आँख से उस वस्तु के बिंदु तक की रेखा जिसे प्रेक्षक देखता है 'दृष्टि रेखा' कहलाती है।
- देखी जाने वाली वस्तु का 'उन्नयन कोण' वह कोण है जो दृष्टि रेखा क्षैतिज रेखा से बनाती है, जबकि वह वस्तु क्षैतिज स्तर रेखा से ऊपर होती है।
- देखी जाने वाली वस्तु का 'अवनमन कोण' वह कोण है जो दृष्टि रेखा क्षैतिज रेखा से बनाती है, जबकि वह वस्तु क्षैतिज स्तर (रेखा) से नीचे होती है।
- किसी वस्तु की ऊँचाई या लंबाई अथवा दो भिन्न वस्तुओं के बीच की दूरी त्रिकोणमितीय अनुपातों की सहायता से निर्धारित की जा सकती है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : $(\sin 30^\circ + \cos 30^\circ) - (\sin 60^\circ + \cos 60^\circ)$ का मान है

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

हल : उत्तर (B)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : $\dfrac{\tan 30^\circ}{\cot 60^\circ}$ का मान है

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 1

हल : उत्तर (D)

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : $(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ)$ का मान है

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1

हल : उत्तर (B)

प्रश्नावली 8.1

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

1. यदि $\cos A = \dfrac{4}{5}$ है, तो $\tan A$ का मान है

(A) $\dfrac{3}{5}$ (B) $\dfrac{3}{4}$ (C) $\dfrac{4}{3}$ (D) $\dfrac{5}{3}$

© NCERT not to be republished

2. यदि $\sin A = \frac{1}{2}$ है, तो $\cot A$ का मान है

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1

3. व्यंजक $[\text{cosec}\,(75° + \theta) - \sec\,(15° - \theta) - \tan\,(55° + \theta) + \cot\,(35° - \theta)]$ का मान है

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) $\frac{3}{2}$

4. यदि $\sin\theta = \frac{a}{b}$ दिया है, तो $\cos\theta$ बराबर है

(A) $\frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}$ (B) $\frac{b}{a}$ (C) $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$ (D) $\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}$

5. यदि $\cos(\alpha + \beta) = 0$ हो, तो $\sin(\alpha - \beta)$ को निम्नलिखित के रूप में बदला जा सकता है

(A) $\cos\beta$ (B) $\cos 2\beta$ (C) $\sin\alpha$ (D) $\sin 2\alpha$

6. $(\tan 1° \tan 2° \tan 3° \ldots \tan 89°)$ का मान है

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

7. यदि $\cos 9\alpha = \sin\alpha$ है और $9\alpha < 90°$ है, तो $\tan 5\alpha$ का मान है

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 1 (D) 0

8. यदि ΔABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें कोण C समकोण है, तो $\cos(A + B)$ का मान है

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. यदि $\sin A + \sin^2 A = 1$ है, तो व्यंजक $(\cos^2 A + \cos^4 A)$ का मान है

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) 3

10. यदि $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ और $\cos\beta = \frac{1}{2}$ दिया है, तो $(\alpha + \beta)$ का मान है

(A) 0° (B) 30° (C) 60° (D) 90°

© NCERT not to be republished

11. व्यंजक $\left[\dfrac{\sin^2 22°+\sin^2 68°}{\cos^2 22°+\cos^2 68°}+\sin^2 63°+\cos 63°\sin 27°\right]$ का मान है

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

12. यदि 4 tanθ = 3 है, तो $\left(\dfrac{4\sin\theta-\cos\theta}{4\sin\theta+\cos\theta}\right)$ बराबर है

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$

13. यदि $\sin\theta - \cos\theta = 0$ है, तो $(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$ का मान है

(A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

14. sin (45° + θ) – cos (45° – θ) बराबर है

(A) 2 cosθ (B) 0 (C) 2 sinθ (D) 1

15. 6m ऊँचे एक खंभे की छाया भूमि पर $2\sqrt{3}$ m लंबी है। तब, उस समय सूर्य का उन्नयन कोण है

(A) 60° (B) 45° (C) 30° (D) 90°

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

सत्य या असत्य लिखिए और अपने उत्तर का औचित्य दीजिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : sinθ + cosθ का मान सदैव 1 से बड़ा होता है।

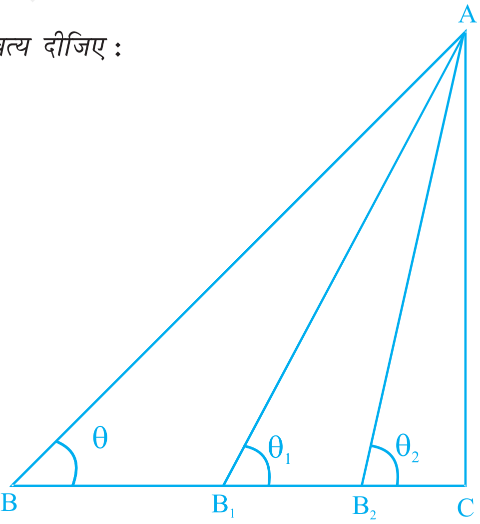
हल : असत्य।

θ = 0° के लिए (sinθ + cosθ) का मान 1 है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : tan θ का मान (θ < 90°) बढ़ता है, जब θ बढ़ता है

हल : सत्य।

आकृति 8.2 में, जैसे-जैसे बिंदु B भुजा BC के अनुदिश C के निकट आता जाता है, वैसे-वैसे



आकृति 8.2

(i) θ बढ़ता जाता है $(\theta_1 > \theta, \theta_2 > \theta_1, ...)$ तथा

(ii) BC घटता जाता है ($B_1C < BC$, $B_2C < B_1C$, ...)

इस प्रकार, लंब AC स्थिर रहता है तथा आधार BC घटता जाता है। अतः $\tan\theta$ बढ़ता जाता है, जब θ बढ़ता जाता है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : जब θ बढ़ता जाता है, $\sin\theta$ की तुलना में $\tan\theta$ तीव्र गति से बढ़ता है।

हल : सत्य।

हम जानते हैं कि जब θ बढ़ता है तो $\sin\theta$ बढ़ता है, परंतु $\cos\theta$ घटता जाता है।

हमें प्राप्त है: $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

अब जब θ बढ़ता है, तो $\sin\theta$ बढ़ता है परंतु $\cos\theta$ घटता जाता है। अतः $\tan\theta$ की स्थिति में अंश बढ़ता जाता है, परंतु हर घटता जाता है। परंतु $\sin\theta$ की स्थिति में, जिसे $\dfrac{\sin\theta}{1}$ के रूप में लिखा जा सकता है, अर्थात् 1 रहता है। अतः जब θ बढ़ता है, तो $\sin\theta$ की तुलना में $\tan\theta$ तीव्र गति से बढ़ता है।

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : $\sin\theta$ का मान $a \quad \dfrac{1}{a}$ है, जहाँ 'a' एक धनात्मक संख्या है।

हल : असत्य।

हम जानते हैं कि $\sqrt{a} \quad \dfrac{1}{\sqrt{a}} \quad ^{2} \quad 0$ अर्थात्, $a \quad \dfrac{1}{a} \quad 2$ है, परंतु $\sin\theta$ का मान 1 से बड़ा नहीं होता है।

वैकल्पिक रूप से, यहाँ तीन संभावनाएँ हैं:

स्थिति 1. यदि $a < 1$ है, तो $a \quad \dfrac{1}{a} \quad 1$

स्थिति 2. यदि $a = 1$ है, तो $a \quad \dfrac{1}{a} \quad 1$

स्थिति 3. यदि $a > 1$ है, तो $a \quad \dfrac{1}{a} \quad 1$

परंतु $\sin\theta$ का मान 1 से बड़ा नहीं हो सकता।

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 8.2

निम्नलिखित में से प्रत्येक में, 'सत्य' या 'असत्य' लिखिए तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए:

1. $\frac{\tan 47°}{\cot 43°} = 1$ है।

2. व्यंजक $(\cos^2 23° - \sin^2 67°)$ का मान धनात्मक है।

3. व्यंजक $(\sin 80° - \cos 80°)$ का मान ऋणात्मक है।

4. $\sqrt{(1-\cos^2\theta)\sec^2\theta} = \tan\theta$

5. यदि $\cos A + \cos^2 A = 1$ है, तो $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$ है।

6. $(\tan\theta + 2)(2\tan\theta + 1) = 5\tan\theta + \sec^2\theta$ है।

7. यदि एक मीनार की छाया की लंबाई बढ़ रही है, तो सूर्य का उन्नयन कोण भी बढ़ रहा है।

8. यदि एक झील की सतह से 3 मीटर ऊपर एक प्लेटफार्म पर खड़ा एक व्यक्ति किसी बादल और झील में उसके परावर्तन को देखता है, तो उस बादल का उन्नयन कोण उसके परावर्तन के अवनमन कोण के बराबर होता है।

9. $2\sin\theta$ का मान $a \quad \frac{1}{a}$ हो सकता है, जहाँ a एक धनात्मक संख्या है और $a \neq 1$ है।

10. $\cos\theta = \frac{a^2 \quad b^2}{2ab}$ है, जहाँ a और b ऐसी दो भिन्न संख्याएँ हैं कि $ab > 0$ है।

11. किसी मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 30° है। यदि मीनार की ऊँचाई दुगुनी हो जाए, तो इसकी चोटी का उन्नयन कोण भी दुगुना हो जाएगा।

12. यदि एक मीनार की ऊँचाई तथा उसके आधार से प्रेक्षण बिंदु की दूरी दोनों ही 10% बढ़ जाते हैं, तो चोटी का उन्नयन कोण वही रहता है।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : सिद्ध कीजिए कि $\sin^6\theta + \cos^6\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta = 1$ है।

हल : हम जानते हैं कि $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

अत:, $(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 = 1$

या, $(\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3 + 3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 1$

या, $\sin^6\theta + \cos^6\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta = 1$

© NCERT not to be republished

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : सिद्ध कीजिए कि $(\sin^4\theta - \cos^4\theta + 1)\operatorname{cosec}^2\theta = 2$ है।

हल :

बायाँ पक्ष $= (\sin^4\theta - \cos^4\theta + 1)\operatorname{cosec}^2\theta$

$= [(\sin^2\theta - \cos^2\theta)(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 1]\operatorname{cosec}^2\theta$

$= (\sin^2\theta - \cos^2\theta + 1)\operatorname{cosec}^2\theta$

[क्योंकि $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$]

$= 2\sin^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta$ [क्योंकि $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$]

$= 2 =$ दायाँ पक्ष

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : यदि $\alpha + \beta = 90°$ दिया है, तो दर्शाइए कि

$$\sqrt{\cos\alpha \operatorname{cosec}\beta - \cos\alpha \sin\beta} = \sin\alpha$$

हल:

$$\sqrt{\cos\alpha \operatorname{cosec}\beta - \cos\alpha \sin\beta} = \sqrt{\cos\alpha \operatorname{cosec}(90° - \alpha) - \cos\alpha \sin(90° - \alpha)}$$

[$\alpha + \beta = 90°$ दिया है]

$$= \sqrt{\cos\alpha \sec\alpha - \cos\alpha \cos\alpha}$$

$$= \sqrt{1 \quad \cos^2}$$

$= \sin\alpha$

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : यदि $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\tan\theta + \cot\theta = 1$ है।

हल :

$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}$ (दिया है)

या, $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 3$

या, $\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 3$

$2\sin\theta \cos\theta = 2$ [$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$]

या, $\sin\theta\cos\theta = 1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$

© NCERT not to be republished

या, $1 \quad \dfrac{\sin^2 \quad \cos^2}{\sin \quad \cos}$

अतः, $\tan\theta + \cot\theta = 1$

प्रश्नावली 8.3

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए (प्रश्न 1 से प्रश्न 7 तक) :

1. $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\text{cosec}\theta$

2. $\dfrac{\tan A}{1 \quad \sec A} \quad \dfrac{\tan A}{1 \quad \sec A} \quad 2\text{cosec } A$

3. यदि $\tan A = \dfrac{3}{4}$ है, तो $\sin A \cos A = \dfrac{12}{25}$ है।

4. $(\sin\alpha + \cos\alpha)(\tan\alpha + \cot\alpha) = \sec\alpha + \text{cosec}\,\alpha$

5. $\sqrt{3} \quad 1 \quad (3 - \cot 30°) = \tan^3 60° - 2\sin 60°$

6. $1 + \dfrac{\cot^2\alpha}{1+\text{cosec}\,\alpha} = \text{cosec}\,\alpha$

7. $\tan\theta + \tan(90° - \theta) = \sec\theta \quad \sec(90° - \theta)$

8. सूर्य का उस समय उन्नयन कोण ज्ञात कीजिए, जब h मीटर ऊँचे एक खंभे की छाया की लंबाई $\sqrt{3}\,h$ मीटर है।

9. यदि $\sqrt{3}\tan\theta = 1$ है, तो $\sin^2\theta - \cos^2\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

10. 15 मीटर लंबी एक सीढ़ी एक ऊर्ध्वाधर दीवार के ठीक ऊपरी सिरे पर पहुँच पाती है। यदि सीढ़ी इस समय दीवार से 60° का कोण बनाती है, तो दीवार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

11. $(1 + \tan^2\theta)(1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta)$ को सरल कीजिए।

12. यदि $2\sin^2\theta - \cos^2\theta = 2$ है, तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

13. दर्शाइए कि $\dfrac{\cos^2(45°+\theta)+\cos^2(45°-\theta)}{\tan(60°+\theta)\,\tan(30°-\theta)} = 1$ है।

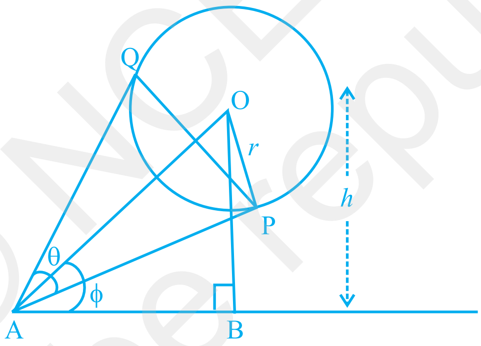
14. 1.5 मीटर ऊँचाई वाला एक प्रेक्षक 22 मीटर ऊँची एक मीनार से 20.5 मीटर की दूरी पर खड़ा है। प्रेक्षक की आँख से मीनार की चोटी का उन्नयन कोण निर्धारित कीजिए।

15. दर्शाइए कि $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$ है।

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : त्रिज्या r का एक गोलाकार गुब्बारा एक प्रेक्षक की आँख पर कोण θ अंतरित करता है। यदि इसके केंद्र का उन्नयन कोण ϕ है, तो गुब्बारे के केंद्र की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : आकृति 8.3 में, O गुब्बारे का केंद्र है, जिसकी त्रिज्या $OP = r$ और $\angle PAQ = \theta$ है। साथ ही, $\angle OAB = \phi$ है।



आकृति 8.3

मान लीजिए कि गुब्बारे के केंद्र की ऊँचाई h है। इस प्रकार, $OB = h$ है।

अब, ΔOAP से, $\sin \frac{\ }{2} = \frac{r}{d}$, जहाँ $OA = d$ है। ...(1)

साथ ही ΔOAB से, $\sin\phi = \frac{h}{d}$ है। ...(2)

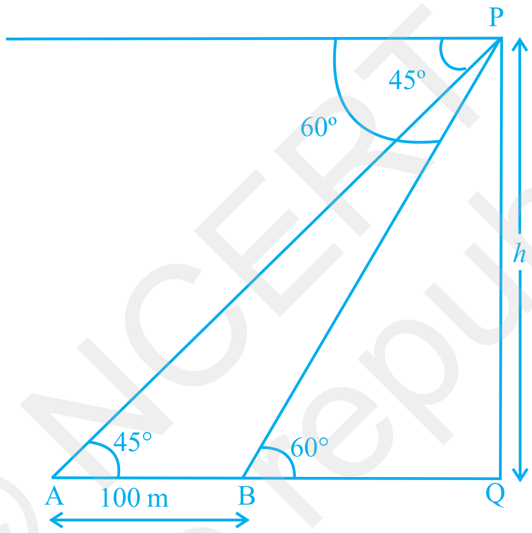
(1) और (2) से, हमें प्राप्त होता है: $\dfrac{\sin\phi}{\sin\frac{\theta}{2}} = \dfrac{\frac{h}{d}}{\frac{r}{d}} = \dfrac{h}{r}$

या $h = r \sin\phi \operatorname{cosec}\frac{\theta}{2}$.

© NCERT not to be republished

प्रतिदर्श प्रश्न 2: एक सीधी सड़क के ऊर्ध्वाधर ऊपर एक गुब्बारे से, किसी क्षण पर दो कारों के अवनमन कोण 45° और 60° प्राप्त किए गए हैं। यदि कारों के बीच की दूरी 100 m है, तो गुब्बारे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि गुब्बारे की ऊँचाई h मीटर है तथा A और B दो कारें हैं (देखिए आकृति 8.4)। इस प्रकार, AB = 100 m है। ΔPAQ से, AQ = PQ = h है।



आकृति 8.4

अब, ΔPBQ से, $\frac{PQ}{BQ} = \tan 60° = \sqrt{3}$ या $\frac{h}{h-100} = \sqrt{3}$

या $h = \sqrt{3}(h - 100)$

अत:, $h = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 50(3+\sqrt{3})$

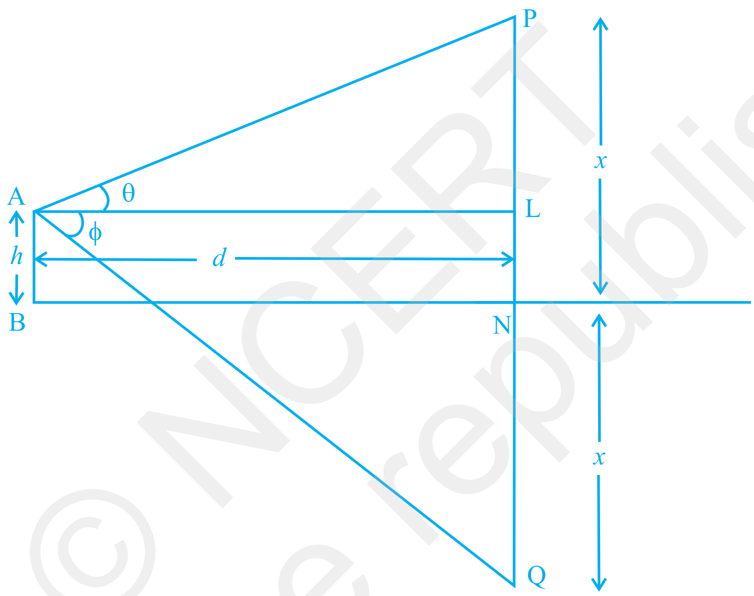
अत:, गुब्बारे की ऊँचाई $50(3+\sqrt{3})$ m है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : किसी झील की सतह से h मीटर की ऊँचाई पर स्थित एक बिंदु से एक बादल का उन्नयन कोण θ है तथा इसी बिंदु से झील में बादल के परावर्तन का अवनमन कोण ϕ है। सिद्ध

© NCERT not to be republished

कीजिए कि झील की सतह के ऊपर बादल की ऊँचाई $h\left(\frac{\tan\phi+\tan\theta}{\tan\phi-\tan\theta}\right)$ है।

हल : मान लीजिए कि P बादल है और Q झील में बादल का परावर्तन है (देखिए आकृति 8.5)। मान लीजिए कि A प्रेक्षण का बिंदु इस प्रकार है कि AB = h है।



आकृति 8.5

मान लीजिए कि झील के ऊपर बादल की ऊँचाई x है। मान लीजिए कि AL = d है।

अब, ΔPAL से, $\frac{x-h}{d} = \tan\theta$ ...(1)

ΔQAL से, $\frac{x+h}{d} = \tan\phi$ ...(2)

(1) और (2) से, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{x+h}{x-h} = \frac{\tan\phi}{\tan\theta}$$

© NCERT not to be republished

या $\frac{2x}{2h} = \frac{\tan\phi + \tan\theta}{\tan\phi - \tan\theta}$

अत:, $x = h\left(\frac{\tan\phi + \tan\theta}{\tan\phi - \tan\theta}\right)$.

प्रश्नावली 8.4

1. यदि $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = p$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\cos\theta = \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}$ है।

2. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta$ है।

3. किसी बिंदु से, एक मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 30° है। यदि प्रेक्षक दीवार की ओर 20 मीटर चलता है, तो उन्नयन कोण में 15° की वृद्धि हो जाती है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

4. यदि $1 + \sin^2\theta = 3\sin\theta \cos\theta$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\tan\theta = 1$ या $\frac{1}{2}$ है।

5. यदि $\sin\theta + 2\cos\theta = 1$ दिया है, तो सिद्ध कीजिए कि $2\sin\theta - \cos\theta = 2$ है।

6. किसी मीनार के आधार से s और t की दूरियों पर स्थित दो बिंदुओं से मीनार की चोटी के उन्नयन कोण परस्पर पूरक हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई $\sqrt{st}$ है।

7. एक समतल भूमि पर खड़ी मीनार की छाया की उस समय की लंबाई जब सूर्य का उन्नयन कोण 30° है, उस समय की लंबाई से 50 m अधिक है जब सूर्य का उन्नयन कोण 60° था। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

8. एक ऊर्ध्वाघर मीनार एक क्षैतिज समतल पर खड़ी है तथा उस पर h ऊँचाई का एक ऊर्ध्वाधर ध्वज-दंड लगा हुआ है। समतल के किसी बिंदु से ध्वज-दंड के निचले और ऊपरी सिरों के उन्नयन कोण क्रमशः α और β हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई $\left(\frac{h\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}\right)$ है।

9. यदि $\tan\theta + \sec\theta = l$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\sec\theta = \frac{l^2 + 1}{2l}$ है।

10. यदि $\sin\theta + \cos\theta = p$ और $\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta = q$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $q(p^2 - 1) = 2p$ है।

© NCERT not to be republished

11. यदि $a\sin\theta + b\cos\theta = c$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $a\cos\theta - b\sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ है।

12. सिद्ध कीजिए कि $\frac{1+\sec\theta-\tan\theta}{1+\sec\theta+\tan\theta} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$ है।

13. 30 m ऊँची एक मीनार की चोटी का उसी समतल भूमि पर खड़ी मीनार के आधार से उन्नयन कोण 60° है तथा दूसरी मीनार की चोटी का पहली मीनार के आधार से उन्नयन कोण 30° है। दोनों मीनारों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए तथा दूसरी मीनार की ऊँचाई भी ज्ञात कीजिए।

14. h ऊँचाई की किसी मीनार की चोटी से दो वस्तुओं, जो मीनार के आधार वाली रेखा में स्थित हैं, के अवनमन कोण α और β $(\beta > \alpha)$ हैं। दोनों वस्तुओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

15. एक सीढ़ी एक ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे टिकी हुई है तथा क्षैतिज से α कोण बनाती है। इसके निचले सिरे को दीवार से p दूरी अधिक पर कर दिया जाता है, जिससे सीढ़ी का ऊपरी सिरा दीवार पर q दूरी नीचे खिसक जाता है तथा उस समय सीढ़ी क्षैतिज से कोण β बनाती है। दर्शाइए कि $\frac{p}{q} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\sin\alpha - \sin\beta}$ है।

16. किसी ऊर्ध्वाधर मीनार की चोटी का भूमि पर स्थित किसी बिंदु से उन्नयन कोण 60° है। पहले बिंदु से 10 m उर्ध्वाधरतः ऊपर एक अन्य बिंदु पर उसका उन्नयन कोण 45° है। मीनार की उँचाई ज्ञात कीजिए।

17. किसी मकान की खिड़की भूमि से h m की ऊँचाई पर है। इस खिड़की से, सड़क के दूसरी ओर स्थित एक अन्य मकान के शिखर और आधार के क्रमशः उन्नयन और अवनमन कोण α और β पाए जाते हैं। सिद्ध कीजिए कि दूसरे मकान की ऊँचाई $h(1 + \tan\alpha \cot\beta)$ मीटर है।

18. किसी मकान की निचली खिड़की भूमि से 2 m की ऊँचाई पर है तथा उसकी ऊपरी खिड़की निचली खिड़की से ऊर्ध्वाधरतः 4 m ऊपर है। किसी क्षण इन खिड़कियों से एक गुब्बारे के उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 30° प्रेक्षित किए गए। भूमि के ऊपर गुब्बारे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished