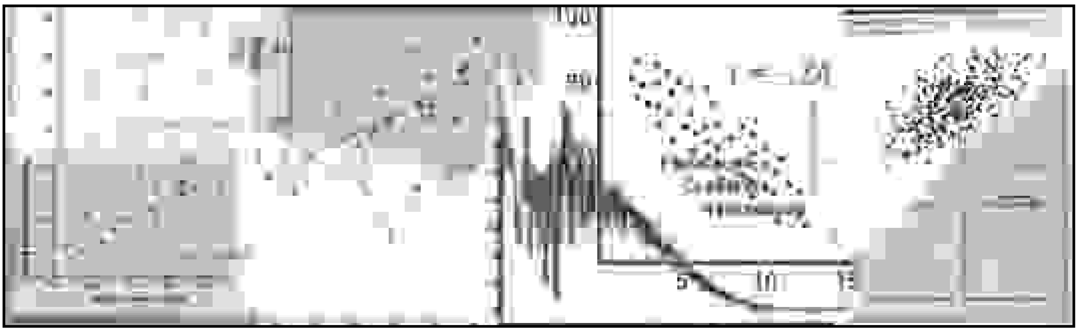
باب 7

ہم رشتگی



اس باب کا مطالعہ کرنے کے بعد اتنی استعداد ہو جانی چاہیئے کہ آپ:

- ہم رشتگی (Co-relation) اصطلاح کے معنی سمجھ سکیں؛
- دو متغیرات کے درمیان رشتوں کی نوعیت سمجھ سکیں؛
- ہم رشتگی کی مختلف پیمائشوں کا شمار کر سکیں؛
- رشتوں کے درجے اور سمت کا تجزیہ کر سکیں۔

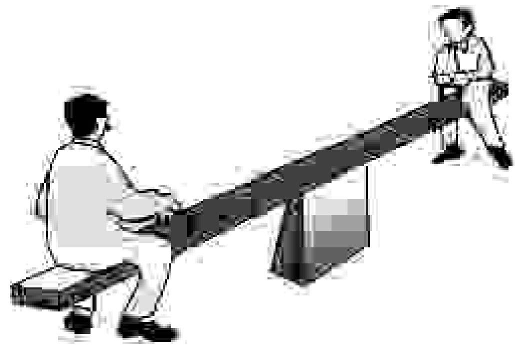
1. تعارف

پچھلے ابواب میں آپ نے سیکھا کہ ڈیٹا کے ابتداء میں خلاصہ پیمائشوں کی تخلیق کیسے کرنی ہوتی ہے اور یکساں متغیرات کے درمیان تبدیلیاں کیسے واقع ہوتی ہیں۔ اب آپ مطالعہ کریں گے کہ دو متغیرات کے درمیان رشتوں کا جائزہ کیسے لیا جاتا ہے۔

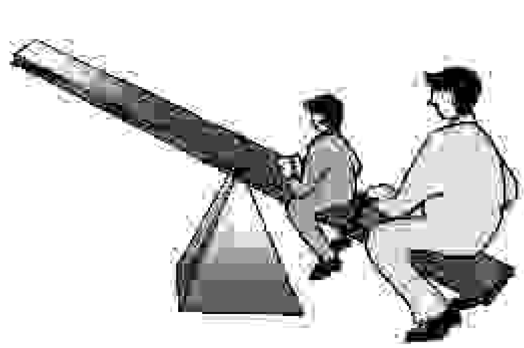
جب گرمی کے موسم میں گرمی بڑھتی ہے، پہاڑی مقامات پر زیادہ سے زیادہ سیاحوں کی بھیڑ بڑھنے لگتی ہے۔ آئس کریم کی فروخت میں زبردست اضافہ ہوتا ہے۔ اس درجہ حرارت کا تعلق سیاحوں کی تعداد اور آئس کریم کی فروخت سے ہے۔ اسی طرح ٹماٹر کی فراہمی آپ کی مقامی منڈی میں بڑھ جاتی ہے، اس کی قیمتیں گھٹ جاتی ہیں ۔ جب مقامی فصل بازار میں پہونچنی شروع ہو جاتی ہے ٹماٹر کی قیمت انتہائی اونچی قیمت 40 روپے کلو سے گھٹ کر 4 روپے یا اس سے بھی کم ہو جاتی ہیں۔ اسی طرح فراہمی کا تعلق قیمت سے ہے۔ ہم رشتگی کا تجزیہ اس طرح رشتوں کا نظامی طور پر جائزہ لینے کا یک وسیلہ ہے۔ اس میں درج ذیل طرح کے سوالات برتے جاتے ہیں:

- کیا دو متغیرات کے درمیان کوئی رشتہ ہے؟

- اگر ایک متغیرہ کی قدر میں تبدیلی ہوتی ہے، تو کیا دورے کی قدر میں بھی تبدیلی ہوتی ہے؟



- کیا دونوں متغیرات ایک ہی سمت میں حرکت کرتے ہیں؟



- رشتے میں کتنی مضبوطی ہوتی ہے؟

2. رشتوں کی اقسام

آیئے ہم مختلف قسم کے رشتوں پر ایک نظر ڈالیں۔ مانگ کی گئی مقدار اور شے قیمت میں حرکات کے درمیان رشتہ مانگ یا طلب کے نظریے کا ایک لازمی جزو ہے، جس کے بارے میں آپ کلاس XII میں پڑھیں گے۔ کم بارش کا تعلق کم زراعتی پیداواریت سے ہے۔ رشتوں کی یہ مثالیں اس اثر کی توضیح پیش کرسکتی ہیں۔ دیگر محض اور اتفاقی ہوسکتی ہیں۔ موسمی کوچ کرنے والے پرندوں کا مخصوص محفوظ علاقوں (Sanctuary) میں آنا اور آپ کے علاقے میں شرح پیدائش کے درمیان رشتہ سبب واثر کی توضیح نہیں پیش کرسکتا۔ یہ رشتے محض اتفاق ہیں۔ آپ کے جوتے کی ناپ اور آپ کی جیب میں موجود رقم کے درمیان رشتہ اسی طرح کی ایک اور مثال ہے۔ حتیٰ کہ اگر رشتہ موجود بھی ہے تو اس کی وضاحت کرنا مشکل ہے۔

ایک دوسری مثال میں دو متغیرات پر ایک تیسرے متغیرہ کا اثر دو متغیرات کے درمیان رشتے کا گمان کرا سکتا ہے۔ آئس کریم کی زبردست فروخت کا تعلق ڈوبنے کے سبب ہونے والی اموات کی اونچی تعداد نہیں ہوسکتا ہے۔ اس کے شکار آئس کریم کھانے کے سبب نہیں ڈوبتے ہیں۔ درجہ حرارت میں اضافہ آئس کریم کی اچھی فروخت کی وجہ ہے۔ مزید برآں، لوگوں کی ایک بڑی تعداد گرمی سے بچنے کے لیے تیراکی کرنے سوئمنگ پول جانا شروع کرتی ہے۔ یہ ڈوبنے سے اموات کی تعداد میں اضافے کا سبب ہوسکتی ہے۔ اس طرح آئس کریم کی

فروخت اور ڈوبنے کے سبب ہونے والی اموات کے درمیان اعلیٰ ہم رشتگی کے پس پردہ درجۂ حرارت ہے۔

ہم رشتگی کیا پیمائش کرتی ہے۔

ہم رشتگی متغیرات کے رشتوں کی سمت اور شدت کا مطالعہ اور پیمائش کرتی ہے۔ہم رشتگی باہم انحراف ہم متغیرہ (Co-variation) کی پیمائش کرتی ہے نہ کہ علّیت (سبب ونتائج کا باہمی ربط)۔ ہم رشتگی سبب واثر رشتے کی دلالت کے طور پر توضیح نہیں کرتی۔ دومتغیرات x اور y کے درمیان ہم رشتگی کی موجودگی کا سیدھا مطلب ہے کہ جب ایک متغیرہ کا اسی سمت (یعنی مثبت تبدیلی) یا مخالف سمت (یعنی منفی تبدیلی) میں تبدیل ہونا پایا جاتا ہے۔ لیکن ایک متعین انداز میں تحصیل کے لئے ہم فرض کرتے ہیں کہ یہاں ہم رشتگی اگر موجود ہوتی ہے تو خطی (Linear) یعنی دومتغیرات کی نسبتی حرکت گراف کاغذ پر خط مستقیم کھینچنے کے ذریعہ پیش کی جاسکتی ہے۔

ہم رشتگی کی اقسام

ہم رشتگی کو عام طور پر منفی اور مثبت ہم رشتگی میں درجہ بند کیا جاتا ہے۔ہم رشتگی کو مثبت اس وقت کہا جاتا ہے جب متغیرات ایک ہی سمت میں حرکت کرتے ہیں۔ جب آمدنی بڑھتی ہے تب خرچ میں بھی اضافہ ہوتا ہے۔ جب آمدنی میں کمی پیدا ہوتی ہے تب خرچ میں بھی کمی آتی ہے۔ آئس کریم کی فروخت اور درجۂ حرارت ایک ہی سمت میں جنبش کرتے ہیں۔ ہم رشتگی اسی وقت منفی ہوتی ہے جب وہ مخالف سمت میں حرکت کرتے ہیں۔ جب سیب کی قیمت گرتی ہے اس کی مانگ میں اضافہ ہوتا ہے۔ جب قیمتیں بڑھتی ہیں تو مانگ میں کمی پیدا ہوتی ہے۔ جب آپ مطالعہ میں زیادہ وقت لگاتے ہیں تب آپ کے ناکام ہونے کا اتفاق کم ہوتا ہے۔ جب آپ مطالعہ میں کم گھنٹے لگاتے ہیں تب آپ کے فیل ہونے کا اتفاق زیادہ ہوجاتا ہے یہ منفی ہم رشتگی کی مثالیں ہیں۔ متغیرات مخالف سمت میں حرکت کرتے ہیں۔

3. ہم رشتگی کی پیمائش کے لیے تکنیکیں

ہم رشتگی کے مطالعہ کے لیے انتشاری ڈائیگراموں (Scatter Diagrams) کارل پیرسن کے ہم رشتگی کا مزید اور اسپیرمین کی رینک ہم رشتگی کا استعمال کافی بڑے پیمانے پر کیا جاتا ہے۔ انتشاری ڈائیگرام کسی مخصوص عددی قدر کو دیے بغیر تعلق کی نوعیت کو بصری طور پر پیش کرتا ہے۔ دومتغیرات کے درمیان خطی رشتے کی عددی پیمائش کارول پیرسن کے ہم رشتگی کے ضریب کے ذریعہ پیش کی جاتی ہے۔ کسی رشتے کو خطی تب کہا جاتا ہے جب اسے خط مستقیم کے ذریعہ پیش کیا جائے۔ ایک اور پیمائش سپیرمین کے ہم رشتگی کے ضریب کی ہے جو انفرادی مدوں کو ان کی خصوصیتوں کے لحاظ سے تفویض کیے گئے رینکوں (مرتبوں) کے درمیان خطی تعلق کی پیمائش کرتا ہے۔ خصوصیات وہ متغیرات ہیں جن کی پیمائش عددی طور پر نہیں کی جاسکتی مثلاً لوگون کی ذہانت، جسمانی بناوٹ، ایمانداری وغیرہ۔

انتشاری ڈائیگرام

انتشاری دائیگرام، بغیر کسی عددی قدر کو شمار کیے ہوئے رشتوں کی شکل کا بصری طور پر جائزہ لینے کی ایک مفید تکنیک ہے ۔ اس تکنیک میں دو متغیرات قدروں کی ترمیم گراف کاغذ پر نقاط کے طور پر کی جاتی ہے اس طرح کی گئی ترمیم میں نقطہ انتشاری (Cluster of points) کو انتشاری ڈائیگرام کے طور پر حوالہ دیا جاتا ہے۔ انتشاری ڈائیگرام سے کوئی بھی رشتوں کی نوعیت کا کافی اچھا اندازہ حاصل کرسکتا ہے۔ انتشاری ڈائیگرام میں انتشاری نقطوں کی قربت کا درجہ اور ان کی مجموعی سمت ہمیں رشتوں کا جائزہ لینے کا اہل بناتی ہے۔ اگر سبھی نقاط ایک خط پر واقع ہیں تب ہم رشتگی کامل ہے اور یہ کہا جاسکتا ہے کہ ہم آہنگی (Unity) ہے۔

انتشاری ڈائیگرام شکل 7.1 تا 7.5 محیط ہے جو ہمیں دو متغیرات کے درمیان رشتوں کا تصور فراہم کرتی ہے۔ شکل 7.1 ایک فرازی (اوپری جانب) بڑھتے خط کے گرد انتشار دکھاتی ہے جس سے اشارہ ملتا ہے کہ متغیرات کی حرکت ایک ہی سمت میں ہے۔ جب X بڑھتا ہے تب Y بھی بڑھے گا۔ یہ ایک مثبت ہم رشتگی ہے۔ شکل 7.2 میں نقاط نشیبی ڈھلواں خط کے گرد بکھرے ہیں۔ اس وقت متغیرات مخالف سمتوں میں حرکت کرتے ہیں جب x بڑھتا ہے تب Y نیچے آتا ہے اور Y بڑھتا ہے تب X نیچے آتا ہے۔ یہ ایک منفی ہم رشتگی ہے۔ شکل 7.3 میں فرازی بڑھتا یا نشیبی ڈھلواں ہوتا ہوا خط نہیں ہے جس کے گرد نقاط منتشر ہوں۔ یہ ہم رشتگی نہ ہونے کی ایک مثال ہے۔ شکل 7.4 اور شکل 7.5 میں نقاط فرازی بڑھتے یا نشیبی گرتے خط کے گرد دور بکھرے نہیں ہیں بلکہ وہ خطوط پر ہی موجود ہیں۔ اسے کامل مثبت ہم رشتگی اور کامل منفی ہم رشتگی کے طور پر جانا جاتا ہے۔ انتشارہ ڈائیگرام کا جائزہ رشتوں کی نوعیت اور شدت کے بارے میں ایک اندازہ پیش کرنا ہے۔

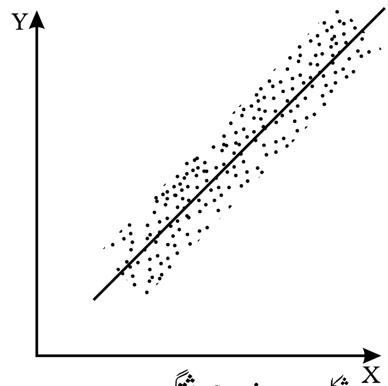
> **سر گرمی**
>
> کلاس X میں اونچائی، وزن اور کنہیں دو مضامین میں اپنی کلاس میں طلبا کے ذریعہ حاصل کیے گئے مارکس کے ڈیٹا اکٹھا کیجئے۔ ایک وقت میں دو دو اختیار کرتے ہوئے ان متغیرات کا انتشاری ڈائیگرام بنائیے۔ آپ کس طرح کا رشتہ دریافت کرتے ہیں؟

کارل پیرسن کا ہم رشتگی ضریب

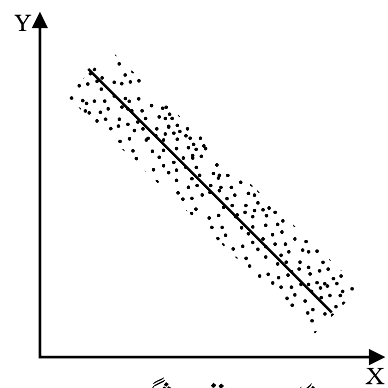
اسے حاصل ضرب گردشیہ ہم رشتگی اور سادہ ہم رشتگی ضریب کے طور پر بھی جانا جاتا ہے۔ یہ دو متغیرات X اور Y کے درمیان خطی رشتوں کی جامع عددی قدر فراہم کرتا ہے۔ خطی رشتہ درج ذیل طور پر ہوسکتا ہے۔

$$Y = a + bX$$

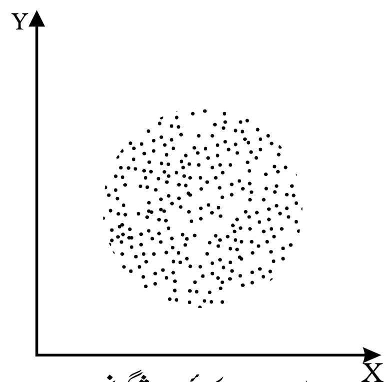
اس طرح کے رشتے کو خط مستقیم کے ذریعہ بیان کیا جاسکتا ہے۔ مقطوعہ (Intercept) جو خط Y محور پر بنتا اسے a کے ذریعہ ظاہر کیا جاتا ہے اور خط کی ڈھال (Slope) کوٹا کے ذریعہ



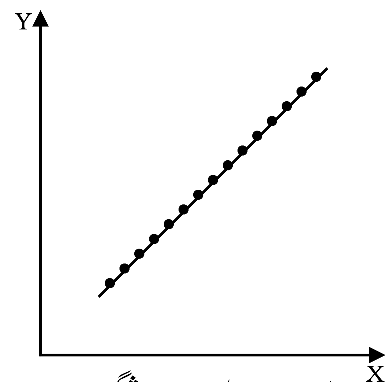
شکل :**7.1** مثبت ہم رشتگی



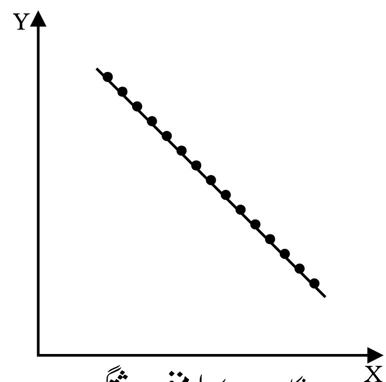
شکل :**7.2** منفی ہم رشتگی



شکل :**7.3** کوئی ہم رشتگی نہیں



شکل :**7.4** کامل مثبت ہم رشتگی



شکل :**7.5** کامل منفی ہم رشتگی

بیان کیا جاتا ہے۔ یہ قدر X میں بہت معمولی تبدیلی کے لیے Y میں تبدیلی فراہم کرتا ہے۔ جب کہ دوسری طرف اگر رشتہ خط مستقیم کے ذریعہ نہیں پیش کیا جا سکتا جیسا کہ درج ذیل میں ہے

$$Y = X^2$$

تب ضریب کی قدر صفر ہوگی۔ یہ صاف طور پر ظاہر کرتا ہے کہ صفر ہم رشتگی کا مطلب یہ نہیں کہ دو متغیرات کے درمیان کسی قسم کے رشتے کی غیر موجودگی ہے۔

فرض کیجیے $X_1, X_2, ..., X_N$ کی N قدریں ہیں اور $Y_1, Y_2, ..., Y_N$ کی مطابق قدریں ہیں۔ بعد کی پیشکشوں میں زیر نوشتے (Subscripts) اکائی ظاہر کرتے ہوئے تسہیل کی خاطر چھوڑ دیے جاتے ہیں X اور Y کی حسابی وسط کو درج ذیل طور پر متعین کیا جاتا ہے۔

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}; \quad \bar{Y} = \frac{\Sigma Y}{N}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma(X-\bar{X})^2}{N} = \frac{\Sigma X^2}{N} - \bar{X}^2$$

اور

$$\sigma_y^2 = \frac{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}{N} = \frac{\Sigma Y^2}{N} - \bar{Y}^2$$

X اور Y کے معیاری انحرافات (Covariance) کو درج ذیل طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

$$Cov(X, Y) = \frac{\Sigma(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{N} = \frac{\Sigma xy}{N}$$

$$X = X - \bar{X} \quad \text{اور} \quad Y = X - \bar{Y}$$

X اور Y کی علی الترتیب ان کی وسط قدروں سے انحرافات ہیں۔ X اور Y کے درمیان ہم انحراف ہم رشتگی ضریب کی علامت کا تعین کرتے ہیں۔ معیاری انحرافات ہمیشہ مثبت ہوتے ہیں۔ ہم رشتگی ضریب ہمیشہ صفر ہوتے ہیں۔ پروڈکٹ مومنٹ ہم رشتگی یا ہم رشتگی کی کارل پارسن کی پیمائش درج ذیل طور پر بیان کی جاتی ہے۔

$$r = \frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y} \quad ...(1)$$

$$r = \frac{\Sigma(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\sqrt{\Sigma(X-\bar{X})^2}\sqrt{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}} \quad ...(2)$$

$$r = \frac{\Sigma XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}}{\sqrt{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}}\sqrt{\Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{N}}} \quad ...(3)$$

$$r = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}\sqrt{N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}} \quad ...(4)$$

ہم رشتگی ضریب کی خصوصیات :

آئیے اب ہم رشتگی ضریب کی خصوصیات کا بیان کریں۔

- r کی کوئی اکائی نہیں ہے۔ یہ ایک خالص عدد ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ پیمائش کی اکائیاں کا حصہ نہیں ہیں۔ اونچائی کے درمیان فٹ میں اور وزن کلوگرام میں ہے۔ مثال کے لیے 0.7۔
- r کی منفی قدر معکوس رشتہ ظاہر کرتی ہے ایک متغیرہ میں تبدیلی

مخالف سمت میں دیگر متغیرہ میں تبدیلی کے ساتھ وابستہ ہوتی ہے۔ جب کسی شے کی قیمت میں اضافہ ہوتا ہے تب اس کی مانگ میں کمی ہو جاتی ہے۔ جب سود کی شرح بڑھتی ہے تب فنڈوں (رقم مہیا کرنا) کی مانگ میں بھی کمی آجاتی ہے۔ ایسا اس لیے ہوتا ہے کہ اب فنڈ گراں بن چکے ہیں۔

- اگر r مثبت ہے تب دو متغیرات ایک ہی سمت میں حرکت کرتے ہیں جب کافی کی قیمت، (چائے کا ایک بدل) بڑھتی ہے تب چائے کی مانگ میں بھی اضافہ ہو جاتا ہے۔ آبپاشی کی سہولتوں میں بہتری کا تعلق زیادہ، پیداوار سے ہے۔ جب درجہ حرارت بڑھتا ہے تب آئس کریم کی فروخت میں زبردست اضافہ ہوتا ہے۔
- اگر r=0 تب دو متغیرات میں ہم رشتگی نہیں ہوئی ۔ ان کے درمیان کوئی خطی رشتہ نہیں ہوتا۔ تاہم دیگر قسم کے رشتے واقع ہو سکتے ہیں۔
- اگر r = 1 یا r = −1 تب ہم رشتگی کامل ہوتی ہے۔ ان کے درمیان رشتہ بالکل صحیح ہوتا ہے۔
- r کی اونچی قدر مضبوط خطی رشتہ ظاہر کرتی ہے۔ اس کی قدر کو اس وقت اونچا کہا جاتا ہے جب یہ 1+ یا 1- سے قریب ہو۔
- r کی نچلی قدر کمزور خطی رشتے کی نشاندہی کرتی ہے۔ اس کی قدر کو کم تر اس وقت کہا جاتا ہے جب یہ صفر کے قریب ہو۔
- ہم رشتگی کے ضریب کی قدر منفی اور جمع کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ $-1 \leq r \geq 1$ ۔ اگر کسی مشق میں، r کی قدر اس رینج سے باہر ہے تب یہ حساب میں خطا کا اظہار کرتی ہے۔
- r کی قدر مبدا کی تبدیلی اور پیمانے کے تبدیلی کا اثر نہیں ہوتا۔ دو متغیرات X اور Y بیان کیے گئے ہیں۔ آپ ہم دو نئے متغیرات کی تعریف کریں۔

$$U=\frac{X-A}{B}; \quad V=\frac{Y-C}{D}$$

جہاں A اور C علی الترتیب X اور Y مفروضہ وسط ہیں۔ B اور D مشترک جزو ضربی ہیں تب

$$r_{xy} = r_{uv}$$

اس خاصیت کا استعمال ہم رشتگی ضریب کا شمار نہایت سہل طریقے میں کرنے کے لیے کیا جاتا ہے جیسا کہ مرحلہ انحراف طریقے میں ہوتا۔ شماریاتی طریقے فہم عامہ کا بدل نہیں ہیں۔ یہ ایک دوری مثال ہے جو ہم رشتگی کو شمار کرنے سے قبل ڈیٹا کو اچھی طرح سمجھنے کی ضرورت پر روشنی ڈالتی ہے۔ کچھ گاؤں میں وبائی مرض پھوٹ پڑا اور حکومت نے متاثرہ گاؤں میں ڈاکٹروں کی

ایک ٹیم بھیجی۔ گاؤں میں اموات کی تعداد اور بھیجے گئے ڈاکٹروں کی تعداد کے درمیان ہم رشتگی مثبت دی جاتی ہے۔ عام طور پر ڈاکٹروں کے ذریعہ فراہم کی گئی صحت کی دیکھ بھال سے متعلق سہولتوں سے اموات کی تعداد میں کمی کی توقع کی جاتی ہے جس سے منفی ہم رشتگی ظاہر ہوتی ہے۔ ایسا دیگر اسباب کی بنا پر واقع ہوتا ہے۔ ڈیٹا مخصوص عرصے سے متعلق ہوتا ہے۔ مطلع کی گئی بہت سی اموات یک وقتی معاملہ ہوسکتی ہے جہاں ڈاکٹر کچھ نہیں کر سکتے۔ مزید برآں داکٹروں کی موجودگی کا فائدہ کچھ وقت کے بعد دکھائی دے سکتا ہے۔ یہ بھی ممکن ہے کہ مطلع کی گئی اموات کا تعلق وبائی مرض کے سبب نہ ہو۔ سنامی، ملک میں اچانک تباہی مچاتی ہے اور مرنے والوں کی تعداد کافی بڑھ جاتی ہے۔

آپ ہم r کا حساب کسان کی تربیت کے سالوں اور فی ایکڑ سالانہ پیداوار کے درمیان رشتے کا جائزہ لینے کے ذریعہ سمجھائیں۔

مثال 1

کسانوں کی تربیت کے سالوں کی تعداد	1.000 روپے میں فی ایکڑ سالانہ پیداوار
0	4
2	4
4	6
6	10
8	10
10	8
12	7

فارمولانمبر1 میں $\Sigma xy, \sigma_x, \sigma_y$ کی قدر کی ضرورت ہے۔

جدول 7.1 سے ہم حاصل کرتے ہیں؛

$$\Sigma xy = 42,$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{112}{7}},$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}{N}} = \sqrt{\frac{38}{7}}$$

ان قدروں کو فارمولا 1 میں رکھنے پر

$$r = \frac{42}{\sqrt{\frac{112}{7}} - \sqrt{\frac{38}{7}}} = 0.644$$

یہی قدر فارمولا(2) سے بھی حاصل ہوسکتی ہے۔

$$r = \frac{\Sigma(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\sqrt{\Sigma(X-\bar{X})^2}\ \sqrt{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}} \quad ...(2)$$

$$r = \frac{42}{\sqrt{112}\sqrt{38}} = 0.644$$

اسی طرح کسانوں کے تعلیم کے سالوں اور فی ایکڑ سالانہ پیداوار میں مثبت ہم رشتگی ہے۔ اس کی قدر بھی بڑی ہے۔ اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ سالوں کی زیادہ سے زیادہ تعداد جو تعلیم میں لگائی جاتی ہے اس سے اتنا ہی زیادہ فی ایکڑ پیداوار ہوگی۔ اس سے کسانوں کی تعلیم کی اہمیت نمایاں ہوتی ہے۔

فارمولا(3) کا استعمال کرنے کے لیے۔

$$r = \frac{\Sigma XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}}{\sqrt{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}}\ \sqrt{\Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{N}}}$$

درج ذیل عبارتوں کی قدر یعنی $\Sigma XY, \Sigma X^2, \Sigma Y^2$.

کا شمار کرنا ہوتا ہے۔

r کی قدر حاصل کرنے کے لیے اب فارمولا(3) کا طلاق کریں۔

آیئے ہم r کی مختلف قدروں کی توضیح کریں۔ انگریزی اور شماریات میں حاصل کیے گئے نمبروں کے درمیان ہم رشتگی مزید بالفرضی، 0.1 ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ اگر چہ دو مضامین میں حاصل کیے گئے مارکس مثبت طور پر ہم رشتہ ہیں لیکن

جدول 7.1
کسان کی تعلیم وتربیت کے سالوں اور سالانہ پیداوار کے درمیان r کا شمار

کسانوں کی ترتیب کے سال	$X-\bar{X}$	$(X-\bar{X})^2$	سالانہ پیداوار فی ایکڑ	$(Y-\bar{Y})$	$(Y-\bar{Y})^2$	$(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})$
0	-6	36	4	-3	9	18
2	-4	16	4	-3	9	12
4	-2	4	6	-1	1	2
6	0	0	10	3	9	0
8	2	4	10	3	9	6
10	4	16	8	1	1	4
12	6	36	7	0	0	0
$\Sigma X = 42$		$\Sigma(X-\bar{X})^2 = 112$	$\Sigma Y = 49$		$\Sigma(Y-\bar{Y})^2 = 38$	$\Sigma(X-\bar{X})(Y-\bar{Y}) = 42$

رشتوں کا استحکام کمزور ہے۔ انگریزی میں زیادہ مارکس والے طلبا ممکن ہے شماریات میں نسبتاً کم مارکس حاصل کر رہے ہوں۔ اگر کی قدر بالفرض 0.9 ہوتی تب انگریزی میں زیادہ مارکس پانے والے طلبا۔ ہمیشہ شماریات میں زیادہ مارکس حاصل کریں گے۔

منفی ہم رشتگی کی ایک مثال مقامی منڈی میں سبزیوں کی آمد اور سبزیوں کی قیمت کے درمیان رشتہ ہے۔ اگر 0.9 ہے تب مقامی منڈی میں سبزی کی فراہمی سبزیوں کی کم قیمت سے وابستہ ہوگی۔ اگر یہ 0.1 ہوتی تب سبزیوں کی زیادہ فراہمی کم قیمت سے وابستہ ہوگی اتنی کم نہیں جتنی کہ اس وقت جب 0.9 ہے۔ کس حد تک قیمت گرتی ہے یہ کی مطلق قدر پر مبنی ہے۔ اگر یہ صفر ہوتی تب قیمت میں کوئی گراوٹ نہیں ہوتی۔ بھلے ہی بازار میں فراہمی کافی زیادہ ہو۔ اس بات کا بھی امکان ہے کہ فراہمی میں اضافہ اچھے ٹرانسپورٹ کی وجہ سے دوسرے بازاروں سے مال منتقل ہوجائے۔

سرگرمی

- درج ذیل جدول پر نظر ڈالیں موجودہ قیمت اور بطور GDP فی صد مجموعی گھریلو بچت پر قومی آمدنی کے سالانہ نمو کے درمیان کا شمار کیجیے۔

ہم رشتگی ضریب کا شمار کرنے کے لیے مرحلہ وار انحراف طریقہ۔

جب متغیرات کی قدریں بڑی ہوں تب شمار کا بوجھ کی ایک

خاصیت کا استعمال کرتے ہوئے نمایاں طور پر کم کیا جاسکتا ہے۔ وہ یہ ہے کہ صدا اور پیانے میں تبدیلی سے آزاد ہے۔ اسے مرحلہ وار انحراف کے طور پر بھی جانا جاتا ہے۔ اس متغیرات X اور Y کی تحویل شامل ہے جیسا کہ نیچے دکھایا گیا ہے:

جدول 7.2

سال	قومی آمدنی کا سالانہ اضافہ	GDP کے فی صد کے طور مجموعی گھریلو بچت
1992-93	14	24
1993-94	17	23
1994-95	18	26
1995-96	17	27
1996-97	16	25
1997-98	12	25
1998-99	16	23
1999-00	11	25
2000-01	8	24
2001-02	10	23

ماخذ: معاشی سروے (2004-05) صفحہ 8,9

$$U = \frac{X-A}{h}, V = \frac{Y-B}{k}$$

جہاں A اور B مفروضہ وسط ہیں، H اور K مشترک جزو ضربی ہیں۔

$$r_{UV} = r_{XY}$$

اسے قیمت اشاریہ اور رقم فراہمی کے درمیان ہم رشتگی کا تجزیہ کرنے کی مشق کے ساتھ سمجھا جاسکتا ہے۔

مثال 2

قیمت اشاریہ (X)	230	220	190	150	120
رقم فراہمی کروڑ روپے میں (X)	3000	2700	2500	2000	1800

فرض کیجیے A=100;h=10;B=1700;k=100

تحویل شدہ متغیرات کا جدول درج ذیل ہے:

اشاریہ قیمت اور رقم فراہمی کے درمیان کا شمار مرحلہ وار انحراف طریقے کا شمار

جدول 7.3

U $\left(\frac{X-100}{10}\right)$	V $\left(\frac{Y-1700}{100}\right)$	U^2	V^2	UV
2	1	4	1	2
5	3	25	9	15
9	8	81	64	72
12	10	144	100	120
13	13	169	169	169

$\Sigma U = 41; \Sigma V = 35; \Sigma U^2 = 423;$

$\Sigma V^2 = 343; \Sigma UV = 378$

فارمولے میں ان قدروں کا بدل رکھنے پر (3)

$$r = \frac{\Sigma UV - \frac{(\Sigma U)(\Sigma V)}{N}}{\sqrt{\Sigma U^2 - \frac{(\Sigma U)^2}{N}}\sqrt{\Sigma V^2 - \frac{(\Sigma V)^2}{N}}} \quad ...(3)$$

$$= \frac{378 - \frac{41 \times 35}{5}}{\sqrt{423 - \frac{(41)^2}{5}}\sqrt{343 - \frac{(35)^2}{5}}}$$

$= 0.98$

قیمت اشاریہ اور پیسے کی فراہمی کے درمیان مضبوط مثبت ہم رشتگی زری پالیسی کی اہم بنیاد ہے۔ جب پیسے کی فراہمی بڑھتی ہے قیمت اشاریہ بھی بڑھتا ہے۔

سرگرمی

- ہندوستان کی آبادی اور قومی آمدنی کی بعض مثالیں بھیجیے۔ مرحلہ اور انحراف کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے ان کے درمیان ہم رشتگی کا شمار کیجیے اور تسہیل کیجیے۔

اسپیر مین کی رینک ہم رشتگی

اسپیر مین کی رینک ہم اشتگی کو برٹش ماہر نفسیات سی۔ ای۔ اسپیر مین نے فروغ دیا تھا۔ اس کا استعمال اس وقت کیا جاتا ہے جب متغیرات کی پیمائش بامعنی طور پر نہیں کی جاسکتی جیسا کہ قیمت، وزن وغیرہ کے معاملے میں ہے، رینکنگ زیادہ بامعنی ہوسکتی ہے جب متغیرات کی پیمائش مشتبہ ہوں۔ ایسی صورتحال پر غور کریں جہاں ہمیں کسی دور دراز کے گاؤں میں طلبا کی لمبائی اور وزن کے درمیان ہم رشتگی کا شمار کرنے کی ضرورت پڑتی ہے ہمارے پاس نہ تو لمبائی ناپنے کا الہ ہے نہ وزن کرنے کی مشین دستیاب ہے۔ طلبا کو بغیر پیمائش اور وزن کرنے والے پیمانوں کے طباق اور وزن کی اصطلاح میں آسانی سے رینک دی جاسکتی ہے۔

ایسے بھی حالات ہوتے ہیں جب آپ کو کوالٹی کی مقدار کا تعین کرنے کی ضرورت ہوتی ہے جیسے انصاف، ایمانداری وغیرہ کی مقدار کا تعین۔ رینکنگ یا درجہ بند خوبیوں (کوالٹی) کے درجے کے مقدار کے تعین کا بہتر متبادل ہوسکتا ہے۔ مزید برآں کبھی کبھی انتہائی قدروں کے ساتھ دو متغیرات کے درمیان ہم رشتگی ضریب بغیر انتہائی قدروں کے ضریب سے بالکل مختلف ہوسکتا ہے۔ ایسی صورتحال میں رینک ہم رشتگی ایک سادی ہم رشتگی کا بہتر متبادل فراہم کرتی ہے۔

رینک ہم رشتگی ضریب اور سادہ ہم رشتگی ضریب کی یکساں توضیح ہوتی ہے۔ اس کا فارمولا سادے ہم رشتگی ضریب سے اخذ کیا گیا ہے جہاں انفرادی قدروں کو رینکوں یا درجوں کے ذریعہ منتقل کیا گیا ہے۔ ان درجوں کا استعمال ہم رشتگی کے شمار کے لیے کیا جاتا ہے۔ یہ ضریب، خطی تعلق کی پیمائش ان اکائیوں کو تفویض کیے گیے رینکوں کے درمیان فراہم کرتے ہیں، نہ کہ ان کی قدروں کے درمیان۔ یہ رینکوں کے درمیان حاصل گردشہ ہم رشتگی ہے۔ اس کا فارمولا ہے۔

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{n^3 - n} \quad ...(4)$$

جہاں n مشاہدات فی تعداد ہے اور رینک تفویض کیے گئے ان دیگر متغیرہ سے رینک تفویض کیے گئے کسی متغیرہ کا انحراف ہے۔ جب درجات (Ranks) فارمولا دہراتے ہیں۔تب

$$r_s = 1 - \frac{6\left[\sum D^2 + \frac{(m_1^3 - m_1)}{12} + \frac{(m_2^3 - m_2)}{12} + \ldots\right]}{n(n^2 - 1)}$$

جہاں $m_1, m_2, \ldots$ رینکوں کے دہراؤ کی تعداد ہے اور $\frac{m_1^3 - m_1}{12}$ ان کے موافق تصحیح اجزائے ضربی ہیں۔
اس تصحیح کی ضرورت دونوں متغیرات کی ہر دہرائی گئی قدر کے لیے ہوتی ہے۔ اگر m تین قدریں دہرائی جاتی ہیں تب تو قدر کے لیے تصحیح ہوگی۔ ہر بار m_1 وقت کی تعداد ظاہر کرنا ہے جو قدر دہراتی ہے۔

سادہ ہم رشتگی ضریب کی تمام خصوصیات یہاں قابل اطلاق ہیں۔ ہیرسن کے ہم رشتگی ضریب کی طرح یہ 1 اور 1- کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ تاہم، بالعموم یہ اتنا درست نہیں ہوتا جتنا کہ عام طریقہ۔ یہ اس حقیقت کی وجہ سے ہے کہ ڈیٹا سے متعلق ساری معلومات سے استفادہ نہیں کیا جاتا۔ سیریز میں مدوں کی قدروں کا پہلے فرق مقدار کی ترتیب میں منظّم کیے جاتے ہیں، جو تقریباً کبھی مستقل نہیں ہو۔ عام طور پر صف کے درمیان میں چھوٹے فرق کے ساتھ ڈیٹا مرکزی قدروں کے گرد جمع ہوتے ہیں۔ اگر پہلے فرق ہوتے تب r اور r_s مماثل نتائج دے سکتے تھے۔ پہلا فرق سلسلے وار قدروں کا فرق ہے۔ جب انتہائی قدریں موجود ہوں تب رینک ہم رشتگی کو ضریب میں ترجیح دی جاتی ہے۔ بالعموم r سے کم یا مساوی ہوتا ہے۔ رینک ہم رشتگی کے شمار کو تین صورتحال کے تحت سمجھایا جائے گا۔

1. رینک دیے گئے ہیں۔
2. رینک نہیں دیے گئے ہیں۔ انہیں ڈیٹا سے حل کیا جانا ہوتا ہے۔
3. رینک دہرائے جاتے ہیں۔

مسئلہ 1 :رینک دیئے گئے ہیں

مثال 3

مقابلے میں حصہ لینے والے

جج	1	2	3	4	5
A	1	2	3	4	5
B	2	4	1	5	3
C	1	3	5	2	4

مقابلہ حسن میں تین ججوں کے ذریعہ پانچ افراد کا جائزہ لیا جاتا ہے۔ ہمیں دریافت کرنا ہے کہ ججوں سے کون سے جوڑے کی خوبصورتی کے مشترک مشاہدے میں قریب ترین رسائی ہے۔

A	B	D	D^2
1	2	-1	1
2	4	-2	4
3	1	2	4
4	5	-1	1
5	3	2	4
کل			14

ججوں کے 3 جوڑے ایسے ہیں جو رینک ہم رشتگی کا تین بار شمار ضروری بنا رہے ہیں۔ فارمولا (4) کا استعمال کیا جائے گا۔

$$r_s = 1 - \frac{6\sum D^2}{n^3 - n} \quad ...(4)$$

A اور B کے درمیان ہم رشتگی کا شمار درج ذیل طور پر کیا جاتا ہے۔

ان قدروں کا جدول (4) میں بدلنے پر

$$r_s = 1 - \frac{6\sum D^2}{n^3 - n} \quad ...(4)$$

$$r_s = 1 - \frac{6 \times 14}{5^3 - 5} = 1 - \frac{84}{120} = 1 - 0.7 = 0.3$$

A اور C کے درمیان رینک ہم رشتگی کا شمار درج ذیل طور پر کیا جاتا ہے۔

A	C	D	D^2
1	1	0	0
2	3	–1	1
3	5	–2	4
4	2	2	4
5	4	1	1
کل			10

فارمولا (4) میں ان قدروں کو بدلنے سے ہم رشتگی 0.5 ہے۔ اسی طرح جج B اور C کی رینکنگ کے درمیان رینک ہم رشتگی 0.9 ہے۔ اس طرح ججوں A اور C کے مشاہدے کافی قریب قریب ہیں۔ جج B اور جج C کافی مختلف پسند ہیں۔

مسئلہ 2 : رینک نہیں دیئے گئے ہیں

مثال 4

ہمیں مارکس کے فی صد دیے گئے ہیں جو کہ معاشیات اور شماریات میں 5 طلباء کے ذریعہ حاصل کیے گئے مارکس سے متعلق ہے۔ اس کے بعد رینکنگ پر کام کیا جانا ہے اور رینک ہم رشتگی کا شمار کرنا ہے۔

طالب علم	شماریات میں حاصل مارکس (X)	معاشیات میں حاصل مارکس (Y)
A	85	60
B	60	48
C	55	49
D	65	50
E	75	55

طالب علم	شماریات میں رینکنگ (R_x)	معاشیات میں ینکنگ (R_y)
A	1	1
B	4	5
C	5	4
D	3	3
E	2	2

جب ایک بار رینکنگ پوری ہو جاتی ہے تب فارمولا (4) کا استعمال رینک ہم رشتگی کے لیے لیا جاتا ہے۔

مسئلہ 3 : جب رینکوں کو دہرایا جا تا ہے

مثال 5

X اور Y کی قدریں ذیل میں دہرائی گئی ہیں۔

X	25	45	35	40	15	19	35	42
Y	55	60	30	35	40	42	36	48

رینک ہم رشتگی کو حل کرنے کے سلسلے میں ، قدروں کی رینکوں کو حل کیا جاتا ہے۔ دہرائی گئی مدوں کو مشترکہ رینک دیے جاتے ہیں۔ مشترکہ رینک ان رینکوں کی وسط ہے جو ان مدوں کے بارے میں فرض کی جاتی ہوں جن میں ایک دوسرے سے معمولی سا فرق ہو۔ جو رینک پہلے سے ہی مفروضہ ہے اس سے اگلی رینک اگلی مد کو تفویض ہوگی۔ جب رینکوں کو دہرایا جاتا ہے تب اسپیر میں ہم رشتگی ضریب کا فارمولا درج ذیل ہوگا۔

$$r_s = 1 - \frac{6\left[\sum D^2 + \frac{(m_1^3 - m_1)}{12} + \frac{(m_2^3 - m_2)}{12} + \cdots\right]}{n(n^2-1)}$$

جہاں $m_1, m_2, \ldots$ رینکوں کے دہراؤ کے اعداد یہی اور $\frac{m_1^3 - m_1}{12}$ ان کے موافق تصحیح اجزائے ضربی ہیں۔

X	Y	XR' کی رینک	XR'' کی رینک	رینکنگ میں انحراف D= R' - R''	D^2
25	55	6	2	4	16
45	80	1	1	0	0
35	30	4.5	8	3.5	12.5
40	35	3	7	–4	16
15	40	8	5	3	9
19	42	7	4	3	9
35	36	4.5	6	-1.5	2.25
42	48	2	3	-1	1
کل					$\sum D^2 = 65.5$

X کی قدر چوتھے اور پانچویں رینک دونوں پر 35 ہے۔

لہٰذا دونوں کو اوسط رینک یعنی $\frac{4+5}{2}$th = 4.5th ویں رینک دیا جاتا ہے۔

اسی طرح ضروری تصحیح ہے۔

$$\frac{m^3 - m}{12} = \frac{2^3 - 2}{12} = \frac{1}{2}$$

اس مساوات کا استعمال کرتے ہوئے۔

$$r_s = 1 - \frac{6\left[\sum D^2 + \frac{(m^3 - m)}{12}\right]}{n^3 - n} \quad (5)$$

ان اظہار کی قدروں کو بدلنے سے

$$r_s = 1 - 6\frac{(65.5 + 0.5)}{8^2 - 8} = 1 - \frac{396}{504}$$

سرگرمی

- کلاس IX اور X کے امتحانوں میں اپنے 10 ساتھیوں کے ذریعہ حاصل کیے مارکس پر ڈیٹا اکٹھا کیجئے۔ ان کے درمیان ہم رشتگی ضریب شمار کیجیے۔ اگر آپ کے ڈیٹا میں کسی طرح کا دہراؤ نہیں ہے تب ایسا ڈیٹا سیٹ لیجیے جس میں دہرائے گئے رینک ہوں ان کے ذریعہ شق دہرا ہے۔ وہ کون سی صورتحال ہے جس میں رینک ہم رشتگی ضریب کو سادہ ہم رشتگی ضریب پر فوقیت دی جاتی ہے۔ اگر ڈیٹا کی پیمائش جامع طور پر کی گئی ہے کیا تب بھی آپ سادہ ہم رشتگی سے مقابلے رینک ہم رشتگی ضریب کو ترجیح دیں گے؟ آپ ان کا انتخاب کرنے میں کب بے تعلق ہو سکتے ہیں؟ کلاس میں اس سلسلے میں بحث کیجیے۔

$$r_s = 1 - 0.786 = 0.214$$

اس طرح X اور Y کے درمیان مثبت رینک ہم رشتگی ہے۔

x اور Y دونوں ایک ہی سمت میں حرکت کرتے ہیں۔ تاہم رشتہ اتنی مضبوطی کے ساتھ بیان نہیں کیا جاسکتا۔

4. اختتام

ہم نے دو متغیرات کے درمیان رشتوں خاص طور پر خطی رشتے کا مطالعہ کرنے کے لیے بعض تکنیکوں پر بحث کی ہے۔ انتشاری ڈائیگرام رشتے کی بصری پیشکش کرتا ہے اور یہ خطی رشتوں تک محدود نہیں ہے۔ ہم رشتگی کی پیمائشیں جیسے کارل پیرسن کا ہم رشتگی ضریب اور سپیرمن کا رینک ہم رشتگی خطی رشتوں کی ضمنی پیمائشیں ہیں۔ جب متغیرات کی پیمائش جامع طور پر نہیں کی جاسکتی تب رینک ہم رشتگی کو با معنی طور پر استعمال کیا جاسکتا ہے۔ یہ پیمائشیں بہر حال سبب و اثر کی دلالت نہیں کرتیں۔ ہم رشتگی کے علم سے ہمیں، جب ہم رشتہ متغیرہ تبدیل ہوئے ہیں تب متغیرہ میں تبدیلی کی سمت اور شدت کے بارے میں ایک اندازہ فراہم ہوتا ہے۔

خلاصہ

- ہم رشتگی دو متغیرات کے درمیان رشتے کا مطالعہ کرتی ہے۔
- انتشاری ڈائیگرام دو متغیرات کے درمیان رشتوں کی نوعیت کی بصری پیش کش عطا کرتی ہے۔
- کارل پیرسن کے ہم رشتگی کا ضریب عددی طور پر صرف دو متغیرات کے درمیان خطی رشتے کی پیمائش کرتا ہے۔اور 1r– کے درمیان واقع ہوتا ہے۔
- جب متغیرات کی پیمائش دقیق طور پر نہیں کی جاسکتی تب اسپیرمین کی رینک ہم رشتگی کو عددی طور پر خطی رشتے کی پیمائش کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے۔
- دہرائی گئی رینکوں تصحیحی اجزائے ضرب کی ضرورت ہوتی ہے۔
- ہم رشتہ کا مطلب سبب و اثر (Causation) نہیں ہے۔ اس کا مطلب صرف ہم انحراف (Covariation) سے ہے۔

مشقیں

1. ہم رشتگی ضریب کی اکائی اونچائی اور کلوگرام میں وزن کے درمیان ہے۔

(i) کلوگرام/فٹ

(ii) فی صد

(iii) غیر موجود

2. سادہ ہم رشتگی ضریب کی رینج ہے۔

(i) O تا لامتناہی

(ii) نفی ایک تا جمع ایک

(iii) نفی لامتناہی تا لامتناہی

3. اگر مثبت ہے تب X اور Y کے درمیان رشتہ کس قسم کا ہے جب

(i) Y بڑھتا ہے X بھی بڑھتا ہے

(ii) Y گھٹتا ہے x بھی گھٹتا ہے

(iii) Y بڑھتا ہے X میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی

4. اگر =0 تب X اور Y ہیں

(i) خطی طور پر متعلق

(ii) خطی طور پر متعلق نہیں

(iii) آزاد یا غیر تابع

5. درج ذیل تین پیائشوں میں کون سی رشتوں کی کسی قسم کی پیائش کر سکتی ہیں۔

(i) کارل پیرسن کا ہم رشتگی ضریب

(ii) سپیرسن کا رینک ہم رشتگی

(iii) انتشاری ڈائیگرام

6. اگر جامع طور پر (دقیق) پیائش کیا گیا ڈیٹا دستیاب ہے تب سادہ ہم رشتگی ضریب ہے۔

(i) رینک ہم رشتگی ضریب سے زیادہ صحیح

(ii) رینک ہم رشتگی ضریب سے کم صحیح

(iii) اتنا ہی صحیح جتنا کہ رینک ہم رشتگی ضریب

7. تلازمہ (Association) کی پیائش کے طور پر کو ہم انحراف (Covariance) کے لیے کیوں ترجیح دی جاتی ہے۔؟

8. کیا ڈیٹا کی قسم پر مبنی 1- اور 1 کی رینج کے باہر واقع ہو سکتا ہے۔

9. کیا ہم رشتگی، سبب و اثر (Causation) کی دلالت کرتا ہے؟

10. کیا رینک ہم رشتگی سادہ ہم رشتگی ضریب کی نسبت زیادہ جامع و دقیق ہے؟

11. کیا صفر ہم رشتگی کا مطلب غیر تابع یا آزاد ہونا ہے۔

12. کیا سادہ ہم رشتگی ضریب کسی بھی قسم کے رشتے کی پیمائش کر سکتا ہے؟

13. ایک ہفتے کے لیے ہر روز اپنے مقامی بازار سے پانچ سبزیوں کی قیمت اکٹھا کیجیے۔ ان ہم رشتگی ضربیوں کا شمار کیجئے۔ نتیجے کی توضیح کیجیے۔

14. اپنے ساتھیوں کے قد کی پیمائش کیجیے۔ ان کے پانچ ساتھیوں کے قد معلوم کیجیے۔ ان دو متغیرات کے ہم رشتگی ضریب کا شمار کیجیے۔ نتیجے کی توضیح کیجیے۔

15. بعض متغیرات کو درج فہرست کیجیے جہاں درست پیمائش شکل ہو۔

16. 1,-1,0 اور r کے طور پر کی قدروں کی توضیح کیجیے۔

17. رینک ہم رشتگی ضریب، پیرسنی ہم رشتگی ضریب سے مختلف کیوں ہوتا ہے۔

18. انچوں میں والدوں کی لمبائی X اور ان کے بیٹوں کی لمبائی کے درمیان ہم رشتگی مرتب شمار کیجیے۔

X	65	66	57	67	68	69	70	72
Y	67	56	65	68	72	72	69	71

(جواب: r = 0.63)

19. X اور Y کے درمیان ہم رشتگی ضریب شمار کیجیے۔ اور ان کے رشتوں پر تبصرہ کیجیے۔

X	–3	–2	–1	1	2	3
Y	9	4	1	1	4	9

(جواب r=0)

20. X اور Y کے درمیان ہم رشتگی ضریب شمار کیجیے اور ان کے رشتوں پر تبصرہ کیجیے۔

X	1	3	4	5	7	8
Y	2	6	8	10	14	16

(جواب r =1)

سر گرمی

- یہاں بیان کیے گیے سبھی فارمولوں کا استعمال ہندوستان کی قومی آمدنی اور برآمد کے درمیان r کا شمار کرنے کے لیے لیجیے کم سے کم دس مشاہدات کیجیے۔