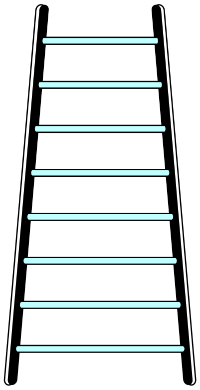
5 حسابی تصاعد (ARITHMETIC PROGRESSION)

5.1 تعارف

آپ نے کائنات میں مشاہدہ کیا ہوگا کہ بہت سی چیزیں ایک مخصوص پیٹرن پر بنی ہوتی ہیں جیسے سورج مکھی کے پھول شہد کی مکھی کے چھتّے کے سوراخ، مکئی کے بھٹا پر دانہ، انناس کے spiral اور مخروط وغیرہ۔

ہم کچھ اور پیٹرن کا مشاہدکرتے ہیں جو ہماری روزمرہ زندگی میں نظر سے گزرتے ہیں جس کی کچھ مثالیں مندرجہ ذیل ہیں۔

(i) رینا نے ایک سروس کے لئے عرضی دی اور چن لی گئی۔ اس کو ایک ایسا کام دیا گیا جس کی شروعاتی تنخواہ 8000 روپے تھی اور اس میں 500 روپے کی سالانہ بڑھوتری۔ اس کی پہلے، دوسرے، تیسرے .... سالوں میں تنخواہ (روپوں میں) بالترتیب 8000, 8500, 9000...... تھی۔



شکل 5.1

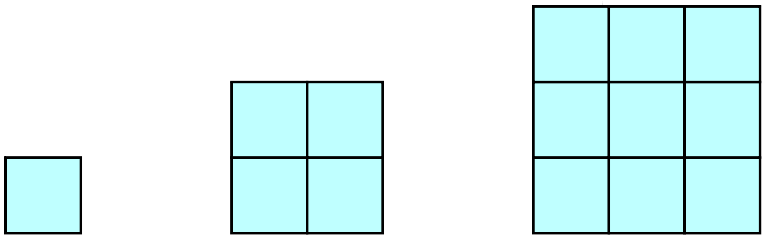
(ii) ایک سیڑھی میں نیچے سے اوپر تک لگے ڈنڈوں میں 2 سینٹی میٹر کا فرق ہے، یعنی سب سے نیچے کا ڈنڈا سب سے بڑا اس سے اوپر کا اس سے 2 سینٹی میٹر چھوٹا اور اس سے اوپر کا اس سے 2 سینٹی میٹر چھوٹا جیسا کے (شکل 5.1 میں دکھایا گیا ہے) سب نیچے لگے ڈنڈے کی لمبائی 45 سینٹی میٹر ہے اس طرح سے نیچے سے اوپر تک لگے ڈنڈوں کی بالترتیب لمبائیاں ہیں۔ 31,33,35,37,39,41,43,45

(iii) ایک بچت اسکیم میں ایک رقم 3 سال بعد خود کی $\frac{5}{4}$ گنا ہو جاتی ہے۔ 8000 روپے کی سرمایہ کاری کرنے پر 9, 6,3

اور 12 سال بعد میعاد پوری ہونے پر بالترتیب رقم (روپوں میں) ملے گی:

10000 12500 15625 19531.25

(iv) 1 مربع جن کے خلا 1,2,3.... اکائیوں کے ہیں، میں اکائی مربعوں کی تعداد شکل 5.2 میں دیکھئے بالترتیب ہے:



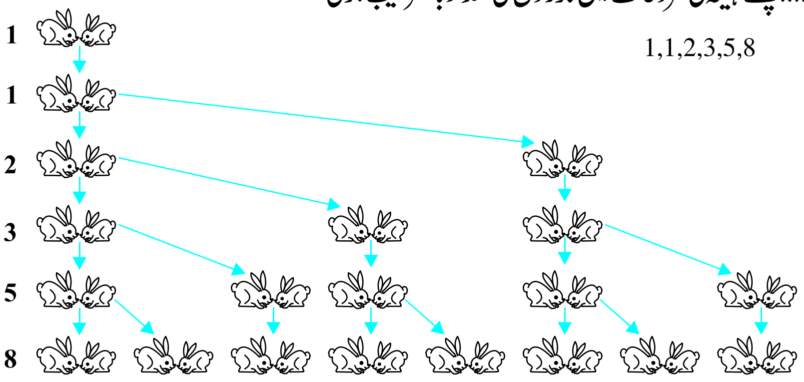
شکل 5.2

(v) شکیلہ نے ایک سال عمر کی اپنی بیٹی کے پرس میں 100 روپے رکھے اور ہر سال وہ اس پرس میں 50 روپے بڑھاتی رہی اس کی بیٹی کی پہلی، دوسری، تیسری، اور چوتھی یوم پیدائش پر اس کے پرس میں رقم بالترتیب

100, 150, 200, 250 تھی

(vi) خرگوشوں کا ایک جوڑا اتنا چھوٹا تھا کہ وہ پہلے مہینہ میں اپنی نسل کو آگے نہیں بڑھا پائے لیکن اگلے آنے والے ہر ایک مہینہ میں انھوں نے ایک نئے جوڑے کو جنم دیا۔ اور ہر نئے جوڑے نے دوسرے مہینہ میں ایک نئے جوڑے کو جنم دیا۔ (شکل 5.3 دیکھئے) یہ مانتے ہوئے کہ درمیان میں کسی بھی خرگوش کی موت نہیں ہوئی ۔ پہلے ،دوسرے ،تیسرے ....چھٹے مہینہ کی شروعات میں جوڑوں کی تعداد بالترتیب ہوگی

1,1,2,3,5,8



شکل 5.3

مذکورہ بالا مثالوں میں ہم نے کچھ پیٹرن کا مشاہدہ کیا۔ کچھ میں ہم نے پایا کہ اگلی رکن پچھلے رکن میں کوئی متعین عدد جمع کر کے حاصل کیا جاسکتا ہے اور کچھ میں متعین عدد سے ضرب کر کے اور کچھ میں ہم نے پایا کہ وہ لگاتار (مسلسل) اعداد کے مربع ہیں۔ اسی طرح سے آگے بھی۔

اس باب میں ہم ان میں سے ایک پیٹرن کا مطالعہ کریں گے جس میں اگلے ارکان کو پچھلے رکن میں کسی متعین عدد کو جمع کر کے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ہم یہ بھی سیکھیں گے کہ ایسے سلسلوں کا نواں رکن اور n لگاتار ارکان حاصل جمع کیا ہوگا اور اس علم کو روزمرہ کے مسائل کو حل کرنے میں استعمال کریں گے۔

5.2 حسابی تصاعد

مندرجہ ذیل اعداد کی فہرست پر غور کیجئے۔

(i) 1, 2, 3, 4, . . .

(ii) 100, 70, 40, 10, . . .

(iii) –3, –2, –1, 0, . . .

(iv) 3, 3, 3, 3, . . .

(v) –1.0, –1.5, –2.0, –2.5, . . .

اس فہرست میں ہر ایک عدد ایک رکن کہلاتا ہے۔

اگر مندرجہ بالا فہرست میں سے کوئی ایک رکن دیا ہوا ہو تو کیا آپ اس کا اگلا رکن معلوم کر سکتے ہیں؟ اگر ہاں تو آپ اسے کس طرح لکھیں گے؟ شاید مندرجہ ذیل پیٹرن یا قاعدہ سے۔ اس لئے مشاہدہ کرتے ہیں اور قاعدہ کو تحریر کرتے ہیں۔

(i) میں ہر ایک رکن پچھلے رکن سے 1 زیادہ ہے

(ii) میں ہر ایک رکن پچھلے رکن سے 30 کم ہے۔

(iii) میں ہر ایک رکن پچھلے رکن میں 1 جمع کر کے حاصل کیا جاسکتا ہے

(iv) میں ہر رکن 3 سے یعنی ہر ایک رکن اس کے پچھلے رکن میں 0 جمع کر کے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

(v) میں ہر ایک رکن کو اس کے پچھلے رکن میں 0.5 – جمع کر کے (یا 0.5 گھٹا کر) حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مذکورہ بالا فہرست میں آپ نے دیکھا کہ ہر اگلے رکن کو پچھلے رکن میں کوئی متعین عدد جمع کر کے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اعداد کی ایسی فہرست حسابی تصاعد (.A.P) کہلاتا ہے۔

اس طرح سے حسابی تصاعد ایسے اعداد کی فہرست ہے جس میں ہر ایک رکن اس کے پچھلے رکن میں کوئی متعین عدد جمع کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے سوائے پہلے رکن کے۔

یہ متعین عدد .A.P کا **مشترک فرق** کہلاتا ہے، یاد رکھئے یہ **فرق، مثبت، منفی یا صفر** بھی ہو سکتا ہے۔

آیئے ایک .A.p کے پہلے رکن کو a_1 سے دوسرے رکن کو a_2 سے اور nویں رکن کو a_n سے ظاہر کرتے ہیں اور مشترک فرق کو d سے۔ تب AP ہو جاتی ہے۔ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ۔

اس لئے $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$

AP کی کچھ اور مثالیں ہیں۔

(a) صبح کی اسمبلی کی لائن میں کھڑے اسکول کے طلبا کی اونچائیاں (سینٹی میٹر میں) ہیں 147,148,149,....,157

(b) کسی شہر میں جنوری کے مہینہ میں ایک ہفتہ کے ریکارڈ کئے گئے کم سے کم درجۂ حرارت (ڈگری سلسیس میں) بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھے گئے ہیں۔

– 3.1, – 3.0, – 2.9, – 2.8, – 2.7, – 2.6, – 2.5

(c) 1000 روپے کے قرض پر کل کا 5% ادا کرنے کے بعد ہر مہینہ کی بقایا رقم ہے۔ 50 ,. . . ,800 ,850 ,900 ,950

(d) پہلی کلاس سے لے کر بارہویں کلاس تک اول نمبر لانے والے طلبا کو اسکول کی طرف سے دئے گئے نقد انعام (روپیوں میں) بالترتیب ہیں۔ 750 ,. . . ,350 ,300 ,250 ,200

(e) 10 مہینوں تک ہر مہینہ کی کل بچت جب ہر مہینہ 50 روپے بچائے جاتے ہوں۔

50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500

قارئین کے لئے یہ ایک مشق ہے کہ بتائے مذکورہ بالا ہر فہرست .A.P کی ایک مثال ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں

$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$

ایک .A.P کو ظاہر کرتی ہے جہاں a پہلا رکن اور d مشترک فرق یہ .A.P کی عمومی شکل ہے۔

نوٹ کیجئے اوپر دی گئی مثال (a) سے (e) میں ارکان کی تعداد محدود ہے۔ ایسی .A.P متناہی .A.P کہلاتی ہے مزید نوٹ

کیجئے ان میں سے ہر ایک A.P. کا آخری رکن دیا ہوا ہے اس سیکشن کی مثال (i) سے (vi) میں A.P. متناہی نہیں ہے اس لئے یہ لامتناہی حسابی تصاعد کہلاتا ہے۔ ایسی A.P. کا آخری رکن نہیں ہوتا۔

اب کسی A.P. کے بارے میں جاننے کے لئے کم سے کم کتنی باتوں کا معلوم ہونا ضروری ہے؟ کیا صرف پہلا رکن جاننا کافی ہے؟ یا صرف مشترک فرق جاننا کافی ہے؟ آپ یہ پائیں گے کہ دونوں کا معلوم ہونا ضروری ہے۔ پہلا رکن a اور مشترک فرق d

مثال کے طور پر اگر پہلا رکن a , 6 ہے اور مشترک فرق d، 3 ہے۔ تب A.P ہے۔

6, 9,12, 15, . . .

اور اگر a, 6 ہے اور d، 3– ہے تب A.P. ہے۔

6, 3, 0, –3, . . .

اسی طرح جب:۔

$d = -2$ $a = -7,$ تب A.P. ہے – 7, – 9, – 11, – 13, . . .

$d = 0.1$ $a = 1.0,$ تب A.P. ہے 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, . . .

$d = 1\frac{1}{2}$ $a = 0$ تب A.P. ہے $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \ldots$

$d = 0$ $a = 2$ تب A.P. ہے 2, 2, 2, 2, . . .

اس لئے جب آپ جانتے ہیں کہ a اور d کیا ہیں تو A.P بنا سکتے ہیں۔ اگر اس کے برعکس ہو تو کیا ہوگا؟ یعنی اگر آپ کو اعداد کی فہرست دی ہوئی ہو تو کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ یہ A.P. ہے اور ہے تو اس کے a اور d کیا ہیں۔ کیونکہ a پہلا رکن ہے اس لئے یہ آسانی سے لکھا جا سکتا ہے، ہم یہ جانتے ہیں کہ ایک A.P. میں ہر اگلا رکن پچھلے رکن میں d جمع کرنے پر حاصل ہو سکتا ہے۔ اس لئے d کو ہم کسی بھی اگلے رکن میں سے پچھلا رکن گھٹا کر معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اور یہ پوری A.P. کے لئے یکساں ہوگا۔

مثال کے طور پر اعداد کی فہرست کے لئے

6, 9, 12, 15, . . . ,

ہمارے پاس ہے $a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3$

$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3$

$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

یہاں کسی دو لگا تار ارکان کا فرق 3 ہے تو دی ہوئی فہرست ایک .A.P ہے جس کا پہلا رکن a، 6 ہے اور مشترک فرق 3 ہے

اعداد. . . ,3 – ,0 ,3 ,6 کے لئے

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3$$

$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$$

$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

اسی طرح سے یہ بھی ایک .A.P ہے جس کا پہلا رکن 6 اور مشترک فرق 3– ہے۔

عمومی طور پر ایک AP، $a_1, a_2, \ldots, a_n$ کے لئے ہمارے پاس ہے

$$d = a_{k+1} - a_k$$

جہاں a_{k+1} اور a_k بالترتیب $(k+1)$واں رکن اور kواں رکن ہے۔

ایک دی ہوئی AP میں ہمیں تمام ....., $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3$ معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ یہ کافی ہے کہ ان میں سے صرف ایک معلوم ہو۔

اعداد . . . . ,5 ,3 ,2 ,1 ,1 پر غور کیجئے۔ ان کو دیکھنے سے ہی آپ یہ بتا سکتے ہیں کہ دو لگا تار ارکان کا فرق ہر جگہ مساوی نہیں ہے۔ اس لئے یہ .AP نہیں ہے۔

نوٹ کیجئے کہ AP، . . . ,3 – ,0 ,3 ,6 میں آپ نے 6 کو 3 میں سے گھٹایا ہے نہ کے 3 کو 6 میں سے یعنی ہم kویں رکن کو $(k+1)$ویں رکن میں سے گھٹاتے ہیں چاہے $(k+1)$واں رکن چھوٹا بھی ہو۔

آیئے اس تصور کو مثالوں کی مدد سے مزید واضح کرتے ہیں۔

مثال 1: AP ، ..... $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ کے لئے پہلا رکن a اور مشترک فرق d معلوم کیجئے۔

حل: یہاں $a = \frac{3}{2}$ اور $d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

یاد کیجئے کہ ہم دو لگا تار ارکان کو استعمال کر کے d معلوم کر سکتے ہیں۔ بس ایک بار ہمیں AP کے ارکان معلوم ہو جائیں۔

مثال 2: مندرجہ ذیل اعداد کی کون سی فہرست ایک AP کی تشکیل کرتی ہیں؟ اگر یہ AP ہیں تو ان کے اگلے 2 ارکان لکھیں:

(i) 4, 10, 16, 22, . . . (ii) 1, – 1, – 3, – 5, . . .

(iii) – 2, 2, – 2, 2, – 2, . . . (iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, . . .

حل: ہمارے پاس ہے $a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$

$$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$$
$$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$$

یعنی $a_{k+1} - a_k$ ہر جگہ یکساں ہے۔

اس لئے دی گئی اعداد فہرست AP جس میں مشترک فرق $d = 6$

اگلے دو رکن ہیں: $22 + 6 = 28$ اور $28 + 6 = 34$

(ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$$
$$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$$

یعنی $a_{k+1} - a_k$ ہر جگہ یکساں ہے۔

اس لئے اعداد کی دی گئی فہرست AP جس کا مشترک فرق 2 – ہے

اگلے دو رکن ہیں

$-5 + (-2) = -7$ اور $-7 + (-2) = -9$

(iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$$

کیونکہ $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ اس لئے دی گئی اعداد کی فہرست AP نہیں ہے۔

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$

$$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$$
$$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$$

یہاں $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$ اس لئے دی گئی اعداد کی فہرست AP نہیں ہے۔

مشق 5.1

1۔ مندرجہ ذیل کون سی صورت حال میں اعداد کی فہرست ایک AP ہے اور کیوں؟

(i) ہر ایک کلومیٹر کے لئے ٹیکسی کا کرایہ جب کے پہلے کلومیٹر کے لئے کرایہ 15 روپے اور 8 روپے ہر ایک زائد کلومیٹر کے لئے

(ii) جب ایک ہوا نکالنے والا پمپ سلنڈر میں سے ہر مرتبہ بچی ہوئی ہوا کا $\frac{1}{4}$ نکالتا ہے، تو سلنڈر میں موجود ہوا کی مقدار

(iii) ایک کنویں کو کھودنے کا کل خرچ جب کے ہر پہلے میٹر کھودنے کا خرچ 150 روپے اور اگلے ہر ایک میٹر کا خرچ 50 روپے ہے۔

(iv) ایک اکاؤنٹ میں ہر سال موجود رقم جب 10,000 روپے ہے 8% سالانہ سود مرکب کی شرح سے جمع کئے گئے ہوں۔

2۔ AP کے پہلے چار ارکان لکھئے پہلا رکن a اور مشترک فرق d ذیل میں دیا گیا ہے۔

(i) $a = 10,\ d = 10$ (ii) $a = -2,\ d = 0$

(iii) $a = 4,\ d = -3$ (iv) $a = -,\ \ d = \frac{1}{2}$

(v) $a = -1.25, d = -0.25$

3۔ مندرجہ ذیل APs میں پہلا رکن اور مشترک فرق معلوم کیجئے۔

(i) $3, 1, -1, -3, \ldots$ (ii) $-5, -1, 3, 7, \ldots$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3},$ (iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \ldots$

4۔ مندرجہ ذیل میں کون سی APs ہیں؟ اگر یہ AP ہیں تو ان کا مشترک فرق d معلوم کیجئے اور تین ارکان لکھئے۔

(i) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$

(iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \ldots$ (iv) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(iv) $33+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$ (vi) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \ldots$

(vii) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

(ix) $1, 3, 9, 27, \ldots$ (x) $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ (xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots$ (xiv) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots$

(xv) $1^2, 5^2, 7^2, 73, \ldots$

AP 5.3 کا nواں رکن

آیئے سیکشن 5.1 میں دی ہوئی صورت حال پر دوبارہ غور کیجئے جس میں رینا نے ایک نوکری کے لئے عرضی دی تھی اور اس کا انتخاب ہو گیا تھا۔ اس ایک ایسے نوکری کی پیش کش ہوئی تھی جہاں شروعاتی ماہانہ تنخواہ 8000 روپے ہے اور سالانہ بڑھوتری 500 روپے کی ہے۔ پانچویں سال میں اس کی ماہانہ تنخواہ کیا ہوگی؟

اس کا جواب دینے کے لئے پہلے ہم دیکھتے ہیں کہ دوسرے سال میں اس کی تنخواہ کیا ہوگی۔

یہ $(8000 + 500) = 8500$ روپے ہوگی اسی طرح سے ہم تیسرے، چوتھے اور پانچویں سال کی تنخواہ پچھلے سال کی تنخواہیں 500 روپے جمع کر کے معلوم کر سکتے ہیں۔ اس لئے تیسرے سال کی تنخواہ ہے $= (8500 + 500)$ روپے

$= (8000 + 500 + 500)$ روپے

$= (8000 + 2 \times 500)$ روپے

$= [8000 + (3 - 1) \times 500]$ (تیسرے سال کے لئے)

$= 9000$ روپے

چوتھے سال کی تنخواہ $= (9000 + 500)$ روپے

$= (8000 + 500 + 500 + 500)$ روپے

$= (8000 + 3 \times 500)$ روپے

$= [8000 + (4 - 1) \times 500]$ چوتھے سال کے لئے

$= 9500$ روپے

پانچویں سال کی تنخواہ = (9500 + 500) روپے

= (8000+500+500+500 + 500) روپے

= (8000 + 4 × 500) روپے

= [8000 + (5 – 1) × 500] پانچویں سال کے لئے

= 10000 روپے

مشاہدہ کیجئے کہ ہم کو مندرجہ ذیل اعداد کی فہرست مل رہی ہے۔

8000, 8500, 9000, 9500, 10000, . . .

یہ اعداد AP میں ہیں۔(کیوں؟)

اب ہم مذکورہ پیٹرن کو دیکھتے ہیں۔کیا آپ چھٹے سال کی تنخواہ کے بارے میں بتا سکتے ہیں؟15ویں سال کی تنخواہ؟ یہ فرض کرتے ہوئے کہ وہ مستقل اس نوکری پر کام کر رہی ہے تو25ویں(25th) سال کی ماہانہ تنخواہ کیا ہوگی؟ آپ اس کو آسانی سے ہر پچھلے سال کی تنخواہ میں 500روپے جمع کر کے معلوم کر سکتے ہیں۔کیا ہم اس عمل کو مختصر بنا سکتے ہیں؟اس لئے دیکھتے ہیں،جس طرح سے ہم نے اوپر تنخواہ حاصل کی ہے اس سے آپ کو اندازہ تو ہو ہی گیا ہوگا۔

15ویں سال کی تنخواہ ہے

= 14ویں سال کی تنخواہ+ 500روپے

= روپے [8000 + (500 + 500 + 500 ... + 500) (13 بار)] + 500 روپے

= روپے [8000 + 14 × 500]

= روپے [8000 + **(15 – 1)** × 500] = 15000 روپے

پہلی تنخواہ + **(15 – 1)** × سالانہ بڑھوتری

اسی طریقہ سے 25 ویں سال میں اس کی ماہانہ تنخواہ ہوگی

= روپے[8000 + **(25 – 1)** × 500] = 20000 روپے

پہلی تنخواہ + **(25 – 1)**× سالانہ بڑھوتری

اس مثال سے آپ کو اندازہ ہو گیا ہوگا کہ کس طرح سے آپ AP کا 15واں رکن یا 25واں رکن اور مجموعی طور پر nواں

رکن کیسے معلوم کریں گے۔

مان لیجیے $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ایک AP ہے جس کا پہلا رکن a_1، a ہے اور مشترک فرق d ہے۔

تب دوسرا رکن $a_2 = a + d = a + (2 - 1)\, d$

تیسرا رکن $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + (3 - 1)\, d$

چوتھا رکن $a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + (4 - 1)\, d$

....

....

اس پیٹرن کو دیکھتے ہی ہم کہہ سکتے ہیں کہ nواں رکن ہوگا $a_n = a - (n - 1)d$

اس لئے ایک AP جس کا پہلا رکن a مشترک فرق d ہو تو اس کا nواں رکن یعنی a_n ہوگا $a_n = a + (n - 1)d$

a_n، AP کا عمومی رکن بھی کہلاتا ہے۔ اگر کسی AP میں m ارکان ہیں تب a_m اس کا آخری رکن ہوگا جس کو اکثر ہم l سے ظاہر کرتے ہیں۔

آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 3: AP. . . 2, 7,12, کا دسواں رکن معلوم کیجیے۔

حل: یہاں $a = 2$ $\quad d = 7 - 2 = 5$ اور $n = 10$

ہمارے پاس ہے $\quad a_n = a - (n - 1)d$

اس لئے $\quad a_{10} - 2 + (10 - 1) \times 5 - 2 + 45 - 47$

اس لئے AP کا 10th رکن 47 ہے

مثال 4: AP کا کون سا رکن 81 – ہے اگر AP ہے . . . 21, 18, 15؟ یہ بھی بتایئے کہ کوئی سا رکن صفر بھی ہے؟ ایسے جواب کی وجوہات بھی لکھیے۔

حل: یہاں $d = 18 - 21 = -3$ $\quad a = 21$ اور $a_n = -81$ تو ہمیں معلوم کرنا ہے

کیونکہ $\quad a_n = a + (n - 1)d,$

ہمارے پاس ہے $-81 = 21 + (n-1)(-3)$

$-81 = 24 - 3n$

$-105 = -3n$

اس لئے $n = 35$

اس لئے دی ہوئی AP کا 25واں رکن 81 – ہے۔

آگے ہم یہ جاننا چاہتے ہیں کہ کسی ایسے n کا وجود ہے جس کے لئے $a_n = 0$ اگر ایسا n ہے تب

$21 + (n-1)(-3) = 0,$

یعنی $3(n-1) = 21$

یعنی $n = 8$

اس لئے 8واں رکن صفر ہے۔

مثال 5: AP معلوم کیجئے جس کا تیسرا رکن 5 ہے اور 7واں رکن 9 ہے۔

حل: ہمارے پاس ہے

$$a_3 = a + (3-1)\,d = a + 2d = 5 \qquad (1)$$

$$a_7 = a + (7-1)\,d = a + 6d = 9 \qquad (2)$$

خطی مساواتوں (1) اور (2) کو حل کرنے پر ہمیں ملتا ہے۔

$a = 3, \quad d = 1$

اس طرح سے مطلوبہ AP ہے $3, 4, 5, 6, 7, \ldots$

مثال 6: جانچ کیجئے آیا اعداد $5, 11, 17, 23, \ldots$ کی فہرست میں کوئی رکن 301 ہے۔

حل: ہمارے پاس ہے

$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6 \qquad a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6 \qquad a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$

کیونکہ $a_{k+1} - a_k$ یکساں ہے، $k = 1,2,3$ کے لئے اس لئے دی ہوئی اعداد کی فہرست AP ہے۔

اب $a = 5$ اور $d = 6$

مان لیجئے اس AP کا n واں رکن 301 ہے

ہم جانتے ہیں کہ

$$a_n = a + (n-1)d$$

اس لئے $301 = 5 + (n-1) \times 6$

یعنی $301 = 6n - 1$

اس لئے $n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$

لیکن n کو مثبت صحیح عدد ہونا چاہیے (کیوں؟) اس لئے 301 دی ہوئی اعداد کی فہرست کا رکن نہیں ہے۔

مثال 7: ایسے کتنے دو ہندسی اعداد ہیں جو 3 سے تقسیم ہو جاتے ہیں۔

حل: 3 سے تقسیم ہونے والے دو ہندسی اعداد کی فہرست ہے:

$$12, 15, 18, \ldots, 99$$

کیا یہ AP ہے؟ ہاں یہ ہے، یہاں $a = 12,\ d = 3,\ a_n = 99$

کیونکہ $a_n = a + (n-1)d$

ہمارے پاس ہے $99 = 12 + (n-1) \times 29$

یعنی $87 = (n-1) \times 29$

یعنی $n - 1 = \frac{87}{3} = 29$

یعنی $n = 29 + 1 = 30$

اس لئے ایسے 30 ہندسی اعداد ہیں جو 3 سے تقسیم ہوں گے۔

مثال 8: AP $10, 7, 4, \ldots, -62$ کے آخری رکن سے (پہلے رکن کی طرف) 11 واں رکن معلوم کیجئے۔

حل: یہاں ہے، $a = 10,\ d = 7 - 10 = -3,\ l = -62$

جہاں $l = a + (n-1)d$

آخر سے 11واں رکن معلوم کرنے کے لئے ہمیں AP کے کل ارکان معلوم کرنے ہیں۔

کیونکہ، $-62 = 10 + (n-1)(-3)$

یعنی، $-72 = (n-1)(-3)$

یعنی، $n - 1 = 24$

$n = 25$

اس لئے اس AP میں 25 ارکان ہیں۔

آخری رکن سے 11واں رکن 15واں رکن (نوٹ کیجئے کہ 14واں رکن نہیں ہوگا) ہوگا۔

اس لئے [illegible] $= 10 + (15-1)(-3) = 10 - 42 = -32$

یعنی آخری سے 11واں رکن 32 – ہے۔

متبادل حل:

اگر ہم AP کو معکوسی طریقہ سے لکھیں تو $a = -62$ اور $d = 3$ (کیوں؟) اس لئے اب سوال یہ ہوجاتا ہے ہمیں 11واں رکن معلوم کرنا ہے جس کے a اور d معلوم ہیں۔

اس لئے [illegible] $= -+62 + (11-1) \times 3 = -62 + 30 = -32$

اس لئے 11واں رکن جواب مطلوبہ رکن ہے 32 –

مثال 9: 1000 روپے کی رقم 8% سالانہ کی شرح سے سود مفرد پر لگائی گئی۔ ہر ایک سال کے بعد سود کی تحسیب کیجئے۔ کیا یہ سود AP ہے؟ اگر ایسا ہے تو اس حقیقت کا استعمال کرتے ہوئے 30 سال کے آخر میں حاصل ہونے والے سود کی تحسیب کیجئے۔

حل: ہم سود مفرد معلوم کرنے کا فارمولہ جانتے ہیں۔

$$\text{سود مفرد} = \frac{P \times R \times T}{100}$$

اس لئے پہلے سال کے آخر میں سود ہوگا $= \frac{1000 \times 8 \times 1}{100} = 80$ روپے

دوسرے سال کے آخر میں سود ہوگا $= \frac{1000 \times 8 \times 2}{100} = 160$ روپے

تیسرے سال کے آخر میں سود ہوگا= $\frac{1000 \times 8 \times 3}{100} = 240$ روپے

اسی طرح سے ہم 4ویں سال اور 5ویں سال اور اسی طرح سے آگے سالوں کے آخر کا سود حاصل کر سکتے ہیں۔

اس لئے پہلے، دوسرے، تیسرے، ....سالوں کا بالترتیب سود ہے۔

80, 160, 240

یہ ایک AP ہے کیونکہ دو لگا تار ارکان کا فرق 80 ہے یعنی $d = 80$ اور a بھی 80 ہی ہے۔ $a = 80$

اس لئے 30 سال کے آخر میں سود معلوم کرنے کے لئے ہمیں a_{30} معلوم کرنا ہے۔

اب $a_{30} = a + (30 - 1)\,d = 80 + 29 \times 80 = 2400$

اس لئے 30 سال کے آخر میں سود ہوگا 2400 روپے

مثال 10: پھولوں کی ایک کیاری کی پہلی قطار میں گلاب کے 23 پودے دوسری قطار میں 21 اور تیسری قطار میں 19 اور اسی طرح سے آگے بھی۔ آخری قطار میں گلاب کے 5 پودے ہیں، کیاری میں ایسی کتنی قطاریں ہیں۔

حل: پہلی، دوسری، تیسری، ....قطار میں گلاب کے پودوں کی تعداد

23, 21, 19, ..., 5

یہ ایک AP ہے (کیوں؟) مان لیجئے پھولوں کی کیاری میں n قطاریں ہیں۔

تب $a = 23$، $d = 21 - 23 = -2$ $a_n = 5$

کیونکہ $a_n = a + (n - 1)d$

ہمارے پاس ہے $5 = 23 + (n - 1)(-2)$

یعنی $-18 = (n - 1)(-2)$

یعنی $n = 10$

اس لئے پھولوں کی کیاری میں کل 10 قطاریں ہوں گی۔

مشق 5.2

1۔ مندرجہ ذیل جدول میں خالی جگہ کو پر کیجیے اگر AP کا کا پہلا رکن a اور مشترک فرق d اور n واں رکن a_n ہے۔

	a_n	n	d	a
(i)	...	8	3	7
(ii)	0	10	...	– 18
(iii)	–5	18	–3	...
(iv)	3.6	...	2.5	– 18.9
(v)	...	105	0	3.5

2۔ مندرجہ ذیل میں صحیح جواب کو چنئے اور اس کا جواز پیش کیجیے۔

(i) AP: 10, 7, 4, . . . کا 30 واں رکن ہے۔

(A) 97 (B) 77 (C) –77 (D) – 87

(ii) AP: $-3, -\frac{1}{2}, 2, \ldots$ کا 11 واں رکن ہے۔

(A) 28 (B) 22 (C) –38 (D) $-48\frac{1}{2}$

3۔ مندرجہ ذیل APs میں باکس میں گمشدہ رکن بھریے۔

(i) 2, □, 26

(ii) □, 13, □, 3

(iii) 5, □, □, $9\frac{1}{2}$

(iv) –4, □, □, □, □, 6

(v) □, 38, □, □, □, –22

4۔ AP: 3, 8, 13, 18, . . . کا کون سا رکن 78 ہے۔

5۔ مندرجہ ذیل ہر ایک AP میں ارکان کی تعداد معلوم کیجیے۔

(i) 7, 13, 19, . . ., 205

(ii) $18, 15\frac{1}{2}, 13, \ldots, -47$

6۔ جانچ کیجیے کہ آیا 150– AP: 11, 8, 5, 2, . . . کا رکن ہے۔

7۔ ایک AP کا 11 واں رکن 38 ہے اور 16 واں رکن 73 ہے تو اس کا 31 واں رکن معلوم کیجیے۔

8۔ ایک AP میں 150 ارکان ہیں جس کا تیسرا رکن 12 اور آخری رکن 106 ہے تو 29 واں رکن معلوم کیجئے۔

9۔ اگر ایک AP کا تیسرا اور نواں رکن بالترتیب 4 اور 8– ہے تو AP کا کون سا رکن صفر ہوگا۔

10۔ ایک AP کا 17 واں رکن اس کے 10 ویں رکن سے 7 زیادہ ہے۔ مشترک فرق معلوم کیجئے۔

11۔ AP: 3, 15, 27, 39,.. کا کون سا رکن اس کے 54 ویں رکن سے 132 زیادہ ہے۔

12۔ دو APs کا مشترک فرق ایک ہی ہے ان کے 100 ویں ارکان میں 100 کا فرق ہے۔ تو ان کے 1000 ویں ارکان میں کیا فرق ہوگا۔

13۔ تین ہندسوں کے کتنے عدد 7 سے تقسیم ہو سکتے ہیں۔

14۔ 10 اور 250 کے درمیان میں 4 کے کتنے اضعاف ہیں۔

15۔ n کی کس قدر کے لیے دو APs: . . 63, 65, 67,. اور . . 3, 10, 17, کے n ویں رکن مساوی ہوگا؟

16۔ AP معلوم کیجئے جس کا تیسرا رکن 16 ہے اور ساتواں رکن پانچویں رکن سے 12 زیادہ ہے۔

17۔ AP: 3, 18, 13, . . .253 کے آخری رکن سے 20 واں رکن معلوم کیجئے۔

18۔ ایک AP چوتھے اور آٹھویں ارکان کا حاصل جمع 24 ہے اور 6 ویں اور 10 ویں ارکان کا حاصل جمع 44 ہے۔ AP کے تین ارکان معلوم کیجئے۔

19۔ سُبّا راؤ نے 1995 میں ایک نوکری 5000 روپے کی سالانہ تنخواہ پر شروع کی اور ہر سال اس کو 200 روپے کا ایک اضافی رقم ملا۔ کونئے سال میں اس کی آمدنی 7000 روپے ہوگی؟

20۔ رام کلی نے سال کے پہلے ہفتہ میں 5 روپے کی بچت کی اور پھر اس نے اپنی ہفت وار بچت 1.75 روپے سے بڑھا دیا۔ اور n ویں ہفتہ میں اس کی ہفتہ وار بچت 20.75 روپے ہوگئی تو n معلوم کیجئے۔

5.4 AP کے پہلے n ارکان کا حاصل جمع

سیکشن 5.1 میں دی گئی صورت حال پر دوبارہ غور کیجئے، جس میں شکیلا نے اپنی بیٹی کے پرس میں 100 روپے رکھے تھے جب اس کی عمر ایک سال کی تھی۔ 150 روپے اس کے دوسرے یوم پیدائش پر اور 200 روپے اس کے تیسرے یوم پیدائش پر اور اسی طرح سے اگلے یوم پیدائش پر بھی۔ جب اس کی بیٹی 21 سال کی ہوگئی تو اس کے پرس میں کل کتنے روپے تھے۔ یہاں پہلے، دوسرے، تیسرے، چوتھے یوم پیدائش پر اس کے پرس میں رکھے گئے روپوں کی تعداد بالترتیب . . 100, 150, 200, 250,. ہے۔

21ویں یوم پیدائش تک اس کے 21ویں یوم پیدائش پر جمع کل رقم معلوم کرنے کے لئے ہم اوپر دی گئی تمام رقم کو (21اعداد کو) جمع کریں گے۔ کیا آپ کو ایسا نہیں لگتا کے گننے کا یہ عمل کچھ پیچیدہ اور دیر طلب ہے؟ کیا ہم اس عمل کو مزید مختصر اور چھوٹا نہیں بنا سکتے۔ یہ ممکن ہے اگر ہم حاصل جمع معلوم کرنے کا ایک طریقہ دریافت کریں۔ آیئے دیکھتے ہیں۔

اب ہم Gauss کو دیے گئے ایک مسئلے پر غور کریں (جس کے بارے میں آپ نے باب 1 میں پڑھا تھا) جو اس کو حل کرنے کے لئے جب دیا گیا تھا جب وہ 10 سال کی عمر کا تھا۔ اس سے کہا گیا تھا کہ اسے 100 تک کے مثبت صحیح اعداد کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔ اس نے فوراً جواب دیا تھا 5050۔ کیا آپ اندازہ کر سکتے ہیں اس نے ایسا کیسے کیا؟ اس نے لکھا تھا:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$$

اور غیر اعداد کو معکوس طریقے سے لکھیں

$$S = 100 + 99 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

ان دونوں کو جمع کرنے پر اس نے پایا

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + \ldots + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$

$$= 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 \qquad \text{(100 مرتبہ)}$$

اس لئے $S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$ یعنی حاصل جمع $= 5050$

اب ہم AP کے پہلے n ارکان کا حاصل جمع معلوم کرنے کے لئے اسی تکنیک کا استعمال کریں گے۔

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ \ldots$$

اس AP کا nواں رکن $a + (n - 1)d$ ہے۔ مان لیجئے S، اس AP کے پہلے n ارکان کا حاصل جمع کو ظاہر کرتا ہے۔ ہمارے پاس ہے۔

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + [a + (n - 1)d] \qquad (1)$$

ان ارکان کو معکوس طریقے سے دوبارہ لکھنے پر

$$S = [a + (n - 1)d] + [a + (n - 2)d] + \ldots + (a + d) + a \qquad (2)$$

(1)اور(2) کو جمع کرنے ر

$$\frac{2a-(n-1)d] - [2a+(n-1)d] + \ldots + [2a-(n-1)d] - [2a-(n-1)d]}{n \text{ مرتبہ}}$$

یا $2S = n[2a + n - 1)d]$ (کیونکہ ارکان کی تعداد n ہے)

یا $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

اس لئے کسی AP کے پہلے n ارکان کا حاصل جمع

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

اس کو ہم $S = \frac{n}{2}1[a + a + (n - 1d]$

یعنی (3) $S = \frac{n}{2}(a + a_n)$

اب اگر کسی AP میں صرف n ارکان ہیں تب $a_n = l$ یعنی آخری رکن جو (3) سے ہمیں ملتا ہے۔

$$S = \frac{n}{2}(a + l) \qquad (4)$$

نتیجہ کی یہ شکل کافی مفید ہوتی ہے جب کسی AP کا پہلا اور آخری رکن دیا ہوا ہو اور مشترک فرق نہ دیا ہوا ہو، اب ہم اپنے اس سوال کی طرف واپس جاتے ہیں جو شروع میں ہم نے اٹھایا تھا۔ یعنی شکیلہ کی بیٹی کے پرس میں اس کے پہلے، دوسرے، تیسرے اور چوتھے یوم پیدائش پر رقم بالترتیب 100, 150, 200, 250, . . .,

یہ ایک AP ہے اور ہمیں معلوم کرنا ہے کہ اس کے 21th یوم پیدائش پر کل کتنی رقم اس کے پرس میں ہوگی۔ یعنی اس AP کے پہلے 21 ارکان کا حاصل جمع

یہاں $a = 100$, $d = 50$ اور $n = 21$ فارمولہ کا استعمال کرنے پر

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

ہمارے پاس ہے

$$S = \frac{21}{2}[2 \times 100 + (21 - 1) \times 50] = \frac{21}{2}[200 + 1000]$$

$$= \frac{21}{2} \times 1200 = 12600$$

اس لئے اس کے 21ویں یوم پیدائش پر کل رقم 12600 روپے ہے۔ کیا فارمولے کے استعمال نے اسے آسان نہیں بنا دیا؟

ہم AP کے پہلے n ارکان کے حاصل جمع S کی جگہ S_n بھی لکھ سکتے ہیں ہم AP کے پہلے 20 ارکان کے حاصل جمع کو 520 سے ظاہر کرتے ہیں۔ حاصل جمع معلوم کرنے کے فارمولہ میں چار مقداریں شامل ہیں۔ S، a, d اور n۔ اگر ہم ان میں سے کسی تین کے بارے میں معلوم ہے تو ہم چوتھی معلوم کرسکتے ہیں۔

ریمارک: اگر کسی AP کا nواں رکن اس کے پہلے n ارکان کے حاصل جمع اور پہلے $(n-1)$ ارکان کے حاصل جمع کے فرق کے برابر ہوتا ہے یعنی $a_n = S_n - S_{n-1}$

آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 11: AP. . . ,8, 3, −2 کے پہلے 22 ارکان کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

ہم جانتے ہیں کہ

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S = \frac{22}{2}[16 + 21(-5)] = 11(16 - 105) = 11(-89) = -979$$

اس لئے پہلے 22 ارکان کا حاصل جمع 979− ہے۔

مثال 12: اگر کسی AP کے پہلے 14 ارکان حاصل جمع 1050 ہے اور اس کا پہلا رکن 10 ہے تو 20واں رکن معلوم کیجئے۔

حل: یہاں $S_{14} = 1050$ $\quad n = 14$ $\quad a = 10$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

اس لئے $\quad 1050 = \frac{14}{2}[20 + 13d] = 140 - 91d$

یعنی $\quad 910 = 91d$

یا $\quad d = 10$

اس لئے $\quad a_{20} = 10 + (20-1) \times 10 = 200$ یعنی 20واں رکن 200 ہے۔

مثال 13: A P . . . ,24, 21, 18 کے کتنے ارکان کو لیا جائے کہ ان کا حاصل جمع 78 ہو۔

حل: یہاں $a = 24$, $d = 21 - 24 = -3$, $S_n = 78$ ہمیں n معلوم کرنا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ $S_n = \frac{n}{2}[2a - (n-1)d]$

اس لئے $78 = \frac{n}{2}[48 + (n-1)(-3)] = \frac{n}{2}[51 - 3n]$

یا $3n^2 - 51n + 156 = 0$

یا $n^2 - 17n + 52 = 0$

یا $(n-4)(n-13) = 0$

یا $n = 4$ یا 13

n کی دونوں ہی قدریں صحیح ہیں، ارکان کی تعداد یا تو 4 ہے یا 13

ریمارک:

1۔ اس حالت میں 78 = پہلے 13 ارکان کا حاصل جمع = پہلے 4 ارکان کا حاصل جمع ہے۔

2۔ یہ دو جواب اس لئے ممکن ہیں کیونکہ 5 ویں رکن سے 13 ویں رکن تک کے ارکان کا حاصل جمع صفر ہے یہ اس لئے ہے کیونکہ a مثبت ہے اور d منفی۔ اسلئے کچھ ارکان مثبت ہوں گی اور کچھ منفی جس ایک دوسرے سے کینسل ہو جائیں گی۔

مثال 14: حاصل جمع معلوم کیجئے:

(i) پہلے 1000 مثبت صحیح اعداد کا (ii) پہلے n مثبت صحیح اعداد کا۔

حل:

(i) مان لیجئے $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$

کسی AP کے پہلے n ارکان کا فارمولہ $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ استعمال کرنے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1 + 1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

اس لئے پہلے 1000 مثبت صحیح اعداد کا حاصل جمع 500 500 ہے۔

(ii) مان لیجئے $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

یہاں $a = 1$ اور آخری رکن n , 1 ہے۔

اس لئے $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$ یا $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

اس لئے پہلے n مثبت صحیح اعداد کا حاصل جمع

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال 15: اعداد کی اس فہرست کے پہلے 24 ارکان کا حاصل جمع معلوم کیجیے جن کا n واں رکن دیا ہوا ہے۔

$$a_n - 3 + 2n$$

حل:

کیونکہ $a_n = 3 + 2n$

اس لئے $a_1 = 3 + 2 = 5$

$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$

$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$

اعداد کی فہرست ہو جاتی ہے $5, 7, 9, 11 \ldots$

یہاں $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$

اس لئے ایک AP ہے جس کا مشترک فرق $d = 2$

معلوم کرنے کے لئے ہمارے پاس ہے $d = 2, a = 5, n = 24$

اس لئے $S_{24} = \frac{24}{2}[2 \times 5 + (24 - 1) \times 2] = 12[10 + 46] = 672$

اس لئے پہلے 24 ارکان کا حاصل جمع 672 ہے۔

مثال 16: ایک ٹی وی کی کمپنی تیسرے سال میں 600 ٹی وی سیٹ اور 700 سیٹ ساتویں سال میں بناتی ہے یہ مانتے ہوئے کہ ہر سال ٹی وی کے تیار ہونے کی تعداد ایک متعین عدد سے بڑھتی ہے۔ تو معلوم کیجیے۔

(i) پہلے سال میں بنائے گئے ٹی وی سیٹوں کی تعداد

(ii) 10 ویں سال میں تیار کئے گئے سیٹ

(iii) پہلے 7 سال میں تیار کئے گئے کل سیٹ

حل: (i) کیونکہ ٹی وی میں ہر سال ایک متعین تعداد سے زیادہ ہو رہی ہے تو پہلے، دوسرے اور تیسرے سال ...، میں بنائے گئے ٹی وی کی تعداد ایک AP ہو گی۔ آیئے ہم n ویں سال میں تیار کئے گئے ٹی وی کی تعداد کو a_n سے ظاہر کرتے ہیں۔

تب $a_3 = 600$ اور $a_7 = 700$

یا $a + 2d = 600$

اور $a + 6d = 700$

ان مساواتوں کو حل کرنے پر ہمیں ملتا ہے $a = 550$ اور $d = 25$

اس لئے پہلے سال میں تیار کئے گئے ٹی وی سیٹ کی کل تعداد 550 ہے۔

(ii) اب $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

اس لئے دسویں سال میں تیار کئے گئے TV سیٹ کی کل تعداد 775 ہے۔

(iii) مزید $S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7-1) \times 25]$

$= \frac{7}{2}[1100 + 150] = 4375$

اس طرح سے پہلے 7 سالوں میں تیار کئے گئے کل TV سیٹ ہیں 4375۔

مشق 5.3

1۔ مندرجہ ذیل APs کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

(i) $2, 7, 12, \ldots,$ 10 ارکان تک
(ii) $-37, -33, -29, \ldots,$ 12 ارکان تک
(iii) $0.6, 1.7, 2.8, \ldots,$ 100 ارکان تک
(iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \ldots$ 11 ارکان تک

2۔ نیچے دئے گئے حاصل جمع معلوم کیجئے۔

(i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \ldots + 84$
(ii) $34 + 32 + 30 + \ldots + 10$
(iii) $-5 + (-8) + (-11) + \ldots + (-230)$

3۔ ایک AP میں دیا ہوا:

(i) $a = 5, d = 3, a_n = 50$ ، n اور S_n معلوم کیجئے۔

(ii) $a_{13} = 35, a = 7$ تو d اور S_{13} معلوم کیجئے۔

(iii) $d = 3, a_{12} = 37$ تو a اور S_{12} معلوم کیجئے۔

(iv) $a_3 = 15, S_{10} = 125$ تو d اور a_{10} معلوم کیجئے۔

(v) $d = 5 \quad S_9 = 75$ تو a اور a_9 معلوم کیجئے۔

(vi) $a = 2, d = 8, S_9 = 90$ تو n اور a_n معلوم کیجئے۔

(vii) $a = 8, a_n = 62, S_n = 210,$ تو n اور d معلوم کیجئے۔

(viii) $a_n = 4, d = 2, S_n = -14,$ تو n اور a معلوم کیجئے۔

(ix) $a = 3, n = 8, S = 192,$ تو d معلوم کیجئے۔

(x) $l = 28, S = 144,$ اور کل ارکان 9 ہیں تو a معلوم کیجئے۔

4۔ AP . . . ,25 ,17 ,9 کے کتنے ارکان لئے جائیں کہ حاصل جمع 636 ہو جائے۔

5۔ AP کا پہلا رکن 5 اور آخری رکن 45 اور حاصل جمع 400 ہے۔ ارکان کی تعداد اور مشترک فرق معلوم کیجئے۔

6۔ ایک AP کا پہلا اور آخری رکن بالترتیب 17 اور 350 ہے۔ اگر مشترک فرق 9 ہے تو ارکان کی کل تعداد حاصل جمع معلوم کیجئے۔

7۔ ایک AP کے 22 ارکان کا حاصل جمع معلوم کیجئے جس میں $a = 7$ اور 22 واں رکن 149 ہے۔

8۔ ایک AP کے پہلے ارکان کا حاصل جمع معلوم کیجئے جس کا دوسرا اور تیسرا رکن بالترتیب 14 اور 18 ہے۔

9۔ اگر کسی AP کے پہلے 7 ارکان کا حاصل جمع 49 ہے اور 17 ارکان کا حاصل جمع 289 ہے۔ تو پہلے n ارکان کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

10۔ دکھایئے کہ $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ایک AP جہاں a_n کو ذیل میں معروف کیا گیا ہے۔

(i) $a_n - 3 + 4n$ (ii) $a_n - 9 - 5n$

اور ہر ایک حالت کے لئے پہلے 15 ارکان کا حاصل جمع بھی معلوم کیجئے۔

11۔ اگر AP کے پہلے n ارکان کا حاصل جمع $4_n - n^2$ ہے تو پہلا رکن کیا ہے (یعنی S_1)؟ پہلے دو ارکان کا حاصل جمع کیا ہے؟ دوسرا رکن کیا ہے؟ اسی طرح سے تیسرا، دسواں اور n واں رکن معلوم کیجئے۔

12۔ پہلے 40 مثبت صحیح اعداد کا حاصل جمع معلوم کیجئے جو 6 سے تقسیم ہو جائیں۔

13۔ d کے پہلے 14 اضعاف کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

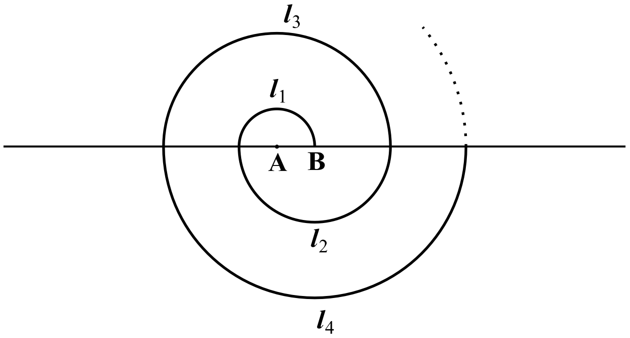
14۔ 0 اور 50 کے درمیان تمام طاق اعداد کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

15۔ تعمیر کے کام کے ایک معاہدہ میں یہ بات صاف طور پر لکھی جاتی ہے کہ کسی کام کو اس کی دی گئی تاریخ کے بعد مکمل کیا جاتا ہے تو جرمانہ اس طرح سے ہوگا۔ تاخیر کے پہلے دن 200 روپے دوسرے دن 250 روپے، تیسرے دن 300 روپے وغیرہ۔ جرمانہ کی رقم ہر آنے والے دن میں 50 روپے بڑھ جائے گی۔ اگر ایک کنٹریکٹر ایک کام کو 30 دن تاخیر سے کرتا ہے تو اس کو کل کتنا جرمانہ دینا پڑیگا۔

16۔ ایک اسکول میں طلبا کی سال بھر کی بہترین کارکردگی کے لئے 700 روپیہ کی رقم کو سات نقد انعام کی شکل میں طلبا کو دیا جاتا ہے۔ اگر ہر انعام پچھلے انعام سے 20 روپے کم ہے تو ہر انعام کی قیمت معلوم کیجئے۔

17۔ ایک اسکول میں ہوائی آلودگی کو کم کرنے کے لئے طلبا نے اسکول کے چاروں طرف پودے لگانے کے بارے میں سوچا یہ طے کیا گیا کہ ہر کلاس کا ہر سیکشن اتنے ہی پیڑ لگائے گا جس کلاس میں وہ پڑھتے ہیں۔ مثال کے طور پر پہلی کلاس کے طلبا 1، دوسری کلاس کے طلبا 2، تیسرے کلاس کے طلبا 3 اور اسی طرح سے XII کے طلبا 12 پیڑ لگائیں گے ہر کلاس کے تین سیکشن ہیں۔ طلباء کے ذریعے لگائے گئے پیڑوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

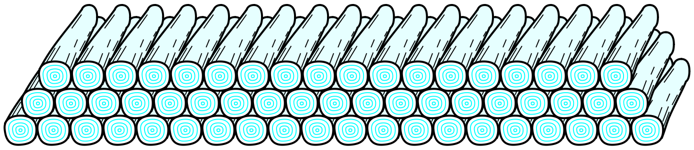
18۔ ایک Spiral، مسلسل نصف دائروں سے بنایئے جن کے مراکز متبادل طور پر A اور B ہیں۔ مرکز A سے شروع کرتے ہوئے ان کے نصف قطر ہیں۔ 0.5 سینٹی میٹر، 1.0 سینٹی میٹر، 1.5 سینٹی میٹر، 2.0 سینٹی میٹر، جیسا کے شکل 5.4 میں دکھایا گیا ہے۔ ایسے Spiral کی کل لمبائی معلوم کیجئے جو 13 لگاتار نصف دائروں سے مل کر بنا ہے۔ ($\pi=\frac{22}{7}$ لیجئے)



شکل 5.4

[اشارہ: لگا تار نصف دائروں کی لمبائیاں ہیں $l_1, l_2, l_3, l_4, \ldots$ جن کے مراکز بالترتیب A,B, A,B, ہیں...

19۔ 200 لکڑی کے لٹھے مندرجہ ذیل طریقہ سے اکٹھا کئے گئے ہیں۔ سب سے نچلی قطار میں 20 لٹھے اس سے اگلی قطار میں 19 اور 18 اس سے اگلی قطار میں اور اسی طرح سے آگے بھی (شکل 5.5 دیکھئے) کتنی قطاروں میں 200 لٹھوں و دکھا گیا اور سب سے اوپر کی قطار میں کتنے لٹھے ہوں گے۔



شکل 5.5

20۔ آلو کی ریس میں شروعاتی نقطہ پر ایک بالٹی رکھ دی گئی جو پہلے آلو سے 5 میٹر کے فاصلہ پر ہے اور دوسرے آلو خط مستقیم میں 3 میٹر کے درمیانی فاصلہ پر رکھے گئے ہیں۔ اس خط پر کل دس آلو ہیں (شکل 5.6 دیکھئے)

شکل 5.6

ایک شخص اس بالٹی سے شروع کرتے ہوئے سب سے نزدیک رکھے ہوئے آلو کو اٹھاتا ہے اور دوڑ کر واپس آتا ہے اور اس کو بالٹی میں ڈال کر پھر واپس اگلے رکھے ہوئے آلو کی طرف دوڑتا ہے اس کو اٹھاتا ہے اور واپس اس بالٹی کی طرف دوڑتا ہے اس کو بالٹی میں ڈال کر وہ اگلے آلو کی طرف دوڑتا ہے یہ سلسلہ جب تک جاری رہتا ہے جب تک کے تمام آلو اس بالٹی میں نہیں آجاتے اس شخص کے ذریعے دوڑا گیا کل فاصلہ معلوم کیجئے۔

[**اشارہ:** پہلے اور دوسرے آلو کو اٹھانے میں اس شخص کے ذریعے طے کیا گیا کل فاصلہ ہے۔ $2 \times 5 + 2 \times (5+3)$]

مشق 5.4 (اختیاری)*

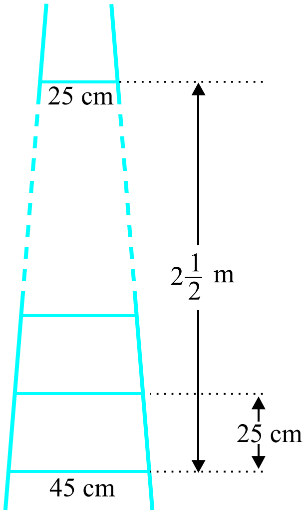
1۔ AP: 121, 117, 113, . . ., کا کون سا رکن اس کا پہلا منفی رکن ہوگا؟

[اشارہ: n معلوم کیجئے $a_n < 0$ کے لئے]

* یہ مشقیں امتحان کے نقطہ نظر سے نہیں ہیں۔

2۔ ایک AP کی تیسری اور ساتویں رکن کا حاصل جمع 6 ہے اور ان کا حاصل ضرب 8 ہے۔تو پہلے 16 ارکان کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

3۔ ایک سیڑھی میں 25 سینٹی میٹر کے فاصلہ پر ڈنڈے لگے ہوئے ہیں (شکل 5.7 دیکھئے) ڈنڈوں کی لمبائی یکساں طور پر گھٹ رہی ہے سب سے نیچے والا ڈنڈا 45 سینٹی میٹر لمبا اور سب سے اوپر والا ڈنڈا 25 سینٹی میٹر لمبا اگر سب سے اوپری ڈنڈے اور سب سے نیچے والے ڈنڈے کے درمیان کا فاصلہ $2\frac{1}{2}$ میٹر ہے۔تو ڈنڈوں میں استعمال ہونے والی مطلوبہ لکڑی کی لمبائی معلوم کیجئے۔



شکل 5.7

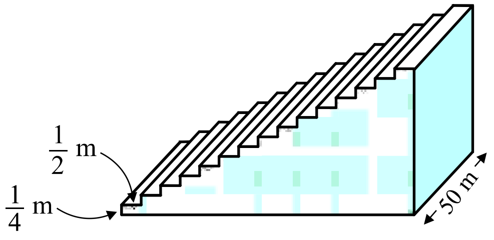
[اشارہ: ڈنڈوں کی تعداد = $\frac{250}{25}$]

4۔ کسی ایک قطار میں مکانوں پر 1 سے 49 تک کے نمبر لکھے ہوئے ہیں۔دکھایئے کہ x کی ایک ایسی قدر ہے جس کے لئے اس گھر جس کا مکان نمبر x ہے، اس سے پہلے تمام مکانوں کی تعداد کا حاصل جمع اس مکان کے بعد والے مکانوں کی تعداد کے حاصل جمع کے برابر ہے۔ x کی قدر معلوم کیجئے۔

[اشارہ: $S_{x-1} = S_{49} - S_x$]

5۔ فٹ بال کے ایک میدان کے ایک چھوٹے سے چھجے جس میں 50 میٹر لمبی 15 سیڑھیاں ہیں جس ٹھوس کنکریٹ کی بنی ہیں۔ہر سیڑھی کی اونچائی $\frac{1}{4}$ اور چوڑائی (جس پر بیٹھا جاتا ہے) $\frac{1}{2}$ میٹر ہے (شکل 5.8 دیکھئے) چھجے کو بنانے میں مطلوب کنکریٹ کا کل حجم معلوم کیجئے۔

[اشارہ: پہلی سیڑھی بنانے میں مطلوب کنکریٹ کا حجم = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50\text{m}^3$]



شکل 5.8

5.5 خلاصہ:

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں

1۔ حسابی تصاعد (AP) اعداد کی وہ فہرست ہے جس میں ہر رکن کو، پہلے رکن کے علاوہ، اس کے پچھلے رکن میں ایک متعین عدد d کو جمع کر کے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ متعین عدد d، مشترک فرق کہلاتا ہے۔

ایک AP کی عمومی شکل ہے۔ a, a+d, a+2d, a+3d, . . .

2۔ اعداد $a_1, a_2, a_3, \ldots$ کی دی گئی فہرست ایک AP ہے اگر $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$ سے ایک قدر حاصل ہو۔ یعنی اگر $a_{k+1} - a_k$ کی قدر k کی مختلف قدروں کے لئے ایک ہی ہو۔

3۔ ایک AP میں جس کا پہلا رکن a ہو اور مشترک فرق d ہو اس کا n واں رکن (یا عمومی رکن) ہے۔ $a_n = a+(n-1)d$

4۔ ایک AP کے پہلے n ارکان کا حاصل جمع ہوتا ہے۔

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

5۔ اگر کسی AP کا آخری رکن l ہے، یعنی nth رکن تب AP کے ارکان کا حاصل جمع ہوگا۔

$$S = \frac{n}{2}(a + l)$$

قارئین کے لئے نوٹ

اگر a, b, c AP میں ہیں تب $b = \frac{a+c}{2}$ اور b، a اور c کا حسابی اوسط کہلاتا ہے۔