7 مختص جیومیٹری (CORDINATE GEOMETERY)

7.1 تعارف

نویں کلاس میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ ایک مستوی میں کسی نقطے کو تلاش کرنے کے لئے ہمیں **مختص محوروں** کی ضرورت ہوتی ہے کسی نقطہ کا y- محور سے فاصلہ x- **مختص یا طولی مختص** کہلاتا ہے اور کسی نقطہ کا x- محور سے فاصلہ y- **مختص یا عرضی مختص** کہلاتا ہے x- محور پر موجود کسی نقطہ کے **مختصات** $(x,0)$ کی شکل کے ہوتے ہیں اور y- محور پر کسی نقطے کے **مختصات** $(0,y)$ شکل کے ہوتے ہیں۔

یہاں آپ کے لئے ایک کھیل ہے ایک گراف پیپر پر عمودی محوروں کا ایک جوڑا بنایئے۔ اب مندجہ ذیل نقطے اس پر پلاٹ کیجئے اور ان کو بتائے گئے طریقے کے مطابق ملایئے یعنی نقطے A(4,8) کو B(3,9) سے B کو C(3,8) سے، C کو D(1,6) سے، E کو F(3,3) سے، F کو G(6,3) سے G کو H(8,5) سے، H کو I(8,6) سے I کو J(6,8) سے، J کو K(6,9) سے، K کو L(5,8) سے اور L کو A سے ملایئے۔ اس کے بعد نقطوں P(3.5, 7), Q(3, 6) اور R(4, 6) کو جوڑ کر ایک مثلث بنایئے۔ اور نقطے X(5.5, 7), Y(5,6) اور Z(6, 6) کو ملا کر مثلث بنایئے۔ اب S(4, 5), T(4.5,4) اور U(5, 5) کو ملث بنایئے۔ اور آخر میں نقطہ S کو نقطوں (0, 5) اور (0, 6) سے ملایئے اور نقطہ U کو نقطوی (9, 5) اور (9, 6) سے ملایئے۔ آپ کو کسی طرح کی تصویر حاصل ہونی چاہئے۔

آپ یہ بھی دیکھ چکے ہیں کہ دو متغیروں والی $ax + by + c = 0$ (b,a اور c ایک ساتھ صفر نہیں ہو سکے) شکل کی خطی مساوات کو جب گراف کی مدد سے ظاہر کیا جاتا ہے تو ایک خط مستقیم حاصل ہوتا ہے۔ مزید باب 2 میں آپ دیکھ چکے ہیں کہ $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ کا گراف ایک مکافی ہے۔ درحقیقت مختص جیومیٹری کی ایک الجبری اوزار کے طور پر دریافت جیومیٹری کی اشکال کا مطالعہ کرنے کے لئے ہوئی ہے۔ یہ ہماری مدد الجبرے کے استعمال سے جیومیٹری کا مطالعہ کرنے میں

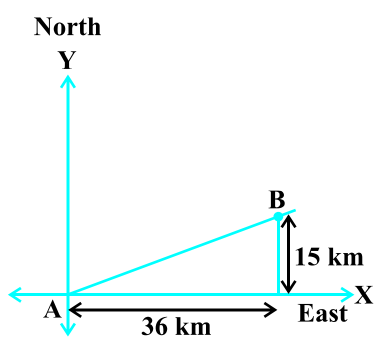
کرتی ہے اورالجبرے کوجیومیٹری کے استعمال سے سمجھنے میں مدد کرتی ہے یہی وجہ ہے کہ مختص جیومیٹری کا استعمال مختلف میدانوں جیسے فزکس،انجینئرنگ، جہازرانی زلزلے پیما سے متعلق اور آرٹ میں ہوتا ہے۔

اس باب میں آپ سیکھیں گے کہ آپ ان دونقاط ،جن کے مختصات دئے ہوئے ہوں، کے درمیان فاصلے کس طرح معلوم کریں گے۔اوراس کے ساتھ دئے ہوئے تین نقطوں سے بنے مثلث کا رقبہ کس طرح معلوم کریں گے۔آپ یہ بھی مطالعہ کریں گے کہ اس نقطے کے مختصات کیسے معلوم کئے جائیں جو دونقطوں کوملانے والے قطع خط کو دی ہوئی نسبت میں منقسم کرتا ہے۔

7.2 فاصلہ فارمولہ

آیئے مندرجہ ذیل صورت حال پر غور کرتے ہیں

ایک شہر B،شہر A سے 36 کلومیٹر مشرق کی طرف واقع ہے۔آپ بغیر ناپے دونوں شہروں کے درمیان فاصلہ کس طرح معلوم کریں گے۔ آیئے دیکھتے ہیں ،اس صورت حال کو گراف کے طور پر شکل 7.1 میں دکھایا گیا ہے۔آپ یہ فاصلہ معلوم کرنے کے لئے فیثا غورث کے مسئلے کا استعمال کر سکتے ہیں۔

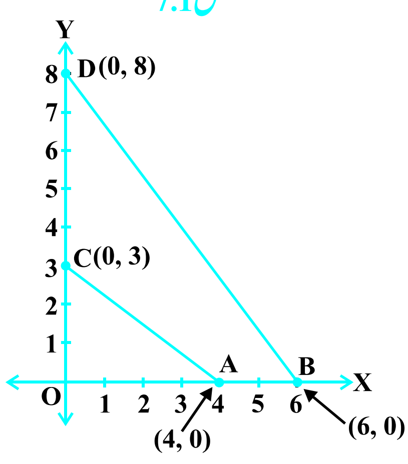


شکل 7.1

اب مان لیجئے دو نقطے x۔محور پر واقع ہیں ہم ان کے درمیان کا فاصلہ معلوم کر سکتے ہیں۔مثال کے طور پر دو نقطے A(4,0) اور B(6,0) پر غور کیجئے (شکل 7.2) نقطہ A اور B x۔ محور پر واقع ہیں۔شکل میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ OA = 4 اور OB =6 اکائیاں ہیں۔

اس لئے B کا A سے فاصلہ ہے یعنی 2 اکائیاں $AB = OB - OA = 6 - 4 = 2$

اس لئے اگر گراف دو نقطے x ۔ محور پر واقع ہوں تو ہم آسانی سے ان کے درمیان کا فاصلہ معلوم کر سکتے ہیں۔اور C(0,3) اور D(0,8) y۔ محور پر ہوں ۔اسی طرح ہم اکائیاں 5 $CD = (8-3) = 5$ (شکل 7.2 دیکھئے)

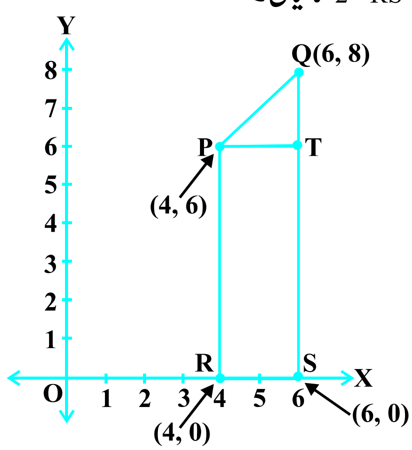


شکل 7.2

کیا آپ A اور C کے درمیان (شکل 7.2) کا فاصلہ بھی معلوم کر سکتے ہیں۔ کیونکہ OA = 14 اکائیاں اور OC = 3 اکائیاں اس لئے A کا C سے فاصلہ یعنی AC = √ [illegible] = 5 اکائیاں اسی طرح سے آپ B کا D سے فاصلے معلوم کر سکتے ہیں DB=10 اکائیاں۔

آیئے اب ایسے دو نقطوں پر غور کرتے ہیں جو مختص محوروں پر واقع نہیں ہیں۔ کیا ان کے درمیان فاصلہ معلوم کیا جا سکتا ہے؟ ہاں! ایسا کرنے کے لئے ہم فیثا غورث کے مسئلے کا استعمال کرتے ہیں۔ آیئے ایک مثال پر غور کرتے ہیں۔

شکل 7.3 میں نقاط P(4,6) اور Q(6,8) پہلے ربع میں ہیں۔ ان کے درمیان فاصلے معلوم کرنے کے لئے ہم فیثا غورث کے مسئلے کا استعمال کریں گے؟ آیئے P اور Q سے بالترتیب x- محور پر عمود PR اور QS ڈالیں۔ P سے QS پر بھی عمود ڈالیں جو QS سے T پر ملے۔ تب R اور S کے مختصات ہیں بالترتیب (4,0) اور (6,0) اس لئے RS = 2 اکائیاں، ساتھ ہی OS=8 اور PR = 6 TS اکائیاں ہیں۔ اس لئے QT = 2 اکائیاں اور PT = RS = 2 اکائیاں۔



شکل 7.3

اب فیثا غورث کے مسئلے کو استعمال کرتے ہوئے ہمارے پاس ہے۔

$$PQ^2=PT^2+QT^2$$

$$=2^2+2^2=8$$

$PQ=2\sqrt{2}$ اکائیاں

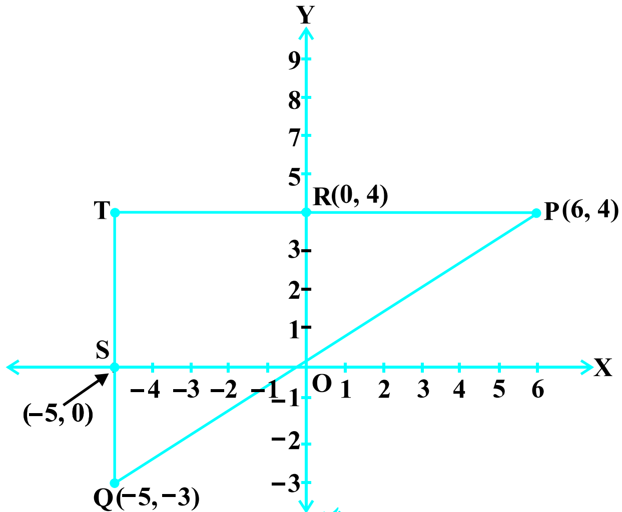
آپ دو مختلف ربعات میں موجود نقطوں کے درمیان فاصلہ کس طرح معلوم کریں گے؟

نقاط P(6,4) اور Q(–5,–3) (شکل 7.4) غور کیجئے۔ QS کے x– محور پر عمود ڈالئے۔ اور نقطہ P سے QS (بڑھانے پر) پر PT عمود ڈالئے جو y– محور کو نقطہ R پر ملے۔

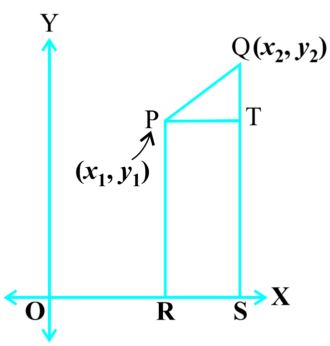
تب PT = 11 اکائیاں اور QT = 7 اکائیاں (کیوں؟)

قائم مثلث PTQ میں فیثا غورث کے مسئلے کا استعمال کرنے پر ہمیں ملتا ہے $PQ = \sqrt{11^2+7^2}=\sqrt{170}$ اکائیاں

آیئے اب کوئی سے دو نقطوں $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کے درمیان فاصلہ معلوم کرتے ہیں۔ PR اور QS x– محور پر عمود ڈالیں نقطہ P سے ایک عمود کھینچا گیا جو ایک نقطہ T پر ملتا ہے (شکل 7.5 دیکھئے)۔



شکل 7.4



شکل 7.5

تب $OR = x_1, OS = x_2$ اس لئے $RS = x_2 - x_1 = PT$

مزید $ST = PR = y_1, SQ = y_2$ اس لئے $QT = y_2 - y_1$

اب مثلث PTQ میں فیثا غورث کے مسئلے کا استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

اس لئے $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

نوٹ کیجئے کیونکہ فاصلہ ہمیشہ غیر منفی ہے اس لئے ہم ہمیشہ مثبت جذر المربع لیتے ہیں۔ اس لئے نقاط $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کے درمیان فاصلہ ہے۔

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

جو فاصلہ فارمولہ کہلاتا ہے۔

ریمارک:

1۔ مخصوص طور پر نقطہ $P(x,y)$ کا مبدا سے فاصلہ $O(0,0)$ ہوگا۔

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2۔ ہم یہ بھی لکھ سکتے ہیں $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (کیوں؟)

مثال 1: کیا نقاط (3,2) , (–2,–3) اور (2,3) ایک مثلث بناتے ہیں؟ اگر ہاں تو مثلث کی قسم معلوم کیجیے۔

حل: آیئے PQ , QR اور PR فاصلے معلوم کرنے کے لئے فاصلہ فارمولہ کا استعمال کرتے ہیں جہاں Q(–2, –3), P(3,2) اور R(2,3) دئے ہوئے نقاط ہیں۔ ہمارے پاس ہے۔

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07 \quad \text{(تقریباً)}$$

$$QR = \sqrt{(\ 2\ \ \ 2)^2 + (\ 3\ \ \ 3)^2} = \sqrt{(\ 4)^2 + (\ 6)^2} = \sqrt{52} = 7.21 \quad \text{(تقریباً)}$$

$$PR = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41 \quad \text{(تقریباً)}$$

کیونکہ ان میں کن ہی دو فاصلوں کا حاصل جمع تیسرے سے بڑا ہے اس لئے نقاط Q,P اور R ایک مثلث بنائیں گے۔

مزید $PQ^2 + PR^2 = QR^2$ فیثا غورث کے مسئلے کے معکوس کے مطابق ہمیں $\angle P = 90°$

اس لئے PQR ایک قائم مثلث ہے

مثال 2: دکھایئے کہ نقاط (1,7), (4,2)، (–1,–1) اور (–4,4) ایک مربع کے راس ہیں۔

حل: مان لیجئے A(1, 7), B(4, 2), C (–1, –1) اور D (– 4 ,4) دئے ہوئے نقطے ہیں۔ ABCD کو مربع دکھانے کا ایک طریقہ یہ ہے کہ چار اضلاع کو اور دونوں وتروں کو برابر دکھا دیں۔ اس لئے،

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 - (7-2)^2} = \sqrt{9 - 25} = \sqrt{34}$$

$$BC - \sqrt{(4-1)^2 + (2+1)^2} - \sqrt{25 + 9} - \sqrt{34}$$

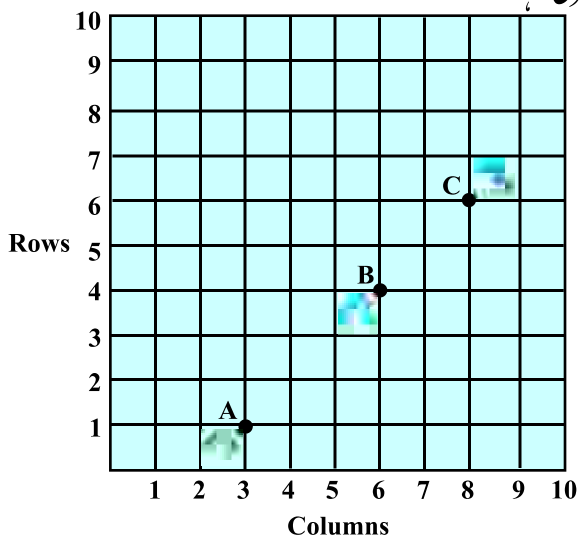
$$CD - \sqrt{(\ 1+4)^2 + (\ 1\ \ \ 4)^2} - \sqrt{9 - 25} - \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68}$$

$$BD - \sqrt{(4+4)^2 - (2-4)^2} - \sqrt{64 + 4} - \sqrt{68}$$

کیونکہ $AB = BC = CD = DA$ اور $AC = BD$، چار ضلعی ABCD کے تمام اضلاع برابر ہیں اور اس کے وتر AC اور BD بھی برابر ہیں اس لئے ABCD ایک مربع ہے۔



شکل 7.6

متبادل حل: ہم چار اضلاع اور ایک وتر معلوم کرتے ہیں جیسا کہ اوپر دکھایا گیا ہے۔ یہاں $AD^2 - DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$ اس لئے فیثا غورث کے مسئلہ کے معکوس کے مطابق $D = 90°$ کا ہوگا۔ اس لئے ایسا چار ضلعی جس کے چار اضلاع مساوی ہوں اور ایک زاویہ $90°$ کا ہو وہ مربع ہوتا ہے۔

مثال 3: شکل 7.6 ایک کلاس روم میں ترتیب دیے گئے ڈیسکوں کو دکھایا گیا ہے اشیما، بھارتی اور کا میلا بالترتیب $A(3, 1)$، $B(6, 4)$ اور $C(8,6)$ جگہ پر بیٹھی ہیں کیا آپ سوچ سکتے ہیں کہ یہ ایک ہی خط میں بیٹھی ہوئی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ بھی بتائیے۔

حل: فاصلہ فارمولہ استعمال کرنے پر ہمارے پاس ہے۔

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

کیونکہ $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$، تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ نقاط B,A اور C ہم خط ہیں۔ اس لئے وہ ایک ہی لائن میں بیٹھی ہوئی ہیں۔

مثال 4: x اور y میں ایک تعلق معلوم کیجئے جب کہ نقطہ (x,y) نقاط $(7,1)$ اور $(3,5)$ سے برابر فاصلہ پر واقع ہے۔

حل: مان لیجئے $P(x,y)$ نقاط $A(7,1)$ اور $B(3,5)$ سے مساوی فاصلہ پر ہے۔

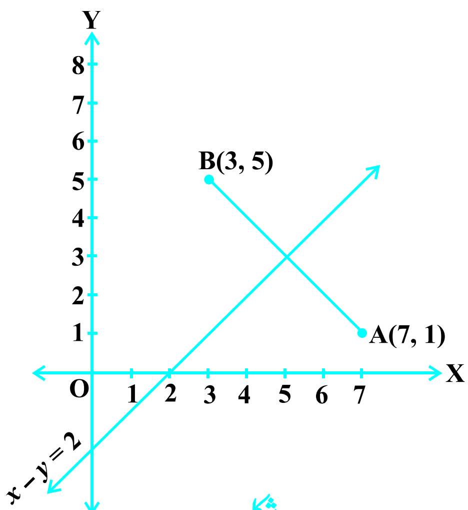
ہمیں دیا ہوا ہے کہ $AP = BP$ اس لئے $AP^2 = BP^2$

یعنی $$(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 - (y-5)^2$$

یعنی $$x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y - 1 - x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y - 25$$

یعنی $$x - y = 2$$

جو کہ مطلوبہ تعلق ہے۔



شکل 7.7

ریمارک: نوٹ کیجئے کہ مساوات $x - y = 2$ کا گراف ایک خط ہے آپ ایسے سابقہ مطالعہ سے یہ جانتے ہیں کہ ایک نقطہ جو A اور B سے مساوی فاصلہ پر ہوتا ہے AB کے عمودی ناصف پر واقع ہوتا ہے اس لئے $x-y=2$ کا گراف کا عمودی ناصف ہے۔

مثال 5: y-محور پر ایک نقطہ معلوم کیجئے جو نقاط $A(6,5)$ اور $B(-4,3)$ سے مساوی فاصلہ پر ہے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ y-محور پر کوئی نقطہ $(0,y)$ کی شکل میں ہوتا ہے۔ اس لئے مان لیجئے نقطہ $P(0,y)$، A اور B سے مساوی فاصلہ پر ہے۔ تب

$$(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$$

یعنی $$36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$$

یعنی $$4y = 36$$

یعنی $$y = 9$$

اس لئے مطلوبہ نقطہ ہے $(0,9)$۔

آیئے اپنے جواب کی جانچ کریں:

$$AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

$$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

نوٹ: مندرجہ بالا ریمارک کو استعمال کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ (0,9) y – محور اور AB کے عمودی ناصف کا تقاطع ہے۔

مشق 7.1

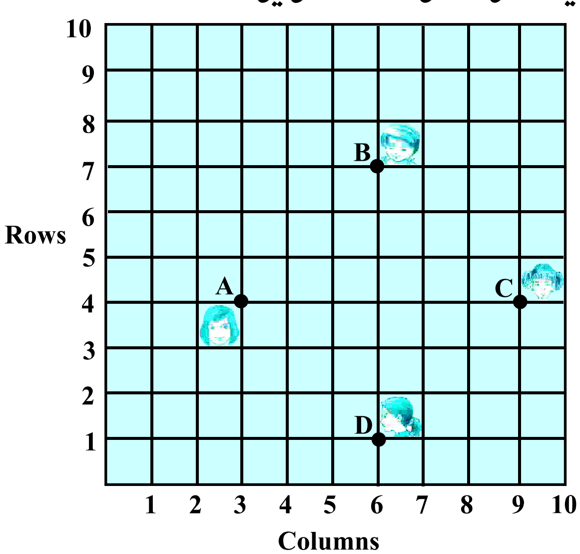
1۔ مندرجہ ذیل نقاط کے جوڑوں کے درمیان فاصلہ معلوم کیجئے

(i) (2, 3), (4, 1) (ii) (– 5, 7), (– 1, 3) (iii) (a, b), (– a, – b)

2۔ نقاط (0,0) اور (36,15) کے درمیان فاصلہ معلوم کیجئے کیا اب آپ سیکشن 7.2 میں لئے گئے دو شہروں A اور B کے درمیان فاصلہ معلوم کر سکتے ہیں۔

3۔ معلوم کیجئے کہ نقاط (1,5)، (2,3) اور (–2,–11) ہم خط ہیں۔

4۔ جانچ کیجئے کہ آیا (5,–2)، (6,4) اور (7,–2) ایک مساوی الساقین مثلث کے راس ہیں۔



شکل 7.8

5۔ ایک کلاس روم میں 4 دوست نقاط A , B ، C اور D پر بیٹھے ہیں جیسا کہ شکل 7.8 میں دکھایا گیا ہے۔ چمپا اور چمیلی کلاس کے اندر آئی ہیں اور کچھ منٹوں تک مشاہدہ کرنے کے بعد چمپا چمیلی سے پوچھتی ہے تمہیں نہیں لگتا کہ ABCD ایک مربع ہے؟ چمیلی اس بات کو نہیں مانتی۔ فاصلہ فارمولہ سے معلوم کیجئے کہ ان میں سے کون صحیح ہے۔

6۔ مندرجہ ذیل نقاط سے بنے چار ضلعی کس قسم کے ہیں۔ اپنے جواب کی وجوہات بھی دیجئے۔

(i) (– 1, – 2), (1, 0), (– 1, 2), (– 3, 0)

(ii) (–3, 5), (3, 1), (0, 3), (–1, – 4)

(iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

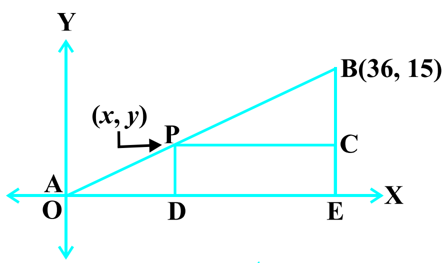
7۔ x- محور پر وہ نقطہ معلوم کیجیے جو $(2, -5)$ اور $(-2,9)$ سے مساوی فاصلہ پر ہو۔

8۔ y کی وہ قدر معلوم کیجیے جس کے لئے نقاط $P(2, -3)$ اور $Q(10,y)$ کے درمیان فاصلہ 10 اکائیاں ہیں۔

9۔ اگر $Q(0.1)$، $P(5,-3)$ اور $P(x,6)$ سے مساوی فاصلہ پر ہو تو x کی قدر معلوم کیجیے اور QR اور PR کے فاصلہ بھی معلوم کیجیے۔

10۔ x اور y کے درمیان رشتہ معلوم کیجیے جب کہ نقطہ (x,y) نقاط $(3,6)$ اور $(-3,4)$ سے مساوی فاصلہ پر ہے۔

7.3 سیکشن فارمولہ



شکل 7.9

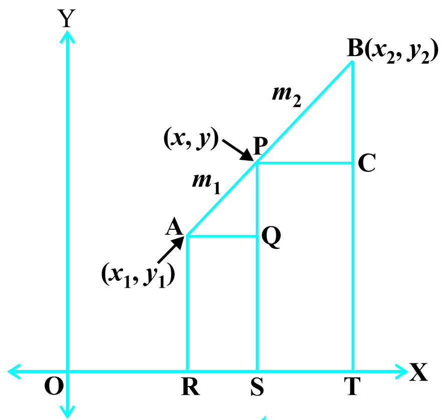
آیئے سیکشن 7.2 میں دی گئی صورت حال کو دہراتے ہیں۔ ٹیلیفون کی ایک کمپنی A اور B کے درمیان ایک نشریات ٹاور P پر اس طرح قائم کرنا چاہتی ہے کہ ٹاور P کا B سے فاصلہ ٹاور P کا A سے فاصلہ کا دگنا ہو۔ اگر P، AB پر واقع ہے تو یہ AB کو 1:2 کی نسبت میں بانٹے گا۔ (شکل 7.9 دیکھئے) اگر ہم A کو مبدا O کے طور پر لے لیں، 1 کلومیٹر کو دونوں محوروں پر ایک اکائی کے طور پر لیں، تو B کے مختصات ہوں گے (36,15): ٹاور کا مقام معلوم کرنے کے لئے ہمیں نقطہ P کے مختصات معلوم کرنا ضروری ہے۔ ہم یہ مختصات کیسے معلوم کریں گے۔

مان لیجئے P کے مختصات (x,y) ہیں۔ P اور B سے x- محور پر عمود کھینچیں جو بالترتیب D اور E نقطہ پر ملتے ہوں، BE, PC پر عمود ڈالیں تب مشابہت کی AA شرط کے مطابق جو آپ نے باب 6 میں پڑھی ہے، Δ POD اور Δ BPC مشابہ ہوں گے۔

اس لئے $\dfrac{OD}{PC} = \dfrac{OP}{PB} = \dfrac{1}{2}$ اور $\dfrac{PD}{BC} = \dfrac{OP}{PB} = \dfrac{1}{2}$

اس لئے $\dfrac{x}{36-x} = \dfrac{1}{2}$ اور $\dfrac{y}{15-y} = \dfrac{1}{2}$

ان مساواتوں سے $x = 12$ اور $y = 5$ حاصل ہوتا ہے۔ آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ $P(12,5)$ شرط $OP : PB = 1:2$ کو مطمئن کرتا ہے۔



شکل 7.10

اس مثال سے جو آپ نے سمجھا ہے اس کو استعمال کرتے ہوئے ہم ایک عمومی فاصلہ معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

کوئی دو نقطے $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ پر غور کیجیے اور فرض کیجیے کہ $P(x,y)$، AB کو داخلی طور پر $m_1 : m_2$ کی نسبت میں بانٹتا ہے یعنی $\frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$ (شکل 7.10 دیکھئے)

PS, AR اور BT، x–محور پر عمود ڈالئے، AQ اور PC، x–محور کے متوازی کھینچئے۔ تب مشابہت کی AA شرط کے مطابق

$$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$$

$$\frac{PA}{BP} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC}$$

$$AQ = RS = OS - OR = x - x_1$$

$$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$$

$$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$$

$$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$$

ان قدروں کو (1) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$

اسی طرح سے $\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$ لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $y = \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 + m_2}$

اس لئے نقطہ P(x,y) کے مختصات جو نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے قطع خط کو داخلی طور پر $m_1 : m_2$ کی نسبت میں بانٹا ہیں

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

یہ سیکشن فارمولہ کہلاتا ہے۔

اس کو ہم A , P اور B سے y– محور پر عمود ڈال کر بھی پہلے ہی کی طرح اخذ کر سکتے ہیں۔

اگر وہ نسبت جس میں P ,AB کو بانٹتا ہے، $k : 1$ لیے تب نقطہ P کے مختصات ہوں گے۔

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1}\right).$$

مخصوص حالت: ایک قطع خط کا وسطی نقطہ، قطع خط کو $1 : 1$ کی نسبت میں بانٹتا ہے، اس لئے نقاط $A(x_1, y_2)$ اور

$$\left(\frac{1\cdot x_1 + 1\cdot x_2}{1+1}, \frac{1\cdot y_1 + 1\cdot y_2}{1+1}\right) - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

آیئے اس فارمولہ پر منحصر چند مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 6: اس نقطہ کے مختصات معلوم کیجئے جو نقاط $(4, -3)$ اور $(8, 5)$ کو ملانے والے قطع خط کو داخلی طور پر $3 : 1$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

حل: مان لیجئے $P(x,y)$ مطلوبہ نقطہ ہے، سیکشن فارمولہ کو استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x - \frac{3(8) + 1(4)}{3 - 1} - 7 ، \quad y = \frac{3(5) + 1(-3)}{3 - 1} = 3$$

اس لئے $(7,3)$ مطلوبہ نقطہ ہے۔

مثال 7: نقطہ $(-4,6)$، نقاط $A(-6,10)$ اور $B(3,-8)$ کو ملانے والے قطع خط کو کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے؟

حل: مان لیجئے $(-4,6)$ AB کو داخلی طور پر $m_1 : m_2$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے، اس سیکشن فارمولہ کو استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}\right) \qquad (1)$$

یاد کیجئے کہ اگر $(x,y) = (a,b)$ تب $x = a$ اور $y = b$

اس لئے $-4 = \dfrac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ اور $6 = \dfrac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 - m_2}$

اب $-4 = \dfrac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ سے ملتا ہے

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

یعنی $7m_1 = 2m_2$

یعنی $m_1 : m_2 = 2 : 7$

اب تصدیق کر سکتے ہیں کہ نسبت y- مختص کو بھی مطمئن کرے گی۔

اب $\dfrac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{-8\dfrac{m_1}{m_2} + 10}{\dfrac{m_1}{m_2} + 1}$ دونوں طرف m_2 سے تقسیم کرنے پر

$$= \frac{-8 \times \dfrac{2}{7} + 10}{\dfrac{2}{7} + 1} = 6$$

اس لئے نقطہ $(-4,6)$ نقاط $A(-6,10)$ اور $B(3,-8)$ کو ملانے والے قطع خط کو $2:7$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

متبادل طور پر نسبت $m_1 : m_2$ کو $\dfrac{m_1}{m_2} : 1$، یا $k : 1$ کی طرح بھی لکھا جا سکتا ہے۔ مان لیجئے

$$(-4,6) = \left(\frac{3k - 6}{k + 1}, \frac{-8k + 10}{k + 1}\right)$$

اس لئے $-4 = \dfrac{3k - 6}{k + 1}$

یعنی $-4k - 4 = 3k - 6$

یعنی $7k = 2$

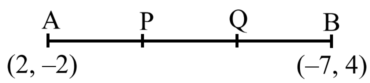
یعنی $k : 1 = 2 : 7$

آپ y- مختص کے لئے بھی جانچ کر سکتے ہیں۔

اس لئے نقطہ $(-4,6)$ نقاط $A(-6,10)$ اور $B(3,-8)$ کو ملانے والے قطع خط کو $2:7$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے

نوٹ: آپ اس نسبت کو PA اور PB کو معلوم کر کے اور ان کی نسبت لے کر معلوم کر سکتے ہیں ۔ یہ جب ہی ممکن ہے جب P,A اور B ہم خط ہوں۔

مثال 8: اس قطع خط کے نقطہ تثلیث (trisection) (نقطہ جو قطع خط کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں) کے مختصات معلوم کیجئے جس کے سرے کے نقطے $A(2, -2)$ اور $B(-7,4)$ ہوں۔



شکل 7.11

حل: مان لیجئے P اور Q، AB کے نقطہ تثلیث ہیں یعنی $AP = PQ = QB$ (شکل 7.11 دیکھئے)

اس لئے P، AB کو داخلی طور پر $2 : 1$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ اس لئے P کے مختصات، سیکشن فارمولہ کو استعمال کرنے پر ہیں،

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1-2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right) \text{ یعنی } (-1,0)$$

اب Q بھی AB کو داخلی طور پر $1 : 2$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ اس لئے Q کے مختصات ہیں۔

$$\left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right) \text{ یعنی } (-4,2)$$

اس لئے نقاط A اور B کو ملانے والے قطع خط کے نقطہ تثلیث کے مختصات ہیں $(-1,0)$ اور $(-4,2)$

نوٹ: ہم Q کو PB کے وسطی نقطہ کے طور پر حاصل کر سکتے ہیں اور پھر ہم وسطی نقطہ کے فارمولہ کو استعمال کر کے اس کے مختصات معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال 9: وہ نسبت معلوم کیجئے جس میں y- محور نقاط $(5,-6)$ اور $(-1,-4)$ کو ملانے والے قطع خط کو تقسیم کرتا ہے۔ نقطہ تقاطع بھی معلوم کیجئے۔

حل: مان لیجئے کی نسب $k : 1$ ہے تب سیکشن فارمولہ کی رو سے اس نقطہ کے مختصات جو AB کو $k : 1$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے ہیں $\left(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1}\right)$.

یہ نقطہ y- محور پر واقع ہے اور ہم جانتے ہیں کہ y- محور ہر طولی مختص (abscissa) 0 ہے۔

اس لئے $$\frac{-k+5}{k+1} = 0$$

اس لئے $$k = 5$$