

8

ٹرگنومیٹری کا تعارف

(INTRODUCTION TO TRIGNOMETRY)

شاید ایسی کوئی چیز نہیں جو ریاضی میں وہ مرکزی اہمیت رکھتی ہو جو ٹرگنومیٹری کی ہے۔

جے۔ ایف۔ ہبرٹ (1980)

8.1 تعارف

آپ سابقہ کلاسوں میں مثلثوں اور خاص طور سے قائم مثلثوں کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ آئیے اپنے گرد و نواح سے کچھ ایسی مثالیں لیں جہاں قائم مثلثوں کو تصور کیا جاسکتا ہو۔ مثال کے طور پر:

1- مان لیجئے اسکول کے کچھ طلباء قطب مینار گھومنے گئے، اگر

کوئی طالب علم مینار کے اوپری حصہ کو دیکھتا ہے، تو ایک

قائم مثلث کا تصور ابھر کر سامنے آتا ہے۔ جیسا کہ شکل

8.1 میں دکھایا گیا ہے۔ کیا وہ طالب علم بغیر پیمائش کئے

ہوئے مینار کی اونچائی معلوم کر سکتا ہے۔

2- فرض کیجئے ایک لڑکی دریا کے کنارے پر واقع اپنے مکان

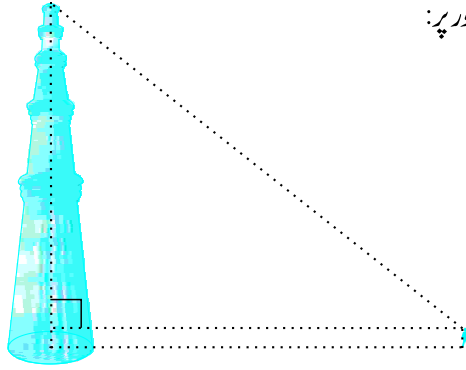
کی بالکنی میں بیٹھی ہوئی ہے۔ وہ نیچے کی طرف ایک

پھولوں کے گلمے کو دیکھ رہی ہے جو دریا کے دوسرے

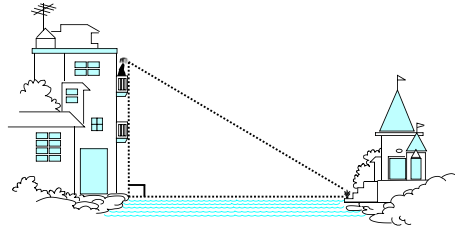
کنارے پر واقع ایک مندر کی سیڑھیوں پر رکھا ہوا ہے

اس صورت حال میں بھی قائم مثلث کی تشکیل تصور کی جا

سکتی ہے جیسا کہ شکل 8.2 میں دکھایا گیا ہے۔ اگر آپ وہ

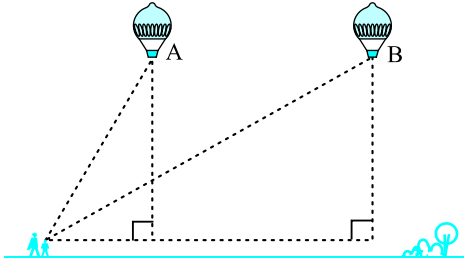


شکل 8.1



شکل 8.2

اونچائی جانتے ہوں جہاں پر وہ لڑکی بیٹھی ہے تو کیا آپ دریا کی چوڑائی معلوم کر سکتے ہیں۔



شکل 8.3

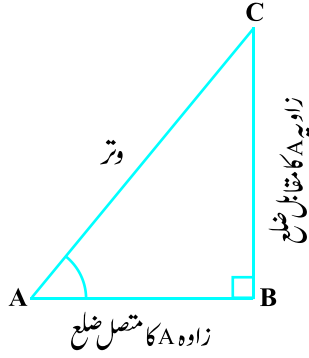
3۔ مان لیجئے گرم ہوا والا غبارہ ہوا میں اڑ رہا ہے ایک لڑکی اس غبارہ کو آسمان میں دیکھتی ہے اور اپنی ماں کے پاس دوڑ کر جاتی ہے اور اسکو اس کے بارے میں بتاتی ہے۔ اس کی ماں بھی تیزی سے مکان کے باہر آ کر اس غبارے کو دیکھتی ہے، جب لڑکی پہلے اس کو دیکھتی ہے تو وہ نقطہ A پر تھا جب وہ اپنی ماں کے ساتھ باہر آ کر اس کو دیکھتی ہے تو وہ اڑتا ہوا نقطہ B پر پہنچ جاتا ہے۔ کیا آپ B کا زمین سے ارتفاع معلوم کر سکتے ہیں؟

اوپر دی گئی تمام صورت حال میں فاصلہ اور بلندیاں کسی ریاضی کی تکنیک سے معلوم کئے جاسکتے ہیں جو ریاضی کی ایک شاخ کے تحت آتی ہے جسے ٹرگنومیٹری کہتے ہیں۔ لفظ ٹرگنومیٹری ایک یونانی لفظ ٹری (جس کا مطلب تین ہے) اور گون (جس کا مطلب اضلاع) اور میٹری (جس کا مطلب پیمائش)۔ درحقیقت ٹرگنومیٹری مثلث کے اضلاع اور زاویوں کے تعلق کے مطالعہ کا نام ہے۔ ٹرگنومیٹری کے سلسلہ میں سب سے پہلے کام مصر اور پیلو نیا میں ہوا۔ ماہر فلکیات نے اس کا استعمال زمین سے سیاروں اور ستاروں کے درمیان فاصلہ معلوم کرنے کے لئے کیا۔ اور آج بھی انجینئرنگ، فزیکل سائنس میں استعمال ہونے والے زیادہ تر تکنیکی طور پر جدید طریقوں کی بنیاد ٹرگنومیٹری کا تصور ہے۔

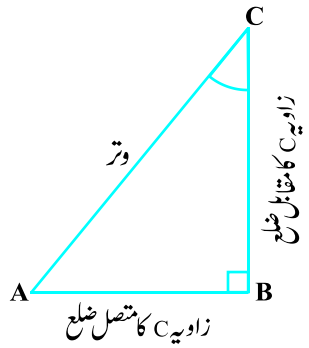
اس باب میں ہم قائم مثلث اس کے حادہ زاویوں اور اضلاع کی کچھ نسبتوں کے بارے میں پڑھیں گے جو زاویوں کی ٹرگنومیٹری نسبتیں کہلاتی ہیں۔ ہم اپنے مطالعہ کو صرف حادہ زاویوں تک محدود رکھیں گے۔ حالانکہ ان نسبتوں کی توسیع دوسرے زاویوں تک بھی ہو سکتی ہے۔ ہم 0° اور 90° کی پیمائش کے زاویوں کی ٹرگنومیٹری نسبتوں کی تعریف بھی بیان کریں گے ہم کچھ مخصوص زاویوں کی ٹرگنومیٹری نسبتیں معلوم کریں گے اور ان نسبتوں پر مبنی کچھ تمارنات معلوم کریں گے جن کو ٹرگنومیٹری تمارنات کہتے ہیں۔

8.2 ٹرگنومیٹرک نسبتیں

سیکشن 8.1 میں آپ نے مختلف صورت حال میں تصور کئے گئے قائم مثلثوں کو دیکھا۔



شکل 8.4



شکل 8.5

آئیے ایک قائم مثلث ABC لیجئے جیسا کہ شکل 8.4 میں دکھایا گیا ہے۔

یہاں $\angle CAB$ (یا مختصراً زاویہ A) ایک حادہ زاویہ ہے۔ زاویہ A کی مناسبت سے ضلع BC کا مقام نوٹ کیجئے۔ یہ DA کے سامنے ہے ہم اس کو A کے مقابل ضلع کہتے ہیں۔ AC قائم مثلث کا وتر ہے۔ اور ضلع AB، کا ایک بازو ہے۔ اس لئے ہم اس کو A کا متصل ضلع کہتے ہیں۔

نوٹ کیجئے کہ اضلاع کا مقام تبدیل ہو جاتا ہے جب $\angle A$ کی جگہ $\angle C$ پر غور کرتے ہیں (شکل 8.5)

آپ اپنے سابقہ کلاسوں میں نسبت کے تصور کے بارے میں پڑھا ہے۔ اب ہم مخصوص نسبتوں جن میں قائم زاویہ مثلث کے اضلاع ملوث ہوں، کی تعریف بیان کریں گے اور ان کو ٹرگنومیٹرک نسبتوں کا نام دیں گے۔

ٹرگنومیٹرک نسبتیں ایک قائم مثلث ABC کے زاویہ A کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں مندرجہ میں معرف ہیں۔

$$\text{sine کا } \angle A = \frac{\text{زاویہ A کے مقابل ضلع}}{\text{وتر}}$$

$$\text{cosine کا } \angle A = \frac{\text{زاویہ A کے متصل ضلع}}{\text{وتر}}$$

$$\text{tangent کا } \angle A = \frac{\text{زاویہ A کے مقابل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{cosecant کا } \angle A = \frac{1}{\text{Sine کا } \angle A} = \frac{\text{وتر}}{\text{زاویہ A کے مقابل ضلع}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\text{secant کا } \angle A = \frac{1}{\text{Cosine کا } \angle A} = \frac{\text{وتر}}{\text{زاویہ A کے متصل ضلع}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{\text{متصل ضلع}}{\text{زاویہ A کا مقابل ضلع}}$$

نسبتیں جو اوپر معروف کی گئی ہیں ان کی مختصر بالترتیب شکل ہے $\sin A, \cos A, \tan A, \text{cosec } A, \sec A$ اور $\cot A$ ۔
نوٹ کیجئے کہ نسبتیں $\text{Cosec } A, \sec A, \cot A$ بالترتیب $\sin A, \cos A, \tan A$ کی مقلوب نسبتیں ہیں۔
مزید مشاہدہ کیجئے۔

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sin A}{\cos A} \text{ اور } \tan A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

اس طرح سے قائم زاوی مثلث میں ایک حادہ زاویہ کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں زاویہ اور اس کے اضلاع کے درمیان ایک تعلق کو ظاہر کرتی ہیں۔

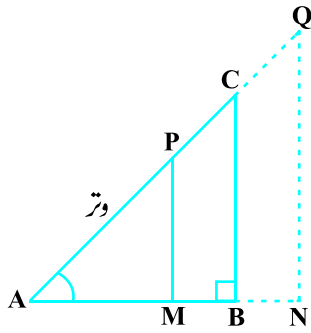
آپ قائم زاوی مثلث میں زاویہ C کی ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی تعریف بیان کرنے کی کوشش کیوں نہیں کرتے؟
(شکل 8.5 دیکھئے)



آریہ بھٹ
A.D. 476 – 550

جس طریقہ سے 'sine' کا استعمال اب ہم کرتے ہیں سب سے اس کا اسی طریقہ سے استعمال آریہ بھٹ کی تصنیف آریہ بھٹم میں 500 عیسوی میں کیا گیا ہے۔ آریہ بھٹ نے نصف وتر کے لئے لفظ اردھا۔ جیسا استعمال کیا ہے جو آگے چل کر مختصراً جیوا اور جیوا ہو گیا جب آریہ بھٹم کا ترجمہ عربی میں ہوا تو جیوا کا جیوا ہی ترجمہ کیا گیا۔ جب عربی کے ترجمہ کو لاطینی زبان میں ترجمہ کیا گیا تو جیوا کو sine کہا گیا۔ اور جلد ہی sine; sinus کے طور پر استعمال ہونے لگا۔ اور یورپ میں ہر جگہ ریاضی کی کتابوں میں sine ہی استعمال ہونے لگا، انگلینڈ کے ایک ماہر فلکیات کے پروفیسر (Edmund Guter) (1581-1626) نے سب سے پہلے اس کی مختصر شکل sin کو استعمال کیا۔

ارکان \cos اور \tan کی ابتدا بہت میں ہوئی، ممتی زاویہ کا sine معلوم کرنے کے سلسلہ میں \cos تفاعل کا وجود ہوا۔ آریہ بھٹ نے اسے kotijiya کہا اور Edmmd نے اسے \cosim کا نام دیا۔ 1974 میں سب سے پہلے انگریز ریاضی دان سر جان موری (Sir Jones Moore) اس کو اس کی مختصر ترین شکل \cos میں استعمال کیا۔



شکل 8.6

ریمارک: نوٹ کیجئے کہ علامت $\sin A$ ، زاویہ A کے sine کی مختصر شکل

ہے۔ $\sin A$ کا A سے علیحدہ کوئی مطلب نہیں ہے۔ $\sin A$ اور $\sin A$ کا حاصل ضرب نہیں ہے اسی طرح $\cos A$ اور $\cos A$ کا حاصل ضرب نہیں ہے۔ یہی ترجمانی باقی تمام ٹرگنومیٹرک نسبتوں کے لئے ہے۔

اب اگر ہم ایک قائم مثلث کے وتر AC پر ایک نقطہ P لیں یا AC کو بڑھانے پر اس پر نقطہ Q لیں اور PM ، AB پر اور QN بڑھتے ہوئے AB پر عمود ڈالیں (شکل 8.6 دیکھیں) تو $\triangle PAM$ میں $\angle A$ کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں کس طرح مختلف ہوں گی۔ $\triangle CAB$ میں $\angle A$ کی یا $\triangle QAN$ میں $\angle A$ کی نسبتوں سے؟

اس کا جواب دینے کے لئے سب سے پہلے ان مثلثوں کو دیکھئے، کیا $\triangle CAB$ ، $\triangle PAM$ کے مشابہ ہے؟ یاد کیجئے آپ نے باب 6 میں AA مشابہت کی شرط کے بارے میں پڑھا تھا۔ آپ دیکھیں گے کہ مثلث PAM اور CAB مشابہ ہیں۔ اس لئے مشابہ مثلثوں کی خصوصیت کے مطابق، مثلثوں کے نظیری اضلاع متناسب ہوں گے۔

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC} \quad \text{اس لئے ہمارے پاس ہے۔}$$

$$\frac{MP}{AP} = \frac{BC}{AC} = \sin A \quad \text{اس سے ہمیں ملتا ہے}$$

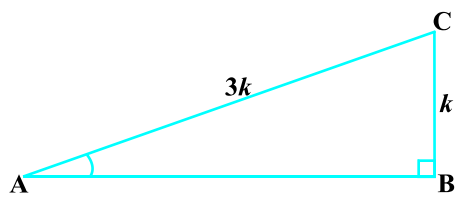
$$\text{اسی طرح سے} \quad \frac{AM}{AP} = \frac{AB}{AC} = \cos A, \quad \frac{MP}{AM} = \frac{BC}{AB} = \tan A$$

اس سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ $\triangle PAM$ میں زاویہ A کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں مثلث CAB میں زاویہ A کی نسبتوں سے مختلف نہیں ہیں۔

اسی طرح سے آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ $\sin A$ کی قدر (اور دوسری ٹرگنومیٹری نسبتیں بھی) $\triangle QAN$ میں بھی یکساں ہیں۔ اپنے مشاہدہ سے یہ واضح ہو گیا کہ مثلث کے زاویہ (حادثہ) کی ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی قدر اس کے اضلاع کی لمبائیوں کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتیں۔ اگر زاویہ وہی ہے۔

نوٹ: اپنی آسانی کے لئے آپ $\sin^2 A$ ، $\cos^2 A$ کی جگہ $(\sin A)^2$ ، $(\cos A)^2$ وغیرہ لکھ سکتے ہیں لیکن

آئندہ کلاسوں میں پڑھیں گے، یہی بات باقی تمام ٹرگنومیٹرک نسبتوں کے لئے درست ہے ہم حادہ زاویہ کی چھ ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی تعریف کی۔ اگر ہمیں ان میں سے ایک کا علم ہو تو کیا ہم دوسری نسبتیں معلوم کر سکتے ہیں؟ آئیے دیکھتے ہیں۔



شکل 8.7

اگر ایک قائم مثلث ABC میں $\sin A = \frac{1}{3}$ ، تب اس کا مطلب ہے $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$ یعنی مثلث ABC کے اضلاع BC، AC کے برابر ہوں گے، جہاں k کوئی مثبت عدد ہے۔ زاویہ A کی دوسری ٹرگنومیٹرک نسبت معلوم کرنے کے لئے لے ہمیں تیسرے ضلع AB کی لمبائی معلوم کرنا ہوگی۔ کیا آپ کو فیثاغورث کا مسئلہ یاد ہے؟ آئیے اس کا استعمال کر کے مطلوبہ AB کی لمبائی معلوم کرتے ہیں۔

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (3k)^2 - (k)^2 = 8k^2 = (2\sqrt{2}k)^2$$

$$AB = \pm 2\sqrt{2}k \quad \text{اس لئے}$$

$$AB = 2\sqrt{2}k \quad \text{اس لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے (کیونکہ } AB \neq -2\sqrt{2}k \text{)}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{اب}$$

اسی طرح سے آپ زاویہ A کی دوسری ٹرگنومیٹرک نسبتیں معلوم کر سکتے ہیں۔

ریمارک: کیونکہ ایک قائم مثلث میں وتر سب سے بڑا ضلع ہوتا ہے اس لئے $\sin A$ اور $\cos A$ کی قدر ہمیشہ 1 سے کم

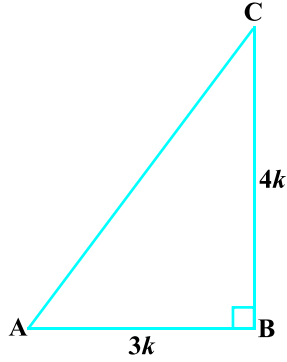
ہوتی ہے (یا مخصوص حالت میں 1 کے برابر)

آئیے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں

مثال 1: $\tan A = \frac{4}{3}$ دیا ہوا ہے۔ زاویہ A کی باقی ٹرگنومیٹرک نسبتیں معلوم کیجئے۔

حل: سب سے پہلے ایک قائم زاوی مثلث ABC بنائیے (دیکھئے شکل 8.8)

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3} \quad \text{اب ہم جانتے ہیں کہ}$$



شکل 8.8

اس لئے اگر $BC = 4k$ تب $AB = 3k$ جہاں k ایک مثبت عدد ہے۔

اب فیثا غورث کے مسئلے کے مطابق ہمارے پاس ہے۔

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2$$

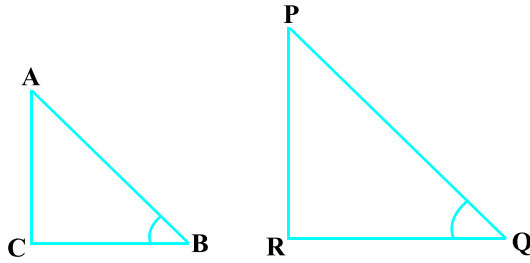
$$AC = 5k$$

اب ہم باقی ٹرگنومیٹرک نسبتوں کو ان کی تعریف استعمال کر کے لکھ سکتے ہیں۔

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{3} \text{ اور } \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{4}, \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{3}{4} \text{ اس لئے}$$



شکل 8.9

مثال 2: اگر $\angle B$ اور $\angle Q$ حادہ زاویہ ہیں جب کہ

$$\sin B = \sin Q \text{ تب ثابت کیجئے کہ } \angle B = \angle Q$$

حل: دو قائم مثلثیں ABC اور PQR پر غور کریں

جہاں $\sin B = \sin Q$ (شکل 8.9 دیکھئے)

ہمارے پاس ہے

$$\sin B = \frac{AC}{AB}$$

$$\sin Q = \frac{PR}{PQ}$$

اور

$$\frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}$$

تب

$$(1) \quad \frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = k$$

اس لئے

اب فیثا غورث مسئلے کو استعمال کرنے پر،

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

$$QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2} \quad \text{اور}$$

$$(2) \frac{BC}{QR} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{\sqrt{k^2 PQ^2 - k^2 PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{k \sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = k \quad \text{اس لئے}$$

(1) اور (2) سے ہمیں ملتا ہے۔

$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

تب مسئلہ 6.4 کو استعمال کرنے پر $\triangle ACB \sim \triangle PRQ$ اور اس لئے $\angle B = \angle Q$

مثال 3: مثلث ACB پر غور کیجئے جو C پر قائم ہے جس میں AB

$$\angle ABC = \theta \quad \text{اور} \quad BC = 21 \text{ units} \quad \therefore \quad AB = 29 \text{ units}$$

(شکل 8.10 دیکھئے)۔ قدر معلوم کیجئے۔

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \quad (i)$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (ii)$$

حل: ABC میں D ہمارے پاس ہے

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

$$= \sqrt{(29 - 21)(29 + 21)} = \sqrt{(8)(50)} = \sqrt{400} = 20 \text{ units}$$

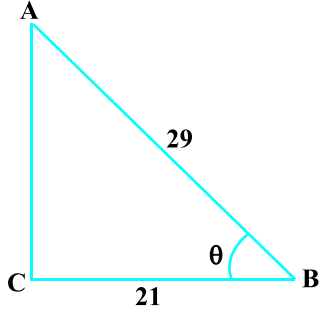
$$\sin \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{29}, \quad \cos \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{29} \quad \text{اس لئے}$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 - \left(\frac{21}{29}\right)^2 = \frac{20^2 - 21^2}{29^2} = \frac{400 - 441}{841} = -\frac{41}{841} \quad (i) \text{ اب}$$

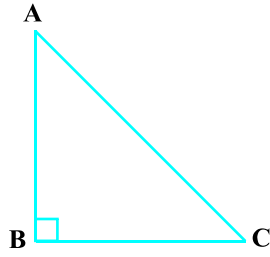
$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 + \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{(21 - 20)(21 + 20)}{29^2} = \frac{41}{841} \quad (ii) \text{ اور}$$

مثال 4: ایک قائم مثلث ABC جو B زاویہ پر قائم ہے، میں اگر $\tan A = 1$ تب تصدیق کیجئے کہ $2 \sin A \cos A = 1$

$$\text{حل: } \triangle ABC \text{ میں } \tan A = \frac{BC}{AB} = 1 \quad (\text{شکل 8.11 دیکھئے})$$



شکل 8.10



شکل 8.11

$$BC = AB \quad \text{یعنی}$$

آئیے

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

اب

$$= \sqrt{(k)^2 + (k)^2} = k\sqrt{2}$$

$$\text{اس لئے } \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{اس لئے } \sin A \cos A = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1,$$

مثال 5: ΔOPQ میں جو P پر قائم زاویہ ہے 7 سینٹی میٹر = OP اور 1 سینٹی میٹر = PQ = OO (شکل 8.12 دیکھئے)۔ $\sin Q$

اور $\cos Q$ کی قدر معلوم کیجئے۔

حل: ΔOPQ میں ہمارے پاس ہے

$$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$$

$$(کیوں) \quad (1+PQ)^2 = OP^2 + PQ^2$$

یعنی

$$1 + PQ^2 + 2PQ = OP^2 + PQ^2$$

یعنی

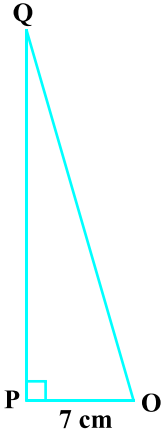
$$(کیوں) \quad 1 + 2PQ = 7^2$$

یعنی

$$24 = 2PQ \quad \text{24 سینٹی میٹر = PQ اور 25 سینٹی میٹر = OQ}$$

اس لئے

$$\cos Q = \frac{24}{25} \quad \text{اور} \quad \sin Q = \frac{7}{25}$$



شکل 8.12

مشق 8.1

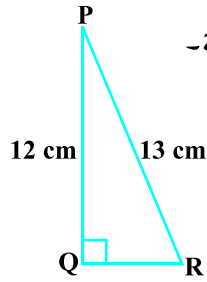
1- قائم ΔABC میں جو B زاویہ پر قائم ہے۔ 24 سینٹی میٹر = AB، 7 سینٹی میٹر = BC معلوم کیجئے۔

$$\sin A, \cos A \quad (i)$$

$$\sin C, \cos C \quad (ii)$$

2- شکل 8.13 میں $\tan P - \cot R$ معلوم کیجئے۔

3- اگر $\sin A = \frac{3}{4}$ تو $\cos A$ اور $\tan A$ کی قدر معلوم کیجئے۔



شکل 8.13

$$4- \quad 15 \cot A = 8 \text{ دیا ہوا ہے، } \sin A \text{ اور } \sec A \text{ معلوم کیجئے}$$

$$5- \quad \sec \theta - \frac{13}{12} \text{ دیا ہوا ہے، باقی تمام ٹرگنومیٹرک نسبتیں معلوم کیجئے۔}$$

$$6- \quad \text{اگر } \angle A \text{ اور } \angle B \text{ حادہ زاویہ ہیں جبکہ } \cos A = \cos B \text{ تب دکھائیے کہ } \angle A = \angle B$$

$$7- \quad \text{اگر } \cot \theta = \frac{7}{8} \text{، قدر معلوم کیجئے: (i) } \frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} \text{، (ii) } \cot^{-1} \theta$$

$$8- \quad \text{اگر } 3 \cot A = 4 \text{ جانچ کیجئے کہ } \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A \text{ ہے یا نہیں۔}$$

$$9- \quad \text{مثلث } ABC \text{ جو } B \text{ پر قائم ہے، میں اگر } \tan A = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{، تو قدر معلوم کیجئے۔}$$

$$\sin A \cos C + \cos A \sin C \quad (\text{i})$$

$$\cos A \cos C - \sin A \sin C \quad (\text{ii})$$

$$10- \quad \Delta PQR \text{ جو } Q \text{ پر قائم زاویہ ہے، میں } PR + QR = 25 \text{ cm اور } PQ = 5 \text{ cm تو } \sin P, \cos P \text{ اور } \tan P \text{ کی قدر معلوم کیجئے۔}$$

$$11- \quad \text{بیان کیجئے کہ مندرجہ ذیل صحیح ہیں یا غلط۔ اپنے جواب کا جواز بھی پیش کیجئے۔}$$

$$\tan A \text{ کی قدر ہمیشہ } 1 \text{ سے کم ہوتی ہے۔}$$

$$\text{(ii) زاویہ } A \text{ کی قدر کے لئے } \sec A = \frac{12}{5} \text{ ہے۔}$$

$$\text{(iii) } \cos A \text{، زاویہ } A \text{ کے cosecant کی مختصر شکل ہے۔}$$

$$\text{(iv) } \cot A \text{ اور } A \text{ کا حاصل ضرب ہے۔}$$

$$\text{(v) کسی زاویہ } \theta \text{ کے لئے } \sin \theta = \frac{4}{3}$$

8.3 کچھ مخصوص زاویوں کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں

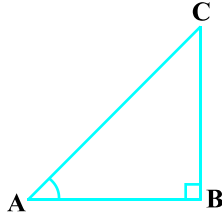
جیومیٹری میں آپ زاویوں 30° ، 45° ، 60° اور 90° کی تشکیل سے آپ پہلے ہی واقف ہیں۔ اس سیکشن میں آپ ان تمام

زاویوں کی ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی قدر معلوم کریں گے اس کے علاوہ 0° کی بھی

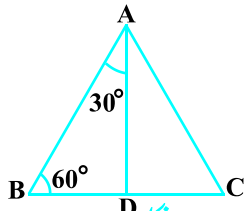
45° کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں

ΔABC جو B پر قائم ہے۔ اگر ایک زاویہ 45° ہے تب دوسرا زاویہ بھی 45° کا ہوگا یعنی $\angle A = \angle C = 45^\circ$ (شکل 8.14 دیکھئے)

اس لئے $BC = AB$ (کیوں؟)



شکل 8.14



شکل 8.15

اب فرض کیجئے $BC = AB = a$

تب فیثاغورث کے مسلہ کی رو سے $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

اور اس لئے $AC = a\sqrt{2}$

ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی تعریف کو استعمال کرنے پر ہمیں ملتا ہے:

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{زاویہ } 45^\circ \text{ کے مقابل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{زاویہ } 45^\circ \text{ کا متصل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cot 45^\circ = \frac{\text{زاویہ } 45^\circ \text{ کا مقابل ضلع}}{\text{زاویہ } 45^\circ \text{ کا متصل ضلع}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\text{مزید } \sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}, \quad \csc 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}, \quad \tan 45^\circ = 1$$

30° اور 60° کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں

آئیے اب 30° اور 60° کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں معلوم کرتے ہیں۔ ایک مساوی ضلعی مثلث

ABC پر غور کیجئے۔ کیونکہ اس کا ہر ایک زاویہ 60° کا ہے اس لئے، $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

ضلع BC پر A سے عمود D کھینچئے (شکل 8.15 دیکھئے)

اب $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (کیوں؟)

اس لئے $BD = DC$

اور $\angle BAD = \angle CAD$ (CPCT)

ΔABD ایک قائم مثلث ہے جو D پر قائم ہے جس میں $\angle BAD = 30^\circ$ اور $\angle ABD = 60^\circ$ (شکل 8.15 دیکھئے)

جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ ٹرگنومیٹرک نسبتیں معلوم کرنے کے لئے ہمیں مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں معلوم کرنے کی

ضرورت ہے۔ اس لئے اب فرض کیجئے کہ $AB = 2a$ ۔

تب $BD = \frac{1}{2} BC = a$

اور $AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$

$$AD = a\sqrt{3}$$

اس لئے

اب ہمارے پاس ہے:

$$\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2, \sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

مزید

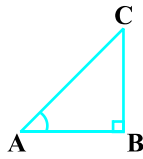
$$\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \tan 60^\circ = \sqrt{3},$$

اسی طرح سے

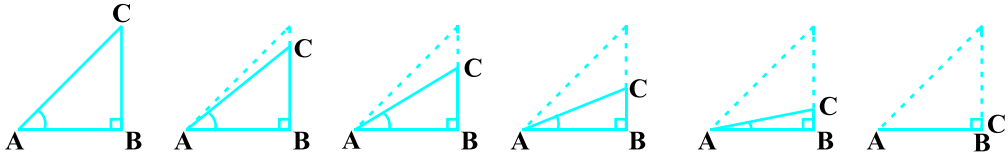
$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, \sec 60^\circ = 2 \text{ اور } \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

0° اور 90° کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں



شکل 8.16

آئیے اب دیکھتے ہیں کہ کسی قائم مثلث ABC میں زاویہ A کی ٹرگنومیٹرک نسبتوں پر کیا اثر پڑتا ہے جب ان کو چھوٹے سے چھوٹا کیا جائے جب تک یہ صفر نہ ہو جائیں۔ کیونکہ $\angle A$ چھوٹے سے چھوٹا ہو رہا ہے اس لئے BC کی لمبائی گھٹے گی۔ اور نقطہ C، نقطہ B کی نزدیک ہوگا، اور آخر میں جب $\angle A = 0^\circ$ کے بہت قریب ہو جائے گا۔ تو تقریباً AB کے برابر ہو جائے گا۔ (شکل 8.17 دیکھئے)



شکل 8.17

جب $\angle A = 0^\circ$ کے کافی نزدیک ہو تو BC، 0 کے نزدیک ہو جائے گا اس لئے $\sin A = \frac{BC}{AC}$ کی قدر 0 کے بہت

قریب ہو جائے گی۔ مزید جب $\angle A = 0^\circ$ کے نزدیک ہو تو AC تقریباً AB کے برابر ہوگا اور اس لئے $\cos A = \frac{AB}{AC}$ کی قدر 1

کے کافی نزدیک ہوگی۔

اس سے ہمیں مدد ملتی ہے کہ ہم کس طرح $\sin A$ اور $\cos A$ کی قدروں کی تعریف بیان کریں جب $A = 0^\circ$ ہم تعریف

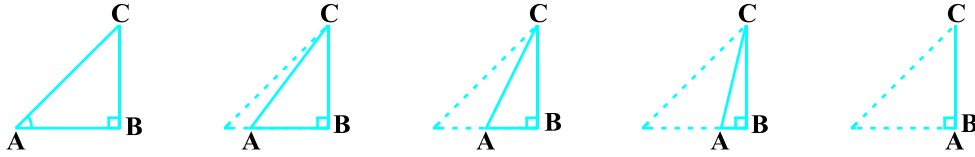
$$\text{کرتے ہیں } \sin 0^\circ = 0 \text{ اور } \cos 0^\circ = 1$$

ان کو استعمال کرنے پر ہمارے پاس ہے:

$$\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = 0, \cot 0^\circ = \frac{1}{\tan 0^\circ} \quad (\text{جو معرف نہیں ہیں کیوں؟})$$

$$\sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} \text{ اور } \csc 0^\circ = \frac{1}{\sin 0^\circ} \quad (\text{جو معرف نہیں ہیں کیوں؟})$$

اب دیکھئے کہ $\angle A$ کی ٹرگنومیٹرک نسبتوں کا کیا ہوتا ہے جب یہ زاویہ ΔABC میں بڑے سے بڑا کر دیا جاتا ہے جب تک کہ یہ 90° کے برابر نہ ہو جائے۔ جب $\angle A$ بڑے سے بڑا ہوتا ہے۔ $\angle C$ اتنا ہی چھوٹے سے چھوٹا ہو جاتا ہے۔ اس لئے ایسی حالت میں ضلع AB کی لمبائی گھٹا دیتی ہے۔ نقطہ A ، نقطہ B کے نزدیک آتا رہتا ہے۔ اور آخر میں $\angle A$ جب 90° کے بہت



شکل 8.18

نزدیک ہو جاتا ہے تو $\angle C$ ، 0° کے نزدیک ہو جاتا ہے۔ اور ضلع AC تقریباً ضلع BC پر منطبق ہو جاتا ہے۔ (شکل 8.18 دیکھئے)۔

جب $\angle C$ ، 0° کے کافی نزدیک ہو تو $\angle A$ 90° کے کافی نزدیک ہوگا۔ ضلع AC تقریباً BC کے برابر ہو جائے گی اور اس

لئے $\sin A$ ، 1 کے کافی نزدیک ہو جائے گا۔ جب $\angle A$ ، 90° کے بہت نزدیک ہو تو $\angle C$ ، 0° کے بہت نزدیک ہوگا،

اور ضلع AB تقریباً صفر ہو جائے گا۔ اس لئے $\cos A$ صفر کے بہت نزدیک ہوگا۔

اس لئے ہم تعریف بیان کرتے ہیں: $\sin 90^\circ = 1$ اور $\cos 90^\circ = 0$

آپ اب 90° کی باقی ٹرگنومیٹرک نسبتوں کو کیوں نہیں معلوم کرتے؟

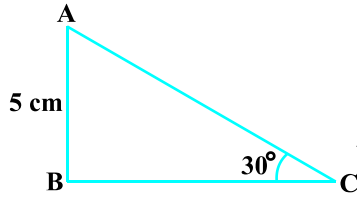
اب ہم حوالہ کے لئے جدول 8.1 میں 0° ، 30° ، 45° ، 60° کی تمام ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی قدر دیتے ہیں۔

جدول 8.1

$\angle A$	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	معرف نہیں
$\operatorname{cosec} A$	معرف نہیں	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec A$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	معرف نہیں
$\cot A$	معرف نہیں	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

ریمارک: مذکورہ بالا جدول سے آپ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ جب $\angle A$ 0° سے 90° کی طرف بڑھتا ہے تب $\sin A$ 0° سے 1 کی طرف بڑھتا ہے اور $\cos A$ 1 سے 0 کی طرف گھٹتا ہے۔

آئیے اوپر دی گئی قدروں کے استعمال کی وضاحت کچھ مثالوں سے کرتے ہیں۔



شکل 8.19

مثال 6: $\triangle ABC$ جو B زاویے پر قائم ہے، میں 5 سینٹی میٹر AB اور $\angle ACB = 30^\circ$ (شکل 8.19 دیکھئے)۔ اضلاع BC اور AC کی لمبائیاں معلوم کیجئے۔

حل: ضلع BC کی لمبائی معلوم کرنے کے لئے ہم اس ٹرگنومیٹرک نسبت کو

لیں گے۔ جس میں BC اور دیا ہوا ضلع AB شامل ہو۔ کیونکہ BC زاویہ کا

متصل ضلع ہے اور AB ، زاویہ C کا مقابل ضلع ہے، اس لئے

$$\frac{AB}{BC} = \tan C$$

$$\frac{5}{BC} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

یعنی

$$BC = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

جس سے ہمیں ملتا ہے

ضلع AC کی لمبائی معلوم کرنے کے لئے ہم غور کرتے ہیں۔

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC} \quad (\text{کیوں؟})$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

$$AC = 30 \text{ سینٹی میٹر}$$

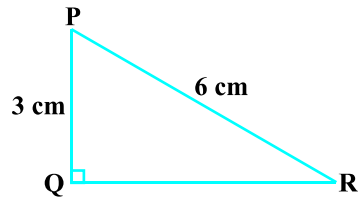
یعنی

نوٹ کیجئے کہ ہم متبادل طریقہ کے طور پر ہم مذکورہ بالا مثال میں تیسرا ضلع معلوم کرنے کے لئے فیثاغورث کے مسئلہ کا استعمال کر سکتے تھے،

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10\text{cm}$$

یعنی

مثال 7: قائم Δ PQR پر قائم ہے، میں (شکل 8.20 دیکھئے) 3 سینٹی میٹر PQ = اور 6 سینٹی میٹر PR = معلوم کیجئے



شکل 8.20

(کیوں؟)

$$\frac{PQ}{PR} = \sin \angle R \quad \text{اور} \quad \angle QPR = 60^\circ$$

حل: دیا ہوا ہے

$$\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

یا

$$\angle PRQ = 30^\circ$$

اس لئے

$$\angle QPR = 60^\circ$$

اس لئے

آپ نوٹ کر سکتے ہیں کہ قائم مثلث کے کسی دوسرے حصہ (یا تو حادہ زاویہ یا کوئی ضلع) کا ایک ضلع معلوم ہو تو مثلث کے باقی اضلاع اور زاویہ معلوم کئے جاسکتے ہیں۔

مثال 8: اگر $0^\circ < A + B \leq 90^\circ$, $A > B$, $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$ تو A اور B معلوم کیجئے۔

$$(1) \quad \sin(A - B) = \frac{1}{2} \quad \text{اس لئے} \quad A - B = 30^\circ \quad (\text{کیوں؟})$$

$$(2) \quad \cos(A + B) = \frac{1}{2} \quad \text{اس لئے} \quad A + B = 60^\circ \quad (\text{کیوں؟})$$

$$(1) \text{ اور } (2) \text{ کو حل کرنے پر ہمیں ملتا ہے } A = 45^\circ \text{ اور } B = 150^\circ$$

مشق 8.2

1- مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجئے۔

$$\sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \cos 60^\circ \quad (\text{ii})$$

$$\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ \quad (\text{i})$$

$$\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ} \quad (\text{iv})$$

$$\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ} \quad (\text{iii})$$

$$\frac{5 \cos^2 60^\circ + 4 \sec^2 30^\circ \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ} \quad (\text{v})$$

2۔ صحیح جواب کو چنئے اور اپنے انتخاب کا جواز پیش کیجئے۔

$$\frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} \quad (\text{i})$$

$$\sin 30^\circ \quad (\text{D}) \quad \tan 60^\circ \quad (\text{C}) \quad \cos 60^\circ \quad (\text{B}) \quad \sin 60^\circ \quad (\text{A})$$

$$\frac{1 - \tan^2 45^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ} = (\text{ii})$$

$$0 \quad (\text{D}) \quad \sin 45^\circ \quad (\text{C}) \quad 1 \quad (\text{B}) \quad \tan 90^\circ \quad (\text{A})$$

$$\sin 2A = 2 \sin A = A \quad \text{جسکے درست جبکہ} \quad (\text{iii})$$

$$60^\circ \quad (\text{D}) \quad 45^\circ \quad (\text{C}) \quad 30^\circ \quad (\text{B}) \quad 0^\circ \quad (\text{A})$$

$$3\text{۔ اگر } \tan(A+B) = \sqrt{3} \text{ اور } \tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{، } 0^\circ < A+B \leq 90^\circ; A > B \text{ اور } A \text{ اور } B \text{ معلوم کیجئے۔}$$

4۔ بیان کیجئے کہ مندرجہ ذیل صحیح ہیں یا غلط۔ آئیے جواب کا جواز پیش کیجئے۔

$$\sin(A+B) = \sin A + \sin B \quad (\text{i})$$

(ii) جیسے θ بڑھتا ہے $\sin \theta$ کی قدر بھی بڑھتی ہے

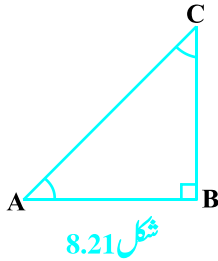
(iii) جیسے θ بڑھتا ہے $\cos \theta$ کی قدر بھی بڑھتی ہے

$$\sin \theta = \cos \theta \text{ کے لئے تمام قدروں کے لئے } \theta \quad (\text{iv})$$

$$A = 0^\circ \text{ کے لئے } \cot A \text{ معرف نہیں ہے۔} \quad (\text{v})$$

8.4 تختی زاویوں کے لئے ٹرگنومیٹرک نسبتیں

یاد کیجئے کہ دو زاویہ تکمیل کہلاتے ہیں اگر ان کا حاصل جمع 90° ہو، ΔABC میں جو B زاویے پر قائم ہے، کیا آپ تکمیلی زاویوں کے جوڑوں کو دیکھ سکتے ہیں (شکل 8.21 کو دیکھئے) کیونکہ $\angle A + \angle C = 90^\circ$ ، اس لئے یہ ایسے جوڑے میں، ہمارے پاس ہے۔



$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{BC}{AC} & \cos A &= \frac{AB}{AC} & \tan A &= \frac{BC}{AB} \\ \operatorname{cosec} A &= \frac{AC}{BC} & \sec A &= \frac{AC}{AB} & \cot A &= \frac{AB}{BC} \end{aligned}$$

آئیے اب $\angle C = 90^\circ - \angle A$ کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں لکھتے ہیں۔

آسانی کے لئے $90^\circ - A$ لکھتے ہیں، زاویہ $90^\circ - A$ کے مقابل اور متصل اضلاع کو بنے ہوں گے؟ آپ دیکھیں گے کہ $90^\circ - A$ کا مقابل ضلع AB اور متصل ضلع BC ہوگا۔ اس لئے،

$$\left. \begin{aligned} \sin(90^\circ - A) &= \frac{AB}{AC}, & \cos(90^\circ - A) &= \frac{BC}{AC} & \tan(90^\circ - A) &= \frac{AB}{BC} \\ \operatorname{cosec}(90^\circ - A) &= \frac{AC}{AB} & \sec(90^\circ - A) &= \frac{AC}{BC} & \cot(90^\circ - A) &= \frac{BC}{AB} \end{aligned} \right\} (1)$$

اب (1) اور (2) میں دی گئی نسبتوں کا موازنہ کیجئے، مشاہدہ کیجئے کہ:

$$\left. \begin{aligned} \sin(90^\circ - A) &= \frac{AB}{AC} = \cos A & \text{اور} & \cos(90^\circ - A) &= \frac{BC}{AC} = \sin A \\ \tan(90^\circ - A) &= \frac{AB}{BC} = \cot A & \cot(90^\circ - A) &= \frac{BC}{AB} = \tan A \\ \sec(90^\circ - A) &= \frac{AC}{BC} = \operatorname{cosec} A & \operatorname{cosec}(90^\circ - A) &= \frac{AC}{AB} = \sec A \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - A) &= \cos A, & \cos(90^\circ - A) &= \sin A, & \text{اس لئے} \\ \tan(90^\circ - A) &= \cot A, & \cot(90^\circ - A) &= \tan A, \\ \sec(90^\circ - A) &= \operatorname{cosec} A, & \operatorname{cosec}(90^\circ - A) &= \sec A, \end{aligned}$$

0° اور 90° کے درمیان زاویہ A کی تمام قدروں کے لئے جانچ کیجئے کہ آیا $A = 0^\circ$ یا $A = 90^\circ$ کے درست ہیں یا نہیں۔
نوٹ: $\tan 0^\circ = 0$ اور $\tan 90^\circ$ ، $\operatorname{cosec} 0^\circ$ اور $\sec 90^\circ$ ، $\cot 0^\circ$ اور $\sec 90^\circ = 1 = \operatorname{cosec} 90^\circ$ معرف نہیں ہیں۔

آئیے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

$$\text{مثال 9: قدر معلوم کیجئے } \frac{\tan 65^\circ}{\cot 25^\circ}$$

$$\cot A = \tan (90^\circ - A)$$

حل: ہم جانتے ہیں:

$$\cot 25^\circ = \tan (90^\circ - 25^\circ) = \tan 65^\circ$$

اس لئے

$$\frac{\tan 65^\circ}{\cot 25^\circ} = \frac{\tan 65^\circ}{\tan 65^\circ} = 1$$

یعنی

مثال 10: اگر $\sin 3A = \cos (A - 26^\circ)$ ، جہاں $3A$ ایک حادہ زاویہ ہے تو A کی قدر معلوم کیجئے۔

حل: ہمیں دیا ہوا ہے کہ $\sin 3A = \cos (A - 26^\circ)$ (1)

کیونکہ $\sin 3A = \cos (90^\circ - 3A)$ اس لئے ہم (1) کو لکھ سکتے ہیں

$$\cos (90^\circ - 3A) = \cos (A - 26^\circ)$$

کیونکہ $90^\circ - 3A$ اور $A - 26^\circ$ دونوں حادہ زاویہ ہیں اس لئے

$$90^\circ - 3A = A - 26^\circ$$

$$A = 29^\circ$$

جس سے ہمیں ملتا ہے

مثال 11: $\cot 85^\circ + \cos 75^\circ$ کو 0° اور 45° کے درمیان کی ٹرگنومیٹرک قیمتوں میں ظاہر کیجئے۔

$$\cot 85^\circ + \cos 75^\circ = \cot (90^\circ - 5^\circ) + \cos (90^\circ - 15^\circ)$$

حل:

$$= \tan 5^\circ + \sin 15^\circ$$

مشق 8.3

1- قدر معلوم کیجئے:

$$\operatorname{cosec} 31^\circ - \sec 59^\circ \text{ (iv)} \quad \cos 48^\circ - \sin 42^\circ \text{ (iii)} \quad \frac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ} \text{ (ii)} \quad \frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ} \text{ (i)}$$

2- دکھائیے کہ:

$$\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1 \quad \text{(i)}$$

$$\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0 \quad \text{(ii)}$$

3- اگر $\tan 2A = \cot (A - 18^\circ)$ ، جہاں $2A$ ایک حادہ زاویہ ہے، تو A کی قدر معلوم کیجئے۔

$$4- \tan A = \cot B \text{ تو ثابت کیجئے کہ } A + B = 90^\circ$$

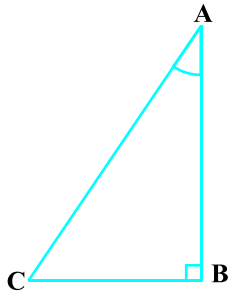
5- اگر $\sec 4A = \operatorname{cosec} (A - 20^\circ)$ ، جہاں $4A$ ایک حادہ زاویہ ہے، تو A کی قدر معلوم کیجئے۔

6- اگر A, B, C مثلث ABC کے داخلی زاویہ ہیں تو دکھائیے

$$\sin \left(\frac{B + C}{2} \right) = \cos \frac{A}{2}$$

7- $\sin 67^\circ + \cos 75^\circ$ کو 0° اور 45° کے درمیان زاویوں کی ٹرگنومیٹرک نسبتوں میں ظاہر کیجئے۔

8.5 ٹرگنومیٹرک کے تماثلات



شکل 8.22

آپ یاد کیجئے کہ ایک مساوات تماثلہ کہلاتی ہے اگر وہ اس میں موجود متغیر کی تمام قدروں کے لئے درست ہو اسی طرح سے مساوات جس میں ٹرگنومیٹرک نسبتیں شامل ہوتی ہیں ٹرگنومیٹرک تماثل کہلاتی ہے اگر اس میں ملوث تمام زاویوں کے لئے درست ہو۔

اس سیکشن میں ہم ایک ٹرگنومیٹری کا تماثل ثابت کریں گے اور اس کا استعمال باقی دوسری مفید ٹرگنومیٹری کے تماثلات کو ثابت کرنے میں کریں گے۔

ΔABC میں، جو B پر قائم ہے (شکل 8.22 دیکھئے) ہمارے پاس ہے:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

(1) کے ہر رکن کو AC^2 سے تقسیم کرنے پر ہمیں ملتا ہے،

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$$\left(\frac{AB}{AC} \right)^2 + \left(\frac{BC}{AC} \right)^2 = \left(\frac{AC}{AC} \right)^2 \quad \text{یعنی}$$

$$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1 \quad \text{یعنی}$$

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1 \quad \text{یعنی}$$

یہ A کی تمام قدروں کے لئے درست ہے جب کہ $0^\circ \leq A \leq 90^\circ$ ، اس لئے یہ ٹرگنومیٹرک تماثل ہے۔

آئیے (1) کو دونوں طرف AB^2 سے تقسیم کریں، ہمیں ملتا ہے

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

$$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \quad \text{یا}$$

$$(3) \quad 1 + \tan^2 A = \sec^2 A \quad \text{یعنی}$$

کیا یہ مساوات $A = 0^\circ$ کے لئے درست ہے؟ ہاں، یہ ہے $A = 90^\circ$ کے بارے کیا خیال ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ $0^\circ \leq A < 90^\circ$ کے لئے A اور A معرف نہیں ہیں اس لئے (3) درست ہے تمام A کے لئے $0^\circ \leq A < 90^\circ$

آئیے دیکھتے ہیں کہ ہم (1) سے تقسیم کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \quad \text{یعنی}$$

$$(4) \quad \cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A \quad \text{یعنی}$$

نوٹ کیجئے کہ $A = 0^\circ$ کے لئے $\cot A$ اور $\operatorname{cosec} A$ معرف نہیں ہیں اس لئے (4) تمام A کے درست ہے جب $0^\circ < A \leq 90^\circ$ کہ

ان تماثلات کا استعمال کر کے ہم ہر ٹرگنومیٹرک نسبت کو دوسری نسبت کی شکل میں بدل سکتے ہیں یعنی اگر کوئی سی نسبت ایک نسبت آپ کو معلوم ہے تو ہم دوسری ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی قدر معلوم کر سکتے ہیں۔

آئیے دیکھتے ہیں کہ ہم ان تماثلات کو استعمال کر کے ایسا کس طرح کر سکتے ہیں۔ فرض کیجئے ہم جانتے ہیں کہ

$$\cot A = \sqrt{3} \quad \text{تب} \quad \tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \sec A = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{اور} \quad \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{کیونکہ}$$

$$\operatorname{cosec} A = 2 \quad \text{لئے} \quad \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \quad \text{دوبارہ}$$

مثال 12: نسبتوں $\sec A$ ، $\tan A$ ، $\cos A$ اور $\sin A$ کی شکل میں لکھئے۔

حل: کیونکہ $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ لئے

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A, \cos A = \pm \sqrt{1 - \sin^2 A}$$

اس سے ہمیں ملتا ہے $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$ (کیوں؟)

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}} \text{ اور } \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}} \quad \text{کیونکہ}$$

مثال 13: ثابت کیجئے کہ $-\sec A (1 - \sin A)(\sec A + \tan A) = 1$

حل:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \sec A (1 - \sin A)(\sec A + \tan A) = \left(\frac{1}{\cos A} \right) (1 - \sin A) \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} \right) \\ &= \frac{(1 - \sin A)(1 + \sin A)}{\cos^2 A} = \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A} \\ &= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1 = \text{RHS} \end{aligned}$$

مثال 14: ثابت کیجئے کہ $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

$$\text{LHS} = \frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\frac{\cos A}{\sin A} + \cos A} \quad \text{حل:}$$

$$= \frac{\cos A \left(\frac{1}{\sin A} - 1 \right)}{\cos A \left(\frac{1}{\sin A} + 1 \right)} = \frac{\left(\frac{1}{\sin A} - 1 \right)}{\left(\frac{1}{\sin A} + 1 \right)} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1} = \text{RHS}$$

مثال 15: ثابت کیجئے کہ $\frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1} = \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta}$ ، مثال $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$ کو

استعمال کیجئے۔

حل: کیونکہ ہمیں وہ تماشل استعمال کرنا ہے جس میں $\sec \theta$ اور $\tan \theta$ شامل ہیں۔ اس لئے پہلے ہم LHS کو (اس تماشل کو جس کو ہمیں ثابت کرنا ہے) $\sec \theta$ اور $\tan \theta$ کی شکل میں بدلیں گے، ایسا کرنے کے لئے ہم شمار کنندہ اور نسب نما کو $\cos \theta$

سے تقسیم کریں گے۔

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1} - \frac{\tan \theta - 1 + \sec \theta}{\tan \theta - 1 - \sec \theta} \\ &= \frac{(\tan \theta + \sec \theta) - 1}{(\tan \theta - \sec \theta) + 1} - \frac{\{(\tan \theta + \sec \theta) - 1\} (\tan \theta - \sec \theta)}{\{(\tan \theta - \sec \theta) + 1\} (\tan \theta - \sec \theta)} \\ &= \frac{(\tan^2 \theta - \sec^2 \theta) - (\tan \theta - \sec \theta)}{\{(\tan \theta - \sec \theta) + 1\} (\tan \theta - \sec \theta)} \\ &= \frac{-1 - \tan \theta + \sec \theta}{(\tan \theta - \sec \theta + 1) (\tan \theta - \sec \theta)} \\ &= \frac{-1}{(\tan \theta - \sec \theta) + 1} - \frac{1}{(\tan \theta - \sec \theta)} \end{aligned}$$

جو کے مطلوبہ تماشل کی RHS ہے جس کو ہمیں ثابت کرنا تھا۔

مشق 8.4

1- ٹرگنومیٹری نسبتیں $\sin A$ ، $\sec A$ اور $\tan A$ کو $\cot A$ کی شکل میں لکھئے۔

2- $\angle A$ کی $\sec A$ کی شکل میں تمام ٹرگنومیٹرک نسبتوں کو لکھئے۔

3- قدر معلوم کیجئے:

$$\frac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ} \quad (\text{i})$$

$$\sin 25^\circ \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \sin 65^\circ \quad (\text{ii})$$

4- صحیح جواب کو چنئے اور اپنے انتخاب کا جواز پیش کیجئے۔

(i) $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A =$

- (A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

(ii) $(1 + \tan \theta + \sec \theta)(1 + \cot \theta - \text{cosec } \theta) =$

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -1

(iii) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A) =$

- (A) $\sec A$ (B) $\sin A$ (C) $\text{cosec } A$ (D) $\cos A$

$$(iv) \frac{1 + \tan^2 A}{1 - \cot^2 A} -$$

$$(A) \sec^2 A \quad (B) -1 \quad (C) \cot^2 A \quad (D) \tan^2 A$$

5۔ مندرجہ ذیل تماثلات کو ثابت کیجئے، اس میں ملوث تمام زاویہ حادہ ہیں جن کے لئے عبارتیں معرف ہیں۔

$$(i) (\cos \theta - \cot \theta)^2 \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \quad (ii) \frac{\cos A}{1 - \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} - 2 \sec A$$

$$(iii) \frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} - \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta} = 1 + \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$$

[اشارہ: عبارت کو $\sin \theta$ اور $\cos \theta$ کی شکل میں لکھئے]

$$(iv) \frac{1 + \sec A}{\sec A} - \frac{\sin^3 A}{1 - \cos A} \quad \text{[اشارہ: LHS اور RHS کو علیحدہ علیحدہ مختصر کیجئے]}$$

$$(v) \frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A - \sin A - 1} - \operatorname{cosec} A + \cot A,$$

تماثل $\cos \operatorname{cosec}^2 A - 1 + \cot^2 A$ کو استعمال کر ثابت کیجئے۔

$$(vi) \sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} - \sec A + \tan A \quad (vii) \frac{\sin \theta - 2 \sin^3 \theta}{2 \cos^3 \theta - \cos \theta} - \tan \theta$$

$$(viii) (\sin A - \operatorname{cosec} A)^2 - (\cos A - \sec A)^2 = 7 - \tan^2 A + \cot^2 A$$

$$(ix) (\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) - \frac{1}{\tan A - \cot A}$$

[اشارہ: LHS اور RHS کو علیحدہ علیحدہ مختصر کیجئے]

$$(x) \left(\frac{1 - \tan^2 A}{1 - \cot^2 A} \right) - \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A} \right)^2 - \tan^2 A$$

8.6 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں۔

1۔ ایک قائم مثلث ABC جو B پر قائم ہے، میں

$$\tan A = \frac{\text{زاویہ A کا مقابل ضلع}}{\text{زاویہ A کا متصل ضلع}} \quad \cos A = \frac{\text{زاویہ A کا مقابل ضلع}}{\text{وتر}} \quad \sin A = \frac{\text{زاویہ A کا مقابل ضلع}}{\text{وتر}}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}; \sec A = \frac{1}{\cos A}; \tan A = \frac{1}{\cot A}, \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \quad -2$$

3- اگر کبھی حادثہ زاویہ کی ایک ٹرگنومیٹرک نسبت معلوم ہے تو ہم باقی نسبتیں آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں۔

4- زاویہ $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں

5- $\sin A$ اور $\cos A$ کی قدر 1 گئے زیادہ نہیں ہو سکتی جب کہ $\sec A$ یا $\operatorname{cosec} A$ کی قدر ہمیشہ 1 کے برابر یا اس سے زیادہ نہیں ہے۔

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A, \cos(90^\circ - A) = \sin A; \quad -6$$

$$\tan(90^\circ - A) = \cot A, \cot(90^\circ - A) = \tan A;$$

$$\sec(90^\circ - A) = \operatorname{cosec} A, \operatorname{cosec}(90^\circ - A) = \sec A.$$

$$\sin^2 A - \cos^2 A = 1 \quad -7$$

$$\text{لئے } 0^\circ \leq A < 90^\circ \sec^2 A - \tan^2 A = 1$$

$$\text{لئے } 0^\circ < A \leq 90^\circ \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$$