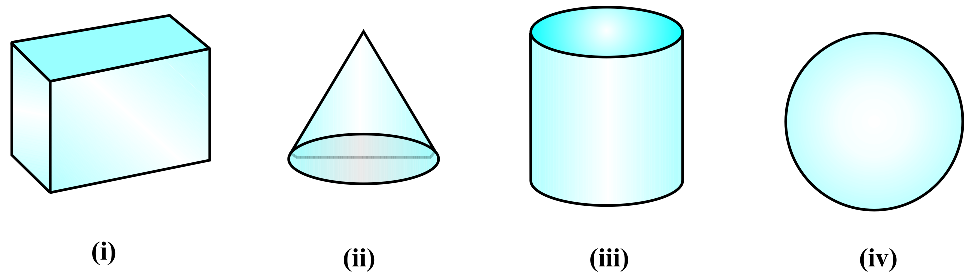
13 سطحی رقبہ اور حجم
(SURFACE AREAS AND VOLUMES)

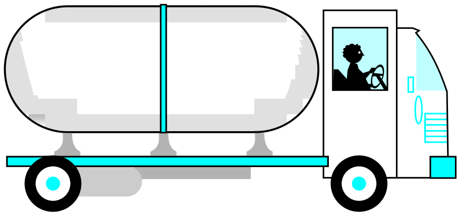
13.1 تعارف

نویں کلاس میں آپ کچھ ٹھوس جیسے، مکعب نما، مخروط، استوانہ اور کرّہ (شکل 13.1 دیکھئے) سے واقف ہو چکے ہیں آپ یہ بھی سیکھ چکے ہیں کہ ان کے رقبہ اور حجم کیسے معلوم کئے جاتے ہیں۔

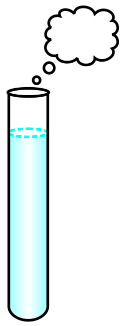


روزمرّہ کی زندگی میں ہمارا واسطہ بہت سی ایسی ٹھوس اشیا سے پڑتا ہے جو دو یا دو سے زیادہ بنیادی ٹھوس اشیا سے مل کر بنے ہوے ہیں جیسے اوپر دکھائے گئے ہیں۔

آپ نے ایک ٹرک ضرور دیکھا ہوگا جس کے پیچھے مضروف جڑا ہوا ہوتا ہے۔ (شکل 13.2 دیکھئے) جو اس میں تیل یا پانی ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرتا ہے۔ کیا اس کی شکل مذکورہ بالا چار بنیادی ٹھوس اشیا کی شکل میں سے ایک ہے؟ اب اندازہ کر سکتے ہیں کہ یہ ایک ایسے استوانہ کی شکل کا ہے جس کے سرے نصف کرّ وی ہیں۔



شکل 13.2



شکل 13.3

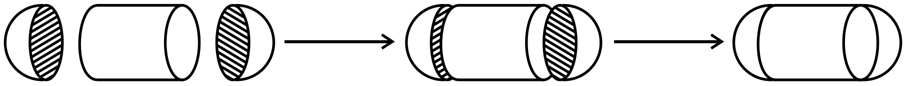
کبھی آپ نے ایسی شے دیکھی ہوگی جیسے شکل 13.3 میں دکھائی گئی ہے۔کیا آپ اس کا نام بتا سکتے ہیں؟ ایک ٹیسٹ ٹیوب ہے! آپ اس کو اپنی سائنس کی لیباریٹری میں استعمال کرتے ہیں۔ یہ ٹیوب بھی استوانہ اور نصف کرہ کے اتحاد کا نتیجہ ہے۔اسی طرح سے سفر کرتے ہوئے آپ نے بہت سی ایسی عمارتیں اور تاریخی یادگاریں دیکھی ہوں گی جو مذکورہ بالا بنیادی ٹھوس شکلوں سے مل کر بنی ہوتی ہیں۔

اگر کسی وجہ سے آپ کو ان کا حجم یا سطحی رقبہ معلوم کرنا ہو یا گنجائش معلوم کرنی ہو تو یہ آپ کیسے کریں گے ہم ان کی درجہ بندی پہلے سے پڑھے گئے کسی ٹھوس کے ساتھ نہیں کر سکتے۔

اس باب میں آپ پڑھیں گے کہ تمام شکلوں کا سطحی رقبہ اور حجم کیسے معلوم کئے جاتے ہیں۔

13.2 ٹھوسوں کے اجماع (Combination) کے سطحی رقبہ

آیئے شکل 13.2 میں دکھائے گئے مضروف پر غور کرتے ہیں۔ ایسے ٹھوسوں کا سطحی رقبہ ہم کیسے معلوم کرتے ہیں؟ جب جب ہمارے سامنے ایسا کوئی نیا مسئلہ آتا ہے ہم اس کو پہلے چھوٹے چھوٹے ایسے مسئلے میں توڑ لیتے ہیں جن کو ہم پہلے ہی حل کر چکے ہیں۔ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہ ٹھوس ایک ایسا استوانہ ہے جس کے سرے نصف کروی شکل کے ہیں۔ جب ہم اس کے تمام ٹکڑوں کو ملا کر رکھیں تو یہ ایسا ہی نظر آئے گا جیسا کہ شکل 13.4 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 13.4

اگر ہم نئے بنے ہوئے ٹھوس کی سطح پر غور کرتے ہیں ہمیں صرف دو نصف کروں کی خمیدہ سطح اور استوانہ کی خمیدہ سطح نظر آتی ہے۔

اس لئے نئے ٹھوس کا کل سطحی رقبہ ہر انفرادی حصہ کی خمیدہ سطح کے رقبوں کا حل جمع ہے۔اس سے ہمیں ملتا ہے۔

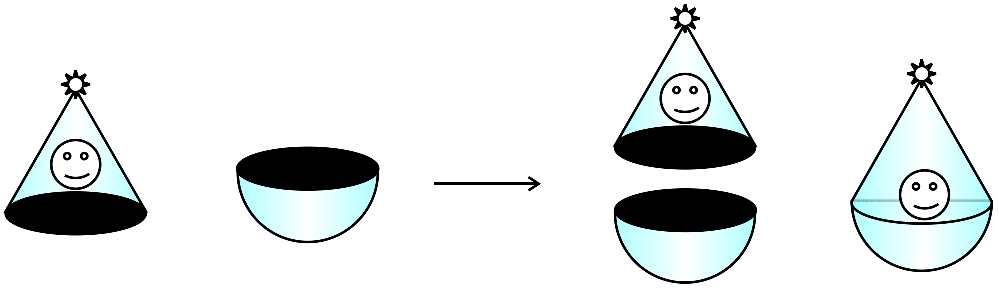
نئے ٹھوس کل سطح رقبہ TSA = پہلے نصف کرہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ CAS + استوانہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ + دوسرے نصف کرہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ سایہ CAS–

جہاں TSA اور CSA بالترتیب کل سطحی رقبہ اور خمیدہ سطح کے رقبہ کو ظاہر کرتے ہیں۔

آیئے ہم ایک دوسری صورت حال پر غور کرتے ہیں۔ فرض کیجئے کہ ہم ایک مخروط اور ایک نصف کرّہ کو ایک ساتھ رکھ کر ایک کھلونا بناتے ہیں اب ہمیں کون کون سے قدم اٹھانے ہوں گے۔

پہلے ہم ایک مخروط اور نصف کرہ کو لیتے ہیں اور ان سطح رخوں کو ایک ساتھ رکھیں گے۔ یقیناً ایسا کرنے کے لئے ہمیں مخروط کے ساتھ کا نصف قطر، نصف کرہ کے نصف قطر کے برابر لیا ہوگا تاکہ کھلونہ کی سطح مسطح ہو۔ اس لئے اس میں استعمال ہوئے اقدامات شکل 13.5 میں دکھائے گئے ہیں۔

اپنی اس کوشش کے بعد ہمیں ایک خوبصورت کھلونہ ملتا ہے جس کا نچلہ حصہ گول ہے۔ اب ہم اگر یہ معلوم کرنا چاہتے ہوں



شکل 13.5

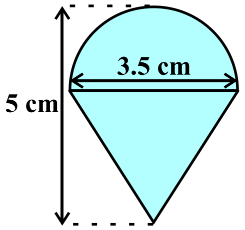
گے اس کے چاروں طرف رنگ کرانے کا خرچ کتنا ہوگا۔ تو ہمیں کیا جاننے کی ضرورت ہے؟ ہمیں کھلونہ کے سطحی رقبہ معلوم کرنے کی ضرورت ہے جو کہ نصف کرہ کا CSA اور مخروط کا CSA ہے۔

اس لئے ہم کہہ سکتے ہیں۔

کھلونہ TSA = نصف کرہ کا CSA + مخروط کا CSA

آیئے اب کچھ مثالیں لیتے ہیں۔

مثال 1: رشید کو اس کے یوم پیدائش پر ایک لٹو تحفہ میں ملا۔ اتفاقاً اس پر رنگ نہیں ہوا تھا۔ وہ اپنے مومیا رنگوں سے اس کو رنگنا چاہتا ہو۔ لٹو ایک ایسے مخروط کی شکل کا ہے جس کا اوپری حصہ نصف کروی شکل کا ہے۔ (شکل 13.6 دیکھئے)۔ پورے لٹو کی اونچائی 5 سینٹی میٹر اور اس کا نصف قطر 3.5 سینٹی میٹر ہے۔ وہ رقبہ معلوم کیجئے جس پر اس کو رنگ کرنا ہے۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجئے)



شکل 13.6

حل: لٹو بالکل اس ہی شکل کا ہے جیسا ہم شکل 13.5 میں دیکھ چکے ہیں۔ تو ہم اسی نتیجہ کو استعمال کر سکتے ہیں جو ہم نے اوپر اخذ کیا تھا۔ یعنی

لٹو کا TSA = مخروط کا CSA + نصف کرّہ کا CSA

اب نصف کرہ کا CSA = $\frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi r^2$

$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right)$ سینٹی میٹر

مزید نصف کروی حصہ کی اونچائی (نصف قطر) ـ لٹو کی اونچائی = مخروط کی اونچائی ہے

$= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right)$ سینٹی میٹر = 3.25 سینٹی میٹر

اس لئے مخروط کی ترچھی اونچائی = $\sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2}$ سینٹی میٹر = 3.7 سینٹی میٹر تقریباً

اس لئے مخروط کا CSA = $\pi r l = \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right)$ مربع سینٹی میٹر

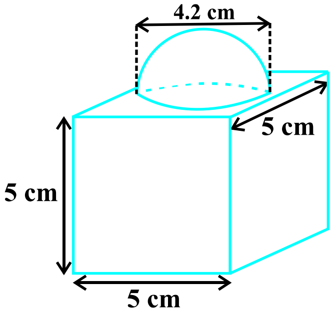
اس سے لٹو کا سطحی رقبہ معلوم ہوتا ہے۔

$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right)$ مربع سینٹی میٹر + $\left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right)$ مربع سینٹی میٹر

$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2}(3.5 + 3.7)$ مربع سینٹی میٹر تقریباً

$= \frac{11}{2} \times (3.5 + 3.7)$ مربع سینٹی میٹر = 39.6 مربع سینٹی میٹر

آپ یہ بات نوٹ کر سکتے ہیں کہ لٹّو کا کل سطحی رقبہ مخروط اور نصف کرہ کے کل سطحی رقبہ کے حاصل جمع کے برابر نہیں ہے۔



شکل 13.7

مثال 2: ایک سجاوٹی بلاک جیسا کہ شکل 13.7 میں دکھا گیا ہے دو ٹھوسوں سے مل کر بنا ہے ایک مکعب اور ایک نصف کرہ، بلاک کا قاعدہ 5

سینٹی میٹر ضلع والا ایک مکعب ہے اور اس کے اوپر فکس ہوئے نصف کرہ کا قطر 4.2 سینٹی میٹر ہے۔ بلاک کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجئے
($\pi = \frac{22}{7}$ لیجئے)

حل: مکعب کا TSA $= 6 \times$ (ضلع)^2 $= 6 \times 5 \times 5$ مربع سینٹی میٹر $=160$ مربع سینٹی میٹر

نوٹ کیجئے کہ مکعب کا وہ حصہ جہاں پر نصف کرہ جڑا ہوا ہے، سطحی رقبہ میں شامل نہیں ہوگا اس لئے نصف کرہ کے قاعدہ کا رقبہ
– مکعب کا TSA = بلاک کا سطحی رقبہ + نصف کرہ کا CS

$+150$ مربع سینٹی میٹر $\pi r^2 + 2\pi r^2$

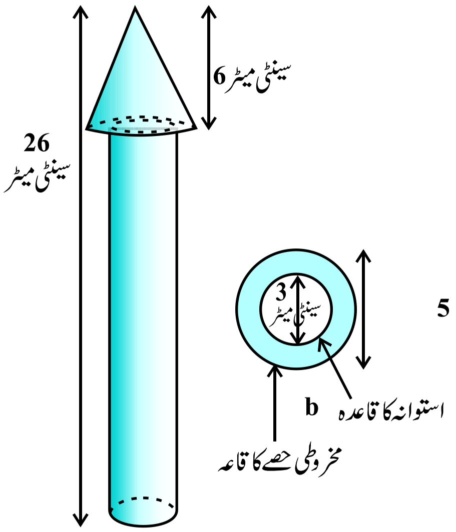
$=(150 + \pi r^2)$ مربع سینٹی میٹر

$=150$ مربع سینٹی میٹر $+ \left(\frac{22}{7} \times \frac{4.2}{2} \times \frac{4.2}{2}\right)$ مربع سینٹی میٹر

$=(150+13.86)$ مربع سینٹی میٹر

$=163.86$ مربع سینٹی میٹر

مثال 3: ایک لکڑی کا بنا ہوا کھلونہ راکٹ ایک ایسے استوانہ کی شکل کا ہے جس کا اوپری حصہ مخروطی ہے جیسا کہ شکل 13.8 میں دکھایا گیا ہے پورے راکٹ کی اونچائی 26 سینٹی میٹر ہے۔ جب کہ مخروطی حصہ کی اونچائی 6 سینٹی میٹر ہے مخروطی حصہ کے قاعدہ کا قطر 5 سینٹی میٹر ہے جب کہ استوانہ کے قاعدہ کا قطر 3 سینٹی میٹر ہے اگر مخروطی حصہ کو نارنگی رنگ کرنا ہے اور استوانی حصہ کو پیلا تو وہ رقبہ معلوم کیجئے جہاں یہ دونوں رنگ ہوتے ہیں۔



شکل 13.8

حل: مخروط کے نصف قطر کو r ترچھی اونچائی کو P سے مخروط کی اونچائی کو h سے، استوانہ کے نصف قطر کو r' اور استوانہ کی اونچائی کو h' سے ظاہر کیجئے۔

تب $r' = 1.5$ سینٹی میٹر، $h' = 26 - 6 = 20$ سینٹی میٹر

اور $r = 2.5$ سینٹی میٹر، $h = 6$

$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2.5^2 + 6^2}$ سینٹی میٹر $= 6.5$ سینٹی میٹر

یہاں مخروطی حصہ کا دائری قاعدہ ہے جو استوانہ پر رکھا ہوا ہے۔لیکن مخروط کا قاعدہ استوانہ کے قاعدہ سے بڑا ہے۔اس لئے مخروط کے قاعدہ کا کچھ حصہ ہی رنگ کرنا ہے۔

اس لئے فاصلہ بڑھائیں استوانہ کے قاعدہ کا رقبہ– مخروط کے قاعدہ کا رقبہ + مخروط کا CSA= جہاں نارنگی رنگ ہونا ہے وہ رقبہ

$=\pi rl + pr^2 \times \pi(r')^2$

$=\pi[(2.5\times6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2]$ مربع سینٹی میٹر

$=\pi[20.25]\ cm^2 = 3.14 \times 20.25$ مربع سینٹی میٹر

$=63.585\ cm^2$

اب استوانہ کے ایک قاعدہ کا رقبہ + استوانہ کا CSA= وہ رقبہ جہاں پیلا رنگ ہونا ہے

$2\pi r'h' + \pi(r')^2$

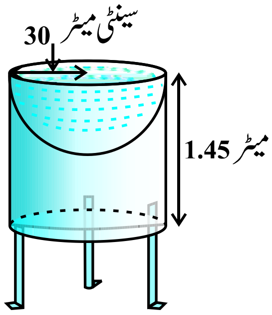
$=\pi r'\ (2h' + r')$

$=(3.14\times1.5)\ (2\times20+1.5)$ مربع سینٹی میٹر

4.71×41.5 مربع سینٹی میٹر

$=195.465$ مربع سینٹی میٹر

مثال 4: مینک نے اپنے باغ کے لئے ایک ایسا چڑیوں کے نہانے کا تالاب بنایا جو استوانہ کی شکل کا ہے جس کے ایک سرے پر نصف کروی ڈھال ہے۔(شکل 13.9 دیکھئے) استوانہ کی اونچائی 1.45 سینٹی میٹر ہے اور اس کا نصف قطر 30 سینٹی میٹر ہے۔ چڑیوں کے نہانے کا تالاب کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجئے۔($\pi = \frac{22}{7}$ لیجئے)



شکل 13.9

حل: مان لیجئے استوانہ کی اونچائی اور استوانہ اور نصف کرہ کا مشترک نصف قطر r ہے تب

نصف کرہ کا CSA + استوانہ کا CSA = چڑیوں کے نہانے کا تالاب کا کل سطحی رقبہ TSA

$=2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30(145 + 30)$ مربع سینٹی میٹر

$=33000\ cm^2 = 3.3$ مربع میٹر

مشق 13.1

جب تک کچھ اور نہ کہا جائے $\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے

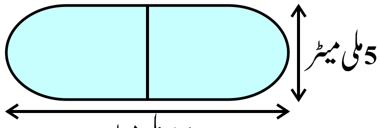
1- دو مکعب جن میں ہر ایک کا حجم 64 سینٹی میٹر ہے۔ سروں سے ملا دئے گئے ہیں۔ نتیجہ میں ملے مکعب نما کا سطحی رقبہ معلوم کیجئے۔

2- ایک برتن ایک کھوکھلے نصف کرہ کی شکل کا ہے جس کے اوپر ایک کھوکھلا استوانہ رکھا ہوا ہے۔ نصف کرہ کا قطر 14 سینٹی میٹر اور پورے برتن کی اونچائی 13 سینٹی میٹر ہے۔ برتن کی اندرونی سطح کا رقبہ معلوم کیجئے۔

3- ایک کھلونہ مخروط کی شکل کا ہے جس کا اوپری حصہ نصف کروی ہے جس کا نصف قطر وہی ہے جو مخروط کا ہے۔ اگر مخروط کا نصف قطر 3.5 سینٹی میٹر ہو اور کھلونہ کی کل اونچائی 15.5 سینٹی میٹر ہو تو کھلونہ کی کل سطحی رقبہ معلوم کیجئے۔

4- 7 سینٹی میٹر ضلع والے ایک مکعبی بلاک کا اوپری حصہ نصف کروی شکل ہے۔ نصف کرہ کا بڑے قطر کیا ہوسکتا ہے؟ ٹھوس کا سطحی رقبہ معلوم کیجئے۔

5- ایک مکعبی لکڑی کے بلاک کے ایک سطح میں سے ایک نصف کروی ڈھال کاٹ لیا گیا ہے۔ اگر نصف کرہ کا قطر مکعب کے ضلع کے برابر ہو تو باقی بچے ٹھوس کا سطحی رقبہ معلوم کیجئے۔

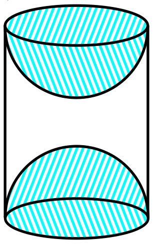


شکل 13.10

6- دوائی کا ایک کیپسول ایک ایسے استوانہ کی شکل کا ہے جن کے دونوں سرے نصف کروی شکل کے ہیں۔ (شکل 13.10 دیکھئے) پورے کیپسول کی لمبائی 14 ملی میٹر ہے اور کیپسول کا قطر 5 ملی میٹر تو اس کا سطحی رقبہ معلوم کیجئے۔

7- ایک ٹینٹ استوانہ کی شکل کا ہے جس کا اوپری حصہ مخروطی ہے۔ اگر استوانہ والے حصہ کی اونچائی اور قطر بالترتیب 2.1 سینٹی میٹر اور 4 سینٹی میٹر ہے اور مخروطی حصہ کی ترچھی اونچائی 2.8 ہے تو ٹینٹ کو بنانے میں استعمال ہونے والے کینوس کا رقبہ معلوم کیجئے اور 500 روپے فی مربع میٹر کی شرح سے کینوس کا خرچ بھی معلوم کیجئے۔

نوٹ کیجئے کہ ٹینٹ کے قاعدہ پر کینوس نہیں لگا ہوتا)



شکل 13.11

8- ایک ٹھوس استوانہ جس کی اونچائی 2.4 سینٹی میٹر اور قطر 1.4 سینٹی میٹر میں سے اس اونچائی اور قطر کا ایک مخروطی خلا نکالا گیا ہے۔

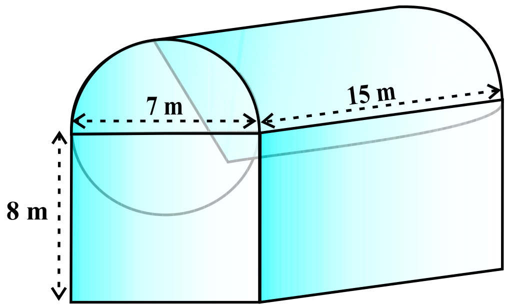
باقی بچے ٹھوس کا کل سطحی رقبہ نزدیکی مربع سینٹی میٹر میں معلوم کیجیے۔

9۔ لکڑی کی ایک شے ٹھوس استوانہ کے سروں میں نصف کرے نکال کر بنائی گئی ہے جیسا کہ شکل 13.11 میں دکھایا گیا۔ اگر استوانہ کی اونچائی 10 سینٹی میٹر اور اس کے قاعدہ کا نصف قطر 3.5 سینٹی میٹر۔ تو اس شے کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

13.3 ٹھوس اشیا کے اجماع کا حجم

پچھلے سیکشن میں ہم نے یہ بحث کی کہ دو بنیادی ٹھوس اشیا کے اجماع سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ کیسے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ یہاں ہم دیکھیں گے کہ ان کا حجم کیسے معلوم کیا جائے گا۔ یہ بات نوٹ کی ہوگی کہ سطحی رقبہ معلوم کرتے وقت ہم نے دونوں ٹھوس اشیاء کے سطحی رقبہ کو جمع نہیں کیا تھا۔ کیونکہ ان کو ملاتے وقت سطحی رقبہ کا کچھ حصہ غائب ہو گیا تھا۔ لیکن جب ہم ان کا حجم معلوم کریں گے تو ایسا نہیں ہوگا۔ دو بنیادی ٹھوس اشیا کو ملا کر بنے ٹھوس کا حجم اصل ان دونوں کا ٹھوس اشیا کے حجم کے حاصل جمع کے برابر ہوگا۔ جیسے کہ ہم مندرجہ ذیل مثال میں دیکھتے ہیں۔

مثال 5: شانتا ایک انڈسٹری چلاتی ہے جو ایک ایسے شیڈ کے اندر ہے جس کی شکل ایک ایسے مکعب نما کی ہے۔ جس کا اوپری حصہ نصف استوانہ شکل ہے (شکل 13.12 دیکھئے)۔ اگر شیڈ کے قاعدہ کے ابعاد 15 سینٹی میٹر × 7 سینٹی میٹر ہیں اور کعب نما والے حصہ کی اونچائی 8 سینٹی میٹر ہے۔ تو اس شیڈ میں جتنی ہوا ہو سکتی ہے اس کا حجم معلوم کیجیے۔ مزید فرض کیجیے اس شیڈ کے اندر لگی مشینری 300 مکعب میٹر جگہ گھیرتی ہے اور وہاں 20 کارکن ہیں اور ان میں سے ہر شخص 0.08 مکعب میٹر جگہ گھیرتا ہے تب شیڈ میں کتنی ہوا ہوگی۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)



شکل 13.12

حل: شیڈ کے اندر روا کا حجم (جب وہاں کوئی ملازم اور مشینری نہ ہو) کعب نما کے اندر موجود ہوا اور نصف استوانہ میں موجود ہوا کا حاصل جمع ہے۔

اب مکعب نما کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب 15 سینٹی میٹر، 7 سینٹی میٹر اور 8 سینٹی میٹر ہے۔ مزید نصف استوانہ کا قطر 7

سینٹی میٹر ہے۔اور اس کی اونچائی 15 سینٹی میٹر۔

مسئلہ مطلوبہ حجم ہے کعب نما کا حجم+استوانہ کا حجم × $\frac{1}{2}$

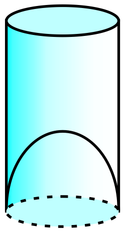
مکعب میٹر 1128.75 مکعب میٹر $\left[15 \times 7 \times 8 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 15\right] =$

آ گے مشینری کے ذریعے گھیری گئی کل جگہ مکعب میٹر 300

اور 20 ملازموں کے ذریعے گھیری گئی کل جگہ مکعب میٹر 0.08×20=1.6 مکعب میٹر

اس لئے ہوا کا حجم جب وہاں مشینری اور ملازم ہوں مکعب میٹر $= 1128.75 - (300.00 + 1.60) = 827.15$

مثال 6: ایک جوس فروش اپنے گاہکوں کو شکل 13.13 میں دکھائے گئے گلاسوں میں جوس دیتا ہے۔استوانہ گلاس کا اندرونی قطر 5 سینٹی میٹر ہے۔ لیکن گلاس کے نچلے حصہ میں نصف کروی شکل میں اٹھا ہوا ہے۔جس کی وجہ سے گلاس کی گنجائش کم ہو جاتی ہے۔اگر گلاس کی اونچائی 10 سینٹی میٹر تھی تو اس کی بہ ظاہری اور اصل گنجائش معلوم کیجئے۔(π=3.14 لیجئے)



شکل 13.13

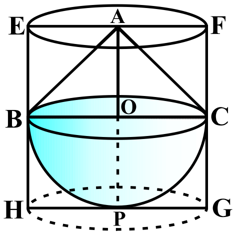
حل: کیونکہ گلاس کا اندرونی قطر=5 سینٹی میٹر اور اونچائی 10 سینٹی میٹر

تو بہ ظاہر گلاس کی گنجائش $= \pi r^2 h$

معکب سینٹی میٹر 196.25= مکعب میٹر $=3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 10$

لیکن گلاس کی اصل گنجائش کم ہوگی کیونکہ اس کے قاعدہ میں ایک نصف کرہ اٹھا ہوا ہے

یعنی یہ $\frac{2}{3}\pi r^3$ کم ہوگی مکعب میٹر 32.71= مکعب میٹر $= \frac{2}{3} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5$



شکل 13.14

اس لئے فاصلہ بڑھائیں نصف کرہ کا حجم۔ گلاس کی بہ ظاہری گنجائش= گلاس کی اصل گنجائش

معکب میٹر 163.54= میٹر $= (196.25 - 32.71)$

مثال 7: ایک ٹھوس کھلونہ کی شکل کا ہے جس کا نچلا حصہ نصف کروی شکل کا

ہے۔مخروط کی اونچائی 2 سینٹی میٹر ہے اور قاعدہ کا قطر 4 سینٹی میٹر ہے۔کھلونہ کا حجم معلوم کیجئے اگر ایک قائم دائری کا استوانہ اس کھلونے کو محصور کرتا ہے۔کھلونہ اور استوانہ کے حجم کا فرق معلوم کیجئے۔($\pi=3.14$ لیجئے)

حل: مان لیجئے BPC ایک نصف کرہ ہے اور ABC ایک مخروط جو نصف کرہ کے قاعدہ پر کھڑا ہوا ہے۔(13.14 دیکھئے) نصف کرہ (اور مخروط) کا نصف قطر OD سینٹی میٹر 2=4 سینٹی میٹر $4 \times \frac{1}{2} =$

اس لئے کھلونا کا حجم $= \frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^2 h$

مکعب سینٹی میٹر 25.12=معکب سینٹی میٹر $\left[\frac{2}{3} \times 3.14 \times (2)^3 + \frac{1}{3} \times 3.14 \times (2)^2 \times 2\right] =$

اب مان لیجئے قائم دائری استوانہ EFGH دیئے ہوئے ٹھوس کو محصور کرتا ہے۔تو قائم داری استوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر ہے۔

سینٹی میٹر 2=HP = BO= اور اس کی اونچائی ہے۔

سینٹی میٹر 4 = سینٹی میٹر $EH+AD+OP = (2+2)$

اس لئے کھلونہ کا حجم۔ قائم دائری کا استوانہ کا حجم = مطلوبہ حجم ہے

مکعب سینٹی میٹر 25.12 = مکعب سینٹی میٹر $(3.14 \times 2^2 \times 4 - 25.12) -$

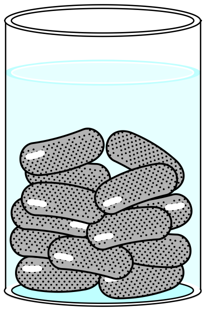
اس طرح سے مطلوبہ حجموں میں فرق مکعب سینٹی میٹر = 25.12

مشق 13.2

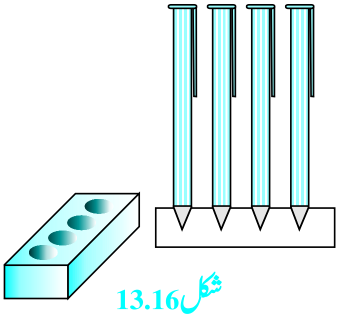
جب تک کچھ اور نہ کہا جائے $\pi = \frac{22}{7}$

1۔ ایک ٹھوس ایسے مخروط کی شکل کا ہے جو نصف کرہ پر کھڑا ہے۔دونوں کے نصف قطر 1 سینٹی میٹر کے برابر ہے۔اور مخروط کی اونچائی اس کے نصف قطر کے برابر ہے۔ π کی شکل میں ٹھوس کا حجم معلوم کیجئے۔

2۔ انجینئرنگ کے ایک طالب علم راحیل سے ایک ایسا ماڈل بنانے کو کہا گیا جو استوانہ کی شکل کا ہے جس کے دونوں سروں پر المونیم کی پتلی شیٹ کے مخروط جڑے ہوتے ہیں۔اس ماڈل کا قطر 3 سینٹی میٹر اور لمبائی 12 سینٹی میٹر ہے۔اگر ہر ایک مخروط کی اونچائی 2 سینٹی میٹر ہے۔تو راحیل کے ذریعے بنے اس ماڈل میں ہوا کا حجم معلوم کیجئے (یہ مانتے ہوئے کہ ماڈل کی اندرونی اور باہری ابعاد تقریباً یکساں ہیں)۔



شکل 13.15



شکل 13.16

3۔ ایک گلاب جامن میں اس کے حجم کا 30% چینی کا شیرہ ہوتا ہے۔ معلوم کیجئے کہ 45 گلاب جامن میں تقریباً کتنا شیرہ ہوگا۔ جب کہ اس میں ہر ایک کی شکل ایک استوانہ جن کے سرے نصف کرہ شکل کے ہیں، کی شکل کی جس کی لمبائی 5 سینٹی میٹر اور قطر 2.8 سینٹی میٹر شکل لکڑی کا 3.15 دیکھئے)۔

4۔ ایک لکڑی کا پین اسٹینڈ کعب نما کی شکل کا ہے جس میں مخروطی شکل کے 4 خول ہیں جو پینوں کی گرفت کرتے ہیں۔ کعب نما کے ابعاد سینٹی میٹر 15× سینٹی میٹر 15× سینٹی میٹر 3.5 ہیں اور ہر ایک خول (سوراخ) کا نصف قطر 0.5 سینٹی میٹر اور گہرائی 1.4 سینٹی میٹر ہے۔ پورے اسٹینڈ میں لگی ہوئی لکڑی کا حجم معلوم کیجئے۔ (شکل 13.16 دیکھئے)۔

5۔ ایک برتن الٹے مخروط کی طرح ہے۔ اس کی اونچائی 8 سینٹی میٹر اور اوپر Top کا نصف قطر، جو کھلا ہوا ہے، 5 سینٹی میٹر ہے۔ یہ کنارے تک پانی سے بھرا ہوا ہے۔ جب سیسہ کی گولیاں جو کرہ کی شکل کی ہیں جس میں ہر ایک کا نصف قطر 0.5 سینٹی میٹر ہے۔ برتن میں ڈالی جاتی ہیں تو ایک چوتھائی پانی بہہ جاتا ہے۔ اس میں ڈالی گئی سیسہ کی گولیوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

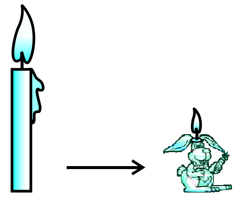
6۔ ایک ٹھوس لوہے کا کھمبا 20 سینٹی میٹر اونچائی تک ایک استوانہ کی شکل کا ہے جس قاعدہ r کا قطر 24 سینٹی میٹر ہے۔ اس کے اوپر ایک اور استوانہ رکھا ہوا ہے جس کی اونچائی 60 سینٹی میٹر اور نصف قطر 8 سینٹی میٹر ہے۔ کھمبے کی کمیت معلوم کیجئے۔ اگر مکعب سینٹی میٹر 1 لوہے کی تقریباً کمیت 8 گرام ہے۔ ($\pi=3.14$ لیجئے)

7۔ ایک ٹھوس جس میں 120 سینٹی میٹر اونچائی کا ایک قائم دائری مخروط ہے جس کا نصف قطر 60 سینٹی میٹر ہے جو 60 سینٹی میٹر نصف قطر والے ایک کرہ پر کھڑا ہے۔ کو قائم زاویہ پر ایک قام دائری استوانہ، جو پانی سے بھرا ہوا، میں اس طرح رکھا جاتا ہے کہ یہ اس کے نچلے حصہ کو چھوتا ہے۔ استوانہ میں باقی بچے پانی کا حجم معلوم کیجئے۔ اگر استوانہ کا نصف قطر 60 سینٹی میٹر اور اونچائی 180 سینٹی میٹر ہو۔

8۔ ایک کروی شیشے کے برتن کی گردن استوانہ کی شکل کی ہے۔ جس لمبائی 8 سینٹی میٹر اور قطر 2 سینٹی میٹر ہے۔ کروی حصہ کا قطر 8.5 سینٹی میٹر ہے۔ اس میں جتنا پانی آ سکتا اس کی پیائش کر کے ایک بچہ اس کا حجم 345 مکعب سینٹی میٹر بتاتا ہے جانچ کیجئے

کہ آیا وہ بچّہ سچ بول رہا ہے۔ اوپر کی پیمائش برتن کے اندر کی لی جائے۔ (π=3.14)

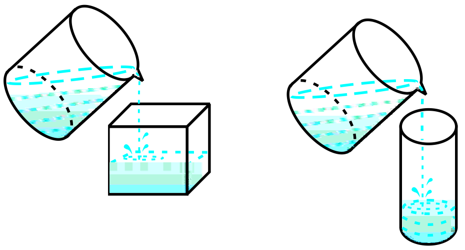
13.4 ٹھوس اشیاء کا ایک شکل سے دوسری شکل میں تبدیل ہونا



شکل 13.17

ہمیں یقین ہے کہ آپ نے موم بتّی ضرور دیکھی ہوگی۔ عمومی طور پر استوانہ کی شکل کی ہوتی ہیں۔ آپ نے یہ بھی دیکھا ہوگا کہ موم بتیاں جانور کی شکل کی بھی ہوتی ہیں۔ (13.17 دیکھئے)

یہ کس طرح بنائی جاتی ہیں؟ اگر آپ کو کسی شکل کی موم بتی چاہئے تو آپ موم کو کسی دھات کے برتن میں گرم کیجئے۔ جب تک کہ یہ پوری پوری طرح سے سیال نہ بن جائے۔ پھر آپ اس کو اس برتن میں ڈال دیں جس کی شکل ویسی ہو جیسی آپ موم بتی بنانا چاہتے ہیں۔ مثال کے طور پر: ٹھوس استوانہ کی شکل کی ایک موم بتّی لیجئے، اس کو پگھلائیے اور پگھلے ہوئے موم کو ایک خرگوش کی شکل والے سانچے میں ڈال دیں ٹھنڈا کرنے پر آپ کو خرگوش کی شکل میں ایک موم بتّی ملے گی۔ نئی موم بتّی کا حجم وہی ہوگا جو پہلی موم بتّی کا تھا۔ یہی بات ہے جو ہمیں یاد رکھنا ہے جب ہم کسی شے کو دوسرے شکل کی شے میں تبدیل کرتے ہیں۔



شکل 13.18

یا جب کسی سیال کو جو کسی خاص شکل کے برتن میں سے اس کو دوسری شکل والے برتن میں ڈالا جاتا ہے۔ جیسے آپ شکل 13.18 میں دیکھ سکتے ہیں جس پر بحث کی گئی اس کو سمجھنے کے لئے آیئے کچھ مثالیں حل کرتے ہیں۔

مثال 8: ایک مخروط جس کی اونچائی 24 سینٹی میٹر ہے اور قاعدہ کا نصف قطر 6 سینٹی میٹر چکنی مٹّی سے بنا ہے۔ ایک بچّہ اس کو ایک کرہ کی شکل دے دیتا ہے: کرہ کا نصف قطر معلوم کیجئے۔

حل: مخروط کا حجم = $\frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$ مکعب سینٹی میٹر

اگر کرہ کا نصف قطر r ہے تب اس کا حجم = $\frac{4}{3}\pi r^3$

کیونکہ مٹّی کا حجم مخروط اور کرہ کی شکل میں یکساں رہتا ہے اس لئے ہمارے پاس ہے

$$\frac{4}{3}\times\pi\times r^3=\frac{1}{3}\times\pi\times6\times6\times24$$

$$r^3 \quad 3\times3\times24 \quad 3^3\times2^3$$

$$r=3\times2=6$$

اس لئے کرہ کا نصف قطر ہے 6 سینٹی میٹر

مثال 9: سیلوی کے گھر پر استوانہ کی شکل کا ایک ٹینک ہے۔ اس کو ایک Sump (زیر زمین ٹینک) جس کی شکل کعب نما کی ہے، میں پانی پمپ کر کے بھرا جاتا ہے۔ جو Sump کی ابعاد سینٹی میٹر 95×1.44 میٹر ×1.57 میٹر ہیں۔ اوپر والے ٹینک کا نصف قطر 60 سینٹی میٹر اور اونچائی 95 سینٹی میٹر ہے۔ Sump میں بچے ہوئے پانی کی اونچائی کتنی ہوگی اگر اوپر والا ٹینک پوری طرح پھر گیا ہو اور Sump پہلے کنارے تک بھرا ہوا تھا۔ ٹینک کی اور Sump کی گنجائش کا موازنہ بھی کیجئے۔

حل: اوپر رکھے ہوئے ٹینک کے پانی کا حجم برابر ہے Sump میں سے نکالے گئے پانی کے حجم کے برابر

اب اوپر رکھے ہوئے ٹینک میں پانی کا حجم (استوانہ کا حجم) = $\pi r^2 h$

مکعب میٹر $=3.14\times0.6\times0.6\times0.95$

مکعب میٹر $=1.57\times1.44\times0.95$ = $l\times b\times h$ = Sump جب پوری طرح بھرا ہوا تھا تو اس کا حجم تھا

اوپر والے ٹینک کو بھرنے کے بعد Sump میں باقی بچے پانی کا حجم

مکعب میٹر $(1.57\times0.6\times0.6\times0.95\times2) = [(1.57\times1.44\times0.95)-(3.14\times0.6\times0.6\times0.95)]\ m^3=$

Sump میں باقی بچے پانی کا حجم = اس لئے Sump میں باقی بچے پانی کی اونچائی ہے

$$l\times b$$

میٹر $=\dfrac{1.57\times0.6\times0.6\times0.95\times2}{1.57\times1.44}$

سینٹی میٹر $=0.475\ m=47.5$

$$\frac{\text{ٹینک کی گنجائش}}{\text{Sump کی گنجائش}}=\frac{3.14\times0.6\times0.6\times0.95}{1.57\times1.44\times0.95}=\frac{1}{2}$$

اس لئے ٹینک کی گنجائش، Sump کی گنجائش کی آدھی ہے۔

مثال 10: 1 سینٹی میٹر قطر والی تانبہ کی ایک چھڑ کی لمبائی 8 سینٹی میٹر ہے۔ اس کو پگھلا کر یکساں موٹائی کا ایک 18 سینٹی میٹر لمبا

تار بنایا گیا۔ تار کی موٹائی معلوم کیجئے۔

حل: مکعب میٹر $\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2 = \pi$ مکعب میٹر = چھڑ کا حجم

سینٹی میٹر 1800 = سینٹی میٹر 18 = اسی حجم کے تار کی نئی لمبائی

اگر r، تار کے ترچھی کاٹ کا نصف قطر ہے تب اس کا حجم مکعب سینٹی میٹر $\pi\times r^2\times 1800$

اس لئے $\pi r^2\times 1800 = 2\pi$

یعنی $r^2 = \frac{1}{900}$ ، $r = \frac{1}{30}$

اس لئے تار کے ترچھی کاٹ کا نصف قطر ہے تب اس کا حجم ہے۔ $\frac{1}{15}$ یعنی 0.67 سینٹی میٹر تقریباً۔

مثال 11: ایک نصف کروی ٹینک جو پانی سے بھرا ہوا ہے اس کو ایک پائپ سے $3\frac{4}{7}$ لیٹر فی سیکنڈ کی شرح سے خالی کیا جاتا ہے۔ آدھے ٹینک کو خالی کرنے میں اس کو کتنا وقت لگے گا اگر اس کا قطر 3 میٹر کا ہے۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجئے)

حل: نصف کروی ٹینک کا نصف قطر $= \frac{3}{2}m$

مکعب میٹر $\frac{99}{14}$ = مکعب میٹر $\frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times\left(\frac{3}{2}\right)^3$ = ٹینک کا حجم

اس لئے لیٹر $1000 \times \frac{99}{28}$ = مکعب میٹر $\frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times\left(\frac{3}{2}\right)^3$ = خالی کئے جواپنے پانی کا حجم

لیٹر $\frac{99000}{28}$ = کیونکہ $\frac{25}{7} = \pi$ لیٹر پانی ایک سیکنڈ میں خالی ہوتا ہے، اس لئے $\frac{99000}{28}$ لیٹر پانی خالی ہوگا

$\frac{7}{25}\times\frac{99000}{28}$ سیکنڈ یعنی 16.5 منٹ میں

مشق 13.3

($\pi = \frac{22}{7}$ لیجئے جب تک کے کچھ اور نہ کہا جائے)۔

1۔ دھات کے ایک کرہ کا نصف قطر 4.2 سینٹی میٹر ہے۔ اس کو پگھلا کر 6 سینٹی میٹر نصف قطر کا ایک استوانہ دوبارہ ڈھالا گیا استوانہ کی اونچائی معلوم کیجئے۔

2۔ 6 سینٹی میٹر ,8 سینٹی میٹر اور 10 سینٹی میٹر نصف قطر والے تین دھات کے کروں کو پگھلا کر ایک ٹھوس کرہ بنایا گیا۔ نتیجہ میں ملے کرہ کا نصف قطر معلوم کیجئے۔

3۔ 20 میٹر گہرے ایک کنویں کو، جس کا قطر 7 میٹر ہے کھودا گیا۔ اس میں سے نکلی مٹّی کو اس کے چاروں طرف پھیلا کر 14 میٹر×22 میٹر کا ایک پلیٹ فارم بنایا گیا۔ پلیٹ فارم کی اونچائی معلوم کیجئے۔

4۔ ایک کنواں جس کا قطر 3 میٹر ہے۔ 14 میٹر کی گہرائی تک کھودا گیا۔ اس کے اندر سے نکلی مٹی کو اس کے چاروں طرف پھیلا کر 14 میٹر اونچی گول مینڈ بنائی گئی مینڈ کی اونچائی معلوم کیجئے۔

5۔ ایک قائم دائری استوانہ کی شکل کے ایک مضروف کا قطر 12 سینٹی میٹر اور اونچائی 15 سینٹی میٹر ہے۔ آئس کریم سے بھرا ہوا ہے، آئس کریم کو 12 سینٹی میٹر اونچائی اور 6 سینٹی میٹر قطر والے مخروط جن کا اوپر حصہ نصف کرہ کی شکل کا ہے۔ اس میں بھرا جاتا ہے۔ ایسے مخروط کی تعداد بتائیے جو آئس کریم سے بھرے ہوئے ہوں۔

6۔ 1.75 سینٹی میٹر قطر اور 2 ملی میٹر موٹائی والے چاندی کے کتنے سکّوں کو پگھلا کر سینٹی میٹر 3.5× سینٹی میٹر 10×15.5 ابعاد والے کعب نما کو بنایا جا سکتا ہے۔

7۔ ایک استوانہ نما بالٹی جس کی اونچائی 32 سینٹی میٹر اور قاعدہ کا نصف قطر 18 سینٹی میٹر ہے۔ ریت سے بھری ہوئی ہے۔ اس بالٹی کو ریت کو زمین پر ڈال کر ایک مخروطی ڈھیر بنا دیا جاتا ہے۔ اگر مخروطی ڈھیر کی اونچائی 24 سینٹی میٹر ہے تو ڈھیر کا نصف قطر اور ترچھی اونچائی معلوم کیجئے۔

8۔ 6 میٹر چوڑائی اور 1.5 میٹر گہری ایک کینال میں پانی 10 کلو میٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے بہہ رہا ہے۔ 30 منٹ میں یہ کتنے رقبہ کی سینچائی کرے گا اگر اس کے لئے 8 سینٹی میٹر اونچائی تک پانی ہونا ضروری ہو۔

9۔ ایک کسان، ایک پائپ، جس کا اندرونی قطر 20 سینٹی میٹر ہے، کو نہر اور ایک استوانہ شکل کے ٹینک، جو اس کے کھیت میں ہے، سے منسلک کر دیتا ہے، ٹینک کا قطر 10 میٹر اور گہرائی 2 میٹر ہے۔ اگر پانی پائپ سے 3 کلو میٹر فی گھنٹہ کی شرح سے بہتا ہے تو وہ ٹینک کو کتنے وقت میں پورا بھرے گا۔

13.5 مخروط کا فرسٹم

سیکشن 13.2 میں ہم نے ایسی اشیا کہ مشاہدہ کیا تھا جو دو بنیادی ٹھوسوں سے مل کر وجود میں آئی تھیں آیئے اب کچھ مختلف کرتے ہیں۔ ہم ایک قائم دائری مخروط لیتے ہیں اور اس کا ایک حصہ اس سے الگ کر دیتے ہیں بہت سے طریقوں سے